

**А.И. Кострикин**

# **ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ**

**Часть II**

## **ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

*Рекомендовано Министерством общего и специального образования  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов университетов, обучающихся по специальностям  
“Математика” и “Прикладная математика”*



МОСКВА  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ЛИТЕРАТУРА  
2000

УДК 512 (075.8)  
ББК 22.143  
К71



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 99-01-14089

**Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра:** Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 368 с. — ISBN 5-9221-0018-1.

Наиболее важные разделы линейной алгебры изложены в максимально доступной форме. На первый план выдвигаются простые геометрические понятия, на базе которых идёт всестороннее развитие алгебраического аппарата, введённого в части I. Указаны приложения к разным вопросам анализа, теории линейных групп, алгебр Ли, математической экономики, дифференциальных уравнений, геометрии Лобачевского.

Каждый параграф заканчивается упражнениями. Ответы и наброски решений собраны в отдельном разделе. Сформулированы некоторые нерешённые задачи.

Ил. 31.

ТП-2000-I-74

ISBN 5-9221-0018-1 (Т. II)  
5-9221-0016-5

© ФИЗМАТЛИТ, 2000  
© А.И. Кострикин, 2000

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ . . . . .	8
-----------------------	---

## ГЛАВА 1 ПРОСТРАНСТВА И ФОРМЫ

§ 1. Абстрактные векторные пространства . . . . .	11
1. Мотивировка и аксиоматизация (11). 2. Линейные оболочки. Подпространства (13). 3. Замечания о геометрической интерпретации (16). Упражнения (18).	
§ 2. Размерность и базис . . . . .	18
1. Линейная зависимость (18). 2. Размерность векторного пространства и его базис (20). 3. Координаты. Изоморфизм пространств (22). 4. Пересечение и сумма подпространств (26). 5. Прямые суммы (28). 6. Факторпространства (30). Упражнения (32).	
§ 3. Двойственное пространство . . . . .	33
1. Линейные функции (33). 2. Двойственное пространство и двойственный базис (34). 3. Рефлексивность (36). 4. Критерий линейной независимости (37). 5. Геометрическая интерпретация решений ЛОС (38). Упражнения (39).	
§ 4. Билинейные и квадратичные формы . . . . .	40
1. Полилинейные отображения (40). 2. Билинейные формы (41). 3. Закон изменения матрицы билинейной формы (42). 4. Симметричные и кососимметричные формы (43). 5. Квадратичные формы (45). 6. Канонический вид квадратичной формы (46). 7. Вещественные квадратичные формы (49). 8. Положительно определённые формы и матрицы (50). 9. Канонический вид кососимметричной формы (54). 10. Пфаффиан (57). Упражнения (58).	

## ГЛАВА 2 ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Линейные отображения векторных пространств . . . . .	60
1. Язык линейных отображений (60). 2. Задание линейных отображений матрицами (61). 3. Размерность ядра и образа (63). Упражнения (64).	
§ 2. Алгебра линейных операторов . . . . .	64
1. Определения и примеры (64). 2. Алгебра операторов (66). 3. Матрицы линейного оператора в различных базисах (69).	

---

4. Определитель и след линейного оператора (71). Упражнения (73).	
§ 3. Инвариантные подпространства и собственные векторы . . . . .	74
1. Проекторы (74). 2. Инвариантные подпространства (75).	
3. Собственные векторы. Характеристический многочлен (77).	
4. Критерий диагонализируемости (79). 5. Существование инвариантных подпространств (82). 6. Сопряжённый линейный оператор (82). 7. Фактороператор (84). Упражнения (85).	
§ 4. Жорданова нормальная форма . . . . .	86
1. Теорема Гамильтона—Кэли (86). 2. ЖНФ: формулировка и следствие (89). 3. Корневые подпространства (90). 4. Случай нильпотентного оператора (92). 5. Единственность (94).	
6. Другие подходы к ЖНФ (96). 7. Другие нормальные формы (99). Упражнения (100).	

### ГЛАВА 3

### ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

§ 1. Евклидовы векторные пространства . . . . .	103
1. Эвристические соображения и определения (103). 2. Основные метрические понятия (105). 3. Процесс ортогонализации (107). 4. Изоморфизмы евклидовых векторных пространств (110). 5. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы (112). 6. Симплектические пространства (113). Упражнения (116).	
§ 2. Эрмитовы векторные пространства . . . . .	117
1. Эрмитовы формы (117). 2. Метрические соотношения (119). 3. Ортогональность (120). 4. Унитарные матрицы (122). 5. Нормированные векторные пространства (123). Упражнения (125).	
§ 3. Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением . . . . .	126
1. Связь между линейными операторами и $\theta$ -линейными формами (126). 2. Типы линейных операторов (128). 3. Канонический вид эрмитовых операторов (131). 4. Приведение квадратичной формы к главным осям (133). 5. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду (135). 6. Канонический вид изометрий (136). 7. Нормальные операторы (139). 8. Положительно определённые операторы (143). 9. Полярное разложение (144). Упражнения (146).	
§ 4. Комплексификация и овеществление . . . . .	147
1. Комплексная структура (147). 2. Овеществление (149). 3. Комплексификация (151). 4. Комплексификация — овеществление — комплексификация (153). Упражнения (155).	

§ 5. Ортогональные многочлены . . . . .	156
1. Проблема аппроксимации (156). 2. Метод наименьших квадратов (157). 3. Линейные системы и метод наименьших квадратов (159). 4. Тригонометрические многочлены (161). 5. Замечание о самосопряжённых операторах (162). 6. Многочлены Лежандра (сферические многочлены) (164). 7. Ортогонализация с весом (168). 8. Многочлены Чебышева (первого рода) (169). 9. Многочлены Эрмита (170). Упражнения (171).	

**ГЛАВА 4**  
**АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ**  
**ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**

§ 1. Аффинные пространства . . . . .	173
1. Определение аффинного пространства (173). 2. Изоморфизм (175). 3. Координаты (176). 4. Аффинные подпространства (177). 5. Барицентрические координаты (180). 6. Аффинно-линейные функции и системы линейных уравнений (183). 7. Взаимное расположение плоскостей (185). Упражнения (186).	
§ 2. Евклидовы (точечные) пространства . . . . .	187
1. Евклидова метрика (187). 2. Расстояние от точки до плоскости (188). 3. Расстояние между плоскостями (190). 4. Определитель Грама и объём параллелепипеда (191). Упражнения (192).	
§ 3. Группы и геометрии . . . . .	193
1. Аффинная группа (193). 2. Движения евклидова пространства (196). 3. Группа изометрий (198). 4. Линейная геометрия, отвечающая группе (201). 5. Аффинные преобразования евклидова пространства (204). 6. Выпуклые множества (206). Упражнения (208).	
§ 4. Пространства с индефинитной метрикой . . . . .	208
1. Индефинитная метрика (208). 2. Псевдоевклидовы движения (209). 3. Группа Лоренца (210). 4. Собственная группа Лоренца (212). Упражнения (216).	

**ГЛАВА 5**  
**КВАДРИКИ**

§ 1. Квадратичные функции . . . . .	217
1. Квадратичные функции на аффинном пространстве (217). 2. Центральные точки для квадратичной функции (218). 3. Приведение квадратичной функции к каноническому виду (220). 4. Квадратичные функции на евклидовом пространстве (222). Упражнения (224).	

§ 2. Квадрики в аффинном и евклидовом пространствах . . . . .	224
1. Общее понятие квадрики (224). 2. Центр квадрики (227).	
3. Канонические типы квадрик в аффинном пространстве (228). 4. Общие замечания о типах квадрик (230). 5. Квадрики в евклидовом пространстве (232). Упражнения (235).	
§ 3. Проективные пространства . . . . .	236
1. Модели проективной плоскости (236). 2. Проективное пространство произвольной размерности (239). 3. Однородные координаты (240). 4. Аффинные карты (241). 5. Понятие алгебраического многообразия (243). 6. Проективная группа (244). 7. Проективная геометрия (247). 8. Двойное отношение (249). 9. Выражения двойного отношения в координатах (251). Упражнения (253).	
§ 4. Квадрики в проективном пространстве . . . . .	254
1. Классификация (254). 2. Примеры и изображения проективных квадрик (255). 3. Пересечение прямой с проективной квадрикой (257). 4. Общие замечания о проективных квадриках (258). Упражнения (259).	

## ГЛАВА 6 ТЕНЗОРЫ

§ 1. Начала тензорного исчисления . . . . .	260
1. Понятие о тензорах (260). 2. Произведение тензоров (261).	
3. Координаты тензора (263). 4. Тензоры в разных системах координат (266). 5. Тензорное произведение пространств (268). Упражнения (271).	
§ 2. Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров . . . . .	272
1. Свёртка тензора (272). 2. Структурный тензор алгебры (274). 3. Симметричные тензоры (277). 4. Кососимметричные тензоры (281). 5. Тензорные пространства (283). Упражнения (284).	
§ 3. Внешняя алгебра . . . . .	285
1. Внешнее умножение (285). 2. Внешняя алгебра векторного пространства (286). 3. Связь с определителями (290). 4. Векторные подпространства и $p$ -векторы (292). 5. Условия разложимости $p$ -векторов (293). Упражнения (296).	

## ГЛАВА 7 ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Норма и функции линейного оператора . . . . .	298
1. Норма линейного оператора (298). 2. Функции линейных операторов (матриц) (301). 3. Экспонента (302). 4. Однопараметрические подгруппы линейной группы (305). 5. Спектральный радиус (309). Упражнения (311).	

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения . . . . .	312
1. Производная экспоненты (312). 2. Дифференциальные уравнения (313). 3. Линейное дифференциальное уравнение порядка $n$ (314).	
§ 3. Выпуклые многогранники и линейное программирование . . . . .	315
1. Формулировка задачи (315). 2. Мотивировка (315). 3. Основные геометрические понятия (318). Упражнения (320).	
§ 4. Неотрицательные матрицы . . . . .	321
1. Производственная мотивировка (321). 2. Свойства неотрицательных матриц (322). 3. Стохастические матрицы (323).	
§ 5. Геометрия Лобачевского . . . . .	327
1. Пространство Лобачевского (327). 2. Движения пространства Лобачевского (329). 3. Метрика Лобачевского (331). 4. Плоскость Лобачевского (334).	
§ 6. Нерешённые задачи . . . . .	339
1. Проблема Штрассена (339). 2. Ортогональные разложения (340). 3. Конечные проективные плоскости (341). 4. Базисы пространств и латинские квадраты (342).	
 ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ . . . . .	344
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ . . . . .	359
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	362

Линейная алгебра является одновременно одной из древнейших и одной из самых новых ветвей математики.

*Н. Бурбаки*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги, являющейся частью II единого курса “Введение в алгебру”, заключается в систематическом изложении основ линейной алгебры — важного раздела математики, лишь отчасти затронутого нами в первой части курса. Однаково интересны алгебраический и геометрический аспекты теории, поэтому классические “сёстры-близнецы”, каковыми являются линейная алгебра и геометрия, будут выступать на равных правах. Из курса аналитической геометрии на плоскости и в трёхмерном пространстве известно много примеров геометрической интерпретации алгебраических соотношений для двух и трёх переменных. Существенно, однако, то, что терминология и идеи линейной алгебры, опирающиеся на геометрическую интуицию, относятся к пространству произвольного числа  $n$  измерений.

Словосочетания “линейная алгебра и анализ” и “линейная алгебра и дифференциальные уравнения”, равно как и многие другие, употребляемые в университетских курсах, служат отражением того факта, что идея линейности — одна из самых распространенных в математике и, более общо, одна из самых фундаментальных в цикле естественных наук. Традиционное деление задач на линейные и нелинейные не прихоть математиков, а вполне осознанная необходимость подчиняться сравнительной слабости нашей интуиции там, где кончаются владения линейной алгебры, понимаемой в широком смысле этого слова.

Аппарат линейной алгебры, вполне сложившийся к началу нашего века, продолжал совершенствоваться и развиваться в разных направлениях. При этом его бесконечномерная часть, опирающаяся на понятие предельного перехода, отошла по существу к функциональному анализу, а вычислительные аспекты, особенно актуальные в связи с возможностью применения ЭВМ, стали предметом изучения самостоятельной науки. Предлагаемая книга не может служить исчерпывающим руководством по линейной алгебре не только потому, что она не охватывает указанные два направления, но прежде всего ввиду недостаточного освещения приложений (хотя последняя глава как раз названа приложением). В этом отношении учебное пособие [2] в списке дополнительной литературы содержит

гораздо больше фантазии, поводов к раздумью и, сверх того, квантово-механических интерпретаций понятий линейной алгебры. Оно рекомендуется всем, кто хотел бы заглянуть за рамки стандартного курса. А в данный учебник вошли лишь небольшие фрагменты из [2]. Наши намерения и надежды сводятся к тому, что читатель (прежде всего студент первого курса), досконально проработавший основной материал учебника (в течение одного семестра по четыре часа лекций и по четыре часа упражнений в неделю) и затем использовавший дополнительные разделы обеих книг для домашнего чтения, сумеет выработать современное математическое мышление в области линейной алгебры.

Само собой разумеется, что для полного понимания текста учебника требуется лишь хорошее владение материалом части I (при ссылках — [ВА I]), т.е. материалом первого семестра. Терминология и обозначения обеих частей полностью согласованы, а все нововведения специально оговорены. Кстати, упражнение  $r$  из §  $q$  гл.  $r$  иногда в тексте обозначается кратко упр.  $r.q.r$ . В этом месте следует заметить, что в отличие от [ВА I, ВА III] ответы и указания к упражнениям выделены в специальный раздел, обращаться к которому нужно в крайнем случае.

Автор отдаёт себе отчёт в том, что “приземлять” учебное пособие [2] и тем самым “наступать на горло собственной песне” — в высшей степени неблагодарная задача. Единственным оправданием может служить интерпретация данной части II как отклика на запросы студентов — отклика, давно подготовленного, но реализованного с большой задержкой лишь по внешним причинам.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. — 2-е изд. — М.: Наука, 1994. — 318 с.
2. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986. — 304 с.
3. Сборник задач по алгебре/ Под ред. А.И.Кострикина. — М.: Факториал, 1995. — 456 с.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. — 5-е изд. — М.: Наука, 1998. — 272 с.
5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1956. — 340 с.
6. Халмос П.Р. Конечномерные векторные пространства. — М.: Мир, 1970. — 264 с.
7. Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Мир, 1970. — 284 с.
8. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. — М.: Наука, 1956. — 304 с.

9. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Наука, 1963.
10. *Стренг Г.* Линейная алгебра и её применения. — М.: Мир, 1980. — 454 с.
11. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. — М.: Наука, 1991.
12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976. — 368 с.
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
14. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978.
15. *Huppert B.* Angewandte Lineare Algebra. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1990. — 646 p.

# ГЛАВА 1

## ПРОСТРАНСТВА И ФОРМЫ

---

Вряд ли стоит объяснять, чем дикий лес отличается от ухоженного парка или от упорядоченного леса, посаженного человеком. При всём различии, однако, в них столько общего, что инопланетянину, не познавшему вкуса грибов и не оценившему прелести подстриженных газонов, леса будут казаться сплошными зелёными массивами, населёнными различной высоты и формы предметами, которые мы именуем деревьями. Нечто подобное произойдёт, если сравнить содержание настоящей главы и главы 2 из [ВА I], посвящённой координатным векторным пространствам. Абстрактное линейное пространство, элементы которого именуются векторами и которое по этой причине мы будем чаще называть векторным пространством, вводится аксиоматически. Соответствующая система аксиом, по существу разработанная еще Дж. Пеано (1888 г.), хорошо приспособлена к теории линейных отображений (в частности, линейных операторов), занимающей центральное место в линейной алгебре. Понятие матрицы при этом как бы отходит на второй план. Первостепенное значение приобретают инвариантные, не зависящие от выбора базиса свойства изучаемых объектов.

Однако прежде чем углубляться в абстрактный лес, рекомендуется ещё раз пройтись по ухоженному парку — конкретному пространству векторов строк длины  $n$ . Мы сознательно пошли на частичное повторение известного материала, чтобы сгладить абстрактные шероховатости.

### § 1. Абстрактные векторные пространства

**1. Мотивировка и аксиоматизация.** В [ВА I, гл. 2] мы изучали  $n$ -мерное векторное пространство  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  строк длины  $n$  вместе с линейными отображениями  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , находящимися во взаимно однозначном соответствии с  $m \times n$ -матрицами. При  $m = n$  биективное линейное отображение  $\varphi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  характеризуется свойством определителя  $\det A \neq 0$ , которое позволяет применить правило Крамера для решения системы линейных уравнений, ассоциированной с  $\varphi_A$  и фиксированным вектором из  $\mathbb{R}^n$ . В случае  $\det A = 0$  решения однородной линейной системы образуют подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , но, как отмечалось в свое время, это подпространство (а точнее, линейная оболочка) — объект иной природы: если  $\mathbb{R}^n$  допускает базис  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ , то линейная оболочка  $U \subset \mathbb{R}^n$  базисом такого вида, как правило, не обладает. Это неудобство проистекает из слишком конкретной природы  $\mathbb{R}^n$ .

В самом деле, свойства ВП<sub>1</sub>–ВП<sub>8</sub>, которыми мы фактически пользовались и которые будут воспроизведены ниже, присущи не только пространству  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим, например, дифференциальное уравнение  $d^2x/dt^2 + x = 0$ , изучаемое в школе. Известно, что его общее решение записывается в виде  $x(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ . Если  $\alpha_0, \beta_0$  такие, что  $\alpha_0 \sin t + \beta_0 \cos t = 0$  при всех  $t$ , то, полагая поочередно  $t_1 = \pi/2, t_2 = 0$ , получим  $\alpha_0 = 0 = \beta_0$ . Это обстоятельство даёт основание говорить о линейной независимости частных решений  $\sin t, \cos t$  и о двумерном линейном пространстве общих решений уравнения  $d^2x/dt^2 + x = 0$  в духе следующего определения.

**Определение 1.** Пусть  $\mathbb{K}$  — произвольное поле. *Векторным* (или *линейным*) пространством над  $\mathbb{K}$  называется множество  $V$  элементов (именуемых *векторами*), удовлетворяющее следующим аксиомам.

а) На  $V$  задана бинарная операция  $V \times V \rightarrow V$ , обычно записываемая аддитивно:  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , и наделяющая  $V$  строением абелевой группы (*аддитивная группа пространства  $V$* ). Стало быть:

ВП<sub>1</sub>:  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$  (*коммутативность*);

ВП<sub>2</sub>:  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  (*ассоциативность*);

ВП<sub>3</sub>: в  $V$  существует выделенный элемент **0**, называемый *нулевым вектором*, такой, что  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$  для любого  $\mathbf{x} \in V$ ;

ВП<sub>4</sub>: для каждого  $\mathbf{x} \in V$  существует *обратный* (или *противоположный*) вектор  $-\mathbf{x}$  такой, что  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

б) На множестве  $\mathbb{K} \times V$  задана операция  $(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \mathbf{x}$ , называемая *умножением* векторов из  $V$  на скаляры из  $\mathbb{K}$  и обладающая свойствами:

ВП<sub>5</sub>:  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  (*унитарность*);

ВП<sub>6</sub>:  $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$  для всех  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \mathbf{x} \in V$  (*ассоциативность*).

Сложение и умножение связаны двумя законами *дистрибутивности*:

ВП<sub>7</sub>:  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ ;

ВП<sub>8</sub>:  $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ .

Обратим внимание на то обстоятельство, что в левой части равенства ВП<sub>7</sub> знак  $+$  относится к элементам поля  $\mathbb{K}$  (скалярам), а в правой — к векторам. Строго говоря, следовало бы обозначить различными символами операции сложения в аддитивной группе  $V$  и в поле  $\mathbb{K}$  (скажем,  $\oplus$  и  $+$ ), равно как и операции умножения в  $\mathbb{K} \times V$  и в  $\mathbb{K}$  (скажем,  $\odot$  и  $\cdot$ ). Этого обычно избегают, поскольку всегда бывает ясно, о чём идет речь. Всё же, чтобы сделать это замечание содержательным и предостеречь от возможных ошибок, рассмотрим множество  $V = \mathbb{R}_+$  положительных вещественных чисел. Полагая  $x \oplus y = xy$  (обычное умножение в  $\mathbb{R}$ ) и  $\lambda \odot x = x^\lambda$  (возвведение  $x \in \mathbb{R}_+$  в степень  $\lambda \in \mathbb{R}$ ), мы без труда убеждаемся в справедливости аксиом ВП<sub>1</sub>–ВП<sub>8</sub>, так что  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Нулевым

вектором служит  $1 \in \mathbb{R}_+$ . Ясно, что в данном случае обычная запись  $x + y = xy$ ,  $\lambda x = x^\lambda$  могла бы вызвать недоумение.

Вот ещё один пример, когда предпочтительнее другие обозначения. Пусть  $V$  — векторное пространство над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Определим новое векторное пространство  $\overline{V}$  с той же аддитивной группой  $V$ , но с другим законом умножения на скаляры:  $(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \odot \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}$ , где  $\bar{\lambda}$  — комплексно сопряженное число к  $\lambda$ . Так как  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  — автоморфизм поля  $\mathbb{C}$ , то легко проверяется, что  $\overline{V}$  — векторное пространство. Одновременное рассмотрение  $V$  и  $\overline{V}$  без значка  $\odot$  (или какого-то другого символа) было бы затруднительно.

**Соглашение.** Читатель, вероятно, заметил, что векторы пространства  $V$  у нас обозначаются то полужирными, то светлыми строчными латинскими буквами, а иногда и буквами греческого алфавита. Тем не менее в абстрактных векторных пространствах предпочтение будет отдаваться полужирному шрифту; в конкретных примерах следовать этому правилу было бы непрактично, а изображать вектор буквой со стрелкой наверху — слишком громоздко. При небольшом навыке принятый нами компромисс не должен приводить к недоразумениям.

Непосредственно из определения векторного пространства  $V$  вытекают следствия, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем без всяких ссылок:

а)  $0\mathbf{x} = \lambda 0 = 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{x} \in V$ . Действительно, ввиду ВП<sub>7</sub>  $0\mathbf{x} = (0+0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ , откуда  $0\mathbf{x} = 0$ . Аналогично,  $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$ , т.е.  $\lambda 0 = 0$ ;

б)  $\lambda\mathbf{x} = 0 \implies \lambda = 0$  или  $\mathbf{x} = 0$ . Если, например,  $\lambda \neq 0$ , то  $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{x} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^{-1}0 = 0$ ;

в)  $(n \cdot 1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x} + \dots + \mathbf{x}$  ( $n$  слагаемых) для любого целого положительного  $n$  и любого  $\mathbf{x} \in V$  (доказательство — индукция по  $n$ ). Естественно писать просто  $n\mathbf{x}$  вместо  $(n \cdot 1)\mathbf{x}$ , где 1 — единица поля  $\mathbb{K}$ . Если  $\mathbb{K}$  — поле конечной характеристики  $p$ , то  $p\mathbf{x} = 0$ ;

г)  $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ . В самом деле,  $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1+(-1))\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = 0$ .

**2. Линейные оболочки. Подпространства.** Заметим, что, располагая любым конечным набором скаляров  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  и векторов  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ , мы можем составить выражение

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{x}_i,$$

называемое *линейной комбинацией* векторов  $\mathbf{x}_i$  с коэффициентами  $\lambda_i$ . Более общо: если  $I$  — какое-то семейство индексов, возможно, бесконечное, и  $M = \{\mathbf{x}_i \in V \mid i \in I\}$  — подмножество векторов в  $V$ , то правомерно рассматривать линейные комбинации  $\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{x}_i$

с произвольными коэффициентами  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ , среди которых, однако, лишь конечное число отличны от нуля. Очевидно,

$$\lambda \left( \sum \lambda_i \mathbf{x}_i \right) = \sum (\lambda \lambda_i) \mathbf{x}_i$$

— линейная комбинация с коэффициентами  $\lambda \lambda_i, i \in I$ , для всякого скаляра  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Аналогично, сумма

$$\left( \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{x}_i \right) + \left( \sum_{i \in I} \mu_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) \mathbf{x}_i$$

двух линейных комбинаций с коэффициентами  $\lambda_i, \mu_i$  будет линейной комбинацией тех же векторов  $\mathbf{x}_i \in M$  с коэффициентами  $\lambda_i + \mu_i$ , среди которых снова лишь конечное число отличны от нуля. Таким образом, множество  $\langle M \rangle_{\mathbb{K}}$  всевозможных линейных комбинаций векторов  $\mathbf{x}_i \in M$  замкнуто относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры:

$$\lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle M \rangle \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \langle M \rangle, \lambda \mathbf{x} \in \langle M \rangle.$$

Принято говорить, что  $\langle M \rangle$  — линейная оболочка множества  $M \subseteq V$ .

**Определение 2.** Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $U \subseteq V$  — его подмножество, являющееся аддитивной подгруппой в  $V$  и переходящее в себя при умножении на скаляры. Тогда ограничение на  $U$  операций, определённых в  $V$ , наделяет  $U$  строением векторного пространства. Оно называется *векторным* (или *линейным*) подпространством в  $V$ .

Пересечение любого числа векторных подпространств также является векторным подпространством (см. начало п. 4 из § 2; это лёгкое упражнение, которое для случая групп рассмотрено в [ВА I]). Мы видим, что линейная оболочка  $\langle M \rangle$  системы векторов  $M \subseteq V$  является векторным подпространством в  $V$ , причём, очевидно,  $\langle M \rangle$  — наименьшее подпространство в  $V$ , содержащее  $M$ . Говорят ещё, что  $\langle M \rangle$  — подпространство, *натянутое* на векторы  $\mathbf{x} \in M$  или *порождённое* векторами  $\mathbf{x} \in M$ . Если с самого начала  $M$  было подпространством, то  $\langle M \rangle = M$ .

Приведём несколько примеров векторных пространств, которые будут встречаться в дальнейшем.

**Пример 1 (нульмерное пространство).** Над любым полем  $\mathbb{K}$  существует нульмерное (одноэлементное) векторное пространство  $V = \{\mathbf{0}\}$  с законом умножения на скаляры  $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .

**Пример 2 (основное поле  $\mathbb{K}$  как одномерное координатное пространство).** По определению  $V = \mathbb{K}$ , основные операции в  $V$  совпадают с операциями в  $\mathbb{K}$ . Если 1 — единица поля  $\mathbb{K}$ , то можно считать, что  $\mathbb{K} = \langle 1 \rangle$  — линейная оболочка, натянутая на 1.

Более общо: если поле  $\mathbb{K}$  — расширение своего под поля  $\mathfrak{P}$ , то  $\mathbb{K}$  можно рассматривать как векторное пространство над  $\mathfrak{P}$ . Например, поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$  — векторное пространство над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ , а  $\mathbb{R}$  — векторное пространство над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ .

Пример 3 (*n-мерное координатное пространство*  $\mathbb{K}^n$ ; см. [ВА I, гл. 2], где поле  $\mathbb{R}$  можно заменить на произвольное поле  $\mathbb{K}$ ). При  $n = 1$  получается предыдущий пример. Мы увидим вскоре (см. § 3), что всякое подпространство  $U \subset \mathbb{K}^n$  является пространством решений некоторой линейной однородной системы.

Пример 4 (*пространство функций*). В [ВА I, гл. 1, § 4, п. 1] было введено кольцо функций  $K^X$ , которое на самом деле является ещё векторным пространством над  $K$  (кольцо  $K$  нужно заменить на поле). Итак,  $X$  — произвольное множество,  $\mathbb{K}$  — поле,  $\mathbb{K}^X$  — множество отображений (функций)  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , наделённое поточечными операциями сложения и умножения на скаляры:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{для всех } x \in X; \\ (\lambda f)(x) = \lambda(f(x)) \quad \text{для всех } \lambda \in F, x \in X.$$

Каждому элементу  $x \in X$  можно поставить в соответствие так называемую дельта-функцию  $\delta_x$ , сосредоточенную на  $\{x\}$ :

$$\delta_x(x) = 1, \quad \delta_x(x') = 0, \quad x \neq x'.$$

Если  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , то вместо  $\delta_i(j)$  обычно пишут  $\delta_{ij}$  — стандартное обозначение для символа Кронекера. В этом случае  $\mathbb{K}^X$  отождествляется с  $\mathbb{K}^n$ . Именно, функции  $f$  ставится в соответствие вектор-строка всех её значений  $(f(1), f(2), \dots, f(n))$ , а сама функция однозначно представляется в виде линейной комбинации дельта-функций

$$f = f(1)\delta_1 + f(2)\delta_2 + \dots + f(n)\delta_n.$$

В случае бесконечного множества  $X$  аналогичное заключение лишено смысла, поскольку суммы бесконечного числа векторов не определены (если специально не позаботиться о топологии).

В анализе чаще всего рассматриваются вещественнозначные функции, определённые на всей прямой или на интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Легко проверяется, что линейное пространство  $\mathbb{R}^{(a, b)}$  содержит в качестве подпространств пространство  $\mathbb{R}_{\text{cont}}^{(a, b)}$  всех непрерывных функций, пространство  $\mathbb{R}_{\text{diff}}^{(a, b)}$  всех непрерывно дифференцируемых функций и т.д., поскольку все отмеченные свойства сохраняются при сложении функций и умножении их на скаляры.

Пример 5. Многочлены  $f \in \mathbb{K}[t]$  степени  $\leq n - 1$  с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на скаляры образуют векторное пространство  $P_n$ . Следует отметить, что многочлены степени, равной фиксированному числу  $k$ , линейного пространства не составляют. Однако формы степени  $k$  от  $t$  переменных, рассматриваемые вместе с нулём, образуют векторное пространство.

Пример 6. Пусть  $g(t)$  — фиксированная непрерывная на отрезке  $[0, 1]$  вещественная функция, отличная от нуля на некотором интервале  $J \subset [0, 1]$ , а  $V_n(g)$  — множество функций вида  $f(t)g(t)$ , где  $f(t)$  — многочлен степени  $\leq n - 1$ . Тогда  $P_n^g$  — векторное пространство, содержащееся в  $\mathbb{R}_{\text{cont}}^J$ .

Пример 7 (*пространство матриц*). По правилам матричного исчисления (см. [ВА I, гл. 2]) любую прямоугольную матрицу размера  $m \times n$  можно умножить на элемент поля  $\mathbb{K}$  и любые две сложить, в результате получится матрица того же вида. Все аксиомы здесь выполняются, так что  $m \times n$ -матрицы образуют векторное пространство. При  $m = n$  кольцо квадратных матриц  $M_n(\mathbb{K})$ , являющееся одновременно векторным пространством над  $\mathbb{K}$ , называется *алгеброй*, в соответствии с общим определением, которое мы дадим в § 2 гл. 2 и под действие которого попадают также объекты из примеров 2 и 4.

Пример 8 [Amer. Math. Monthly. — 1990. — V. 94. — P. 60–62]. Матрица  $A \in M_n(\mathbb{Q})$  называется *полумагической* (или *полумагическим квадратом*), если суммы коэффициентов в каждой строке и в каждом столбце матрицы совпадают:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} = \sigma(A) \in \mathbb{Q}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Если к тому же  $\text{tr } A = \sigma(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$ , то матрица  $A$  называется *магической* (или *магическим квадратом*).

Магические квадраты издревле привлекали к себе внимание. Нам они интересны по той достаточно очевидной причине, что множество  $\text{SMag}_n(\mathbb{Q})$  полумагических квадратов, равно как и множество  $\text{Mag}_n(\mathbb{Q})$  всех магических квадратов порядка  $n$ , суть векторные пространства над  $\mathbb{Q}$ , причём

$$\text{Mag}_n(\mathbb{Q}) \subset \text{SMag}_n(\mathbb{Q}) \subset M_n(\mathbb{Q}).$$

Стоит оговориться, что чисто комбинаторное множество магических  $n \times n$ -квадратов с натуральными коэффициентами  $1, 2, \dots, n^2$  мы не рассматриваем. См. по этому поводу: Постников М.М. Магические квадраты. — М.: Наука, 1964.

**3. Замечания о геометрической интерпретации.** Принято называть векторное пространство  $V$  *вещественным* (соответственно *комплексным*), если  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  (соответственно  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ); скаляры тогда будут просто числами. Именно эти случаи наиболее интересны с прикладной точки зрения, хотя значительная часть теории не зависит от природы поля  $\mathfrak{K}$ .

Самой естественной моделью векторного пространства служит, несомненно, совокупность направленных отрезков, выходящих из фиксированной точки трёхмерного пространства, в котором мы живем. Умножению отрезка на число  $\lambda \in \mathbb{R}$  отвечает его растяжение в  $\lambda > 1$  раз (или сжатие в  $\lambda$  раз,  $\lambda \leq 1$ ) и изменение направления отрезка при  $\lambda$  отрицательном. Сложение направленных отрезков осуществляется по правилу параллелограмма. Это вещественное векторное пространство совпадает также с множеством свободных геометрических векторов, если условиться считать равными два направленных отрезка, которые можно совместить параллельным переносом.

Объекты физического трёхмерного пространства  $\mathbb{R}_{\Phi}^3$  принято изображать посредством чертежей. В случае многомерных пространств (о размерности мы поговорим в § 2) наша интуиция подвергается серьёзному испытанию, тем не менее систематическое апеллирование к геометрическим образам не только полезно, но и необходимо: вырабатываются устойчивые ассоциации, оживляющие теорию.

Непривычность геометрии векторного пространства может быть связана также с особенностями поля  $\mathfrak{K}$ . Если, например,  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ , то прямая над  $\mathbb{C}$  — это одномерное координатное пространство  $\mathbb{C}^1$ . Её наглядным геометрическим изображением служит плоскость комплексных чисел  $\mathbb{R}^2$ , которую не нужно путать с  $\mathbb{C}^2$ . Числу  $z = x + iy \in \mathbb{C}^1$  отвечает точка  $(x, y) \in \mathbb{R}$ ; умножение на  $a \neq 0$  соответствует

растяжению в  $|a|$  раз и повороту на угол  $\arg a$  против часовой стрелки. В частности, при  $a = -1$  ограничение на  $\mathbb{R}^1$  поворота  $\mathbb{C}^1$  на  $180^\circ$  даёт “переворачивание” прямой  $\mathbb{R}^1$ . В гл. 3, § 4 будут изложены операции комплексификации и овеществления, позволяющие использовать преимущества алгебраической замкнутости поля  $\mathbb{C}$  (для работы с вещественными векторными пространствами), а  $n$ -мерное комплексное пространство  $\mathbb{C}^n$  представить как  $2n$ -мерное вещественное пространство  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Отметим ещё, что физическое пространство  $\mathbb{R}_{\Phi}^3$  гораздо богаче, чем координатное пространство той же размерности, поскольку в  $\mathbb{R}_{\Phi}^3$  определены длины векторов и углы между ними, площади и объёмы фигур. Вся эта дополнительная информация невольно переносится на чертежи, призванные отразить свойства абстрактных векторных пространств, аксиоматика которых пока бедна. Её обогащение метрическими понятиями в полной мере реализуется лишь в последующих главах.

В какой степени векторное пространство  $V$  несёт отпечаток свойств поля скаляров, видно также из того, что если  $\mathfrak{K}$  — конечное поле, то геометрические образы, привнесённые из  $\mathbb{R}^3$ , являются “дырявыми” (следствие дискретности  $\mathfrak{K}$ ). Но этот недостаток  $\mathfrak{K}$  можно иногда обыграть (рис. 1), ассоциируя с линейной геометрией над  $\mathfrak{K}$  дискретные картинки иного рода. Например,  $n$ -мерное координатное пространство  $\mathbb{F}_2^n$  над полем из двух элементов  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$  допускает естественное отождествление с множеством вершин  $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n); \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1\}$   $n$ -мерного куба в  $\mathbb{R}^n$ .

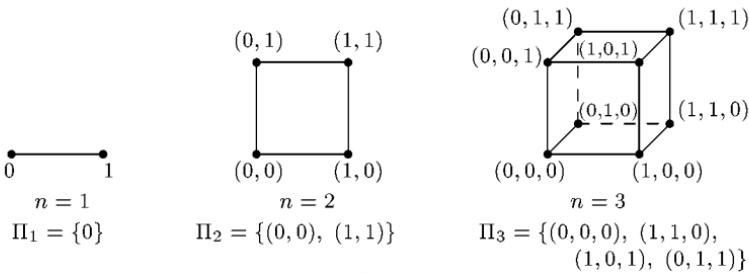


Рис. 1

Подпространство  $\Pi_n$ , состоящее из точек  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  с  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = 0$  (напомним, что  $1+0=0+1=1; 0+0=0=1+1$ ), задаёт простейший код, исправляющий одну ошибку (см. [BA I, гл. 4, § 4, п. 7]). Именно, условившись, что закодированным сигналам соответствуют только точки  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \Pi_n$ , и приняв сигнал  $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$  с  $\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \dots + \varepsilon'_n = 1$ , мы с полным основанием можем считать, что при передаче сообщения произошло его искажение внешними помехами. Наш код с проверкой на чётность не обнаружит, конечно, двух искажений, поскольку тогда  $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n) \in \Pi_n$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Образуют ли следующие множества векторные пространства над полем  $\mathbb{R}$ :

- а) матрицы из  $M_n(\mathbb{R})$  фиксированного ранга  $r$ ;
- б) симметричные матрицы ( ${}^t A = A$ ) из  $M_n(\mathbb{R})$ ;
- в) кососимметричные матрицы ( ${}^t A = -A$ ) из  $M_n(\mathbb{R})$ ;
- г) матрицы из  $M_n(\mathbb{R})$  с нулевым определителем;

д) матрицы из  $M_n(\mathbb{R})$  с нулевым следом  $\text{tr } A = 0$  (след матрицы  $A = (a_{ij})$  определяется соотношением  $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ );

е) матрицы из  $M_n(\mathbb{R})$  с положительным следом;  
ж) многочлены вида  $f(t) = (a_1 + \dots + a_n) - a_1 t - \dots - a_n t^n$  при фиксированном  $n$  ( $a_i \in \mathbb{R}$ )?

2. Сколько элементов существует в координатном пространстве  $\mathbb{F}_p^n$  векторов-строк  $(x_1, \dots, x_n)$  длины  $n$  над конечным полем  $\mathbb{F}_p$  из  $p$  элементов? Сколько решений в  $\mathbb{F}_p^n$  имеет уравнение  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  (не все  $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$  равны нулю)?

## § 2. Размерность и базис

**1. Линейная зависимость.** Действуя по аналогии с [ВА I, гл. 2], введём следующее

**Определение 1.** Векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  пространства  $V$  называются *линейно зависимыми*, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулю; другими словами, найдутся такие скаляры  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , не все равные нулю, что

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = 0.$$

В противном случае система векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  называется *линейно независимой*.

Когда среди векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  имеется нулевой, эти векторы не могут быть линейно независимыми: если, например,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ , то, положив  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , мы получим нетривиальную линейную комбинацию, равную нулю.

**Теорема 1.** Векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ,  $n \geq 2$ , линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных. Система векторов  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  линейно зависима, коль скоро некоторая её подсистема линейно зависима. Другими словами, если система векторов линейно независима, то и всякая её подсистема также линейно независима.

Мы сознательно опустили доказательство, поскольку оно достаточно очевидно и является повторением доказательства соответствующей теоремы из [ВА I, гл. 2, § 1]. Фактически там же доказана

**Теорема 2.** Если в пространстве  $V$  каждый из векторов линейно независимой системы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$  является линейной комбинацией векторов системы  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t$ , то  $s \leq t$ .

**Доказательство.** Вспомним, как мы рассуждали ранее (чуть в иных обозначениях). По условию имеем

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_{11}\mathbf{f}_1 + \alpha_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_{t1}\mathbf{f}_t,$$

· · · · · · · · · · · ·

$$\mathbf{e}_s = \alpha_{1s}\mathbf{f}_1 + \alpha_{2s}\mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_{ts}\mathbf{f}_t,$$

где  $\alpha_{ij}$  — какие-то скаляры. Предположим, что  $s > t$ . Составим линейную комбинацию векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$  с коэффициентами  $x_j$ :

$$x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_s\mathbf{e}_s =$$

$$= (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1s}x_s)\mathbf{f}_1 + \dots + (\alpha_{t1}x_1 + \alpha_{t2}x_2 + \dots + \alpha_{ts}x_s)\mathbf{f}_t,$$

и рассмотрим систему из  $t$  линейных уравнений с  $s$  неизвестными

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1s}x_s = 0,$$

· · · · · · · · · · · ·

$$\alpha_{t1}x_1 + \alpha_{t2}x_2 + \dots + \alpha_{ts}x_s = 0.$$

Так как по предположению  $s > t$ , то наша однородная система обладает ненулевым решением  $(\beta_1, \dots, \beta_s)$  (см. в этой связи [ВА I, гл. 1, § 3, следствие 2], а также [ВА I, гл. 4, § 3]), где сделано важное для нас замечание о линейных системах с коэффициентами из произвольного поля скаляров). Это значит, что  $\beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_s\mathbf{e}_s = \mathbf{0}$  — нетривиальная линейная зависимость, наличие которой, однако, противоречит условию теоремы. Стало быть,  $s \leq t$ .  $\square$

**Следствие.** *Любые две эквивалентные линейно независимые системы векторов в  $V$  содержат одинаковое число (возможно, бесконечное) векторов.*

При этом две системы векторов мы считаем *эквивалентными*, когда каждый вектор одной системы является линейной комбинацией векторов другой системы. Разумеется эквивалентные линейно зависимые системы могут состоять из разного числа векторов так же, как одна из эквивалентных систем может быть линейно независимой, а другая линейно зависимой. Но если в данной системе векторов из  $V$  мы возьмём какие-то две максимальные линейно независимые подсистемы (*максимальные* — значит не допускающие расширения до линейно независимых подсистем из большего числа векторов), то в этих подсистемах будет одинаковое число векторов. Для доказательства достаточно применить теоремы 1 и 2.

**Определение 2.** Число векторов, содержащихся в любой максимальной линейно независимой подсистеме данной системы векторов, называется *рангом* этой системы.

В применении к пространству  $V$  установленные нами факты допускают несколько иную интерпретацию, которая будет играть основополагающую роль во всём дальнейшем изложении.

**2. Размерность векторного пространства и его базис.**

Могут представиться два случая: либо в пространстве  $V$  можно найти произвольное число линейно независимых векторов (системы векторов произвольного ранга), и тогда оно называется *бесконечномерным*, либо все достаточно большие системы векторов в  $V$  линейно зависимы. Бесконечномерные линейные пространства, содержательная теория которых предполагает наличие в них дополнительной, обычно топологической структуры, будут рассматриваться лишь эпизодически.

**Определение 3.** Линейное пространство  $V$ , в котором существует  $n$  линейно независимых векторов, но нет линейно независимых систем с большим числом векторов (большего ранга), называется *n-мерным* (в записи:  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$  или просто  $\dim V = n$ ). Нулевое пространство считается *нульмерным*.

Это определение хорошо согласуется с понятием размерности прямой (одномерное пространство), плоскости ( $n = 2$ ), пространства  $\mathbb{R}_{\Phi}^3$  ( $n = 3$ ). В новой терминологии ранг семейства векторов  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots\}$  есть не что иное как размерность линейной оболочки  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \rangle$ .

**Примеры.** 1) Координатное пространство  $\mathbb{K}^n$  имеет размерность  $n$  (ср. [ВА I, гл. 2]). Если бы это было не так, то наше определение размерности следовало признать неполноценным.

2) Пространство матриц размера  $m \times n$  имеет размерность  $mn$ , в чём легко убедиться, расположив элементы матрицы в одну строку длины  $mn$  и отождествив пространство  $m \times n$ -матриц с координатным пространством  $\mathbb{K}^{mn}$ .

3) Пространство функций в примере 4 из § 1, очевидно, бесконечномерно.

4) Пространство  $P_n$  многочленов степени  $\leq n - 1$  от одной переменной, очевидно,  $n$ -мерно. Линейно независимыми будут, например, векторы  $1, t, \dots, t^{n-1}$ .

5) Пространство однородных форм степени  $k$  от  $m$  переменных имеет размерность  $n = \binom{k+m-1}{k}$  (проверьте это).

В двух последних примерах без труда указываются системы из  $n$  линейно независимых векторов. Для определения размерности необходимо, однако, убедиться в том, что в этих пространствах нет систем большего ранга. Перебора всевозможных систем можно избежать, как нетрудно сообразить, если использовать теорему 2 или её следствия.

**Определение 4.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . Любая система из  $n$  линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in V$  называется (конечным линейным) *базисом* пространства  $V$ .

Удобно считать, что базис нульмерного пространства образует пустое множество векторов. Существование базиса в  $V$  вытекает из определения  $n$ -мерного пространства. Следующая теорема показывает, в частности, каким образом можно фактически строить новый базис, исходя из заданного.

**Теорема 3.** Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{K}$  с базисом  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

- i) каждый вектор  $\mathbf{v} \in V$  можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ;  
ii) всякую систему из  $s \leq n$  линейно независимых векторов  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$  пространства  $V$  можно дополнить до базиса. В частности, любой вектор  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  можно включить в базис.

**Доказательство.** i) Присоединив к данному базису произвольный вектор  $\mathbf{v} \in V$ , мы получим согласно определению  $n$ -мерного пространства линейно зависимую систему, причём в нетривиальном соотношении

$$\alpha\mathbf{v} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

коэффициент  $\alpha$  должен быть отличен от нуля. Следовательно,

$$\mathbf{v} = (-\alpha^{-1}\alpha_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_n)\mathbf{e}_n$$

— линейная комбинация базисных векторов.

Из существования двух разложений

$$\beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n = \mathbf{v} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \dots + \gamma_n\mathbf{e}_n$$

мы получили бы после вычитания соотношение

$$(\beta_1 - \gamma_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\beta_n - \gamma_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

но ввиду линейной независимости  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  отсюда вытекало бы равенство нулю всех коэффициентов:

$$\beta_1 - \gamma_1 = \dots = \beta_n - \gamma_n = 0,$$

т.е.  $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_n = \gamma_n$ . Тем самым установлена единственность разложения.

ii) Рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n. \quad (1)$$

Выбросим теперь из системы (1) все те векторы, которые выражаются линейно через предыдущие. По условию  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$  линейно независимы, поэтому ни один из них выброшен не будет, и оставшаяся система примет вид

$$\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s; \mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_t}. \quad (2)$$

Любое нетривиальное соотношение

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_s\mathbf{f}_s + \beta_1\mathbf{e}_{i_1} + \dots + \beta_t\mathbf{e}_{i_t} = \mathbf{0}$$

содержало бы коэффициент  $\beta_k \neq 0$  с максимальным номером  $k$ , и мы выразили бы вектор  $\mathbf{e}_{i_k}$  через предыдущие векторы системы (2), что исключено по построению. С другой стороны, согласно i) все векторы из  $V$  выражаются линейно через базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , тем более через систему (1), а стало быть, и через систему (2). Таким образом, линейно независимая система (2) максимальна. Она будет базисом пространства  $V$ , а  $\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_t}$  — искомым дополнением.  $\square$

Рассуждение, использованное при доказательстве утверждения ii), называют по традиции *принципом Стейница о замене*. Тривиальным следствием утверждения ii) является импликация

$$V_1 \subsetneq V_2 \implies r_1 < r_2,$$

где  $V_1, V_2$  — подпространства в  $V$  размерностей соответственно  $r_1, r_2$ .

**Замечание 1.** Число элементов базиса конечномерного пространства  $V$  не зависит от базиса, и иногда базис считается просто подмножеством в  $V$ , но вопрос о нумерации базисных элементов (или о порядке элементов базиса) приобретает значение при использовании матричного формализма, как это будет ясно из дальнейшего. Структура на множестве индексов базиса чаще всего определяется существом дела. Не всегда в качестве индексов берутся натуральные числа. Так, базис  $(\delta_x | x \in X)$  из дельта-функций (см. пример 4 из § 1) пространства  $\mathbb{K}^X$  ( $\mathbb{K}$  — поле,  $|X| < \infty$ ) естественно нумеруется элементами  $x \in X$ . Если вдобавок  $X$  — конечная группа, то линейное пространство  $\mathbb{K}^X$  функций на  $X$  со значениями в поле  $\mathbb{K}$  можно превратить в алгебру размерности  $|X|$  над  $\mathbb{K}$  (см. определение в конце п. 2 из § 1), положив

$$\delta_x * \delta_{x'} = \delta_{xx'} \quad \forall x, x' \in X$$

и распространив умножение на все функции  $f = \sum f(x)\delta_x, g = \sum g(x')\delta_{x'}$  по линейности:

$$f * g = \sum_{x, x' \in X} f(x)g(x')\delta_{xx'} = \sum_{y \in X} \left( \sum_{x \in X} f(x)g(x^{-1}y) \right) \delta_y.$$

Эта операция носит название *свёртки функций*. Если  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и мы возьмём в  $V$  базис  $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ ,  $\Delta_i = \delta_{x_i}$ , пронумерованный натуральными числами, то сразу же возникнет затруднение с определением номера  $k$  в формуле  $\Delta_i * \Delta_j = \Delta_k$ .

**3. Координаты. Изоморфизм пространств.** В силу теоремы 3 имеет смысл следующее

**Определение 5.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{K}$ . Скаляры  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ , входящие в разложение

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

называются *координатами* вектора  $\mathbf{v} \in V$  в данном базисе.

Если  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n$ , то  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{e}_n$ , т.е. при сложении векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  их координаты складываются. Так как, далее,  $\lambda \mathbf{x} = \lambda \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda \alpha_n \mathbf{e}_n$ , то при умножении  $\mathbf{x}$  на скаляр  $\lambda$  координаты вектора  $\mathbf{x}$  умножаются на тот же скаляр. Вектор, все координаты которого равны нулю, совпадает с нулевым вектором.

Если  $P_n$  — пространство, векторами которого являются многочлены из  $\mathbb{R}[t]$  степени  $\leq n-1$ , то, как уже отмечалось, один из базисов

составляют векторы  $\mathbf{e}_0 = 1$ ,  $\mathbf{e}_1 = t$ , ...,  $\mathbf{e}_{n-1} = t^{n-1}$ . В этом базисе координатами многочлена  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$  будут его коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ . Но тот же многочлен  $f(t)$ , записанный в виде

$$f(t) = f(\alpha) + f'(\alpha)(t - \alpha) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(t - \alpha)^{n-1},$$

будет иметь в базисе  $\mathbf{e}'_0 = 1$ ,  $\mathbf{e}'_1 = t - \alpha$ , ...,  $\mathbf{e}'_{n-1} = (t - \alpha)^{n-1}$  координаты

$$f(\alpha), \quad f'(\alpha), \quad \dots, \quad \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}.$$

В  $\mathbb{R}^n$  координатами вектора  $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  относительно базиса  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$  (раньше мы писали  $E_{(1)}, E_{(2)}, \dots, E_{(n)}$ ) являются числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (поэтому это пространство и называется координатным), но в  $\mathbb{R}^n$  имеется бесчисленное множество других базисов, в которых координатами того же вектора  $\mathbf{x}$  будут новые системы чисел.

Рассмотрим теперь эту ситуацию в общем случае. Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $\mathfrak{K}$  и  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  — какие-то два его базиса. Векторы одного базиса выражаются через векторы другого:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты  $a_{ij} \in \mathfrak{K}$  определяют матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

называемую *матрицей перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  к  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$* . Следует подчеркнуть тот факт, что координатами вектора  $\mathbf{e}'_j$  относительно базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  служат элементы  $j$ -го столбца матрицы  $A$ .

Пусть координатами вектора  $\mathbf{v} \in V$  будут  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  и  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  — в каком-то новом базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , т.е.

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \mathbf{v} = \lambda'_1\mathbf{e}'_1 + \dots + \lambda'_n\mathbf{e}'_n.$$

После подстановки вместо  $\mathbf{e}'_j$  их выражений (3) через  $\mathbf{e}_i$  мы получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n &= \lambda'_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda'_n(a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_{11}\lambda'_1 + a_{12}\lambda'_2 + \dots + a_{1n}\lambda'_n, \\ &\vdots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \lambda_n &= a_{n1}\lambda'_1 + a_{n2}\lambda'_2 + \dots + a_{nn}\lambda'_n,\end{aligned}\tag{4}$$

или, как мы писали в [ВА I, гл. 2],

$$X = AX',\tag{4'}$$

где  $X = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ ,  $X' = [\lambda'_1, \dots, \lambda'_n]$  — столбцы старых и новых координат.

Формулы (4), (4') выражают старые координаты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  вектора  $v$  через его новые координаты  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  при помощи линейного преобразования переменных с матрицей  $A$ . Мы могли бы с самого начала выразить  $e_1, \dots, e_n$  через  $e'_1, \dots, e'_n$  (оба базиса в  $V$  равноправны), и тогда получились бы формулы

$$\lambda'_i = a'_{i1}\lambda_1 + a'_{i2}\lambda_2 + \dots + a'_{in}\lambda_n, \quad 1 \leq i \leq n.\tag{5}$$

Их существование означает, что линейное преобразование с матрицей  $A$  обратимо, т.е.  $\det A \neq 0$ , и (5) принимает вид

$$X' = A^{-1}X, \quad A^{-1} = (a'_{ij}).$$

Итак, справедлива

**Теорема 4.** При переходе от базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  пространства  $V$  к базису  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , определяемом матрицей  $A$ , координаты вектора в новом базисе выражаются через старые координаты при помощи обратимого линейного преобразования с матрицей  $A^{-1}$ .

Важно отметить, что при явном выражении нового (штрихованного) базиса через исходный по формуле (3) естественным образом старые координаты выражаются через новые (штрихованные) по формуле (4) (обратить внимание на порядок суммирования), в то время как выражение новых координат через старые требует трудоёмкой операции обращения матрицы перехода. Использование координат позволяет свести операции над векторами к действиям над скалярами (скажем, над числами из  $\mathbb{R}$ ), а выбор разумной системы координат (базиса) зачастую существенно упрощает вычисления. Понятие базиса или координатной системы мы используем теперь для того, чтобы алгебраически отождествить векторные пространства одинаковой размерности.

**Определение 6.** Векторные пространства  $V$  и  $W$  над полем  $\mathfrak{K}$  называются *изоморфными*, если существует биективное отображение  $f: V \rightarrow W$ , для которого

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)\tag{6}$$

при всех  $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ ,  $u, v \in V$ .

Другими словами,  $f$  — изоморфизм аддитивных групп пространств  $V$  и  $W$ , обладающий дополнительным свойством  $f(\alpha u) =$

$= \alpha f(\mathbf{u})$ . Говорят также, что отображение  $f$  линейно над  $\mathbb{K}$ , или  $\mathbb{K}$ -линейно. Из определения изоморфизма групп вытекает, что отображение  $f^{-1}$  будет также изоморфизмом  $W$  и  $V$ . Кроме того, композиция изоморфизмов

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

будет изоморфизмом  $f \circ g: U \rightarrow W$ . Непосредственно видно, что размерность является инвариантом изоморфизма: если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис в  $V$ , то  $(f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n))$  — базис в  $W$ , и обратно. Других инвариантов изоморфизма нет, как показывает

**Теорема 5.** Все векторные пространства одинаковой размерности  $n$  над  $\mathbb{K}$  изоморфны. Более точно: все они изоморфны координатному пространству  $\mathbb{K}^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — какой-нибудь базис  $n$ -мерного пространства  $V$ . Координаты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  произвольного вектора  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$  однозначно определены, поэтому соответствие

$$f: \mathbf{x} \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

между векторами из  $V$  и  $\mathbb{K}^n$  биективно. Если  $\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n$ , то

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} = (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (\alpha \alpha_n + \beta \beta_n) \mathbf{e}_n.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) &= (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1, \dots, \alpha \alpha_n + \beta \beta_n) = \\ &= \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \beta(\beta_1, \dots, \beta_n) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

что и является выражением свойств изоморфизма.  $\square$

Доказанная теорема в сущности утверждает, что, выбрав базис в  $V$ , мы придём к  $\mathbb{K}^n$ . Однако было бы крайне неудобно ограничиваться изучением линейных задач только в  $\mathbb{K}^n$ , поскольку подлинной целью является получение результатов, совсем не зависящих от специальных свойств базиса. Кроме того, при переходе к  $\mathbb{K}^n$  утрачивается наглядный характер многих векторных пространств таких, как обычное трехмерное пространство, пространство многочленов и др.

**Предупреждение.** Изоморфизм между двумя векторными пространствами  $V, W$ , если он существует, определён однозначно только в двух частных случаях: а)  $V = W = \{\mathbf{0}\}$ ; б)  $\dim V = 1 = \dim W$ ,  $\mathbb{K}$  — поле из двух элементов (попробуйте доказать это). Во всех остальных случаях изоморфизмы много.

Иногда бывает, что между двумя векторными пространствами определён некоторый изоморфизм, не зависящий от какого-либо произвола, например от выбора базисов в  $V$  и  $W$ . Такие изоморфизмы мы будем называть *каноническими* или *естественными*, в отличие от всех остальных — “случайных”. Характерный пример естественного изоморфизма нам встретится в следующем параграфе.

**4. Пересечение и сумма подпространств.** Хорошо известные теоретико-множественные операции пересечения и объединения мы применим к подпространствам. Пересечение  $U_1 \cap U_2$  двух подпространств  $U_1, U_2 \subset V$ , очевидно, является подпространством. То же относится и к пересечению  $U = \bigcap_{i \in I} U_i$  любого семейства  $\{U_i \mid i \in I\}$  подпространств (возможно, что  $U$  — нулевое подпространство). Действительно, нулевой вектор, входящий во все  $U_i$ , входит в  $U$ , так что  $U$  непусто. Если, далее,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ , то любая их линейная комбинация  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$  входит во все  $U_i$  и, следовательно,  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$ .

Заметим, что объединение  $U_1 \cup U_2$  двух подпространств не обязательно является подпространством. Если, например,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — линейно независимые векторы в  $V$  и  $U_1 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ ,  $U_2 = \langle \mathbf{e}_2 \rangle$ , то  $U_1 \cup U_2$  не содержит  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ .

Наименьшим подпространством в  $V$ , содержащим  $U_1$  и  $U_2$ , является, очевидно,

$$U = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2\}.$$

Это подпространство называется *суммой*  $U_1, U_2$  и обозначается  $U_1 + U_2$ . Ясно, что  $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$ , причём  $U_1 + U_2 = U_2$  тогда и только тогда, когда  $U_1 \subset U_2$ . Аналогично определяется сумма любого конечного числа векторных подпространств  $U_1, \dots, U_m$ . Именно, под  $U_1 + \dots + U_m$  понимается наименьшее векторное подпространство, содержащее все векторы из  $U_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , а также их всевозможные линейные комбинации. При этом не делается никакой расстановки скобок, поскольку  $U_i + (U_j + U_k) = (U_i + U_j) + U_k$ .

Если  $A, B$  — какие-то фигуры в трёхмерном физическом пространстве, возможно, с непустым пересечением  $A \cap B$  и  $\text{vol}(A)$ ,  $\text{vol}(B)$  — их объёмы, то справедливо соотношение

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B).$$

Его аналог в случае пространств выражает

**Теорема 6.** Пусть  $U$  и  $W$  — конечномерные подпространства векторного пространства  $V$ . Тогда<sup>1)</sup>

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \quad (7)$$

**Доказательство.** Положим

$$\dim U = k, \quad \dim W = l, \quad \dim(U \cap W) = m.$$

Так как  $(U \cap W) \subset U, W$ , то  $m \leq k, m \leq l$ . Выберем в  $U \cap W$  какой-нибудь базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  и, опираясь на теорему 3, дополним его, с одной стороны, до базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-m})$  подпространства  $U$ , а с другой — до базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l-m})$  подпространства  $W$ . Каждый вектор суммы  $U + W$  имеет вид  $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ ,

<sup>1)</sup>Формула (7) связывается с именем Г. Грассмана (1809–1877).

где  $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ , а это значит, что

$$U + W = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l-m} \rangle.$$

Если мы покажем, что система

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l-m}$$

линейно независима и, стало быть, имеет место соотношение

$$\dim(U + V) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m,$$

совпадающее с (7), то доказательство будет завершено. Предположим, что это не так, и пусть

$$\sum_{s=1}^m \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \quad (*)$$

— нетривиальное линейное соотношение. Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^m \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i = - \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j,$$

где в левой части равенства стоит элемент из  $U$ , а в правой — элемент из  $W$ . Значит, перед нами вектор из  $U \cap W$ , и мы можем записать  $-\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \sum_{s=1}^m \delta_s \mathbf{e}_s$ , или

$$\sum_{s=1}^m \delta_s \mathbf{e}_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}.$$

Но линейная зависимость базисной системы  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{l-m}\}$  подпространства  $W$  должна быть тривиальной. В частности,  $\beta_1 = \dots = \beta_{l-m} = 0$ , и соотношение (\*), превратившееся теперь в линейную зависимость базисной системы  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-m}\}$  подпространства  $U$ , также должно быть тривиальным:  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-m} = 0$ . Мы пришли к желаемому противоречию.  $\square$

Так как размерность суммы  $U + W$  не превосходит размерности объемлющего пространства  $V$ , то на основании теоремы 6 часто можно делать заключение о нетривиальности пересечения подпространств. Например, две плоскости трёхмерного пространства или два трёхмерных подпространства пятимерного векторного пространства обязательно содержат общую прямую, поскольку в обоих случаях  $\dim U + \dim W > \dim V$ .

По поводу используемой терминологии сделаем следующее

**Замечание 2.** В  $n$ -мерном пространстве  $V$  существуют подпространства всех меньших размерностей, в чём легко убедиться, включив  $V$  в цепочку подпространств

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1} \subset V_n = V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

где  $V_i = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \rangle$ . Одномерные векторные пространства называют *пряммыми*, двумерные — *плоскостями*,  $k$ -мерные при  $k \geq 3$  —  *$k$ -мерными плоскостями*. Пусть  $U$  — подпространство векторного пространства  $V$ . Разность

$$\text{codim } U = \dim V - \dim U$$

называется *коразмерностью* подпространства  $U$ . Любое подпространство коразмерности 1 называется *гиперплоскостью*. Понятие гиперплоскости относительно: прямая является гиперплоскостью двумерного векторного пространства  $W$ , но перестаёт быть таковой, если  $W$  рассматривается как плоскость векторного пространства  $V$  большей размерности.

**5. Прямые суммы.** В сумме ненулевых линейных подпространств

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_m \quad (8)$$

любой вектор  $u \in U$  записывается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m, \quad \mathbf{u}_i \in U_i, \quad (9)$$

вообще говоря, неоднозначно.

**Определение 7.** Если каждый вектор  $\mathbf{u} \in U$  может быть представлен одним и только одним способом в виде (9), то сумма (8) называется *прямой* и обозначается

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_m.$$

Сумма (8) будет прямой и в том случае, когда однозначность записи (9) имеет место лишь для нулевого вектора, т.е.

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m \implies \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{u}_2 = 0, \dots, \mathbf{u}_m = 0.$$

В самом деле, если это более слабое условие выполнено, то из двух разложений

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m = \mathbf{u} = \mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \dots + \mathbf{u}'_m$$

следовало бы  $\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}'_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}'_2) + \dots + (\mathbf{u}_m - \mathbf{u}'_m)$ , где  $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}'_i \in U_i$ . По предположению  $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}'_i = \mathbf{0}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , или  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}_m = \mathbf{u}'_m$ , т.е. выполнено свойство разложения в прямую сумму.

Условимся в обозначении:

$$U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m = U_1 + \dots + U_{i-1} + U_{i+1} + \dots + U_m.$$

**Теорема 7.** Сумма  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_m$  является прямой тогда и только тогда, когда

$$U_i \cap (U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m) = \mathbf{0} \quad (10)$$

для  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Доказательство.** Предположим, что наша сумма прямая. Рассмотрим произвольный вектор  $\mathbf{x} \in U_i \cap (U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m)$ , где

индекс  $i$  фиксирован. Тогда  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \dots + \widehat{\mathbf{u}}_i + \dots + \mathbf{u}_m$ , и для нулевого вектора мы получим два разложения

$$\begin{aligned}\mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dots + \mathbf{0} &= \mathbf{0} \\ &= \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{i-1} + (-\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i+1} + \dots + \mathbf{u}_m.\end{aligned}$$

Так как сумма прямая, то эти разложения должны совпадать. В частности,  $-\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , и, следовательно, равенство (10) выполнено.

