ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1.
ДЕЯКІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1.1 Аналітичне диференціювання : окрема функція для похідної.
Переваги: точність.
Недоліки: вираз для похідної може бути значно складніший за функцію.
1.2 З означення похідної

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

випливає, що при малих за модулем $\triangle x$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Переваги: можна використати значення функції в точці, якщо воно відоме.
Недоліки: точність.
1.3 Симетричне наближення:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0 - \triangle x)}{2\triangle x}.$$

Переваги: Більша точність для достатньо гладких функцій.
Недоліки: не можна використати значення функції в точці, якщо воно відоме.

Оцінка точності за допомогою формули Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, c \in [x_0, x](c \in [x, x_0]).$$

Зокрема, перші доданки мають вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$$

Для симетричної формули при $n = 2$:

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0 - \triangle x)}{2\triangle x} = f'(x_0) + \frac{1}{12}(f'''(c_1) - f'''(c_2))\triangle x^2.$$

Порядок помилки: $\triangle x^2$.
Для несиметричної формули при $n = 1$:

$$\frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(c)\triangle x.$$

Порядок помилки: $\triangle x$.

Приклад: для функції

$$f(x) = x + \sin^4 x + \cos x$$

в точці 0 наближено порахувати похідну.

```
def F(x):
  return x + math.sin(x) ** 4 + math.cos(x)

def DER(x):
  return 1 + 4 * math.cos(x) * (math.sin(x) ** 3) - math.sin(x)

FILE = open("res.txt", "w")
DER0 = DER(0)
FILE.write("Analytical: "+ str(DER0) + "\n")
dxs = [0.1, 0.01, 0.0001, 0.000001]
FILE.write("Non-symmetric: ")
for dx in dxs:
  DER1 = (F(dx) - F(0)) / dx
  FILE.write(str(DER1) + " ")

FILE.write("\n Symmetric: ")
for dx in dxs:
  DER2 = (F(dx) - F(-dx)) / (2 * dx)
  FILE.write(str(DER2) + " ")
```

```
Output:
Analytical: 1.0
Non-symmetric: 0.9510350060776562 0.9950010415998634 0.9999500000024142 0.9999994998732831
Symmetric: 0.9999999999999998 1.0000000000000009 1.000000000000445 0.9999999999732445
```

2. НАБЛИЖЕНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Задача: обчислити

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

2.1 Метод прямокутників

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k).$$

2.2 Метод трапецій

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1} - x_k).$$

Оцінки точності (при $n = 1$):

$$\int_a^b f(t)dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) =$$

$$(f(a)(b-a) + \frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 + \frac{1}{6}f''(c_1)(b-a)^3) -$$

$$(f(a)(b-a) + \frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 + \frac{1}{24}f''(c_2)(b-a)^3),$$

тобто метод прямокутників має точність порядку $(b-a)^3$.

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) =$$

$$(f(a)(b-a) + \frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 + \frac{1}{6}f''(c_1)(b-a)^3) -$$

$$(f(a)(b-a) + \frac{1}{2}f'(a)(b-a)^2 + \frac{1}{4}f''(c_2)(b-a)^3),$$

тобто метод трапецій має точність порядку $(b-a)^3$.

2.3 Метод Сімпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{6}\left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right)(x_{k+1} - x_k).$$

Метод Сімпсона має точність порядку $(b-a)^5$.

2.4 Метод Монте-Карло

$$\int_a^b f(t)dt \approx (b-a)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k)}{n},$$

де x_k обираються на відрізку $[a,b]$ випадково.

Приклади: $f(x) = x + \cos(x)$;
$f(x) = 3^{-x^2},\ x \in [0.9, 1]$;
$f(x) = \sin(x^{10}), x \in [0, 1]$.

3. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ

Задача:

$$f \in C([a,b]),\ f(a)\cdot f(b) < 0.$$

Знайти точку $c \in [a,b]$ таку, що $f(c) = 0$.

3.1 Метод половинного поділу:

$$[a_0, b_0] = [a,b],\ c_n = (a_n + b_n)/2,\ [a_n, b_n] = [a_{n-1}, c_{n-1}] or [c_{n-1}, b_{n-1}],\ n \ge 1,$$

де $f(a_n)f(b_n) \le 0,\ n \ge 1$.

Перевага: гарантована збіжність

3.2 Метод січних:

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})},\ n \ge 2,\ x_0 = a,\ x_1 = b.$$

Помилка $e_n = x_n - x_*$ у випадку збіжності допускає оцінку

$$e_{n+1} \approx Ce_n^p,\ n \ge 1,\ p = 0.5(1+\sqrt{5}).$$

3.3 Метод дотичних:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Помилка $e_n = x_n - x_*$ у випадку збіжності допускає оцінку

$$e_{n+1} \approx Ce_n^2,\ n \ge 1.$$

Приклади: $x^{10} - 0.1x = 0.01,\ x \in [0,1]$;
$6\sin(x^7) + x^{21} = 6x^{14},\ x \in [-0.4, 0.6]$ або $x \in [-1.5, 1.6]$.