ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 7.
ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

1. ТЕОРІЯ

Розглянемо формули коефіцієнтів Фур'є для 2π – періодичної функції f :

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx,\ n \geq 0,$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx,\ n \geq 1.$$

Тоді

$$a_n - ib_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \geq 0.$$

Якщо рахувати інтеграл наближено найпростішим чином, отримаємо

$$a_n - ib_n \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(2\pi kx/N)e^{-2i\pi kn/N},\ n \geq 0.$$

Якщо функція f відома лише в точках $2\pi kx/N$, і має в них значення $f_k = f(2\pi kx/N)$, то

$$N(a_n - ib_n) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2i\pi kn/N},\ n \geq 0.$$

Величини справа N-періодичні по n, тому досить розглядати їх на періоді. Коефіцієнти

$$g_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2i\pi kn/N},\ 0 \leq n \leq N-1,$$

називають дискретним перетворенням Фур'є набору $f_0, f_1, ..., f_n$.

Справджуються формули оберненого дискретного перетворення Фур'є:

$$f_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{2i\pi kn/N},\ 0 \leq n \leq N-1.$$

При великих N обчислення дискретного перетворення Фур'є вимагає $O(N^2)$ операцій. Проте його можна обчислити швидше з використанням алгоритму швидкого перетворення Фур'є. Цей алгоритм пропонує обчислювати коефіцієнти дискретного перетворення Фур'є, згрупувавши доданки так:

$$g_n = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-4i\pi kn/N} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-2i\pi(2k+1)n/N} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{-4i\pi kn/N} + e^{-2i\pi n/N} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{-4i\pi kn/N},\ 0 \le n \le N-1.$$

Кожна з двох сум – це дискретне перетворення Фур'є вдвічі меншого набору. Застосовуючи цю формулу повторно, отримуємо алгоритм зі швидкістю $O(NlogN)$. Формули ефективні, коли N – степінь двійки.

2. ЗАСТОСУВАННЯ

1. Множення двох многочленів $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{N-1} x^{N-1}, Q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_{N-1} x^{N-1}$.

Дискретне перетворення Фур'є наборів $a_0, ..., a_{N-1}$ та $b_0, ..., b_{N-1}$ – це значення многочленів у точках $e^{-2i\pi n/N},\ 0 \le n \le N-1$. Попарно перемноживши їх, отримаємо значення добутку PQ в тих же точках.

Застосувавши обернене дискретне перетворення Фур'є, отримаємо коефіцієнти многочлена-добутку. Останній степінь повинен бути $N-1$, тому многочлени P, Q мають бути насправді степеня не вище $N/2-1$.

2. Множення довгих чисел. Довгі числа можна уявити, як многочлени при $x = 10$ (або іншому x в інших системах числення). Тому їх множення відбувається за тим же алгоритмом.

2. ЗАДАЧІ

1. Обчислити добуток многочленів $1 + 2x + 3x^2 + ... + 100x^{99}$ та $100 + 99x + 98x^2 + ... + x^{99}$ трьома способами: 1) явно; 2) реалізувавши дискретне перетворення Фур'є; 3) використовуючи швидке перетворення Фур'є.

2. Перемножити числа $12345678910111213...100$ ("склеєні"числа від 1 до 100) і $1009998...1$ (те саме в оберненому порядку) способами 2), 3) задачі 1.

3*. Перевірити швидкість перетворень Фур'є, замінивши в задачі 1 100 на 1000 та 10000 і замірявши час роботи двох алгоритмів.