Обратно, предполагая справедливым (10), докажем единственность разложения нулевого вектора (этого, как мы знаем, достаточно, чтобы сумма была прямой). В самом деле, будем исходить из какого-нибудь разложения

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_i + \dots + \mathbf{a}_m.$$

Тогда при любом  $i = 1, 2, \dots, m$  имеем

$$\begin{aligned}-\mathbf{a}_i &= \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_{i+1} + \dots + \mathbf{a}_m \in \\ &\in U_i \cap (U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Стало быть,  $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ .  $\square$

В случае  $m = 2$  теорема 7 принимает особенно простую форму: *сумма  $U = U_1 + U_2$  прямая  $\iff U_1 \cap U_2 = \mathbf{0}$ .* В частности, привлекая соотношение (7), получаем, что  $\dim U = \dim U_1 + \dim U_2$ . Обобщение этого свойства выражает

**Теорема 8.** *Сумма  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_m$  является прямой тогда и только тогда, когда*

$$\dim U = \sum_{i=1}^m \dim U_i. \quad (11)$$

**Доказательство.** Проводим его индукцией по  $m$ . При  $m = 2$  справедливость утверждения отмечена выше, а в случае произвольного  $m$  воспользуемся теоремами 6 и 7. Именно, если сумма прямая, то прямой будет и сумма  $U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m$ , а тогда

$$\begin{aligned}\dim U &= \dim U_i + \dim(U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m) - \\ &- \dim U_i \cap (U_1 + \dots + \widehat{U}_i + \dots + U_m) = \\ &= \dim U_i + (\dim U_1 + \dots + \dim \widehat{U}_i + \dots + \dim U_m) - 0 = \sum_{i=1}^m \dim U_i.\end{aligned}$$

Обратно, если формула (11) верна, то объединение базисов подпространств  $U_i$  будет базисом в  $U$ , и, значит, сумма прямая.  $\square$

Вариацией на ту же тему служит

**Теорема 9.** *Для любого  $m$ -мерного подпространства  $U$  некоторого пространства  $V$  размерности  $n$  найдётся такое  $(n-m)$ -мерное подпространство  $W$ , что  $V = U \oplus W$  ( $U$  и  $W$  называются дополнительными подпространствами).*

**Доказательство.** Результат получается немедленно, если произвольный базис  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$  в  $U$  дополнить до базиса  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-m})$  в  $V$  (воспользовавшись теоремой 3) и положить  $W = \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-m} \rangle$ .  $\square$

Рассматривая прямые суммы, мы действовали пока в фиксированном векторном пространстве  $V$ ; такие прямые суммы часто называют *внутренними*. Но иногда возникает необходимость в рассмотрении *внешней* прямой суммы  $U \oplus W$  двух векторных пространств над одним и тем же полем  $\mathbb{K}$ , заранее никаку не вложенных в качестве подпространств. Под  $U \oplus W$  в этом случае понимается совокупность  $V = U \times W$  всевозможных упорядоченных пар  $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$  с  $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$ . Операции сложения векторов из  $V$  и умножения их на скаляры определены формулой

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{u}', \mathbf{w}') = (\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}', \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}').$$

Это похоже на построение плоскости по двум её координатным осям.

Векторы  $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$  порождают в  $V$  подпространство  $\tilde{U}$ , изоморфное  $U$ , а векторы  $(\mathbf{0}, \mathbf{w})$  порождают подпространство  $\tilde{W}$ , изоморфное  $W$ . Изоморфизмы  $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \mapsto \mathbf{u}$ ,  $(\mathbf{0}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{w}$  здесь очевидны; вместе с тем можно записать

$$\underbrace{U \oplus W}_{\text{внешняя}} = V = \underbrace{\tilde{U} \oplus \tilde{W}}_{\text{внутренняя}},$$

поскольку на  $\tilde{U} \oplus \tilde{W}$  мы уже смотрим как на прямую сумму подпространств данного нам векторного пространства  $V$ . В дальнейшем речь будет идти преимущественно о внутренних прямых суммах, поэтому всякие спецификации опускаются.

**6. Факторпространства.** К заданному подпространству  $L \subset V$  существует, вообще говоря, много дополнительных подпространств  $M \subset V$ , для которых  $V = L \oplus M$ . Но все такие дополнения изоморфны одному векторному пространству, которое строится по  $V$  и  $L$  абсолютно инвариантным способом, не связанным с каким-либо произволом.

Будем смотреть на  $V$  и  $L$  как на аддитивные абелевы группы. Множество

$$\mathbf{x} + L = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in L \}$$

называется *смежным классом*  $V$  по  $L$ , вектор  $\mathbf{x}$  — *представителем* этого смежного класса. Если  $\mathbf{0} \neq \mathbf{z} \in (\mathbf{x} + L) \cap (\mathbf{x}' + L)$ , то  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{z}$  и  $\mathbf{x} + L = \mathbf{x}' + L = \mathbf{z} + L$ . Поэтому два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном  $L$  положим  $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + L$ . Каждый вектор  $\mathbf{v} \in V$  попадает в какой-то смежный класс, и если  $\bar{V} = V/L$  — множество всех смежных классов  $V$  по  $L$ , то на  $\bar{V}$  устанавливается структура абелевой группы по правилу  $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}'} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$ . Операции коммутативности и ассоциатив-

ности проверяются непосредственно. Понятно, что  $\bar{\mathbf{0}} = L$  — нулевой элемент этой абелевой группы:  $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{x}}$ . Далее,  $-\bar{\mathbf{x}} = \bar{-\mathbf{x}}$ .

Положив  $\lambda\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda\mathbf{x}}$ , т.е.  $\lambda(\mathbf{x} + L) = \lambda\mathbf{x} + L \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ , мы легко убеждаемся в том, что выполнены все аксиомы ВП<sub>1</sub>–ВП<sub>8</sub> из § 1. Например,

$$1 \cdot (\mathbf{x} + L) = 1 \cdot \mathbf{x} + L = \mathbf{x} + L,$$

$$\alpha(\beta(\mathbf{x} + L)) = \alpha(\beta\mathbf{x} + L) = \alpha\beta\mathbf{x} + L = (\alpha\beta)(\mathbf{x} + L).$$

Таким образом,  $\bar{V} = V/L$  наделено естественным образом структурой векторного пространства, которое и называется *факторпространством* пространства  $V$  по подпространству  $L$  (или по модулю  $L$ ). Вместо смежных классов мы могли бы рассматривать классы по отношению эквивалентности, определенному сравнением

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' \pmod{L} \iff \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L,$$

но это была бы перефразировка сказанного.

**Пример 7.** Пусть  $V = \mathbb{R}^2$  — координатная плоскость, а  $L$  — ось  $x$ . Дополнительным подпространством  $M$  служит любая прямая, проходящая через  $O$  и отличная от горизонтальной оси (рис. 2).

Дополнение  $M$  пересекает каждую прямую, параллельную оси  $x$ , точно в одной точке, так что  $M$  параметризует множество всех таких прямых. Это множество как раз и есть  $V/L$ .

**Теорема 10.** Пусть  $V = L \oplus M$  — прямая сумма подпространств,  $L, M \subset V$ . Тогда отображение  $f: \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + L$  ( $\mathbf{u} \in M$ ) является изоморфизмом между  $M$  и  $V/L$ .

**Доказательство.** В самом деле,  $f$  — линейное отображение, поскольку

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + L = \alpha(\mathbf{u} + L) + \beta(\mathbf{v} + L) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}).$$

Пусть  $\mathbf{v} + L$  — произвольный элемент из  $V/L$ . По условию  $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \in L$ ,  $\mathbf{y} \in M$ , так что  $\mathbf{v} + L = \mathbf{x} + \mathbf{y} + L = (\mathbf{x} + L) + (\mathbf{y} + L) = L + (\mathbf{y} + L) = \mathbf{y} + L = f(\mathbf{y})$ . Это доказывает сюръективность  $f$ . Если, далее,  $\mathbf{u} \in \text{Ker } f$ , то  $\mathbf{u} + L = L$ , откуда  $\mathbf{u} \in L$ . Но  $\mathbf{u} \in M$ , а  $L \cap M = \mathbf{0}$ . Поэтому  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , так что  $\text{Ker } f = \mathbf{0}$ . Стало быть,  $f$  — биективное отображение.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $L$  — произвольное подпространство в  $V$ . Тогда

$$\dim V/L = \dim V - \dim L.$$

Другими словами,  $\dim V/L = \text{codim}_V L$ .

**Доказательство.** По теореме 9 найдётся такое подпространство  $M \subset V$ , что  $V = L \oplus M$ , причём  $\dim M = \dim V - \dim L$ . По только что доказанной теореме 10 это подпространство  $M$  изоморфно факторпространству  $V/L$ .  $\square$

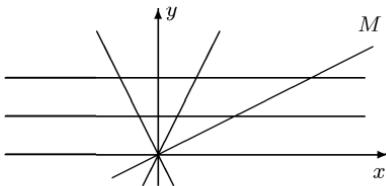


Рис. 2

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Сколько  $k$ -мерных подпространств,  $1 \leq k \leq n$ , у  $n$ -мерного векторного пространства  $V$  над полем  $\mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов?

**2.** Выяснить, какова размерность пространства вещественных квадратных матриц порядка  $n$ : а) симметричных; б) кососимметричных; в) с нулевым следом.

**3.** Какова размерность пространства всех многочленов  $f(t)$  степени  $\leq n$  от одной переменной с условием  $f(1) = 0$ ? Найти базис этого пространства.

**4.** Доказать, что сумма  $U = U_1 + U_2 + \dots + U_m$  является прямой в точности тогда, когда

$$(U_1 + \dots + U_{i-1}) \cap U_i = \mathbf{0}, \quad 1 < i \leq m.$$

**5.** Найти матрицу перехода от базиса  $(1, t, \dots, t^{n-1})$  пространства  $P_n$  к базису  $(1, (t - \alpha), \dots, (t - \alpha)^{n-1})$  того же пространства.

**6.** Пусть  $\theta$  — комплексный корень неприводимого над  $\mathbb{Q}$  многочлена  $f \in \mathbb{Q}[t]$ . Найти размерность над  $\mathbb{Q}$  пространства  $\mathbb{Q}[\alpha] = \langle 1, \theta, \dots, \theta^k, \dots \rangle_{\mathbb{Q}}$ .

**7.** Доказать, что для прямых сумм не выполняется закон сокращения, т.е. из равенства сумм  $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$  с одинаковым слагаемым  $U$ , вообще говоря, не следует, что  $W_1 = W_2$ .

**8.** Выяснить, конечномерно ли факторпространство  $\mathbb{K}[t]/L$ , где:

а)  $L$  — подпространство  $P_n$  многочленов от  $t$  степени  $\leq n-1$ ;

б)  $L$  — подпространство многочленов, делящихся на  $t^n$ ;

в)  $L$  — подпространство многочленов от  $t^2$ ?

**9.** Доказать следующий аналог формулы Грассмана:

$$\text{codim}(U + W) + \text{codim}(U \cap W) = \text{codim } U + \text{codim } W$$

( $U$  и  $W$  — подпространства конечной коразмерности не обязательно конечномерного векторного пространства  $V$ ).

**10.** Следуя терминологии примера 8 из § 1, выделим тривиальные полумагические матрицы

$$0, \quad E = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & \ddots & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос: каковы размерности  $\dim \text{SMag}_n(\mathbb{Q})$  и  $\dim \text{Mag}_n(\mathbb{Q})$ ? Очевидно,  $\text{SMag}_2(\mathbb{Q}) = \langle E, D \rangle_{\mathbb{Q}}$ . В этом случае  $S = E + D$  — единственная с точностью до рационального множителя магическая матрица. При  $n = 3$  можно указать менее очевидную магическую матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислить указанные выше размерности при  $n = 3$  и  $n = 4$ .

**11.** Доказать разложение в прямую сумму

$$\text{SMag}_n(\mathbb{Q}) = \text{Mag}_n(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}E \oplus \mathbb{Q}D.$$

**12.** Пусть  $V_1, \dots, V_k$  — подпространства  $n$ -мерного векторного пространства  $V$ . Доказать, что если  $\dim V_1 + \dots + \dim V_k > n(k-1)$ , то  $\bigcap_{i=1}^k U_i \neq \mathbf{0}$  (прямое обобщение утверждений, вытекающих из формулы (7)).

### § 3. Двойственное пространство

**1. Линейные функции.** Любому векторному пространству  $V$  конечной размерности над полем  $\mathbb{K}$  можно сопоставить другое векторное пространство, находящееся с  $V$  в специальном отношении двойственности. С этой целью введём

Определение 1. Отображение  $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ , обладающее свойством

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) \quad \forall \alpha, \beta \in F; \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

называется *линейной функцией* на  $V$  (*линейной формой* или *линейным функционалом*; последний термин чаще используется в теории бесконечномерных пространств).

Выберем в  $V$  какой-нибудь базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Тогда результат применения линейной функции  $f$  к вектору  $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$  запишется в виде

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n, \tag{1}$$

где  $\beta_i = f(\mathbf{e}_i)$  — скаляры, зависящие только от выбора базиса. Обратно: непосредственно видно, что при заданном базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  произвольным скалярам  $\beta_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , отвечает, и притом только одна, линейная функция. Важно, однако, помнить, что как в определении линейной функции, так и в эквивалентных ему соотношениях

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$$

нет упоминания о каком-либо выборе базиса, т.е. определение линейной функции инвариантно (не связано с выбором базиса). Представляя значения линейной функции  $f$  в виде (1), мы должны знать правила, по которым меняются коэффициенты  $\beta_i = f(\mathbf{e}_i)$  при переходе от одного базиса к другому. Пусть

$$\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = V = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle,$$

$$\mathbf{e}'_j = a_{1j} \mathbf{e}_1 + a_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj} \mathbf{e}_n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

— формулы перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  к базису  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ . Если теперь

$$\lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n = f(\mathbf{v}) = \lambda'_1 \beta'_1 + \dots + \lambda'_n \beta'_n,$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$  — координаты вектора  $\mathbf{v} \in V$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  и  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  соответственно, то, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \beta'_j &= f(\mathbf{e}'_j) = f(a_{1j} \mathbf{e}_1 + a_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj} \mathbf{e}_n) = \\ &= a_{1j} f(\mathbf{e}_1) + a_{2j} f(\mathbf{e}_2) + \dots + a_{nj} f(\mathbf{e}_n) = \\ &= a_{1j} \beta_1 + a_{2j} \beta_2 + \dots + a_{nj} \beta_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Стало быть, базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одним и тем же формулам, т.е. согласованно или, как еще говорят, когредиентно.

**2. Двойственное пространство и двойственный базис.** Имея линейные функции  $f, g$  на  $V$ , мы можем рассмотреть их линейную комбинацию  $\alpha f + \beta g$  с  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , полагая

$$(\alpha f + \beta g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Непосредственно проверяется, что  $\alpha f + \beta g$  является линейной функцией и, следовательно, имеет смысл.

**Определение 2.** Относительно введённых операций сложения и умножения на скаляры линейные функции составляют векторное пространство  $V^* = \mathcal{L}(V, F)$ , *двойственное (сопряжённое или дуальное)* к  $V$ .

**Замечание.** При одновременном рассмотрении пространств  $V$  и  $V^*$  элементы из  $V^*$  называются *ковариантными векторами* (или *ковекторами*), а элементы из  $V$  — *контравариантными векторами*. В рамках общей теории тензоров, которой мы уделим особое внимание в гл. 6, ковекторы относятся к тензорам типа  $(1, 0)$  (*ковариантные тензоры ранга 1*), а векторы — к тензорам типа  $(0, 1)$  (*контравариантные тензоры ранга 1*). Переходя к новой терминологии, мы назовём тензором типа  $(1, 0)$  соответствие, относящее каждому базису пространства  $V$  систему из  $n$  скаляров  $\beta_1, \dots, \beta_n$  таким образом, что нештрихованные и штрихованные системы, отвечающие базисам  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  и  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , где

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

связаны между собой соотношениями (2). Для тензоров типа  $(0, 1)$ , определяемых системами скаляров  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$  в соответствующих базисах, то же самое выражается соотношениями (4) из § 2. Приставки *ко* и *contra* часто встречаются в математике (ковариантные и контравариантные функторы в самом общем понимании), но их смысл всегда примерно одинаков и в какой-то степени иллюстрируется рассмотренными простейшими примерами. Общепринятые обозначения тензоров будут введены позднее.

Мы видели, что при заданном базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  имеется взаимно однозначное соответствие  $\Phi: f \mapsto (\beta_1, \dots, \beta_n)$  между линейными функциями и системами из  $n$  скаляров. Эти системы мы отождествляем с векторами координатного пространства  $\mathbb{K}^n$  и замечаем, что если  $f \mapsto (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $g \mapsto (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , то

$$f + g \mapsto (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n), \quad \lambda f \mapsto (\lambda \beta_1, \dots, \lambda \beta_n).$$

Таким образом,  $\Phi$  — изоморфизм векторных пространств  $V^*$  и  $\mathbb{K}^n$ ; в частности  $\dim V^* = \dim \mathbb{K}^n = n$ .

Задав скаляры  $\beta_j = 0$  для  $j \neq i$ ,  $\beta_i = 1$ , и положив

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \dots, n,$$

мы определим линейную функцию  $e^i \in V^*$ :

$$e^i\left(\sum \lambda_j \mathbf{e}_j\right) = \sum \lambda_j e^i(\mathbf{e}_j) = \sum \lambda_j \beta_j = \lambda_i.$$

Функции  $e^1, \dots, e^n$ , очевидно, линейно независимы, поскольку независимы соответствующие им векторы-строки  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  в  $\mathbb{K}^n$ .

Тем самым доказана

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\mathbb{K}$ . Тогда двойственное пространство  $V^*$  также имеет размерность  $n$ . Если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис в  $V$ , а  $e^1, \dots, e^n$  — линейные функции, для которых

$$e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

то  $(e^1, \dots, e^n)$  — базис в  $V^*$ .

**Определение 3.** Базис  $(e^1, \dots, e^n)$  пространства  $V^*$ , указанный в формулировке теоремы 1, называется *двойственным (дуальным или взаимным)* для данного базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ .

Само название пространства  $V^*$ , двойственного к  $V$ , и двойственных базисов  $(e^1, \dots, e^n), (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  связано “двусторонней симметрией” между  $V$  и  $V^*$ , свойства которой будут раскрываться нами постепенно, по мере введения новых понятий. Условимся временно вместо  $f(\mathbf{x})$  писать  $(f, \mathbf{x})$  — намёк на скалярное произведение векторов, взятых, однако, из разных пространств. Тем самым определяется отображение  $V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , линейное по каждому аргументу:

$$(\alpha f + \beta g, \mathbf{x}) = \alpha(f, \mathbf{x}) + \beta(g, \mathbf{x}), \quad (f, \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha(f, \mathbf{x}) + \beta(f, \mathbf{y}). \quad (3)$$

Отображения  $V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  с таким свойством принято называть *билинейными*, а также *спариваниями* между пространствами  $V$  и  $W$ . Рассматриваемое нами спаривание между  $V^*$  и  $V$  называется *каноническим*.

Пользуясь двойственными базисами и представляя через них элементы

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad f = \beta_1 e^1 + \beta_2 e^2 + \dots + \beta_n e^n,$$

легко вычислить значение

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n.$$

С другой стороны, получаются удобные формулы для вычисления координат  $\alpha_k$  вектора  $\mathbf{x}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  и координат  $\beta_i$  ковектора (линейной функции)  $f$  в базисе  $(e^1, \dots, e^n)$ :

$$\alpha_k = (e^k, \mathbf{x}), \quad \beta_k = (f, \mathbf{e}_k). \quad (4)$$

В самом деле,

$$(e^k, \mathbf{x}) = (e^k, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \sum_i \alpha_i (e^k, \mathbf{e}_i) = \alpha_k,$$

$$(f, \mathbf{e}_k) = \left( \sum_i \beta_i e^i, \mathbf{e}_k \right) = \sum_i \beta_i (e^i, \mathbf{e}_k) = \beta_k.$$

**Пример.** Пусть  $V = P_n = \langle 1, t, \dots, t^{n-1} \rangle$  —  $n$ -мерное вещественное векторное пространство многочленов степени  $\leq n - 1$ . Отображение  $f_\lambda: \varphi \mapsto \varphi(\lambda)$ , ставящее в соответствие каждому многочлену  $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 t + \dots + \varphi_{n-1} t^{n-1}$  его значение в точке  $\lambda \in \mathbb{R}$ , очевидно, линейно. Меняя  $\lambda$ , мы можем получить некоторый базис двойственного пространства  $V^*$ . Удобно ввести ещё функции  $f: V \mapsto \mathbb{R}$  вида  $f(\varphi) = \mu \varphi^{(k)}(\lambda)$ , где  $\varphi^{(k)}$  —  $k$ -я производная многочлена  $\varphi$ , а  $\mu, \lambda$  — некоторые фиксированные числа. Так как  $f(\alpha\varphi + \beta\psi) = \mu(\alpha\varphi + \beta\psi)^{(k)}(\lambda) = \mu(\alpha\varphi^{(k)}(\lambda) + \beta\psi^{(k)}(\lambda)) = \alpha f(\varphi) + \beta f(\psi)$ , то  $f \in V^*$ . В частности, линейные функции

$$e^k: \varphi \mapsto \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

составляют базис в  $V^*$ , двойственный к  $1, t, \dots, t^{n-1}$ . Базисом, двойственным к  $1, (t - \lambda), \dots, (t - \lambda)^{n-1}$ , будет набор функций  $\varphi \mapsto \varphi^{(k)}(\lambda)/k!$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . В этой связи стоит вспомнить о коэффициентах разложения функции в ряд Тейлора.

**3. Рефлексивность.** Простое сопоставление теоремы 1 и теоремы 5 из § 2 приводит нас к заключению, что по крайней мере в случае  $\dim V < \infty$  существует изоморфизм  $V^* \cong V$ . По тем же причинам будут изоморфны пространства  $V^*$  и  $V^{**} = (V^*)^*$ . По определению  $V^{**}$  — пространство, двойственное к  $V^*$ , т.е. пространство линейных функций на  $V^*$ . На первый взгляд, кажется затруднительно разумным образом интерпретировать его элементы в терминах исходного пространства  $V$ . Между тем,  $V^{**}$  находится в естественном соответствии с  $V$ , как показывает

**Теорема 2.** *Существует канонический изоморфизм  $\varepsilon: V \rightarrow V^{**}$ , определённый формулами*

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\mathbf{x}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\mathbf{x} \in V$ ,  $f \in V^*$ ,  $\varepsilon_{\mathbf{x}} \in V^{**}$ .

**Доказательство.** Линейность  $\varepsilon$  проверяется непосредственно. Действительно,  $\varepsilon_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}}(f) = f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) = \alpha\varepsilon_{\mathbf{x}}(f) + \beta\varepsilon_{\mathbf{y}}(f) = (\alpha\varepsilon_{\mathbf{x}} + \beta\varepsilon_{\mathbf{y}})(f)$  для всякой линейной функции  $f: V \rightarrow F$ . Отсюда  $\varepsilon_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}} = \alpha\varepsilon_{\mathbf{x}} + \beta\varepsilon_{\mathbf{y}}$ , т.е.  $\varepsilon(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\varepsilon(\mathbf{x}) + \beta\varepsilon(\mathbf{y})$ .

Чтобы убедиться в биективности  $\varepsilon$ , выберем в  $V$  и  $V^*$  двойственные базисы  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ ,  $V^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle$ . Тогда

$$\varepsilon_{\mathbf{e}_j}(e^i) = e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}.$$

Апеллируя к доказательству теоремы 1, мы видим, что справедливо равенство  $V^{**} = \langle \varepsilon_{\mathbf{e}_1}, \varepsilon_{\mathbf{e}_2}, \dots, \varepsilon_{\mathbf{e}_n} \rangle$ , т.е.  $(\varepsilon_{\mathbf{e}_j})$  — базис в  $V^{**}$ , двойственный к  $(e^i)$ . Сюръективность и инъективность  $\varepsilon$  теперь очевидны.

Каноничность изоморфизма  $\varepsilon$  заключена в его определении.  $\square$

**Определение 4.** Свойство векторных пространств, выраженное в наличии естественного изоморфизма между  $V$  и  $V^{**}$ , называется *рефлексивностью*.

Рефлексивность делает пространства  $V$  и  $V^{**}$  совершенно равноправными. Отождествив  $V^{**}$  с  $V$  посредством естественного изоморфизма  $\varepsilon$  из теоремы 2, мы можем считать  $V$  пространством линейных функций на  $V^*$  и придать новый смысл формулам спаривания (3):  $\mathbf{x}(f) = (f, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . В частности, для всякого базиса в  $V^*$  существует однозначно определённый двойственный ему базис в  $V$ .

**4. Критерий линейной независимости.** Используя понятие двойственного пространства  $V^*$ , удобно формулировать различные критерии линейной независимости векторов пространства  $V$ . Вначале доказывается

**Лемма 1.** Если  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  — линейно зависимые векторы из  $V$ , а  $f_1, \dots, f_m$  — произвольные линейные функции на  $V$ , то

$$\det(f_i(\mathbf{a}_j)) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

( $i$  — номер строки,  $j$  — номер столбца).

**Доказательство.** В силу линейной зависимости векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  один из них, скажем,  $\mathbf{a}_m$ , является линейной комбинацией остальных (теорема 1 из § 2). Пусть  $\mathbf{a}_m = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{a}_{m-1}$ . В определителе  $\det(f_i(\mathbf{a}_j))$  вычтем из последнего столбца первый, умноженный на  $\alpha_1$ , второй, умноженный на  $\alpha_2$ , и, наконец, ( $m - 1$ )-й, умноженный на  $\alpha_{m-1}$ . Мы знаем, что при этих преобразованиях величина определителя не изменится. Вместе с тем на  $i$ -м месте последнего столбца будет стоять  $f_i(\mathbf{a}_m) - \alpha_1 f_i(\mathbf{a}_1) - \dots - \alpha_{m-1} f_i(\mathbf{a}_{m-1}) = f_i(\mathbf{a}_m - \alpha_1 \mathbf{a}_1 - \dots - \alpha_{m-1} \mathbf{a}_{m-1}) = f_i(\mathbf{0}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Поэтому определитель равен нулю.  $\square$

**Лемма 2.** Если  $(f_1, \dots, f_n)$  — базис пространства  $V^*$ , двойственного к  $V$ , то векторы  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$  будут независимы тогда и только тогда, когда

$$\det(f_i(\mathbf{a}_j)) \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Доказательство.** По лемме 1 линейная зависимость векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  влечёт равенство определителя нулю. Пусть теперь они линейно независимы, так что  $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ . Обозначим через  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  базис в  $V$ , двойственный к  $(f_1, \dots, f_n)$ , а через  $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}$  — координаты вектора  $\mathbf{a}_j$  в этом базисе. Тогда

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  к  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ . По

теореме 4 из § 2 она обратима и, следовательно,  $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ . Но  $\alpha_{ij} = f_i(\mathbf{a}_j)$  (см. (4)), откуда и следует, что  $\det(f_i(\mathbf{a}_j)) \neq 0$ .  $\square$

**Теорема 3.** Пусть  $(f_1, \dots, f_n)$  — базис пространства  $V^*$ , двойственного к  $V$ . Тогда ранг системы векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$  равен наибольшему порядку отличного от нуля определителя вида

$$\det(f_i(\mathbf{a}_j)), \quad (5)$$

$$1 \leq i = i_1, \dots, i_m \leq n; \quad 1 \leq j = j_1, \dots, j_m \leq k.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $r$  ранг системы векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ . Любые  $m > r$  векторов  $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_m}$  линейно зависимы и, значит, по лемме 1 любой определитель вида (5) порядка  $m > r$  равен нулю.

Остается доказать, что существует определитель (5) порядка  $r$ , отличный от нуля. С этой целью обозначим через  $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_n}$  ограничения линейных функций  $f_1, \dots, f_n$  на подпространство  $U = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ . Докажем сначала, что

$$\langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle = U^*, \quad (6)$$

где  $U^*$  — подпространство, двойственное к  $U$ .

В самом деле, включение  $\langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle \subseteq U^*$  очевидно. Пусть, далее,  $\tilde{f}$  — любой вектор из  $U^*$ ,  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$  — базис в  $U$ , а  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r; \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$  — его дополнение до базиса в  $V$ . Рассмотрим линейную функцию  $f \in V^*$ , для которой  $f(\mathbf{e}_i) = \tilde{f}(\mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ ;  $f(\mathbf{e}_i) = 0$ ,  $i = r+1, \dots, n$  (существует функция  $f \in V^*$  с любыми, а следовательно, и с этими значениями). Так как  $V^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ , то  $f = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$ . Ограничим в этом равенстве все функции на  $U$ . Очевидно,  $\overline{f} = f|_U = \tilde{f}$ , поскольку  $f$  и  $\tilde{f}$  принимают одинаковые значения на базисных векторах  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$  пространства  $U$ . Таким образом,  $\tilde{f} = \overline{f} = \beta_1 \overline{f_1} + \dots + \beta_n \overline{f_n}$ , откуда следует, что  $\tilde{f} \in \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle$ , т. е.  $U^* \subseteq \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle$ . Тем самым равенство (6) доказано.

Выберем, наконец,  $r$  линейно независимых векторов как среди  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  (пусть ими будут  $\mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_r}$ ), так и среди  $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_n}$  (пусть ими будут  $\overline{f_{i_1}}, \dots, \overline{f_{i_r}}$ ). Они составляют базисы в соответствующих подпространствах  $U, U^*$  и по лемме 2

$$\det(\overline{f_i}(\mathbf{a}_j)) \neq 0, \quad i = i_1, \dots, i_r; \quad j = j_1, \dots, j_r.$$

Остается заметить, что  $\overline{f_i}(\mathbf{a}_j) = f_i(\mathbf{a}_j)$ .  $\square$

Мы снова подошли вплотную к понятию ранга матрицы (см. [BA I, гл. 2, § 2]), но останавливаться ещё раз на его свойствах не имеет смысла.

**5. Геометрическая интерпретация решений ЛОС.** Напомним, что линейная однородная система (ЛОС) с  $n$  неизвестными совместна, а если интерпретировать её решения как векторы пространства  $\mathbb{K}^n$  строк (или столбцов) над основным полем  $\mathbb{K}$  (что мы

и делали), то в  $\mathbb{K}^n$  выделяется подпространство  $U$  решений нашей системы. Встанем на несколько более абстрактную точку зрения. По своему определению ЛОС размера  $m \times n$  записывается коротко в виде

$$f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_m(\mathbf{x}) = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор  $n$ -мерного пространства  $V$ , а  $f_1, \dots, f_m \in V^*$ . Чтобы вернуться к обычной записи, достаточно выбрать в  $V$  какой-нибудь базис.

**Теорема 4. i)** *Если ранг системы  $f_1, \dots, f_m \in V^*$  равен  $r$ , то размерность пространства  $U \subset V$  решений ЛОС (7) равна  $n - r$  ( $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ ).*

**ii)** *Любое подпространство  $U \subset V$  является пространством решений некоторой системы (6).*

**Доказательство.** Утверждение i) было доказано в [BA I, гл. 2, § 3], но теперь соответствующие рассуждения будут восприниматься более естественно. Итак, без ограничения общности считаем линейно независимыми векторы  $f_1, \dots, f_r$ . Тогда остальные  $f_i$  будут их линейными комбинациями, а система (7) на самом деле равносильна системе

$$f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_r(\mathbf{x}) = 0. \quad (7')$$

Дополним  $f_1, \dots, f_r$  до базиса  $(e^1, \dots, e^n)$  пространства  $V^*$  ( $e^i = f_i$  при  $i \leq r$ ). Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис в  $V$ , двойственный к  $(e^1, \dots, e^n)$ . Тогда при любом  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  система (7') принимает вид  $x_1 = \dots = x_r = 0$ . Следовательно, пространство решений  $U$  системы (7') состоит из векторов  $\mathbf{x} = x_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ , т.е.  $U = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ . Заметим, что  $x_{r+1}, \dots, x_n$  играют роль свободных неизвестных. Так как  $\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n$  линейно независимы, то  $\dim U = n - r$ .

ii) Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  — базис подпространства  $U \subset V$ , являющийся частью базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  всего пространства  $V$ . Вектор  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  в точности тогда принадлежит  $U$ , когда  $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$ . Выберем в  $V^*$  базис  $(f_1, \dots, f_n)$ , двойственный к  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Тогда  $x_i = f_i(x)$ , и условие  $x \in U$  записывается в виде  $f_{s+1}(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_n(\mathbf{x}) = 0$ .  $\square$

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Как легко вытекает из определения (см. упр. 1 из § 1), функция следа  $\text{tr} : X \mapsto \text{tr } X$  линейна на пространстве  $V = M_n(\mathbb{K})$  всех квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $\mathbb{K}$ . Доказать, что каждая линейная функция  $f$  на  $V$  имеет вид  $f(X) = \text{tr } AX$ , причём матрица  $A = A_f$  однозначно определена.

**2.** Пусть  $a(t)$  — фиксированный многочлен из  $\mathbb{R}[t]$ ,  $P_n$  — подпространство вещественных многочленов степени  $\leq n - 1$ . Рассмотрим следующие функции на  $P_n$ :

$$\text{a) } f(u) = \int_{-1}^1 a(t) u(t) dt, \quad u(t) \in P_n;$$

б)  $f(u) = \int_0^1 a(t) u(t^2) dt;$

в)  $f(u) = \int_0^1 a(t) [u(t)]^2 dt;$

г)  $f(u) = \frac{d^3}{dt^3} \Big|_{t=-1}.$

Какие из этих функций линейны на  $P_n$ ?

3. Пусть  $V$  — векторное пространство, и пусть функции  $f, g \in V^*$  таковы, что  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ . Доказать, что тогда  $g = \lambda f$  для некоторого скаляра  $\lambda$ .

4. Пусть  $\mathbf{x}$  — ненулевой вектор пространства  $V$ . Однозначно ли определяется функция  $f \in V^*$  условием  $f(\mathbf{x}) = 1$ ?

5. Доказать, что для всякой ненулевой линейной функции  $f$  на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{K}$  найдётся базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  такой, что

$$f(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_i \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{K}.$$

## § 4. Билинейные и квадратичные формы

**1. Полилинейные отображения.** При первом чтении этот пункт можно опустить. Понятие ковектора (линейной функции на  $V$ ), уже проявившее свою работоспособность, допускает далеко идущее обобщение.

Рассмотрим векторные пространства  $V_1, \dots, V_p; U$  над  $\mathbb{K}$ . Отображение

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p \rightarrow U$$

называется *полилинейным* (в данном случае *p-линейным*, если для каждого индекса  $i = 1, \dots, p$  и для любых фиксированных векторов  $\mathbf{a}_j \in V_j$ ,  $1 \leq j \leq p$ ,  $j \neq i$ , отображение

$$f_i: \mathbf{v} \mapsto f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{v}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_p)$$

является линейной формой (линейной функцией), т.е.

$$f_i(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f_i(\mathbf{x}) + \beta f_i(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \quad (1)$$

Изучение линейных отображений вида (1) мы продолжим в гл. 2, сейчас же сделаем только одно общее замечание. Как и в случае линейных функций, нетрудно убедиться в том, что линейная комбинация  $\alpha f + \beta g$  двух *p*-линейных отображений снова является *p*-линейным отображением. Это обстоятельство позволяет рассматривать множество  $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_p; U)$  всех *p*-линейных отображений  $V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow U$  как векторное пространство над  $\mathbb{K}$ .

Мы получим простейший пример, взяв  $V_1 = V_2 = \dots = V_p = U = \mathbb{K}$  (одномерные векторные пространства) и положив

$$f(v_1, \dots, v_p) = v_1 \dots v_p.$$

Более общо: любое полилинейное отображение  $V_1 \times \dots \times V_p$  в  $\mathbb{K}$  называется *полилинейной формой* на  $V_1 \times \dots \times V_p$ . Если, скажем,

$l^i : \mathbf{v}_i \mapsto l^i(\mathbf{v}_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , — какие-то линейные функции на  $V_i$ , то функция  $f$ , определённая соотношением

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = l^1(\mathbf{v}_1) \dots l^p(\mathbf{v}_p),$$

будет полилинейной формой на  $V_1 \times \dots \times V_p$ . Она называется *тензорным произведением* линейных функций (форм)  $l^1, \dots, l^p$  и обозначается  $f = l^1 \otimes l^2 \otimes \dots \otimes l^p$  или просто  $l^1 l^2 \dots l^p$  (порядок существен).

Можно доказать, что произвольная полилинейная форма на  $V_1 \times \dots \times V_p$  является суммой тензорных произведений линейных форм, но пока этот факт нам не понадобится. При  $V_1 = \dots = V_p = V$  полагаем  $V^p = V \times \dots \times V$  (декартово произведение  $p$  экземпляров множества  $V$ ). В этом случае удобным является обозначение

$$\mathcal{L}_p(V, \mathfrak{K}) = \mathcal{L}(V, \dots, V; \mathfrak{K}).$$

Полилинейная форма  $f$  на  $V^p \times V^{*q}$  будет впоследствии названа нами тензором типа  $(p, q)$  и валентности  $p + q$ . То, что тензоры типа  $(0, 1)$  можно считать векторами из  $V$ , есть следствие отмеченного в § 3, п. 3 свойства рефлексивности.

Полилинейная форма  $f$  на  $V^p$  (тензор типа  $(p, 0)$ ) называется *симметричной*, если

$$f(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \mathbf{v}_{\pi(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(p)}) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$$

для любых  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$  и для любой перестановки  $\pi \in S_p$ . Если же

$$f(\mathbf{v}_{\pi(1)}, \mathbf{v}_{\pi(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\pi(p)}) = \varepsilon_\pi f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p),$$

где  $\varepsilon_\pi$  — чётность перестановки, то  $f$  называется *кососимметричной* (или *знакопеременной*) формой. В случае  $\dim V = p$  мы знаем хороший пример кососимметричной формы — это определитель матрицы  $A$ , рассматриваемый как функция её строк или столбцов.

Цель данных здесь общих определений заключается лишь в том, чтобы уложить в общую схему все частные понятия, с которыми мы уже встречались и которые нам еще предстоит изучить. Тензорными обозначениями в общем виде мы воспользуемся лишь в гл. 6.

**2. Билинейные формы.** Мы ограничимся пока случаем  $V_1 = V_2 = V$  и будем говорить о *билинейной* ( $p = 2$ ) форме  $f$  на  $V$  (а не на  $V^2$ , что было бы более правильным). В соответствии с общим определением, *билинейная форма*  $f$  на векторном пространстве  $V$  над  $\mathfrak{K}$  характеризуется свойствами

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \\ f(\mathbf{w}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) &= \alpha f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \end{aligned} \tag{2}$$

для всех  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ,  $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ . Заметим, что, вообще говоря,  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ .

Выбрав в  $V$  некоторый базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  и выразив  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  через их координаты

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + \dots + y_n \mathbf{e}_n,$$

мы используем определяющие свойства (2) для записи значения  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  формы  $f$  через  $n^2$  скаляров  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . Именно,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_i x_i \mathbf{e}_i, \sum_j y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_i x_i f\left(\mathbf{e}_i, \sum_j y_j \mathbf{e}_j\right) = \\ &= \sum_i x_i \sum_j y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i y_j, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ .

Матрица  $F = (f_{ij})$  называется *матрицей билинейной формы*  $f$  на  $V$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Введя в рассмотрение координатную  $n \times 1$ -матрицу (столбец)  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  и транспонированную с ней координатную  $1 \times n$ -матрицу (строку)  ${}^t X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , мы перепишем выражение (3) в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X \cdot F \cdot Y. \quad (4)$$

Для этого нужно лишь воспользоваться известными правилами умножения матриц размеров  $1 \times n$ ,  $n \times n$ ,  $n \times 1$ .

Обратно, имея квадратную матрицу  $F = (f_{ij})$ , мы при помощи соотношения (4)(или (3)) определим на  $V$  билинейную форму  $f$ , полагая  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f_{ij}$ . Таким образом, при заданном базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  векторного пространства над  $\mathfrak{K}$  имеется взаимно однозначное соответствие между квадратными  $n \times n$ -матрицами над  $\mathfrak{K}$  и билинейными формами на  $V$  ( $n = \dim_{\mathfrak{K}} V$ ). Это соответствие является на самом деле изоморфизмом векторного пространства  $\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$  всех билинейных форм  $V \times V \rightarrow \mathfrak{K}$  (если  $f, g \in \mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$ , то и  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$ ; проверка очевидна) на векторное пространство  $M_n(\mathfrak{K})$  всех квадратных матриц порядка  $n$  над  $\mathfrak{K}$ . Действительно, если

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X F Y, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X G Y,$$

то

$$\alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X \cdot (\alpha F + \beta G) \cdot Y.$$

**3. Закон изменения матрицы билинейной формы.** Аксиоматическое определение билинейной формы  $f$  свойствами (2) свободно от выбора какого бы то ни было базиса в  $V$ . Чтобы матричная запись  $f$  имела реальную ценность, нужно соответствие  $f \mapsto F$  дополнить правилом изменения матрицы  $F$  при переходе к новому базису. Пусть наряду с  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $V$  задан еще один базис  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  вместе с матрицей перехода  $A = (a_{ij})$ :

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Если  $x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = \mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n$ , то координатные столбцы  $X$  и  $X'$  связаны соотношением  $X = A \cdot X'$ . Пусть теперь

$F = (f_{ij})$  — матрица билинейной формы  $f$  в базисе  $(\mathbf{e}_i)$ , а  $F' = (f'_{ij})$  — матрица той же формы  $f$  в базисе  $(\mathbf{e}'_i)$ , т.е.  $f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  и  $f'_{ij} = f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j)$ . Так как  ${}^t(AX') = {}^tX' \cdot {}^tA$  и так как значение  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  вообще не зависит от выбора базиса, то

$$\begin{aligned} {}^tX' \cdot F' \cdot Y' &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^tX \cdot F \cdot Y = \\ &= {}^t(AX') \cdot F \cdot (AY') = {}^tX' \cdot {}^tA \cdot F \cdot A \cdot Y'. \end{aligned}$$

Сравнивая левую и правую части этого равенства, мы приходим к заключению, что имеет место

**Теорема 1.** *Матрицы  $F$  и  $F'$  билинейной формы  $f$  на  $V$  в базисах  $(\mathbf{e}_i)$  и  $(\mathbf{e}'_i)$  связаны соотношением*

$$F' = {}^tA \cdot F \cdot A, \quad (5)$$

где  $A$  — матрица перехода от  $(\mathbf{e}_i)$  к  $(\mathbf{e}'_i)$ .

**Определение 1.** Матрицы  $F$  и  $F' = {}^tAFA$  с  $\det A \neq 0$  называются *конгруэнтными*. Рангом билинейной формы  $f$  называется ранг соответствующей ей в каком-нибудь базисе  $(\mathbf{e}_i)$  матрицы  $F$ .

**Следствие.** Ранг ранг  $f$  билинейной формы  $f$  является её инвариантом, не зависящим от выбора базиса.

**Доказательство.** Применить следствие 1 теоремы 5 из [ВА I, гл. 3, § 3] к конгруэнтным матрицам (5).  $\square$

Утверждение о ранге билинейной формы можно доказать ещё и так. Обозначим через  $L_f$  множество тех  $\mathbf{x} \in V$ , для которых  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  при всех  $\mathbf{y} \in V$ . Короче:  $f(\mathbf{x}, V) = 0$ . Очевидная проверка показывает, что  $L_f$  — подпространство в  $V$ . Его называют *левым радикалом* или *ядром* формы  $f$ . Ясно, что  $\dim L_f$  — величина, зависящая только от  $f$ . Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис в  $V$ . Условие  $\mathbf{x} \in L_f$  равносильно тому, что

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = 0, \dots, f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_n) = 0.$$

Эта система уравнений определяется линейными функциями  $\mathbf{x} \mapsto \mapsto f_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Координатами функций  $f_j$  являются скаляры  $f_j(\mathbf{e}_i)$ , т.е. коэффициенты  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f_{ij}$   $i$ -й строки матрицы  $F$ . Стало быть, ранг системы линейных форм  $f_1, \dots, f_n \in V^*$  совпадает с рангом матрицы  $F = (f_{ij})$ , и если он равен  $r$ , то по теореме 7 из [ВА I, гл. 2, § 3] имеет место равенство  $\dim L_f = n - r$ . Другими словами,

$$r = \dim V - \dim L_f$$

— величина, не зависящая от какого бы то ни было базиса.

**4. Симметричные и кососимметричные формы.** В соответствии с п. 1 билинейная форма  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  называется *симметричной*, когда  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , и *кососимметричной*, когда  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Эта терминология хорошо соглашается с понятиями симметричных и кососимметричных многочленов (см. [ВА I]), а также *симметричной матрицы*  $A = (a_{ij})$ , когда

${}^t A = A$ , и кососимметричной, когда  ${}^t A = -A$ . Так как  $f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = {}^t f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  (транспонирование  $1 \times 1$ -матрицы, т.е. скаляра), то из  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , в соответствии с соотношением (4) следует

$$\begin{aligned} {}^t X \cdot F \cdot Y &= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \varepsilon \cdot {}^t f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \\ &= \varepsilon \cdot {}^t ({}^t Y \cdot F \cdot X) = \varepsilon \cdot {}^t X \cdot {}^t F \cdot Y, \end{aligned}$$

откуда  ${}^t F = \varepsilon F$ . Обратно: если  ${}^t F = \varepsilon F$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , то билинейная форма  $f$ , отвечающая матрице  $F$ , будет удовлетворять соотношению  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

Остается еще добавить, что согласно (5)

$$F' = {}^t A \cdot F \cdot A \implies {}^t F' = {}^t A \cdot {}^t F \cdot A = \varepsilon \cdot {}^t A \cdot F \cdot A = \varepsilon F',$$

поэтому свойство симметричности или кососимметричности матрицы  $F$  для  $f$  не зависит от выбора базиса. Таким образом, билинейная форма  $f$  симметрична или кососимметрична в точности тогда, когда её матрица  $F$  относительно любого базиса в  $V$  симметрична или соответственно кососимметрична.

**Теорема 2.** *Если  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$ , то пространство  $\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$  всех билинейных форм является прямой суммой*

$$\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K}) = \mathcal{L}_2^+(V, \mathfrak{K}) \oplus \mathcal{L}_2^-(V, \mathfrak{K})$$

подпространств  $\mathcal{L}_2^+(V, \mathfrak{K})$ ,  $\mathcal{L}_2^-(V, \mathfrak{K})$  симметричных и кососимметричных билинейных форм.

**Доказательство.** Если  $f \in \mathcal{L}_2^+(V, \mathfrak{K}) \cap \mathcal{L}_2^-(V, \mathfrak{K})$ , то

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \implies 2f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \implies f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

(поскольку по условию  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$ ), откуда  $f = 0$ . Следовательно, сумма  $\mathcal{L}_2^+ + \mathcal{L}_2^-$  прямая.

С другой стороны, соотношение

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\} + \frac{1}{2} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}$$

или соответствующее матричное соотношение

$$F = \frac{1}{2}(F + {}^t F) + \frac{1}{2}(F - {}^t F)$$

показывает, что всякая билинейная форма  $f$  представляется в виде суммы симметричной и кососимметричной форм.  $\square$

Над  $\mathfrak{K} = Z_2$  каждая кососимметричная матрица симметрична, и поэтому утверждение теоремы перестаёт быть верным, поскольку, например, матрица  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  не является симметричной. Имеется ещё понятие *знакопеременной* билинейной формы  $f$ :  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V$ , которое, однако, при  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$  совпадает с понятием кососимметричной формы (проверьте это). В дальнейшем предполагается, что  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$ .

**5. Квадратичные формы.** Рассмотрение симметричных билинейных форм приводит к следующему важному понятию, которое естественным образом возникает в разных разделах математики.

**Определение 2.** *Квадратичной формой* на конечномерном векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{K}$  называется функция  $q: V \rightarrow \mathbb{K}$ , обладающая двумя свойствами:

$$\text{i) } q(-\mathbf{v}) = q(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V;$$

ii) отображение  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , определённое формулой

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \{q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})\}, \quad (6)$$

является билинейной формой на  $V$  (очевидно, симметричной). Её ранг называется также рангом  $q$ :  $\text{rank } q = \text{rank } f$ .

Говорят ещё, что симметричная билинейная форма  $f$ , определённая формулой (1), получается из  $q$  *поляризацией* или что  $f$  — билинейная форма, *полярная* к квадратичной форме  $q$ .

Пусть теперь  $f$  — произвольная симметричная билинейная форма на  $V$ . Положив

$$q_f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (7)$$

мы получим функцию  $q_f: V \rightarrow \mathbb{K}$ , удовлетворяющую условиям i), ii) в определении квадратичной формы, поскольку  $f(-\mathbf{x}, -\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  и

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \{f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\}. \quad (8)$$

Можно подумать, что  $q_f$  — какая-то особая квадратичная форма. На самом деле это не так, поскольку справедлива следующая теорема (её несложное доказательство можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего).

**Теорема 3.** *Каждая квадратичная форма  $q$  однозначно восстанавливается по своей полярной форме  $f$ ; другими словами,  $q = q_f$ .*

**Доказательство.** Положим в (6)  $\mathbf{y} = -\mathbf{x}$ :

$$-f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{q(\mathbf{0}) - q(\mathbf{x}) - q(-\mathbf{x})\},$$

отсюда

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} q(\mathbf{0}).$$

Так как  $f$  — билинейная форма, то  $f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$ . Поэтому при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  имеем  $q(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} q(\mathbf{0})$ , т.е.  $q(\mathbf{0}) = 0$ . Значит,  $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ .  $\square$

**Определение 3.** *Матрицей квадратичной формы  $q = q_f$  относительно базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  называется матрица  $F$  билинейной формы  $f$ , полярной к  $q$ .*

Стало быть,  $F = (f_{ij})$ , где

$$f_{ij} = \frac{1}{2} \{q(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - q(\mathbf{e}_i) - q(\mathbf{e}_j)\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Любой симметричной матрице  $F = (f_{ij})$  в свою очередь отвечает квадратичная форма  $q$ , заданная соотношением

$$q(\mathbf{x}) = {}^t X \cdot F \cdot X = \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j. \quad (9)$$

Таким образом, в соответствии с названием квадратичная форма суть однородная квадратичная функция координат  $x_1, \dots, x_n$  вектора  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ . Заслуживает быть особо отмеченным случай диагональной матрицы  $F$ .

**Определение 4.** Говорят, что квадратичная форма  $q$  имеет в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  *канонический* или *диагональный* вид, если для каждого вектора  $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i \in V$  значение  $q(\mathbf{x})$  вычисляется по формуле

$$q(\mathbf{x}) = \sum_i f_{ii} x_i^2.$$

Базис  $(\mathbf{e}_i)$  при этом называется *каноническим базисом* для  $q$ .

Та же терминология относится и к соответствующей полярной билинейной форме  $f$ :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i f_{ii} x_i y_i.$$

Не требуется, чтобы канонический вид квадратичной формы или её канонический базис определялись однозначно. Скажем, при произвольной перестановке векторов канонического базиса вновь получается канонический базис.

Заметим, что в каноническом виде  $\text{rank } q_f = \text{rank } f$  есть просто число отличных от нуля коэффициентов  $f_{ii}$ . Вместе с тем согласно замечанию в конце п. 3  $\text{rank } q = \dim V - \dim L_q$ , где  $L_q = L_f$  — ядро (радикал) формы  $f$  (левое или правое — безразлично ввиду симметричности  $f$ ). Подпространство  $L_q \subset V$ , называемое также *изотропным* (или *нулевым*) подпространством квадратичной формы  $q$ , в терминах  $q$  определяется так:

$$L_q = \{\mathbf{u} \in V \mid q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V\}.$$

Ранг формы  $q$  — величина инвариантная.

**6. Канонический вид квадратичной формы.** Вопрос о возможности выбора базиса, в котором данная форма принимала бы наиболее простой вид (а таковым является канонический вид), имеет важное теоретическое и прикладное значение.

**Теорема 4.** Для всякой симметричной билинейной формы  $f$  на  $V$  существует канонический базис.

**Доказательство.** При  $n = 1$  утверждение очевидно, поэтому можно использовать индукцию по  $n$ . Если  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  (т.е.  $f = 0$ ), то теорема очевидна: любой базис годится. Если же

$f \neq 0$ , то отлична от нуля и соответствующая квадратичная форма (равенства (6), (8) или теорема 3). Пусть  $\mathbf{e}_1$  — такой вектор, что  $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = q(\mathbf{e}_1) \neq 0$ . Тогда линейная функция  $f_1: \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$  отлична от нуля ( $f_1(\mathbf{e}_1) \neq 0$ ). По теореме 4 из § 3 линейное подпространство

$$L = \text{Ker } f_1 = \{\mathbf{x} \in V \mid f_1(\mathbf{x}) = 0\}$$

имеет размерность  $n - 1$ , т.е. является гиперплоскостью. По предположению индукции  $L$  обладает базисом  $(\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ , в котором матрица формы  $f$ , ограниченной на  $L$ , диагональна, т.е.

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad i, j = 2, \dots, n.$$

Так как по построению  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) = 0$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , то мы получаем свойства  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$ ,  $i \neq j$ , характеризующие канонический базис  $(\mathbf{e}_k)$ , если только система векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  линейно независима. Предположив противное, мы в любом соотношении

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = 0$$

имели бы коэффициент  $\alpha_1 \neq 0$ , поскольку  $(\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис в  $L$ . Но в таком случае  $\mathbf{e}_1 = \sum_{i>1} \beta_i \mathbf{e}_i$  и

$$0 \neq f_1(\mathbf{e}_1) = f_1\left(\sum_{i>1} \beta_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i>1} \beta_i f_1(\mathbf{e}_i) = 0$$

— противоречие, доказывающее теорему.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{K}$  задана квадратичная форма  $q$  ранга  $r \leq n$ . Тогда в  $V$  существует базис  $(\mathbf{e}_i)$ , в котором  $q$  принимает канонический вид

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_r x_r^2. \quad (10)$$

**Следствие 2.** Для любой симметричной матрицы  $F$  существует невырожденная матрица  $A$  такая, что  ${}^t A F A$  — диагональная матрица того же ранга, что и  $F$ . Другими словами, всякая симметричная матрица конгруэнтна диагональной.

Рассмотренный выше индуктивный способ приведения билинейной (а следовательно, и квадратичной) формы к каноническому виду принадлежит Лагранжу (1736–1813). Естественно, что на практике его применяют в координатной записи, действуя несколько в ином порядке. Исходя из выражения (9) квадратичной формы  $q(\mathbf{x})$ , интерпретируемой как однородный многочлен степени 2 от  $n$  независимых переменных

$$q(x_1, \dots, x_n) := q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} x_i x_j,$$

будем избавляться от смешанных членов  $x_i x_j$ ,  $i \neq j$ , древневавилонским методом дополнения до полного квадрата. Выделим все члены,

содержащие координату  $x_1$ :

$$q(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= f_{11} x_1^2 + 2f_{12} x_1 x_2 + 2f_{13} x_1 x_3 + \dots + 2f_{1n} x_1 x_n + \sum_{i,j \neq 1} f_{ij} x_i x_j$$

(визуально мы имеем суммы типа  $f_{1j} x_1 x_j + f_{j1} x_j x_1$ , но  $f_{j1} = f_{1j}$ , поэтому возникают удвоенные произведения). Предположим сначала, что  $f_{11} \neq 0$ , и за счёт коэффициентов при членах, не содержащих  $x_1$ , выделим полный квадрат:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{f_{11}} (f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + \dots + f_{1n} x_n)^2 + \sum_{i,j \neq 1} f'_{ij} x_i x_j.$$

Полагая теперь

$$x'_1 = f_{11} x_1 + f_{12} x_2 + \dots + f_{1n} x_n, \quad x'_i = x_i, \quad i > 1,$$

мы приведём форму  $q$  к виду

$$q(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{f_{11}} (x'_1)^2 + q'(x'_2, \dots, x'_n),$$

где  $q'(x'_2, \dots, x'_n) = \sum_{i,j=2}^n f'_{ij} x'_i x'_j$  — квадратичная форма от меньшего числа переменных. Считая  $f'_{22} \neq 0$ , перепишем её в виде

$$\begin{aligned} q'(x'_2, \dots, x'_n) &= f'_{22} x'^2_2 + f'_{23} x'_2 x'_3 + \dots + f'_{2n} x'_2 x'_n + \sum_{i,j>2} f'_{ij} x'_i x'_j \\ &= \frac{1}{f'_{22}} (f'_{22} x'_2 + f'_{23} x'_3 + \dots + f'_{2n} x'_n)^2 + \sum_{i,j>2} f''_{ij} x'_i x'_j \end{aligned}$$

(переход от  $f'_{ij}$  к  $f''_{ij}$  обусловлен выделением нового полного квадрата). Очередная замена переменных

$$x''_1 = x'_1, \quad x''_2 = f'_{22} x'_2 + f'_{23} x'_3 + \dots + f'_{2n} x'_n, \quad x''_i = x'_i, \quad i > 2,$$

даст нам выражение

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{f_{11}} (x''_1)^2 + \frac{1}{f'_{22}} (x''_2)^2 + q''(x''_3, \dots, x''_n),$$

где  $q''(x''_3, \dots, x''_n) = \sum_{i,j=3}^n f''_{ij} x''_i x''_j$  — форма от ещё меньшего числа переменных.

Этот процесс, очевидно, продолжаем до канонической записи  $q(\mathbf{x})$  в виде линейной комбинации  $r = \text{rank } q$  квадратов. Производимые по ходу дела замены переменных невырождены и отвечают переходам к новым базисам. Следует сделать только одно замечание. Ограничительные, на первый взгляд, предположения  $f_{11} \neq 0$ ,  $f'_{22} \neq 0, \dots$  таковыми не являются. Если  $f_{11} = 0$ , но  $f_{kk} \neq 0$  для некоторого  $k$ , то достаточно поменять нумерацию переменных  $x_1, x_k$  (или, что

то же самое, иначе занумеровать базисные векторы). Если, однако,  $q(\mathbf{x}) \neq 0$  не содержит ни одного квадрата, т.е.  $f_{kk} = 0$  для всех  $k$ , то без ограничения общности можно считать, что  $2f_{12}x_1x_2 \neq 0$ , а в таком случае следует воспользоваться заменой

$$x_1 = x'_1 + x'_2, \quad x_2 = x'_1 - x'_2, \quad x_k = x'_k, \quad k > 2.$$

Возникнет несократимое слагаемое  $2f_{12}(x'_1)^2 - (x'_2)^2$ , дающее возможность начать наш процесс.

**7. Вещественные квадратичные формы.** Действуя над произвольным полем  $\mathbb{K}$  (с ограничением  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ), мы не можем, вообще говоря, приводить диагональные квадратичные формы к ещё более простому виду. Если, однако,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , то все коэффициенты в (10) мы можем сделать равными  $\pm 1$ . Действительно, при соответствующей перестановке базисных векторов мы имеем право считать первые  $s$  коэффициентов  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  формы (10) положительными, а остальные отрицательными. При замене координат

$$\begin{aligned} x'_i &= \sqrt{\lambda_i} \cdot x_i, \quad 1 \leq i \leq s; & x'_i &= \sqrt{-\lambda_i} \cdot x_i, \quad s+1 \leq i \leq r; \\ x'_i &= x_i, \quad r+1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

получим  $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^s (x'_i)^2 - \sum_{i=s+1}^r (x'_i)^2$ .

**Определение 5.** Говорят, что квадратичная форма  $q$ , значения которой вычисляются по формуле

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2, \quad (11)$$

имеет *нормальный вид*.

Только что проведенное рассуждение показывает, что в случае  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  справедлив более сильный вариант следствия 1 теоремы 4.

**Следствие 1'.** *Всякая квадратичная форма  $q$  на вещественном векторном пространстве  $V$  приводится к нормальному виду.*

Кроме ранга  $r$  у квадратичной формы  $q$  на векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{R}$  появилась еще одна числовая характеристика — количество  $s$  коэффициентов 1 в её нормальном виде. Оказывается, что число  $s$  также не зависит от способа приведения  $q$  кциальному виду.

**Теорема 5** (закон инерции). *Пусть  $q$  — квадратичная форма на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{R}$ . Тогда целые числа  $r$  и  $s$ ,  $s \leq r \leq n$ , входящие в нормальный вид (11), зависят только от  $q$ .*

**Доказательство.** Инвариантность  $r$  нам известна, так что нужно лишь убедиться в инвариантности (независимости от выбора канонического базиса) числа  $s$ . Предположим, что в каком-то другом базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  форма  $q$  имеет нормальный вид

$$q(\mathbf{x}) = (x'_1)^2 + \dots + (x'_t)^2 - (x'_{t+1})^2 - \dots - (x'_r)^2 \quad (11')$$

с  $t$  положительными членами ( $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i$ ). При  $t \neq s$  без ограничения общности считаем  $t < s$ .

Рассмотрим в  $V$  подпространства

$$L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s \rangle_{\mathbb{R}}, \quad L' = \langle \mathbf{e}'_{t+1}, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Так как  $\dim(L + L') \leq \dim V \leq n$ , то по теореме 6 из § 2 имеем

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq$$

$$\geq s + (n - t) - n = s - t > 0.$$

Стало быть, существует ненулевой вектор  $\mathbf{a} \in (L \cap L')$ :

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_s \mathbf{e}_s = a'_{t+1} \mathbf{e}'_{t+1} + \dots + a'_n \mathbf{e}'_n.$$

Согласно (11)

$$q(\mathbf{a}) = a_1^2 + \dots + a_s^2 > 0.$$

В то же время согласно (11')

$$q(\mathbf{a}) = -(a'_{t+1})^2 - \dots - (a'_r)^2 \leq 0$$

(возможно, что  $r < n$ ,  $a'_{t+1} = \dots = a'_r = 0$ ). Полученное противоречие устраивается только в случае  $s = t$ .  $\square$

Ввиду теоремы 5 для числовых инвариантов формы используются специальные термины.

**Определение 6.** Ранг вещественной квадратичной формы называется также её *индексом инерции*, число  $s$  — *положительным индексом инерции*, число  $r - s$  — *отрицательным индексом инерции*. Под *сигнатурой* формы понимают либо пару  $(s, r - s)$ , либо разность  $2s - r$  между числом положительных и числом отрицательных квадратов.

Закон инерции квадратичной формы, приписываемый Дж. Сильвестру (1814–1897), ведет свое происхождение из механики. Очевидно, что для комплексной квадратичной формы  $q: V \rightarrow \mathbb{C}$  понятие положительного или отрицательного индекса инерции теряет смысл, поскольку ненулевые коэффициенты  $\lambda_i$  в её диагональном виде (10) можно тогда сделать все равными 1 или все равными  $-1$ .

**8. Положительно определённые формы и матрицы.** Пусть снова  $V$  — вещественное векторное пространство. Квадратичная форма  $q$  на  $V$  называется *невырожденной*, если  $\text{rank } q = \dim_{\mathbb{R}} V$ ; другими словами, её индекс инерции совпадает с размерностью пространства.

**Определение 7.** Невырожденная квадратичная форма  $q: V \rightarrow \mathbb{R}$  называется *положительно* (соответственно *отрицательно*) *определенной* или просто *положительной* (*отрицательной*), когда  $q(\mathbf{x}) > 0$  ( $q(\mathbf{x}) < 0$ ) для любого вектора  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Форма  $q$  называется *положительно полуопределенной* (или *неотрицательной*), если  $q(\mathbf{x}) \geq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in V$ . Наконец, форма  $q$  *неопределенная*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Важно заметить, что эти понятия не связаны с выбором базиса. Соответствующими нормальными формами от  $n = \dim_{\mathbb{R}} V$  являются:  
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  в случае положительной определённости;  
 $-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$  в случае отрицательной определённости;  
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2, r \leq n$ , в случае положительной полуопределенности;  
 $r > s > 0$  (см. (11)) в случае неопределенности.

