1) Derivadas de funciones polinómicas

Explicación corta pero completa:
Las funciones polinómicas son las más comunes en problemas introductorios. Sus derivadas se obtienen aplicando la regla $\frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1}$. En la vida real sirven para velocidad (derivada de posición), optimización (máximos y mínimos de ganancias o costos) y análisis local de curvas (crecimiento/ decrecimiento).

Problema 1 — Velocidad instantánea

Función: $s(t) = 4t^2 + 2t$. Hallar $v(t) = s'(t)$y $v(3)$.

1. $s(t) = 4t^2 + 2t$.
2. Derivamos término a término:
$$s'(t) = \frac{d}{dt}(4t^2) + \frac{d}{dt}(2t).$$
3. Aplicando la regla ax^n:
$$\frac{d}{dt}(4t^2) = 4 \cdot 2t^1 = 8t.$$
$$\frac{d}{dt}(2t) = 2.$$
4. Entonces $v(t) = 8t + 2$.
5. Evaluar en $t = 3$: $v(3) = 8 \cdot 3 + 2$.
6. Calculo: $8 \cdot 3 = 24$.
7. $v(3) = 24 + 2 = 26$.

Respuesta: $v(t) = 8t + 2$. En $t = 3$, $v(3) = 26$(unidades por tiempo).

Problema 2 (polinómicas) — Máximo de una función cuadrática (optimización)

Función (ganancia/profit): $P(x) = -2x^2 + 40x - 150$.Encontrar $x$que maximiza Py el valor máximo.

1. $P(x) = -2x^2 + 40x - 150$.
2. Derivada: $P'(x) = -2 \cdot 2x + 40 = -4x + 40$.
3. Buscar extremos: resolver $P'(x) = 0$.
$$-4x + 40 = 0.$$
4. Despejar: $-4x = -40 \Rightarrow x = 10$.
5. Segunda derivada para clasificar: $P''(x) = -4$.
6. Como $P''(10) = -4 < 0$Es un máximo.
7. Valor máximo: $P(10) = -2(10)^2 + 40(10) - 150$.
8. Calcular: $(10)^2 = 100$.→ $-2 \cdot 100 = -200$.
$$40 \cdot 10 = 400.$$
Entonces $P(10) = -200 + 400 - 150$.
9. $-200 + 400 = 200$.→ $200 - 150 = 50$.

Respuesta: El máximo ocurre en $x = 10$y el valor máximo es $P(10) = 50$.

2) Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Explicación corta pero completa:
Para funciones $f(t) = Ae^{kt}$, la derivada es $f'(t) = Ake^{kt} = kf(t)$(crecimiento/decaimiento proporcional). En finanzas y biología modelan crecimiento poblacional, interés compuesto, decadencia radiactiva, etc. Para $f(x) = \ln\ x$, $f'(x) = 1/x$.

Problema 1 — Crecimiento poblacional

$P(t) = 200e^{0.3t}$.Hallar $P'(t)$y $P'(5)$(tasa de crecimiento en $t = 5$).

1. $P(t) = 200e^{0.3t}$.
2. Regla: $\frac{d}{dt}e^{at} = ae^{at}$.
3. Entonces $P'(t) = 200 \cdot 0.3\ e^{0.3t}$.
4. Simplificar: $200 \cdot 0.3 = 60$.
$$\Rightarrow P'(t) = 60e^{0.3t}.$$
5. Evaluar en $t = 5$: $P'(5) = 60e^{0.3\cdot 5} = 60e^{1.5}$.
6. $e^{1.5} \approx 4.4816890703380645$.
7. Multiplicar: $60 \cdot 4.48168907 \approx 268.9013442$.

Respuesta: $P'(t) = 60e^{0.3t}$. En $t = 5$, $P'(5) \approx 268.90$(indica que la población crece a ≈ 268.90 individuos por unidad de tiempo en ese instante).

Problema 2 (Exponenciales/logarítmicas)— Decaimiento radiactivo (constante con vida media)

Actividad: $A(t) = A_0 e^{-kt}$. Sea $A_0 = 1000$y vida media $T_{1/2} = 5$años. Hallar $A'(t)$y $A'(2)$.

