

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ЗАСТОСУВАННЯ МІНІМІЗАЦІЇ

1. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ МНОГОЧЛЕНОМ

Наблизимо неперервну функцію f на відрізку $[a, b]$ многочленом $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$. Для цього розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин ($m < n$) точками $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Сума квадратів відхилень у цих точках – це функція

$$F(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) - P(x_i))^2.$$

Праву частину можна розглядати, як квадрат довжини вектора

$$(a_0 + a_1x_0 + \dots + a_mx_0^m - f(x_0), a_0 + a_1x_1 + \dots + a_mx_1^m - f(x_1), \dots, a_0 + a_1x_n + \dots + a_mx_n^m - f(x_n))^T = Aa - b,$$

де

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_m)^T, \quad b = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))^T,$$

A – матриця, в якій на місці з індексами i, j стоїть x_i^j . Отже,

$$F(a) = (Aa - b)^2 = (Aa - b, Aa - b) = (A^T Aa) - 2(a, A^T b) + (b, b).$$

Звідси

$$F'(a) = 2A^T Aa - 2A^T b, \quad F''(a) = 2A^T A.$$

Остання матриця додатно визначена. Тому розв'язок системи

$$A^T Aa = A^T b$$

дасть локальний (і глобальний) мінімум.

2. ПОЛОЖЕННЯ РОБОТА

Розглянемо спрощену задачу визначення положення робота в просторі. Вважатимемо, що робот їздить по підлозі в кімнаті в напрямках вправо-вліво і вперед-назад (без поворотів). Він орієнтується в просторі за допомогою відеокамери, на зображенні з якої він розпізнає світильники на стелі, що розташовані в точках $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Своє положення відносно i -го світильника робот визначив, як (dx_i, dy_i) (при всіх i). Ці спостереження зроблено з помилками. Визначити найбільш ймовірне положення робота.

Якби спостереження щодо i -го світильника були точні, то робот знаходився б у точці $(x_i - dx_i, y_i - dy_i)$. Нехай насправді він знаходиться у точці (x, y) . Сума квадратів помилок є

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n ((x - x_i + dx_i)^2 + (y - y_i + dy_i)^2).$$

Мінімізуючи цю функцію, можна знайти шукане положення.

ЗАДАЧІ

1. Наблизити функції $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ та $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ многочленами у випадках: а) $m = 2, n = 2$ б) $m = 20, n = 30$.
2. Згенерувати випадково положення робота та положення світильників у кімнаті 4х5 метрів, згенерувати випадкові помилки вимірювань з проміжку $[-0.05, 0.05]$ по кожній координаті. Розв'язати задачу знаходження положення робота і порівняти зі згенерованим значенням.
- 3*. Сформулювати і розв'язати задачу про положення робота, якщо він може повертатися (в площині підлоги).