Записанная в каноническом базисе  $(\mathbf{e}_i)$  вещественная квадратичная форма  $q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ , очевидно, положительно определена тогда и только тогда, когда все коэффициенты  $\lambda_i$  больше нуля: достаточно заметить, что  $\lambda_i = q(\mathbf{e}_i)$ .

Билинейная форма, полярная к положительно определённой квадратичной форме, также называется *положительно определённой*. Аналогичная терминология переносится на матрицы. Например, вещественная симметричная матрица  $F$  называется *положительно определённой*, если  $F$  соответствует положительно определённой квадратичной форме. Но положительно определённой форме в ее нормальном виде отвечает единичная матрица, поэтому, согласно следствию 2 теоремы 4 имеет место

**Теорема 6.** *Любая положительно определённая матрица  $F$  имеет вид*

$$F = {}^t A \cdot A, \quad (12)$$

где  $A$  — вещественная невырожденная матрица. Верно и обратное: всякая вещественная матрица вида (12) положительно определена.

Часто возникает необходимость непосредственно по матрице квадратичной формы судить о том, является ли она положительно определенной.

**Пример.** Пусть  $\varphi(x, y)$  — дифференцируемая функция двух вещественных переменных, допускающая разложение в сходящийся ряд Тейлора в окрестности начала координат. Символами  $\varphi'_x, \varphi'_y$  обозначаются частные производные по  $x$  и  $y$  соответственно. Точка  $(0, 0)$  предполагается *критической* (или, как еще говорят, *стационарной*), т.е.  $\varphi'_x(0, 0) = 0 = \varphi'_y(0, 0)$ , так что разложение в ряд Тейлора начинается с членов нулевой и второй степени:

$$\varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + \frac{1}{2} \{ax^2 + 2bxy + cy^2\} + \dots$$

Здесь  $a = \varphi''_{xx}(0, 0)$ ,  $b = \varphi''_{xy}(0, 0)$ ,  $c = \varphi''_{yy}(0, 0)$ , а точками обозначены члены более высокой степени. В достаточно малой окрестности нуля этими членами можно пренебречь, так что значение функции  $\varphi$  приближённо равно константе  $\varphi(0, 0)$  плюс  $\frac{1}{2}q(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ , где

$$q(\mathbf{v}) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

— квадратичная форма на  $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ . В общем случае  $\text{rank } q = 2$ , и если это так, то критическая точка  $(0, 0)$  называется *невырожденной*. Если  $q$  положительно определена, то, очевидно,  $\varphi$  имеет в  $(0, 0)$  *относительный минимум. Максимум*

отвечает отрицательно определённой форме  $q$ . Если же сигнатура формы  $q$  равна  $(1, 1)$ , то в  $(0, 0)$  нет ни минимума, ни максимума, и критическая точка  $(0, 0)$  называется *седловой*.

Записав  $q(\mathbf{v})$  в виде

$$q(\mathbf{v}) = a \left( x + \frac{by}{a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) y^2, \quad a \neq 0,$$

или используя аналогичное выражение при  $a = 0, c \neq 0$ , мы видим, что выполнение неравенств

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$$

является достаточно простым необходимым и достаточным условием положительной определённости формы  $q$  и, следовательно, условием существования минимума функции  $\varphi$  в окрестности начала координат.

В рассмотренные выше неравенства входят определители, аналогом которых в  $n$ -мерном случае являются так называемые *главные миноры*

$$\Delta_1 = f_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (13)$$

матрицы  $F = (f_{ij})$ . Таким образом,  $\Delta_n = \det F$ . Для удобства положим еще  $\Delta_0 = 1$ . Роль главных миноров хорошо иллюстрируется одним специальным способом приведения квадратичной формы  $q$  к каноническому виду.

**Теорема 7** (метод Якоби). *Пусть  $q$  — квадратичная форма на  $V$  с матрицей  $F$ , все главные миноры (13) которой отличны от нуля.*

*Тогда существует базис  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  пространства  $V$ , в котором  $q(\mathbf{x})$  принимает канонический вид*

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (x'_2)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} (x'_n)^2. \quad (14)$$

**Доказательство.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — первоначальный базис пространства  $V$ . Рассмотрим  $(n-1)$ -мерное подпространство  $L = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$ . Пусть  $\bar{q} = q|_L$  — ограничение  $q$  на  $L$ . Матрица  $\bar{F}$  формы  $\bar{q}$  получается из  $F$  вычёркиванием последней строки и последнего столбца, поэтому её главными минорами будут  $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1$ ,  $\bar{\Delta}_2 = \Delta_2, \dots, \bar{\Delta}_{n-1} = \Delta_{n-1}$ . Все они по условию отличны от нуля. Рассуждая по индукции относительно  $n$ , выберем в  $L$  базис, в котором  $\bar{q}(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\bar{\mathbf{x}} \in L$ , принимает вид

$$\bar{q}(\bar{\mathbf{x}}) = q(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (x'_1)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} (x'_{n-1})^2.$$

Отразим этот факт в терминах полярной билинейной формы  $f$ :

$$f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, \quad f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq n-1.$$

Система

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_1) = 0, \dots, f(\mathbf{x}, \mathbf{e}'_{n-1}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V,$$

из  $n-1$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $x'_1, \dots, x'_n$  обязательно имеет ненулевое решение в  $V$ ; этому решению соответствует  $\mathbf{x} = \mathbf{e}'_n$ . Легко видеть, что система  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$  составляет базис пространства  $V$ . Так как вектор  $\mathbf{e}'_n$  определён с точностью до скалярного множителя, то мы нормируем его условием, чтобы матрица  $A$  перехода от базиса  $(\mathbf{e}_i)$  к  $(\mathbf{e}'_i)$  имела определитель

$$\det A = (\Delta_n)^{-1} = (\det F)^{-1}.$$

Пусть  $F'$  — матрица формы  $f$  в базисе  $(\mathbf{e}'_i)$ . Тогда  $f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 0$  при  $i \neq j$  и

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_n)}{\Delta_{n-1}} &= \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdots \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} \cdot f(\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_n) = \prod_{i=1}^n f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_i) = \\ &= \det F' = \det ({}^t A \cdot F \cdot A) = (\det A)^2 \det F = \frac{1}{\Delta_n}, \end{aligned}$$

откуда

$$f(\mathbf{e}'_n, \mathbf{e}'_n) = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}.$$

Форма  $q$ , записанная в базисе  $(\mathbf{e}'_i)$ , принимает искомый вид (14).  $\square$

Легко убедиться в том, что матрица  $A$  будет треугольной:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}'_n &= a_{n1}\mathbf{e}_1 + a_{n2}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nn}\mathbf{e}_n, \end{aligned}$$

но нам этот факт не понадобится.

*Следствие. Отрицательный индекс инерции квадратичной формы  $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  с матрицей  $F$ , все главные миноры которой  $\Delta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , отличны от нуля, совпадает с числом перемен знаков в последовательности*

$$1 = \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_n.$$

*Если, в частности,*

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0,$$

*то квадратичная форма  $q$  положительно определена.*

Сейчас мы увидим, что утверждение следствия обратимо.

**Теорема 8** (критерий Сильвестра). *Квадратичная форма  $q$  на  $n$ -мерном вещественном векторном пространстве  $V$  в том и только том случае является положительно определённой, когда все главные миноры  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  её матрицы  $F = (f_{ij})$  положительны.*

**Доказательство.** Согласно следствию теоремы 7 неравенства  $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , обеспечивают положительную определённость формы  $q$ . Для доказательства обратного утверждения, как и в теореме 7, используем индукцию по  $n$ , рассматривая ограничение  $\bar{q} = q|_U$  формы  $q$  на  $(n-1)$ -мерное подпространство  $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle \subset V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  ( $(\mathbf{e}_i)$  — базис, в котором  $q$  имеет матрицу  $F$ ).

Понятно, что главными минорами матрицы  $\bar{F}$  формы  $\bar{q}$  будут  $\bar{\Delta}_1 = \Delta_1, \dots, \bar{\Delta}_{n-1} = \Delta_{n-1}$ . Так как мы считаем  $q$  положительно определённой, то таковой будет и форма  $\bar{q}$ . Стало быть, по предположению индукции  $\bar{\Delta}_1 > 0, \dots, \bar{\Delta}_{n-1} > 0$ . Остается показать, что  $\Delta_n > 0$ . Но из теоремы 6 мы знаем, что  $F = {}^t A \cdot A$ , где  $A$  — невырожденная матрица. Поэтому

$$\Delta_n = \det F = \det {}^t A \cdot \det A = (\det A)^2 > 0. \quad \square$$

**9. Канонический вид кососимметричной формы.** Уделив основное внимание квадратичным (и заодно билинейным симметричным) формам, мы обратимся теперь, руководствуясь теоремой 2, к пространству  $\mathcal{L}_2^-(V, \mathfrak{K})$ , т.е. к билинейным кососимметричным формам. Итак, пусть

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Как и в случае симметричных форм, *радикалом* (или *ядром*) формы  $f$  назовём подпространство

$$V_0 = \text{Ker } f = \{ \mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \}.$$

Если  $V_1$  — любое дополнительное к  $V_0$  подпространство в  $V$ , то

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

причём ограничение  $f|_{V_1}$  будет невырожденной кососимметричной формой. Действительно, если  $\mathbf{a} \in V_1$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  и  $f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = 0$  для всех  $\mathbf{x}_1 \in V_1$ , то для любого вектора  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 \in V$  ( $\mathbf{x}_0 \in V_0$ ) имеем

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) + f(\mathbf{a}, \mathbf{x}_1) = -f(\mathbf{x}_0, \mathbf{a}) = 0$$

(здесь мы воспользовались кососимметричностью формы), что противоречит определению  $V_0$ .

Тем самым изучение  $f$  сведено к случаю невырожденной формы. Будем с самого начала считать, что  $f: V \times V \rightarrow \mathfrak{K}$  — невырожденная кососимметричная билинейная форма. Пусть

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \quad \mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j.$$

Тогда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} x_i y_j = {}^t X F Y, \quad f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

где  $F = (f_{ij})$  — кососимметрическая матрица:  ${}^t F + F = 0$ . Стало быть,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} (x_i y_j - x_j y_i). \quad (15)$$

Из [ВА I, гл. 3, § 2] известно, что для определителя кососимметрической матрицы  $F$  порядка  $n$  справедливо соотношение  $\{1 + + (-1)^{n-1}\} \det F = 0$ , так что неравенство  $\det F \neq 0$  (условие невырожденности формы  $f$ ) возможно лишь при чётных  $n$ . Мы получим этот результат другим способом, причём заодно приведём форму  $f$  к каноническому виду.

С этой целью введём понятие *гиперболической* (или *симплектической*) плоскости  $W$  в  $V$ , понимая под  $W$  любое двумерное подпространство с условием  $f|_W \neq 0$ . Такое подпространство найдётся хотя бы потому, что для всякого вектора  $\mathbf{e}'_1 \neq 0$  существует вектор  $\mathbf{e}'_2$  с  $f(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) \neq 0$ . Умножая  $\mathbf{e}'_2$  на подходящий скаляр, мы можем считать, что  $f(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2) = 1$ ; разумеется,  $f(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_1) = 0 = f(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_2)$ .

**Теорема 9.** Пусть  $V$  — векторное пространство с заданной на нём невырожденной кососимметрической формой  $f$ . Тогда  $\dim V = 2m$  и  $V$  — прямая сумма  $m$  гиперболических плоскостей, попарно косоортогональных друг другу относительно  $f$ .

**Доказательство.** Применяем индукцию по  $n = \dim V$ . В силу сделанного выше замечания найдётся гиперболическая плоскость  $W = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle \subset V$ . Если  $n > 2$ , то рассматриваем *косоортогональное дополнение*

$$W^\perp = \langle \mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{e}'_i, \mathbf{x}) = 0, i = 1, 2 \rangle.$$

Дополним  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$  до (штрихованного) базиса пространства  $V$ . Пусть

$$V = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n \rangle, \quad \mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n.$$

Тогда

$$f(\mathbf{e}'_1, \mathbf{x}) = f'_{12} x'_2 + f'_{13} x'_3 + \dots + f'_{1n} x'_n = 0,$$

$$f(\mathbf{e}'_2, \mathbf{x}) = f'_{21} x'_1 + f'_{23} x'_3 + \dots + f'_{2n} x'_n = 0$$

— линейная система ранга 2, поскольку строки матрицы  $F$  линейно независимы. Значит, пространство решений  $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle^\perp$  этой системы имеет размерность  $n - 2$ . Так как

$$\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle \cap \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle^\perp \subseteq \text{Ker } f = 0,$$

то мы получаем разложение

$$V = \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle^\perp,$$

причём ограничение  $f$  на  $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle^\perp$  является невырожденной кососимметричной формой. В таком случае по предположению индукции  $\langle \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \rangle^\perp$  — чётномерное пространство, являющееся прямой суммой попарно косоортогональных гиперболических плоскостей. Значит,  $n = \dim V = 2m$  для некоторого целого числа  $m$  и  $V$  обладает базисом  $(\mathbf{e}''_i)$  с  $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}'_1$ ,  $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}'_2$ , таким, что

$$\begin{aligned} V &= \langle \mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}''_3, \mathbf{e}''_4 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{e}''_{2m-1}, \mathbf{e}''_{2m} \rangle, \\ f(\alpha \mathbf{e}''_{2i-1} + \beta \mathbf{e}''_{2i}, \gamma \mathbf{e}''_{2j-1} + \delta \mathbf{e}''_{2j}) &= 0, \quad i \neq j, \\ f(\mathbf{e}''_{2i-1}, \mathbf{e}''_{2i}) &= 1. \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие.** Любая невырожденная кососимметричная матрица  $F$  размера  $2m \times 2m$  конгруэнтна матрице

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. найдётся невырожденная матрица  $A$  такая, что  ${}^t A F A = J$ .

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 9, если вспомнить закон изменения матрицы билинейной формы при переходе к новому базису.

**Замечание.** Теорема и её следствие справедливы над любым полем характеристики  $\neq 2$ . Часто за стандартную кососимметричную матрицу выбирают

$$J_0 = \begin{vmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Переход от  $J$  к  $J_0$  достигается переупорядочением базисных векторов.

Если говорить о практическом приведении кососимметричной формы (15) к каноническому виду, то опять следует воспользоваться методом Лагранжа. Именно, считая  $f \neq 0$  (в противном случае делать нечего) и в случае необходимости переупорядочивая базисные векторы, мы придём к ситуации  $f_{12} \neq 0$ . Выделим в (15) все слагаемые с переменными  $x_1$  или  $y_1$ :

$$x_1(f_{12}y_2 + \dots + f_{1n}y_n) - (f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n)y_1.$$

С новыми переменными

$$x'_2 = f_{12}x_2 + \dots + f_{1n}x_n, \quad y'_2 = f_{12}y_2 + \dots + f_{1n}y_n$$

( $x_1, y_1, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$  остаются прежними) начинается процесс вы-

деления слагаемых, содержащих  $x'_2, y'_2$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \\ &= (x_1 + f'_{32}x_3 + \dots + f'_{n2}x_n)y'_2 - x'_2(y_1 + f'_{32}y_3 + \dots + f'_{n2}y_n) + \dots = \\ &= x'_1y'_2 - x'_2y'_1 + \dots, \end{aligned}$$

где

$$x'_1 = x_1 + f'_{32}x_3 + \dots + f'_{n2}x_n, \quad y'_1 = y_1 + f'_{32}y_3 + \dots + f'_{n2}y_n,$$

а точками обозначены слагаемые, содержащие лишь  $x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ . С ними, если они отличны от нуля, поступаем аналогичным образом. В конечном счёте форма  $f$  окажется приведённой к каноническому виду:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x'_1y'_2 - x'_2y'_1) + \dots + (x'_{2m-1}y'_{2m} - x'_{2m}y'_{2m-1}). \quad (16)$$

**10. Пфаффиан.** Согласно следствию теоремы 9 для любой невырожденной кососимметричной матрицы  $F$  найдётся матрица  $A$  такая, что

$${}^t A F A = \begin{vmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{vmatrix} = J_0.$$

Отсюда  $(\det A)^2 \det F = 1$ , т.е.  $\det F$  — квадрат в основном поле  $\mathfrak{K}$ . Это обстоятельство наводит на мысль рассмотреть поле отношений (поле частных)

$$\mathfrak{K} = \mathbb{Q}(t) = \mathbb{Q}(t_{12}, t_{13}, \dots, t_{n-1,n})$$

кольца многочленов

$$\mathbb{Z}[t] = \mathbb{Z}[t_{12}, t_{13}, \dots, t_{n-1,n}]$$

от  $n(n-1)/2$  независимых переменных и кососимметричную матрицу  $T = (t_{ij})$  с  $t_{ji} = -t_{ij}$  при  $i < j$ . Мы знаем, что  $\det T$  — квадрат в поле  $\mathbb{Q}(t)$ . С другой стороны,  $\det T$  — многочлен из  $\mathbb{Z}[t]$ . Значит (здесь мы неявно пользуемся однозначностью разложения на множители в  $\mathbb{Z}[t]$ ; см. [ВА I] и [ВА III]),  $\det T$  — квадрат некоторого многочлена из  $\mathbb{Z}[t]$ :

$$\det T = P_n(t)^2.$$

Нормируем  $P_n(t) = P_n(t_{12}, t_{13}, \dots)$  так, чтобы  $P_n(t_{12}^0, t_{13}^0, \dots) = 1$  для тех значений  $t_{ij}^0 = 0, \pm 1$  переменных  $t_{ij}$ , для которых  $T_0 = (t_{ij}) = J_0$ . При такой нормировке получается однозначно определённый многочлен  $\text{Pf}_n(t)$ , называемый общим *пфаффианом* размера  $n$ . Например,

$$\text{Pf}_2(t) = t, \quad \text{Pf}_4(t) = t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23},$$

что легко получить, вычисляя определители матриц

$$\begin{vmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -t_{12} & -t_{13} & -t_{14} \\ t_{12} & 0 & -t_{23} & -t_{24} \\ t_{13} & t_{23} & 0 & -t_{34} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & 0 \end{vmatrix}.$$

Под  $\text{Pf}(F)$  будем понимать результат подстановки в  $\text{Pf}_n(f_{ij})$  коэффициентов  $f_{ij}$  кососимметричной матрицы  $F$  вместо  $t_{ij}$  (заменив всюду  $\mathbb{Q}$  на простое поле  $Z_p$ , мы распространим наши рассуждения на поля произвольной характеристики). Имеет место

**Теорема 10.** *Если  $F$  — кососимметричная матрица размера  $n \times n$ , то*

$$\det F = \text{Pf}(F)^2.$$

Далее,

$$\text{Pf}({}^t A F A) = \det A \cdot \text{Pf}(F)$$

для любой  $n \times n$ -матрицы  $A$ .

**Доказательство.** Соотношение  $\det F = \text{Pf}(F)^2$  выражает известные нам свойства кососимметричной матрицы и пфаффиана. Пусть, далее,  $U = (u_{ij})$  — произвольная  $n \times n$ -матрица с алгебраически независимыми коэффициентами  $u_{ij}$ ,  $T$  — рассмотренная выше кососимметричная матрица. Тогда

$$\text{Pf}({}^t U T U)^2 = \det({}^t U T U) = (\det U)^2 \det T = (\det U)^2 \text{Pf}(T)^2,$$

откуда

$$\text{Pf}({}^t U T U) = \pm(\det U) \text{Pf}(T).$$

Если подставить теперь вместо  $u_{ij}$  и  $t_{ij}$  такие значения, что  $U$  станет единичной матрицей, а  $T$  — стандартной кососимметричной матрицей, то слева будет стоять  $\text{Pf}(J_0) = 1$ , а справа  $\pm 1 \cdot \text{Pf}(J_0)$ , т.е. следует взять знак  $+$ . Это значит, что и для специальных матриц  $U = A$ ,  $T = F$  справедливо доказываемое равенство.  $\square$

Остается заметить, что пфаффиан  $\text{Pf}(T)$  для  $T = (t_{ij})_1^{2m}$ ,  ${}^t T = -T$  — универсальный многочлен, являющийся однородной формой степени  $m$ , коэффициенты которой целочисленны или лежат в простом поле.

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Пусть  $\Delta_1, \dots, \Delta_n = F$  — главные миноры вещественной квадратичной формы  $q$  с матрицей  $F$ . Доказать, что  $q$  и  $F$  отрицательно определены в точности тогда, когда  $(-1)^k \Delta_k > 0$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**2.** Привести пример:

а) положительно определённой матрицы  $A = (a_{ij})$  с  $a_{ij} < 0$  для некоторых пар  $(i, j)$ ;

б) матрицы  $A = (a_{ij})$  с  $a_{ij} > 0$  для всех индексов  $i, j$ , которая не была бы положительно определённой.

**3.** Указать  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , для которых матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \mu \\ 1 & \mu & 1 \\ \mu & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

являются положительно определёнными.

4. Пусть  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{C}$ ,  $Q(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ ,  $\varepsilon$  — примитивный корень степени 3 из 1. Используя выражение

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3)(x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3),$$

убедиться в том, что  $Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{y}) = Q(\mathbf{z})$ , где  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ ,  $z_i = z_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j,k} a_{jk}^{(i)} x_j y_k$  — билинейные симметричные формы. Найти их явный вид.

5. Пусть  $A$  — произвольная вещественная симметричная матрица,  $\varepsilon = \varepsilon(A)$  — достаточно малое вещественное число. Доказать, что матрица  $B = E + \varepsilon A$  положительно определена.

## ГЛАВА 2

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

---

Как правило, изучают не векторные пространства сами по себе, а линейные отображения векторных пространств. Примерами могут служить вращения, отражения, гомотетии в  $\mathbb{R}^3_\Phi$ , операции дифференцирования и интегрирования в анализе. Для начала сосредоточимся на наиболее общих свойствах линейных отображений.

### § 1. Линейные отображения векторных пространств

**1. Язык линейных отображений.** Как мы знаем (см. [BA I, гл. 2, § 3]), каждой  $m \times n$ -матрице  $A$  отвечает линейное отображение  $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Аксиоматизируя его свойства, мы вводим следующее общее

**Определение 1.** Пусть  $V, W$  — векторные пространства размерностей  $n, m$  над одним и тем же полем  $\mathfrak{K}$ . Отображение  $f: V \rightarrow W$  называется *линейным*, если

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

Другими словами,  $f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$ . Частным типом линейного отображения служит понятие линейной функции  $f: V \rightarrow \mathfrak{K}$ , подробно рассмотренное нами в гл. 1.

Совокупность всех линейных отображений  $V \rightarrow W$ , обозначаемая символом  $\mathcal{L}(V, W)$  (или  $\text{Hom}(V, W)$ ), — векторное пространство с естественными операциями сложения отображений и их умножения на скаляры: если  $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$  и  $\nu, \mu \in F$ , то по определению

$$(\nu f + \mu g)(\mathbf{x}) = \nu f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x}).$$

Непосредственно проверяется, что все аксиомы векторного пространства (см. гл. 1, § 1) применительно к  $\mathcal{L}(V, W)$  выполняются.

С любым линейным отображением  $f: V \rightarrow W$  ассоциируются два подпространства — его *ядро*

$$\text{Ker } f = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

и *образ*

$$\text{Im } f = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = f(\mathbf{v}) \text{ для некоторого } \mathbf{v} \in V\}.$$

Ядро и образ как понятия для нас не новы, но теперь важно подчеркнуть, что они являются векторными подпространствами в  $V$  и  $W$  соответственно (лёгкая проверка, очевидная для  $\text{Ker } f$ , а для  $\text{Im } f$  приводимая ниже). Для любого подпространства  $U \subset V$  условимся писать коротко  $f(U) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in U\}$ . Если  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U; \nu_1, \nu_2 \in F$ , то

$$\nu_1 f(\mathbf{u}_1) + \nu_2 f(\mathbf{u}_2) = f(\nu_1 \mathbf{u}_1 + \nu_2 \mathbf{u}_2) \in f(U),$$

поскольку  $\nu_1 \mathbf{u}_1 + \nu_2 \mathbf{u}_2 \in U$ . Поэтому  $f(U)$  — векторное подпространство в  $W$ . В частности, это относится к  $f(V) = \text{Im } f$ .

Заметим, что инъективность  $f$  равносильна равенству  $\text{Ker } f = \{\mathbf{0}\}$ . Действительно, в случае  $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}), \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , имеем  $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker } f$ . Обратно: если  $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \text{Ker } f$ , то  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f: V \rightarrow W$  — линейное отображение. Если  $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s \rangle \subset V$ , то  $f(U) = \langle f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_s) \rangle \subset W$ . В частности,

$$\dim f(U) \leq \dim U.$$

**Доказательство.** По условию любой вектор  $\mathbf{u} \in U$  записывается в виде  $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_s\mathbf{e}_s$ , поэтому  $f(\mathbf{u}) = \alpha_1f(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_sf(\mathbf{e}_s)$ , а это и означает, что  $f(U) = \langle f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_s) \rangle$ . В том случае, когда система  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$  была базисной для  $U$ , система  $(f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_s))$ , вообще говоря, не обязана быть базисной для  $f(U)$ , поэтому  $\dim f(U) \leq s = \dim U$ . Вполне может случиться, что  $U \subseteq \text{Ker } f$  и  $f(U) = \{\mathbf{0}\}$ .  $\square$

**2. Задание линейных отображений матрицами.** Пусть нам заданы базисы  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  векторных пространств  $V$  и  $W$  соответственно. Любой вектор из образа  $\text{Im } f \subset W$  является линейной комбинацией векторов

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m, \\ &\vdots \\ f(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Обратно, задание набора векторов  $\mathbf{w}'_1 = f(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{w}'_n = f(\mathbf{v}_n)$  пространства  $W$  полностью определяет линейное отображение  $f$ ; произвольному вектору  $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$  достаточно поставить в соответствие вектор  $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}'_n$ . Если  $\mathbf{v}' = \alpha'_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha'_n \mathbf{v}_n$ , то

$$\begin{aligned} f(\nu \mathbf{v} + \nu' \mathbf{v}') &= f((\nu \alpha_1 + \nu' \alpha'_1) \mathbf{w}_1 + \dots + (\nu \alpha_n + \nu' \alpha'_n) \mathbf{w}_n) = \\ &= (\nu \alpha_1 + \nu' \alpha'_1) \mathbf{w}'_1 + \dots + (\nu \alpha_n + \nu' \alpha'_n) \mathbf{w}'_n = \\ &= \nu(\alpha_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{w}'_n) + \nu'(\alpha'_1 \mathbf{w}'_1 + \dots + \alpha'_n \mathbf{w}'_n) = \nu f(\mathbf{v}) + \nu' f(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

## Матрица

$$M_f = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

называется *матрицей линейного отображения*  $f: V \rightarrow W$  относительно базисов  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ ,  $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$  (или в базисах  $(\mathbf{v}_j)$ ,  $(\mathbf{w}_i)$ ) пространств  $V$  и  $W$ . Различным матрицам отвечают различные линейные отображения.

Заметим, что координаты вектора  $f(\mathbf{v}_j)$  составляют  $j$ -й столбец матрицы  $M_f$ . Поэтому  $\text{rank} \{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\} = \text{rank } M_f$ , а так как всегда  $\text{rank} \{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\} = \dim \langle f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n) \rangle_{\mathbb{K}} = \dim \text{Im } f$ , то  $\dim \text{Im } f = \text{rank } M_f$ .

**Определение 2.** Размерность подпространства  $\text{Im } f$  называется также *рангом* ( $\text{rank } f$ ) *линейного отображения*  $f$ .

Понятно, что от выбора базиса величина  $\text{rank } f$  не зависит. Нами доказана

**Теорема 2. i)** Пусть  $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ ,  $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$  — два пространства с фиксированными базисами. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями из  $V$  в  $W$  и  $m \times n$ -матрицами с коэффициентами в основном поле  $\mathbb{K}$ .

ii) Произвольной системе векторов  $\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n \in W$  отвечает единственное линейное отображение  $f: V \rightarrow W$ , для которого  $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

iii) Ранги линейного отображения  $f: V \rightarrow W$  и отвечающей ему матрицы  $M_f$  (при любом выборе базисов в  $V$  и  $W$ ) совпадают.

Как мы знаем, все  $m \times n$ -матрицы с коэффициентами в поле  $\mathbb{K}$  образуют векторное пространство над  $\mathbb{K}$  размерности  $mn$  с базисными векторами  $E_{ij}$  — матрицами, в которых на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца стоит 1, а на остальных местах — нули. Стало быть, имеет место равенство

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = (\dim V)(\dim W).$$

Соответствие между матрицами и линейными отображениями можно использовать для нового доказательства известного утверждения (см. [ВА I, гл. 2 § 3]) о ранге произведения матриц. На языке отображений ему соответствует

**Теорема 3.** Пусть  $f \circ g$  — композиция линейных отображений

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W.$$

Тогда:

- i)  $\dim \text{Im } (f \circ g) \leq \dim \text{Im } f$ ;
- ii)  $\dim \text{Im } (f \circ g) \leq \dim \text{Im } g$ .

**Доказательство.** Неравенство i) очевидно, поскольку  $\text{Im } (f \circ g) \subseteq \text{Im } f$ . Для доказательства ii) заметим, что  $\text{Im } (f \circ g) = f(\text{Im } g)$ . Так как  $\dim \text{Im } h \leq \dim U$  для любого линейного отображения  $h: U \rightarrow W$ , то становится очевидным и неравенство ii).  $\square$

Пусть  $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j$  — вектор из  $V$ ,  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{w}_i$  — его образ относительно линейного отображения  $f: V \rightarrow W$  с матрицей  $M_f$  вида (2) в указанных базисах  $(\mathbf{v}_j)$ ,  $(\mathbf{w}_i)$ . Тогда в соответствии с правилом (1) имеем

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{w}_i.$$

Отсюда  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ,  $1 \leq i \leq m$ , или, коротко,

$$Y = M_f \cdot X, \quad (3)$$

где  $X = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_m]$  — столбцы координат векторов  $\mathbf{x} \in V$  и  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in W$ . На (3) мы смотрим как на линейное преобразование координат (в привычном нам смысле), отвечающее отображению  $f$ .

Пусть  $f, g$  — линейные отображения из  $V$  в  $W$ . Фиксируя в этих пространствах базисы  $(\mathbf{v}_j)$ ,  $(\mathbf{w}_i)$ , мы фактически переходим к рассмотрению линейных отображений  $f: X \mapsto M_f X$ ,  $g: X \mapsto M_g X$  из  $\mathbb{K}^n$  в  $\mathbb{K}^m$ . В соответствии с нашими прежними представлениями [ВА I, гл. 2, § 3] видим, что линейному отображению  $\nu f + \mu g$  (см. п. 1) отвечает матрица

$$M_{\nu f + \mu g} = \nu M_f + \mu M_g.$$

Аналогично, композиции  $f \circ g$  линейных отображений  $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$  при фиксированных базисах в  $U$ ,  $V$  и  $W$  отвечает матрица

$$M_{f \circ g} = M_f M_g.$$

Мы лишь напомнили известные факты, ещё раз подчеркивая полную согласованность в соответствии между линейными отображениями и матрицами.

### 3. Размерность ядра и образа. Справедлива следующая

**Теорема 4.** Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $f: V \rightarrow W$  — линейное отображение. Тогда  $\text{Ker } f$  и  $\text{Im } f$  конечномерны и

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V.$$

**Доказательство** (ср. с доказательством аналогичной теоремы в [ВА I, гл. 2, § 3]). Так как  $\text{Ker } f \subset V$ , то  $\dim \text{Ker } f \leq \dim V < \infty$ . Выберем базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$  в  $\text{Ker } f$  и дополним его в соответствии с теоремой 3 из § 2 гл. 1 до базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ . Любой вектор из  $\text{Im } f$  имеет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i f(\mathbf{e}_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{K},$$

т.е. векторы  $f(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  порождают  $\text{Im } f$ . Остается лишь показать, что эти векторы линейно независимы.

Предположим, что  $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(\mathbf{e}_i) = 0$ . Тогда  $f\left(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i\right) = 0$ . Это значит, что  $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \in \text{Ker } f$ , т.е.  $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{e}_j$ . Но всякая линейная зависимость между базисными элементами  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  должна быть тривиальной. Приходим к заключению, что  $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ . Следовательно, векторы  $f(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)$  линейно независимы и  $\dim \text{Im } f = n - k$ .  $\square$

**Следствие.** В случае  $\dim f < \infty$  следующие свойства линейного отображения  $f: V \rightarrow W$  равносильны:

- i)  $f$  инъективно;
- ii)  $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$ .

**Доказательство.** Согласно теореме  $\dim V = \dim \operatorname{Im} f$  тогда и только тогда, когда  $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ , т.е.  $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ , а мы видели, что ядро нулевое только в случае инъективности  $f$ .  $\square$

**Замечание.** Если  $\dim V = \dim W$  и  $f: V \rightarrow W$  — линейное отображение, то, как утверждает следствие, из инъективности (когда  $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ) или из сюръективности ( $\operatorname{Im} f = W$ ) вытекает биективность  $f$ , т.е. в этом случае  $f$  является изоморфизмом.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Записав столбец координат  $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]$  в виде матрицы  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ , а затем взяв фиксированную матрицу  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ , мы определим два линейных преобразования:

$$f_L: X \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x'_3 & x'_4 \end{pmatrix} = X',$$

$$f_R: X \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} x''_1 & x''_2 \\ x''_3 & x''_4 \end{pmatrix} = X'',$$

которым отвечают матрицы  $M_{f_L}$  и  $M_{f_R}$ .

Предлагается проверить, что

$$M_{f_L} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{pmatrix}, \quad M_{f_R} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix}.$$

**2.** Проверить линейность следующих отображений:

а)  $V$  — векторное пространство,  $W = V/L$  — факторпространство,  $f$  отображает каждый вектор  $\mathbf{x} \in V$  на смежный класс  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + L$ ;

б)  $f: P_n \rightarrow P_n$  — отображение, определённое по правилу  $f(u(t)) = tu'(t) - u(t)$ .

Найти  $\operatorname{Ker} f$  и вычислить  $\operatorname{rank} f$ .

**3.** Показать, что отображение  $f_C: X \mapsto C^{-1}XC$ , определённое невырожденной матрицей  $C \in M_n(\mathbb{K})$ , линейно на  $M_n(\mathbb{K})$  и обладает свойством  $f_C(XY) = f_C(X)f_C(Y)$ .

## § 2. Алгебра линейных операторов

**1. Определения и примеры.** Основное поле  $\mathbb{K}$  пока предполагается произвольным. В случае  $W = V$  элементы векторного пространства  $\mathcal{L}(V, W)$ , которое теперь естественно обозначать символом  $\mathcal{L}(V)$  (используется также обозначение  $\operatorname{End} V$ ), обычно называют *линейными операторами* или *линейными преобразованиями*. Ввиду многозначности термина “линейное преобразование” (связанного скорее с

координатами векторов, чем с самим векторным пространством) мы предпочтём первый из них. В дальнейшем линейные операторы будем обозначать заглавными рукописными латинскими буквами  $A, B, C, D, \dots$ , а соответствующие им в каком-нибудь базисе ( $e_i$ ) пространства  $V$  матрицы — заглавными печатными буквами  $A, B, C, D, \dots$ . В другом (штрихованном) базисе ( $e'_i$ ) тем же операторам  $A, B, \dots$  будут отвечать матрицы  $A', B', \dots$ . Линейный оператор  $\mathcal{E} = \text{Id}$  с матрицей  $E = (\delta_{ij})$  всегда обозначает  *тождественное (единичное)* отображение  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ . Как правило, результат применения оператора  $A$  к вектору  $\mathbf{x}$  обозначается простым приписыванием букв:  $A\mathbf{x}$  (реже  $A(\mathbf{x})$ ).

Линейный оператор  $B$  называется  *обратным к  $A$* , если  $AB = BA = \mathcal{E}$ . В соответствии с известными общими результатами (см. [ВА I, гл. 1, § 5]) обратный к  $A$  оператор, если он существует, однозначно определён; его обозначают символом  $A^{-1}$ . Согласно следствию теоремы 4 из § 1 существование  $A^{-1}$  эквивалентно условию  $\text{Ker } A = 0$  или  $\dim V = \dim \text{Im } A$ . В общем случае размерность ядра  $\dim \text{Ker } A$  называется  *дефектом* оператора  $A$ . Стало быть, операторы дефекта нуль и только они обратимы. Например, если уравнение  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  имеет решение при всех  $\mathbf{b}$ , то существует обратный оператор  $A$ . Напомним ещё, что  $\text{rank } A = \dim \text{Im } A = \dim V - \dim \text{Ker } A$  это ранг оператора  $A$ . Все эти понятия и условия, переведённые на язык матриц, нам хорошо известны, но важно признать, что понятие линейного оператора является более фундаментальным: оно не связано с выбором какого-либо базиса.

Приведём несколько примеров линейных операторов.

Пример 1. Нулевой оператор  $\mathcal{O}$  переводит любой вектор  $\mathbf{v} \in V$  в нулевой:  $\text{rank } \mathcal{O} = 0$ .

Пример 2. Оператор подобия  $A$ :  $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  ( $\lambda$  — фиксированный скаляр).

Пример 3. Оператор  $A$  поворота плоскости  $\mathbb{R}^2$  на угол  $\alpha$  проще всего реализовать, интерпретируя  $\mathbb{R}^2$  как плоскость комплексных чисел с базисом  $\{1, i\}$ . Тогда, очевидно,  $A: z = x + iy \mapsto e^{i\alpha}z$  — оператор умножения на число  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$  и  $A \cdot i = -\sin \alpha + i \cos \alpha$ . Поэтому в базисе  $(1, i)$  матрицей оператора  $A$  будет

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть  $V = U \oplus W$  — прямая сумма подпространств. Если  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_U + \mathbf{x}_W$  — разложение вектора с компонентами  $\mathbf{x}_U \in U$ ,  $\mathbf{x}_W \in W$  и  $\mathcal{P}\mathbf{x} = \mathbf{x}_U$ , то  $\mathcal{P}$  называется  *оператором проектирования* или *проектором* на подпространство  $U$  параллельно  $W$  (или *вдоль*  $W$ ). Заметим, что  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ .

Пример 5.  $P_n = \langle 1, t, \dots, t^{n-1} \rangle$  — пространство многочленов степени  $\leq n-1$  над  $\mathfrak{K}$ ,  $D_t = d/dt$  — оператор дифференцирования по  $t$ :  $D_t \cdot f(t) = f'(t)$ .

Следует предостеречь от возможной ошибки в истолковании формулы

$$\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = \dim V \tag{1}$$

(см. формулировку теоремы 4 из § 1). Отсюда вовсе не следует, что

$V = \text{Ker } \mathcal{A} + \text{Im } \mathcal{A}$ , как показывает хотя бы оператор  $\mathcal{D}$  из примера 5:

$$\text{Ker } \mathcal{D} = \langle 1 \rangle = \mathbb{K} \cdot 1 \subset \langle 1, t, \dots, t^{n-2} \rangle = \text{Im } \mathcal{D}.$$

**2. Алгебра операторов.** Мы уже знаем, что множество  $\mathcal{L}(V)$  всех линейных операторов на векторном пространстве  $V$  само является векторным пространством размерности

$$\dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2. \quad (2)$$

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  на  $V$  полностью определяется своим действием на элементы  $\mathbf{x} \in V$ . Вспоминая принципы композиции отображений, изложенные в [ВА I, гл. 1, 2], мы полагаем, что

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}, \quad (\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}), \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x})$$

(таким образом, композиция  $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  обозначается просто “приписыванием”  $\mathcal{A}$  к  $\mathcal{B}$ ). Из этого определения непосредственно вытекают соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B}) &= \alpha\mathcal{A} + \alpha\mathcal{B}, \\ (\alpha + \beta)\mathcal{A} &= \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{A}, \\ (\alpha\beta)\mathcal{A} &= \alpha(\beta\mathcal{A}), \\ 1 \cdot \mathcal{A} &= \mathcal{A}; \end{aligned} \quad (3')$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} \text{ (ассоциативность),}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}, \quad (3'')$$

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C} \text{ (дистрибутивность);}$$

$$\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}). \quad (3''')$$

Мы видим, что множество линейных операторов  $\mathcal{L}(V)$  является одновременно векторным пространством над полем  $\mathbb{K}$  (первые четыре соотношения (3')) и ассоциативным кольцом (следующие три соотношения (3'')); последнее соотношение (3''') смешанного типа устанавливает дополнительную закономерность между умножением на скаляры и композицией операторов.

Определение 1. Кольцо  $K$ , являющееся одновременно векторным пространством над полем  $\mathbb{K}$  таким, что  $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$  для всех  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $a, b \in K$ , называется *алгеброй* над  $\mathbb{K}$ . Размерность  $K$  как векторного пространства называется *размерностью алгебры*  $K$  над  $\mathbb{K}$ . Всякое векторное подпространство  $L \subset K$ , замкнутое относительно операции умножения в  $K$  ( $L \cdot L \subseteq L$ ), называется *подалгеброй* алгебры  $K$ .

Говоря об алгебрах, имеют в виду преимущественно ассоциативные алгебры  $(ab)c = a(bc)$  с единицей 1:  $1 \cdot x = x$ ,  $x \in K$ . Именно такой является алгебра  $\mathcal{L}(V)$  линейных операторов на  $V$ . Матричный вариант  $M_n(\mathbb{K})$  алгебры  $\mathcal{L}(V)$  встречался в [ВА I, гл. 2, § 3],

где приводились аналоги соотношений (3')–(3'') для матриц. Хотя о соответствии между линейными отображениями и матрицами говорилось неоднократно, в том числе в § 1, ещё раз запечатлеем в памяти простой, но важный факт: если

$$\mathcal{A}: \mathbf{e}_k \mapsto \mathcal{A}\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \mathbf{e}_i, \quad \mathcal{B}: \mathbf{e}_j \mapsto \mathcal{B}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} \mathbf{e}_k$$

— линейные операторы с матрицами  $A = (a_{ik})$ ,  $B = (b_{kj})$  в базисе  $(\mathbf{e}_i)$  пространства  $V$ , то матрицей оператора  $\mathcal{AB}$  в том же базисе будет  $C = AB$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_i c_{ij} \mathbf{e}_i &= (\mathcal{AB})\mathbf{e}_j = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{e}_j) = \mathcal{A}\left(\sum_k b_{kj} \mathbf{e}_k\right) = \sum_k b_{kj} \mathcal{A}\mathbf{e}_k = \\ &= \sum_k b_{kj} \sum_i a_{ik} \mathbf{e}_i = \sum_i \left( \sum_k a_{ik} b_{kj} \right) \mathbf{e}_i, \end{aligned}$$

т.е.  $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$  и  $(c_{ij}) = AB$ .

Наиболее интересные для приложений кольца являются алгебрами. Алгебра многочленов  $\mathbb{K}[t]$  — простейший пример бесконечномерной ассоциативной алгебры. В ассоциативной алгебре  $\mathcal{L}(V)$  размерности  $n^2$  (см. (2);  $n = \dim V$ ) особого упоминания заслуживают подалгебры, порождённые одним оператором. Именно, если  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, то порождённая им подалгебра  $\mathbb{K}[\mathcal{A}]$  есть наименьшая подалгебра, содержащая  $\mathcal{A}$ . В этом частном случае удобно считать единичный оператор  $\mathcal{E}$  принадлежащим  $\mathbb{K}[\mathcal{A}]$ . Элементами подалгебры  $\mathbb{K}[\mathcal{A}]$  являются всевозможные степени оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}, \quad \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}, \quad \dots, \quad \mathcal{A}^k = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}\dots\mathcal{A}}_k, \quad \dots,$$

и их линейные комбинации. Другими словами, если

$$f(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m \in \mathbb{K}[t],$$

то

$$f(\mathcal{A}) = a_0 \mathcal{A}^{m-1} + \dots + a_{m-1} \mathcal{A} + a_m \mathcal{E} \tag{4}$$

— наиболее общий вид линейного оператора из  $\mathbb{K}[\mathcal{A}]$ . Встав на функциональную точку зрения, мы сказали бы, что  $f(\mathcal{A})$  — значение многочлена  $f \in \mathbb{K}[t]$  при  $t = \mathcal{A}$ . Линейный оператор  $f(\mathcal{A})$  вида (4) действует на векторы  $\mathbf{x} \in V$  естественным образом:

$$f(\mathcal{A})\mathbf{x} = a_0 \mathcal{A}^m \mathbf{x} + a_1 \mathcal{A}^{m-1} \mathbf{x} + \dots + a_{m-1} \mathcal{A} \mathbf{x} + a_m \mathbf{x}.$$

Алгебра  $\mathbb{K}[\mathcal{A}]$  коммутативна, поскольку

$$f(\mathcal{A}) \cdot g(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) \cdot f(\mathcal{A})$$

(следствие перестановочности степеней:  $\mathcal{A}^k \cdot \mathcal{A}^l = \mathcal{A}^{k+l} = \mathcal{A}^l \cdot \mathcal{A}^k$ ). Какова ее размерность? Мы увидим в дальнейшем, что всегда

$$\dim \mathfrak{K}[\mathcal{A}] \leq \dim V. \quad (5)$$

Но это сравнительно тонкий результат, а пока мы сделаем предварительные полезные замечания.

**Определение 2.** Говорят, что многочлен  $f(t)$  *аннулирует* линейный оператор  $\mathcal{A}$ , если  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . Нормализованный (т.е. со старшим коэффициентом 1) многочлен минимальной степени, аннулирующий  $\mathcal{A}$ , называется *минимальным многочленом* оператора  $\mathcal{A}$ .

Пусть

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m + \mu_1 t^{m-1} + \dots + \mu_{m-1} t + \mu_m \quad (6)$$

— минимальный многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Тогда операторы  $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{m-1}$  линейно независимы, так как соотношение  $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \mathcal{A}^i = \mathcal{O}$  означало бы, что многочлен  $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i t^i$  аннулирует  $\mathcal{A}$ , хотя его степень меньше  $m$ . Обратно, если  $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{m-1}$  — линейно независимые операторы (как векторы пространства  $\mathcal{L}(V)$ ), а оператор  $\mathcal{A}^m$  уже выражается линейно через них, то это значит, что  $m$  — степень минимального многочлена для  $\mathcal{A}$ . Существование  $m$  — тривиальное следствие включения  $\mathfrak{K}[\mathcal{A}] \subset \mathcal{L}(V)$ . Так как  $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ , то  $m \leq n^2$ . Тем самым доказана часть следующего утверждения.

**Теорема 1.** Для всякого линейного оператора  $\mathcal{A}$  существует минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ . Его степень совпадает с размерностью алгебры  $\mathfrak{K}[\mathcal{A}]$ . Оператор  $\mathcal{A}$  обратим тогда и только тогда, когда свободный член  $\mu_m$  многочлена (6) отличен от нуля.

Доказательство заключительной части теоремы столь же просто, как и проведённое выше доказательство первой части. Именемо, если  $\mu_m = 0$ , то

$$\mathcal{O} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{m-1} + \mu_1 \mathcal{A}^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} \mathcal{E}).$$

Значит, у  $\mathcal{A}$  есть делитель нуля  $\mathcal{A}^{m-1} + \mu_1 \mathcal{A}^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} \mathcal{E} \neq \mathcal{O}$  (минимальность  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ ), а делитель нуля в кольце не может быть обратимым. Если, напротив,  $\mu_m \neq 0$ , то соотношение

$$\mathcal{A}(-\mu_m^{-1} \mathcal{A}^{m-1} - \mu_m^{-1} \mu_1 \mathcal{A}^{m-2} - \dots - \mu_m^{-1} \mu_{m-1} \mathcal{E}) = \mathcal{E},$$

вытекающее из  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ , в явном виде задаёт оператор, обратный к  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Теорема 2.** Любой аннулирующий многочлен  $f(t)$  оператора  $\mathcal{A}$  делится без остатка на минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ .

**Доказательство.** По предположению линейный оператор  $f(\mathcal{A})$  (см. (4)) равен нулевому оператору  $\mathcal{O}$ . Если  $f(t) = q(t)\mu_{\mathcal{A}}(t) + r(t)$  — результат деления  $f(t)$  на  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  с остатком  $r(t)$ , то

$$\mathcal{O} = f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A}) \cdot \mathcal{O} + r(\mathcal{A}),$$

откуда  $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . Но  $\deg r(t) < \deg \mu_{\mathcal{A}}(t)$ , так что в соответствии с определением минимального многочлена имеем  $r(t) = 0$ .  $\square$

**Определение 3.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется *нильпотентным*, если  $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$  для некоторого  $m > 0$ ; наименьшее такое натуральное число  $m$  называется *индексом нильпотентности*.

Понятно, что  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m$  для оператора с индексом нильпотентности  $m$  и  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - t$  для нетривиального оператора  $\mathcal{A}$  с  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ . Далее,  $\mu_{\mathcal{O}}(t) = t$  и  $\mu_{\mathcal{E}}(t) = t - 1$ . Типичным примером нильпотентного линейного оператора индекса  $n$  служит оператор дифференцирования  $D_t$ , действующий на пространстве  $P_n$  многочленов степени  $\leq n - 1$ . Оператор проектирования  $\mathcal{P}$  (пример 4 из п. 1) обладает свойством  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ . Эти примеры будут активно использоваться в дальнейшем.

**3. Матрицы линейного оператора в различных базисах.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — линейный оператор. Выбрав в  $V$  базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , мы можем задать  $\mathcal{A}$  его матрицей  $A = (a_{ki})$ , так что

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \sum_k a_{ki} \mathbf{e}_k. \quad (7)$$

Но тот же самый оператор  $\mathcal{A}$  в ином базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  пространства  $V$  будет иметь какую-то другую матрицу  $A' = (a'_{kj})$ :

$$\mathcal{A}\mathbf{e}'_j = \sum_k a'_{kj} \mathbf{e}'_k. \quad (7')$$

Если  $B = (b_{ij})$  — матрица перехода от базиса  $(\mathbf{e}_i)$  к базису  $(\mathbf{e}'_j)$ , то формулы  $\mathbf{e}'_j = \sum_i b_{ij} \mathbf{e}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , наводят на мысль ввести линейный оператор  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_j, \quad (8)$$

с матрицей  $B$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Так как  $\det B \neq 0$  (теорема 4 из § 2 гл. 1), то оператор  $\mathcal{B}$  обратим.

Наконец, определим вспомогательный оператор  $\mathcal{A}'$ , имеющий в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  ту же матрицу  $A'$ , что и оператор  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ . Другими словами, положим

$$\mathcal{A}'\mathbf{e}_j = \sum_i a'_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (9)$$

Мы имеем право это сделать, поскольку при фиксированном базисе между линейными операторами и матрицами имеется биективное соответствие. Используя (7) и (8), перепишем соотношение (7') в виде

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{e}_j = \mathcal{A}\mathbf{e}'_j = \sum_i a'_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_i a'_{ij} \mathcal{B}\mathbf{e}_i = \mathcal{B}\left(\sum_i a'_{ij} \mathbf{e}_i\right),$$

откуда ввиду обратимости  $\mathcal{B}$  и ввиду выражения (9) для  $\mathcal{A}'$  получаем

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{e}_j = \mathcal{A}'\mathbf{e}_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (10)$$

Рассматривая все операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{A}'$  в одном и том же базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , мы переходим от (10) к матричному соотношению

$$\mathcal{A}' = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}. \quad (11)$$

К соотношению (11) можно прийти более прямым, координатным путем. Пусть, как обычно,  $\sum_i x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i$  — запись произвольного вектора  $\mathbf{x} \in V$  в исходном и новом (штрихованном) базисе;  $X = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $X' = [x'_1, \dots, x'_n]$  — соответствующие столбцы координат. Далее, пусть  $Y = AX$ ,  $Y' = A'X'$ , где  $A$ ,  $A'$  — матрицы, определённые соотношениями (7) и (7'). Так как  $X = BX'$ ,  $Y = BY'$  (см. (4') из § 2 гл. 1), то

$$ABX' = AX = Y = BY' = BA'X'.$$

Ввиду произвола в выборе столбца  $X'$  (вектора  $\mathbf{x} \in V$ ) имеем  $AB = BA'$ , откуда  $A' = B^{-1}AB$ .

Итак, мы дважды убедились в том, что справедлива

*Теорема 3. Матрица  $\mathcal{A}'$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  получается из матрицы  $A$  того же оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  по формуле (11), где  $B$  — матрица перехода от  $(\mathbf{e}_i)$  к  $(\mathbf{e}'_i)$ .*

*Определение 4.* Говорят, что матрица  $A'$  подобна матрице  $A$  и пишут  $A' \sim A$ , если существует невырожденная матрица  $B$ , связывающая  $A$  и  $A'$  соотношением (11). Предполагается, что все матрицы квадратные одинакового порядка, с коэффициентами из одного и того же поля  $\mathbb{K}$ .

Ясно, что всегда  $A \sim A$  (взять  $B = E$ ). Далее, соотношение (11), переписанное в виде  $A = B_1^{-1}A'B_1$  с  $B_1 = B^{-1}$ , показывает, что отношение подобия симметрично:  $A' \sim A \Rightarrow A \sim A'$ . Оно также транзитивно: если  $A' = B^{-1}AB$ ,  $A'' = C^{-1}A'C$ , то  $A'' = (BC)^{-1}A(BC)$ , т.е.  $A'' \sim A'$ ,  $A' \sim A \Rightarrow A'' \sim A$ . Таким образом, отношение подобия является отношением эквивалентности, и все квадратные матрицы порядка  $n$  разбиваются на непересекающиеся классы подобных матриц (сравнить с классами эквивалентности матриц из [ВА I, гл. 2, § 3, п. 6]). Согласно теореме 3 каждому линейному оператору соответствует ровно один класс подобных матриц, а подобные матрицы служат матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах.

Язык линейных операторов удобен в теоретических исследованиях, однако конкретные вычисления чаще всего реализуются в матричной форме. Поэтому классификация матриц с точностью до подобия является весьма важной с практической точки зрения. Если, скажем, нам требуется вычислить степень  $A^k$  матрицы  $A$  порядка

$n > 1$  (или даже  $n > 100$ ) для большого показателя  $k \geq 1000$  (а такие задачи встречаются на практике), то естественно попытаться найти матрицу  $A' \sim A$  с легко вычислимой степенью  $(A')^k$ . Проще всего это сделать с  $A' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , коль скоро такая матрица в классе подобия с представителем  $A$  существует. Тогда  $A = BA'B^{-1}$  и  $A^k = B \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) B^{-1}$ . В этом отношении достаточно типична матрица  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , имеющая прямое отношение к числам Фибоначчи и являющаяся главным “героем” в [ВА I, гл. 2, § 3, п. 5, пример 3]. Добавим ещё, что умение вычислять степени  $A^k$  даёт возможность находить значения

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m E$$

для произвольного многочлена  $f(t) = a_0 t^m + \dots + a_m$ .

**4. Определитель и след линейного оператора.** Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V$ . Его *определителем* называется определитель  $\det A$  матрицы  $A$ , соответствующей  $\mathcal{A}$  в каком-нибудь базисе пространства  $V$ . Так как  $\det(B^{-1}AB) = \det A$ , то  $\det \mathcal{A}$  — инвариант оператора  $\mathcal{A}$ . Обратимым матрицам отвечают обратимые операторы, поэтому  $\det \mathcal{A} \neq 0$  — необходимое и достаточное условие обратимости оператора  $\mathcal{A}$ . В случае  $\det \mathcal{A} = 0$  мы имеем дело с вырожденным линейным оператором  $\mathcal{A}$ .

Назовём теперь *следом* линейного оператора  $\mathcal{A}$  выражение

$$\text{tr } \mathcal{A} = \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

где  $A = (a_{ij})$  — матрица, отвечающая  $\mathcal{A}$  ( $\text{tr}$  — сокращение от английского trace). Как известно и как легко проверяется,

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA \tag{12}$$

для любых матриц  $A, B$  одинакового порядка. Применяя это соотношение к матрицам  $B^{-1}A$  и  $B$ , где  $B$  невырождена, получим

$$\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(B \cdot B^{-1}A) = \text{tr } A.$$

Значит, определение следа оператора корректно, т.е. не зависит от выбора базиса в  $V$ . Аналогом (12) является соотношение

$$\text{tr } \mathcal{A}\mathcal{B} = \text{tr } \mathcal{B}\mathcal{A}. \tag{12'}$$

Обе введённые функции  $\det$  и  $\text{tr}: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{K}$  играют важную роль. Функция  $\det$  мультипликативна ( $\det \mathcal{A}\mathcal{B} = (\det \mathcal{A})(\det \mathcal{B})$ ), и с её помощью выделяется группа  $\text{Aut } V$  автоморфизмов пространства  $V$ , или, что эквивалентно, группа всех невырожденных линейных операторов на  $V$ . Нетрудно сообразить, что при любом выборе базиса в  $V$  группа  $\text{Aut } V$  превращается в известную из [ВА I] полную линейную группу  $GL_n(\mathbb{K})$  матриц порядка  $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ . Более точно: имеет место изоморфизм групп  $\text{Aut } V \cong GL_n(\mathbb{K})$ .

Функция  $\text{tr}$  линейна:

$$\text{tr}(\alpha \mathcal{A} + \beta \mathcal{B}) = \alpha \text{tr} \mathcal{A} + \beta \text{tr} \mathcal{B}$$

(лёгко проверить), и этот факт широко используется в математике; так, содержательная теория характеров групп (см. [ВА III]) целиком основывается на понятии следа. Рассмотрим более “скромные” применения.

Пример 6 (алгебры Ли). Алгебры, как и кольца, не обязательно должны быть ассоциативными. Очень важным примером неассоциативной алгебры является так называемая *алгебра Ли*  $L$  (или *лиева алгебра* — в честь Софуса Ли (1842–1899)), в которой операция умножения  $(x, y) \mapsto x * y$  удовлетворяет двум аксиомам:

i)  $(x * x) = 0$ ; тогда  $(x + y) * (x + y) = 0 \Rightarrow x * y = -y * x$  (свойство антисимметричности);

ii)  $(x * y) * z + (y * z) * x + (z * x) * y = 0$  (тождество Якоби).

Операцию  $x * y$  чаще обозначают символом  $[x, y]$  и называют *операцией коммутации*. Векторное пространство  $L = \mathbb{R}^3 = \langle e_i \rangle$  есть трёхмерная алгебра Ли с операцией умножения — *векторным* (или *внешним*) произведением векторов: если

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3,$$

то

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3.$$

Легко проверить, далее (а такую проверку каждый математик должен пройти хотя бы раз в жизни), что, задав на множестве  $L = \mathcal{L}(V)$  новую операцию умножения по правилу

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}, \tag{13}$$

мы удовлетворим обеим аксиомам i), ii) и можем смотреть на  $\mathcal{L}(V)$  как на алгебру Ли. Её принято обозначать символом  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ . Имеется глубокая теорема, согласно которой всякая конечномерная алгебра Ли над  $\mathbb{K}$  является подалгеброй алгебры Ли  $(\mathcal{L}(V); [,])$ , где  $V$  — некоторое векторное пространство конечной размерности над  $\mathbb{K}$  (напомним, что *подалгебра* — подпространство в  $\mathcal{L}(V)$ , замкнутое относительно операции  $[,]$ ).

Алгебры Ли, конечномерные и бесконечномерные, играют весьма существенную роль в квантовой механике (см. учебное пособие [2] в списке дополнительной литературы). Дело в том, что так называемые динамические переменные в квантовой теории подчиняются законам некоммутативной алгебры, и степень их неперестановочности измеряется как раз “коммутаторами” (13). Мы получим нетривиальный и в некотором смысле близкий к квантовой теории пример коммутационного соотношения, если возьмём в качестве  $V$  бесконечномерное пространство всех многочленов над  $\mathbb{K}$ . Пусть  $\mathcal{D}_t = d/dt$  — оператор дифференцирования по  $t$ , а  $\mathcal{F}_t$  — оператор умножения на  $t$ :  $\mathcal{D}_t(f) = f'$ ,  $\mathcal{F}_t(f) = t \cdot f$ . Легко проверить, что

$$[\mathcal{D}_t, \mathcal{F}_t] = \mathcal{D}_t \mathcal{F}_t - \mathcal{F}_t \mathcal{D}_t = \mathcal{E} \tag{14}$$

— единичный оператор на  $V = \mathbb{K}[t]$ .

Возникает вопрос: может ли выполняться соотношение  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{E}$  типа (14) в конечномерной алгебре  $\mathcal{L}(V)$ ? Ответ на него оказывается зависящим от характеристики основного поля. Если  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (наиболее интересные случаи), то сразу же приходим к противоречию:

$$0 = \text{tr} \mathcal{AB} - \text{tr} \mathcal{BA} = \text{tr} [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \text{tr} \mathcal{E} = n = \dim V.$$

Однако при  $p|n$ , где  $p = \text{char } \mathfrak{K}$ , это противоречие устраняется, как показывают операторы с матрицами порядка  $p$  над  $\mathfrak{K}$ :

$$J_p = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad N_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p-1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Прежний критерий с функцией  $\text{tr}$  здесь не срабатывает, и на самом деле  $[J_p, N_p] = E_p$ .

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что обе матрицы вида (15) нильпотентны:  $J_p^p = N_p^p = 0$ .

2. Показать, что если  $A, B, C$  — матрицы размеров  $n \times p, p \times q, q \times n$  соответственно, то  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$ .

3. Интерпретируя  $GL_n(\mathbb{F}_p)$  как группу автоморфизмов  $\text{Aut } V$  векторного пространства  $V$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}_p$  из  $p$  элементов, найти порядок  $|GL_n(\mathbb{F}_p)|$ .

4. Показать, что множество  $\mathfrak{sl}_n(\mathfrak{K})$  линейных операторов со следом нуль является подалгеброй коразмерности 1 в алгебре Ли  $\mathfrak{gl}_n(\mathfrak{K}) = \mathcal{L}(V)$ .

5. Доказать, что для любых линейных операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  на  $V$  имеет место равенство

$$\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \mathcal{B} + \dim (\text{Im } \mathcal{A} \cap \text{Ker } \mathcal{B}).$$

6. Используя упр. 5, доказать, что для любых линейных операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  на  $V$  справедливо *неравенство Фробениуса*

$$\text{rank } \mathcal{B}\mathcal{A} + \text{rank } \mathcal{A}\mathcal{C} \leq \text{rank } \mathcal{A} + \text{rank } \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

7. Доказать, что для любого линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  и для любого  $i \geq 1$  имеет место формула

$$\dim (\text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A}^i - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{i-1}$$

(для  $i = 1$  формула очевидна; следует иметь в виду, что по определению всегда  $\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$ ).

8. Доказать, что две матрицы  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , подобные над полем комплексных чисел, будут подобны и над полем вещественных чисел.

9. По аналогии с определением 2 назовём  $f(t)$  *аннулирующим многочленом* оператора  $\mathcal{A}$  относительно вектора  $\mathbf{v} \in V$ , если  $f(\mathcal{A})\mathbf{v} = 0$ . Анулирующий нормализованный многочлен минимальной степени называется *минимальным многочленом оператора  $\mathcal{A}$  относительно  $\mathbf{v}$* . Обозначим его  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}}(t)$ . Будем считать поле  $\mathfrak{K}$  бесконечным. Доказать, что:

- а)  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{v}}(t)$  делит  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ ;
- б) существует  $\mathbf{a} \in V$  с  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{a}}(t) = \mu_{\mathcal{A}}(t)$ .

10. Пусть  $V$  — векторное пространство,  $U, W$  — два его подпространства, причём

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad W = W_1 \oplus W_2$$

— прямые разложения, где  $W_i \subset V_i$ ,  $i = 1, 2$ . Пусть, далее,  $\mathcal{P}_i$  — проекция  $V$  на  $V_i$  параллельно  $V_j$ ,  $j \neq i$ .

Доказать:

а) если

$$V_1 = W_1 + U \cap V_1, \quad V_2 = W_2 + \mathcal{P}_2(U), \quad (*)$$

то  $V = W + U$ ;

б) если  $V = W + U$  и  $\mathcal{P}_2(U) \cap W_2 = \mathbf{0}$ , то справедливы разложения  $(*)$  для  $V_1$ ,  $V_2$ , причём  $W \cap U = W_1 \cap U$ .

