ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3.
НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛА ТА ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА

1. ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА

Нехай $f \in C^1(A),\ A \subset \mathbf{R}^m$ – відкрита. Тоді функція f диференційовна в усіх точках множини A. Внаслідок означення диференціала

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

де $x_0 \in A,\ x \in A,$, точка x близька до x_0.

Зауваження 1. Похідна – це вектор, тому другий доданок справа – це скалярний добуток.

2. Права частина наближеної рівності при $m = 2$ – це рівняння дотичної площини в точці x_0.

Оцінка точності цієї формули випливає з узагальнення теореми Лагранжа:

$$||f(x) - f(x_0)|| \leq \max_{t \in [x_0, x]} ||f(t) - f(x_0)|| \times ||x - x_0||,$$

де $||x||$ – норма (довжина) вектора x.

2. ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА

Нехай $f \in C^{n+1}(A),\ A \subset \mathbf{R}^m$ – відкрита. Тоді функція f $n+1$ раз диференційовна в усіх точках множини A. За формулою Тейлора

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n,$$

де

$$r_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ c \in A.$$

Зауваження. Похідні – це багатовимірні матриці, обчислення відповідних доданків здійснюється за формулами

$$f'(x)a = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) a_k,$$

$$f''(x)a^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x) a_k a_l,$$

$$f'''(x)a^3 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_l \partial x_n}(x) a_k a_l a_n,$$

і т. д.

ЗАВДАННЯ

1. За допомогою диференціала наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2) = x_1^5 \ln(1 + x_2)$$

в точках $(1.5, 0.7), (1.05, 0.07), (1.005, 0.007)$ і порахувати відхилення від точного значення в кожному випадку. Обрати $x_0 = (1, 0)$.

2. За допомогою диференціала наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$$

в точці $(0.1, 0.05, -0.01)$. Знайти окіл початку координат, де помилка обчислення за допомогою диференціала не перевищує 0.1.

3. Знайти рівняння дотичної площини в точці $(1, 1)$ функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$. Зобразити результат. (Наприклад, в редакторі gnuplot можна написати: $splot[1:2][3:7]x_1^2 + x_2^4, x_1 + x_2$ для зображення двох поверхонь з відповідними межами для змінних).

4. За допомогою формули Тейлора при $n = 1$ та $n = 2$ наближено обчислити значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 1)\sin(x_1 + x_2)$$

в точці $(0.1, 0.05)$. Порівняти результати з точними.

5*. За допомогою формули Тейлора при $n = 4$ наблизити функцію

$$f(x_1, x_2) = \mathrm{arctg}(x_1^3 - \sin(x_2) + 1)$$

в околі початку координат поверхнею четвертого порядку. Похідні порахувати за допомогою наближених формул. Зобразити результат.