1. Para decaimiento: $k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5}$.
2. Calcular k: $\ln\ 2 \approx 0.6931471805599453$.→ $k \approx 0.69314718/5 \approx 0.13862943611198905$.
3. $A(t) = 1000e^{-kt}$.
4. Derivada: $A'(t) = 1000 \cdot (-k)e^{-kt} = -k \cdot A(t)$.
5. Evaluar en $t = 2$: primero $A(2) = 1000e^{-k\cdot 2}$.
   $e^{-k\cdot 2} = e^{-0.2772588722239781} \approx 0.7578582832551991$.
   $A(2) \approx 1000 \cdot 0.7578582832551991 = 757.8582832551991$.
6. Entonces $A'(2) = -k \cdot A(2) \approx -0.13862943611198905 \cdot 757.8582832551991$.
7. Multiplicar: $A'(2) \approx -105.06146646046832$.

Respuesta: $A'(t) = -kA(t)$. Con los datos, $A'(2) \approx -105.06$(unidades de actividad por año — la actividad disminuye a ≈105.06 por año en t=2).

3) Derivadas trigonométricas

Explicación corta pero completa:
Reglas básicas: $(\sin\ x)' = \cos\ x$, $(\cos\ x)' = -\sin\ x$, $(\tan\ x)' = \sec^2 x$. Se usan para analizar señales (audio, radio), vibraciones, movimiento armónico y circuitos. En problemas de ingeniería se derivan funciones sinusoidales para obtener velocidad/flujo instantáneo o pendientes de onda.

Problema 1 — Derivada de una señal

$V(t) = 5\sin(60t)$. Hallar $V'(t)$y $V'(0.01)$.

1. $V(t) = 5\sin(60t)$.
2. Aplicar regla de la cadena: $\frac{d}{dt}\sin(60t) = 60\cos(60t)$.
3. Entonces $V'(t) = 5 \cdot 60\cos(60t) = 300\cos(60t)$.
4. Evaluar en $t = 0.01$: $60t = 60 \cdot 0.01 = 0.6$rad.
5. $\cos(0.6) \approx 0.8253356149096783$.
6. $V'(0.01) = 300 \cdot 0.8253356149 \approx 247.6006844729035$.

Respuesta: $V'(t) = 300\cos(60t)$. En $t = 0.01$, $V'(0.01) \approx 247.60$.

Problema 2 (Derivadas trigonométricas) — Movimiento armónico (velocidad instantánea)

$x(t) = 2\cos(3t)$. Hallar $x'(t)$y $x'(\frac{\pi}{6})$.

1. $x(t) = 2\cos(3t)$.
2. Derivada: $\frac{d}{dt}\cos(3t) = -3\sin(3t)$.
3. Entonces $x'(t) = 2 \cdot (-3)\sin(3t) = -6\sin(3t)$.
4. Evaluar en $t = \frac{\pi}{6}$: $3t = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.
5. $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
6. $x'(\frac{\pi}{6}) = -6 \cdot 1 = -6$.

Respuesta: $x'(t) = -6\sin(3t)$. En $t = \pi/6$, la velocidad es -6(unidad por tiempo).

4) Derivadas implícitas

Explicación corta pero completa:
Se usan cuando la relación entre xy $y$no está despejada como $y = f(x)$sino en forma $F(x, y) = 0$(ej.: círculos, elipses). Diferencias: derivas ambos lados respecto a x, aplicando la regla de la cadena cuando aparece $y(\frac{d}{dx} y = y')$. Resultado: se despeja y'.

Problema 1 — Círculo

Ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$con $r = 5$. Hallar $\frac{dy}{dx}$y su valor en el punto $(3,4)$.

1. $x^2 + y^2 = 25$.
2. Derivar ambos lados respecto a x: $\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$.
3. $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.
   $\frac{d}{dx}(y^2) = 2y \cdot y'$(regla de la cadena).
   $$\frac{d}{dx}(25) = 0.$$
4. Entonces $2x + 2y\,y' = 0$.
5. Despejar y': $2y\,y' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.
6. Evaluar en $(3,4)$: $y' = -\frac{3}{4} = -0.75$.

Respuesta: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. En $(3,4)$, $\frac{dy}{dx} = -0.75$.

Problema 2 (implícitas)— Elipse

Ecuación: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.Hallar y'y su valor cuando $x=2$(tomando $y>0$).