**11.** Доказать, что любая матрица  $A \in M_n(\mathbb{K})$  с коэффициентами в поле  $\mathbb{K}$  характеристики нуль и с нулевым следом подобна матрице  $A'$  с нулями по главной диагонали ( $A' = (a'_{ij})$ ,  $a'_{11} = a'_{22} = \dots = a'_{nn} = 0$ ).

**12.** Существенно ли в упр. 11 ограничение  $\text{char } \mathbb{K} = 0$ ?

### § 3. Инвариантные подпространства и собственные векторы

**1. Проекторы.** Пример 4 из § 2, п. 1 устанавливает связь между разложением  $V$  в прямую сумму двух подпространств и оператором проектирования  $\mathcal{P}$ , обладающим, как мы знаем, свойством  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ . Обратно: всякий оператор с этим свойством является оператором проектирования. Мы докажем это утверждение в следующем более общем контексте.

Пусть  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$  — разложение в прямую сумму  $m$  подпространств (см. п. 5 § 2 гл. 1). Тогда каждый вектор  $\mathbf{x} \in V$  однозначно записывается в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in W_i,$$

а отображение  $\mathcal{P}_i: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_i$  является линейным оператором на  $V$ . Кроме того,

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_m = \mathcal{E},$$

причём  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}$  при  $i \neq j$  и  $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$ . Наконец,

$$W_i = \mathcal{P}_i V = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{P}_i \mathbf{x} = \mathbf{x}\},$$

$$K_i = \text{Ker } \mathcal{P}_i = W_1 + \dots + \hat{W}_i + \dots + W_m$$

и  $\mathcal{P}_i$  суть оператор проектирования  $V$  на  $W_i$  вдоль  $K_i$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m: V \rightarrow V$  — конечное множество линейных операторов, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}; \quad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i, \quad 1 \leq i \leq m; \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}, \quad i \neq j. \quad (1)$$

Тогда

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m,$$

где  $W_i = \text{Im } \mathcal{P}_i$ .

**Доказательство.** По условию для любого  $\mathbf{x} \in V$  имеем

$$\mathbf{x} = \mathcal{E} \mathbf{x} = \sum \mathcal{P}_i \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in W_i.$$

Поэтому  $V = W_1 + \dots + W_m$ . Эта сумма является прямой, в чём мы убедимся, применив критерий из гл. 1, § 2, п. 5 (теорема 7). Именно, предположим, что  $\mathbf{x} \in W_j \cap (\sum_{i \neq j} W_i)$ . Так как  $W_i = \text{Im } \mathcal{P}_i$ , то найдутся такие векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ , что

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}_j(\mathbf{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_i(\mathbf{x}_i).$$

Применяя к этому равенству оператор  $\mathcal{P}_j$  и используя определяющие свойства  $\mathcal{P}_j^2 = \mathcal{P}_j$ ,  $\mathcal{P}_j \mathcal{P}_i = \mathcal{O}$  при  $i \neq j$ , получим

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}_j(\mathbf{x}_j) = \mathcal{P}_j^2(\mathbf{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, сумма  $V = \sum W_i$  прямая и  $\mathcal{P}_i$  — оператор проектирования  $V$  на  $W_i$  вдоль  $K_i = \text{Ker } \mathcal{P}_i = \sum_{j \neq i} W_j$ .  $\square$

Добавим, что если  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$  и  $V = U \oplus W$  — связанное с этим проектором прямое разложение с  $U = \text{Im } \mathcal{P} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle$ ,  $W = \text{Ker } \mathcal{P} = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ , то в выбранном базисе оператору  $\mathcal{P}$  отвечает матрица

$$P = \begin{vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad r = \text{rank } \mathcal{P}. \quad (2)$$

В частности, мы видим, что любая  $n \times n$ -матрица  $A$  ранга  $r$ , обладающая свойством  $A^2 = A$ , подобна матрице  $P$ :  $B^{-1}AB = P$  и  $\text{rank } A = \text{tr } A$ .

**Замечание.** Часто говорят, что операторы  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \delta_{ij} \mathcal{P}_i, \quad 1 \leq i, j \leq m,$$

составляют *ортогональную систему*  $\{\mathcal{P}_i | 1 \leq i \leq m\}$  *идемпотентных операторов*, а отвечающие им матрицы — *ортогональную систему*  $\{P_i | 1 \leq i \leq m\}$  *идемпотентных матриц*. Если выполнены все условия (1), то говорят о *полной ортогональной системе*.

**2. Инвариантные подпространства.** Всякий линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  действует не только на отдельные векторы  $\mathbf{x} \in V$ , но и на подпространства  $U \subset V$ :  $\mathcal{A}U = \{\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{x} \in U\}$ . В связи с этим исключительно важное значение приобретает понятие инвариантности.

**Определение 1.** Подпространство  $U \subset V$  *инвариантно* относительно линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , если  $\mathcal{A}U \subset U$ .

Например,  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  — инвариантные подпространства, хотя, возможно, и тривиальные, т.е. совпадающие с  $\{\mathbf{0}\}$  или с  $V$ . Для оператора дифференцирования  $\mathcal{D}_t$  на пространстве  $P_n$  многочленов степени  $\leq n - 1$  сразу же выделяется цепочка

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V \quad (3)$$

инвариантных подпространств  $V_i$  многочленов степени  $\leq i - 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ . Рассмотренное выше (п. 1) семейство операторов проектирования  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$

замечательно в том отношении, что с ним ассоциировано большое число подпространств

$$W_{i_1} \oplus W_{i_2} \oplus \dots \oplus W_{i_k}, \quad \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, m\},$$

инвариантных сразу относительно каждого оператора  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$  (мы здесь использовали то очевидное обстоятельство, что сумма и пересечение в  $V$  подпространств, инвариантных относительно линейного оператора  $\mathcal{A}$ , всегда инвариантны).

Пример противоположного свойства доставляют матрицы  $J_p, N_p$ , указанные в конце § 2. Отвечающие им операторы действуют на  $p$ -мерном пространстве  $V = \mathbb{R}^p$  (над полем  $\mathbb{K}$  характеристики  $p > 0$ ) таким образом, что у них нет общего нетривиального инвариантного подпространства. Можно указать одну существенную причину такого различия:  $[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = \mathcal{O}$ , в то время как  $[J_p, N_p] \neq \mathcal{O}$ .

Над полем  $\mathbb{R}$  также может проявляться подобный феномен. Оператор  $\mathcal{A}$  поворота плоскости  $\mathbb{R}^2$  на угол  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ; см. пример 3 из п. 1) не имеет нетривиальных инвариантных подпространств — прямых, которые переходили бы в себя при действии  $\mathcal{A}$ .

Наличие собственного инвариантного подпространства  $\{\mathbf{0}\} \subset \subset U \subset V$  даёт возможность упростить матрицу  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  путём выбора надлежащего базиса в  $V$ . Именно, если дополнить базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  в  $U$  до базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $V$ , то из условия  $\mathcal{A}\mathbf{e}_i \in U$ ,  $1 \leq i \leq m$ , следует, что в этом базисе матрицей оператора  $\mathcal{A}$  будет

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где  $A_1$  —  $m \times m$ -матрица,  $A_2$  —  $(n-m) \times (n-m)$ -матрица и  $A_0$  —  $m \times (n-m)$ -матрица. На  $A_1$  можно смотреть как на матрицу линейного оператора  $\mathcal{A}_U$  — оператора  $\mathcal{A}$ , ограниченного на  $U$  (удобно положить  $A_1 = \mathcal{A}_U$ ).

Представим на минуту, что  $A_0$  — нулевая матрица. Тогда, очевидно,  $W = \langle \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  тоже будет инвариантным подпространством в  $V$ , а  $A_2$  — матрицей оператора  $\mathcal{A}_W$ . В этом случае говорят о *прямой сумме операторов*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_U + \mathcal{A}_W, \quad (5)$$

соответствующей разложению  $V = U \oplus W$  в прямую сумму инвариантных подпространств. Матрица прямой суммы операторов имеет *клеточно-диагональный вид*:

$$A = \begin{vmatrix} A_U & 0 \\ 0 & A_W \end{vmatrix} = \mathcal{A}_U + \mathcal{A}_W. \quad (5')$$

Нами фактически доказана

Теорема 2. Пространство  $V$  является прямой суммой двух подпространств  $U, W$ , инвариантных относительно линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , тогда и только тогда, когда матрица этого оператора в каком-либо базисе принимает клеточно-диагональный вид (5').

Это утверждение очевидным образом переносится на любое число  $m$  инвариантных подпространств, прямая сумма которых совпадает с  $V$ . При  $m = n = \dim V$  мы приходим к условиям, когда матрица линейного оператора в подходящем базисе становится диагональной.

Вернёмся к тому случаю, когда в равенстве (4) матрицу  $A_0$  нельзя сделать нулевой, как бы мы ни выбирали векторы  $\mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ , дополняющие базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  инвариантного подпространства  $U \subset \subset V$ . Это значит, что хотя по теореме 9 из § 2 гл. 1 пространство  $V$  разлагается в прямую сумму  $V = U \oplus W$  многими способами, ни одно из дополнительных подпространств  $W$  не инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ . Такую ситуацию лучше всего иллюстрирует оператор дифференцирования  $D_t$ : если  $V_i$  — одно из инвариантных подпространств  $V_i$  в цепочке (3) и  $V = V_i \oplus W_i$ , то заведомо  $(D_t(W_i)) \cap V_i \neq 0$ .

Заметим в заключение, что если  $\mathcal{A}(U) \subseteq U$  и  $\mathcal{B}(U) \subseteq U$ , т.е.  $U$  — общее для  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  инвариантное подпространство, то  $U$  инвариантно относительно линейных комбинаций  $\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}$  и произведений  $\mathcal{AB}$ ,  $\mathcal{BA}$ . В частности,

$$\mathcal{A}U \subseteq U \implies f(\mathcal{A})U \subseteq U$$

для любого многочлена  $f \in \mathbb{K}[t]$ .

**3. Собственные векторы. Характеристический многочлен.** Одномерные инвариантные подпространства заслуживают специального рассмотрения.

**Определение 2.** Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно  $\mathcal{A}$ , называется *собственным вектором* оператора  $\mathcal{A}$ . Если  $\mathbf{x}$  — собственный вектор:

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

то скаляр  $\lambda \in \mathbb{K}$  называется *собственным значением* оператора  $\mathcal{A}$ , отвечающим собственному вектору  $\mathbf{x}$ . Иногда говорят также: *характеристический вектор*, *характеристическое значение*.

Заметим, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \implies \mathcal{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x},$$

откуда

$$f(\mathcal{A})\mathbf{x} = f(\lambda)\mathbf{x}, \tag{6}$$

каков бы ни был многочлен  $f \in \mathbb{K}[t]$ . В частности,

$$f(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \implies f(\lambda) = 0 \tag{7}$$

для всякого собственного значения  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ .

Пусть

$$V^\lambda = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$$

— подпространство, состоящее из  $\mathbf{0}$  и всех собственных векторов, ассоциированных с собственным значением  $\lambda$ .

**Определение 3.** Очевидная импликация

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathcal{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \implies \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \lambda(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$$

дёт основание называть  $V^\lambda$  *собственным подпространством* оператора  $\mathcal{A}$ , ассоциированным с  $\lambda$ . Его размерность  $\dim V^\lambda$  называется *геометрической кратностью* собственного значения  $\lambda$ .

Условие существования собственного вектора записывается, очевидно, в виде

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad (8)$$

т.е.

$$\text{Ker } (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq \mathbf{0}.$$

Это значит, что оператор  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  вырожден:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0. \quad (9)$$

Если в каком-нибудь базисе  $(\mathbf{e}_i)$  пространства  $V$  матрицей оператора  $\mathcal{A}$  является  $A = (a_{ij})$ , то матрицей оператора  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  будет  $A - \lambda E$ , так что условие (9) переписывается в виде

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9')$$

Пусть  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$  — собственный вектор оператора  $\mathcal{A}$  с собственным значением  $\lambda$ . В матричной записи равенство (8) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система линейных однородных уравнений с определителем (9'), равным нулю, имеет нетривиальные решения. Как мы знаем из [ВА I], линейное пространство всех решений этой системы совпадает с собственным подпространством  $V^\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ . Размерность  $\dim V^\lambda$  (или геометрическая кратность  $\lambda$ ) равна  $n - r$ , где  $r$  — ранг матрицы  $A - \lambda E$ .

Развернув определитель  $\det(tE - A) = (-1)^n \det(A - tE)$  по формуле (3) из [ВА I, гл. 3, § 1]:

$$\det(tE - A) = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon_\pi (\delta_{1,\pi 1}t - a_{1,\pi 1})(\delta_{2,\pi 2}t - a_{2,\pi 2}) \dots (\delta_{n,\pi n}t - a_{n,\pi n}),$$

мы получим нормализованный многочлен

$$\chi_A(t) = \det(tE - A) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \dots + \chi_{n-1} t + \chi_n \quad (10)$$

степени  $n$  относительно независимой переменной  $t$  с коэффициентами  $\chi_i \in \mathbb{K}$ .

**Определение 4.** Многочлен (10) называется *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . Уравнение  $\chi_A(t) = 0$  называется также *характеристическим* (иногда говорят о *вековом* уравнении матрицы  $A$ ).

На самом деле можно говорить о характеристическом многочлене (или уравнении) линейного оператора  $\mathcal{A}$ , а не какой-то ассоциированной с ним матрицы  $A$ , поскольку наряду с теоремой 3 из § 2 имеет место несложная

**Теорема 3.** *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

**Доказательство.** Пусть  $A' = C^{-1}AC$ . Тогда  $\det(tE - A') = \det(tC^{-1}EC - C^{-1}AC) = (C^{-1}(tE - A)C) = \det C^{-1} \det(tE - A) \det C = \det(tE - A)$ .  $\square$

Итак, полагаем

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) := \chi_A(t).$$

Определяющее равенство (10) показывает, что скаляр  $\lambda \in \mathbb{K}$  является собственным значением оператора  $\mathcal{A}$  тогда и только тогда, когда  $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ , т.е.  $\lambda$  — корень характеристического многочлена. Если многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  не имеет корней в  $\mathbb{K}$ , то у оператора  $\mathcal{A}$  нет собственных векторов. *Всякий линейный оператор, действующий на комплексном векторном пространстве, обладает собственными векторами.*

**Определение 5.** Кратность  $\lambda$  как корня характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  называется *алгебраической кратностью* собственного значения  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$ .

**Теорема 4.** *Геометрическая кратность собственного значения  $\lambda$  не превосходит его алгебраической кратности.*

**Доказательство.** По определению геометрическая кратность есть размерность  $m$  пространства  $V^\lambda$  решений уравнения  $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Очевидно, что  $V^\lambda$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ , и если  $\mathcal{A}'$  — ограничение  $\mathcal{A}$  на  $V^\lambda$ , то  $\det(t\mathcal{E}' - \mathcal{A}') = (t - \lambda)^m$ , причём  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda)^m q(t)$ , где  $q(t)$  — некоторый многочлен из  $\mathbb{K}[t]$ . Пусть  $\lambda$  — корень кратности  $k \geq 0$  многочлена  $q(t)$ . В таком случае алгебраической кратностью  $\lambda$  будет  $m + k$ .  $\square$

**4. Критерий диагонализуемости.** Корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  (говорят также: *характеристические корни*) составляют множество, несущее важную информацию о линейном операторе  $\mathcal{A}$ . По понятым причинам, однако, не все характеристические корни равноправны.

**Определение 6.** Множество всех собственных значений линейного оператора  $\mathcal{A}$  называют *спектром* этого оператора и обозначают символом  $\text{Spec } \mathcal{A}$  (собственные значения считаются с их геометри-

ческими кратностями). Аналогично говорят о спектре  $\text{Spec } A$  матрицы  $A$ . Точка спектра называется *простой*, если ей отвечает геометрическая кратность 1. Если все точки спектра простые, то и спектр называется *простым*.

В случае алгебраического замкнутого поля, например,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , характеристические корни совпадают с точками спектра, но в общем случае спектр может быть пуст, как, например, для оператора поворота на вещественной плоскости.

**Лемма 1.** *Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы. Сумма  $\sum_{\lambda \in \text{Spec } A} V^\lambda$  прямая (вообще говоря,  $\sum_\lambda V^\lambda$  не совпадает с  $V$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — какие-то различные собственные значения,  $V^{\lambda_1}, \dots, V^{\lambda_m}$  — соответствующие собственные подпространства. Выберем в каждом  $V^{\lambda_i}$  по одному собственному вектору  $\mathbf{e}_i$ . Нужно доказать их линейную независимость. Для  $m = 1$  утверждение верно. Рассуждая по индукции относительно  $m$  и предполагая существование нетривиальной линейной зависимости

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m = \mathbf{0},$$

где, скажем,  $\alpha_1 \neq 0$ , мы применим к обеим частям этого равенства оператор  $A$ . Так как  $A\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ , то

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_m \lambda_m \mathbf{e}_m = \mathbf{0}.$$

Умножая первое соотношение на  $\lambda_m$  и вычитая из него второе, приходим к линейной зависимости первых  $m - 1$  векторов:

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) \mathbf{e}_{m-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции  $\alpha_i(\lambda_m - \lambda_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m - 1$ . Но

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_i, \quad i < m \implies \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

По определению любой отличный от нуля вектор  $\mathbf{e}_i \in V^{\lambda_i}$  является собственным. Поэтому по доказанному  $V^{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V^{\lambda_j} = \mathbf{0}$ . Это и значит, что сумма  $\sum_i V^{\lambda_i}$  прямая.  $\square$

**Определение 7.** Линейный оператор  $A$  на  $n$ -мерном пространстве  $V$  называется *диагонализируемым*, если существует базис  $(\mathbf{e}_i)$ , относительно которого матрица оператора принимает диагональный вид

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

**Теорема 5.** *Линейный оператор  $A$  с простым спектром диагонализируем.*

**Доказательство.** Формулировка теоремы предполагает, что многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  имеет в основном поле  $\mathbb{K}$   $n = \dim V$  различных корней  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , которым отвечают собственные векторы  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . По лемме 1 эти векторы линейно независимы. Значит,  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ , и так как  $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$ , то  $\mathcal{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $\square$

Простота спектра оператора является всего лишь достаточным условием его диагонализируемости. Например, идемпотентный оператор диагонализируем (см. (2)), хотя его спектр при  $n > 2$  не будет простым. Внутреннюю причину этого факта объясняет

**Теорема 6.** *Пусть  $A$  — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ . Для диагонализируемости  $A$  необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

- i) все корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  лежат в  $\mathbb{K}$ ;
- ii) геометрическая кратность каждого собственного значения  $\lambda$  совпадает с его алгебраической кратностью.

**Доказательство.** Пусть выполнены условия i), ii). Если  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — различные корни многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ , а  $k_1, \dots, k_m$  — их кратности, то

$$\dim V^{\lambda_i} = k_i, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n. \quad (11)$$

По лемме 1 любая совокупность не равных одновременно нулю векторов  $v_i \in V^{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , линейно независима, так что

$$V^{\lambda_i} \cap (V^{\lambda_1} + \dots + \widehat{V^{\lambda_i}} + \dots + V^{\lambda_m}) = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Значит (см. теорему 7 из § 2 гл. 1), сумма  $V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_m}$  прямая, а с учётом равенств (11) получаем

$$V = V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_m}. \quad (13)$$

Взяв за базис в  $V$  объединение базисов в  $V^{\lambda_i}$ , мы придём к *собственному базису*, т.е. к базису, состоящему из  $n$  линейно независимых собственных векторов оператора  $\mathcal{A}$ . Его существование эквивалентно диагонализируемости  $\mathcal{A}$ .

Обратно: пусть оператор  $\mathcal{A}$  диагонализируем. Снова обозначим через  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  его различные собственные значения и положим  $l_i = \dim V^{\lambda_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Условие (12) по-прежнему выполнено, а так как  $V$  имеет собственный базис, состоящий из элементов подпространств  $V^{\lambda_i}$ , то  $V^{\lambda_1}, \dots, V^{\lambda_m}$  порождают  $V$ . Из этого мы заключаем, что имеет место равенство (13). Относительно базиса, получающегося объединением базисов в  $V^{\lambda_i}$ , матрицей оператора  $\mathcal{A}$  будет

$$\mathcal{A} = \text{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{l_1}; \dots; \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{l_m}).$$

Из равенства

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_A(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)^{l_1} \dots (t - \lambda_m)^{l_m}$$

вытекает, что все корни многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  принадлежат  $\mathbb{K}$ , т.е. выполнено условие i), и что целое число  $l_i$  совпадает с алгебраической кратностью  $k_i$  корня  $\lambda_i$  (см. (11)) для  $i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**5. Существование инвариантных подпространств.** Все рассуждения, связанные с инвариантными подпространствами, собственными значениями и собственными векторами оператора, проходят, в принципе, над произвольным полем. Однако существование рассматриваемых объектов находится в прямой зависимости от основного поля, в чём мы убеждаемся на примере наиболее важных полей  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 7.** *Всякий комплексный (соответственно вещественный) линейный оператор  $\mathcal{A}$  имеет одномерное (соответственно одномерное или двумерное) инвариантное подпространство.*

**Доказательство.** Так как характеристический многочлен  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  имеет в  $\mathbb{C}$  хотя бы один корень, то известный метод нахождения собственных векторов заведомо даст одномерное инвариантное подпространство исходного пространства  $V$ .

В случае вещественного поля  $\mathbb{R}$  рассмотрим минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  оператора  $\mathcal{A}$  (см. определение 2 из § 2). Его коэффициенты лежат в  $\mathbb{R}$ . Если  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  имеет вещественный корень  $\alpha$ , то

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \alpha)g(t), \quad g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Так как  $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$  в силу минимальности  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ , то  $g(\mathcal{A})\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  для некоторого вектора  $\mathbf{u} \in V$ . Но

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}) = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})g(\mathcal{A})\mathbf{u} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

откуда  $\mathcal{A}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$ , т.е.  $\mathbf{v}$  — собственный вектор.

Предположим теперь, что  $\mathcal{A}$  не имеет собственных векторов. Тогда по доказанному у  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  нет вещественных корней. Но по теореме о многочленах с вещественными коэффициентами [ВА I, гл. 6, § 4, теорема 1] мы имеем право записать

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \alpha t - \beta)h(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Снова  $\mathbf{v} = h(\mathcal{A})\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  для некоторого  $\mathbf{u} \in V$  и

$$\mathcal{A}^2\mathbf{v} - \alpha\mathcal{A}\mathbf{v} - \beta\mathbf{v} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Получается, что  $\mathcal{A}^2\mathbf{v} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ , а так как  $\mathcal{A}\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}$  (одномерного инвариантного подпространства нет), то  $L = \langle \mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v} \rangle$  — двумерное инвариантное подпространство.  $\square$

**6. Сопряжённый линейный оператор.** Посмотрим, в какой связи находятся понятия оператора и сопряжённого пространства. Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $V^*$  — сопряжённое к нему пространство и  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V$ . При любом фиксированном элементе  $f \in V^*$  отображение  $\mathbf{x} \mapsto (f, \mathcal{A}\mathbf{x}) := f(\mathcal{A}\mathbf{x})$  (в обозначениях п. 2 § 3 гл. 1) снова является элементом из  $V^*$ , т.е.

линейной функцией:

$$(f, \mathcal{A}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y})) = (f, \alpha \mathcal{A}\mathbf{x} + \beta \mathcal{A}\mathbf{y}) = \alpha(f, \mathcal{A}\mathbf{x}) + \beta(f, \mathcal{A}\mathbf{y}).$$

Раз это так, то мы можем положить

$$(\mathcal{A}^* f, \mathbf{x}) := (f, \mathcal{A}\mathbf{x}), \quad (14)$$

считая символ  $\mathcal{A}^* f$  некоторой линейной функцией на  $V$ . Соответствие  $\mathcal{A}^*: f \mapsto \mathcal{A}^* f$  при переменном  $f$  определяет линейное отображение  $V^* \rightarrow V^*$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^*(\alpha f + \beta g), \mathbf{x}) &= (\alpha f + \beta g, \mathcal{A}\mathbf{x}) = \alpha(f, \mathcal{A}\mathbf{x}) + \beta(g, \mathcal{A}\mathbf{x}) = \\ &= \alpha(\mathcal{A}^* f, \mathbf{x}) + \beta(\mathcal{A}^* g, \mathbf{x}) = (\alpha \mathcal{A}^* f + \beta \mathcal{A}^* g, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

так что  $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V^*)$ .

**Определение 8.** Линейный оператор  $\mathcal{A}^*$  на  $V^*$ , заданный соотношением (14), называют оператором, *сопряжённым* к  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ .

Итак, мы имеем отображение  $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V^*)$ , а именно  $*: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ . Непосредственно из определения мы выводим следующие его свойства:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V^* &= \mathcal{O}_{V^*}, \quad \mathcal{E}_V^* = \mathcal{E}_{V^*}, \quad (\alpha \mathcal{A})^* = \alpha \mathcal{A}^*, \\ (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* &= \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Например, последнее соотношение в (15) доказывается так:

$$((\mathcal{A}\mathcal{B})^* f, \mathbf{x}) = (f, (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathbf{x}) = (f, \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x})) = (\mathcal{A}^* f, \mathcal{B}\mathbf{x}) = (\mathcal{B}^* \mathcal{A}^* f, \mathbf{x}).$$

Чтобы задать оператор  $\mathcal{A}^*$  в матричном виде, естественно выбрать в  $V$  и  $V^*$  дуальные базисы  $(\mathbf{e}_i)$ ,  $(e^i)$ . Если  $\mathcal{A}\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} \mathbf{e}_k$ , то

$$(e^i, \mathcal{A}\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (e^i, \mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij}.$$

Положив, далее,

$$\mathcal{A}^* e^i = \sum_{k=1}^n a_{ki}^* e^k,$$

будем иметь  $(\mathcal{A}^* e^i, \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^n a_{ki}^* (e^k, \mathbf{e}_j) = a_{ji}^*$ . Так как, с другой стороны, в соответствии с (14)  $(\mathcal{A}^* e^i, \mathbf{e}_j) = (e^i, \mathcal{A}\mathbf{e}_j) = a_{ij}$ , то  $a_{ji}^* = a_{ij}$ . Следовательно, верна

**Теорема 8.** Если в базисе  $(\mathbf{e}_i)$  пространства  $V$  линейный оператор  $\mathcal{A}$  имеет матрицу  $A = (a_{ij})$ , то в дуальном базисе  $e^i$  пространства  $V^*$  сопряжённый к  $\mathcal{A}$  оператор  $\mathcal{A}^*$  имеет транспонированную матрицу  ${}^t A$ :  $A^* = (a_{ij}^*) = {}^t A$ .  $\square$

Заметим, что рефлексивность конечномерных векторных пространств, дающая возможность отождествить  $V^{**}$  и  $V$  посредством

естественного изоморфизма (теорема 2 из § 3 гл. 1), на уровне операторов выражается в виде

$$\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}. \quad (16)$$

Действительно, в силу рефлексивности любую линейную функцию на  $V^*$  можно мыслить себе как  $f \mapsto (f, \mathbf{x})$  при некотором фиксированном  $\mathbf{x} \in V$ . В частности,  $(\mathcal{A}^* f, \mathbf{x}) = (f, \mathbf{y})$ . По определению  $\mathbf{y} = \mathcal{A}^{**} \mathbf{x}$ . Стало быть,

$$(f, \mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathcal{A}^* f, \mathbf{x}) = (f, \mathcal{A}^{**}\mathbf{x}),$$

откуда и вытекает соотношение (16). Оно показывает, что отображение  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{**}$ , обладающее свойствами (15), взаимно однозначно. Его называют *антиизоморфизмом* алгебр  $\mathcal{L}(V)$  и  $\mathcal{L}(V^*)$ .

Одновременное рассмотрение пар  $(V, \mathcal{A})$ ,  $(V^*, \mathcal{A}^*)$  часто приводит к практическим результатам. Одним из содержательных примеров этого является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 9.** *Всякий комплексный линейный оператор  $\mathcal{A}$  на  $V$  обладает инвариантной гиперплоскостью.*

**Доказательство.** Пусть  $\dim V = n$ . Как мы знаем,  $\dim \text{Ker } f = n - 1$  для любой линейной функции  $f \neq 0$  на  $V$ . Возьмём теперь в качестве  $f$  собственный вектор линейного оператора  $\mathcal{A}^*$  на  $V^*$ . Он существует по теореме 7, и если  $\lambda$  — отвечающее ему собственное значение, то, как следует из определяющего равенства (14),  $\mathbf{x} \in \text{Ker } f \implies 0 = \lambda(f, \mathbf{x}) = (\lambda f, \mathbf{x}) = (\mathcal{A}^* f, \mathbf{x}) = (f, \mathcal{A}\mathbf{x}) \implies \mathcal{A}\mathbf{x} \in \text{Ker } f$ . Это и означает, что  $\text{Ker } f$  — искомая гиперплоскость.  $\square$

**7. Фактороператор.** Пусть  $L$  — подпространство, инвариантное относительно линейного оператора  $\mathcal{A}$ , действующего на векторном пространстве  $V$ . Считая  $V$  и  $L$  фиксированными, будем обозначать факторпространство  $V/L$ , определённое в п. 6 § 2 гл. 1, символом  $\bar{V}$ , а любой его элемент  $\mathbf{x} + L$  через  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**Определение 9.** Соотношением  $\bar{\mathcal{A}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathcal{A}\mathbf{x}}$  на  $\bar{V}$  вводится *фактороператор*. Другими словами,  $\bar{\mathcal{A}}(\mathbf{x} + L) = \mathcal{A}\mathbf{x} + L$ .

Это определение не зависит от выбора представителя  $\mathbf{x}$ : если  $\mathbf{x} + L = \mathbf{x}' + L$ , то  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{y} \in L$  и  $\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{x}' = \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathcal{A}\mathbf{y} \in L$  (в силу инвариантности  $L$  относительно  $\mathcal{A}$ ). Отсюда  $\mathcal{A}\mathbf{x} + L = \mathcal{A}\mathbf{x}' + L$ . Если бы  $L$  не было инвариантным относительно  $\mathcal{A}$ , то определение фактороператора  $\bar{\mathcal{A}}$  теряло бы всякий смысл.

Предположим, что  $V = L \oplus M$  — прямая сумма инвариантных относительно  $\mathcal{A}$  подпространств. Тогда, как мы знаем,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_M$  — прямая сумма операторов ограничений  $\mathcal{A}$  на  $L$  и  $M$ . Если  $f : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + L$  — изоморфизм между  $M$  и  $\bar{V} = V/L$  (теорема 10 из § 2 гл. 1), то

$$(f \cdot \mathcal{A}_M)\mathbf{y} = f(\mathcal{A}_M\mathbf{y}) = \mathcal{A}_M\mathbf{y} + L = \bar{\mathcal{A}}(\mathbf{y} + L) = \bar{\mathcal{A}}(f\mathbf{y}),$$

откуда

$$f \cdot \mathcal{A}_M = \bar{\mathcal{A}} \cdot f. \quad (17)$$

Итак, действие  $\bar{A}$  на  $\bar{V}$  совпадает с действием  $A_M$  на  $M$ . Говорят, что равенство (17) устанавливает *эквивалентность (подобие)* между  $\bar{A}$  и  $A_M$ .

Пример. Как известно, всякому линейному оператору  $B$ , действующему в двумерном векторном пространстве  $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  с собственным вектором  $\mathbf{e}_1$ , отвечает треугольная матрица  $\begin{vmatrix} \lambda & \sigma \\ 0 & \mu \end{vmatrix}$ . При  $\bar{V} = V/\langle \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_2 \rangle$  имеем  $\bar{A}\bar{\mathbf{e}}_2 = \mu\bar{\mathbf{e}}_2$ .

Если теперь  $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$  — трёхмерное векторное пространство над  $\mathbb{C}$  и  $A: V \rightarrow V$  — линейный оператор с собственным вектором  $\mathbf{e}_1$  ( $A\mathbf{e}_1 = \alpha\mathbf{e}_1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ), то на двумерном пространстве  $\bar{V} = V/\langle \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3 \rangle$  действует фактороператор  $\bar{A}$ , которому по предыдущему отвечает треугольная матрица  $\begin{vmatrix} \beta & \delta \\ 0 & \gamma \end{vmatrix}$  в подходящем базисе. Пусть для простоты им будет базис  $(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{A}\bar{\mathbf{e}}_2 &= \beta\bar{\mathbf{e}}_2 \iff A\mathbf{e}_2 = \beta\mathbf{e}_2 + \nu\mathbf{e}_1, \\ \bar{A}\bar{\mathbf{e}}_3 &= \gamma\bar{\mathbf{e}}_3 + \delta\bar{\mathbf{e}}_2 \iff A\mathbf{e}_3 = \gamma\mathbf{e}_3 + \delta\mathbf{e}_2 + \mu\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \nu & \mu \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}.$$

Аналогичные соображения используются и в общем случае.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть  $\{A_i \mid 1 \leq i \leq m-1\}$  — ортогональная система идемпотентных матриц (см. замечание в конце п. 1). Показать, что  $A^2 = A$ ,  $AA_i = A_iA = A_i$ ,  $1 \leq i \leq m-1$  для  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1}$ , и если положить  $A_m = E - A$ , то  $\{A_i \mid 1 \leq i \leq m\}$  будет полной ортогональной системой.

2. Пусть  $\mathcal{D}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  — не тождественно равный  $\mathcal{O}$  линейный оператор на пространстве квадратных матриц, обладающий свойством мультипликативности:

$$\mathcal{D}(AB) = \mathcal{D}(A)\mathcal{D}(B)$$

для всех  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Доказать, что тогда  $\mathcal{D} = f_C$  для некоторой невырожденной  $n \times n$ -матрицы  $C$  (см. упр. 3 из § 1).

3. Пусть  $A: V \rightarrow V$  — линейный оператор такой, что  $\text{Im } A^p = \text{Im } A^{p+1}$  для некоторого натурального числа  $p$ . Доказать, что в этом случае  $V = \text{Ker } A^p \oplus \text{Im } A^p$  — прямая сумма двух  $A$ -инвариантных подпространств.

4. Доказать, что если линейные операторы  $\mathcal{E}, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , действующие на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$ , линейно независимы, то существует такой вектор  $\mathbf{v} \in V$ , что

$$V = \langle \mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}, \dots, A^{n-1}\mathbf{v} \rangle$$

(в этом случае говорят, что  $V$  цикличично).

5. Пусть  $A$  — вещественная  $n \times n$ -матрица без вещественных собственных значений, так что, в частности,  $n$  чётно и  $A$  обратима. Показать, что существует вещественная матрица  $B$  такая, что  $AB = BA$  и  $B^2 = -E$  — единичная матрица (Д. Джокович).

6. Доказать, что для любых  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  характеристические многочлены матриц  $AB$  и  $BA$  совпадают.

7. Найти характеристические корни “циклической” матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

используя легко проверяемое соотношение

$$A = a_0 E + a_1 B + a_2 B^2, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Доказать, что пространство  $\text{SMag}_n(\mathbb{Q})$  полумагических квадратов (см. пример 8 из § 1 гл. 1) является  $\mathbb{Q}$ -подалгеброй в  $M_n(\mathbb{Q})$ .

9 [Amer. Math. Monthly. — Febr. 1991. — P. 131–133]. Пусть  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$ . Будем писать  $B \sim A$ , если  $B = DA$ , где  $D = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\theta_i = \pm 1$ . Очевидно, что  $\sim$  — отношение эквивалентности. Если  $S(A)$  — класс эквивалентности с представителем  $A$ , то  $\text{Card } S(A) \leq 2^n$ .

Доказать, что по крайней мере одна из матриц в  $S(A)$  не имеет собственного значения 1.

10. Пусть  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$ . Показать, что

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \iff \text{rank } \mathcal{A} + \text{rank } (\mathcal{E} - \mathcal{A}) = n.$$

## § 4. Жорданова нормальная форма

Пытаясь разобраться с действием заданного линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , естественно поставить перед собой цель найти базис в  $V$ , наилучшим образом согласованный с  $\mathcal{A}$ . Другими словами, в классе подобных матриц  $C^{-1}AC$ , отвечающих оператору  $\mathcal{A}$ , требуется найти матрицу, имеющую как можно более простой вид. По понятным причинам эта задача существенно связана с основным полем  $\mathfrak{K}$ , над которым определено векторное пространство  $V$ . В дальнейшем считаем, что  $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$  — поле комплексных чисел, хотя в принципе  $\mathbb{C}$  можно заменить на любое алгебраически замкнутое поле.

**1. Теорема Гамильтона—Кэли.** Весьма полезно следующее несложное утверждение.

**Теорема 1.** *Матрицу линейного оператора  $\mathcal{A}$  всегда можно привести (в смысле подобия) к треугольному виду.*

**Доказательство.** Проще всего в этом убедиться рассуждением по индукции. По теореме 9 из § 3 пространство  $V$  содержит инвариантную относительно  $\mathcal{A}$  гиперплоскость  $U : \mathcal{A}U \subset U$ . По предположению индукции в  $U$  можно выбрать такой базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$ , что  $\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i + \mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \rangle$ . Имеем  $V = \langle U, \mathbf{e}_n \rangle$ , где  $\mathbf{e}_n$  — произвольный, не содержащийся в  $U$  вектор. Пусть  $\mathcal{A}\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in U$ . Таким образом, в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$  дей-

вие оператора  $\mathcal{A}$  выражается матрицей требуемого вида

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{vmatrix}. \quad \square \quad (1)$$

Теперь довольно просто доказывается содержательная

**Теорема 2** (теорема Гамильтона—Кэли). *Линейный оператор  $\mathcal{A}$  и соответствующая ему матрица  $A$  (в любом базисе) аннулируются своим характеристическим многочленом  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ , т.е.*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}.$$

**Доказательство.** Так как это утверждение не зависит от выбора базиса (см. п. 3 § 2), то естественно воспользоваться теоремой 1, с самого начала считая матрицу  $A$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  имеющей треугольный вид (1). Рассмотрим цепочку  $\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{n-1} \supset V_n = \mathbf{0},$$

где  $V_k = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-k-1}, \mathbf{e}_{n-k} \rangle$ . Так как  $(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})\mathbf{e}_{n-k} \in V_{k+1}$ , то

$$(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})V_k \subset V_{k+1}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V &= \prod_{i=1}^n (\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})V = \\ &= (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \dots (\mathcal{A} - \lambda_n \mathcal{E})V_0 \subset (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \dots (\mathcal{A} - \lambda_{n-1} \mathcal{E})V_1 \subset \\ &\subset (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \dots (\mathcal{A} - \lambda_{n-2} \mathcal{E})V_2 \subset \dots \subset (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})V_{n-1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Но  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V = \mathbf{0} \iff \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ .  $\square$

**Следствие.** *Минимальный многочлен  $\mu_{\mathcal{A}}$  линейного оператора является делителем характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ , делящимся на все линейные множители  $t - \lambda$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ .*

**Доказательство.** По определению  $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ , а по теореме 2  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ . Делимость  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  на  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$  вытекает теперь из теоремы 2 из § 2.

Если, далее,  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\mathcal{A}$ , то

$\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \implies \mathbf{0} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathbf{v} = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\mathbf{v} \implies \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Rightarrow (t - \lambda) | \mu_{\mathcal{A}}(t)$   
(мы повторили вывод импликации (7) из § 3).  $\square$

**Замечание.** Казалось бы,  $\det(tE - A)|_{t=A} = \det(AE - A) = \det 0 = 0$ , и теорема Гамильтона—Кэли доказана. Но это совершенно неверное рассуждение. Подумайте, почему.

Теорема Гамильтона—Кэли имеет многочисленные приложения, но нами пока она будет использоваться в самой непосредственной форме.

Пример 1. Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — нильпотентный линейный оператор индекса нильпотентности  $m$  (см. определение 3 из § 2), так что  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Тогда векторы  $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v}$  линейно независимы.

Действительно, всякая нетривиальная линейная зависимость имеет вид

$$\mathcal{A}^k\mathbf{v} + \alpha_1\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{v} + \dots + \alpha_{m-1-k}\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Применение оператора  $\mathcal{A}^{m-1-k}$  к обеим частям этого равенства привело бы нас к соотношению  $\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , противоречащему выбору  $\mathbf{v}$ .

Итак, индекс нильпотентности  $m$  оператора  $\mathcal{A}$  не превосходит  $n = \dim V$ , что, разумеется, вытекает и из теоремы Гамильтона—Кэли. Предположим теперь, что  $m = n$  и  $\mathcal{A}^{n-1}\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ . Введём следующие обозначения для базисных векторов:

$$\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}^{n-1}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathcal{A}^{n-2}\mathbf{e}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{n-1} = \mathcal{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}.$$

Тогда  $\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}$ ,  $k > 1$ , и матрицей оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  будет жорданова клетка  $J_n(\lambda)$  с  $\lambda = 0$ , определение которой дано чуть ниже.

Если, скажем,  $V = \langle 1, t, \dots, t^{n-1} \rangle$  — пространство многочленов степени  $< n$  над  $\mathbb{C}$  и  $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования по  $t$ , то матрицей этого оператора в базисе  $(\mathbf{e}_i)$ ,  $\mathbf{e}_i = \frac{1}{i!}t^i$ , будет как раз клетка  $J_n(0)$ .

**Определение 1. а)** Назовём<sup>1)</sup> (*верхней*) *клеткой Жордана* размера  $m \times m$  (или порядка  $m$ ), соответствующей собственному значению  $\lambda$ , матрицу

$$J_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

**б)** *Жордановой матрицей* называется матрица, состоящая из диагональных блоков  $J_{m_i}(\lambda_i)$  и нулей вне этих блоков:

$$J = \begin{vmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{vmatrix}. \quad (2)$$

**в)** *Жордановым базисом* для линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  называется такой базис пространства  $V$ , в котором матрица оператора  $\mathcal{A}$  является жордановой, или, как говорят, имеет *жорданову нормальную форму* (ЖНФ)  $J(\mathcal{A})$ .

<sup>1)</sup> В честь французского математика К. Жордана (1838–1922).

г) Приведением квадратной матрицы  $A$  к жордановой нормальной форме называется решение уравнения в матрицах вида  $X^{-1}AX = J(A)$ , где  $X$  — (неизвестная) невырожденная матрица, а  $J(A)$  — (неизвестная) жорданова матрица.

Заметим, что  $J_m(\lambda) - \lambda E = J_m(0)$  — nilпотентная матрица. В частности,  $(t - \lambda)^m$  — минимальный многочлен клетки Жордана (2) и  $\lambda$  — её единственное собственное значение:  $\text{Spec } J_m(\lambda) = \{\lambda\}$ .

Пример 2. Пусть  $D_n(\lambda)$  — векторное пространство комплексных функций вида  $e^{\lambda t}f(t)$ , где  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f(t)$  пробегает многочлены степени  $\leq n - 1$ . Так как

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}f(t)) = e^{\lambda t}(\lambda f(t) + f'(t)),$$

то дифференцирование  $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$  является линейным оператором на  $D_n(\lambda)$ . Положим  $\mathbf{e}_{i+1} = \frac{t^i}{i!}e^{\lambda t}$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Очевидно,

$$\mathcal{D}\mathbf{e}_{i+1} = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}e^{\lambda t} + \lambda \frac{t^i}{i!}e^{\lambda t} = \mathbf{e}_i + \lambda \mathbf{e}_{i+1}$$

( $0! = 1$ ; первое слагаемое отсутствует при  $i = 0$ ). Следовательно, функции  $(\frac{t^i}{i!}e^{\lambda t})$  образуют жорданов базис для оператора  $\mathcal{D}$  в нашем пространстве и  $J(\mathcal{D}) = J_n(\lambda)$ .

Этот пример показывает особую роль жордановых матриц в теории линейных дифференциальных уравнений. Мы к нему ещё вернёмся.

Пример 3. Если  $f(t)$  — произвольный многочлен, то

$$f(J_m(\lambda)) = \begin{vmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & f''(\lambda)/2! & \dots & f^{(m-1)}(\lambda)/(m-1)! \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda)/1! & \dots & f^{(m-2)}(\lambda)/(m-2)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{vmatrix},$$

так что с  $J_{m,\lambda}$  гораздо легче оперировать, чем с произвольными матрицами.

**2. ЖНФ: формулировка и следствие.** Сформулируем основное утверждение и его следствие.

**Основная теорема. Каждая квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathfrak{K}$  (в частности, над  $\mathbb{C}$ ) приводится к жордановой нормальной форме. Именно, существует невырожденная матрица  $C$ , для которой  $C^{-1}AC = J(A) = J$  — матрица вида (2). С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.**

Так как минимальные многочлены подобных матриц совпадают, то из основной теоремы и из замечаний, сделанных по поводу жордановой клетки  $J_m(\lambda)$ , следует, что

$$\mu_A(t) = (t - \lambda_{i_1})^{m_{i_1}} \dots (t - \lambda_{i_p})^{m_{i_p}}, \quad (3)$$

где  $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}\}$  — все попарно различные собственные значения

матрицы  $A$  и  $m_{j_k}$  — максимальный порядок жордановой клетки, отвечающей собственному значению  $\lambda_{j_k}$ .

Ясно, что необходимым и достаточным условием диагонализуемости матрицы  $A$  (т.е. подобия её матрице  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ) является отсутствие в  $J(A)$  клеток порядка  $> 1$ . Поэтому с учётом (3) получается следующий полезный критерий.

**Следствие.** Квадратная матрица  $A$  над  $\mathbb{C}$  диагонализуема тогда и только тогда, когда её минимальный многочлен  $\mu_A(t)$  не имеет кратных корней.

Этот критерий эффективен, поскольку для вычисления  $\mu_A(t)$  нет необходимости приводить матрицу  $A$  к жордановой нормальной форме.

Доказательство основной теоремы разбивается на три части, соответствующие пп. 3–5. Попутно будут сформулированы некоторые практические рекомендации для получения ЖНФ (жордановой нормальной формы), а затем мы укажем на другие доказательства.

### 3. Корневые подпространства. Приведём следующее

Определение 2. Множество векторов

$$V(\lambda) = \{\mathbf{v} \in V \mid (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ для некоторого } k\}$$

называется *корневым подпространством*, соответствующим собственному значению  $\lambda \in \text{Spec } A$ .

В том, что  $V(\lambda)$  — подпространство, нас убеждает лёгкая проверка. Если, например,  $\mathbf{u} \in V(\lambda)$ ,  $\mathbf{v} \in V(\lambda)$ , причём  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^s \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , и  $m = \max\{s, t\}$ , то

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m\mathbf{u} + \beta(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

откуда  $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in V(\lambda)$  при любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Так как в  $V(\lambda)$  содержится собственный вектор, отвечающий  $\lambda$ , то  $V(\lambda) \neq \mathbf{0}$ . Далее,  $V^\lambda \subset V(\lambda)$ , но равенства может и не быть, как показывает пример нильпотентного оператора  $\mathcal{A}$  индекса нильпотентности  $n > 1$ . В этом случае  $\lambda = 0$  — единственное собственное значение,  $\dim V^0 = 1$ , но  $V(0) = V$ .

Так как  $\dim V(\lambda) \leq n$  и ограничение  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  на  $V(\lambda)$  является нильпотентным оператором, то

$$V(\lambda) = \{\mathbf{v} \in V \mid (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^n = \mathbf{0}\}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — линейный оператор с характеристическим многочленом

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^p (t - \lambda_i)^{n_i}; \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j.$$

Тогда  $V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p)$  — прямая сумма корневых подпространств  $V(\lambda_i)$ , каждое из которых инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .

и имеет размерность  $\dim V(\lambda_i) = n_i$ . Оператор  $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}$ , нильпотентный на  $V(\lambda_i)$ , действует невырожденным образом на подпространстве

$$V_i = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_{i-1}) \oplus V(\lambda_{i+1}) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p).$$

Наконец,  $\lambda_i$  — единственное собственное значение оператора  $\mathcal{A}|_{V(\lambda_i)}$ .

**Доказательство.** Ни один из простых множителей  $t - \lambda_k$  не может быть делителем одновременно всех многочленов

$$\chi_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{n_j}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

и поэтому  $\text{НОД}(\chi_1(t), \dots, \chi_p(t)) = 1$ . Найдутся, стало быть, многочлены  $f_1(t), \dots, f_p(t) \in \mathbb{C}[t]$ , для которых

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(t) f_i(t) = 1. \quad (4)$$

Подпространства

$$W_i = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = \{\chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}, \quad 1 \leq i \leq p,$$

инвариантны относительно  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} W_i = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) \mathcal{A} V \subset \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = W_i.$$

Кроме того,

$$(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{n_i} W_i = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) V = \mathbf{0}$$

(поскольку по теореме 2  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ ), так что

$$W_i \subset V(\lambda_i). \quad (5)$$

Соотношение (4), переписанное в виде

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^p \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}),$$

даёт нам разложение

$$V = \sum_{i=1}^p W_i$$

и тем более (ввиду включения (5))

$$V = \sum_{i=1}^p V(\lambda_i).$$

Предположим, что  $\mathbf{v} \in V(\lambda_i) \cap V_i$ , где, как и в формулировке теоремы,  $V_i = \sum_{j \neq i} V(\lambda_j)$ . Тогда  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^n \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , а так как  $\mathbf{v} = \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j$  и  $(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^n \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ , то и  $\{\prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^n\} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Но из взаимной

простоты многочленов  $(t - \lambda_i)^n$ ,  $c(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$  следует существование  $a(t)$ ,  $b(t)$ , для которых

$$a(t)(t - \lambda_i)^n + b(t)c(t) = 1.$$

Получаем

$$\mathbf{v} = a(\mathcal{A})(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^n \mathbf{v} + b(\mathcal{A}) \left\{ \prod_{j \neq i} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})^n \right\} \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

т.е. пространства  $V(\lambda_i)$  и  $V_i$  не пересекаются. Значит, мы имеем разложение

$$V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_p) \quad (6)$$

в прямую сумму  $\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств.

Из включения (5) и из разложения (6) непосредственно вытекает, что  $W_i = V(\lambda_i)$ . Таким образом, для  $V(\lambda_i)$  получено эффективное выражение

$$V(\lambda_i) = \chi_i(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})V,$$

где  $\chi_i(t)$ ,  $f_i(t)$  — многочлены из тождества (4). В частности,

$$(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^n V(\lambda_i) = \mathbf{0}.$$

Минимальным многочленом для  $\mathcal{A}$  на  $V(\lambda_i)$  будет некоторый делитель многочлена  $(t - \lambda_i)^{n_i}$ . Отсюда следует, во-первых, что  $\lambda_i$  — единственное собственное значение оператора  $\mathcal{A}|_{V(\lambda_i)}$ . Далее, в базисе, являющемся объединением базисов пространств  $V(\lambda_i)$ , оператор  $\mathcal{A}$  имеет матрицу

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & A_p \end{vmatrix},$$

где  $A_i$  — матрица порядка  $n'_i = \dim V(\lambda_i)$  с единственным собственным значением  $\lambda_i$  и характеристическим многочленом

$$\chi_{A_i}(t) = (t - \lambda_i)^{n'_i}, \quad n'_i \leq n_i.$$

Так как  $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^p \chi_{A_i}(t)$ , то  $n = n'_1 + \dots + n'_p$  и  $n'_i = n_i$ .

Осталось доказать невырожденность ограничения  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})|_{V_i}$ . Но это понятно: в противном случае  $\{\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})\} \cap V_i \neq \mathbf{0}$  и  $\mathcal{A}\mathbf{v} - \lambda_i \mathbf{v} = \mathbf{0}$  для некоторого  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V_i$ . Однако на  $V_i$  характеристическим многочленом для  $\mathcal{A}$  является  $\chi_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{n_j}$ , и  $\lambda_i$  собственным значением быть не может.  $\square$

**4. Случай нильпотентного оператора.** Теоремой 3 задача о выборе простейшей матрицы для линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  свелась к тому случаю, когда  $\mathcal{A}$  имеет единственное собственное значение  $\lambda$  и  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^m = \mathcal{O}$ ,  $m \leq \dim V$ . Положив  $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$ , мы получим нильпотентный оператор индекса нильпотентности  $m$  с нильпотентной матрицей  $B$ . В рассматриваемой ситуации естественным является

Определение 3. Линейная оболочка

$$\mathfrak{K}[\mathcal{B}]\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathcal{B}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{B}^{m'-1}\mathbf{v} \rangle$$

называется *циклическим подпространством*, ассоциированным с оператором  $\mathcal{B}$  индекса нильпотентности  $m$  и вектором  $\mathbf{v}$ . Предполагается, что  $m' \leq m$  — наименьшее натуральное число, для которого  $\mathcal{B}^{m'}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Теорема 4. Жорданова нормальная форма  $J(B)$  нильпотентной матрицы  $B$  существует (основное поле  $\mathfrak{K}$  произвольное).

Доказательство. Из примера 1 из определения 1 видно, что всякому циклическому подпространству отвечает клетка Жордана. Нам нужно показать, что векторное пространство  $V$ , на котором действует нильпотентный оператор  $\mathcal{B}$  с матрицей  $B$ , разлагается в прямую сумму надлежащим образом выбранных циклических подпространств.

По теореме 1 матрица  $B$  приводится к верхнему треугольному виду с нулями по диагонали. Это значит, что линейная оболочка  $U$  первых  $n - 1$  базисных векторов инвариантна относительно  $\mathcal{B}$ . По определению  $\mathcal{B}V \subset U$ , а по предположению индукции в  $U$  можно выбрать жорданов базис для  $\mathcal{B}$ , или, что то же самое,

$$\begin{aligned} U &= \mathfrak{K}[\mathcal{B}]\mathbf{e}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{K}[\mathcal{B}]\mathbf{e}_s, \\ \mathfrak{K}[\mathcal{B}]\mathbf{e}_i &= \langle \mathbf{e}_i, \mathcal{B}\mathbf{e}_i, \dots, \mathcal{B}^{m_i-1}\mathbf{e}_i \rangle, \quad \mathcal{B}^{m_i}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Без ограничения общности считаем

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s. \tag{8}$$

Далее,  $V = \langle \mathbf{v}, U \rangle$ ,  $\mathcal{B}\mathbf{v} \in U$  для любого вектора  $\mathbf{v}$ , не содержащегося в  $U$ , так что  $\mathcal{B}\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i + \mathcal{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in U$ . Заменяя  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , будем иметь

$$V = \langle \mathbf{v}', U \rangle, \quad \mathcal{B}\mathbf{v}' = \sum_{i=1}^s \alpha_i \mathbf{e}_i.$$

Если  $\alpha_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq s$ , то к клеткам Жордана  $J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$  добавится  $J_1(0)$ , отвечающая циклическому подпространству  $\langle \mathbf{v}' \rangle$ , т.е.

$$B \sim J(B) = \text{diag} (J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0), J_1(0))$$

( $\sim$  — знак подобия).

Остается рассмотреть случай, когда

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0, \quad \mathcal{B}\mathbf{v}' = \sum_{i=r}^s \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad \alpha_r \neq 0$$

для некоторого индекса  $r \geq 1$ . Удобно положить

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i, \quad i \neq r, \quad \mathbf{e}'_r = \frac{1}{\alpha_r} \mathbf{v}', \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_r}.$$

Тогда

$$\mathcal{B}\mathbf{e}'_r = \mathbf{e}_r + \sum_{i=r+1}^s \beta_i \mathbf{e}_i := \mathbf{f}_r.$$

В соответствии с упорядочением (8)  $\mathcal{B}^{m_r} \mathbf{f}_r = \mathbf{0}$ , а так как сумма (7) прямая, то  $\mathcal{B}^{m_r-1} \mathbf{f}_r \neq \mathbf{0}$ , какие бы ни были коэффициенты  $\beta_i$ . Кроме того, лёгкое рассуждение показывает, что сумма

$$\sum_{i \neq r} \mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{e}'_i + \mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{f}_r$$

также является прямой и совпадает с  $U$ .

Но теперь циклическое подпространство  $\mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{f}_r$  расширяется за счёт вектора  $\mathbf{e}'_r \notin U$ :  $\mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{f}_r \subset \mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{e}'_r$ , и мы имеем прямую сумму

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \mathfrak{K}[\mathcal{B}] \mathbf{e}'_i,$$

отвечающую набору индексов  $m'_1, \dots, m'_s$ , где  $m'_i = m_i$ ,  $i \neq r$ ,  $m'_r = m_r + 1$ . В свою очередь

$$B \sim \text{diag}(J_{m'_1}(0), \dots, J_{m'_s}(0))$$

(число клеток Жордана сохранилось прежним, но размер одной клетки увеличился на 1). Последовательность  $(m'_1, \dots, m'_s)$ , вообще говоря, не упорядочена, но этого всегда можно добиться путём переобозначения векторов  $\mathbf{e}'_i$ . Таким образом, существование жорданова базиса для нильпотентного оператора  $\mathcal{B}$  доказано.  $\square$

**5. Единственность.** Приступая к доказательству единственности, укажем заодно практическое правило для приведения произвольной матрицы  $A$  порядка  $n$  к жордановой нормальной форме.

Для этого нужно уметь находить число  $N(m, \lambda)$  жордановых клеток  $J_m(\lambda)$  порядка  $m$ , отвечающих собственному значению  $\lambda$  матрицы  $A$ . Сопоставим обычным образом матрице  $A$  оператор  $\mathcal{A}$ , действующий на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$ , и разложим  $V$  в прямую сумму

$$V = V(\lambda) \oplus V', \quad (9)$$

где

$$V(\lambda) = \bigoplus_{j=1}^s \langle \mathbf{e}_j, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \mathbf{e}_j, \dots, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^{m_j-1} \mathbf{e}_j \rangle,$$

$$V' = \sum_{\lambda' \neq \lambda} V(\lambda').$$

Будем подсчитывать ранг  $r_t = \text{rank}(A - \lambda E)^t$  матрицы  $(A - \lambda E)^t$ , или, что то же самое, размерность пространства  $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^t V$ . Эта

размерность, конечно, не зависит от выбора базиса в  $V$ . Каждое из пространств в разложении (9) инвариантно относительно  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t$ , поэтому

$$\dim (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V = \sum_j \dim (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}] \mathbf{e}_j + \dim (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V'.$$

Считаем для определённости  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$ . Если  $m_j \leq t$ , то  $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}] \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$ . При  $m_j > t$  имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}] \mathbf{e}_j &= \\ &= \langle (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbf{e}_j, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{t+1} \mathbf{e}_j, \dots, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m_j-1} \mathbf{e}_j \rangle, \end{aligned}$$

так что

$$\dim (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}] \mathbf{e}_j = m_j - t.$$

На  $V'$  оператор  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  невырожден (теорема 1), поэтому

$$\dim (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V' = \dim V'.$$

Получаем

$$r_t = \sum_{m_j > t} (m_j - t) + \dim V',$$

откуда

$$\begin{aligned} r_t - r_{t+1} &= \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t - 1) = \\ &= \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t) + \sum_{m_j > t+1} 1 = \\ &= \sum_{m_j = t+1} 1 + \sum_{m_j > t+1} 1 = N(t+1, \lambda) + N(t+2, \lambda) + \dots \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} r_{m-1} - r_m - (r_m - r_{m+1}) &= \{N(m, \lambda) + N(m+1, \lambda) + \dots\} - \\ &\quad - \{N(m+1, \lambda) + N(m+2, \lambda) + \dots\} = N(m, \lambda), \end{aligned}$$

и мы получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} N(m, \lambda) &= r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}, \\ m \geq 1, \quad r_t &= \text{rank } (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t, \quad r_0 = n. \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что  $r_t$  — инвариант матрицы  $A$  (т.е. число, определяемое классом подобия матрицы  $A$ ). Значит, формулой (10) устанавливается также единственность жордановой формы  $J(A)$ .  $\square$

До сих пор о матрице  $C$ , осуществляющей подобие

$$J(A) = C^{-1} AC,$$

почти ничего не говорилось. Но так как теперь  $A$  и  $J(A)$  — известные нам матрицы, то  $C = (c_{ij})$  можно найти из матричного уравнения

$$XJ(A) - AX = 0,$$

о котором упоминается в определении 1 из п. в) и которое эквивалентно линейной однородной системе порядка  $n^2$ . Пусть  $C_1, \dots, C_r$  — её фундаментальная система решений. Вообще говоря, не все  $C_i$  — невырожденные матрицы, но так как жорданова нормальная форма  $J(A)$  существует, то

$$\det(t_1C_1 + \dots + t_rC_r) \neq 0$$

(с неопределёнными коэффициентами  $t_1, \dots, t_r$ ), и можно подобрать комплексные числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , для которых

$$\det(\alpha_1C_1 + \dots + \alpha_rC_r) \neq 0.$$

Тогда  $C = \alpha_1C_1 + \dots + \alpha_rC_r$  — искомая матрица. Разумеется,  $C$  определяется далеко не единственным образом, даже при нормировке  $\det C = 1$ . Нахождение таким способом матрицы  $C$ , осуществляющей переход к жорданову базису, не очень практично, хотя и не представляет принципиальных трудностей.

Пример 4. Минимальным многочленом  $n \times n$ -матрицы

$$S = \sum_{i,j} E_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

удовлетворяющей соотношению  $S^2 = nS$ , будет, очевидно,  $\mu_S(t) = t^2 - nt$ , т.е.  $\lambda_1 = n$ ,  $\lambda_2 = 0$  — собственные значения матрицы  $S$  кратности 1 и  $n-1$  соответственно. Так как, далее,  $\text{rank } S = 1$  и  $S$  не может быть нильпотентной матрицей (не тот минимальный многочлен), то для её жордановой формы остаётся единственная возможность:  $J(S) = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ . Это и понятно, поскольку  $P = \frac{1}{n}S$  — матрица проектора. Решением матричного уравнения

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

является, в частности,

$$C = \begin{vmatrix} 1/n & -1 & \dots & -1 \\ 1/n & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1/n & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

**6. Другие подходы к ЖНФ.** Для нахождения жордановой нормальной формы матрицы и соответствующего жорданова базиса достаточно эффективной оказывается общая теория модулей над кольцами главных идеалов, одной из разновидностей которой является хорошо разработанный метод  $\lambda$ -матриц. Хотя эта теория универсальна и приводит к другим важным следствиям, её изложение

довольно утомительно и вряд ли уместно в данном контексте. Напротив, прямой геометрический метод, которому мы следовали, достаточно нагляден и заслуживает того, чтобы привести ещё один его вариант, объединяющий теоремы 3 и 4 (см., например, пособия [2, 9]).

Итак, пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — комплексный линейный оператор,  $\lambda$  — одно из его собственных значений. Так как жорданов базис для  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$  будет также жордановым базисом для  $\mathcal{A}$ , то без ограничения общности считаем  $\lambda = 0$ . Тогда оператор  $\mathcal{A}$  вырожден, включение  $\text{Im } \mathcal{A} \subset V$  строгое, и мы можем использовать индукцию по  $n = \dim V$ . С этой целью рассмотрим последовательность

$$\text{Im } \mathcal{A}^0 \supset \text{Im } \mathcal{A}^1 \supset \text{Im } \mathcal{A}^2 \supset \dots \supset \text{Im } \mathcal{A}^{p-1} \supset \text{Im } \mathcal{A}^p = \text{Im } \mathcal{A}^{p+1} = \dots,$$

стабилизирующуюся на каком-то  $p$ -м члене, так что

$$\text{Im } \mathcal{A}^p \cap \text{Ker } \mathcal{A} = 0, \quad \text{Im } \mathcal{A}^{p-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A} \neq 0.$$

Согласно упр. 3 из § 3 имеет место разложение  $V$  в прямую сумму

$$V = \text{Ker } \mathcal{A}^p \oplus \text{Im } \mathcal{A}^p$$

$\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств. Если  $\dim \text{Im } \mathcal{A}^p > 0$ , то по предположению индукции каждое из слагаемых допускает жорданов базис. Их объединение будет жордановым базисом в  $V$ .

Мы пришли к ситуации, когда

$$V = \text{Ker } \mathcal{A}^p,$$

т.е.  $\mathcal{A}^p = 0, \mathcal{A}^{p-1} \neq 0$ .

