

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 8.
ОБЧИСЛЕННЯ МІРИ ТА КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. ТЕОРІЯ

А. Для обмеженої множини A наближено обчислити міру можна, порахувавши міру множини $A^{(n)}$ чи $A_{(n)}$ при достатньо великих n . Оскільки входження відповідних брусів у множину перевірити складно, на практиці достатньо перевіряти входження (або перетин з множиною) центра бруса та його кутів (всього 5 точок). Різниця мір

$$E = m(A^{(n)}) - m(A_{(n)})$$

слугує помилкою обчислення.

Для перебору бруси слід обирати всередині деякого великого бруса, що напевно містить множину. Нагадаємо, що маленькі бруси мають вигляд $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \times [\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}] \times \dots$

Інтеграл від заданої функції може бути наближено замінений на інтегральну суму

$$\int_A f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \approx \sum_{Q \subset A_{(n)}} f(\xi_Q) m(Q),$$

де сума береться по всіх брусах розбиття порядку n , ξ_Q – деякі точки всередині брусів (можна обирати центри).

Помилкою обчислення слугує величина

$$E = (m(A^{(n)}) - m(A_{(n)})) * \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Б. Іншим ефективним методом знаходження мір множин та інтегралів є метод Монте-Карло. Для цього треба у великому брусі Q_0 , що містить множину A , випадково обрати n точок і обрати точки z_1, \dots, z_k , що лежать всередині A . Тоді наближено

$$m(A) \approx \frac{k}{n} m(Q_0)$$

та

$$\int_A f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m \approx \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} m(A).$$

ЗАВДАННЯ

1. Обома методами обчислити міри множин

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$$

та

$$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + x_2 \leq x_3 \leq 2x_2 + 3x_3\}.$$

В першому методі обрати $n = 4, 6, 8$, в другому $n = 100, 1000, 10000$. В першому методі також обчислити помилку E .

2. Обома методами обчислити інтеграл $\int_A \sin(e^{x_1-x_2}) dx_1 dx_2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}$. В першому методі обрати $n = 4, 6, 8$, в другому $n = 100, 1000, 10000$. В першому методі також обчислити помилку E .

3*. Наближено обчислити міру кулі $\{(x_1, \dots, x_m) \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq 0.25\}$, вписаної у брус зі сторонами 1. Обчислення виконати першим методом при $n = 4$ та другим при $n = 10000$. Взяти послідовно $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Порівняти результати.