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
2. Derivar término a término: $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{16})+\frac{d}{dx}(\frac{y^2}{9})=0$.
3. $\frac{d}{dx}(\frac{x^2}{16})=\frac{2x}{16}=\frac{x}{8}$.
$$\frac{d}{dx}(\frac{y^2}{9})=\frac{2y}{9}y'.$$
4. Entonces $\frac{x}{8}+\frac{2y}{9}y'=0$.
5. Despejar y': $\frac{2y}{9}y'=-\frac{x}{8}\Rightarrow y'=-\frac{x}{8}\cdot\frac{9}{2y}=-\frac{9x}{16y}$.
6. Cuando $x=2$, obtener $y$de la elipse: $\frac{2^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.
7. $\frac{4}{16}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow\frac{y^2}{9}=1-\frac{4}{16}=1-0.25=0.75$.
8. Entonces $y^2=9\cdot 0.75=6.75$.
$y=\sqrt{6.75}\approx 2.598076211353316$.(tomamos la rama positiva)
9. Sustituir en $y'=-\frac{9x}{16y}$:
$$y'=-\frac{9\cdot 2}{16\cdot 2.598076211353316}.$$
10. Calcular numerador: $9\cdot 2=18$.
Denominador: $16\cdot 2.598076211353316\approx 41.569219381653056$.
11. División: $y'\approx-\frac{18}{41.569219381653056}\approx-0.4330127018922193$.

Respuesta: $y'=-\frac{9x}{16y}$. En $x=2$(con $y>0$), $y'\approx-0.4330$.

5) Derivadas de orden superior (segunda, tercera, ...)

Explicación corta pero completa:
La segunda derivada suele interpretarse como "curvatura" o "aceleración" (en física, $s''(t) = a(t)$). La tercera derivada aparece en modelos de cambios bruscos (jerk en física). Son fundamentales para análisis de estabilidad y para estudiar concavidad y puntos de inflexión.

Problema 1 — Posición → velocidad → aceleración

Posición: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Hallar $s'(t)$y $s''(t)$. Evaluar ambos en $t = 2$.

1. $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$.
2. Primera derivada: $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.
   (porque $\frac{d}{dt}t^3 = 3t^2,\ \frac{d}{dt}(-6t^2) = -12t,\ \frac{d}{dt}(9t) = 9$).
3. Segunda derivada: $s''(t) = 6t - 12$.
   (derivar $3t^2 - 12t + 9$).
4. Evaluar en $t = 2$:
   $$s'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9.$$
5. Calcular: $(2)^2 = 4.$→ $3 \cdot 4 = 12.$
   $$-12 \cdot 2 = -24.$$
   $$12 - 24 + 9 = -3.$$
   $$\Rightarrow s'(2) = -3.$$
6. $s''(2) = 6(2) - 12 = 12 - 12 = 0.$

Respuesta: $s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $s''(t) = 6t - 12$. En $t = 2$: $s'(2) = -3$, $s''(2) = 0$.

Problema 2 (orden superior) — Movimiento armónico: derivadas sucesivas

$y(t) = A\cos(\omega t)$. Tomar $A = 0.5$, $\omega = 4$. Hallar $y(t), y'(t), y''(t)$y evaluarlas en $t = 0.1$.

1. $y(t) = 0.5\cos(4t)$.
2. Derivar: $y'(t) = 0.5 \cdot (-4)\sin(4t) = -2\sin(4t)$.
3. Segunda derivada: $y''(t) = -2 \cdot 4\cos(4t) = -8\cos(4t)$.
   (alternativamente usar $y''(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t) = -16 \cdot 0.5\cos(4t) = -8\cos(4t)$).
4. Evaluar en $t = 0.1$: calcular $4t = 0.4$rad.
5. $y(0.1) = 0.5\cos(0.4)$.
   $\cos(0.4) \approx 0.9210609940028851$.
   $y(0.1) \approx 0.5 \cdot 0.9210609940 \approx 0.46053049700144255$.
6. $y'(0.1) = -2\sin(0.4)$.
   $\sin(0.4) \approx 0.3894183423086505$.
   $y'(0.1) \approx -2 \cdot 0.3894183423 \approx -0.778836684617301$.
7. $y''(0.1) = -8\cos(0.4) \approx -8 \cdot 0.9210609940 \approx -7.368487952023081$.

Respuesta:
$y(t) = 0.5\cos(4t)$, $y'(t) = -2\sin(4t)$, $y''(t) = -8\cos(4t)$.
En $t = 0.1$: $y \approx 0.46053$, $y' \approx -0.77884$, $y'' \approx -7.36849$.