Таким образом, в обход теоремы 3, имеющей самостоятельное значение, получена редукция к случаю нильпотентного оператора. Не апеллируя к теореме 4, поступим следующим образом. Положим для удобства

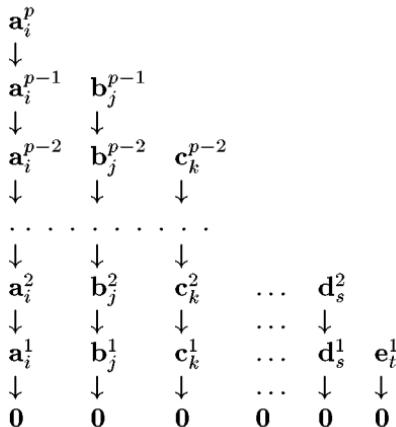
$$V_i = \text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}.$$

Тогда

$$\text{Ker } \mathcal{A} = V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_p \neq 0, \quad V_{p+1} = 0.$$

Выберем в подпространстве  $V_p$  базис  $(\mathbf{a}_i^1; 1 \leq i \leq n_p)$ . Так как  $\mathbf{a}_i^1 \in \text{Im } \mathcal{A}^{p-1}$ , то  $\mathbf{a}_i^1 = \mathcal{A}^{p-1} \mathbf{a}_i^p$  для некоторого вектора  $\mathbf{a}_i^p$ . Рассмотрим векторы  $\mathbf{a}_i^k = \mathcal{A}^{p-k} \mathbf{a}_i^p$ ,  $1 \leq k \leq p$ . Векторы  $\mathbf{a}_i^1$  дополним до базиса подпространства  $V_{p-1}$  векторами  $\mathbf{b}_j^1$  в количестве  $n_{p-1}$  штук; найдём вектор  $\mathbf{b}_j^{p-1}$ , для которого  $\mathbf{b}_j^1 = \mathcal{A}^{p-2} \mathbf{b}_j^{p-1}$ , и рассмотрим векторы  $\mathbf{b}_j^l = \mathcal{A}^{p-l-1} \mathbf{b}_j^{p-1}$ ,  $1 \leq l \leq p-1$ . Затем дополним векторы  $\mathbf{a}_i^1, \mathbf{b}_j^1$  до базиса подпространства  $V_{p-2}$  векторами  $\mathbf{c}_k^1$  в количестве  $n_{p-2}$

штук и т.д. Иллюстрируем этот процесс диаграммой



Предположим, что векторы из диаграммы линейно зависимы:

$$\sum_i \alpha_i^{(p)} \mathbf{a}_i^p + \sum_i \alpha_i^{(p-1)} \mathbf{a}_i^{p-1} + \dots + \sum_j \beta_j^{(p-1)} \mathbf{b}_j^{p-1} + \dots + \sum_t \delta_t \mathbf{e}_t = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Применение к (11) оператора  $\mathcal{A}^{p-1}$  даст в результате

$$\sum_i \alpha_i^{(p)} \mathbf{a}_i^1 = 0,$$

откуда имеем

$$\alpha_i^{(p)} = 0, \quad 1 \leq i \leq n_p.$$

Применив теперь к (11) оператор  $\mathcal{A}^{p-2}$ , получим

$$\sum_i \alpha_i^{(p-1)} \mathbf{a}_i^1 + \sum_j \beta_j^{(p-1)} \mathbf{b}_j^1 = \mathbf{0},$$

что в соответствии с выбором векторов даст  $\alpha_i^{(p-1)} = 0 = \beta_j^{(p-1)}$ . Продолжение этого процесса приведёт к тривиальности соотношения (11). С другой стороны, общее число векторов в диаграмме равно

$$\begin{aligned}
 |\{\mathbf{a}_i^k\}| + |\{\mathbf{b}_j^l\}| + \dots + |\{\mathbf{e}_t\}| &= \\
 &= pn_p + (p-1)n_{p-1} + \dots + 2n_2 + n_1 = \\
 &= (n_1 + \dots + n_p) + (n_2 + \dots + n_p) + \dots + (n_{p-1} + n_p) + n_p = \\
 &= \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_{p-1} + \dim V_p = \\
 &= \sum_{i=1}^p (\dim \text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}) = \sum_i (\dim \text{Ker } \mathcal{A}^i - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{i-1}) = \\
 &= \dim \text{Ker } \mathcal{A}^p = \dim V
 \end{aligned}$$

(по поводу этого равенства см. упр. 7 из § 2)

Таким образом, векторы в диаграмме составляют базис пространства  $V$ , и этот базис жорданов по построению.

Что касается утверждения о единственности ЖНФ, то в обозначениях п. 5 имеем

$$\begin{aligned} N(m, 0) &= \dim V_m - \dim V_{m+1} = \\ &= (\dim \text{Ker } \mathcal{A}^m - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{m-1}) - (\dim \text{Ker } \mathcal{A}^{m+1} - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^m) = \\ &= 2 \dim \text{Ker } \mathcal{A}^m - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{m-1} - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{m+1} = \\ &= \text{rank } \mathcal{A}^{m-1} - 2 \text{rank } \mathcal{A}^m + \text{rank } \mathcal{A}^{m+1} = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}, \end{aligned}$$

а это, как мы знаем, есть инвариантная величина.

**7. Другие нормальные формы.** В этом пункте мы вкратце опишем другие нормальные формы матриц, пригодные, в частности, для алгебраически незамкнутых полей.

а) *Циклические пространства и циклические клетки.* Разовьём определение 3. Векторное пространство  $V$  размерности  $n$  над  $\mathbb{K}$  называется *циклическим* относительно линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , если в  $V$  существует такой вектор  $\mathbf{v}$ , также называемый *циклическим*, что

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

где

$$\mathbf{e}_i = \mathcal{A}^{n-i} \mathbf{v}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как  $(\mathbf{e}_i)$  — базис пространства  $V$ , то

$$\mathcal{A}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathcal{A}^i \mathbf{v}$$

с однозначно определёнными коэффициентами  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ , поэтому оператору  $\mathcal{A}$  в этом базисе отвечает так называемая *циклическая клетка* — матрица вида

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Обратно: если матрица оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  является циклической клеткой, то вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_n$  цикличен, причём  $\mathbf{e}_i = \mathcal{A}^{n-i} \mathbf{e}_n$  (индукция вниз по  $i$ ).

Покажем, что вид циклической клетки, отвечающей  $\mathcal{A}$ , не зависит от выбора исходного циклического вектора. Для этого достаточно

проверить, что первый столбец клетки (12) состоит из коэффициентов минимального многочлена оператора  $\mathcal{A}$ , т.е.

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = f(t) = t^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t^i.$$

В самом деле,  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ , поскольку

$$f(\mathcal{A})[\mathcal{A}^i \mathbf{v}] = \mathcal{A}^i[f(\mathcal{A})\mathbf{v}] = \mathbf{0},$$

а векторы  $\mathcal{A}^i \mathbf{v}$  порождают  $V$ . С другой стороны,  $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$  для любого многочлена  $g(t)$  степени  $< n$ , потому что иначе, применив оператор  $g(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$  к циклическому вектору  $\mathbf{v}$ , мы получим нетривиальное линейное соотношение между базисными векторами  $\mathcal{A}^i \mathbf{v}$ .

б) *Критерий цикличности пространства.* Согласно предыдущим рассмотрениям, если пространство  $V$  циклично относительно  $\mathcal{A}$ , то его размерность  $n$  равна степени минимального многочлена оператора  $\mathcal{A}$  и, стало быть, минимальный многочлен совпадает с характеристическим. Обратное тоже верно (см. упр. 4 из § 3).

в) *Матрица любого оператора в подходящем базисе может быть приведена к прямой сумме циклических клеток.* Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы о ЖНФ. Вместо множителей  $(t - \lambda_i)^{n_i}$  характеристического многочлена следует рассматривать множители  $p_i(t)^{r_i}$ , где  $p_i(t)$  — неприводимые над полем  $\mathbb{K}$  делители характеристического многочлена. Теорема единственности также имеет место, если ограничиться случаем, когда минимальные многочлены всех циклических клеток неприводимы. Без этого ограничения она неверна: циклическое пространство может быть прямой суммой двух циклических подпространств, минимальные многочлены которых взаимно просты.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя матрицу  $S$  из примера 4 и выражение для  $J(S)$ , вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} m & -1 & \dots & -1 \\ -1 & m & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & m \end{vmatrix},$$

представив его в виде  $\det A = \chi_S(m+1)$ .

2. С точностью до подобия ненулевые nilпотентные  $4 \times 4$ -матрицы исчерпываются следующими:

$$\begin{aligned} A_1 &= J_2(0) + J_1(0) + J_1(0), & A_2 &= J_2(0) + J_2(0), \\ A_3 &= J_3(0) + J_1(0), & A_4 &= J_4(0). \end{aligned}$$

Матрицы

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

очевидно, нильпотентны. Каким матрицам  $A_i$  они подобны?

3. а) Найти  $J(\mathcal{A})$ , зная, что  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t - 3)^4(t + 2)$  и  $\text{rank } (\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 2$ .

б) Однозначно ли восстанавливается  $J(\mathcal{A})$  в случае  $\text{rank } (\mathcal{A} - 3\mathcal{E}) = 1, 3, 4$ ?

4. а) Показать, что матрицы

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{ccc} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right\|$$

имеют одинаковые характеристические многочлены.

б) Найти  $\mu_A(t)$  и  $\mu_B(t)$ .

в) Найти  $J(A)$  и  $J(B)$ .

5. Пусть  $\mathfrak{K}$  — поле характеристики 0,  $A$  —  $n \times n$ -матрица с коэффициентами из  $\mathfrak{K}$ . Доказать, что  $A$  нильпотентна в точности тогда, когда  $\text{tr}(A^k) = 0$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

6. Доказать, что матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$  и  ${}^t A$  всегда сопряжены.

7. Соотношение  $A^N = E$  для матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$  справедливо тогда и только тогда, когда  $A$  диагонализируема и её собственные значения являются корнями степени  $N$  из 1.

8. Непосредственно проверяется, что  $A^2 \notin \text{Mag}_3(\mathbb{Q})$  для матрицы

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right\| \in \text{Mag}_3(\mathbb{Q}),$$

т.е. магические квадраты, в отличие от полумагических (см. упр. 9 из § 2), кольца не образуют. Тем более неожиданным является утверждение:

если  $A \in \text{Mag}_3(\mathbb{Q})$ , то  $A^m \in \text{Mag}_3(\mathbb{Q})$  для любого нечётного  $m \geq 1$ .

Доказать это, опираясь на теорему Гамильтона—Кэли.

9. Проверить, что при любом  $m \geq 2$  матрица  $A^m$ , где

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right\| \in \text{Mag}_4(\mathbb{Q}),$$

не является магической. Используя матрицу  $A$ , показать, что для всякого  $n \geq 4$  существует магическая  $n \times n$ -матрица,  $m$ -е степени которой не будут магическими ( $m \geq 2$ ).

10. Запишем матрицу  $A = J_1(\lambda) + J_2(\mu)$ ,  $\lambda \neq \mu$ , в виде  $A = S + N$ , где  $S = \text{diag}(\lambda, \mu, \mu)$ . Более подробно:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right\|, \quad S = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right\|, \quad N = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Выразить  $S$  и  $N$  в виде многочленов  $s(A)$ ,  $n(A)$  от  $A$  (по теореме Гамильтона—Кэли можно считать, что  $\deg s(t) \leq 2$ ,  $\deg n(t) \leq 2$ ; как обычно,  $A^0 = E$ ).

**11.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное комплексное пространство,  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V$ . Доказать, что  $\mathcal{A}$  допускает однозначную запись в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{N}, \quad \mathcal{S}\mathcal{N} = \mathcal{N}\mathcal{S},$$

где  $\mathcal{S}$  — диагонализируемый, а  $\mathcal{N}$  — нильпотентный линейный оператор, причём  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{N}$  выражаются в виде многочленов от  $\mathcal{A}$  ( $\mathcal{S}$  называется *полупростой*, а  $\mathcal{N}$  — *нильпотентной компонентой* оператора  $\mathcal{A}$ ).

**12.** Вычислить  $(J_n(\lambda))^k$  для любого натурального  $k$ .

**13.** Доказать, что  $[[X, Y]^2, Z] = 0$  для любых трёх матриц  $X, Y, Z \in M_2(\mathbb{R})$ . Здесь  $[X, Y] = XY - YX$  — коммутатор матриц  $X, Y$ .

## ГЛАВА 3

# ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

---

Теория билинейных форм была развита нами в гл. 1 отчасти для того, чтобы иметь возможность перейти от общих векторных пространств к более содержательным и, пожалуй, даже более привычным структурам — метрическим пространствам. Вспомним, что богатство фактов нашей трёхмерной геометрии в значительной мере обусловлено двумя дополнительными понятиями векторной алгебры — длиной вектора и углом между двумя векторами. Переход от чисто качественного свойства линейности, безразличного к природе основного поля, к количественным соотношениям между объектами векторных пространств заставляет нас сосредоточиться по существу на двух полях скаляров —  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ . Геометрия комплексных векторных пространств заслуживает особого обсуждения как ввиду её важности, так и ввиду необходимости рассмотрения нового типа форм.

## § 1. Евклидовы векторные пространства

**1. Эвристические соображения и определения.** В аналитической геометрии пространств  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  важную роль играет *скалярное произведение* двух векторов, которое вводится как произведение длин этих векторов и косинуса угла между ними. Длина  $\|\mathbf{x}\|$  вектора  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ , заданного в прямоугольной системе координат, определяется по формуле

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

так что  $\|\mathbf{x}\| > 0$  для любого  $\mathbf{x} \neq 0$ . Квадрат длины  $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  можно интерпретировать как значение положительно определённой квадратичной формы. Полярная к ней симметричная билинейная форма  $(*|*)$  сопоставляет любым двум векторам  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$  число (или скаляр)  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . Пусть  $\varphi = \widehat{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$  — угол между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$  — их разность (рис. 3). Обычная формула косинусов из элементарной геометрии, применённая к треугольнику со сторонами  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ , утверждает, что

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\varphi.$$

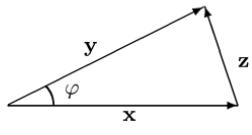


Рис. 3

С другой стороны, используя билинейность и симметричность формы  $(\cdot | \cdot)$ , получаем  $\|z\|^2 = \|y - x\|^2 = (y - x | y - x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y)$ . Сравнение двух выражений для  $\|z\|^2$  даёт

$$(x | y) = \|x\| \|y\| \cos \varphi,$$

т.е. скаляр  $(x | y)$  совпадает с обычным скалярным произведением векторов  $x$  и  $y$ . Это обстоятельство подсказывает разумный путь введения скалярного произведения векторов в  $\mathbb{R}^n$ :

$$(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1)$$

В этом определении, однако, ощущается некий произвол, связанный с выбором специальной системы координат. Чтобы его устранить, введём следующее общее

**Определение 1.** Евклидовым векторным пространством называется вещественное векторное пространство  $V$  с выделенной на нём симметричной билинейной формой  $(x, y) \mapsto (x | y)$  такой, что соответствующая квадратичная форма  $x \mapsto (x | x)$  (или просто  $(x | x)$ ) положительно определена.

В общем случае значение  $(x | y)$  симметричной билинейной формы  $(\cdot | \cdot)$  на векторах  $x, y \in V$  будет называться их *скалярным произведением*. Использованное нами обозначение  $(x | y)$  вместо обычного  $f(x, y)$  призвано подчёркивать тот факт, что из бесчисленного множества форм мы выделили одну, которую и положили в основу определения евклидова пространства. Так как мы собираемся при помощи  $(x | y)$  ввести понятия длины и угла, то получающуюся при этом неоднозначность можно сравнить с произволом в выборе масштаба при измерении длин отрезков на прямой. Часто скалярное произведение обозначают  $(x, y)$  или  $\langle x, y \rangle$ , но у нас  $(x, y)$  есть просто пара векторов (элемент декартова произведения  $V \times V$ ), а  $\langle x, y \rangle$  — подпространство, натянутое на  $x$  и  $y$ . В дальнейшем мы отождествляем билинейную форму  $(\cdot | \cdot)$  как элемент пространства  $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$  с её значениями  $(x | y)$  на произвольных векторах  $x$  и  $y$ .

Итак, в соответствии с определением 1 евклидово векторное пространство — это пара  $(V, (\cdot | \cdot))$ , где  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$ , а  $(\cdot | \cdot)$  — фиксированная симметричная билинейная форма на  $V$ . Отметим ещё раз основные свойства скалярного произведения:

- i)  $(x | y) = (y | x) \quad \forall x, y \in V;$
- ii)  $(\alpha x + \beta y | z) = \alpha(x | z) + \beta(y | z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- iii)  $(x | x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad ((0 | x) = 0).$

Скалярное произведение, заданное соотношением (1) (оно называется *стандартным* скалярным произведением), удовлетворяет, конечно, этим свойствам и подходит под общее определение, иначе последнее было бы лишено смысла.

Пример 1. Пусть  $V = P_n$  — вещественное векторное пространство многочленов степени  $\leq n - 1$ . Сопоставление любым двум векторам (многочленам)  $f, g \in V$  числа

$$(f | g) = \int_a^b f(t) g(t) dt \quad (2)$$

( $[a, b]$  — фиксированный отрезок на  $\mathbb{R}$ ) также задаёт скалярное произведение на  $V$ , как это легко усмотреть из свойств определённого интеграла. Было бы неудобно выражать то же самое скалярное произведение (2) в терминах “естественног” базиса  $1, t, \dots, t^{n-1}$ . Следует заметить, что соотношением (2) задаётся скалярное произведение и на бесконечномерном пространстве  $C(a, b)$  непрерывных функций (на отрезке  $[a, b]$ ). Соответствующее бесконечномерное евклидово векторное пространство обозначается символом  $C_2(a, b)$ .

**2. Основные метрические понятия.** Пусть  $V$  — евклидово векторное пространство со скалярным произведением  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ .

Определение 2. Длиной или нормой  $\|\mathbf{v}\|$  любого вектора  $\mathbf{v} \in V$  называется неотрицательное вещественное число

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v} | \mathbf{v})}. \quad (3)$$

Так как  $(\mathbf{v} | \mathbf{v}) \geq 0$ , то длина любого вектора вполне определена, причём  $\mathbf{v} \neq 0 \implies \|\mathbf{v}\| > 0$ . Если  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то  $\|\lambda \mathbf{v}\| = \sqrt{(\lambda \mathbf{v} | \lambda \mathbf{v})} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$ .

В этом месте заметим, что любое подпространство  $U$  евклидова векторного пространства  $V$  само является евклидовым векторным пространством, поскольку скалярное произведение  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ , будучи ограниченным на  $U$ , определяет билинейную форму  $U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , которая, очевидно, остаётся симметричной и положительно определённой. В частности, само поле  $\mathbb{R}$  можно рассматривать как одномерное векторное пространство, длина вектора в котором совпадает с обычным абсолютным значением вещественного числа. В общем случае мы будем различать символы  $|*$  и  $\|*\|$ .

Вектор длины 1 называется *нормированным*. Любой вектор  $\mathbf{x} \neq 0$  можно нормировать, умножив его на подходящий скаляр, а именно для вектора  $\mathbf{x}' = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}$  имеем

$$\|\mathbf{x}'\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x}\| = 1.$$

Прежде чем вводить угол между двумя векторами, мы ещё раз обратимся к свойству iii) скалярного произведения.

Теорема 4 (неравенство Коши—Буняковского). *Каковы бы ни были векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  евклидова векторного пространства  $V$ , справедливо неравенство*

$$|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \quad (4)$$

**Доказательство.** Из положительной определённости скалярного произведения (свойство iii)) следует, что

$$\lambda^2(\mathbf{x}|\mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}|\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geqslant 0, \quad (5)$$

где  $\lambda$  — произвольное вещественное число. При фиксированных векторах  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  мы смотрим на левую часть (5) как на квадратный трёхчлен  $f$ . Так как  $f(\lambda) \geqslant 0$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то для его дискриминанта  $D(f) = (2(\mathbf{x}|\mathbf{y}))^2 - 4(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}|\mathbf{y})$  должно выполняться неравенство  $D(f) \leqslant 0$ , откуда

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}|\mathbf{y}). \quad (6)$$

Взяв положительный квадратный корень из обеих частей неравенства (6) и воспользовавшись определением (3) длины вектора, мы придём к неравенству (4), в левой части которого стоит абсолютная величина скаляра  $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ .  $\square$

**Замечание.** Если  $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ , то  $D(f) = 0$ , т.е. трёхчлен  $f$  имеет один вещественный корень  $\lambda_0$ . Согласно (5) имеем  $(\lambda_0\mathbf{x} - \mathbf{y}|\lambda_0\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$ , откуда  $\mathbf{y} = \lambda_0\mathbf{x}$ . Следовательно, лишь для коллинеарных (пропорциональных) векторов скалярное произведение по абсолютной величине равно произведению их длин.

**Пример 2.** В применении к стандартному скалярному произведению (1) и скалярному произведению (2) на  $C_2(a, b)$  неравенство (4) принимает вид

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \quad (7)$$

и соответственно

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) dt \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}. \quad (8)$$

неравенство (8) играет важную роль в анализе.

**Неравенство Коши—Буняковского** означает, что

$$-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leqslant 1.$$

Стало быть, отношение  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) / (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)$  является косинусом вполне определённого угла  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \quad (9)$$

Именно этот угол  $\varphi$  и считается, по определению, углом между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ .

**Определение 3.** Векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  называются *ортогональными* (обозначение  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ ), когда угол между ними равен  $\pi/2$ , т.е.  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$ .

Нулевой вектор ортогонален любому вектору  $\mathbf{x} \in V$ . Заметим ещё, что

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \implies \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

(теорема Пифагора), причём у нас это элементарно-геометрическое утверждение является следствием формальных свойств скалярного произведения. Чуть более общим является утверждение о попарно ортогональных векторах  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \dots$ :

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} + \mathbf{u} + \dots\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \dots$$

В качестве упражнения проверьте, что всегда

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \perp (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

(диагонали ромба пересекаются под прямым углом).

Из теоремы 1 вытекает

Следствие (неравенство треугольника). *Длины векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  связаны неравенством*

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \quad (10)$$

Доказательство. Действительно, используя неравенство (4), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

Пример 3. В пространстве функций  $C_2(a, b)$  неравенство (10) принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b (\mathbf{f}(t) \pm \mathbf{g}(t))^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b \mathbf{f}(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b \mathbf{g}(t)^2 dt}$$

(неравенство Мinkовского).

**3. Процесс ортогонализации.** В стандартном пространстве  $\mathbb{R}^n$  со скалярным произведением (1) векторы  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , попарно ортогональны и образуют базис. Естественно ожидать, что в любом евклидовом векторном пространстве  $V$  можно выбрать базис с аналогичными свойствами. Сформулируем точно то, что нам хотелось бы иметь.

Определение 4. Базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  евклидова векторного пространства  $V$  называется *ортогональным*, если  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = 0$  при  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Если, кроме того,  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i) = 1$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ , то базис называется *ортонормированным* (или *ортонормальным*).

Другими словами, в ортонормированном базисе все векторы  $\mathbf{e}_i$  имеют единичную длину. Из любого ортогонального базиса можно получить ортонормированный, нормировав каждый из векторов  $\mathbf{e}_i$ .

Отметим следующий почти очевидный факт.

Теорема 4. *Любые ненулевые взаимно ортогональные векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in V$  линейно независимы. Если при этом  $\dim V = n$  и  $m = n$ , то векторы  $\mathbf{e}_i$  образуют ортогональный базис в  $V$ .*

**Доказательство.** Второе утверждение вытекает (по определению размерности) из первого, которое мы сейчас и докажем. Предположим, что

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m = \mathbf{0}$$

— нетривиальное соотношение между векторами  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ . Пусть, скажем,  $\alpha_k \neq 0$ . Умножив скалярно на  $\mathbf{e}_k$  обе части нашего линейного соотношения, получим

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{0} | \mathbf{e}_k) &= (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_k) = \\ &= \alpha_1 (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_k) + \dots + \alpha_k (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k) + \dots + \alpha_m (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_k) = \alpha_k (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k), \end{aligned}$$

поскольку по условию  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k) = 0$  при  $i \neq k$ . С другой стороны,  $(\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k) \neq 0$ , и мы приходим к заключению, что  $\alpha_k = 0$ . Полученное противоречие доказывает теорему.  $\square$

Утверждение теоремы 4 будет использовано при фактическом построении ортогонального базиса, но его существование устанавливается немедленно.

**Теорема 5.** Во всяком  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $V$  существуют ортонормированные базисы.

**Доказательство.** Квадратичная форма  $q$ :

$$q(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} | \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2,$$

на  $V$  положительно определена. Поэтому для неё, как для всякой другой положительно определённой формы (см. гл. 1, § 4, п. 8) существует базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ , в котором она записывается в нормальном виде

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$(\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)$ . Скалярным произведением векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  будет (1). Но это и значит, что  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , т.е.  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный (а в данном случае даже лучше — ортонормальный) базис.  $\square$

Заметим, что в ортонормированном базисе координаты вектора  $\mathbf{x}$  равны скалярным произведениям  $\mathbf{x}$  на соответствующие базисные векторы:

$$(\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) = x_i. \tag{10}$$

**Определение 5.** Скалярное произведение  $(\mathbf{x} | \mathbf{e})$ , где  $\mathbf{e}$  — вектор длины 1, называется *проекцией* вектора  $\mathbf{x}$  на прямую  $\langle \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Таким образом, мы можем сказать, что координаты вектора  $\mathbf{x}$  в ортонормированном базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  совпадают с проекциями  $\mathbf{x}$  на “оси координат”  $\langle \mathbf{e}_i \rangle_{\mathbb{R}}$ . Фактическое построение ортонормированного базиса осуществляется при помощи так называемого *процесса ортогонализации Грама—Шмидта*, встречающегося в самых разных

вопросах анализа и геометрии. Предварительно заметим, что множество всех векторов, ортогональных данному вектору  $\mathbf{v}$ , есть подпространство, называемое *ортогональным дополнением* к  $\mathbf{v}$ . Действительно, если  $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{y} \perp \mathbf{v}$ , т.е.  $(\mathbf{x} | \mathbf{v}) = (\mathbf{y} | \mathbf{v}) = 0$ , то и

$$(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{x} | \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{y} | \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Говорят также, что вектор  $\mathbf{v}$  *ортогонален подпространству*  $U \subset V$ , если  $\mathbf{v} \perp \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in U$ . Очевидно, что  $\mathbf{v} \perp U \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, m$ , где  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  — базисные векторы в  $U$ .

Наконец введём

**Определение 6.** Множество всех векторов  $\mathbf{x} \in V$ , ортогональных подпространству  $U \subset V$ , есть подпространство  $U^\perp$  (ввиду линейности условия  $\mathbf{x} \perp U$ ), которое называется *ортогональным дополнением* к  $U$ .

**Теорема 6** (процесс ортогонализации). *Пусть  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  — система из  $t$  линейно независимых векторов евклидова векторного пространства  $V$ .*

*Тогда существует ортонормированная система векторов  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$  такая, что линейные оболочки  $L_i = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \rangle$  и  $L'_i = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_i \rangle$  совпадают при  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $m \leq n$ .*

**Доказательство.** Возьмём в качестве  $\mathbf{e}'_1$  вектор  $\lambda \mathbf{e}_1$ , где  $\lambda = \|\mathbf{e}_1\|^{-1}$ . Так как  $L_1 = \langle \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{e}'_1 \rangle = L'_1$ , то это даёт утверждение теоремы при  $i = 1$ . Пусть уже построена нужная система  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_k$ ;  $1 \leq k < m$  ( $L_i = L'_i$ ;  $i = 1, \dots, k$ ). Покажем, как найти вектор  $\mathbf{e}'_{k+1}$ .

Вектор  $\mathbf{e}_{k+1}$  не может содержаться в  $L'_k = L_k$  (иначе  $\mathbf{e}_{k+1}$  выражался бы линейно через  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ ), поэтому  $L_{k+1} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle$ , где

$$v = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}'_i$$

с произвольными скалярами  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Постараемся подобрать  $\lambda_i$  так, чтобы вектор  $v$  был ортогонален к  $L'_k$ . Для этого, как мы знаем, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} 0 = (\mathbf{v} | \mathbf{e}'_j) &= (\mathbf{e}_{k+1} | \mathbf{e}'_j) - \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j) \right) = \\ &= (\mathbf{e}_{k+1} | \mathbf{e}'_j) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}_{k+1} | \mathbf{e}'_j) - \lambda_j, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\lambda_j = (\mathbf{e}_{k+1} | \mathbf{e}'_j)$  получаем вектор  $\mathbf{v} \neq 0$ , ортогональный к  $L'_k$ . Полагая  $\mathbf{e}'_{k+1} = \mu \mathbf{v}$  с  $\mu = \|\mathbf{v}\|^{-1}$ , мы придём к ортонормированной системе  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{k+1}$ , причём  $L_{k+1} = L'_{k+1}$ . В конце концов получим исковую систему  $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$ .  $\square$

**Следствие.** *Всякая ортонормированная система векторов евклидова векторного пространства  $V$  дополняема до ортонормированного базиса в  $V$ .*

**Доказательство.** Согласно теореме 3 из §2 гл. 1, имеющуюся по условию ортонормированную систему  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  можно дополнить до базиса  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ . К этому базису применим процесс ортогонализации, описанный в теореме 6, не затрагивая при этом первые  $m$  векторов.  $\square$

Воспользуемся приёмом, близким к процессу ортогонализации в предыдущей теореме, для доказательства следующего утверждения.

**Теорема 7.** *Пусть  $L$  — подпространство конечномерного евклидова векторного пространства  $V$ ,  $L^\perp$  — его ортогональное дополнение. Тогда*

$$V = L \oplus L^\perp, \quad L^{\perp\perp} = L. \quad (11)$$

**Доказательство.** Возьмём в  $L$  какой-нибудь ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ . Пусть  $\mathbf{w} \in V$ . Рассмотрим вектор

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^m (\mathbf{w} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Так как  $(\mathbf{v} | \mathbf{e}_j) = (\mathbf{w} | \mathbf{e}_j) - \sum_{i=1}^m (\mathbf{w} | \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = (\mathbf{w} | \mathbf{e}_j) - (\mathbf{w} | \mathbf{e}_j) - (\mathbf{w} | \mathbf{e}_j) \cdot 1 = 0$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ , то вектор  $\mathbf{v}$  ортогонален подпространству  $L$ . Это значит, что  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{w} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \in L$  и  $\mathbf{v} \in L^\perp$ . Итак,  $V = L + L^\perp$ .

Пусть  $\mathbf{x} \in L \cap L^\perp$ . Так как  $\mathbf{x} \in L$ , то  $(\mathbf{x} | L^\perp) = 0$ . Но, в частности,  $L^\perp \ni \mathbf{x}$ , так что  $(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = 0$ , откуда получаем  $\mathbf{x} = 0$ . Следовательно,  $V = L \oplus L^\perp$  — прямая сумма.

Из разложения  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  ( $\mathbf{u} \in L$ ,  $\mathbf{v} \in L^\perp$ ) имеем  $(\mathbf{w} | \mathbf{u}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v} | \mathbf{u}) = (\mathbf{u} | \mathbf{u}) + (\mathbf{v} | \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$  и, аналогично,  $(\mathbf{w} | \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2$ . Если теперь  $\mathbf{w} \in L^{\perp\perp}$ , то  $(\mathbf{w} | \mathbf{v}) = 0$  и  $\|\mathbf{v}\|^2 = 0$ , откуда  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \in L$ . Стало быть,  $L^{\perp\perp} \subseteq L$ . Так как, далее,  $L^{\perp\perp} = (L^\perp)^\perp$  — подпространство, ортогональное к  $L^\perp$ , а  $(L | L^\perp) = 0$ , то  $L \subseteq L^{\perp\perp}$ . Следовательно,  $L^{\perp\perp} = L$ .  $\square$

**4. Изоморфизмы евклидовых векторных пространств.** Мы видели, что выбор ортонормированного базиса в евклидовом векторном пространстве  $V$  даёт возможность записать скалярное произведение  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  в стандартном виде (1). Этот факт означает по существу, что по своим метрическим свойствам пространства  $V$  и  $\mathbb{R}^n$  неразличимы. Более точное утверждение выражает

**Теорема 8.** *Любые евклидовые векторные пространства  $V$ ,  $V'$  одинаковой конечной размерности изоморфны. Это значит, что существует изоморфное отображение  $f: V \rightarrow V'$  векторных пространств (см. определение в п. 3 из § 2 гл. 1), сохраняющее ска-*

лярное произведение, т.е.

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{y}))' \quad (12)$$

( $(\cdot | \cdot)'$  — скалярное произведение на  $V'$ ).

**Доказательство.** Рассмотрим ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $V$  и какой-то ортонормированный базис  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  в  $V'$ . Соответствие

$$f: \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{x}' = x_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x_n \mathbf{e}'_n,$$

очевидно, биективно. Как и в случае теоремы 5 из п. 3 § 2 гл. 1, непосредственно проверяется, что  $f$  — изоморфизм векторных пространств. Так как в  $V$  и в  $V'$  скалярные произведения  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{x}' | \mathbf{y}')'$  вычисляются по одной и той же формуле (1) (в силу выбора базисов), то условие (12) изоморфизма евклидовых векторных пространств также выполнено.  $\square$

Доказанная теорема позволяет перевести на язык элементарной геометрии любое утверждение, сформулированное в терминах действий с векторами из  $V$  и скалярного произведения на  $V$ . Обратно: метрическая теорема, относящаяся к объектам пространства  $\mathbb{R}^3$  или  $\mathbb{R}^2$ , должна оставаться справедливой в любом евклидовом векторном пространстве  $V$  размерности  $\leq 3$ .

Раз уж речь зашла об изоморфизмах, рассмотрим пространство  $V^*$ , сопряжённое (двойственное) к евклидову векторному пространству  $V$  в смысле § 3 из гл. 1.

Очевидно, что отображение  $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{v} | \mathbf{x})$  при любом фиксированном векторе  $\mathbf{v} \in V$  определяет линейную форму

$$\Phi_{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} | *): V \rightarrow \mathbb{R},$$

т.е.  $(\mathbf{v} | *) \in V^*$ .

**Теорема 9.** *Отображение  $\Phi: \mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v} | *) = \Phi_{\mathbf{v}}$  есть естественный изоморфизм векторных пространств  $V$  и  $V^*$ . При этом изоморфизме ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  евклидова векторного пространства  $V$  отождествляется с дуальным к нему базисом  $f_1, \dots, f_n$  пространства  $V^*$ .*

**Доказательство.** Так как скалярное произведение  $(\mathbf{v} | \mathbf{x})$  линейно по  $\mathbf{v}$ , то отображение  $\Phi$  линейно:

$$\Phi_{(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v})} = (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} | *) = \alpha (\mathbf{u} | *) + \beta (\mathbf{v} | *) = \alpha \Phi_{\mathbf{u}} + \beta \Phi_{\mathbf{v}}.$$

Далее,  $\text{Ker } \Phi = 0$ , поскольку  $\mathbf{v} \in \text{Ker } \Phi \implies (\mathbf{v} | \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$  и, в частности,  $(\mathbf{v} | \mathbf{v}) = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Как всякий элемент пространства  $V^*$ , линейная форма  $(\mathbf{v} | *)$  линейно выражается через двойственные к  $(\mathbf{e}_i)$  базисные векторы  $e^1, \dots, e^n \in V^*$ . В частности,

$$\Phi_{\mathbf{e}_i} = (\mathbf{e}_i | *) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис, то

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e^k(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij},$$

откуда

$$(\mathbf{e}_i | *) = e^i. \quad (13)$$

Это даёт нам сюръективность, а следовательно, и биективность  $\Phi$ . Вместе с тем соотношением (13) устанавливается справедливость заключительного утверждения теоремы.  $\square$

Итак, в евклидовом векторном пространстве  $V$  каждый вектор  $\mathbf{v} \in V$  можно рассматривать также как линейную форму  $\mathbf{v}: V \rightarrow \mathbb{R}$ . При таком отождествлении ортонормированный базис в  $V$  является своим собственным дуальным (взаимным) базисом. Естественным изоморфизмом (сравнить его с изоморфизмом  $V \simeq V^{**}$  для обычного векторного пространства) мы воспользуемся при изучении линейных операторов. Изоморфизм  $\Phi$  можно считать метрическим в смысле теоремы (8), если определить на  $V^*$  скалярное произведение по правилу

$$((\mathbf{u} | *) | (\mathbf{v} | *))^* := (\mathbf{u} | \mathbf{v}).$$

Все аксиомы скалярного произведения выполняются (проверьте).

**5. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.** В евклидовом векторном пространстве  $V$  ортонормированные базисы играют особую роль, поэтому естественно посмотреть на формулы перехода от одного ортонормированного базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  к другому ортонормированному базису  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ . Как всегда, записав

$$\mathbf{e}'_j = a_{1j} \mathbf{e}_1 + a_{2j} \mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj} \mathbf{e}_n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (14)$$

мы получаем матрицу перехода  $A = (a_{ij})$ , в  $k$ -м столбце которой стоят координаты вектора  $\mathbf{e}'_k$  относительно базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Пока мы лишь переписали формулы (3) из § 2 гл. 1 и на  $A$  имеем единственное ограничение  $\det A \neq 0$ . Воспользуемся теперь ортонормированностью базисов:

$$\delta_{ij} = (\mathbf{e}'_i | \mathbf{e}'_j) = \left( \sum_k a_{ki} \mathbf{e}_k | \sum_l a_{lj} \mathbf{e}_l \right) = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_l) = \sum_k a_{ki} a_{kj}.$$

Итак,

$$a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots + a_{ni} a_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (15)$$

Взяв транспонированную матрицу  ${}^t A$ , соотношения (14) (или (15)) перепишем в кратком виде:

$${}^t A \cdot A = E, \quad (16)$$

откуда  $A^{-1} = {}^t A$ . Так как  $A^{-1}A = E \implies A \cdot A^{-1} = E$ , то и

$$A \cdot {}^t A = E, \quad (16')$$

что приводит к соотношениям

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (15')$$

**Определение 7.** Квадратная матрица  $A = (a_{ij})$ , удовлетворяющая одному из эквивалентных условий (15), (15'), (16), (16'), называется *ортогональной*. Множество всех ортогональных матриц порядка  $n$  обозначается символом  $O(n)$ .

Непосредственно проверяется (и мы к этому ещё вернёмся), что  $O(n)$  — группа. Она называется *ортогональной группой*. Если теперь  $A$  — произвольная ортогональная матрица, то система векторов  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , полученная из ортонормированного базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  по формулам (14), будет также ортонормированным базисом.

Мы приходим к следующему выводу.

**Теорема 10.** *Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная, и всякая ортогональная матрица может быть матрицей такого перехода.*

Заметим, что из формул (14) и условия ортонормированности векторов получается геометрическая интерпретация элементов  $a_{ij}$  ортогональной матрицы  $A$ . Именно,

$$a_{ij} = (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}'_j) = \cos \varphi_{ij}, \quad (17)$$

где  $\varphi_{ij}$  — угол между старым базисным вектором  $\mathbf{e}_i$  и новым базисным вектором  $\mathbf{e}'_j$ . Переходя в равенстве (16) к определителям, получаем ещё, что  $(\det A)^2 = 1$ , т.е. определитель всякой ортогональной матрицы равен 1 или  $-1$ .

Мы знаем из § 2 гл. 1 правило преобразования координат вектора  $\mathbf{x} \in V$  при замене базиса. Если  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i$ , то

$$x_i = \sum_j a_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Но теперь известно дополнительно, что  $A^{-1} = {}^t A$ , поэтому

$$x'_i = \sum_j a_{ji} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**6. Симплектические пространства.** Понятие скалярного произведения “многолико”. Так, любая невырожденная билинейная кососимметричная форма на  $V = \mathbb{R}^{2m}$  задаёт симплектическую линейную структуру. Сама форма, часто обозначаемая  $[\mathbf{x} | \mathbf{y}]$ , называется ещё *кососкалярным произведением* на  $V$ . Пара  $(V, [\cdot | \cdot])$  называется *симплектическим пространством*. Согласно теореме 9 из § 4 гл. 1 симплектическую структуру без ограничения общности можно считать

стандартной (отвечающей матрице  $J$  или  $J_0$ ). Соответствующий базис называют *симплектическим*. Переформулировка следствия упомянутой теоремы 9: *все симплектические пространства одинаковой размерности изоморфны*.

Так же, как и в случае евклидовых пространств, естественно рассмотреть группу линейных операторов на  $V$ , сохраняющих симплектическую структуру.

**Определение 8.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  называется *симплектическим*, если

$$[\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathcal{A}\mathbf{y}] = [\mathbf{x} | \mathbf{y}] \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V = \mathbb{R}^{2m}.$$

Множество всех симплектических линейных операторов на пространстве  $V$  называется *симплектической группой* и обозначается символом  $\text{Sp}(2m) := \text{Sp}(V)$ .

В матричной форме условие принадлежности  $\mathcal{A}$  к  $\text{Sp}(2m)$  записывается в виде

$${}^t A \cdot J_0 \cdot A = J_0 = \begin{vmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом  $A$  называется *симплектической матрицей*. Отсюда следует, что  $\det A = \pm 1$ . На самом деле  $\det A = 1$ , как это прямо вытекает из теоремы 10 (п. 10 § 4 гл. 1):

$$1 = \text{Pf}(J_0) = \text{Pf}({}^t A \cdot J_0 \cdot A) = (\det A) \text{Pf}(J_0) = \det A.$$

В том, что множество  $\text{Sp}(2m)$  действительно является группой, т.е. замкнуто относительно обычных операций  $(A, B) \mapsto AB$ ,  $A \mapsto {}^t A^{-1}$ , легко убедиться непосредственной проверкой.

При  $m = 1$  имеем изоморфизм  $\text{Sp}(2) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Действительно, для  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  из условий

$$\begin{aligned} {}^t \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} &= \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ \alpha\delta - \beta\gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

следует, что  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ .  $\square$

Мы видели в п. 5, что элементы ортогональной группы находятся во взаимно однозначном соответствии с ортонормированными базисами евклидова пространства. Аналогично, линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  симплектичен тогда и только тогда, когда он переводит симплектический базис в симплектический (причём для любой пары симплектических базисов найдётся оператор, переводящий один базис в другой).

Спектр симплектического оператора (симплектической матрицы) обладает рядом интересных особенностей, как показывает

**Теорема 11.** *Справедлива импликация*

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(2m) \implies \chi_{\mathcal{A}}(t) = t^{2m} \chi_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Корни характеристического многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  разбиваются на четвёрки (и на пары), расположенные симметрично относительно вещественной оси и относительно единичной окружности.*

Другими словами,  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{i=1}^{2m} a_i t^i$  — возвратный многочлен:  $a_i = a_{2m-i}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** Пусть  $A$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$ . Из определяющего соотношения  ${}^t A J_0 A = J_0$  имеем  ${}^t A^{-1} = J_0 A J_0^{-1} = -J_0 A J_0$ . Стало быть,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(t) &= \det(tE - A) = \det(J_0(tE - A)J_0^{-1}) = \det(tE - J_0 A J_0^{-1}) = \\ &= \det(tE - {}^t A^{-1}) = \det({}^t(tE - A^{-1})) = \det(tE - A^{-1}) = \\ &= \det(tE - A^{-1}) \det A = \det(tA - E) = \det(E - tA) = \\ &= t^{2m} \det\left(\frac{1}{t}E - A\right) = t^{2m} \chi_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Мы видим, что вместе с  $\lambda$  характеристическим числом симплектического линейного оператора  $\mathcal{A}$  будет также и  $\lambda^{-1}$ . Кроме того,  $\chi_{\mathcal{A}}(t) \in \mathbb{R}[t]$ , так что вместе с комплексным корнем  $\lambda$  корнем многочлена  $\chi_{\mathcal{A}}(t)$  будет и  $\bar{\lambda}$ . Каждый корень  $\lambda$  с  $|\lambda| \neq 1$  и  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  определяет четвёрку корней  $\lambda, \bar{\lambda}, 1/\lambda, 1/\bar{\lambda}$  (рис. 4). При нарушении одного из условий получается пара корней.  $\square$

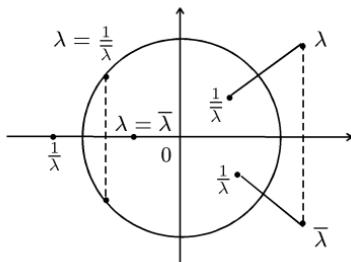


Рис. 4

Иногда на симплектическом пространстве  $V$  со стандартной структурой  $J_0$ :

$$[\mathbf{x} \mid \mathbf{y}] = \sum_{i=1}^m (x_{i+m} y_i - x_i y_{i+m}),$$

вводится согласованная (хотя и связанная с  $J_0$  не канонически, т.е. способом, зависящим от выбора системы координат) евклидова структура

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{2m} x_k y_k.$$

Для  $[\mathbf{x} \mid \mathbf{y}]$ , как и для любой билинейной формы (см. § 3), найдётся такой линейный оператор  $\mathcal{J}$ , что

$$[\mathbf{x} \mid \mathbf{y}] = (\mathbf{x} \mid \mathcal{J}\mathbf{y}).$$

Кососимметричность  $[\mathbf{x} \mid \mathbf{y}]$  влечёт кососимметричность оператора  $\mathcal{J}$ . На самом деле его матрицей в выбранном базисе служит  $J_0$ . Ясно, что  $\mathcal{J} \in \text{Sp}(V)$  и  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ . Наглядно оператор  $\mathcal{J}$  можно представлять в виде вращений на угол  $\pi/2$  в каждой из симплектических (гиперболических) плоскостей.

Назовём плоскость  $\Pi \in V$  *нулевой*, если  $[\Pi \mid \Pi] = 0$ , т.е.  $[\mathbf{x} \mid \mathbf{y}] = 0 \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Pi$  (косая ортогональность). Из определения оператора  $\mathcal{J}$  следует, что плоскость  $\Pi$  нулевая в точности тогда, когда плоскости  $\Pi$  и  $\mathcal{J}(\Pi)$  ортогональны в евклидовом смысле. Так как  $\mathcal{J}$  — невырожденный оператор, то  $\dim \Pi = \dim \mathcal{J}(\Pi)$ , а поэтому размерность нулевой плоскости  $\Pi$  в  $V = \mathbb{R}^{2m}$  не превосходит  $m$ .

Оператор  $\mathcal{J}$ , удовлетворяющий условию  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ , даёт возможность ввести в симплектическое пространство  $V$  ещё и комплексную структуру. Что под этим следует понимать, разъясняется в § 4.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** В пространстве  $P_3$  вещественных многочленов  $f(t)$  степени  $< 3$  векторы  $1, t$  ортогональны относительно скалярного произведения, заданного формулой  $(f \mid g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$  (частный случай формулы (2)). Найти:

- а) подпространство  $\langle 1, t \rangle^\perp$ ;
- б) ортонормированный базис в  $P_3$ .

**2.** Пусть  $(V, (\cdot \mid \cdot))$  — евклидово трёхмерное векторное пространство такое, что  $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  (проверить, что эта форма положительно определена). Найти:

- а) угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{x} = [1, 1, 1]$ ,  $\mathbf{y} = [2, 2, 1]$ ;
- б) все векторы, ортогональные  $\mathbf{x}$ .

**3.** Используя процесс ортогонализации Грама—Шмидта, доказать, что любая невырожденная матрица  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  может быть записана в виде произведения  $A = BC$  ортогональной матрицы  $B$  и верхней треугольной матрицы  $C$  с  $\det B = \pm \det A$ .

**4.** Множество  $M_n(\mathbb{R})$ , рассматриваемое как  $n^2$ -мерное евклидово пространство со стандартным скалярным произведением, содержит группу  $O(n)$  ортогональных матриц, определяемых  $n(n+1)/2$  соотношениями (15) или (15') ( $O(n)$  суть ортогональная группа). Таким образом,  $O(n)$  можно рассматривать как “алгебраическое многообразие” размерности  $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 = \dim \mathfrak{o}(n)$ , где  $\mathfrak{o}(n)$  — векторное пространство кососимметрических матриц порядка  $n$ . Естественно ожидать какого-то хорошего соответствия между множествами  $O(n)$  и  $\mathfrak{o}(n)$ . Примером такого соответствия служит преобразование Кэли

$$K = (E - A)^{-1}(E + A), \quad A = (E - K)^{-1}(E + K). \quad (18)$$

Требуется доказать, что если  $A \in O(n)$ ,  $\det(E - A) \neq 0$ , то  $K \in \mathfrak{o}(n)$ . Верно и обратное: каждой матрице  $K \in \mathfrak{o}(n)$  отвечает  $A \in O(n)$  с  $1 \notin \text{Spec}(A)$ . При указанном соответствии из “алгебраического многообразия”  $O(n)$  требуется выбросить “гиперповерхность”, определяемую уравнением  $\det(E - A) = 0$ .

Можно предложить другое преобразование Кэли

$$K = (E + A)^{-1}(E - A), \quad A = (E + K)^{-1}(E - K), \quad (19)$$

где из  $O(n)$  нужно удалить “гиперповерхность” с уравнением  $\det(A + E) = 0$ , или, что эквивалентно, ортогональные матрицы с  $-1 \notin \text{Spec}(A)$ .

Требуется убедиться в справедливости соответствия (19).

**5.** Проверить, что ортогональные матрицы, полученные преобразованием Кэли из кососимметричных (в соотношениях (18) и (19)), имеют определитель 1 (множество всех таких матриц обозначается символом  $SO(n)$ ).

**6.** Доказать, что характеристический многочлен  $\chi_A(t)$  ортогональной  $n \times n$ -матрицы  $A$  обладает свойством

$$t^n \chi_A(1/t) = \pm \chi_A(t).$$

**7.** Пусть  $A = [A_{(1)}, \dots, A_{(n)}]$  — произвольная матрица с попарно ортогональными строками. Доказать, что

$$|\det A| = \|A_{(1)}\| \cdot \|A_{(2)}\| \cdots \|A_{(n)}\|$$

(стандартная норма векторов в  $\mathbb{R}^n$ ).

**8.** Пусть  $X = [X_{(1)}, \dots, X_{(n)}]$  — произвольная матрица из  $M_n(\mathbb{R})$ . Доказать, что

$$|\det X| \leq \|X_{(1)}\| \cdot \|X_{(2)}\| \cdots \|X_{(n)}\|$$

(неравенство Адамара).

## § 2. Эрмитовы векторные пространства

**1. Эрмитовы формы.** Многие задачи сводятся к тем или иным вопросам о линейных операторах, действующих на комплексных векторных пространствах, и по этой причине последние заслуживают особого внимания. Многообразие метрических соотношений в евклидовых пространствах над  $\mathbb{R}$  служит естественным стимулом для введения скалярного произведения и в комплексном случае. Однако, как было отмечено в конце п. 7 из § 4 гл. 1, стандартная билинейная форма  $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  с  $x_j, y_j \in \mathbb{C}$  не может быть отправным пунктом для этой цели, поскольку длина (норма)  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{s(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$  вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  обладает “неприятным” свойством:

$$\|i\mathbf{x}\|^2 = s(i\mathbf{x}, i\mathbf{x}) = i^2 s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\|\mathbf{x}\|^2.$$

Если  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  и  $\|\mathbf{x}\| > 0$ , то  $i\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ , но  $\|i\mathbf{x}\| < 0$ . Это определение явно неприемлемо, если мы хотим пользоваться интуитивно воспринимаемым понятием длины вектора.

Замечательным аналогом евклидова векторного пространства служит эрмитово (или унитарное) пространство. Введём следующее

**Определение 1.** Говорят, что  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  есть *полупоралинейная* форма на комплексном векторном пространстве  $V$ , если:

i)  $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ , т.е.  $f$  линейна по первому аргументу при фиксированном втором;

ii)  $f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \overline{\alpha}f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{\beta}f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , где черта над  $\alpha, \beta$  означает обычную комплексную сопряжённость (полулинейность по второму аргументу при фиксированном первом).

Полупоралинейная форма  $f$  называется *эрмитовой*, если

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}. \tag{1}$$

Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис пространства  $V$ . Если  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$ , то

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i y_j, \quad f_{ij} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j),$$

— выражение значений формы  $f$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Эрмитовость формы  $f$  означает, что коэффициенты её матрицы  $F = (f_{ij})$  удовлетворяют условию  $f_{ij} = \bar{f}_{ji}$ . Другими словами,

$$F^* = F, \tag{1'}$$

где  $F^* := {}^t \bar{F}$ . Матрица  $F$ , удовлетворяющая условию (1'), также называется *эрмитовой*.

Если  $F'$  — матрица эрмитовой формы  $f$  в базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , получающемся из  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  при помощи матрицы перехода  $A$ , то

$$F' = {}^t A \cdot F \cdot \bar{A} \tag{2}$$

( $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ ; ср. с выражением (5) из § 4 гл. 1). Непосредственно проверяется, с использованием (1'), что

$$(F')^* = {}^t ({}^t \bar{A} \cdot F \cdot \bar{A}) = {}^t A \cdot {}^t F \cdot \bar{A} = {}^t A \cdot F^* \bar{A} = {}^t A \cdot F \cdot \bar{A} = F',$$

т.е., как и следовало ожидать, при замене матрицы  $F$  на  ${}^t A \cdot F \cdot \bar{A}$  свойство эрмитовости сохраняется.

Эрмитовой форме  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  отвечает, естественно, эрмитова квадратичная форма  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . Так как

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

то квадратичная эрмитова форма принимает только вещественные значения. Если при этом  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$  и  $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , то форма  $f$  называется *положительно определённой*. Записав  $f$  в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

с вещественнозначными функциями  $g, h$ , мы, используя (1), легко убеждаемся в том, что  $g$  и  $h$  — билинейные формы на  $V$ , причём  $g$  — симметричная, а  $h$  — кососимметрична форма. Наконец, положительная определённость  $f$  эквивалентна положительной определённости  $g$ .

**Определение 2.** Конечномерное векторное пространство  $V$  над полем  $\mathbb{C}$ , снабжённое положительно определённой эрмитовой формой  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , называется *эрмитовым (унитарным)* пространством. Комплексное число  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  называется *скалярным произведением* (говорят ещё: *внутренним произведением*) векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

Итак, в новых обозначениях имеем

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y} | \mathbf{x})},$$

$$(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x} | \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} | \mathbf{z}),$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{x}) \geq 0; \quad (\mathbf{x} | \mathbf{x}) = 0 \text{ лишь при } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Пример 1. Положив

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}, \quad (3)$$

мы получим, несомненно, положительно определённую эрмитову форму с единичной матрицей  $F = E$ , т.е. координатное комплексное пространство  $\mathbb{C}^n$ , снабжённое этой формой, становится эрмитовым. Если перейти от стандартного базиса в  $\mathbb{C}^n$  к любому другому при помощи матрицы перехода  $A$ , то согласно (2) мы сопоставим нашей стандартной эрмитовой форме эрмитову матрицу  $F' = {}^t A \cdot \bar{A}$ .

В вещественном случае комплексную сопряжённость можно игнорировать, так что эрмитово пространство — истинный аналог евклидова. Как и в евклидовом пространстве, длина  $\|\mathbf{v}\|$  вектора  $\mathbf{v} \in V$  определяется равенством

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v} | \mathbf{v})}.$$

**2. Метрические соотношения.** Легко проверяемое соотношение

$$2(\mathbf{u} | \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + i \|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - (1+i) \{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\}$$

показывает, что скалярное произведение выражается непосредственно в терминах длин (процесс поляризации). Из очевидных равенств

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda \mathbf{x} | \lambda \mathbf{x})} = \sqrt{|\lambda|^2 (\mathbf{x} | \mathbf{x})} = |\lambda| \sqrt{(\mathbf{x} | \mathbf{x})}$$

следует известное в евклидовом случае свойство нормы

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|. \quad (3)$$

Эта параллель распространяется на большинство других утверждений. В частности, неравенство Коши—Буняковского (его называют ещё *неравенством Шварца*) приобретает следующий вид:

$$|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad (4)$$

(равенство достигается в точности тогда, когда векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  пропорциональны).

**Доказательство.** Действительно, записывая комплексное число  $(\mathbf{x} | \mathbf{y})$  в тригонометрической форме  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = |(\mathbf{x} | \mathbf{y})| e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$ , мы видим, что при любом  $t \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$\|\mathbf{x}\|^2 t^2 + ((\mathbf{x} | \mathbf{y}) t^{-i\varphi} + (\overline{\mathbf{x} | \mathbf{y}}) e^{i\varphi}) t + \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} t + \mathbf{y} e^{i\varphi} | \mathbf{x} t + \mathbf{y} e^{i\varphi}) \geq 0.$$

Так как  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) e^{-i\varphi} = |(\mathbf{x} | \mathbf{y})| = \overline{(\mathbf{x} | \mathbf{y})} e^{i\varphi}$ , то оно переписывается в виде

$$\|\mathbf{x}\|^2 t^2 + 2|(\mathbf{x} | \mathbf{y})| t + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0.$$

Получающееся условие на дискриминант приводит к нужному неравенству. Оно превращается в строгое равенство тогда, когда  $\mathbf{x} t_0 + \mathbf{y} e^{i\varphi} = 0$  при подходящем  $t_0 \in \mathbb{R}$ , т.е. при пропорциональных  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ .  $\square$

Из неравенства (4) непосредственно вытекает неравенство треугольника

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (5)$$

и его очевидное обобщение

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|.$$

Пример 2. Пространства  $C_2(a, b)$  и  $P_n$  над  $\mathbb{C}$ , снабжённые скалярным произведением

$$(f | g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt,$$

являются, очевидно, эрмитовыми. Неравенство (5) в этих случаях принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b |f(t) \pm g(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$$

(сравнить с неравенством Минковского в примере 3 из § 1). В эрмитовом пространстве  $\mathbb{C}^n$  со стандартным скалярным произведением (3) выполнено неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i \pm y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}.$$

Неравенство (4) позволяет утверждать, что существует единственный угол  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ , для которого

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{x} | \mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Квантовомеханическое истолкование величины  $\cos^2 \varphi$  можно найти в учебном пособии [2].

**3. Ортогональность.** Как и в вещественном случае, набор векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  эрмитова пространства  $(V, (* | *))$  называется *ортонормированным* (или *ортонормальным*), если  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ . Этот набор векторов линейно независим и дополняем до ортогонализации Грама—Шмидта (см. п. 3 из § 1), сопоставляя каждому вектору  $\mathbf{u}$  вектор  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \sum_i^m (\mathbf{u} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$  и замечая, что  $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle^\perp$ . Вектор  $\mathbf{v}$  можно нормировать и продолжить процесс дальше. Кстати,

$$V = W \oplus W^\perp, \quad W^{\perp\perp} = W, \tag{6}$$

для любого подпространства  $W \subset V$ .

В качестве небольшого упражнения предлагается доказать следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортогональный базис эрмитова (или евклидова) векторного пространства  $(V, (* | *))$ .

Тогда:

- i)  $\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$  для всякого  $\mathbf{x} \in V$ ;
- ii)  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_i (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i | \mathbf{y})$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  (равенство Парсеваля);
- iii)  $\mathbf{x} \in V \implies \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i |(\mathbf{x} | \mathbf{e}_i)|^2$ .

Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис эрмитова пространства  $V$ . В теореме 1 использовано следующее соображение. Для любого вектора  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$  ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу имеем

$$(\mathbf{x} | \mathbf{e}_j) = \left( \sum_i x_i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \right) = \sum_i x_i (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = x_j.$$

Таким образом, мы пришли к линейной форме  $f_j = (* | \mathbf{e}_j) : V \rightarrow \mathbb{C}$ , сопоставляющей каждому вектору  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$  его  $j$ -ю координату  $x_j$  относительно  $(\mathbf{e}_i)$ . Если теперь  $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$  — ещё один вектор пространства  $V$ , то

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n},$$

т.е. вычисление скалярного произведения векторов эрмитова пространства  $V$  при выборе в нём ортонормированного базиса происходит по формуле (3) для стандартного скалярного произведения в  $\mathbb{C}^n$ . Тем самым определён изоморфизм  $\mathbb{C}^n \cong V$  эрмитовых пространств:  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_i x_i \mathbf{e}_i$  — биективное отображение, сохраняющее скалярное произведение. В отличие от евклидова векторного пространства эрмитово пространство не отождествляется со своим двойственным пространством. Вместе с линейными функциями нужно рассматривать и полулинейные функции в смысле следующего определения.

**Определение 3.** Пусть  $f$  — обычная линейная форма (функция) на комплексном векторном пространстве  $V$ . Сопряжённой к  $f$  линейной формой (или полулинейной функцией) на  $V$  называется функция  $\bar{f} : V \rightarrow \mathbb{C}$ , удовлетворяющая условиям

$$\bar{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \bar{f}(\mathbf{x}) + \bar{f}(\mathbf{y}), \quad \bar{f}(\lambda \mathbf{x}) = \bar{\lambda} \bar{f}(\mathbf{x}).$$

Если  $(V, (* | *))$  — эрмитово пространство, то  $f$  представляется в виде  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} | \mathbf{a})$  для некоторого однозначно определённого вектора  $\mathbf{a}$  (ср. с теоремой 9 из § 1), но соответствие между  $f$  и  $\mathbf{a}$  не является линейным. Если теперь  $\bar{f}$  — полулинейная функция, то, выбрав какой-то ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_i)$  в  $V$  и положив  $\mathbf{a} = \sum_i \bar{f}(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i$ , будем иметь для любого вектора  $\mathbf{x} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j$  соотношение

$$(\mathbf{a} | \mathbf{x}) = \sum_i \left( \mathbf{e}_i | \sum_j x_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_i \bar{f}(\mathbf{e}_i) \overline{x_i} = \bar{f}(\mathbf{x}).$$

Единственность вектора  $\mathbf{a}$  вытекает, очевидно, из положительной определённости формы  $(* | *)$ . Свойство эрмитовости  $(* | *)$  позволяет записать

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} | \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x} | \mathbf{a})} = \overline{f(\mathbf{x})}.$$

**4. Унитарные матрицы.** В евклидовом векторном пространстве переход от одного ортонормированного базиса к другому реализуется при помощи ортогональной матрицы (теорема 10 из § 1). Аналогичное утверждение имеет место в случае эрмитовых пространств. Пусть  $(\mathbf{e}_i), (\mathbf{e}'_j)$  — ортонормированные базисы эрмитова векторного пространства  $(V, (*|*))$ , связанные матрицей перехода  $A = (a_{ij})$ :  $\mathbf{e}'_j = \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i$ . Тогда

$$\delta_{jk} = (\mathbf{e}'_j | \mathbf{e}'_k) = \sum_{i,s} a_{ij} \overline{a_{sk}} (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_s) = \sum_i a_{ij} a_{ik}.$$

Другими словами,

$$A \cdot A^* = E = A^* \cdot A, \quad (7)$$

где  $A^* := {}^t \bar{A}$  — матрица, *эрмитово сопряжённая* с  $A$  (напомним, что  $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$ ).

**Определение 4.** Матрица  $A$ , удовлетворяющая условию (7), называется *унитарной*.

Понятно, что в вещественном случае унитарная матрица является ортогональной. Далее,  $\det \bar{A} = \det A$ , поэтому  $\det A^* = \det \bar{A} = \det A$  и, принимая во внимание (7), получаем, что  $|\det A| = 1$ , т.е.  $\det A = e^{i\varphi}$  для любой унитарной матрицы  $A$ . В частности, унитарные матрицы невырожденны.

Из определения  $A^*$  непосредственно вытекает, что

$$(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*. \quad (8)$$

Поэтому в случае унитарных матриц  $A, B$  мы приходим к заключению об унитарности их произведения:  $(AB)(AB)^* = A(BB^*)A^* = = AEA^* = AA^* = E$ . Далее,  $A^{-1}A = E = A \cdot A^{-1} \Rightarrow A^*(A^{-1})^* = = E = (A^{-1})^*A^* \Rightarrow A^{-1}(A^{-1})^* = E = (A^{-1})^*A^{-1}$ , т.е. вместе с  $A$  унитарной является и матрица  $A^{-1}$ . Разумеется, те же соображения относятся и к ортогональным матрицам.

