ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2.
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ БАНАХА ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ

1. ТЕОРЕМА БАНАХА

Означення. Нехай (X, d) – метричний простір. Відображення $f : X \to X$ називають відображення стиску, якщо

$$\exists \lambda \in (0,1)\ \forall x_1, x_2 \in X\ :\ d(f(x_1), f(x_2)) \le \lambda d(x_1, x_2).$$

Означення. Точку $x_0 \in X$ називають нерухомою точкою відображення $f : X \to X$, якщо $f(x_0) = x_0$.

Теорема Банаха. Нехай (X, d) – повний метричний простір, $f : X \to X$ – відображення стиску. Тоді відображення f має єдину нерухому точку.

Доведення. Нехай $x_0 \in X$ – довільний елемент. Покладемо $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), ...$ Доведемо, що послідовність $\{x_n : n \ge 1\}$ фундаментальна.

Маємо

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le \lambda d(x_n, x_{n-1}) \le ... \le \lambda^n d(x_1, x_0),\ n \ge 1,$$

звідки для $m < n$ маємо

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n) \le$$

$$\le \lambda^m d(x_0, x_1) + ... + \lambda^{n-1} d(x_0, x_1) \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

В повному просторі з фундаментальності випливає збіжність до деякого елемента $x^* \in X$. Крім того,

$$d(f(x_n), f(x^*)) \le \lambda d(x_n, x^*) \to 0,\ n \to \infty.$$

Якщо в рівності $x_{n+1} = f(x_n)$ перейти до границі при $n \to \infty$, отримаємо $x^* = f(x^*)$, тобто x^* – нерухома точка.

Якщо припустити, що $z \in X$ – інша нерухома точка, то отримаємо

$$d(z, x^*) = d(f(z), f(x^*)) \le \lambda d(z, x^*),$$

звідки $d(z, x^*) \le 0$, тобто $z = x^*$.

Зауваження. Спрямуємо в оцінці для фундаментальності $n \to \infty$:

$$d(x_m, x) \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1).$$

Ця оцінка показує, наскільки вказаний у доведенні конструктивний метод наближає нас до шуканої точки.

Означення. Функція $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ задовольняє на $[a,b]$ умову Ліпшиця зі сталою L, якщо $\forall x, y \in [a,b] \ : \ |f(x) - f(y)| \le L|x-y|$.

Позначення: $f \in Lip([a,b])$.

Теорема 1 (Про розв'язання рівняння $f(x) = x$). Нехай $f : [a,b] \to [a,b], \ f \in Lip([a,b])$ зі сталою $L < 1$. Тоді рівняння $f(x) = x$ має єдиний на $[a,b]$ розв'язок.

Доведення. Простір $X = [a,b]$ з евклідовою відстанню – повний, f – відображення стиску, отже ця теорема випливає з теореми Банаха.

Теорема 2 (Про розв'язання рівняння $F(x) = 0$). Нехай $F : [a,b] \to \mathbf{R}, \ F(a) < 0 < F(b), \ \exists 0 < m \le M \ \forall x \in [a,b] \ \exists F'(x) \in [m,M]$. Тоді рівняння $F(x) = 0$ має єдиний на $[a,b]$ розв'язок.

Доведення. Простір $X = [a,b]$ з евклідовою відстанню – повний, $f(x) = x - \lambda F(x)$ – відображення стиску з числом λ. Якщо $\lambda = 1/(2 * M)$, то $f(a) = a - \lambda F(a) > a, \ f'(x) = 1 - \lambda F'(x) > 0, \ f(b) = b - \lambda F(b) < b$, тому $f : [a,b] \to [a,b]$. Отже ця теорема випливає з теореми Банаха.

Зауваження. 1. Існування розв'язку випливає з теореми Коші.

2. В обох цих випадках важливо, що розв'язок можна побудувати, як в теоремі Банаха, методом послідовних наближень.

Теорема 3 (Про розв'язання системи лінійних рівнянь). Нехай система з m лінійних рівнянь $Ax = b$ задана матрицею $A \ mxm$ та вектором $b \in \mathbf{R}^m$. Нехай також I – одинична матриця, тобто $I_{ij} = 0, \ i \ne j; \ I_{ii} = 1, \ 1 \le i \le m$, і $C = A - I$. Якщо

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (A_{ij} - I_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij}^2 = \lambda^2 < 1,$$

то система має єдиний розв'язок.

Доведення. В повному метричному просторі $(\mathbf{R}^m, \ \rho)$ розглянемо відображення $f(x) = Ax + b - x$. Це відображення є відображенням стиску, бо

$$\rho^2(f(x), f(z)) = \sum_{i=1}^{m} ((Ax)_i + b - x_i - (Az)_i - b + z_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} ((Cx)_i - (Cz)_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} C_{ij}(x_j - z_j) \right)^2 \le \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} C_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{m} (x_j - z_j)^2 \right) \le \lambda^2 \rho(x,z).$$

Теорема 4 (Про розв'язання диференціальних рівнянь). Нехай $F : [a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задовольняє умови:

1) $F \in C([a,b] \times \mathbf{R})$;

2) $\exists L > 0 \ : \ \forall x \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbf{R} \ : \ |F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$.

Тоді для довільного $y_0 \in \mathbf{R}$ задача Коші

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)), \ a \le x \le b, \\ \qquad y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Доведення. Задача Коші еквівалентна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt, \ x \in [a, b],$$

відносно функції $y \in C([a, b])$.

У повному метричному просторі $C([a, b])$ з метрикою

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} e^{-k(x-a)} |f(x) - g(x)|,$$

де $k > L$, розглянемо відображення $f : C([a, b]) \to C([a, b])$, де

$$f(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y(t))dt, \ x \in [a, b],$$

Можна перевірити, що це відображення є відображенням стиску при $\lambda = L/k$. Тому воно має нерухому точку, що і є шуканим розв'язком.

ЗАВДАННЯ

1. За допомогою теореми 1 розв'язати рівняння

$$0.5 \cos x = x, \ x \in [-10, 10].$$

Для цього визначити λ, обрати x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e - 9$, реалізувати це в програмі, знайшовши корінь.

2. За допомогою теореми 2 розв'язати рівняння

$$x^5 - x - 1, \ [a, b] = [1, 2].$$

Для цього визначити $m, \ M, \ \lambda$, обрати x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e-9$, реалізувати це в програмі, знайшовши корінь.

3. За допомогою теореми 3 розв'язати систему лінійних рівнянь

$$Ax = b$$

у таких випадках: а) елементи матриці C – випадкові числа з проміжку $[-0.05, 0.05]$, елементи вектора b – випадкові числа з проміжку $[-10, 10], \ m = 10$. б) всі елементи матриці C рівні – випадкові числа з проміжку $[-0.01, 0.01]$, елементи вектора b – випадкові числа з проміжку $[-10, 10], \ m = 80$. Для цього визначити λ, обрати вектор x_0, знайти кількість ітерацій, щоб точність була не менше за $1e - 9$, реалізувати це в програмі, знайшовши розв'язок.

4*. За допомогою теореми 4 розв'язати задачу Коші

$$y'(x) = 0.5 \operatorname{arctg}(y(x)) + x^4, \ x \in [0, 1]; \ y(0) = 1.$$

Кожну функцію наближено замінити на кусково-лінійну, обравши розбиття відрізка з $n = 10000$ точок.Для цього визначити λ, обрати початкову функцію y_0, знайти кількість ітерацій, щоб величина $\max\limits_{x \in [0,1]} |y(x) - y_n(x)|$ була не більше за $1e - 9$, реалізувати це в програмі, знайшовши розв'язок.