Принимая во внимание общее определение группы, мы видим, что имеет место

**Теорема 2.** Справедливы следующие утверждения:

i) все унитарные матрицы порядка  $n$  являются элементами (унитарной) группы  $U(n)$ ;

ii) унитарная группа  $U(n)$  содержит в качестве подгруппы (ортогональную) группу  $O(n)$ , состоящую из вещественных ортогональных матриц порядка  $n$ ;

iii) ортогональные (соответственно унитарные) матрицы с определителем 1 составляют специальную ортогональную группу  $SO(n)$  (соответственно специальную унитарную группу  $SU(n)$ ).

Таким образом,

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n) \subset SU(n) = U(n) \cap SL(\mathbb{C}).$$

Вообще говоря, можно было бы без особого труда определить ортогональную группу  $O(n, \mathbb{K})$  над произвольным полем  $\mathbb{K}$ , равно как и унитарную группу  $U(n, \mathbb{K})$  над полем  $\mathbb{K}$ , допускающем аналог комплексного сопряжения  $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ .

**5. Нормированные векторные пространства.** Неравенство (10) из § 1 (длина стороны треугольника не превышает суммы длин двух других его сторон) и его унитарный аналог (5) позволяют считать векторные пространства со скалярным произведением метрическими пространствами в смысле следующего общего определения.

**Определение 5.** Пусть  $E$  — множество точек и  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  — отображение, сопоставляющее любым двум точкам  $u, v \in E$  неотрицательное вещественное число  $d(u, v)$  (расстояние между  $u$  и  $v$ ) и обладающее следующими свойствами:

- i)  $d(u, v) = d(v, u)$  (симметрия);
- ii)  $d(u, v) = 0 \iff u = v$ ;
- iii)  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$  (неравенство треугольника).

Функция  $d$  с такими свойствами называется *метрикой*, а пара  $(E, d)$  — *метрическим пространством*.

**Пример 3.** В векторном пространстве  $V$  со скалярным произведением и тем самым с определённой нормой  $\|\mathbf{x}\|$  за расстояние между векторами  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  принимается  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Так, например, для  $V = C_2(a, b)$  метрикой служит

$$d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt}.$$

Но условиям i)-iii) определения 5 удовлетворяют также функции

$$d'(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|, \quad d''(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

в чём нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Наличие метрики сразу же приводит к простейшим понятиям из топологии и анализа, включая понятие предельного перехода. Подмножества

$$B(a_0, r) = \{x \in E \mid d(a_0, x) < r\},$$

$$\overline{B}(a_0, r) = \{x \in E \mid d(a_0, x) \leq r\},$$

$$S(a_0, r) = \{x \in E \mid d(a_0, x) = r\}$$

метрического пространства  $(E, d)$  называются соответственно *открытым шаром*, *замкнутым шаром*, *сферой* с центром в точке  $a_0$  и радиусом  $r$ .

Подмножество  $F \subset E$  *ограниченное*, если оно содержится в некотором шаре радиуса  $r < \infty$ .

Последовательность точек  $e_1, e_2, \dots, e_n \dots$  в  $(E, d)$  *сходится* к точке  $e \in E$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(e_n, e) = 0$ . Последовательность называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для

всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$  такое, что  $d(e_n, e_m) < \varepsilon$  при  $m, n > N$ . Метрическое пространство  $E$  называется *полным*, если любая последовательность Коши в нём сходится. Из полноты  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ , доказываемой в анализе, следует, что пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$  с любой из метрик

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2},$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x_i - y_i|), \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

полны (проверить, что  $d_1$  и  $d_2$  — метрики; для  $d$  это следует из примера 2).

Итак, пусть  $V$  — вещественное или комплексное векторное пространство с метрикой  $d$ . Особо важным является случай, когда  $d$  удовлетворяет двум дополнительным условиям:

а)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z})$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$  (инвариантность относительно сдвига);

б)  $d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (умножение на скаляр  $\lambda$  увеличивает расстояние в  $|\lambda|$  раз).

**Определение 6.** Назовём *нормой* вектора  $\mathbf{x} \in V$  относительно метрики  $d$  с условиями а), б) и будем обозначать через  $\|\mathbf{x}\|$  число  $d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ .

В пространстве со скалярным произведением  $(*, *)$  метрика  $d$  вводилась нами специальным образом (пример 3), так что старое и новое определения нормы вектора  $\mathbf{x}$  согласованы. Поэтому используется прежнее обозначение  $\|\mathbf{x}\|$ . Возвращаясь к общему случаю, мы должны убедиться, что выполнены следующие свойства нормы:

$$\|\mathbf{0}\| = 0; \quad \|\mathbf{x}\| > 0, \text{ если } \mathbf{x} \neq \mathbf{0};$$

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \text{ для всех } \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in V;$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

Первые два свойства непосредственно вытекают из аксиом метрики и условий а), б); третье проверяется так:  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{0}, -\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

**Определение 7.** Векторное пространство  $V$ , снабжённое функцией нормы  $\|*\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющей перечисленным трём условиям, называется *нормированным*. Полное нормированное векторное пространство называется *банаховым*.

Пространства  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{C}^n$  с любыми нормами, отвечающими рассмотренным выше метрикам, банаховы. Заметим ещё, что по норме восстанавливается метрика: положив  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , легко проверить аксиомы метрики. Для неё  $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{x}\|$ .

Понятие сходимости последовательности в метрическом пространстве, данное нами выше, специализируется на случай нормированных векторных пространств и называется *сходимостью по норме*.

Справедлива несложная

Теорема 3. Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  со скалярным произведением.

Тогда эквивалентны следующие два понятия сходимости последовательности векторов  $\mathbf{x}_k \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  вектору  $\mathbf{x} \in V$ :

- i)  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- ii)  $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) | \mathbf{y} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для каждого фиксированного  $\mathbf{y} \in V$ .

Доказательство. i)  $\Rightarrow$  ii), поскольку в силу неравенства (4) имеем

$$|(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) | \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \rightarrow 0.$$

ii)  $\Rightarrow$  i). Чтобы увидеть это, возьмём в  $V$  ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Если верно ii), то  $(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) | \mathbf{e}_i \rightarrow 0$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому, используя равенство

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}) | \mathbf{e}_i|^2$$

(теорема 1, iii)), приходим к выводу, что и  $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ .  $\square$

Линейная структура позволяет определить понятие сходимости ряда, более сильное, чем сходимость по норме его частичных сумм. Именно, ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{x}_i$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_i\|$ .

### УПРАЖНЕНИЯ

1.  $\mathbb{CO}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t A \cdot A = E\}$  — определение комплексной ортогональной группы. Понятно, что  $O(n) \subset \mathbb{CO}(n)$  и  $SO(n) \subset S\mathbb{CO}(n)$  (подгруппы в  $O(n)$  и  $\mathbb{CO}(n)$  элементов с определителем 1). Можно ли по аналогии с теоремой 2 говорить о включениях  $\mathbb{CO}(n) \subset U(n)$  и  $S\mathbb{CO}(n) \subset U(n)$ ?

2. Показать, что метрики  $d_1$  и  $d_2$  из п. 5 не индуцируются каким-либо скалярным произведением на  $\mathbb{R}^n$  (аналогично на  $\mathbb{C}^n$ ).

3. Используя функциональные средства, проверить, что формулой

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

для любого  $p \geq 1$  на пространстве  $\mathbb{R}^n$  задаётся норма (так называемая  $l_p$ -норма). Проверить, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Тогда формально можно считать  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$  (очевидно, что  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$ ,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ ).

На векторном пространстве  $C(0, 1)$  непрерывных функций  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  существуют аналоги указанных норм:

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

Более общо:  $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$  (это упражнение носит необязательный характер).

### § 3. Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением

**1. Связь между линейными операторами и  $\theta$ -линейными формами.** Под  $\theta$ -линейной формой на векторном пространстве  $V$  понимается билинейная форма ( $\theta = 2$ ), когда  $V$  — вещественное векторное пространство, и полуторалинейная форма ( $\theta = 3/2$ ), когда  $V$  — комплексное векторное пространство. Будем считать теперь  $V$  евклидовым (соответственно эрмитовым) пространством над  $\mathbb{R}$  (соответственно над  $\mathbb{C}$ ) со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$ . Пусть, далее,  $\mathcal{A}$  — произвольный линейный оператор на  $V$ . В п. 6 из § 3 гл. 2 было введено понятие линейного оператора  $\mathcal{A}^*$ , сопряжённого к  $\mathcal{A}$  и действующего на  $V^*$ . В случае пространства со скалярным произведением имеется далёкая аналогия между линейными операторами и  $\theta$ -линейными формами, что отражает наличие (по крайней мере в вещественном случае) естественного изоморфизма между  $V$  и  $V^*$  и что найдёт отражение в действии  $\mathcal{A}^*$  непосредственно на  $V$ . Остановимся на этом более подробно. Рассмотрим отображение

$$f_{\mathcal{A}} : V \times V \rightarrow \mathfrak{K} \quad (\mathfrak{K} = \mathbb{R} \text{ или } \mathfrak{K} = \mathbb{C}),$$

определенное по правилу

$$f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}). \tag{1}$$

Из свойств скалярного произведения непосредственно вытекает, что  $f_{\mathcal{A}}$  —  $\theta$ -линейная форма на  $V$ , т.е. билинейная форма в вещественном случае и полуторалинейная — в комплексном. Аналогичную проверку мы не раз проводили.

Соответствие  $\mathcal{A} \mapsto f_{\mathcal{A}}$ , задающее отображение  $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}_\theta(V, \mathfrak{K})$ , инъектививно. Действительно, если  $(\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}) = f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{B}\mathbf{x} | \mathbf{y})$ , то  $((\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{B}\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}) - (\mathcal{B}\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in V$ , откуда  $(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V$ , или  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . Отсюда, а также из равенства  $\dim \mathcal{L}(V) = \dim \mathcal{L}_\theta(V, \mathfrak{K})$  вытекает биективность нашего отображения.

Это, впрочем, можно усмотреть и из явной конструкции по заданной  $\theta$ -линейной форме  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  линейного оператора  $\mathcal{A}_f$ , для которого

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}_f \mathbf{x} | \mathbf{y}). \tag{2}$$

Вот как это нужно делать. Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис в  $V$ , а  $F$  — матрица  $\theta$ -линейной формы  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в этом базисе. Как всегда, обозначим через  $X = [x_1, \dots, x_n]$  столбец координат вектора  $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ . Ввиду ортонормированности базиса скалярное произведение вектора  $\mathbf{x}$  и вектора  $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$  записывается в виде произведения строки  ${}^t X$  и столбца  $\bar{Y}$ :  $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = {}^t X \cdot \bar{Y}$ .

Возьмём в качестве  $\mathcal{A}_f$  линейный оператор с матрицей  ${}^t F$ . Ему соответствует линейное преобразование  $X \mapsto {}^t F X$  столбцов координат в базисе  $(\mathbf{e}_i)$ . Определяющее соотношение (2) теперь является просто интерпретацией введённых обозначений:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X F \bar{Y} = {}^t ({}^t F X) \bar{Y} = (\mathcal{A}_f \mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

Но мы могли бы взять некий линейный оператор  $\mathcal{A}_f^*$  с матрицей  $\bar{F}$ . Тогда

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t X (\bar{F} \bar{Y}) = (\mathbf{x} | \mathcal{A}_f^* \mathbf{y}).$$

Если положить  $A = {}^t F$ ,  $A^* = {}^t \bar{A} = \bar{F}$ , то  $A$  будет матрицей нашего оператора  $\mathcal{A}_f$ , а  $A^* = {}^t \bar{A}$  — матрицей оператора  $\mathcal{A}_f^*$ .

Всё сказанное позволяет утверждать, что справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — векторное пространство со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$ . Тогда любая из формул

$$f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}), \quad f_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathcal{A}^*\mathbf{y}) \quad (3)$$

устанавливает биективное соответствие между  $\theta$ -линейными формами и линейными операторами на  $V$ . Взятые вместе формулы (3) однозначно определяют линейный оператор  $\mathcal{A}^* : V \rightarrow V$ , сопряжённый к  $\mathcal{A}$ .

В ортонормированном базисе матрица оператора  $\mathcal{A}^*$  получается из матрицы оператора  $\mathcal{A}$  путём транспонирования и комплексного сопряжения (в случае  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

Определение

$$(\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathcal{A}^*\mathbf{y}) \quad (4)$$

при  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  полностью согласуется с определением сопряжённого оператора в п. 6 из § 3 гл. 2, поскольку каждая линейная функция на  $V$  имеет вид  $\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x} | \mathbf{y})$  при некотором фиксированном  $\mathbf{x}$ . Вспомним в этой связи выражение  $e^i = (\mathbf{e}_i | *)$  для векторов дуального базиса (см. (13) из § 1).

Стоит отметить, что в векторном пространстве, не снабжённом евклидовой или эрмитовой структурой, сопоставление  $\theta$ -линейной форме  $f$  с матрицей  $F$  в некотором базисе линейного оператора с матрицей  $A = {}^t F$  носило бы случайный характер. Действительно, при переходе к новому базису при помощи матрицы перехода  $B$  матрицей  $\theta$ -линейной формы становится  $F' = {}^t B F \bar{B}$ , так что  $A' = {}^t F' = B^* {}^t F B$ . Но в то же время по теореме 3 из § 2 гл. 2 мы

должны иметь  $A' = B^{-1}AB = B^{-1}tFB$ . Между двумя выражениями для  $A'$  нет ничего общего. Однако в случае эрмитова (евклидова) пространства матрица  $B$  должна сохранять ортонормированность базисов, что влечёт её унитарность (соответственно ортогональность). Для унитарной матрицы  $B^* = B^{-1}$ , так что имеется полная согласованность.

Перепишем ещё раз известные свойства отображения  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*, \quad (\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*, \quad \mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}. \quad (5)$$

Небольшое отличие от формул (15) из § 3 гл. 2 — наличие знака комплексного сопряжения над  $\alpha$ , обусловленное полуторалинейностью формы  $(*|*)$  и типом соответствия  $\Phi_v : f \mapsto (v|*)$  (см. п. 4 из § 1).

**2. Типы линейных операторов.** Все линейные операторы, действующие на векторном пространстве  $V$  со скалярным произведением  $(*|*)$ , разбиваются на классы в зависимости от их поведения по отношению к операции  $*$ , введённой в п. 1. Выделим наиболее важные классы.

**Определение 1.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется *эрмитовым* (или *самосопряжённым*), если  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ . В случае евклидова пространства ( $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$ ) оператор  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$  называют ещё *симметричным*.

Самосопряжённость оператора  $\mathcal{A}$  эквивалентна условию эрмитовости  $\theta$ -линейной формы  $(Ax|y)$ , как это вытекает из теоремы 1. Действительно, условие самосопряжённости записывается в виде

$$(Ax|y) = (x|\mathcal{A}y),$$

а условие эрмитовости формы  $f_{\mathcal{A}}$  — в виде

$$(Ax|y) = f_{\mathcal{A}}(x,y) = \overline{f_{\mathcal{A}}(y,x)} = \overline{(Ay|x)}.$$

Так как  $(*|*)$  — эрмитова форма, то  $\overline{(Ay|x)} = (x|\mathcal{A}y)$ . Это и устанавливает эквивалентность упомянутых условий.

В матричной форме, если использовать ортонормированный базис пространства  $V$ , условие самосопряжённости (эрмитовости) оператора  $\mathcal{A}$  выражается равенством  $t\bar{A} - A = 0$ . Раньше именно такие матрицы мы называли эрмитовыми, а в вещественном случае — симметричными.

Каждая вещественная матрица  $A$  является суммой симметричной и кососимметричной (см. гл. 1, § 4, п. 4). Чтобы иметь аналог этого свойства в комплексном случае, введём

**Определение 2.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется *косоэрмитовым* (или *кососимметричным* при  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$ ), если  $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ .

Так как  $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$  для любого  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , то оператор  $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$  эрмитов, а  $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$  косоэрмитов. Аналогично, эрмитовость  $\mathcal{A}$  эквивалентна косоэрмитовости оператора  $i\mathcal{A}$ . Поэтому справедлива

**Теорема 2.** Каждый линейный оператор  $\mathcal{Z}$  на эрмитовом пространстве записывается в виде

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

где  $\mathcal{A}$  — эрмитов, а  $\mathcal{B}$  — косоэрмитов оператор. Кроме того,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}, \quad (6)$$

где  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  — эрмитовы линейные операторы.

**Доказательство.** Положить  $\mathcal{A} = (\mathcal{Z} + \mathcal{Z}^*)/2$ ,  $\mathcal{B} = (\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^*)/2$ ,  $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{Y} = -i\mathcal{B}$ . Далее — непосредственная проверка при помощи формул (5).  $\square$

Запись (6), очевидно, является прямым обобщением записи комплексного числа  $z$  в виде  $z = x + iy$ , т.е. эрмитовы операторы — далёкие аналоги вещественных чисел. В свою очередь косоэрмитов оператор — прямой “потомок” чисто мнимого числа  $z = iy$ , для которого  $\bar{z} = -z$ . Но если произведение двух вещественных чисел всегда есть вещественное число, то произведение двух эрмитовых операторов не обязательно эрмитово.

Имеет место

**Теорема 3.** Произведение  $\mathcal{AB}$  эрмитовых операторов является эрмитовым тогда и только тогда, когда  $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ .

**Доказательство.** Используя снова формулы (5), получаем

$$\mathcal{AB} = \mathcal{BA} \iff (\mathcal{AB})^* = (\mathcal{BA})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{AB}. \quad \square$$

Многочисленные приложения в физике и математике вызывают потребность в рассмотрении множества всех эрмитовых или косоэрмитовых операторов как алгебр в смысле определения 1 из § 2 гл. 2.

**Пример 1.** Как видно из теоремы 6, эрмитовы матрицы или операторы, вообще говоря, не замкнуты относительно ассоциативного произведения. В попытке найти алгебраические рамки для квантовой механики физик П. Йордан ввёл в 1930-х годах алгебры над  $\mathbb{R}$ , носящие теперь его имя. В основу положено йорданово произведение

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{AB} + \mathcal{BA}),$$

удовлетворяющее закону коммутативности (очевидно) и тождеству Йордана  $(\mathcal{A}^2 \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}^2 \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$  (проверить!). К настоящему времени развита содержательная теория йордановых алгебр, не обязательно конечномерных.

**Пример 2.** Косоэрмитовы операторы образуют над  $\mathbb{R}$  алгебру Ли (см. пример 6 из § 2 гл. 2) относительно обычной операции коммутирования. Именно, если  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — косоэрмитовы операторы, то косоэрмитовым будет также их коммутатор  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{AB} - \mathcal{BA}$ .

Предположим, что  $(\mathcal{Ax} | \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ . Тогда, в частности,  $(\mathcal{Ax} | \mathcal{Ax}) = 0$ , а это может быть только при  $\mathcal{Ax} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ , т.е.  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ . Этот критерий тривиальности  $\mathcal{A}$  можно существенно усилить.

**Теорема 4.** Пусть  $(\mathcal{Ax} | \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ , и пусть выполнено одно из двух условий:

1)  $V$  — эрмитово пространство;

2)  $V$  — евклидово пространство и  $\mathcal{A}$  — симметричный оператор.

Тогда  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .

Доказательство. 1) Из двух легко проверяемых поляризационных тождеств

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{x}) = (\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})|\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}) - (\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{y}), \quad (7)$$

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) - (\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{x}) = -i(\mathcal{A}(i\mathbf{x} + \mathbf{y})|i\mathbf{x} + \mathbf{y}) + i(\mathcal{A}(i\mathbf{x})|i\mathbf{x}) + i(\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{y}), \quad (8)$$

правые части которых по предположению равны нулю, мы приходим к системе двух линейных однородных уравнений

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{x}) = 0, \quad (\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) - (\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{x}) = 0.$$

Отсюда следует, что  $(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , а это, как мы уже знаем, эквивалентно равенству  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .

2) Поляризационное тождество (7), выполняющееся в любом случае, и условие симметричности

$$(\mathcal{A}\mathbf{y}|\mathbf{x}) = (\mathbf{y}|\mathcal{A}^*\mathbf{x}) = (\mathbf{y}|\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

дают в итоге то же самое тождество  $(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ , из которого следует, что  $\mathcal{A} = \mathcal{O}$ .  $\square$

**Замечание 1.** Симметричность оператора  $\mathcal{A}$  в условии 2) теоремы 4 существенна. Например, для кососимметричного оператора на евклидовом пространстве  $V$  выполняется тождество  $(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V$ , но  $\mathcal{A}$  не обязательно нулевой оператор.

**Определение 3.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  на векторном пространстве со скалярным произведением называется *унитарным* (в евклидовом случае — *ортогональным*), если  $\mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^*$ .

При  $n = 1$  имеем  $z \cdot \bar{z} = 1$ , т.е. унитарные операторы аналогичны комплексным числам, по модулю равным единице. В матричной форме (по отношению к ортонормированному базису) условие унитарности выражается равенством (7) из § 2. Именно такие матрицы мы и называли унитарными (в вещественном случае — ортогональными). Они возникли естественным образом как матрицы перехода от одного ортонормированного базиса к другому. Этому факту отвечает более содержательная геометрическая интерпретация унитарных операторов.

**Определение 4.** Линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , сохраняющий расстояние (метрику), т.е. такой, что

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

называется *изометрией*.

Так как  $\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , то, очевидно,  $\mathcal{A}$  — изометрия на  $V$

в точности тогда, когда  $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$  для всех  $\mathbf{x} \in V$ . Далее,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| &\iff (\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \iff \\ &\iff (\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \iff ((\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E})\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

для любого вектора  $\mathbf{x} \in V$ . Оператор  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E}$  самосопряжён, поэтому согласно теореме 4 как в эрмитовом, так и в евклидовом случае из (9) вытекает тождество  $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$ , т.е. изометричный оператор  $\mathcal{A}$  должен быть унитарным.

С другой стороны, всякий унитарный оператор изометричен:

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathcal{E}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x}).$$

Следовательно, верна

**Теорема 5.** Унитарные линейные операторы на векторном пространстве  $V$  с метрикой, и только они, являются изометриями на  $V$ .

Унитарные, а стало быть, и изометричные операторы на  $V$  образуют группу — *унитарную*  $U(n)$  при  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  и *ортогональную*  $O(n)$  при  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . На языке матриц мы с этим фактом уже знакомы (теорема 2 из § 2). Положение здесь такое же, как с группой  $GL(n, \mathbb{K})$ : можно говорить о группе матриц, а можно говорить о группе  $\text{Aut}(V)$  автоморфизмов пространства  $V$ . Изометрии — это автоморфизмы, сохраняющие метрику.

**3. Канонический вид эрмитовых операторов.** Существование собственного базиса для любого эрмитова оператора, на первый взгляд, не очевидное свойство. В самом деле, матрицы  $A$ ,  $A'$  данного симметричного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  (при  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) в разных ортонормированных базисах  $(\mathbf{e}_i)$ ,  $(\mathbf{e}'_i)$  связаны соотношением  $A' = B^{-1}AB$ , где  $B$  — ортогональная матрица. Мы знаем, что симметричную вещественную матрицу можно привести к диагональному виду, но за счёт произвольного выбора невырожденной матрицы  $B$ . Как оказывается, свойством самосопряжённости  $\mathcal{A}$  можно распорядиться более “экономно”.

**Лемма 1.** Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — эрмитов оператор,  $\lambda$  — его собственное значение, отвечающее собственному вектору  $\mathbf{e} \in V$ . По определению

$$\lambda(\mathbf{e}|\mathbf{e}) = (\lambda\mathbf{e}|\mathbf{e}) = (\mathcal{A}\mathbf{e}|\mathbf{e}) = (\mathbf{e}|\mathcal{A}^*\mathbf{e}) = (\mathbf{e}|\mathcal{A}\mathbf{e}) = (\mathbf{e}|\lambda\mathbf{e}) = \bar{\lambda}(\mathbf{e}|\mathbf{e}).$$

Так как  $(\mathbf{e}|\mathbf{e}) \neq 0$ , то  $\bar{\lambda} = \lambda$ .  $\square$

В случае симметричного (т.е. вещественного самосопряжённого) оператора утверждение леммы 1 пусто, ибо всякое его собственное значение по определению принадлежит  $\mathbb{R}$ . Напротив, следующая лемма очевидна в комплексном случае.

**Лемма 2.** У каждого симметричного линейного оператора  $\mathcal{A}$  существует собственный вектор.

**Доказательство.** Как и всякий вещественный оператор,  $\mathcal{A}$  обладает одномерным или двумерным собственным подпространством (теорема 7 из § 3 гл. 2). Существование одномерного инвариантного подпространства совпадает с утверждением леммы. Рассмотрим случай, когда  $L$  — двумерное инвариантное подпространство. Оператор  $\mathcal{A}$  индуцирует на  $L$  симметричный линейный оператор  $\mathcal{A}_L$ , поскольку условие симметричности  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathbf{y})$ , будучи ограниченным на  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ , продолжает оставаться справедливым:  $\mathcal{A}\mathbf{x} \in L, \mathcal{A}\mathbf{y} \in L$ .

Выберем в  $L$  ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . Матрицей оператора  $\mathcal{A}_L$  в этом базисе будет симметричная  $2 \times 2$ -матрица

$$\mathcal{A}_L = \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix}$$

с характеристическим многочленом

$$\chi(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -b & t-d \end{vmatrix} = t^2 - (a+d)t + (ad - b^2).$$

Дискриминант этого многочлена

$$D_\chi = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0,$$

так что  $\chi(t)$  имеет вещественный корень  $\lambda$ , а оператор  $\mathcal{A}$  — собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ .  $\square$

Дальнейшие рассуждения ведутся одновременно для  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  и  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\mathcal{A}$  — самосопряжённый линейный оператор на векторном пространстве  $V$  со скалярным произведением  $(\cdot|\cdot)$ ,  $L$  — подпространство, инвариантное относительно  $\mathcal{A}$ . Тогда ортогональное дополнение  $L^\perp$  к  $L$  также инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .

**Доказательство.** В самом деле, если  $\mathbf{x} \in L, \mathbf{y} \in L^\perp$ , то  $\mathcal{A}\mathbf{x} \in L$  и  $(\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$ . Условие самосопряжённости  $\mathcal{A}$  даёт также соотношение  $(\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathbf{y}) = 0$ . Стало быть, вектор  $\mathcal{A}\mathbf{y}$  ортогонален любому вектору  $\mathbf{x} \in L$ , т.е.  $\mathcal{A}L^\perp \subseteq L^\perp$ .  $\square$

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

**Теорема 6.** Существует ортонормированный базис пространства  $V$  со скалярным произведением, в котором матрица самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}$  диагональна, причём  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  вещественный.

**Доказательство.** По леммам 1 и 2 у линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеется собственный вектор  $\mathbf{e}_1$  с собственным значением  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ . Без ограничения общности считаем  $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ . Ортогональное дополнение  $V'$  к одномерному подпространству  $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$  имеет размерность

$\dim V = 1$  и по лемме 3 инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ . Рассматривая ограничение  $\mathcal{A}$  на  $V'$  и повторяя все рассуждения, находим собственный вектор  $\mathbf{e}_2: \mathcal{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2, \|\mathbf{e}_2\| = 1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Линейная оболочка  $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$  инвариантна относительно  $\mathcal{A}$ , поэтому инвариантно ортогональное к нему дополнение размерности  $\dim V - 2$  и т.д. Рассуждая по индукции относительно  $\dim V$  или просто повторяя нужное число раз описанную процедуру, мы найдём требуемые  $n = \dim V$  взаимно ортогональных нормированных векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ .  $\square$

**Замечание 2.** Характеристическое уравнение произвольной симметричной матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$  имеет по доказанному только вещественные корни. К изучению их взаимного расположения применимы, следовательно, теоремы Декарта, Бюдана—Фурье, Штурма из [ВА I]. Геометрическая и алгебраическая кратности каждого корня  $\lambda$  уравнения  $\chi_A(t) = 0$  совпадают, как это прямо вытекает из теоремы 6 и теоремы 6 из § 3 гл. 2.

**Замечание 3.** Согласно теореме 6 для каждого самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  имеется  $n = \dim V$  попарно ортогональных собственных направлений. Действие оператора  $\mathcal{A}$  сводится к растяжению пространства по  $k$ -му направлению в  $|\lambda_k|$  раз, где  $\lambda_k$  — соответствующее собственное значение, и, возможно, при  $\lambda_k < 0$  к отражению относительно плоскости, ортогональной к  $k$ -му направлению.

**4. Приведение квадратичной формы к главным осям.** Мы знаем (см. п. 1), что всякой эрмитовой форме  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  на векторном пространстве  $V$  со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$  соответствует линейный самосопряжённый оператор  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_f$ , определяемый условием

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

По теореме 6 существует ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ , состоящий из собственных векторов оператора  $\mathcal{A}: \mathcal{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ . Если записать векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  в этой координатной системе:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \dots + y_n\mathbf{e}_n,$$

то получим

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)x_i\overline{y_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \overline{y_i},$$

поскольку  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathcal{A}\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = (\lambda_i | \mathbf{e}_j) = (\lambda_i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ . Полагая  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , мы приходим к следующему утверждению.

**Теорема 7** (приведение к главным осям). Для всякой квадратичной эрмитовой формы  $q(\mathbf{x})$  на  $n$ -мерном векторном пространстве со скалярным произведением существует такой ортонор-

мированный базис, в котором  $q(\mathbf{x})$  принимает вид

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2. \quad (9)$$

**Пример 3.** При  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  и  $n=2$  квадратичная форма  $q$  определяет центральное коническое сечение, состоящее из тех векторов  $\mathbf{x}$ , для которых  $q(\mathbf{x}) = 1$ . Используя ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , в котором  $q(\mathbf{x})$  принимает вид (9), имеем  $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ . Векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  определяют направления главных осей эллипса ( $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ) или гиперболы ( $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ), а через  $\lambda_1, \lambda_2$  выражаются длины полуосей.

Теоремы 6 и 7 на матричном языке звучат одинаково.

*Для любой эрмитовой (или вещественной симметричной) матрицы  $A$  существует унитарная (соответственно ортогональная) матрица  $B$  такая, что матрица  $B^{-1}AB$  диагональна. По диагонали стоят собственные значения матрицы  $A$ , каждое со своей кратностью.*

**Практические рекомендации.** Матричная интерпретация геометрических фактов подсказывает возможный порядок действий для приведения квадратичной формы

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

(ограничившись вещественным случаем) к каноническому виду. Именно, примем  $x_1, \dots, x_n$  за координаты вектора  $\mathbf{x}$  в евклидовом пространстве  $V$  со скалярным произведением

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

так что  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$  — ортонормированный базис в  $V$ . Вычислим характеристический многочлен  $\chi_A(t) = \det(tE - A)$  с  $A = (a_{ij})$  и найдём его корни (наиболее трудная часть процесса). Для каждого корня  $\lambda_i$  решим линейную однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n &= 0. \end{aligned}$$

Пространство решений этой системы имеет размерность, равную алгебраической кратности корня  $\lambda_i$  (следствие симметричности матрицы  $A$ ). Применяя к фундаментальной системе решений процесс ортогонализации Грама—Шмидта, а затем объединяя системы,

соответствующие различным  $\lambda_i$ , получим ортонормированный базис пространства  $V$

$$\mathbf{e}'_j = b_{1j}\mathbf{e}_1 + b_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + b_{nj}\mathbf{e}_n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

В этом месте мы опираемся по существу на известное свойство симметричного (более общо: самосопряженного) оператора  $\mathcal{A}$  с матрицей  $A = (a_{ij})$  в ортонормированном базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ : собственные векторы  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , отвечающие различным собственным значениям  $\lambda, \mu$ , ортогональны друг другу. В самом деле,  $(\mathcal{A}\mathbf{u} | \mathbf{v}) = (\mathbf{u} | \mathcal{A}\mathbf{v}) \Rightarrow (\lambda\mathbf{u} | \mathbf{v}) = (\mathbf{u} | \mu\mathbf{v}) \Rightarrow (\lambda - \mu)(\mathbf{u} | \mathbf{v}) \Rightarrow (\mathbf{u} | \mathbf{v}) = 0$  (вещественность  $\lambda, \mu$  существенна).

Матрица  $(b_{ij})$ , связывающая две ортонормированные системы, будет ортогональной (у нас  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), поэтому новые координаты  $x'_1, \dots, x'_n$  вектора  $\mathbf{x}$ , для которых

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2,$$

выражаются через старые координаты по формулам, выписанным в конце § 1.

**5. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду.** Пример форм  $q(\mathbf{x}) = |x_1|^2 - |x_2|^2$ ,  $r(\mathbf{x}) = |x_1| \cdot |x_2|$  показывает, что не всегда можно в векторном пространстве выбрать такой базис, чтобы две квадратичные формы одновременно приняли канонический вид. Тем не менее в одном практически важном случае существование указанного базиса гарантировано.

**Теорема 8.** Пусть на векторном пространстве  $V$  размерности  $n$  над  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  заданы две эрмитовы квадратичные формы (т.е. квадратичные формы с вещественными значениями)  $q(\mathbf{x})$  и  $r(\mathbf{x})$ , причём форма  $r(\mathbf{x})$  положительно определена.

Тогда в  $V$  существует базис, в котором обе формы записываются в каноническом виде.

**Доказательство.** Пусть  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — эрмитова  $\theta$ -линейная форма, отвечающая квадратичной форме  $r(\mathbf{x})$ . Определим на  $V$  скалярное произведение, полагая

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) := g(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Положительная определённость формы  $r(\mathbf{x})$  позволяет это сделать. Согласно теореме 7 в  $V$  с указанной эрмитовой метрикой найдётся ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , в котором  $q(\mathbf{x})$  принимает канонический вид (9). В свою очередь в том же базисе скалярный квадрат вычисляется по формуле

$$(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2.$$

Итак, в базисе  $(\mathbf{e}_i)$  обе квадратичные формы приняли канонический вид.  $\square$

**6. Канонический вид изометрий.** Согласно теореме 5 изометрии на  $V$  — это в точности унитарные операторы (ортогональные операторы в случае  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Мы рассмотрим по отдельности комплексный и вещественный случаи, но вначале докажем некоторые общие факты.

**Лемма 4.** *Собственные значения унитарного (ортогонального) оператора по модулю равны 1 (соответственно равны  $\pm 1$ ).*

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — унитарный (в частности, ортогональный) оператор и  $\mathbf{e} \in V$  — собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ . Тогда

$$(\mathcal{A}\mathbf{e} | \mathcal{A}\mathbf{e}) = (\lambda\mathbf{e} | \lambda\mathbf{e}) = \lambda\bar{\lambda}.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}\mathbf{e} | \mathcal{A}\mathbf{e}) = (\mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}\mathbf{e} | \mathbf{e}) = (\mathcal{E}\mathbf{e} | \mathbf{e}) = (\mathbf{e} | \mathbf{e}).$$

Поэтому  $\lambda\bar{\lambda} = 1$ , т.е.  $|\lambda| = 1$ . Понятно, что в вещественном случае (ортогональных операторов) имеются лишь две возможности  $\lambda = \pm 1$ .  $\square$

**Лемма 5.** *Пусть  $U \subset V$  — инвариантное подпространство унитарного (ортогонального) оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ . Тогда ортогональное дополнение  $U^\perp$  к  $U$  в  $V$  также инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ .*

**Доказательство.** По определению

$$U^\perp = \{ \mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{u} | \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in U \}.$$

Ограничение  $\mathcal{A}_U$  оператора  $\mathcal{A}$  на  $U$  является, очевидно, унитарным оператором (изометрией на  $U$ ). Так как  $\det \mathcal{A}_U \neq 0$ , то вектор  $\mathbf{u}$  можно записать в виде  $\mathbf{u} = \mathcal{A}\mathbf{u}'$  с  $\mathbf{u}' \in U$ . Имеем

$$(\mathbf{u} | \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{u}' | \mathcal{A}\mathbf{v}) = (\mathbf{u}' | \mathbf{v}) = 0.$$

Другими словами,  $\mathcal{A}\mathbf{v} \in U^\perp$  вместе с  $\mathbf{v} \in U^\perp$ .  $\square$

**А) Унитарные операторы.** В терминах матриц мы хотим доказать следующее: для каждой унитарной матрицы  $A$  существует такая унитарная матрица  $B$ , что

$$C = B^{-1}AB = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$$

— диагональная матрица с  $|\lambda_i| = 1$ .

На самом деле удобнее действовать, опираясь на геометрический смысл унитарных операторов.

**Теорема 9.** *Каждый унитарный оператор ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) диагонализируем. Другими словами, для каждого унитарного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ ,  $\dim V = n$ , найдётся ортонормированный базис, в котором матрицей оператора будет*

$$A = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}, \quad |\lambda_i| = 1. \tag{10}$$

**Доказательство.** Возьмём любой нормированный собственный вектор  $\mathbf{e}_1$  оператора  $\mathcal{A}$ . Он существует, поскольку основное поле  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  алгебраически замкнуто. По лемме 5 подпространство  $\langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp = U$  размерности  $n - 1$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$ . Индукция по размерности  $V$  даёт требуемый результат. Утверждение о  $\lambda_i$  доказано в лемме 4.  $\square$

Заметим, что оператор с матрицей  $A$  вида (10), конечно, является унитарным, поскольку

$${}^t\bar{\mathcal{A}} \cdot A = \text{diag}\{\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n\} \cdot \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = E.$$

Обычно диагональную унитарную матрицу  $A$  записывают в виде

$$A = \begin{vmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n} \end{vmatrix},$$

используя формулу Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Б) Ортогональные операторы. Как отмечалось, леммы 4 и 5 справедливы для ортогонального оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  с тем уточнением, что собственные значения в данном случае равны  $\pm 1$ . Однако дальнейшие рассуждения нуждаются в небольшом изменении. Дело в том, что ортогональный оператор может и не обладать собственными векторами. Разумеется, как и всякий вещественный линейный оператор,  $\mathcal{A}$  имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Поэтому при помощи леммы 5 мы можем разложить  $V$  в прямую сумму одномерных и двумерных инвариантных попарно ортогональных подпространств:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m, \quad (11)$$

на каждом из которых  $\mathcal{A}$  индуцирует ортогональный линейный оператор. Объединение ортонормированных базисов в  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , даст нам ортонормированный базис в  $V$ . Мы получим так называемый *канонический базис* для ортогонального линейного оператора  $\mathcal{A}$ , предположив, что в разложении (11) ни одно из двумерных подпространств не разложимо в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств. Этого всегда можно добиться, и мы будем предполагать, что разложение (11) является таковым.

Посмотрим теперь, какова матрица оператора  $\mathcal{A}$  в каноническом базисе. Если  $A_i := A_{V_i}$  — матрица ограничения оператора  $\mathcal{A}$  на  $V_i$ , то

$$A = A_1 + \dots + A_m = \begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{vmatrix}.$$

Достаточно поэтому ограничиться случаем, когда  $V$  не имеет инвариантных подпространств и  $\dim V = 1$  или  $\dim V = 2$ . Если  $\dim V = 1$  и  $V = \langle \mathbf{e} \rangle$ ,  $\|\mathbf{e}\| = 1$ , то  $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ ,  $\lambda = \pm 1$  (лемма 4). Если  $\dim V = 2$  и  $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ ,  $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , то в этом ортонормированном базисе

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Предположим, что  $\det A = ad - bc = -1$ . Тогда характеристический многочлен  $\chi_A(t) = t^2 - (a + d)t - 1$  имеет два вещественных корня и, стало быть, у оператора  $A$  существует собственный вектор. Это, однако, противоречит условию, наложенному на  $V$ . Мы приходим к выводу, что  $\det A = 1$ . Вычисляя по известным правилам обратную матрицу  $A^{-1}$ , находим

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, в силу ортогональности

$$A^{-1} = {}^t A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

Сравнивая два выражения для  $A^{-1}$ , получаем

$$A = \begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix}, \quad a^2 + c^2 = 1.$$

Таким образом, при  $a = \cos \varphi$ ,  $c = \sin \varphi$  будет

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix},$$

т.е. линейный оператор  $A$  осуществляет вращение в плоскости  $V$ .

Проведённый анализ показывает, что если в разложении (11) первые  $r$  слагаемых  $V_1, \dots, V_r$  отвечают двумерным неразложимым инвариантным подпространствам, а остальные — одномерным (чего всегда можно добиться подходящей перенумерацией базисных векторов), и если  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$  — соответствующие углы поворотов, то матрица  $A$  примет вид, указанный в следующей теореме.

**Теорема 10.** Для всякого ортогонального линейного оператора  $A$  на  $V$  существует ортонормированный базис пространства  $V$ , в котором матрицей оператора будет

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_r & -\sin \varphi_r \\ \sin \varphi_r & \cos \varphi_r \\ -E_k & E_l \end{vmatrix}, \quad k + l + 2r = n.$$

**7. Нормальные операторы.** В доказательствах спектральных теорем 6 и 9 много общего, и это не случайно, поскольку эрмитовы и унитарные операторы входят в естественный, более широкий класс диагонализируемых операторов.

Определение 5. Пусть  $V$  — эрмитово пространство. Линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , обладающий свойством

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A}, \quad (12)$$

называется *нормальным*. Его матрица в любом базисе также называется *нормальной*.

Напомним, что в силу (5) имеют место соотношения

$$(\lambda\mathcal{E})^* = \bar{\lambda}\mathcal{E}, \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \bar{\lambda}\mathcal{E},$$

поэтому оператор  $\mathcal{A}$  нормален вместе с  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ . Из нормальности  $\mathcal{A}$  вытекает, что

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|^2 = (\mathcal{A}\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathbf{x}) = (\mathcal{A}^*\mathbf{x}|\mathcal{A}^*\mathbf{x}) = \|\mathcal{A}^*\mathbf{x}\|^2.$$

Заменяя  $\mathcal{A}$  на  $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ , получаем

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}^*\mathbf{x} - \bar{\lambda}\mathbf{x}\|,$$

а отсюда следует, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathcal{A}^*\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}. \quad (13)$$

Понятно, что любое из условий  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$  или  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$  влечёт (12). Совсем нетрудно, однако, привести примеры нормальных операторов, не являющихся ни эрмитовыми (или косоэрмитовыми), ни унитарными (скажем, с матрицей  $A = \text{diag}(2i, 2, 1, \dots, 1)$ ). Вместе с тем определение нормального оператора переносится на бесконечномерные гильбертовы пространства и находит там многочисленные применения. Нашей непосредственной целью является точное описание класса диагонализируемых линейных операторов на эрмитовом пространстве.

Теорема 11. Эквивалентны следующие условия:

а)  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — оператор, диагонализируемый в ортонормированном базисе пространства  $V$ ;

б)  $\mathcal{A}$  — нормальный оператор.

Доказательство. а)  $\implies$  б). Если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис с  $\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ , то в силу (13)  $\mathcal{A}^*\mathbf{e}_i = \bar{\lambda}_i\mathbf{e}_i$ , так что  $[\mathcal{A}, \mathcal{A}^*] = \mathcal{O}$ , и из а) следует б).

Для доказательства обратной импликации б)  $\implies$  а) выберем собственное значение  $\lambda$  оператора  $\mathcal{A}$  и, как обычно, положим

$$V^\lambda = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}.$$

Снова из (13) следует, что

$$\mathcal{A}^*(V^\lambda) \subseteq V^\lambda,$$

а в таком случае

$$\mathcal{A}(V^\lambda)^\perp \subseteq (V^\lambda)^\perp.$$

Действительно,

$$y \in (V^\lambda)^\perp \iff (y | x) \quad \forall x \in V^\lambda.$$

Стало быть,  $(\mathcal{A}y | x) = (y | \mathcal{A}^*x) = (y | x') = 0$ , поскольку  $x' \in V^\lambda$ .

Так как  $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$ , то по симметрии подпространство  $(V^\lambda)^\perp$  также  $\mathcal{A}^*$ -инвариантно. Ограничения операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$  на  $(V^\lambda)^\perp$ , очевидно, коммутируют, т.е. являются нормальными. Применяя индукцию по размерности  $n = \dim V$ , мы можем считать, что на  $(V^\lambda)^\perp$  оператор  $\mathcal{A}$  диагонализируется. Для  $V^\lambda$  это верно по определению, а поскольку  $V = V^\lambda \oplus (V^\lambda)^\perp$ , доказательство завершено.  $\square$

Так как эрмитовы и унитарные операторы нормальны, то, диагонализировав их по теореме 11, мы легко получим спектральные свойства, о которых говорится в теоремах 6 и 9. Вспомним теперь о полной ортогональной системе идеалентных операторов (проекторов) из теоремы 1 из § 3 гл. 2. Общая спектральная теорема для нормальных операторов может быть сформулирована в следующем виде.

*Теорема 12. Каждому нормальному оператору  $\mathcal{A}$  на конечномерном пространстве  $V$  отвечают попарно различные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ,  $1 \leq m \leq n = \dim V$ , и взаимно ортогональные проекторы  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ , отличные от  $\mathcal{O}$  и такие, что:*

- a)  $\sum_j \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$ ;
- б)  $\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j = \mathcal{A}$  — спектральное разложение оператора  $\mathcal{A}$ , так что  $\lambda_j \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ ;
- в) разложение из п. б) единственно;
- г) существуют комплексные многочлены  $f_1(t), \dots, f_m(t)$ , обладающие свойствами

$$f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}, \quad f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_i$$

(в случае самосопряжённого оператора все числа  $\lambda_i$  и многочлены  $f_i(t)$  вещественные).

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — все попарно различные собственные значения оператора  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{P}_i$  — проектор на  $V^{\lambda_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) параллельно  $\sum_{j \neq i} V^{\lambda_j}$ . По теореме 11 (см. также её доказательство) все  $\mathcal{P}_j$  взаимно ортогональны (т.е.  $\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i = \delta_{ij} \mathcal{P}_i$ ) и отличны от  $\mathcal{O}$ . Далее,  $V = \bigoplus_i V^{\lambda_i}$ , так что  $\sum_i \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$  — свидетельство полноты системы  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$  (утверждение а)).

Для любого вектора  $v \in V$  имеем  $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$ , где  $v_j = \mathcal{P}_j v$ . Таким образом,  $\mathcal{A}v = \mathcal{A}(\mathcal{E}v) = \mathcal{A}\left(\sum_j \mathcal{P}_j v\right) = \sum_j \mathcal{A}v_j = \sum_j \lambda_j v_j = = \sum_j \lambda_j (\mathcal{P}_j v) = (\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j)v$ , а это и есть основное утверждение б).

Что касается утверждения в) о единственности спектрального разложения оператора  $\mathcal{A}$ , то рассуждаем так. Из  $\mathcal{P}_i \neq \mathcal{O}$  следует

существование вектора  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \text{Im } \mathcal{P}_i$ . По определению  $\mathcal{P}_i \mathbf{x} = \mathbf{x}$ ,  $\mathcal{P}_j \mathbf{x} = \mathbf{0}$  при  $j \neq i$ . Поэтому

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j \mathbf{x} = \lambda_i \mathcal{P}_i \mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x},$$

т.е.  $\lambda_i \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ .

Обратно, если  $\lambda \in \text{Spec}(\mathcal{A})$  и  $\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  для некоторого  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , то

$$\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda \sum_j \mathbf{v}_j, \quad \mathbf{v}_j = \mathcal{P}_j \mathbf{v},$$

а с другой стороны,

$$\mathcal{A}\mathbf{v} = \mathcal{A} \sum_j \mathbf{v}_j = \sum_j \mathcal{A}\mathbf{v}_j = \sum_j \lambda_j \mathbf{v}_j.$$

Поэтому  $\sum_j (\lambda - \lambda_j) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ . Но векторы  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  взаимно ортогональны (следствие взаимной ортогональности проекторов  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ ) и, значит, те из них, которые отличны от  $\mathbf{0}$ , линейно независимы. Стало быть,  $(\lambda - \lambda_j) \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$  для каждого  $j$ , и если  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$  (а такое  $i$  найдётся, поскольку  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ), то  $\lambda = \lambda_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ . Единственность установлена.

Многочлены  $f_1(t), \dots, f_m(t) \in \mathbb{C}[t]$  из утверждения г) строятся конструктивно:

$$f_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Понятно, что  $f_i(t) \in \mathbb{R}[t]$ , если  $\mathcal{A}$  — самосопряжённый оператор.

Используя определение семейства взаимно ортогональных проекторов  $\mathcal{P}_j$  и разложение б), будем иметь

$$\mathcal{A}^2 = \left( \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i \right) \left( \sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \sum_j \lambda_j^2 \mathcal{P}_j,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^3 &= \mathcal{A}\mathcal{A}^2 = \left( \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i \right) \left( \sum_j \lambda_j^2 \mathcal{P}_j \right) = \sum_j \lambda_j^3 \mathcal{P}_j, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}^k = \sum_j \lambda_j^k \mathcal{P}_j$$

(при  $k = 0$  использовать а):  $\mathcal{A}^0 = \sum_j \lambda_j^0 \mathcal{P}_j = \sum_j \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$ ). Таким образом,

$$f(\mathcal{A}) = \sum_j f(\lambda_j) \mathcal{P}_j$$

для любого многочлена  $f(t)$ . В частности,

$$f_i(\mathcal{A}) = \sum_j f_i(\lambda_j) \mathcal{P}_j = f_i(\lambda_i) \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i. \quad \square$$

Как всякий линейный оператор, нормальный оператор  $\mathcal{A}$  записывается в виде  $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$  и, аналогично,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{B} - i\mathcal{C}$ , где  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  — эрмитовы операторы (см. (6)), в свою очередь выражаются через  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*), \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

Из  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$  следует, что  $\mathcal{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{B}$ . Обратно, из перестановочности  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  вытекает перестановочность  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{A}^*$ :

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

т.е. нормальность  $\mathcal{A}$ .

Отвлекаясь от нормальных операторов, остановимся на роли перестановочных или, как ещё говорят, коммутирующих операторов.

**Лемма 6.** *Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — перестановочные операторы на комплексном пространстве  $V$ . Тогда  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  имеют общий собственный вектор.*

**Доказательство.** Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\mathcal{A})$ . Рассмотрим подпространство  $V^\lambda = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ . Тогда  $\mathcal{B}V^\lambda \subseteq V^\lambda$ . Действительно, используя условие  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ , приходим к импликации

$$\mathbf{x} \in V^\lambda \implies \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathcal{B}\mathbf{x}),$$

т.е.  $\mathcal{B}\mathbf{x} \in V^\lambda$ .

Линейный оператор  $\mathcal{B}$ , ограниченный на  $V^\lambda$ , имеет собственный вектор  $\mathbf{y} \in V^\lambda$ :  $\mathcal{B}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ ,  $\mu \in \text{Spec}(\mathcal{B})$ . Таким образом,  $\mathcal{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$ ,  $\mathcal{B}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ , т.е.  $\mathbf{y}$  — общий собственный вектор.  $\square$

**Теорема 13.** *Два эрмитовых оператора  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  или две изометрии  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  на  $n$ -мерном эрмитовом пространстве  $V$  одновременно приводятся к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда они перестановочны.*

**Доказательство.** Предположив, что  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  диагонализируются в общем ортонормированном базисе, мы приходим к выводу о перестановочности их матриц  $A, B$  в этом базисе. Но так как в любом другом базисе матрицами операторов будут  $C^{-1}AC, C^{-1}BC$ , а

$$C^{-1}AC \cdot C^{-1}BC = C^{-1}ABC = C^{-1}BAC = C^{-1}BC \cdot C^{-1}AC,$$

то перестановочны сами операторы.

Обратно, пусть  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ . Тогда по лемме 6 операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  имеют общий собственный вектор  $\mathbf{e}_1$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\|\mathbf{e}_1\| = 1$ . Подпространство  $W = \langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp$  размерности  $n - 1$  инвариантно относительно  $\mathcal{A}$  и относительно  $\mathcal{B}$  в силу их эрмитовости (лемма 3) или в силу унитарности (лемма 5). Ограничения  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  на  $W$  будут перестановочными эрмитовыми (соответственно унитарными) операторами. Индукция по размерности приводит к явной конструкции ортонормированного базиса, в котором  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  запишутся в диагональной форме.  $\square$

Замечание 4. Напомним, что по теореме 3 перестановочность эрмитовых операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  эквивалентна эрмитовости оператора  $\mathcal{AB}$ .

**8. Положительно определённые операторы.** Так как любому эрмитову оператору  $\mathcal{A}$  на эрмитовом пространстве  $V$  (симметричному оператору на евклидовом векторном пространстве) отвечает квадратичная форма  $q(\mathbf{x}) = (\mathcal{Ax} | \mathbf{x})$ , а к последней применимы такие понятия, как положительная определённость, полуопределенность и т.п. (см. гл. 1, § 4, п. 8), то их можно переносить и на  $\mathcal{A}$ .

**Определение 6.** Эрмитов (или линейный симметричный) оператор  $\mathcal{A}$  называется *положительно определённым*, если  $(\mathcal{Ax} | \mathbf{x}) > 0$  для любого вектора  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  из  $V$ .

Теорема 6 и последующие замечания показывают, что для всякого положительно определённого оператора  $\mathcal{A}$  существует ортонормированный базис пространства  $V$ , в котором матрица  $A$  принимает диагональный вид:

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (14)$$

с положительными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Обратно, интерпретируя любую матрицу  $A$  вида (14) как матрицу эрмитова (симметричного) оператора  $\mathcal{A}$  относительно какого-то ортонормированного базиса пространства  $V$ , мы приходим к выводу, что условие  $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$  обеспечивает положительную определённость  $\mathcal{A}$ . Это обстоятельство закрепляется символом  $\mathcal{A} > 0$ .

Имеет смысл также говорить о *положительно полуопределенном* операторе  $\mathcal{A}$  (обозначение:  $\mathcal{A} \geqslant 0$ ), когда  $\lambda_1 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$  и  $\lambda_i = 0$  для некоторых индексов  $i$ . Для двух эрмитовых (симметричных) операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  будем писать  $\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B}$ , если  $\mathcal{A} - \mathcal{B} \geqslant 0$ .

По смыслу положительно определённый оператор невырожден (обратим). Это видно и из неравенства Коши—Буняковского

$$|(\mathcal{Ax} | \mathbf{x})| \leqslant \|\mathcal{Ax}\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Обратно, условия невырожденности и  $\mathcal{A} \geqslant 0$  гарантируют положительную определённость  $\mathcal{A}$ .

**Предложение 1.** *Всякий положительно определённый оператор  $\mathcal{A}$  записывается в виде квадрата некоторого другого положительно определённого оператора:  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ , причём выражение корня квадратного  $\mathcal{B} := \sqrt{\mathcal{A}}$  единственно.*

**Доказательство.** Достаточно привести матрицу оператора  $\mathcal{A}$  к диагональному виду (14) и положить  $\mathcal{B} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ , считая  $\sqrt{\lambda_i} > 0$ . Оператор  $\mathcal{B}$  с матрицей  $B$  в данном ортонормированном базисе будет положительно определённым. Соотношение  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$

при переходе к другому базису сохраняется:  $C^{-1}AC = (C^{-1}BC)^2$ . Таким образом,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ .

Утверждение о единственности  $\mathcal{B}$  удобно доказывать при помощи теоремы 12 о спектральном разложении. Именно, если  $\mathcal{B}' > 0$  и  $(\mathcal{B}')^2 = \mathcal{A}$ , то, рассматривая спектральное разложение  $\mathcal{B}' = \sum_j \mu_j \mathcal{P}'_j$ , получаем соотношение

$$\sum_j \mu_j^2 \mathcal{P}'_j = (\mathcal{B}')^2 = \mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{P}_i.$$

Все числа  $\mu_j > 0$  попарно различны, как и их квадраты  $\mu_j^2$ . Единственность спектрального разложения оператора  $\mathcal{A}$  приводит нас к заключению, что множества  $\{\mu_j^2\}$  и  $\{\lambda_i\}$  совпадают, т.е. при надлежащей перенумерации должны выполняться равенства  $\mu_i^2 = \lambda_i$ ,  $\mathcal{P}'_i = \mathcal{P}_i$ , откуда  $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$  и  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} = \sqrt{\mathcal{A}}$ .  $\square$

**Предложение 2.** Пусть  $\mathcal{C}$  — произвольный невырожденный линейный оператор на пространстве со скалярным произведением. Тогда произведение  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$  (или  $\mathcal{C}^*\mathcal{C}$ ) является невырожденным положительно определённым оператором.

**Доказательство.** Эрмитовость (или симметричность) оператора  $\mathcal{C}\mathcal{C}^*$  уже проверялась:  $(\mathcal{C}\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}^*\mathcal{C}^* = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ . Невырожденность  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$  очевидна:  $\det \mathcal{C}\mathcal{C}^* = \det \mathcal{C}^T \overline{\mathcal{C}} = \det \mathcal{C} \det \overline{\mathcal{C}} = \det \mathcal{C} \overline{\det \mathcal{C}} = |\det \mathcal{C}|^2 \neq 0$ . Далее,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{C}^*\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , поэтому по определению сопряжённого оператора имеем

$$(\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathbf{x} | \mathbf{x}) = (\mathcal{C}^*\mathbf{x} | \mathcal{C}^*\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Это и значит, что  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$  — положительно определённый оператор. То же относится и к произведению  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ .  $\square$

Из предложений 1, 2, обобщённых на случай вырожденных операторов, немедленно вытекает

**Теорема 14.** Пусть  $V$  — пространство со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$ . Следующие свойства линейных операторов на  $V$  эквивалентны:

- 1)  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ ,  $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ ;
- 2)  $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ ;
- 3)  $(\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{x}) \geq 0$ .

В одномерном комплексном пространстве каждое из свойств 1), 2) характеризует неотрицательные вещественные числа:  $z \geq 0$  означает возможность как записи  $z = \lambda^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (аналог 1)), так и  $z = z' \overline{z'}$  (аналог 2)).

**9. Полярное разложение.** Упомянутый параллелизм между комплексными числами и линейными операторами на пространстве со скалярным произведением простирается дальше, вплоть до записи комплексного числа в тригонометрической форме:  $z = |z|e^{i\varphi} = \sqrt{z\bar{z}}e^{i\varphi}$ . Об этом свидетельствует

Теорема 15. Всякий невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}$  на эрмитовом (или евклидовом) векторном пространстве  $V$  может быть представлен в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}, \quad (15)$$

где  $\mathcal{P}$  — положительно определённый оператор, а  $\mathcal{Q}$  — изометрия (унитарный или ортогональный оператор). Разложение (15) единственно. (Оно называется *полярным разложением оператора  $\mathcal{A}$* .)

Доказательство. Согласно предложению 1 и 2  $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^2$ , где  $\mathcal{P}$  — положительно определённый оператор, являющийся единственным квадратным корнем:  $\mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{A}\mathcal{A}^*}$ . Разумеется,  $\mathcal{P}$  — обратимый оператор. Положив  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ , получим выражение (15). Нужно только убедиться, что  $\mathcal{Q}$  — изометрия.

Действительно, так как  $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E} = \mathcal{E}^* = (\mathcal{P}^{-1})^*\mathcal{P}^* \Rightarrow (\mathcal{P}^{-1})^* = (\mathcal{P}^*)^{-1} = \mathcal{P}^{-1}$ , то

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*(\mathcal{P}^{-1})^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E}.$$

Если теперь  $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{A} = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1$  — два представления в виде (15), то имеем  $\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$ . Поэтому  $\mathcal{P}\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{Q}_1 \cdot \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$ , откуда  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}_1^2 \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_1$  (единственность квадратного корня) и, стало быть,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$ , т.е. единственность полярного разложения также установлена.  $\square$

Замечание 5. Очевидно,

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{Q},$$

и мы видим, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{Q}\mathcal{P}_1,$$

где  $\mathcal{Q}$  — изометрия, а  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{Q}^*\mathcal{P}\mathcal{Q}$  — положительно определённый линейный оператор.

Полярное разложение (15) (но не единственность  $\mathcal{Q}$ ) справедливо и в случае вырожденного оператора. Однако мы обратимся к другому свойству разложения. Для комплексного числа  $z$  безразличен порядок множителей в его тригонометрической записи:  $|z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}|z|$ . Если теперь  $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}$ , то

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}^*\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\mathcal{P} = (\mathcal{Q}\mathcal{P})^*\mathcal{Q}\mathcal{P} = \mathcal{A}^*\mathcal{A},$$

что означает нормальность оператора  $\mathcal{A}$ .

Обратно,

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{Q}^*\mathcal{P}^*\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{Q}.$$

Но из перестановочности  $\mathcal{Q}$  с  $\mathcal{P}^2$  следует перестановочность  $\mathcal{Q}$  с  $\mathcal{P}$ , поскольку  $\mathcal{P} = \sqrt{\mathcal{P}^2}$  — многочлен от  $\mathcal{P}^2$  (как это вытекает из теоремы о спектральном разложении). Таким образом,

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q} \text{ — нормальный оператор} \iff \mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}.$$

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Когда унитарная  $n \times n$ -матрица  $A$  записывается в виде (мультиликативного) коммутатора  $A = XYX^{-1}Y^{-1}$  с унитарными матрицами  $X, Y$ ? Условие  $\det A = 1$ , очевидно, необходимо. Доказать, что оно и достаточно. Другими словами, в группе  $SU(n)$  каждый элемент является коммутатором.

**2.** Под *матрицей Якоби* понимается вещественная матрица вида

$$J = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}, \quad b_i c_i > 0, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Доказать, что  $\text{Spec}(J)$  всегда вещественный и простой.

**3.** Справедлив ли аналог теоремы 13, когда один из операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  эрмитов, а второй является изометрией?

**4.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — произвольные коммутирующие линейные операторы на векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ . Доказать, что если каждый из операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  диагонализируем, то они одновременно диагонализируемы, т.е. существует базис в  $V$ , состоящий из собственных векторов как для  $\mathcal{A}$ , так и для  $\mathcal{B}$ .

**5.** Доказать, что если  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — положительно определённые линейные операторы и  $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$ , то  $\mathcal{AB}$  — тоже положительно определённый оператор.

**6.** Доказать, что если  ${}^t\mathcal{A} = -\mathcal{A}$ , то  $\mathcal{A}^2$  — симметричная неположительно определённая матрица. В частности, отличные от нуля собственные значения кососимметричной матрицы являются чисто мнимыми.

**7.** Пусть  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — эрмитовы (симметричные) операторы, из которых один, скажем,  $\mathcal{A}$ , положительно определённый. Доказать, что тогда  $\text{Spec}(\mathcal{AB})$  вещественный.

**8.** Пусть  $q(\mathbf{x})$  — квадратичная форма в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$ . В каких точках единичной сферы  $(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = 1$  форма  $q$  достигает максимума или минимума? Более общо: в каких точках единичной сферы форма  $q$  принимает стационарное значение, т.е. все её производные в этих точках по любому направлению равны нулю? Доказать, что справедливо следующее утверждение.

*Квадратичная форма  $q(\mathbf{x})$  принимает стационарные значения ровно в тех точках единичной сферы, которые отвечают собственным векторам симметричного оператора  $\mathcal{F}$ , определяемого формой  $q(\mathbf{x}) = (\mathcal{F}\mathbf{x} | \mathbf{x})$ .*

В частности, максимум формы  $q(\mathbf{x})$  на единичной сфере равен наибольшему из её канонических коэффициентов, а минимум — наименьшему (экстремальные значения квадратичной формы).

**9.** Доказать следующее обобщение леммы 6.

Теорема 16. Любое семейство коммутирующих линейных операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве обладает общим собственным вектором.

**10.** Доказать, что если

$$\mathfrak{S} = \{A_i \in M_n(\mathbb{C}) \mid A_i A_j = A_j A_i; \quad i, j \in J\}$$

— любое множество коммутирующих (попарно перестановочных) матриц порядка  $n$ , то найдётся такая невырожденная матрица  $C$ , что сопряжённое множество

$$C^{-1} \mathfrak{S} C = \{C^{-1} A_j C \mid j \in J\}$$

будет состоять из коммутирующих верхнетреугольных матриц.

**11.** Пусть, как обычно,  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ ;  $E_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , — матричные единицы. Проверить, что семейство

$$\mathcal{E} = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq [n^2/2], [n^2/2] + 1 \leq j \leq n\} \cup \{E\}$$

имеет мощность  $[n^2/4] + 1$  и состоит из линейно независимых коммутирующих верхнетреугольных матриц. Под  $[p/q]$  понимается целая часть дроби  $p/q$ .

**12.** Теорема [И. Шур, 1905]. *Максимальная размерность коммутативной подалгебры в  $M_n(\mathbb{C})$  равна  $[n^2/4] + 1$ .*

Другими словами, нужно доказать, что максимальное число попарно коммутирующих линейно независимых матриц порядка  $n$  над  $\mathbb{C}$  есть  $[n^2/4] + 1$ .

На самом деле  $\mathbb{C}$  можно заменить на любое поле  $\mathfrak{K}$ .

**13.** Доказать следующее утверждение. *Пусть  $(V, (*|*))$  — евклидово векторное пространство чётной размерности  $n = 2m$ , и пусть  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  — невырожденная кососимметрическая форма на  $V$ . Тогда найдутся разложение  $V$  в прямую сумму  $V = V_1 \oplus V_2$  двух  $m$ -мерных подпространств и невырожденный симметрический (относительно  $(*|*)$ ) линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  такие, что*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1 | \mathcal{A}\mathbf{y}_2) - (\mathbf{x}_2 | \mathcal{A}\mathbf{y}_1).$$

Здесь  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

## § 4. Комплексификация и овеществление

Как мы не раз имели возможность убедиться, вопрос о приведении к каноническому виду матрицы линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  решается по-разному в зависимости от того, является основное поле  $\mathfrak{K}$  алгебраически замкнутым ( $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ ) или нет ( $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$ ). Это относится, в частности, к изометриям — унитарным и ортогональным операторам. Так как в комплексном случае алгебраическая картина (при некоторой потере геометрической интуиции) становится проще, то часто применяют операцию (или, как ещё говорят, функтор) комплексификации к вещественным пространствам и операторам, а при помощи обратной операции (функтора овеществления) возвращаются к первоначальным объектам. Остановимся на этом подробнее.

**1. Комплексная структура.** Пусть  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{R}$  конечной размерности  $n$ .

**Определение 1.** Говорят, что на  $V$  определена *комплексная структура*, если задан линейный оператор  $\mathcal{J}: V \rightarrow V$  с квадратом  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ .

Пример 1. Пусть  $n = 2m$ ,  $\mathcal{J}$  — оператор с матрицей

$$J = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

(см. следствие теоремы 9 из § 4 гл. 1). Очевидно, что  $\mathcal{J}$  будет определять на  $V$  комплексную структуру, поскольку  $J^2 = -E$ .

Словосочетание “комплексная структура” оправдано тем обстоятельством, что пару  $(V, \mathcal{J})$  можно превратить в векторное пространство  $\tilde{V}$  над  $\mathbb{C}$ , полагая

$$(\alpha + i\beta)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathcal{J}\mathbf{v}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \in V.$$

Аксиомы дистрибутивности

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \quad (a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

будут выполнены, поскольку  $\mathcal{J}$  — линейный оператор. Далее, из  $\mathcal{J}^2 = -E$  следует, что

$$\begin{aligned} (\alpha + i\beta)[(\gamma + i\delta)\mathbf{v}] &= (\alpha + i\beta)(\gamma\mathbf{v} + \delta\mathcal{J}\mathbf{v}) = \alpha(\gamma\mathbf{v} + \delta\mathcal{J}\mathbf{v}) + \beta\mathcal{J}(\gamma\mathbf{v} + \delta\mathcal{J}\mathbf{v}) = \\ &= \alpha\gamma\mathbf{v} + \alpha\delta\mathcal{J}\mathbf{v} + \beta\gamma\mathcal{J}\mathbf{v} - \beta\delta\mathbf{v} = (\alpha\gamma - \beta\delta)\mathbf{v} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathcal{J}\mathbf{v} = \\ &= [\alpha\gamma - \beta\delta + i(\alpha\delta + \beta\gamma)]\mathbf{v} = [(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta)]\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Все остальные аксиомы векторного пространства выполнены, поскольку  $V$  и  $\tilde{V}$  совпадают как множества.

**Определение 2.** Говорят, что  $\tilde{V}$  — комплексное векторное пространство, *связанное с вещественным пространством  $V$* .

Докажем, что пример 1 не случаен.

**Предложение 1.** *Пространство  $V$  с комплексной структурой  $\mathcal{J}$  всегда чётномерно над  $\mathbb{R}$ , а матрица оператора  $\mathcal{J}$  в некотором базисе имеет вид (1). Далее,*

$$\dim_{\mathbb{C}} \tilde{V} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V. \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть мы уже нашли векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \in V$  такие, что  $2k$  векторов  $\mathbf{e}_1, \mathcal{J}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathcal{J}\mathbf{e}_k$  оказались линейно независимы. Либо линейная оболочка

$$V_k = \langle \mathbf{e}_1, \mathcal{J}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathcal{J}\mathbf{e}_k \rangle$$

совпадает с  $V$ , и тогда всё доказано, либо найдётся вектор  $\mathbf{e}_{k+1} \notin V_k$ .

Допустив на минуту, что

$$\mathcal{J}\mathbf{e}_{k+1} = \alpha\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{v}_k, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}_k \in V_k,$$

мы применим к обеим частям этого равенства оператор  $\mathcal{J}$ :

$$-\mathbf{e}_{k+1} = \alpha\mathcal{J}\mathbf{e}_{k+1} + \mathcal{J}\mathbf{v}_k.$$

Заметим, что подпространство  $V_k$  инвариантно относительно  $\mathcal{J}$ , поэтому  $\mathcal{J}\mathbf{v}_k \in V_k$ . Умножив первое из имеющихся у нас соотношений на  $\alpha$  и сложив со вторым, получим

$$(\alpha^2 + 1)\mathbf{e}_{k+1} = -\alpha\mathbf{v}_k - \mathcal{J}\mathbf{v}_k \in V_k.$$

Это, однако, противоречит выбору  $\mathbf{e}_{k+1}$ , поскольку всегда  $\alpha^2 + 1 \neq 0$ .

Продолжая процесс присоединения к  $V_k$  линейно независимых векторов, мы, наконец, получим при некотором  $m$  всё пространство

$$V = V_m = \langle \mathbf{e}_1, \mathcal{J}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathcal{J}\mathbf{e}_m \rangle.$$

Таким образом,  $\dim_{\mathbb{R}} V = 2m$ , причём в базисе  $(\mathbf{e}_1, \mathcal{J}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathcal{J}\mathbf{e}_m)$  матрица оператора  $\mathcal{J}$  имеет как раз вид (1). Равенство (2) отражает просто тот факт, что векторы  $\mathbf{e}_k$  и  $\mathcal{J}\mathbf{e}_k$  пропорциональны над  $\mathbb{C}$ :  $\mathcal{J}\mathbf{e}_k = i\mathbf{e}_k$ .  $\square$

Проведённое рассуждение по существу повторяет процедуру приведения кососимметричной формы к каноническому виду (см. гл. 1, § 4).

**2. Овеществление.** Пусть теперь  $U$  — произвольное векторное пространство над  $\mathbb{C}$  размерности  $n$ .

**Определение 3.** *Овеществлением*  $U$  называется вещественное векторное пространство  $U_{\mathbb{R}}$ , которое совпадает с  $U$  как множество и как аддитивная группа, но в котором об умножении на комплексные числа “забыто”, а умножение векторов на вещественные числа производится так же, как и в  $U$ .

Овеществляя  $U$ , мы обедняем  $U$  и из  $n$ -мерного пространства

$$U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{C}}$$

получаем  $2n$ -мерное пространство

$$U_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Определённое с самого начала умножение на  $i = \sqrt{-1}$  в  $U$  превращается в комплексную структуру  $\mathcal{J}$  на  $U_{\mathbb{R}}$  — линейный оператор, задаваемый соотношениями

$$\mathcal{J}\mathbf{e}_k = i\mathbf{e}_k, \quad \mathcal{J}(i\mathbf{e}_k) = -\mathbf{e}_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (3)$$

Применяя к паре  $(U_{\mathbb{R}}, \mathcal{J})$  соображения п. 1, получаем в качестве комплексного пространства, связанного с  $U_{\mathbb{R}}$ , исходное пространство, т.е.

$$\widetilde{U}_{\mathbb{R}} = U.$$

Введём теперь следующее

**Определение 4.** *Овеществлением оператора*  $A: U \rightarrow U$  называется линейный оператор  $A_{\mathbb{R}}: U_{\mathbb{R}} \rightarrow U_{\mathbb{R}}$ , действие которого поточечно совпадает с действием  $A$ . Различие между  $A$  и  $A_{\mathbb{R}}$  заключается в интерпретации результата действия:

$$U_{\mathbb{R}} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}} + \langle i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}.$$

В соответствии с этим разложением  $\mathbb{C}$ -линейный оператор  $A: U \rightarrow U$  мы запишем в виде  $\tilde{A} = A_1 + iA_2$ , где  $A_1$  и  $A_2$  —  $\mathbb{R}$ -линейные операторы на  $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}$  с вещественными  $n \times n$ -матрицами  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Так как

$$A(i\mathbf{e}_k) = iA\mathbf{e}_k = i(A_1\mathbf{e}_k + iA_2\mathbf{e}_k) = -A_2\mathbf{e}_k + iA_1\mathbf{e}_k,$$

то в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n)$  для  $U_{\mathbb{R}}$  матрицей овеществлённого оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  будет

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \begin{vmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Мы видим, что далеко не каждый линейный оператор на  $U_{\mathbb{R}}$  может рассматриваться как овеществление некоторого оператора на  $U$ .

Пусть  $\mathcal{L}(U)_{\mathbb{R}}$  — совокупность всех овеществлённых операторов, а  $\mathcal{L}(U_{\mathbb{R}})$  — пространство всех  $\mathbb{R}$ -линейных операторов на  $U_{\mathbb{R}}$ . Из определения или из матричной интерпретации (4) овеществлённых операторов видно, что

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (\mathcal{A}\mathcal{B})_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cdot \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad (\alpha\mathcal{A})_{\mathbb{R}} = \alpha\mathcal{A}_{\mathbb{R}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Другими словами,  $\mathcal{L}(U)_{\mathbb{R}}$  — подалгебра в  $\mathcal{L}(U_{\mathbb{R}})$ . Очевидно,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(U)_{\mathbb{R}} = 2n^2 = \frac{1}{2}(2n)^2 = \frac{1}{2} \dim \mathcal{L}(U_{\mathbb{R}}).$$

Матрицей линейного оператора  $\mathcal{J}$  (комплексной структуры) в нашем базисе служит

$$J_0 = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix}, \quad E = E_n. \quad (5)$$

По смыслу  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cdot \mathcal{J} = \mathcal{J} \cdot \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ , что соответствует легко проверяемому матричному соотношению  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cdot J_0 = J_0 \cdot \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ . Более того, из условия

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{vmatrix},$$

переписанного (после перемножения блочных матриц) в виде

$$\begin{vmatrix} A_3 & -A_1 \\ A_4 & -A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A_2 & -A_4 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix},$$

мы видим, что  $A_3 = -A_2$ ,  $A_4 = A_1$ , т.е. всякая  $2n \times 2n$ -матрица над  $\mathbb{R}$ , перестановочная с  $J_0$ , имеет вид (4).

Итак, справедливо

**Предложение 2.** *Подалгебра  $\mathcal{L}(U)_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(U_{\mathbb{R}})$  овеществлённых операторов (относительно структуры  $\mathcal{J}$ ) состоит в точности из операторов, перестановочных с  $\mathcal{J}$ .*

Более интересен следующий вопрос. Пусть  $V$  — чётномерное вещественное пространство (скажем,  $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ ) и  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Когда на  $V$  существует комплексная структура  $\mathcal{J}$ , согласованная с  $\mathcal{A}$ , т.е. такая, что  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , где  $\mathcal{B} : U \rightarrow U$  — оператор на комплексном  $n$ -мерном пространстве  $U$ ? Мы разберём содержательный частный случай.

**Теорема 1.** *Пусть  $V = \mathbb{R}^2$  и  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  —  $\mathbb{R}$ -линейный оператор, не имеющий собственных векторов. Тогда на  $V$  можно определить согласованную с  $\mathcal{A}$  комплексную структуру (подробности сообщаются в ходе доказательства).*

**Доказательство.** Согласно условию  $\mathcal{A}$  имеет два комплексно сопряжённых характеристических корня  $\lambda, \bar{\lambda}$ . Положим  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , где  $\lambda_2 \neq 0$ . По теореме Гамильтона—Кэли  $\mathcal{A}^2 - \text{tr}\mathcal{A} + (\det \mathcal{A})\mathcal{E} = \mathcal{O}$ , т.е.

$$\mathcal{A}^2 - 2\lambda_1\mathcal{A} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\mathcal{E} = \mathcal{O}. \quad (6)$$

Определим оператор  $\mathcal{J}$ , полагая

$$\mathcal{J} = \lambda_2^{-1}(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}),$$

или, что эквивалентно,

$$\mathcal{A} = \lambda_1\mathcal{E} + \lambda_2\mathcal{J}.$$

Подставляя выражение для  $\mathcal{A}$  в равенство (6), находим

$$(\lambda_1^2\mathcal{E} + 2\lambda_1\lambda_2\mathcal{J} + \lambda_2^2\mathcal{J}^2) - 2\lambda_1(\lambda_1\mathcal{E} + \lambda_2\mathcal{J}) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\mathcal{E} = \mathcal{O},$$

откуда следует

$$\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}.$$

Согласно общим рассуждениям из п. 2 на  $V$  определена структура комплексной прямой  $\mathbb{C}^1$ . Так как оператор  $\mathcal{A}$  перестановочен с  $\mathcal{J}$ , то  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , где  $\mathcal{B}: \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^1$  — оператор умножения на некоторое комплексное число. Этим числом, очевидно, является  $\lambda$ .  $\square$

Докажем теперь

**Предложение 3.**  $\det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = |\det \mathcal{A}|^2$ .

**Доказательство.** Проведём прямые выкладки, основанные на элементарных преобразованиях над полем  $\mathbb{C}$  и не слишком входящие в детали овеществления. Так как  $\det \overline{A} = \det \overline{A}$ , где черта означает комплексное сопряжение, и так как имеет место соотношение (4), использующее запись  $A = A_1 + iA_2$ , то

$$\begin{aligned} \det \mathcal{A}_{\mathbb{R}} &= \det A_{\mathbb{R}} = \det \begin{vmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} = \\ &= \det \begin{vmatrix} A_1 + iA_2 & -A_2 + iA_1 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A_1 + iA_2 & 0 \\ A_2 & A_1 - iA_2 \end{vmatrix} = \\ &= \det \begin{vmatrix} A & 0 \\ A_2 & \overline{A} \end{vmatrix} = \det A \cdot \det \overline{A} = |\det A|^2. \quad \square \end{aligned}$$

**3. Комплексификация.** Пусть  $V$  — произвольное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  размерности  $n$ . Непосредственно проверяется, что на внешней прямой сумме  $V \oplus V$  — векторном пространстве пар  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  с операциями

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha'(\mathbf{u}', \mathbf{v}') = (\alpha\mathbf{u} + \alpha'\mathbf{u}', \alpha\mathbf{v} + \alpha'\mathbf{v}'), \quad \alpha, \alpha' \in \mathbb{R},$$

— соответствием

$$\mathcal{J}: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto (-\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

определяется линейный оператор, задающий комплексную структуру на  $V \oplus V$ . Эта комплексная структура называется *канонической*.

**Определение 4.** Комплексное векторное пространство  $\widetilde{V \oplus V}$ , связанное с  $V \oplus V$ , называется *комплексификацией* (или *комплексной оболочкой*) пространства  $V$ . Для него вводится специальное обозначение

$$V^{\mathbb{C}} := \widetilde{V \oplus V}.$$

Если смотреть на  $\mathbb{C}$  как на векторное пространство размерности 2 над  $\mathbb{R}$ , то

$$V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

— частный случай тензорного произведения пространств — конструкции, широко используемой в математике (мы упоминали о ней в § 4 из гл. 1, а более подробно она будет рассматриваться в главе 6, § 4). Так как  $\dim_{\mathbb{R}}(V \oplus V) = 2n$ , то в соответствии с равенством (2)

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

По определению  $i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (-\mathbf{v}, \mathbf{u})$ , так что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{0}) + i(\mathbf{v}, \mathbf{0})$ . Поэтому пару  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  естественно обозначать  $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ . При этом

$$(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + (\mathbf{u}' + i\mathbf{v}') = (\mathbf{u} + \mathbf{u}') + i(\mathbf{v} + \mathbf{v}').$$

Далее,

$$(\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) + (\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}),$$

поскольку

$$(\alpha\mathcal{E} + \beta\mathcal{J})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta(-\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}).$$

Запомнить эти правила нетрудно, поскольку они в точности соответствуют правилам действий с комплексными числами. Векторы  $\mathbf{u} + i\mathbf{0}$  обозначаются просто через  $\mathbf{u}$ , так что вещественное пространство  $V$  считается подпространством в  $V^{\mathbb{C}}$ .

**Определение 5.** *Комплексификацией*  $\mathbb{R}$ -линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  назовём  $\mathbb{C}$ -линейный оператор  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ , для которого

$$\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \mathcal{A}\mathbf{u} + i\mathcal{A}\mathbf{v}.$$

Имеем импликацию

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}} \implies V^{\mathbb{C}} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Стало быть, матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  будет служить одновременно и матрицей  $A^{\mathbb{C}}$  оператора  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  в том же базисе, т.е.

$$A^{\mathbb{C}} = A.$$

В частности,  $\det \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \det \mathcal{A}$  и  $\operatorname{tr} \mathcal{A}^{\mathbb{C}} = \operatorname{tr} \mathcal{A}$ . Так как

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) &= (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{u} + i(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{v} = \\ &= (\mathcal{A}\mathbf{u} + \mathcal{B}\mathbf{u}) + i(\mathcal{A}\mathbf{v} + \mathcal{B}\mathbf{v}) = (\mathcal{A}\mathbf{u} + i\mathcal{A}\mathbf{v}) + (\mathcal{B}\mathbf{u} + i\mathcal{B}\mathbf{v}) = \\ &= \mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + \mathcal{B}^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\mathcal{A}^{\mathbb{C}} + \mathcal{B}^{\mathbb{C}})(\mathbf{u} + i\mathbf{v}), \end{aligned}$$

то  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}^{\mathbb{C}} + \mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ . Аналогично проверяется, что  $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}^{\mathbb{C}}\mathcal{B}^{\mathbb{C}}$ .

По аналогии с  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  определяются продолженные с  $V$  линейные и, более общо, полилинейные формы на  $V^{\mathbb{C}}$ . Если, например,  $f$  — билинейная форма на вещественном пространстве  $V$ , то полагаем

$$f^{\mathbb{C}}(\mathbf{x} + iy, \mathbf{u} + iv) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{v}) + i(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{u})).$$

В качестве упражнения проверьте, что из кососимметричности  $f$  следует кососимметричность  $f^{\mathbb{C}}$ .

Пусть теперь  $V$  — вещественное векторное пространство со скалярным произведением  $(\cdot | \cdot)$ . Тогда и на  $V^{\mathbb{C}}$  определяется скалярное произведение

$$(\mathbf{x} + iy | \mathbf{u} + iv)^{\mathbb{C}} := (\mathbf{x} | \mathbf{u}) + (\mathbf{y} | \mathbf{v}) - i((\mathbf{x} | \mathbf{v}) - (\mathbf{u} | \mathbf{y})).$$

Если при этом пара  $(V, (\cdot | \cdot))$  — евклидово пространство, то  $(V^{\mathbb{C}}, (\cdot | \cdot)^{\mathbb{C}})$  будет эрмитовым векторным пространством. В частности, норма  $\| \cdot \| ^{\mathbb{C}}$  на  $V^{\mathbb{C}}$  задаётся равенством

$$(\|\mathbf{x} + iy\|^{\mathbb{C}})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Возвращаясь к общему случаю, предположим, что  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V$ , а  $\mathbf{a} + i\mathbf{b}$  — собственный вектор с собственным значением  $\alpha + i\beta$  линейного оператора  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  на  $V^{\mathbb{C}}$  ( $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Тогда, в соответствии с определением,  $\mathcal{A}\mathbf{a} + i\mathcal{A}\mathbf{b} = \mathcal{A}^{\mathbb{C}}(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = = (\alpha + i\beta)(\mathbf{a} + i\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) + i(\beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b})$ , т.е.

$$\mathcal{A}\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}, \quad \mathcal{A}\mathbf{b} = \beta\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$$

Таким образом,  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{R}}$  — двумерное инвариантное относительно  $\mathcal{A}$  подпространство. Так как  $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$  всегда имеет хотя бы один собственный вектор, то мы ещё раз доказали теорему 7 из § 3 гл. 2.

Заметим, далее, что каждое векторное пространство  $U$  над  $\mathbb{C}$  размерности  $n$  изоморфно комплексной оболочке  $V^{\mathbb{C}}$  подходящим образом выбранного векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{R}$ . Достаточно зафиксировать некоторый базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $U$  и взять в качестве  $V$  совокупность всех векторов вида  $\sum_j \alpha_j \mathbf{e}_j$  с  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ :

$$U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}} = (\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}.$$

**4. Комплексификация — овеществление — комплексификация.** Введём обозначение

$$W = (V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$$

для вещественного пространства размерности  $2n$ , полученного из  $n$ -мерного вещественного пространства  $V$  комплексификацией, а затем овеществлением. Легко понять, что

$$W = V \oplus iV, \tag{7}$$

причём говорят о вещественной плоскости  $V$  и о мнимой плоскости  $iV$ . Согласно (3) на  $W$  определён оператор  $\mathcal{J} = (i\mathcal{E})_{\mathbb{R}}$  — овеществление оператора  $i\mathcal{E}$  умножения на  $i$  в  $V^{\mathbb{C}}$ . Его матрицей служит  $\mathcal{J}_0$  (см. (5)). Оператор  $\mathcal{J}$  меняет местами вещественную и мнимую плоскости.

Простейший случай представится, когда  $V = \mathbb{R}_1$ ,  $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^1$  и  $W = (\mathbb{C}^1)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ . На комплексной прямой определена операция комплексного сопряжения

$$\alpha + i\beta \mapsto \overline{\alpha + i\beta} = \alpha - i\beta.$$

В общем случае на пространстве (7) действует аналогичный линейный оператор

$$\mathcal{S} : \mathbf{u} + i\mathbf{v} \mapsto \overline{\mathbf{u} + i\mathbf{v}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$$

с матрицей

$$S = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}.$$

Расширяя эту ситуацию, рассмотрим произвольный  $\mathbb{C}$ -линейный оператор  $\mathcal{A} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$  (а при желании даже линейное отображение  $V_1^{\mathbb{C}} \rightarrow V_2^{\mathbb{C}}$ , где  $V_1 \neq V_2$ ). *Комплексно сопряжённым* к  $\mathcal{A}$  назовём оператор  $\overline{\mathcal{A}} : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ , для которого

$$\overline{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{u} + i\mathbf{v} = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})}.$$

При этом

$$(\overline{\mathcal{A}})_{\mathbb{R}} = \mathcal{S} \cdot \mathcal{A}_{\mathbb{R}} \cdot \mathcal{S}.$$

Линейность над  $\mathbb{C}$  оператора  $\overline{\mathcal{A}}$  является простым следствием линейности  $\mathcal{A}$  и оператора комплексного сопряжения. Записанный в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  оператор  $\mathcal{A}$  имеет матрицу  $A = A_1 + iA_2$ , а оператор  $\overline{\mathcal{A}}$  — матрицу  $\overline{A} = A_1 - iA_2$  с вещественными матрицами  $A_1$  и  $A_2$  (ср. с рассуждениями из п. 2). Отсюда следует, что условие  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$  необходимо и достаточно для возможности записи  $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{\mathbb{C}}$  (комплексификация некоторого вещественного оператора  $V \rightarrow V$ ). Используя понятие комплексно сопряжённого оператора, мы можем записать для любого овеществлённого оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  с матрицей (4)

$$\operatorname{tr} \mathcal{A}_{\mathbb{R}} = 2 \operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr}(\mathcal{A} + \overline{\mathcal{A}}) = \operatorname{tr} \mathcal{A} + \operatorname{tr} \overline{\mathcal{A}}.$$

Пусть  $U$  — произвольное комплексное пространство. В п. 1 гл. 1 мы рассматривали пример пространства  $\overline{U}$ , которое назовём *комплексно сопряжённым* с  $U$  и которое отличается от  $U$  только умножением на скаляры:  $\lambda \otimes \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}$ .

Аналогично, если  $(V, \mathcal{J})$  — вещественное пространство с комплексной структурой, то линейный оператор  $-\mathcal{J}$  также определяет комплексную структуру, называемую *сопряжённой* с исходной. Если, далее,  $\tilde{V}$  — комплексное пространство, отвечающее  $(V, \mathcal{J})$ , то  $\tilde{V}$  — комплексное пространство, отвечающее  $(V, -\mathcal{J})$ .

Применяя теперь к комплексному векторному пространству  $V$  сначала функтор овеществления, а затем функтор комплексификации, мы построим канонический  $\mathbb{C}$ -линейный изоморфизм

$$f: (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \rightarrow V \oplus \overline{V}.$$

С этой целью заметим, что на  $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$  имеются два  $\mathbb{R}$ -линейных оператора: оператор *канонической* комплексной структуры  $\mathcal{J}(x, y) = -(-y, x)$  и оператор умножения на  $i = \sqrt{-1}$ , отвечающий исходной комплексной структуре на  $V$ :  $i(x, y) = (ix, iy)$ . Так как  $\mathcal{J}$  коммутирует с  $i$ , то он  $\mathbb{C}$ -линеен в этой структуре. Поскольку  $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{E}$ , его собственные значения равны  $\pm i$ . Введём стандартные обозначения для двух подпространств, отвечающих этим собственным значениям:

$$V^{1,0} = \{(x, y) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}(x, y) = i(x, y)\},$$

$$V^{0,1} = \{(x, y) \in (V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \mid \mathcal{J}(x, y) = -i(x, y)\}.$$

Оба множества  $V^{1,0}, V^{0,1}$  являются комплексными подпространствами в  $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ : ясно, что они замкнуты относительно сложения и умножения на вещественные числа, а замкнутость относительно умножения на  $\mathcal{J}$  следует из того, что  $\mathcal{J}$  и  $i$  коммутируют. Покажем, что  $V = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ , а также, что  $V^{1,0}$  естественно изоморфно  $V$ , тогда как  $V^{0,1}$  естественно изоморфно  $\overline{V}$ .

Из определений сразу же следует, что  $V^{1,0}$  состоит из векторов  $(x, -ix)$ , а  $V^{0,1}$  — из векторов вида  $(y, iy)$ . Для данных  $u, v \in V$  уравнение  $(u, v) = (x, -ix) + (y, iy)$  имеет единственное решение  $x = (u + iv)/2, y = (u - iv)/2$ . Следовательно,  $V = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ . Отображения  $x \mapsto (x, -ix)$ ,  $x \mapsto (x, ix)$  являются  $\mathbb{R}$ -линейными изоморфизмами  $V$  на  $V^{1,0}$  и соответственно  $\overline{V}$  на  $V^{0,1}$ . Кроме того, они перестановочны с действием  $i$  на  $V, \overline{V}$  и действием  $\mathcal{J}$  на  $V^{1,0}, V^{0,1}$  в силу определений. Это завершает нашу конструкцию.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Предлагается убедиться в том, что ортогональный оператор  $\mathcal{A}$  на евклидовом векторном пространстве  $V$ , не имеющий собственных векторов (это возможно лишь в случае  $\dim V = 2m$ ), является овеществлением унитарного оператора  $\mathcal{B}: U \rightarrow U$  на комплексном векторном пространстве  $U$  размерности  $m$ , связанном с  $V$ . Заметим в этой связи, что овеществление унитарного пространства приводит к евклидову пространству в два раза большей размерности.

**2.** Доказать формулу из предложения 3, выбрав базис  $(e_1, \dots, e_n)$  комплексного пространства  $U$ , в котором матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}: U \rightarrow U$  имеет верхнетреугольную форму с  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  по диагонали.

**3.** Пусть  $U$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ . Чему изоморфна комплексификация  $U^{\mathbb{C}}$ ?

**4.** Пусть  $(V, (*|*))$  — евклидово пространство,  $V^{\mathbb{C}}$  — его комплексификация,  $\mathcal{A}$  — линейный оператор на  $V^{\mathbb{C}}$ , определяемый правилом:  $\mathcal{A}(u + iv) = u - iv$  для

всех  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ . Будет ли  $\mathcal{A}$  линейным оператором на овеществлении  $\mathbb{R}V^{\mathbb{C}}$ , и если да, то будет ли  $\mathcal{A}$  симметричным, ортогональным, идемпотентным?

## § 5. Ортогональные многочлены

**1. Проблема аппроксимации.** В самых различных вопросах математики и физики встречается задача о разложении произвольно взятой из некоторого класса функции по заданной системе функций. Не вдаваясь в аналитические тонкости, которые обычно рассматриваются в курсе анализа, мы ограничимся обсуждением чисто алгебраического аспекта этой задачи. Попутно будут затронуты некоторые новые вопросы линейной алгебры и геометрии.

Запас функций вещественной переменной  $t$  у нас будет исчерпываться пространством  $C_2(a, b)$  непрерывных на отрезке  $a \leq t \leq b$  (или на интервале с бесконечными концами) функций со скалярным произведением

$$(f | g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Черта означает комплексное сопряжение, если встретится необходимость рассматривать комплекснозначные функции. В  $C_2(a, b)$  будут выделяться подмножества гладких функций, например дважды непрерывно дифференцируемых.

Обычным образом вводится норма функции  $f$ :  $\|f\| = \sqrt{(f | f)}$ . Пространство  $C_2(a, b)$  превращается в метрическое с расстоянием

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Сформулированная выше общая задача основана на рассмотрении ортонормированной системы функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$

$$(\varphi_i | \varphi_j) = \delta_{ij}$$

и линейных комбинаций  $\sum_i \alpha_i \varphi_i(t)$  с коэффициентами  $\alpha_i$ , зависящими от “приближаемой” функции  $f \in C_2(a, b)$ . Задача приближения имеет смысл лишь в том случае, если функции  $\varphi_i(t)$  достаточно хорошие — бесконечно дифференцируемые или даже аналитические.

Если функция  $f(t)$  описывает какой-то периодический процесс в физике или механике, то естественно строить систему  $\{\varphi_n(t)\}$  при помощи элементарных периодических функций  $\sin nt, \cos nt$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . В общем случае хорошим источником ортонормированных систем служит обычное пространство многочленов  $\mathbb{R}[t]$ . Построение системы  $\{\varphi_n(t)\}$  заключается просто в последовательном применении уже известного нам процесса ортогонализации Грама—Шмидта. Мы рассмотрим вскоре эти два важных примера ( $\sin, \cos$  и  $\mathbb{R}[t]$ ), а сейчас остановимся на уточнении проблемы приближения (или, как ещё говорят, аппроксимации) функции  $f(t)$ .

**2. Метод наименьших квадратов.** Пусть дана ортонормированная система функций  $\{\varphi_n(t)\}$ . Если  $f$  — любая функция из  $C_2(a, b)$ , то числа

$$c_n = (f | \varphi_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

называются *коэффициентами Фурье* функции  $f$  относительно  $\{\varphi_n(t)\}$ . Так как

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left\| f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \right\|^2 = \left( f - \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j \mid f - \sum_{s=1}^n c_s \varphi_s \right) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_j c_j (\varphi_j | f) - \sum_s \overline{c_s} (f | \varphi_s) + \sum_{j,s} c_j \overline{c_s} (\varphi_j | \varphi_s) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_j c_j (\overline{f | \varphi_j}) - \sum_s \overline{c_s} c_s + \sum_{j,s} c_j \overline{c_s} \delta_{js} = \\ &= \|f\|^2 - \sum_j c_j \overline{c_j} - \sum_s \overline{c_s} c_s + \sum_j c_j \overline{c_j} = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^n |c_j|^2, \end{aligned}$$

то всегда

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

В правой части стоит не зависящее от  $n$  число, поэтому на самом деле выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{1}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f | \varphi_k)^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{1'}$$

Неравенство (1), справедливое для произвольной ортонормированной системы  $\{\varphi_j(t)\}$ , называется *неравенством Бесселя*. Оно доказывает сходимость ряда  $\sum_{k \geq 1} |c_k|^2$  с неотрицательными членами.

Апроксимировать в смысле метода наименьших квадратов данную функцию  $f(t)$  линейной комбинацией  $\sum_{k=1}^m d_k \varphi_k(t)$  с постоянными коэффициентами  $d_k$  и фиксированным числом слагаемых  $m$  — значит подобрать коэффициенты  $d_k$  так, чтобы минимизировать среднее квадратичное уклонение (по другой терминологии — сделать наименьшей “среднюю квадратичную ошибку”  $\|f - \sum_{k=1}^m d_k \varphi_k(t)\|^2$ ). Геометрический смысл этой задачи достаточно ясен. Для вектора  $f$  из (бесконечномерного) векторного пространства  $V = C_2(a, b)$  мы ищем вектор  $\varphi$  из линейной оболочки  $U =$

$= \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \rangle$ , расстояние которого  $\|f - \varphi\|$  до  $f$  было бы минимальным. Это так называемая *задача о кратчайшем расстоянии от точки до подпространства*, или ещё — *задача о перпендикуляре*, к которой мы вернёмся позднее, находясь уже по настоящему в точечных, а не в векторных пространствах. Мы всегда имеем разложение в прямую сумму

$$V = U \oplus U^\perp,$$

так что  $f = f_0 + f_1$ , где  $f_0$  — проекция  $f$  на  $U$ , а  $f_1$  — перпендикуляр “из конца вектора  $f$ ” (довольно бессмысличное выражение) на  $U$ , или, что то же самое, проекция  $f$  на  $U^\perp$ . Если теперь  $U \ni \varphi \neq f_0$ , то

$$\|f - \varphi\| > \|f - f_0\|. \quad (2)$$

В самом деле,  $f_0 - \varphi \in U$  и, следовательно,  $f_0 - \varphi$  ортогонален вектору  $f_1 = f - f_0$ . Согласно теореме Пифагора

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f - f_0 + f_0 - \varphi\|^2 = \|f - f_0\|^2 + \|f_0 - \varphi\|^2,$$

откуда и следует неравенство (2).

Фактически задача о перпендикуляре сводится к задаче о нахождении проекции  $f_0$  вектора  $f$  на  $U$ . Записав  $f_0$  в виде

$$f_0 = x_1 \varphi_1 + \dots + x_m \varphi_m,$$

мы из условий

$$(f - f_0 | \varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

выраженных в виде системы из  $m$  линейных уравнений

$$x_1(\varphi_1 | \varphi_j) + (\varphi_2 | \varphi_j) + \dots + x_m(\varphi_m | \varphi_j) = (f | \varphi_j), \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3)$$

находим неизвестные коэффициенты  $x_i$ .

Условия (3) годны и в том общем случае, когда система  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  не ортонормирована. Если же система ортонормирована, то  $c_j = (f | \varphi_j)$  — коэффициент Фурье, и система (3) сразу даёт

$$x_j = (f | \varphi_j) = c_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Возвращаясь к нашей задаче аппроксимации, мы заключаем, что среднее квадратичное уклонение  $\|f - \sum d_j \varphi_j\|^2$  будет минимальным при  $d_j = c_j$ . Это, между прочим, можно видеть и непосредственно:

$$\left\| f - \sum_{j=1}^m d_j \varphi_j \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^m |c_j|^2 + \sum_{j=1}^m |d_j - c_j|^2.$$

Если при увеличении  $m$  для любой функции  $f \in C_2(a, b)$  норму разности  $\|f - \sum_{j=1}^m (f | \varphi_j) \varphi_j\|$  можно сделать сколь угодно малой, то систему  $\{\varphi_j(t)\}$  называют *полной ортогональной системой функций*. Необходимое условие полноты  $\{\varphi_j(t)\}$ , как видно из предыдущих рассуждений, заключается в том, чтобы для любой функции  $f$  выпол-

нялось соотношение (*равенство Парсеваля*)

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f | \varphi_j)|^2 = \|f\|^2. \quad (4)$$

Вопрос о полноте ортонормированных систем  $\{\varphi_j(t)\}$  относительно данного класса функций  $f(t)$  впервые был исследован крупным русским математиком В.А. Стекловым (1864–1926).

Условие полноты (4) выражается в интегральной форме

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left( (f(t) - \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(t)) \right)^2 dt = 0 \quad \forall f \in C_2(a, b). \quad (5)$$

При выполнении условия (5) говорят ещё, что последовательность функций  $\sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(t)$  сходится в среднем к функции  $f(t)$ . Из сходимости в среднем, вообще говоря, не следует, что  $f(t)$  разлагается в ряд по функциям  $\varphi_j(t)$ , т.е.  $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(t)$ . Лишь в случае равномерной сходимости ряда  $\sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j(t)$  можно в условии полноты (5) сделать переход к предельной функции под знаком интеграла, и разложимость  $f(t)$  в ряд становится фактом.

Понятие сходимости в среднем, а вместе с ним и понятие полноты системы функций сохраняет смысл для системы, не обязательно являющейся ортогональной и нормированной.

**3. Линейные системы и метод наименьших квадратов.** В связи с последним замечанием, а также ради получения дополнительной информации, относящейся к методу наименьших квадратов, вернёмся к задаче о вычислении расстояния от точки до подпространства.

Пусть по-прежнему  $V$  — векторное пространство произвольной размерности со скалярным произведением  $(* | *)$ ,  $f$  — фиксированный вектор и  $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle$  — подпространство в  $V$ . Мы видели, что расстояние от “точки”  $f$  до  $U$  измеряется нормой вектора  $f - f_0$ , где  $f_0$  — вектор из  $U$  с координатами  $x_1, \dots, x_m$ , определяемыми из линейной системы

$$x_1(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_j) + x_2(\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_j) + \dots + x_m(\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_j) = (f | \mathbf{e}_j), \quad 1 \leq j \leq m \quad (6)$$

(см. (3), где следует заменить  $\varphi_j$  на  $\mathbf{e}_j$ ). Если  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  — ортонормированная система, то  $x_j = (f | \mathbf{e}_j)$ ,  $1 \leq j \leq m$ , — искомое решение. Но существование решения, т.е. возможность опустить однозначным образом перпендикуляр из  $f$  на  $U$ , неестественно связывать с каким-то базисом. Нам известно, что любой базис допускает ортогонализацию. Поэтому решение системы (6) существует всегда, и оно единственno. Это значит, что определитель

$$\det \|( \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j )\|_{1 \leq i, j \leq m},$$

называемый *определителем Грама* системы векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ , отличен от нуля. Определитель Грама, очевидно, равен нулю, если один из векторов  $\mathbf{e}_k$  является линейной комбинацией остальных. Фактически нами доказана

**Теорема 1.** *Система векторов  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$  линейно независима тогда и только тогда, когда её определитель Грама отличен от нуля.*

Это утверждение не ново (ср. с теоремой 4 из § 1). Возникший у нас в связи с проблемой аппроксимации метод наименьших квадратов позволяет выработать свежую точку зрения на, казалось бы, до конца исчерпанную задачу о решениях системы линейных уравнений. Пусть дана линейная система

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n &= b_2, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{7}$$

с большим числом  $m > n$  уравнений. Без ограничения общности можно считать, что  $\text{rank}(a_{ij}) = n$ . Такие переопределённые системы возникают на практике, например при обработке большого массива вычислений. В общем случае система (7) несовместна и не имеет решений. Однако можно попробовать найти такие значения неизвестных  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ , чтобы средняя квадратичная ошибка

$$\sum_{k=1}^m (a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \dots + a_{kn}x_n^0 - b_k)^2$$

принимала наименьшее значение. Будем интерпретировать столбцы

$$\mathbf{e}_1 = [a_{11}, \dots, a_{m1}], \dots, \mathbf{e}_n = [a_{1n}, \dots, a_{mn}], \mathbf{f} = [b_1, \dots, b_m]$$

как векторы  $m$ -мерного евклидова пространства со стандартным скалярным произведением

$$([x_1, \dots, x_m] \mid [y_1, \dots, y_m]) = \sum_{i=1}^m x_i y_i.$$

В таком случае

$$\sum_{k=1}^m (a_{k1}x_1^0 + \dots + a_{kn}x_n^0 - b_k)^2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i^0 \mathbf{e}_i - \mathbf{f} \right\|^2$$

есть квадрат расстояния от  $\sum_{i=1}^n x_i^0 \mathbf{e}_i$  до  $\mathbf{f}$ . Если  $U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  — линейная оболочка линейно независимых по условию векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , то задача о минимуме квадратичного уклонения свелась к известной задаче о перпендикуляре, т.е. к отысканию проекции вектора  $\mathbf{f}$  на  $U$ . Интересующие нас компоненты  $x_1^0, \dots, x_n^0$  “приближённого решения” исходной линейной системы находятся из совместной

определенной “нормальной” системы

$$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1)x_1^0 + (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1)x_2^0 + \dots + (\mathbf{e}_n | \mathbf{e}_1)x_n^0 = (\mathbf{f} | \mathbf{e}_1),$$

$$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2)x_1^0 + (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2)x_2^0 + \dots + (\mathbf{e}_n | \mathbf{e}_2)x_n^0 = (\mathbf{f} | \mathbf{e}_2),$$

.....

$$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_n)x_1^0 + (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_n)x_2^0 + \dots + (\mathbf{e}_n | \mathbf{e}_n)x_n^0 = (\mathbf{f} | \mathbf{e}_n)$$

с определителем Грама  $\det \|(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j)\| \neq 0$ .

**4. Тригонометрические многочлены.** Из легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cdot \cos lt dt &= 0, \quad k \neq l, & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt &= \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cdot \sin lt dt &= 0, \quad k \neq l, & \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dt &= 2\pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cdot \sin lt dt &= 0, \quad k \neq l, & \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt &= \pi \end{aligned}$$

следует, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt$$

составляют ортонормированный базис  $(2n+1)$ -мерного пространства  $V_{2n+1}$  так называемых тригонометрических многочленов

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \quad (8)$$

порядка  $n$ .

Общие рассуждения об аппроксимации функций показывают, что тригонометрический многочлен  $s_n(t)$  с (чуть изменёнными) коэффициентами Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad 1 \leq k \leq n,$$

даёт наилучшее приближение в среднем (порядка  $n$ ) к произвольной функции  $f \in C_2(-\pi, \pi)$ .

Глубоко развитая теория рядов Фурье решает для различных классов функций, являются ли многочлены Фурье, дающие наилучшее приближение в среднем, также равномерно аппроксимирующими, т.е. сходится ли бесконечный ряд  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$  равномерно и представляет ли он функцию  $f(t)$ . Ответ оказывается утвердительным, в частности, для любой непрерывной на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции  $f(t)$

с естественным условием  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Этот результат можно вывести из теоремы Вейерштрасса, формулируемой в п. 6. Доказательство не входит в наши планы.

Сделаем важное замечание технического порядка. При помощи уже встречавшейся нам формулы Эйлера  $\cos kt + i \sin kt = e^{ikt}$  тригонометрический многочлен (8), отвечающий комплексной функции  $f(t)$ , можно представить в более удобной форме

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikt}, \quad (9)$$

(обратите внимание на необычное суммирование от  $-n$  до  $n$ ), где

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} (f|e^{ikt}),$$

$$2\alpha_0 = a_0; \quad 2\alpha_k = a_k - ib_k, \quad k > 0; \quad 2\alpha_k = a_{-k} + ib_{-k}, \quad k < 0.$$

Показательные функции

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

дают на отрезке  $[-\pi, \pi]$  пример комплексной ортонормированной системы, как это непосредственно вытекает из соотношений ортогональности

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} dt = \delta_{kl}.$$

**5. Замечание о самосопряжённых операторах.** Полнота ортонормированной системы тригонометрических (показательных) функций даёт повод взглянуть на неё с несколько необычной стороны. Дело в том, что очень многие полные ортонормированные системы функций являются наборами собственных функций (собственных векторов) соответствующих самосопряжённых операторов, действующих на  $C_2(a, b)$  или на некоторых подмножествах  $\Omega \subset C_2(a, b)$ .

Вообще говоря, теорема о диагонализации самосопряжённого оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ ,  $\dim V < \infty$ , не переносится на бесконечномерные пространства, как показывает хотя бы пример линейного оператора  $\mathcal{F}_t$  умножения на  $t$ . Оператор  $\mathcal{F}_t$  симметричен:

$$(\mathcal{F}_t f(t) | g(t)) = \int_a^b t f(t) g(t) dt = \int_a^b f(t) t g(t) dt = (f(t) | \mathcal{F}_t g(t)).$$

Но  $\mathcal{F}_t e(t) = \lambda e(t) \rightarrow e(t) \equiv 0$ , поэтому оператор  $\mathcal{F}_t$  совсем не имеет собственных векторов. Можно было бы упомянуть и другие трудности работы с линейными операторами на бесконечномерных (хотя бы и гильбертовых) пространствах, но это только увело бы нас в сторону.

Гораздо важнее отметить, что многие операторы на бесконечномерных метрических пространствах, имеющие первостепенное значение в математике и физике, при выполнении ряда условий являются самосопряжёнными, причём для них справедлив естественный аналог спектральной теоремы в конечномерном случае. Именно, если  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — самосопряжённый оператор, то ортонормированная система  $S_{\mathcal{A}}$  его собственных векторов (функций) зачастую оказывается полной в  $V$  в смысле п. 2. Этот замечательный факт мы проиллюстрируем простейшим доступным примером.

В дальнейшем пусть  $C_2''(a, b)$  — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций с обычным скалярным произведением

$$(f | g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Рассматривается совокупность вещественнонозначных функций

$$\Omega = \{ f \in C_2''(-\pi, \pi) \mid f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi) \}$$

и линейный оператор

$$\mathcal{A} = \frac{d^2}{dt^2} : C_2(-\pi, \pi) \rightarrow C_2(-\pi, \pi)$$

с областью определения  $\Omega$ . Правило интегрирования по частям даёт

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}f(t) | g(t)) &= \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) g(t) dt = \\ &= f'(t) g(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) g'(t) dt = - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) g'(t) dt = \\ &= f(t) g'(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) g'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g''(t) dt = (f(t) | \mathcal{A}g(t)). \end{aligned}$$

Это означает, что при сделанных предположениях оператор  $\mathcal{A}$  является самосопряжённым (симметричным). Что можно сказать о его собственных функциях и собственных значениях? Пусть

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lambda f(t), \quad f(t) \in \Omega.$$

Решениями этого уравнения с учётом ограничений, сформулированных в определении  $\Omega$ , будут функции

$$M_k \cos kt + N_k \sin kt, \tag{9}$$

отвечающие собственному значению  $\lambda = -k^2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Если бы существовали какие-то ещё собственные значения, то нашлась бы функция, ортогональная ко всем тригонометрическим функциям (свойство ортогональности собственных векторов самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям), а это

невозможно в силу полноты тригонометрической системы. По тем же соображениям при  $\lambda = -k^2$  все решения исчерпываются функциями (2).

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** *Дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lambda f(t)$$

*в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, определённых на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и удовлетворяющих условиям*

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi),$$

*имеет решения только при  $\lambda = -n^2$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Каждому  $n$  отвечает двумерное пространство решений  $\langle \cos nt, \sin nt \rangle$ . Все решения  $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots$  образуют в  $C_2(-\pi, \pi)$  полную ортогональную систему функций.*

Термин “дифференциальное уравнение” нужно воспринимать пока лишь как синоним “уравнение на собственные значения и собственные функции”

$$\mathcal{D}f(t) = \lambda f(t),$$

где

$$\mathcal{D} = a_m(t) \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1}(t) \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} \quad (*)$$

— линейный дифференциальный оператор, действующий на пространстве достаточно гладких вещественных функций на отрезке  $[a, b]$ ; предполагается, что если  $f(t)$  — функция из этого класса, то  $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b)$  для  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . Используя формулу интегрирования по частям несколько раз, получаем

$$\mathcal{D}^* = \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \circ a_i(t), \quad (**)$$

где запись  $\frac{d^i}{dt^i} \circ a_i(t)$  для оператора означает, что, применяя его к функции  $f(t)$ , мы сначала умножаем её на  $a_i(t)$  и затем дифференцируем  $i$  раз по  $t$ . Формула  $(**)$  определяет операцию (формального) сопряжения дифференциальных операторов:  $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}^*$ . Оператор  $\mathcal{D}$  называется (*формально*) *самосопряжённым*, если  $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ . Слово “формальный” здесь напоминает о том, что в определении не указано явно пространство, на котором  $\mathcal{D}$  реализуется как линейный оператор.

### 6. Многочлены Лежандра (сферические многочлены).

Упомянутая в п. 4 теорема Вейерштрасса гласит: *любую функцию  $f(t)$ , непрерывную на отрезке  $a \leq t \leq b$ , можно равномерно аппроксимировать на этом отрезке многочленами от  $t$ .* Другими словами,

для любого положительного  $\varepsilon$  найдётся многочлен  $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  достаточно высокой степени  $n$  такой, что

$$|a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n - f(t)| < \varepsilon, \quad a \leq t \leq b$$

(функция  $f(t)$  задана). Из этой теоремы, доказываемой в курсе анализа, вытекает как полнота в смысле п. 2 бесконечной системы одиночленов  $\{t^i\}_0^\infty$ , так и сходимость в среднем (или по норме) к  $f(t)$  ряда Фурье, построенного по  $f(t)$  и по соответствующей ортонормированной системе. Чтобы получить такую систему, нужно применить к одночленам  $t^k$  процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Этот процесс даст последовательность ортогональных нормированных многочленов — однозначно определённых, если зафиксировать отрезок, скажем,  $-1 \leq t \leq 1$ , и условиться выбирать старший коэффициент в каждом многочлене положительным.

Чаще, однако, систему ортогональных многочленов  $\{\varphi_n(t)\}$  нормируют не интегральным условием  $\|\varphi_n(t)\| = 1$ , а каким-нибудь локальным соглашением одного из следующих типов:

- 1)  $\varphi_n(t)$  — нормализованный многочлен степени  $n$ , т.е.  $\varphi_n^{(n)} = n!$ ;
- 2)  $\varphi_n(1) = 1$ .

В любом случае получаются системы пропорциональных векторов (функций), поскольку условие ортогональности записывается одинаково:

$$\int_{-1}^1 t^k \varphi_n(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Последовательно полагая  $n = 1, 2, 3, \dots$  и выбирая нормировку типа 1), получаем систему ортогональных многочленов

$$u_0(t) = 1, \quad u_1(t) = t, \quad u_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad u_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad \dots \quad (10)$$

рассмотренных более двухсот лет назад (1785 г.) французским математиком Лежандром в связи с задачами теории потенциала. Общая формула для них была получена позднее, и теперь *многочленами Лежандра* называют систему ортогональных многочленов

$$P_0(t) = 1, \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(t^2 - 1)^n}{dt^n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

с нормировкой типа 2):  $P_n(1) = 1$ . Вот несколько первых многочленов:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \quad \dots$$

Проверим, что действительно многочлены (11) обладают нужными свойствами. По формуле бинома Ньютона имеем

$$(t^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} t^{2(n-k)} = t^{2n} - nt^{2n-2} + \dots$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2^n n!} [2n(2n-1)\dots(n+1)t^n + \text{члены степени} \leq n-2] = \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} t^n + \text{члены более низкой степени} \quad (12) \end{aligned}$$

Это показывает, что  $\deg P_n(t) = n$ , причём мы получили одновременно выражение для старшего коэффициента многочлена  $P_n(t)$ .

Далее, применяя к многочлену  $(t^2 - 1)^n = (t-1)^n(t+1)^n$  формулу Лейбница  $n$ -кратного дифференцирования произведения, получим

$$\frac{d^n}{dt^n} [(t-1)^n(t+1)^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dt^k} (t-1)^n \cdot \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} (t+1)^n.$$

Так как при  $k < n$  многочлен  $\frac{d^k}{dt^k} (t-1)^n$  делится на  $t-1$  и, следовательно, обращается в нуль при  $t=1$ , то

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n} \left[ \frac{d^n}{dt^n} (t-1)^n \right] (t+1)^n |_{t=1} = \frac{1}{2^n n!} \cdot 1 \cdot n! \cdot 2^n = 1.$$

Заметим, кстати, что при  $m < n$  формула Лейбница  $m$ -кратного дифференцирования произведения  $(t-1)^n(t+1)^n$  даст нам многочлен, делящийся на  $t-1$  и на  $t+1$ , т.е.

$$\frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^n = (t^2 - 1) \cdot v_m(t), \quad m < n.$$

Стало быть,

$$\frac{d^m}{dt^m} (t^2 - 1)^n, \quad m < n,$$

— многочлен, обращающийся в нуль при  $t = \pm 1$ . Используя теперь правило интегрирования по частям, проведём проверку условий ортогональности  $P_n(t)$  к функциям  $1, t, \dots, t^{n-1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} 2^n n! (t^k | P_n(t)) &= \int_{-1}^1 t^k \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n dt = \\ &= t^k \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n \Big|_{-1}^{+1} - k \int_{-1}^1 t^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (t^2 - 1)^n dt = \\ &= -kt^{k-1} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (t^2 - 1)^n \Big|_{-1}^{+1} + k(k-1) \int_{-1}^1 t^{k-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} (t^2 - 1)^n dt. \end{aligned}$$

Постепенно понижая показатель при  $t$ , придём к окончательному равенству

$$2^n n! (t^k | P_n(t)) = (-1)^k k! \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} (t^2 - 1)^n \Big|_{-1}^{+1} = 0.$$

Косвенным образом мы не только доказали попарную ортогональность многочленов Лежандра

$$(P_k(t) | P_l(t)) = 0, \quad k \neq l,$$

но и получили выражение для членов последовательности (10):

$$u_n(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} P_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Действительно, из общих соображений мы знаем, что  $u_n(t)$  и  $P_n(t)$  могут отличаться лишь постоянным множителем, и сравнение старших коэффициентов (см. формулу (12)) даёт нужное соотношение.

Предлагается проверить, что

$$\|P_n(t)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(t) dt = \frac{2}{2n+1}. \quad (13)$$

Положим временно  $w_n = (t^2 - 1)^n$ . При помощи формулы Лейбница  $(n+1)$ -кратного дифференцирования произведений, стоящих в обеих частях тождества

$$(t^2 - 1) \frac{d}{dt} w_n = 2n t w_n,$$

получим

$$\begin{aligned} (t^2 - 1) \frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}} w_n + 2(n+1)t \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} w_n + (n+1)n \frac{d^n}{dt^n} w_n = \\ = 2n t \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} w_n + 2n(n+1) \frac{d^n}{dt^n} w_n. \end{aligned}$$

Умножив все члены этого равенства на  $1/(2^n n!)$  и воспользовавшись тем, что

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} w_n = P_n(t),$$

мы придём к дифференциальному соотношению

$$(t^2 - 1) \frac{d^2}{dt^2} P_n(t) + 2t \frac{d}{dt} P_n(t) - n(n+1) P_n(t) = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим на пространстве  $C_2(-1, 1)$  линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{S} = (t^2 - 1) \frac{d^2}{dt^2} + 2t \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ (t^2 - 1) \frac{d}{dt} \right]$$

с областью определения  $C_2''(-1, 1)$ , где, как и ранее (см. п. 4), берётся пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций с обычным скалярным произведением. Оператор  $\mathcal{S}$  самосопряжён, как это вытекает непосредственно из общих формул (\*), (\*\*) в конце п. 4. Равенство (14), переписанное в виде

$$\mathcal{S} P_n(t) = n(n+1) P_n(t), \quad (15)$$

показывает, что многочлен  $P_n(t)$  является собственной функцией самосопряжённого линейного оператора  $\mathcal{S}$ , отвечающей собственному значению  $\lambda = n(n+1)$ . Итак, уравнение  $\mathcal{S}x(t) = n(n+1)x(t)$  допускает ненулевое решение  $x = P_n(t)$ . Если бы размерность собственного подпространства  $V^\lambda$  была больше единицы, то в  $V^\lambda$  существовал бы вектор  $y(t) \neq 0$ , ортогональный к  $P_n(t)$ . Так как собственные подпространства самосопряжённого оператора взаимно ортогональны:

$$(V^\lambda | V^\mu) = 0, \quad \lambda \neq \mu,$$

то вектор  $y(t)$  ортогонален ко всем  $P_j(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Это, однако, противоречит полноте системы (11), вытекающей из теоремы Вейерштрасса. По той же причине оператор  $\mathcal{S}$  не имеет собственных значений, отличных от  $n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Нами доказано (по модулю теоремы Вейерштрасса) следующее утверждение.

**Теорема 3. Дифференциальное уравнение**

$$\frac{d}{dt} \left[ (t^2 - 1) \frac{d}{dt} x(t) \right] = \lambda x(t)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке  $-1 \leq t \leq 1$  имеет решения только при  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Каждому  $n$  отвечает единственное с точностью до умножения на константу решение  $x(t) = P_n(t)$ . Все указанные решения образуют в  $C_2(-1, 1)$  полную ортогональную систему функций.

Рассмотренные нами (весьма бегло) дифференциальные операторы  $\frac{d^2}{dt^2}$  и  $\frac{d}{dt} \left[ (t^2 - 1) \frac{d}{dt} \right]$  принадлежат к более широкому классу так называемых **операторов Штурма—Лиувилля**, играющих заметную роль в математической физике.

**Замечание.** Многочлены

$$u_n(t) = \alpha_n P_n(t), \quad \alpha_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!},$$

из системы (10) обладают следующим интересным свойством минимальности. Среди всех нормализованных вещественных многочленов степени  $n$  многочлен  $u_n(t)$  наименее удалён в среднем от нуля на отрезке  $-1 \leq t \leq 1$ .

В самом деле, речь идёт о минимуме интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t)^2 dt \quad \text{для } f(t) = t^n + \dots \in \mathbb{R}[t].$$

Используя разложение

$$f(t) = \alpha_n P_n(t) + \gamma_{n-1} P_{n-1}(t) + \dots + \gamma_1 P_1(t) + \gamma_0, \quad \gamma_i \in \mathbb{R},$$

попарную ортогональность многочленов  $P_k(t)$  и формулу (13) для  $\|P_n(t)\|$ , получим выражение

$$I(f) = \frac{2\alpha_n^2}{2n+1} + 2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\gamma_i^2}{2i+1},$$

которое, очевидно, достигает минимума при  $\gamma_i = 0$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

**7. Ортогонализация с весом.** Непосредственным обобщением многочленов Лежандра служат многочисленные семейства функций, получающиеся следующим образом. Пусть на отрезке  $a \leq t \leq b$  за-

дана неотрицательная функция  $p(t)$ , которую мы будем называть *весовой функцией*. Рассматривается векторное пространство

$$V(\sqrt{p(t)}) = \left\langle \sqrt{p(t)} t^k \mid k = 0, 1, 2, \dots \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

или его конечномерное подпространство

$$V_n(\sqrt{p(t)}) = \left\langle \sqrt{p(t)} t^k \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Встаёт вопрос о выборе в  $V(\sqrt{p(t)})$  (или в  $V_n(\sqrt{p(t)})$ ) ортонормированного базиса. Обычный процесс ортогонализации Грама—Шмидта приводит к системе функций

$$\{\sqrt{p(t)} Q_n(t)\}, \quad Q_n(t) \in \mathbb{R}[t], \quad \deg Q_n = n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

удовлетворяющих условию

$$(\sqrt{p(t)} Q_m(t) \mid \sqrt{p(t)} Q_n(t)) = \int_a^b p(t) Q_m(t) Q_n(t) dt = \delta_{mn}.$$

Говорят, что  $\{Q_n(t)\}$  — *ортогональные многочлены, соответствующие весу  $p(t)$* . В этом смысле многочлены Лежандра соответствуют весу 1.

Мы могли бы с самого начала ввести новое скалярное произведение

$$(f \mid g)_{p(t)} = \int_a^b p(t) f(t) g(t) dt,$$

и тогда речь шла бы об ортогонализации многочленов в прежнем смысле, но, как правило, предпочитают иметь дело с фиксированным скалярным произведением.

**8. Многочлены Чебышева (первого рода).** Русский математик и механик П.Л. Чебышев (1821–1894), обладавший разносторонними интересами, заложил основы теории аппроксимации функций. Ему принадлежат основные идеи общей теории ортогональных многочленов. Замечательная серия ортогональных многочленов  $T_n(t)$ ,  $n \geq 0$ ,  $(a, b) = (-1, 1)$ , соответствующих весу  $p(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ , носит его имя. Вот их явное выражение:

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-t^2} \frac{d^n}{dt^n} (1-t^2)^{n-1/2} = \cos(n \arccos t). \quad (16)$$

В частности,

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_2(t) = 2t^2 - 1,$$

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t, \quad T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1.$$

Нормировка:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(t) T_n(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi/2 & \text{при } m = n \neq 0, \\ \pi & \text{при } m = n = 0. \end{cases}$$

В связи с замечанием в конце п. 6 отметим, что многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля в том смысле, что максимум абсолютного значения  $\left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) \right|$  на отрезке  $-1 \leq t \leq 1$  принимает наименьшее значение в классе всех нормализованных вещественных многочленов степени  $n$ .

**Упражнение.** Проверьте, что выражение (16) правильно, и докажите, что многочлен Чебышева  $T_n(t)$  является собственным вектором с собственным значением  $n^2$  дифференциального оператора

$$(t^2 - 1) \frac{d^2}{dt^2} + t \frac{d}{dt}.$$

**9. Многочлены Эрмита.** Рассмотрим вкратце многочлены Эрмита  $H_n(t)$  (правильнее — многочлены Лапласа—Чебышева—Эрмита), отвечающие выбору  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ ,  $p(t) = e^{-t^2}$  и получающиеся в результате ортогонализации базисной последовательности одночленов  $1, t, t^2, \dots$ . Явные формулы:

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2};$$

$$H_0(t) = 1, \quad H_1(t) = 2t, \quad H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad \dots;$$

нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Это — небольшое упражнение для читателя, овладевшего материалом п. 5. Надо только воспользоваться значением несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

и тем обстоятельством, что на концах интервала  $(-\infty, \infty)$  все производные функции  $e^{-t^2}$  обращаются в нуль.

Далее, прямая индукция по  $n$  устанавливает справедливость следующего утверждения.

*Многочлен Эрмита  $H_n(t)$  есть собственный вектор с собственным значением  $-2n$  дифференциального оператора*

$$\mathcal{K} = \frac{d^2}{dt^2} - 2t \frac{d}{dt}.$$

В математической физике полезны также функции Эрмита

$$\psi_n(t) = e^{-t^2/2} H_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

Докажем, что функция  $\psi_n(t)$  является собственным вектором оператора

$$\mathcal{H} = \frac{d^2}{dt^2} - t^2$$

с собственным значением  $-(2n+1)$ .

С этой целью рассмотрим вспомогательный оператор

$$\mathcal{M} = \frac{d}{dt} - t.$$

Легко проверить, что

$$[\mathcal{H}, \mathcal{M}] = \mathcal{H}\mathcal{M} - \mathcal{M}\mathcal{H} = -2\left(\frac{d}{dt} - t\right) = -2\mathcal{M}.$$

Отсюда следует, что если  $f$  — собственная функция оператора  $\mathcal{H}$  с собственным значением  $\lambda$ , то  $\mathcal{M}f$  есть собственная функция оператора  $\mathcal{H}$  с собственным значением  $\lambda - 2$ :

$$\mathcal{H}\mathcal{M}f = [\mathcal{H}, \mathcal{M}]f + \mathcal{M}\mathcal{H}f = -2\mathcal{M}f + \lambda\mathcal{M}f = (\lambda - 2)\mathcal{M}f.$$

Индукция по  $n$  приводит к соотношению

$$\mathcal{H}\mathcal{M}^n f = (\lambda - 2n)\mathcal{M}^n f.$$

Так как  $\mathcal{H}e^{-t^2/2} = -e^{-t^2/2}$ , то, заменяя  $f$  на  $e^{-t^2/2}$  и  $\lambda$  на  $-1$ , мы приходим к выводу, что  $\mathcal{M}^n e^{-t^2/2}$  есть собственная функция для  $\mathcal{H}$  с собственным значением  $-(2n+1)$  при всех  $n \geq 0$ .

С другой стороны, индукция по  $n$  и непосредственные вычисления показывают, что

$$e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = \mathcal{M}^n e^{-t^2/2},$$

т.е.

$$\psi_n(t) = (-1)^n \mathcal{M}^n e^{-t^2/2}.$$

Тем самым всё доказано.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Тригонометрический ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{\sqrt{k}}$  сходится на  $\mathbb{R}$ . Используя неравенство Бесселя, показать, что он не является рядом Фурье никакой функции  $f \in C_2(-\pi, \pi)$ .

**2.** Получить рекуррентные формулы:

а) для многочленов Лежандра  $P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t)$ ;

б) для многочленов Чебышева  $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$ ;

в) для многочленов Эрмита  $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$ .

**3.** Доказать самосопряжённость дифференциального оператора  $\mathcal{S}$  из п. 6 непосредственно, не опираясь на общую формулу  $(**)$  из п. 5.

**4.** Доказать, что  $f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$  — производящая функция для многочленов Лежандра (в разложении  $f(x, t)$  по степеням  $x$  коэффициентом при  $x^n$  служит  $P_n(t)$ ).

5. Доказать, что  $\max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(t) \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

**6.** Доказать, что многочлены Чебышева второго рода

$$U_n(t) := \frac{1}{n+1} \frac{dT_{n+1}(t)}{dt} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2m+1} t^{n-2m} (t^2 - 1)^m$$

ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\sqrt{1-t^2}$ :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_m(t) U_n(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi/2, & m = n. \end{cases}$$

**7.** Доказать, что все нули многочленов  $T_n(t)$ ,  $U_n(t)$  — вещественные, попарно различны и лежат внутри отрезка  $[-1, 1]$ . Указать эти нули в явном виде.

## ГЛАВА 4

# АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ТОЧЕЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

---

Нам, живущим в трёхмерном физическом мире (обозначаемом  $\mathbb{R}^3_{\Phi}$ ), приходится иметь дело с точками, прямыми, плоскостями, расположеными причудливым образом относительно друг друга и не привязанными к какой-то выделенной точке — началу координат. Понятно, что и в общем случае было бы желательно рассматривать геометрические объекты, которые получаются из прямых и плоскостей, проходящих через начало координат, сдвигами. Другими словами, отвлекаясь пока от метрики, мы хотели бы сделать векторное пространство однородным, расширив его группу автоморфизмов при помощи сдвигов так, чтобы все векторы (теперь уже “точки” нового “аффинного пространства”) становились эквивалентными. В этой главе будут введены все необходимые определения и доказаны простейшие свойства аффинных пространств.

## § 1. Аффинные пространства

**1. Определение аффинного пространства.** Как было отмечено выше, в любом векторном пространстве начало координат, ассоциирующееся с нулевым вектором, играет особую роль: при всех автоморфизмах пространства нулевой вектор остаётся на месте. Все векторы станут равноправными (или эквивалентными) только после расширения общей линейной группы за счёт сдвигов (параллельных переносов) пространства. Чтобы эти соображения приобрели точный смысл, введём несколько определений.

**Определение 1.** Пусть  $\mathbb{A}$  — некоторое непустое множество, элементы которого мы будем называть *точками* и обозначать<sup>1)</sup>  $\dot{p}, \dot{r}, \dot{s}, \dots$

Пусть, далее,  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . Множество  $\mathbb{A}$  (а точнее, пара  $(\mathbb{A}, V)$ ) называется *аффинным пространством*, ассоциированным (или связанным) с  $V$ , если задано отображение  $(\dot{p}, \mathbf{v}) \mapsto \dot{p} + \mathbf{v}$  декартова произведения  $\mathbb{A} \times V$  в  $\mathbb{A}$ , обладающее следующими свойствами:

i)  $\dot{p} + \mathbf{0} = \dot{p}$ ,  $(\dot{p} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \dot{p} + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$  для любой точки  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  и любых векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  ( $\mathbf{0}$  — нулевой вектор пространства  $V$ );

<sup>1)</sup> Часто, особенно в механике и в теории дифференциальных уравнений, символом  $\dot{p}$  обозначают производную  $dp/dt$  дифференцируемой функции  $p = p(t)$ . У нас эта ситуация не встретится.

ii) каковы бы ни были точки  $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$ , найдётся, и притом единственный вектор  $\mathbf{v} \in V$ , для которого  $\dot{p} + \mathbf{v} = \dot{q}$  (этот “вектор из  $\dot{p}$  в  $\dot{q}$ ” обозначается обычно  $\overrightarrow{pq}$  или  $\dot{q} - \dot{p}$ ).

Размерность  $n = \dim_{\mathbb{K}} V$  векторного пространства  $V$  считается одновременно размерностью ассоциированного с  $V$  аффинного пространства  $\mathbb{A}$ . Иногда пишут  $\mathbb{A}^n$ , чтобы подчеркнуть роль размерности. В тех наиболее интересных случаях, когда  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , говорят о *вещественном* или соответственно *комплексном* аффинном пространстве.

По своему смыслу аксиома ii) утверждает, что каждой точке  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  отвечает биекция  $\mathbf{v} \rightarrow \dot{p} + \mathbf{v}$  множеств:  $V \cong \mathbb{A}$ . С другой стороны, мы имеем биективное отображение

$$t_{\mathbf{v}}: \dot{p} \rightarrow \dot{p} + \mathbf{v} = t_{\mathbf{v}}(\dot{p}), \quad \dot{p} \in \mathbb{A},$$

на множестве  $\mathbb{A}$ , называемое *сдвигом* (или *параллельным переносом*) в  $\mathbb{A}$  на вектор  $\mathbf{v}$ . Из аксиом i), ii) следует, что

$$t_{\mathbf{u}} \cdot t_{\mathbf{v}} = t_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}, \quad t_{\mathbf{v}} \cdot t_{-\mathbf{v}} = e$$

( $e := t_0$  — тождественное отображение), т.е.  $t_{-\mathbf{v}}$  — сдвиг, обратный к  $t_{\mathbf{v}}$ . Стало быть, сдвиги образуют группу, изоморфную аддитивной группе пространства  $V$ . Если положить

$$\alpha t_{\mathbf{u}} + \beta t_{\mathbf{v}} := t_{\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}},$$

то множество всех сдвигов становится векторным пространством, однозначно определённым пространством  $\mathbb{A}$  и изоморфным пространству  $V$ . Обозначим его символом  $\mathbb{A}^\#$ .

**Замечание.** Обратим внимание на то обстоятельство, что один и тот же знак  $+$  используется в выражениях  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ,  $\dot{p} + \mathbf{v}$ , имеющих совершенно разный смысл, но это не приводит к недоразумениям. Если, далее,  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{s}$  — такие точки из  $\mathbb{A}$ , что  $\dot{p} + \mathbf{v} = \dot{q}$ ,  $\dot{r} + \mathbf{v} = \dot{s}$ , то  $\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}$  — ничто иное как разные представители класса, обозначенного вектором  $\mathbf{v}$ . Запись  $\dot{p} + \overrightarrow{pq} = \dot{q}$  удобно использовать в силу её мнемоничности, не более того. Непосредственно из определения получаются простые правила действий с векторами  $\overrightarrow{pq}$ :

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}, \quad \overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}, \quad \overrightarrow{pp} = \mathbf{0}$$

( $p, q, r$  — произвольные точки из  $\mathbb{A}$ ). С таким же правом можно писать

$$(\dot{q} - \dot{p}) + (\dot{r} - \dot{q}) = \dot{r} - \dot{p}, \quad (\dot{q} - \dot{p}) = -(\dot{p} - \dot{q}), \quad \dot{p} - \dot{p} = \mathbf{0}.$$

**Пример 1.** Если  $V$  — произвольное векторное пространство над полем  $\mathbb{K}$  и  $\mathbb{A} = \mathbf{v}_0 + U$  — смежный класс по векторному подпространству  $U \subset V$  ( $\mathbf{v}_0$  — фиксированный вектор из  $V$ ), то  $\mathbb{A}$  является аффинным пространством над  $\mathbb{K}$  с пространством параллельных переносов  $\mathbb{A}^\# = U$ . Каждому вектору  $\mathbf{u}' \in U$  отвечает биекция  $\mathbf{v}_0 + \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}_0 + \mathbf{u} + \mathbf{u}'$ , удовлетворяющая аксиомам i), ii) просто потому, что векторы пространства  $V$  образуют группу по сложению. Говорят,

что  $\mathbb{A}$  — *аффинное линейное многообразие* (или, коротко, *линейное многообразие*) пространства  $V$ , а подпространство  $U$  — *направление линейного многообразия*  $\mathbb{A}$ .

В частности, когда  $U = V$  и  $\mathbb{A}$  как множество совпадает с  $V$ , будем писать  $V_a := \mathbb{A}$ , понимая под точкой  $\dot{p} \in V_a$  просто некоторый вектор  $\mathbf{u} \in V$ . Таким образом, для любого вектора  $\mathbf{v} \in V$  имеем  $\dot{p} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V_a$ , и отображение  $V_a \times V \rightarrow V_a$  обладает свойствами i), ii). В этом случае  $(V_a)^\# \cong V$ . Фактически на одном множестве  $V$  определены две различные алгебраические структуры.

**2. Изоморфизм.** Аффинные пространства  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ , ассоциированные с одним и тем же векторным пространством  $V$ , естественно называть *изоморфными*, если существует биективное отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , для которого  $f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathbf{v}$  при всех  $\mathbf{v} \in V, \dot{p} \in \mathbb{A}$  (ради простоты мы обозначаем результат применения сдвига  $t_\mathbf{v}$  в  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$  одним и тем же символом).

Дадим более общее

**Определение 2.** Пусть  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  — аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами  $V, V'$  над одним и тем же полем  $\mathbb{K}$ . Отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  называется *аффинным* (или *аффинно-линейным*), если для всех  $\dot{p} \in \mathbb{A}, \mathbf{v} \in V$  выполнено соотношение

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

где  $Df : V \rightarrow V'$  — линейное отображение векторных пространств. Отображение  $Df$  называют иногда *линейной частью* (или *дифференциалом*) отображения  $f$ . Для биективного аффинно-линейного отображения  $f$  линейная часть  $Df$  также биективна. В этом случае говорят об *изоморфизме* между  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{A}'$ , а при  $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$  — об (*аффинном*) *автоморфизме* пространства  $\mathbb{A}$ , реализованном посредством *невырожденного аффинного преобразования*  $f$ .

Заметим, что в принятых ранее обозначениях  $\dot{p} + \mathbf{v} = \dot{q}$  уравнение (1) переписывается в виде

$$Df \cdot \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{f(p)f(q)}. \quad (1')$$

**Теорема 1.** *Аффинные пространства  $(\mathbb{A}, V), (\mathbb{A}', V')$  одинаковой размерности изоморфны.*

**Доказательство.** Так как  $\dim V = \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' = \dim V'$ , то существует биективное линейное отображение  $\mathcal{F} : V \rightarrow V'$  (теорема 5 из § 2 гл. 1). Зафиксируем точки  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  и  $\dot{o}' \in \mathbb{A}'$ . Построим отображение  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , полагая  $f(\dot{o}) = \dot{o}', Df = \mathcal{F}$ . Любую точку  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  можно записать в виде  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{v}$ . Согласно нашему определению

$$f(\dot{p}) = \dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v}). \quad (2)$$

Когда  $\dot{p}$  пробегает все точки в  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbf{v}$  пробегает все векторы в  $V$  (по определению аффинного пространства), а тогда  $\dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v})$  в силу биективности  $\mathcal{F}$  пробегает все точки в  $\mathbb{A}'$ . По тем же причинам разным точкам из  $\mathbb{A}$  соответствуют разные точки в  $\mathbb{A}'$ . Стало быть,  $f$  —

биективное отображение. Осталось проверить, что оно аффинно-линейно. В самом деле, используя (2), получаем

$$\begin{aligned} f(\dot{p} + \mathbf{u}) &= f((\dot{o} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}) = f(\dot{o} + (\mathbf{v} + \mathbf{u})) = \\ &= \dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = \dot{o}' + (\mathcal{F}(\mathbf{v}) + \mathcal{F}(\mathbf{u})) = \\ &= (\dot{o}' + \mathcal{F}(\mathbf{v})) + \mathcal{F}(\mathbf{u}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{u}. \quad \square \end{aligned}$$

### 3. Координаты.

Введём естественное

**Определение 3.** Системой координат (или репером) в  $n$ -мерном аффинном пространстве  $(\mathbb{A}, V)$  называется совокупность  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  точки  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  и базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $V$ . Координатами  $x_1, \dots, x_n$  точки  $\dot{p}$  в системе  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  считаются координаты вектора  $\overrightarrow{op}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ :  $\overrightarrow{op} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ .

Из равенства  $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq} - \overrightarrow{op}$  следует, что если  $x_1, \dots, x_n$  — координаты точки  $\dot{p}$ , а  $y_1, \dots, y_n$  — координаты точки  $\dot{q}$ , то координатами вектора  $\overrightarrow{pq}$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  будут  $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$ . Обратно, если  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{a}$ , то координаты  $y_1, \dots, y_n$  точки  $\dot{q}$  получаются сложением координат  $a_1, \dots, a_n$  вектора  $\mathbf{a}$  и координат  $x_1, \dots, x_n$  точки  $\dot{p}$ :  $y_i = a_i + x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Замечание.** Систему координат можно задавать также  $n+1$  точками  $\{\dot{o}_0; \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n\}$  такими, что векторы  $\overrightarrow{op_1}, \dots, \overrightarrow{op_n}$  образуют базис пространства  $V$ .

Сказанное выше об основных операциях, выраженных в координатах, резюмирует

**Теорема 2.** Пусть  $\{\dot{o}_0; \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n\}$  — система координат в пространстве  $(\mathbb{A}, V)$ ,  $\mathbf{e}_i := \overrightarrow{op}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Если координатами точек  $\dot{p}, \dot{q}$  в этой системе являются соответственно  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$ , то вектор  $\overrightarrow{pq}$  имеет координаты  $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . Для любого вектора  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$  точка  $\dot{p} + \mathbf{a}$  имеет координаты  $x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n$ .

Пусть мы хотим перейти от системы координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к системе  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ . Тогда нужно задать координаты  $b_1, \dots, b_n$

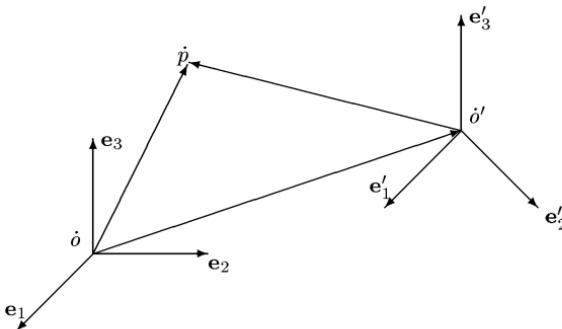


Рис. 5

точки  $\vec{o}'$  в старой системе (т.е. координаты вектора  $\vec{o}\vec{o}'$ ) и матрицу перехода  $A = (a_{ij})$  от базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  к базису  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  в пространстве  $V$  (рис. 5). Пусть  $x_1, \dots, x_n$  и  $x'_1, \dots, x'_n$  — старые и новые координаты точки  $\dot{p} \in \mathbb{A}$ . Из равенства

$$\begin{aligned} \vec{o}\vec{p} &= \vec{o}\vec{o}' - \vec{o}\vec{o}' = \sum_i b_i \mathbf{e}_i + \sum_j x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_i b_i \mathbf{e}_i + \sum_j x'_j \sum_i a_{ij} \mathbf{e}_i = \\ &= \sum_i \left( \sum_j a_{ij} x'_j \right) \mathbf{e}_i + \sum_i b_i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

следует, что

$$x_i = \sum_{j=i}^n a_{ij} x'_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Короче,

$$X = AX' + B,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Так как  $\det A \neq 0$ , то

$$X' = A^{-1}X + B', \quad B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A^{-1}B.$$

#### 4. Аффинные подпространства.

Для дальнейшего введём

Определение 4. Пусть  $\dot{p}$  — фиксированная точка  $n$ -мерного аффинного пространства  $(\mathbb{A}, V)$  и  $U$  — векторное подпространство в  $V$ . Тогда множество

$$\Pi = \dot{p} + U = \{\dot{p} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$$

называется *плоскостью* (или *аффинным подпространством*) в  $\mathbb{A}$  размёрности  $m = \dim U$ . Считается, что  $\Pi$  проходит через точку  $\dot{p}$  в направлении векторного подпространства  $U$ . При  $m = 0$  плоскость  $\Pi$  называется, естественно, *точкой*, при  $m = 1$  — *прямой*, при  $m = n - 1$  — *гиперплоскостью* (в полном соответствии с терминологией, принятой для векторных пространств). Говорят ещё, что  $U$  — *направляющее подпространство плоскости*  $\Pi$ .

Заметим, что если  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$ ,  $\dot{r} = \dot{p} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ , то

$$\dot{q} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{v} = \dot{r}.$$

Отсюда  $\overrightarrow{qr} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ , а так как  $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in U$ , то  $\overrightarrow{qr} \in U$ . Стало быть,

$$\dot{q}, \dot{r} \in \Pi \implies \overrightarrow{qr} \in U. \quad (4)$$

Далее,

$$\dot{s}, \dot{q}, \dot{r} \in \Pi \implies \dot{s} + \overrightarrow{qr} \in \Pi, \quad (5)$$

поскольку  $\dot{s} = \dot{p} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w} \in U$  и  $\overrightarrow{qr} \in U$ , так что  $\dot{s} + \overrightarrow{qr} = \dot{p} + (\mathbf{w} + \overrightarrow{qr})$ , где  $\mathbf{w} + \overrightarrow{qr} \in U$ .

Обратно, подмножество  $\Pi \subset \mathbb{A}$ , обладающее свойствами (4), (5), очевидно, является плоскостью в смысле данного нами определения.

Итак, направляющее подпространство  $U \subset V$  однозначно определяется плоскостью  $\Pi$  как совокупность всех векторов  $\overrightarrow{qr}$  с  $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi$ . Точку  $\dot{p}$ , входящую в определение  $\Pi$ , можно заменить любой другой точкой  $\dot{q} \in \Pi$ . Действительно,  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in U$ , поэтому

$$\dot{q} + U = (\dot{p} + \mathbf{u}) + U = \dot{p} + (\mathbf{u} + U) = \dot{p} + U.$$

Из отмеченных свойств  $\Pi$  непосредственно вытекает

**Теорема 3.** *Всякая плоскость  $\Pi = \dot{p} + U$  в аффинном пространстве сама является аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством  $U$ .*

**Доказательство.** В самом деле, аксиомы i), ii) аффинного пространства с заменой  $V$  на  $U$ , выполняющиеся в  $\mathbb{A}$ , выполняются и в  $\Pi$ . Далее, как мы знаем, для любых двух точек  $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi$  вектор  $\mathbf{w} = \overrightarrow{qr}$  принадлежит  $U$  и  $\dot{r} = \dot{q} + \mathbf{w}$ , причём вектор  $\mathbf{w}$  определён однозначно в  $V$ , а значит, и в  $U$ .  $\square$

Получим ещё несколько полезных фактов о подпространствах аффинного пространства  $(\mathbb{A}, V)$ . В дальнейшем предполагается, что основное поле  $\mathfrak{K}$ , которое пока находилось в тени, имеет характеристику  $\neq 2$ . В соответствии с общим определением на плоскости  $\Pi$  размерности  $r > 0$  лежат по крайней мере две различные точки  $\dot{p}, \dot{q}$ . При  $r = 1$  ( $\Pi$  — прямая) имеем

$$\Pi = \{\dot{p} + \lambda \overrightarrow{pq} \mid \lambda \in \mathfrak{K}\}. \quad (6)$$

**Теорема 4.** *Подмножество  $\Pi \subset \mathbb{A}$  тогда и только тогда является подпространством (плоскостью), когда оно целиком содержит прямую, проходящую через любые две его различные точки ( $\text{char. } \mathfrak{K} \neq 2$ ).*

**Доказательство.** Пусть сначала  $\Pi$  — плоскость. Тогда  $\Pi = \dot{p} + U$ ,  $\dot{p} \in \mathbb{A}$ ,  $U \subset V$ . Если  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$ , то согласно (6) точки прямой, проходящей через  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ , имеют вид

$$\dot{q}_1 + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2} = \dot{p} + \overrightarrow{pq_1} + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2}.$$

Если  $\dot{q}_1 = \dot{p} + \mathbf{u}_1$ ,  $\dot{q}_2 = \dot{p} + \mathbf{u}_2$ , то  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ ,  $\overrightarrow{q_1 q_2} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ ,  $\overrightarrow{pq_1} = \mathbf{u}_1$  и, значит,

$$\dot{q}_1 + \lambda \overrightarrow{q_1 q_2} = \dot{p} + \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \in \dot{p} + U = \Pi.$$

Обратно, пусть  $\dot{p} \in \Pi$ ,  $U = \{\overrightarrow{pq} \mid \dot{q} \in \Pi\}$ . Надо доказать, что  $U$  — векторное подпространство в  $V$ . По условию, если  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in \Pi$ ,  $\overrightarrow{pq_1} = \mathbf{u}_1$ ,  $\overrightarrow{pq_2} = \mathbf{u}_2$ , то точка  $\dot{p} + \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$ , лежащая на прямой

$\{\dot{q}_1 + \mu \overrightarrow{q_1 q_2} \mid \mu \in \mathbb{K}\}$  в  $\mathbb{A}$ , содержится в  $\Pi$  при любом  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Другими словами,

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U \implies \mathbf{u}_1 + \lambda(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \in U.$$

Кроме того,  $\mathbf{0} \in U$ , поскольку  $\dot{p} \in \Pi$ . При  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$  получаем импликацию  $\mathbf{u}_2 \in U \implies \lambda \mathbf{u}_2 \in U$ . При  $\lambda = 1/2$  из  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$  следует  $\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 \in U$ , а тогда и  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = 2(\frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2) \in U$ . Стало быть,  $U$  — векторное подпространство в  $V$ .  $\square$

**Следствие.** *Если  $\Pi'$  и  $\Pi''$  — плоскости аффинного пространства  $\mathbb{A}$ , то их пересечение  $\Pi = \Pi' \cap \Pi''$  либо пусто, либо является плоскостью. Если  $U', U''$  и  $U$  — векторные подпространства в  $V$ , соответствующие плоскостям  $\Pi', \Pi''$  и  $\Pi$ , то  $U = U' \cap U''$ .*

**Доказательство.** Если  $\Pi$  содержит лишь одну точку, то утверждение верно ( $U$  — нулевое подпространство). Пусть в  $\Pi$  имеются хотя бы две различные точки  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ . Тогда по теореме 4 прямая, проходящая через  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ , целиком содержится как в  $\Pi'$ , так и в  $\Pi''$ . Следовательно, эта прямая целиком содержится и в  $\Pi = \Pi' \cap \Pi''$ . Опять согласно теореме 4 приходим к заключению, что  $\Pi$  — плоскость. Впрочем, это видно и непосредственно: если  $\dot{p} \in \Pi' \cap \Pi''$ , то  $\Pi' = \dot{p} + U', \Pi'' = \dot{p} + U''$ . В таком случае  $\dot{q} \in \Pi' \cap \Pi'' \implies \dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}' = \dot{p} + \mathbf{u}''$ , где  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'' \in U' \cap U''$ . Мы видим, что  $\Pi$  состоит из точек вида  $\dot{p} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \in U' \cap U''$  и, стало быть, является плоскостью, ассоциированной с  $U = U' \cap U''$ .  $\square$

**Определение 5.** Любые две плоскости в направлении одного и того же подпространства  $U$  называются *параллельными*.

Совпадение двух параллельных плоскостей  $\dot{p} + U, \dot{q} + U$ , очевидно, имеет место в точности тогда, когда  $\overrightarrow{pq} \in U$ . В любом случае

$$\dot{q} + U = t_{\overrightarrow{pq}}(\dot{p} + U),$$

т.е. параллельные плоскости получаются друг из друга сдвигом. Уточним теперь замечание перед теоремой 2.

**Определение 6.** Говорят, что точки  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  аффинного пространства  $\mathbb{A}$  находятся в *общем положении* (или являются *аффинно независимыми*), если они не лежат в какой-нибудь  $(m-1)$ -мерной плоскости.

Свойство точек  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  находится в общем положении, выполнимое лишь при  $m \leq n = \dim \mathbb{A}$ , равносильно условию линейной независимости векторов  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}$  или системы векторов

$$\overrightarrow{p_i p_0}, \dots, \overrightarrow{p_i p_{i-1}}, \overrightarrow{p_i p_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{p_i p_m}$$

для любого другого индекса  $i$ , поскольку  $\overrightarrow{p_i p_j} = \overrightarrow{p_0 p_j} - \overrightarrow{p_0 p_i}$ . Взяв за  $U$  линейную оболочку  $\langle \overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m} \rangle$ , мы придём к выводу, что через точки  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$ , находящиеся в общем положении, проходит, и притом единственная,  $m$ -мерная плоскость  $\dot{p}_0 + U$ .

В случае произвольного множества  $\mathcal{M}$  точек из  $\mathbb{A}$  линейная оболочка  $U$  векторов  $\overrightarrow{p_0p}$  с фиксированным началом  $\dot{p}_0 \in \mathcal{M}$  и концами  $\dot{p}$ , также лежащими в  $\mathcal{M}$ , имеет размерность, равную рангу множества  $\langle \overrightarrow{p_0p} \mid \dot{p} \in \mathcal{M} \rangle$ , и не зависит от выбора точки  $\dot{p}_0$ . Плоскость  $\Pi := A(\mathcal{M}) := \dot{p}_0 + U$  можно рассматривать как пересечение всех плоскостей, содержащих  $\mathcal{M}$ .

**Определение 7.** Плоскость  $\Pi = A(\mathcal{M})$  называется *аффинной оболочкой* множества  $\mathcal{M}$ .

В частности, при  $\mathcal{M} = \{\Pi', \Pi''\}$  можно говорить об аффинной оболочке  $A(\Pi', \Pi'')$  любых двух плоскостей  $\Pi', \Pi'' \subset \mathbb{A}$ . Легко видеть, что аффинная оболочка  $A(\mathcal{M})$  определена множеством  $\mathcal{M}$  однозначно:  $A(\mathcal{M})$  — минимальная плоскость, содержащая  $\Pi'$  и  $\Pi''$ .

**Пример 2.**  $\Pi' = \{\dot{p}\}$  — нульмерная плоскость, содержащая одну точку  $\dot{p}$  двумерной плоскости  $(\mathbb{A}, \mathbb{R}^2)$ ,  $\Pi'' = \{\dot{q} + \lambda \overrightarrow{qr} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  — прямая в  $(\mathbb{A}, \mathbb{R}^2)$ . Если  $\dot{p} \in \Pi''$ , то, разумеется,  $A(\Pi', \Pi'') = \Pi''$ . Если же  $\dot{p} \notin \Pi''$ , то  $A(\Pi', \Pi'') = (\mathbb{A}, \mathbb{R}^2)$ .

**5. Барицентрические координаты.** Замечание в п. 3 наводит на мысль заменить в определении 3 векторы  $e_1, \dots, e_n$  точками  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n$ , находящимися в общем положении. Координаты произвольной точки  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  определяются из записи  $\dot{p} = \dot{p}_0 + \sum_{i=1}^n x_i(\dot{p}_i - \dot{p}_0)$ . Формально это выражение можно переписать в виде

$$\dot{p} = \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \dot{p}_0 + \sum_{i=1}^n x_i \dot{p}_i,$$

где, очевидно, отдельные слагаемые не имеют смысла. Более точно, для любых точек  $\dot{q}, \dot{r} \in \mathbb{A}$  и скаляра  $\lambda \in \mathbb{K}$ , вообще говоря, бессмысленно как-то геометрически интерпретировать сумму  $\dot{q} + \dot{r}$  или выражение  $\lambda \dot{q}$ , за исключением того случая, когда  $\mathbb{A} = V$ . Тем не менее имеет смысл

**Определение 8.** Пусть  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  — произвольные точки аффинного пространства  $\mathbb{A}$ . Любым скалярам  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$  с условием  $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$  сопоставим формальную сумму  $\sum_{i=0}^m \alpha_i \dot{p}_i$ , полагая

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \dot{p}_i = \dot{p} + \sum_{i=0}^m \alpha_i (\dot{p}_i - \dot{p}),$$

где  $\dot{p}$  — любая точка из  $\mathbb{A}$ . Говорят, что  $\sum \alpha_i \dot{p}_i$  является *барицентрической комбинацией* точек  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  с коэффициентами  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ .

Данное определение корректно, поскольку справедливо

**Предложение 1. Выражение**

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \dot{p}_i := \dot{p} + \sum_{i=0}^m \alpha_i (\dot{p}_i - \dot{p}), \quad \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1,$$

не зависит от выбора точки  $\dot{p}$ .

**Доказательство.** Действительно, заменив  $\dot{p}$  на точку  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} \in V$ , мы получим

$$\begin{aligned}\dot{p} + \mathbf{v} + \sum_{i=0}^m \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p} - \mathbf{v}) &= \\ &= \dot{p} + \mathbf{v} + \sum_{i=0}^m \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p}) - (\sum_{i=0}^m \alpha_i)\mathbf{v} = \dot{p} + \sum_{i=0}^m \alpha_i(\dot{p}_i - \dot{p}),\end{aligned}$$

поскольку  $(1 - \sum_{i=0}^m \alpha_i)\mathbf{v} = 0$ .  $\square$

Например, можно говорить о “полусумме точек”  $\frac{1}{2}\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{r} = \dot{q} + \frac{1}{2}(\dot{r} - \dot{q})$ , но никак не об “одной трети”  $\frac{1}{3}\dot{q} + \frac{1}{3}\dot{r}$ .

**Определение 8.** Если любая точка  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  однозначно представима в виде барицентрической комбинации

$$\dot{p} = \sum_{i=0}^n x_i \dot{p}_i, \quad x_i \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=0}^n x_i = 1,$$

то система точек  $\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n\}$  называется *барицентрической системой координат* в  $\mathbb{A}$ , а числа  $x_0, \dots, x_n$  — *барицентрическими координатами* точки  $\dot{p}$ .

Переписав выражение для  $\dot{p}$  в виде  $\dot{p} = \dot{p}_0 + \sum_{i=1}^n x_i(\dot{p}_i - \dot{p}_0)$ , мы видим, что однозначность барицентрической комбинации равносильна тому, что система  $\{\dot{p}_0; \dot{p}_1 - \dot{p}_0, \dots, \dot{p}_n - \dot{p}_0\}$  является аффинной системой координат в  $\mathbb{A}$ , т.е. точки  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n$  находятся в общем положении, а набор векторов  $(\dot{p}_1 - \dot{p}_0, \dots, \dot{p}_n - \dot{p}_0)$  является базисом в  $V$ . По координатам  $x_1, \dots, x_n$  вектора  $\mathbf{x}$  барицентрические координаты точки  $\dot{p}_0 + \mathbf{x}$  восстанавливаются однозначно в виде  $1 - \sum_{i=1}^n x_i = x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Рассуждая несколько иначе, предположим, что  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  — какой-то репер  $n$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}$ ,  $\Pi_m$  — единственная  $m$ -мерная плоскость, проходящая через точки  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$ , находящиеся в общем положении, и  $x_1^i, \dots, x_n^i$ ,  $0 \leq i \leq m$ , — их координаты. Тогда координаты  $x_1, \dots, x_n$  любой точки  $\dot{p} \in \Pi_m$  однозначным образом выражаются в виде:

$$x_j = x_j^0 + \lambda_1(x_j^1 - x_j^0) + \dots + \lambda_m(x_j^m - x_j^0), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Эти уравнения — способ так называемого *параметрического задания* плоскости  $\Pi_m$ . Мы достигнем большей симметричности в записи, если введём параметр  $\lambda_0$ , связанный с  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  соотношением  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ , и перепишем (7) в виде

$$x_j = \lambda_0 x_j^0 + \lambda_1 x_j^1 + \dots + \lambda_m x_j^m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7')$$

Барицентрические комбинации хорошо согласованы с аффинными отображениями, как это видно из следующего утверждения.

Предложение 2. i) Пусть  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  — аффинное отображение и  $\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_m \in \mathbb{A}$ . Тогда

$$f\left(\sum_{i=0}^m x_i \dot{p}_i\right) = \sum_{i=0}^m x_i f(\dot{p}_i), \quad \sum_{i=0}^m x_i = 1.$$

ii) Пусть точки  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n$  задают барицентрическую систему координат в  $\mathbb{A}$ . Тогда для любых точек  $\dot{q}_0, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \in \mathbb{A}'$  существует единственное аффинное отображение  $f$ , для которого

$$f(\dot{p}_i) = \dot{q}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Доказательство. Выбрав точку  $\dot{p} \in \mathbb{A}$ , в соответствии с предложением 1 получим

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^m x_i \dot{p}_i\right) &= f\left(\dot{p} + \sum_{i=0}^m x_i (\dot{p}_i - \dot{p})\right) = \\ &= f(\dot{p}) + Df\left(\sum_{i=0}^m x_i (\dot{p}_i - \dot{p})\right) = f(\dot{p}) + \sum_{i=0}^m x_i Df(\dot{p}_i - \dot{p}) = \\ &= f(\dot{p}) + \sum_{i=0}^m x_i (f(\dot{p}_i) - f(\dot{p})) = \sum_{i=0}^m x_i f(\dot{p}_i), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение i).

Так как всякая точка из  $\mathbb{A}$  представляется единственной барицентрической комбинацией, то теоретико-множественное отображение  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  можно определить формулой

$$f\left(\sum x_i \dot{p}_i\right) = \sum x_i \dot{q}_i.$$

Это — единственное возможное определение в силу i), и нужно лишь проверить, что  $f$  — аффинное отображение. Действительно,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=0}^n x_i \dot{p}_i\right) - f\left(\sum_{i=0}^n y_i \dot{p}_i\right) &= \sum_{i=0}^n x_i \dot{q}_i - \sum_{i=0}^n y_i \dot{q}_i = \\ &= \dot{q}_0 + \sum_{i=1}^n x_i (\dot{q}_i - \dot{q}_0) - \left(\dot{q}_0 + \sum_{i=1}^n y_i (\dot{q}_i - \dot{q}_0)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) (\dot{q}_i - \dot{q}_0) = Df\left(\sum_{i=0}^n x_i \dot{p}_i - \sum_{i=0}^n y_i \dot{p}_i\right), \end{aligned}$$

где  $Df: V \rightarrow V'$  — линейное отображение, переводящее  $\dot{p}_i - \dot{p}_0$  в  $\dot{q}_i - \dot{q}_0$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Оно существует, ибо по предположению  $(\dot{p}_1 - \dot{p}_0, \dots, \dot{p}_n - \dot{p}_0)$  — базис векторного пространства  $V$ .  $\square$

Пример 3. В вещественной аффинной плоскости  $\mathbb{A}$  в качестве репера можно взять вершины любого невырожденного треугольника. Если, скажем,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  — барицентрические координаты вершин треугольника, то  $(1/3, 1/3, 1/3)$  — барицентрические координаты его центра тяжести.

**6. Аффинно-линейные функции и системы линейных уравнений.** Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  — аффинное пространство над полем  $\mathbb{K}$ . В соответствии с определением 2 отображение  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  называется *аффинно-линейной функцией*, если

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v} \quad \forall \dot{p} \in \mathbb{A}, \mathbf{v} \in V,$$

где  $Df \in V^*$  — линейная функция на  $V$ , называемая, как и ранее, линейной частью (или дифференциалом) функции  $f$ . Константы, т.е. скаляры, относятся к аффинно-линейным функциям с равными нулю линейными частями.

Выбрав систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  и обозначив через  $x_1, \dots, x_n$  координаты точки  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  в этой системе, мы выразим значение функции  $f$  в виде

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \overrightarrow{op}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_0, \quad (8)$$

где  $\alpha_0 = f(\dot{o})$ ,  $\alpha_i = Df \cdot \mathbf{e}_i$ ,  $\overrightarrow{op} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ .

Обратно: если значения функции  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  вычисляются по формуле (8) и  $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$ , то согласно теореме 2

$$\begin{aligned} f(\dot{p} + \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i + v_i) + \alpha_0 = \\ &= \left( \sum_i \alpha_i x_i + \alpha_0 \right) + \sum_i \alpha_i v_i = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

т.е.  $f$  — аффинно-линейная функция.

**Замечание.** Положив  $(\lambda f + \mu g)(\dot{p}) = \lambda f(\dot{p}) + \mu g(\dot{p})$ ,  $D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg$ , мы обнаруживаем, что множество  $\mathcal{S}$  всех аффинно-линейных функций  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  наделено структурой векторного пространства: если  $f, g \in \mathcal{S}$ , то

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(\dot{p} + \mathbf{v}) &= \lambda f(\dot{p} + \mathbf{v}) + \mu g(\dot{p} + \mathbf{v}) = \\ &= \lambda \{f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v}\} + \mu \{g(\dot{p}) + Dg \cdot \mathbf{v}\} = \\ &= (\lambda f + \mu g)(\dot{p}) + (\lambda Df + \mu Dg) \cdot \mathbf{v} = \\ &= (\lambda f + \mu g)(\dot{p}) + (D(\lambda f + \mu g)) \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

т.е.  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}$ . Теперь  $D$  можно интерпретировать как линейное отображение  $\mathcal{S} \rightarrow V^*$ . Ядром  $\text{Ker } D$  является прямая  $S^0$  в  $\mathcal{S}$ , состоящая из постоянных функций.

Обратимся ещё раз к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \dots &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (9)$$

которую можно записать в виде

$$f_1(\dot{p}) = 0, \dots, f_m(\dot{p}) = 0, \quad (9')$$

где  $f_i$  — аффинно-линейная функция:

$$f_i(\dot{p}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i.$$

Предположим, что система (9) совместна и  $x_1^0, \dots, x_n^0$  — одно из её решений. Принимая  $x_1^0, \dots, x_n^0$  за координаты точки  $\dot{p}_0$  в некотором репере  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  (так что  $f_i(\dot{o}) = -b_i$ ) и условившись для краткости называть саму точку  $\dot{p}_0$  *решением*, мы на основе известных фактов приходим к выводу, что любое другое решение системы (9) или (9') имеет вид  $\dot{p} = \dot{p}_0 + \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x} \in V$  удовлетворяет системе линейных уравнений

$$Df_1 \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \dots, \quad Df_m \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $Df_i$  — линейная часть функции  $f_i : Df_i \cdot \mathbf{x} = \sum_j a_{ij}x_j$ . Решения системы (10) образуют, как мы знаем (см. гл. 1, § 3, п. 5), подпространство  $U \subset V$  размерности  $n - r$ , где  $r$  — ранг системы  $Df_1, \dots, Df_m$ . Таким образом, совокупностью решений системы (3) будет плоскость  $\Pi = \dot{p}_0 + U$  размерности  $n - r$ .

Обратно: любую плоскость  $\Pi = \dot{p}_0 + U \subset \mathbb{A}$  можно задать системой линейных уравнений. Действительно, согласно теореме 4 из § 3 гл. 1, векторное подпространство  $U \subset V$  размерности  $n - r$  является пространством решений системы уравнений вида (10), имеющей ранг  $r$ . Далее, по определению точка  $\dot{p}$  принадлежит  $\Pi$  тогда и только тогда, когда  $\dot{p}_0 \dot{p} \in U$ . Если  $x_1, \dots, x_n$  — координаты точки  $\dot{p}$  в выбранном репере, а  $x_1^0, \dots, x_n^0$  — координаты точки  $\dot{p}_0$ , то  $\dot{p}_0 \dot{p} = \sum_j (x_j - x_j^0)\mathbf{e}_j$ , и система (10) принимает вид

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $b_i = \sum_j x_j^0$ . Ранг этой системы по-прежнему равен  $r$ .

Итак, доказана

**Теорема 6.** Пусть  $\mathbb{A}$  — аффинное пространство размерности  $n$ . Множество точек из  $\mathbb{A}$ , координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга  $r$ , образуют  $(n-r)$ -мерную плоскость  $\Pi \subset \mathbb{A}$ . Любая плоскость в  $\mathbb{A}$  может быть так получена.

В частности, гиперплоскость задаётся одним линейным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Оставив в системе (9) лишь  $r \leq m$  линейно независимых уравнений (линейно-аффинных функций  $f_i$ ), мы на любую плоскость  $\Pi$  размерности  $n - r$  можем смотреть как на пересечение  $r$  гиперплоскостей. В случае несовместной системы линейных уравнений пересечение гиперплоскостей пусто.

**7. Взаимное расположение плоскостей.** Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  — аффинное пространство размерности  $n$ . Обобщая понятие параллельности плоскостей одинаковой размерности (см. определение 5), введём следующее

**Определение 9.** Пусть  $\Pi' = \dot{p} + U'$ ,  $\Pi'' = \dot{q} + U''$  ( $U', U''$  — векторные подпространства в  $V$  размерностей  $k, l$ ) и  $k \leq l$ . Говорят, что плоскость  $\Pi'$  *параллельна*  $\Pi''$ , если  $U'' \subseteq U'$ .

В случае  $k = l$  мы возвращаемся к прежнему понятию параллельности. Если  $\Pi'' \subseteq \Pi'$ , то условие параллельности автоматически выполняется. Учитывая установленное нами соответствие между плоскостями и системами линейных уравнений, мы можем утверждать, что справедлива

**Теорема 7.** Для любой плоскости  $\Pi \subset \mathbb{A}$  и любой точки  $\dot{q} \in \mathbb{A}$  найдётся, и притом единственная, плоскость  $\Pi'$  размерности  $\dim \Pi' = \dim \Pi$ , проходящая через точку  $\dot{q}$  параллельно  $\Pi$ . Если  $\dot{q} \in \Pi$ , то  $\Pi' = \Pi$ . Если  $\dot{q} \notin \Pi$ , то  $\Pi$  и  $\Pi'$  не пересекаются.

В частности, параллельность двух гиперплоскостей  $\Pi$  и  $\Pi'$ , заданных в одной и той же системе координат уравнениями

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad a'_1x'_1 + \dots + a'_nx'_n = b',$$

означает попросту пропорциональность коэффициентов при переменных:  $a'_i = \lambda a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; а совпадение  $\Pi = \Pi'$  налагает, естественно, ещё одно ограничение  $b' = \lambda b$  с тем же  $\lambda \in \mathfrak{K}$ .

**Определение 10.** Непараллельные и непересекающиеся плоскости  $\Pi, \Pi' \subset \mathbb{A}$  называются *скрещивающимися*.

Качественную картину взаимного расположения плоскостей подкрепим некоторыми количественными оценками. Во-первых, если плоскости  $\Pi' = \dot{p} + U'$ ,  $\Pi'' = \dot{q} + U''$  пересекающиеся и  $\dot{o}$  — их общая точка, то, как мы знаем, аффинная оболочка имеет вид

$$\Pi := A(\Pi', \Pi'') = \dot{o} + W, \quad W = U' + U''.$$

Но в таком случае по теореме 6 из § 2 гл. 1 имеем

$$m := \dim \Pi = \dim W = k + l - i,$$

где

$$k = \dim U', \quad l = \dim U'', \quad k \geq l, \quad i = \dim (U' \cap U''). \quad (11)$$

Если пересечение  $\Pi' \cap \Pi''$  пусто, то рассмотрим векторную прямую  $V_1 = \{\lambda \vec{pq} \mid \lambda \in \mathfrak{K}\}$  и подпространство

$$W^\circ = U' + U'' + V_1 \subseteq V.$$

Так как  $\overrightarrow{pq} \notin U' + U''$  (см. упр. 4.4.1), то

$$m = \dim \Pi = \dim (U' + U'') + \dim V_1 = k + l - i + 1.$$

Плоскость  $\Pi^\circ = \dot{p} + W^\circ$ , очевидно, содержит  $\Pi' = \dot{p} + U'$  и  $\Pi'' = \dot{q} + U'' = \dot{p} + \overrightarrow{pq} + U'' \subseteq \dot{p} + U'' + V_1$ . С другой стороны, всякая плоскость, содержащая  $\Pi'$ ,  $\Pi''$ , содержит вектор  $\overrightarrow{pq}$  и прямую  $V_1$ , а потому содержит  $\Pi^\circ$ . Другими словами, в случае  $\Pi' \cap \Pi'' = \emptyset$  имеем равенство  $\Pi^\circ = A(\Pi', \Pi'')$ . Таким образом,

$$m = \dim A(\Pi', \Pi'') = \begin{cases} k + l - i, & \text{если } \Pi' \cap \Pi'' \neq \emptyset, \\ k + l - i + 1, & \text{если } \Pi' \cap \Pi'' = \emptyset. \end{cases} \quad (12)$$

Четвёрка

$$(i, k, l, m), \quad 0 \geq i \geq k \geq l \geq m \geq n, \quad (13)$$

целых чисел, определённых соотношениями (12), вполне характеризует взаимное расположение плоскостей  $\Pi'$ ,  $\Pi''$ .

**Пример 3.** Пусть  $(\mathbb{A}, \mathbb{R}^3)$  — трёхмерное вещественное аффинное пространство,  $\Pi'$ ,  $\Pi''$  — две прямые в нём, так что  $n = 3$ ,  $k = l = 1$ . Разные случаи взаимного расположения прямых в  $\mathbb{A}^3$  достаточно очевидны и изображены на рис. 6.

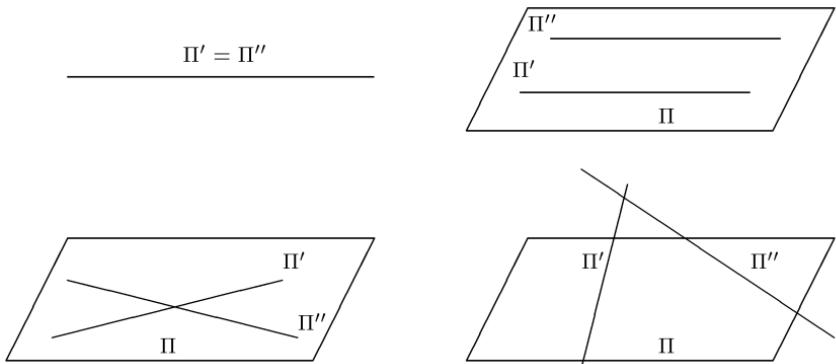


Рис. 6

Попробуйте представить скрещивающиеся плоскости размерностей 1 и 2 в четырёхмерном вещественном аффинном пространстве.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что  $\Pi' = \dot{p} + U'$ ,  $\Pi'' = \dot{q} + U''$  являются *пересекающимися*, т.е. имеющими хотя бы одну общую точку, ровно тогда, когда  $\overrightarrow{pq} \in U' + U''$  (ср. со следствием теоремы 4).

2. Пусть  $A(\Pi_1, \dots, \Pi_m)$  — аффинная оболочка прямых  $\Pi_1, \dots, \Pi_m$  в вещественном  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}$ . При каком минимальном  $m$  имеет место совпадение  $A(\Pi^1, \dots, \Pi^m) = \mathbb{A}$ ?

3. Пусть  $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n)$  — репер аффинного пространства  $\mathbb{A}$  размерности  $n$  и  $(\dot{p}'_0, \dot{p}'_1, \dots, \dot{p}'_n)$  — набор из  $n+1$  точки аффинного пространства  $\mathbb{A}'$ . Доказать,

что существует в точности одно аффинное отображение  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , для которого  $f(\dot{p}_i) = \dot{p}'_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

4. Убедиться в том, что барицентрическая комбинация конечного числа барицентрических комбинаций точек  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n$  является барицентрической комбинацией этих точек.

5. Пусть  $\mathbb{A}$  —  $n$ -мерное аффинное пространство. Доказать, что отображение  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , сохраняющее любые барицентрические комбинации точек из  $\mathbb{A}$ , является аффинным преобразованием (обращение утверждения 1) из предложения 2).

6. Используя свойства аффинных преобразований, доказать известную теорему о том, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

## § 2. Евклидовы (точечные) пространства

**1. Евклидова метрика.** Чтобы полностью приблизиться к реалиям трёхмерного физического пространства, мы введём следующее

Определение 1. Аффинное пространство  $(\mathbb{E}, V)$  называется *евклидовым (точечным) пространством*, если  $V$  — евклидово векторное пространство.

Слово “точечное” мы будем обычно опускать, поскольку ранее рассматривались только евклидовы векторные пространства, и поэтому никакой путаницы не произойдёт. Итак, евклидово пространство есть тройка  $(\mathbb{E}, V, \rho)$ , где  $\rho(*, *)$  — функция расстояния между точками из  $\mathbb{E}$ . Именно,

$$\rho(\dot{p}, \dot{q}) := \|\overrightarrow{pq}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{pq} | \overrightarrow{pq} \rangle}. \quad (1)$$

Здесь  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$  — положительно определённая форма, задающая скалярное произведение на  $V$ .

Известные нам свойства функции расстояния в метрических пространствах (см. гл. 3, § 3, п. 5) гласят:

- i)  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) = \rho(\dot{q}, \dot{p})$ ;
- ii)  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) = 0 \iff \dot{p} = \dot{q}$ ;
- iii)  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) + \rho(\dot{q}, \dot{r}) \geq \rho(\dot{p}, \dot{r})$  (неравенство треугольника).

В дальнейшем символом  $\Pi_{\dot{p}, \dot{q}}$  будем обозначать прямую, проходящую через две различные точки  $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{E}$ .

Определение 2. Углом между прямыми  $\Pi_{\dot{p}, \dot{q}}$  и  $\Pi_{\dot{r}, \dot{s}}$  назовём угол  $\varphi$  между векторами  $\overrightarrow{pq}$  и  $\overrightarrow{rs}$ :

$$\cos \varphi = \frac{\langle \overrightarrow{pq} | \overrightarrow{rs} \rangle}{\|\overrightarrow{pq}\| \cdot \|\overrightarrow{rs}\|}.$$

Определение 3. Система координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в евклидовом пространстве  $(\mathbb{E}, V)$  называется *прямоугольной* (или *декартовой*), если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис евклидова векторного пространства  $V$ :  $\langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть  $\dot{p}, \dot{q}$  — точки в  $\mathbb{E}$  с координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в прямоугольной системе координат. Тогда координатами вектора

тора  $\overrightarrow{pq}$  будут  $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$ . Поэтому в соответствии с определяющим равенством (1)

$$\rho(\dot{p}, \dot{q}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \quad (2)$$

— обычна формула, по которой измеряется расстояние между точками.

**Теорема 1.** *Любые евклидовы (точечные) пространства  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}'$  одинаковой конечной размерности изоморфны. Это значит, что существует изоморфное отображение  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$  аффинных пространств, сохраняющее расстояние между точками:*

$$\rho'(\dot{p}, \dot{q}) = \rho'(f(\dot{p}), f(\dot{q})) \quad (3)$$

( $\rho'$  — функция расстояния на  $\mathbb{E}'$ ).

**Доказательство.** Выберем прямоугольную систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $\mathbb{E}$  и прямоугольную систему координат  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  в  $\mathbb{E}'$ . Построим отображение  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ , полагая

$$f(\dot{o}) = \dot{o}', \quad \mathcal{F}(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x_n \mathbf{e}'_n. \quad (4)$$

Так как линейное отображение  $\mathcal{F}: V \rightarrow V'$ , очевидно, биективно, то проверка, проведённая при доказательстве теоремы 1 из § 1, показывает, что  $f$  — изоморфизм между аффинными пространствами  $\mathbb{E}$  и  $\mathbb{E}'$  с  $Df = \mathcal{F}$ .

Кроме того, точка  $\dot{p}' = f(\dot{p})$  имеет те же координаты  $x_1, \dots, x_n$  в  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ , что и точка  $\dot{p}$  в  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . А так как в  $\mathbb{E}$  и в  $\mathbb{E}'$  расстояния  $\rho(\dot{p}, \dot{q})$ ,  $\rho'(\dot{p}', \dot{q}')$  вычисляются по одной и той же формуле (2) (в силу выбора базиса), то условие (3) изоморфизма евклидовых пространств также выполнено.  $\square$

Введём некоторые новые понятия.

**Определение 4.** Отрезком, соединяющим точки  $\dot{p}$  и  $\dot{q}$  аффинного пространства, называется множество

$$\dot{p}\dot{q} = \{\dot{p} + \lambda \overrightarrow{pq} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

По смыслу  $\dot{p}\dot{q} = \dot{q}\dot{p}$ . Точка  $\dot{r}$ , удовлетворяющая условию  $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{rq}$ , обычно называется *серединой отрезка*  $\dot{p}\dot{q}$ . В случае евклидова пространства под длиной отрезка  $\dot{p}\dot{q}$  будем понимать величину

$$|\dot{p}\dot{q}| := \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(\dot{p}, \dot{q}).$$

**2. Расстояние от точки до плоскости.** Пусть  $\Pi$  —  $m$ -мерная плоскость в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  размерности  $n$ ,  $\dot{p}$  — точка в  $\mathbb{E}$ , лежащая вне плоскости  $\Pi$ . Пусть  $\dot{q}$  — точка в  $\Pi$ .

**Определение 5.** Если  $(\overrightarrow{pq} \mid \overrightarrow{rs}) = 0$  для любых точек  $\dot{r}, \dot{s} \in \Pi$ , то говорят, что прямая  $\Pi_{\dot{p}, \dot{q}}$  перпендикулярна к плоскости  $\Pi$  и пишут  $\Pi_{\dot{p}, \dot{q}} \perp \Pi$ ; величина  $\rho(\dot{p}, \dot{q})$  в этом случае называется *расстоянием от точки  $\dot{p}$  до плоскости  $\Pi$*  (оно равно нулю, если  $\dot{p} \in \Pi$ ), а отрезок  $\dot{p}\dot{q}$  между точками  $\dot{p}$  и  $\dot{q}$  — *перпендикуляром из точки  $\dot{p}$  на  $\Pi$* . Пишут также  $\dot{p}\dot{q} \perp \Pi$ .

Длина перпендикуляра — кратчайшее расстояние от точки  $\dot{r}$  до  $\Pi$ , т.е.  $\rho(\dot{p}, \dot{r}) > \rho(\dot{p}, \dot{q})$  для любой точки  $\dot{r} \in \Pi$ , отличной от  $\dot{q}$ . В самом

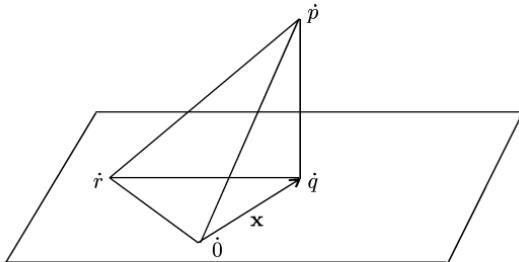


Рис. 7

длее, как видно из рис. 7,  $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$  — сумма двух ортогональных векторов. Поэтому

$$\rho(\dot{p}, \dot{r})^2 = (\overrightarrow{pr} | \overrightarrow{pr}) = (\overrightarrow{pq} | \overrightarrow{pq}) + (\overrightarrow{qr} | \overrightarrow{qr}) = \rho(\dot{p}, \dot{q})^2 + \rho(\dot{q}, \dot{r})^2 > \rho(\dot{p}, \dot{q})^2,$$

если  $\dot{r} \neq \dot{q}$  (свойство ii) функции  $\rho$ ).

Пусть  $\Pi = \dot{o} + U$ . Точку  $\dot{q} = \dot{o} + \mathbf{x}$  на  $\Pi$  ищем из условия  $\dot{p}\dot{q} \perp \Pi$ . Так как  $V = U + U^\perp$  (теорема 7 из § 1 гл. 3), а  $\overrightarrow{op} = \mathbf{x} + \overrightarrow{qp}$ , где  $\mathbf{x} \in U$ , то компонента  $\overrightarrow{qp} \in U^\perp$  вектора  $\overrightarrow{op}$  существует и определяется однозначно.

Чтобы фактически найти перпендикуляр из  $\dot{p}$  на  $\Pi$ , выберем в  $\mathbb{E}$  прямоугольную систему координат

$$\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_n\}, \quad (5)$$

в которой векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  составляют базис векторного подпространства  $U$ . Вектор  $\mathbf{v} = \overrightarrow{op}$  мы считаем заданным. Мы найдём  $h = \|\overrightarrow{pq}\|$ , вычислив координаты вектора

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_m \mathbf{e}_m.$$

Заметим, что

$$\dot{p}\dot{q} \perp \Pi \iff (\overrightarrow{pq} | U) = 0 \iff (\overrightarrow{pq} | \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{x} - \mathbf{v} | \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6)$$

откуда  $x_i = (\mathbf{v} | \mathbf{e}_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Если бы система координат (5) не была прямоугольной, то условия (6) выражались бы в виде системы из  $m$  линейных уравнений

$$(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_i)x_1 + (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_i)x_2 + \dots + (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_i)x_m = (\mathbf{v} | \mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

которая по доказанному имеет единственное решение. Система из  $m$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными имеет единственное решение только тогда, когда её определитель отличен от нуля. Определителем

системы (7) является

$$G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_m) \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Таким образом,  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ , называемый *определителем Грама* векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ , не равен нулю. Мы ещё раз получили теорему 1 из § 5 гл. 3, фактически повторив все рассуждения.

Резюмируем наши сведения о перпендикуляре.

**Теорема 2.** Из каждой точки  $\dot{p}$ , лежащей вне плоскости  $\Pi = \dot{o} + U$  евклидова пространства  $\mathbb{E}$ , можно опустить перпендикуляр  $\vec{pq}$ . Его длина  $|\vec{pq}|$  есть кратчайшее расстояние от  $\dot{p}$  до  $\Pi$ . Если  $\dot{o}$  — любая выбранная нами точка на  $\Pi$ , то  $\vec{pq} = \mathbf{x} - \overrightarrow{op}$ , где  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_m \mathbf{e}_m$  — вектор в  $U$ , координаты которого в любой системе координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \dots, \mathbf{e}_n\}$  пространства  $\mathbb{E}$  вычисляются как решение системы (7) по формулам Крамера

$$x_i = \frac{1}{G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)} \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1 | \mathbf{v}) & \dots & (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_m) \\ (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_2 | \mathbf{v}) & \dots & (\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_m | \mathbf{v}) & \dots & (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_m) \end{vmatrix}_i, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{op}.$$

Если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e})$  — ортонормированный базис, то  $x_i = (\mathbf{e}_i | \overrightarrow{op})$ .

**3. Расстояние между плоскостями.** Пусть  $\Pi$  и  $\Pi'$  — плоскости в евклидовом пространстве  $(\mathbb{E}, V, \rho)$ :  $\Pi = \dot{p} + U$ ,  $\Pi' = \dot{p}' + U'$ . Так как  $\dot{p}'$  можно заменять на любую точку в плоскости  $\Pi'$ , то без ограничения общности можно считать, что  $\vec{pp}' \perp \Pi'$ , т.е.  $\Pi_{\dot{p}, \dot{p}'} \perp \Pi'$ . Если одновременно  $\Pi_{\dot{p}, \dot{p}'} \perp \Pi$ , то отрезок  $\vec{pp}'$  — общий перпендикуляр к  $\Pi$  и  $\Pi'$ .

**Лемма 1.** Если отрезок  $\vec{pp}'$  — общий перпендикуляр к  $\Pi$  и  $\Pi'$ , то

$$\rho(\dot{p}, \dot{p}') \leq \rho(\dot{q}, \dot{q}'), \quad (9)$$

каковы бы ни были точки  $\dot{q} \in \Pi$ ,  $\dot{q}' \in \Pi'$ .

**Доказательство.** Пусть  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$ ,  $\dot{q}' = \dot{p}' + \mathbf{u}'$ . Так как  $\dot{p}' = \dot{p} + \overrightarrow{pp}'$ , то  $\dot{q}' = \dot{p} + \overrightarrow{pp}' + \mathbf{u}'$  и

$$\dot{q}\dot{q}' = \overrightarrow{pp}' + \mathbf{u}' - \mathbf{u}.$$

По условию  $(\overrightarrow{pp}' | \mathbf{u}) = 0$  и  $(\overrightarrow{pp}' | \mathbf{u}') = 0$ , т.е.  $(\overrightarrow{pp}' | \mathbf{u}' - \mathbf{u}) = 0$ , а в таком случае по теореме Пифагора имеем

$$\|\overrightarrow{qq}'\|^2 = \|\mathbf{u}' - \mathbf{u}\|^2 + \|\overrightarrow{pp}'\|^2,$$

откуда и следует неравенство (9).  $\square$

**Лемма 2.** Любые две плоскости  $\Pi, \Pi' \in (\mathbb{E}, V, \rho)$  имеют общий перпендикуляр.

**Доказательство.** Пусть  $\Pi = \dot{q} + U, \Pi' = \dot{q}' + U'$ . Подберём точки  $\dot{p} = \dot{q} - \mathbf{u}, \dot{p}' = \dot{q}' - \mathbf{u}'$  так, чтобы вектор  $\overrightarrow{pp'}$  был ортогонален к  $U$  и  $U'$ . Очевидно,  $\overrightarrow{pp'} = \mathbf{u} - \mathbf{u}' + \overrightarrow{qq'}$ . Так как  $V = (U + U') \oplus (U + U')^\perp$ , то  $\overrightarrow{qq'} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{b} \in U + U', \mathbf{c} \in (U + U')^\perp$ , причём компоненты  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  определены однозначно. Кроме того,  $\mathbf{b} = \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{v} \in U, \mathbf{v}' \in U'$ . Получаем

$$\overrightarrow{pp'} = -\mathbf{u}' + \mathbf{v}' + \mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{c}.$$

Вектор  $\overrightarrow{pp'}$  будет искомым, если мы возьмём  $\mathbf{u}' = \mathbf{v}', \mathbf{u} = -\mathbf{v}$ . Действительно, тогда  $\overrightarrow{pp'} = \mathbf{c} \in (U + U')^\perp$ .  $\square$

Из лемм 1 и 2 почти непосредственно вытекает

**Теорема 3.** Для любых двух плоскостей  $\Pi, \Pi' \in (\mathbb{E}, V, \rho)$  найдутся такие точки  $\dot{p} \in \Pi, \dot{p}' \in \Pi'$ , что будет выполнено неравенство (1). Отрезок  $\overrightarrow{pp'}$  является общим перпендикуляром к  $\Pi$  и  $\Pi'$ . Он определён однозначно в точности тогда, когда  $U \cap U' = 0$  ( $U, U'$  — направляющие подпространства для  $\Pi$  и  $\Pi'$ ).

**Доказательство.** Действительно, если  $\overrightarrow{pp'}$  и  $\overrightarrow{qq'}$  — два общих перпендикуляра, то  $\rho(\dot{p}, \dot{p}') = \rho(\dot{q}, \dot{q}')$  и согласно доказательству леммы 2  $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$ , т.е.  $\dot{q}' = \dot{p}' + \mathbf{u}, \dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in U \cap U'$ . Таким образом, множество общих перпендикуляров взаимно однозначно соответствует векторам из  $U \cap U'$ . Единственность имеет место только в случае  $U \cap U' = 0$ . Так обстоит дело, в частности, когда  $\Pi'$  — точка, и, значит,  $U' = 0$ .  $\square$

**4. Определитель Грама и объём параллелепипеда.** Решение задачи о перпендикуляре в п. 2 привело нас попутно к заключению, что определитель Грама  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$ , вычисляемый по формуле (8), отличен от нуля, коль скоро векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  линейно независимы. На  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  можно смотреть и как на последний главный минор  $\Delta_m$  матрицы положительно определённой квадратичной формы  $q(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} | \mathbf{v})$  на направляющем векторном подпространстве  $U$  плоскости  $\Pi$ . Согласно критерию Сильвестра (теорема 8 из § 4 гл. 1)  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) = \Delta_m > 0$ .

Если же  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  линейно зависимы и, например,  $\mathbf{e}_m = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}$  (мы уже отвлекаемся от базиса подпространства  $U$ ), то

$$(\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\mathbf{e}_m | \mathbf{e}_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

так что последняя строка в  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  оказывается линейной комбинацией остальных строк. Таким образом,  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) = 0$  и справедлива

**Теорема 4.** Определитель Грама системы векторов  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  отличен от нуля в точности тогда, когда векторы системы ли-

нейно независимы. Всегда выполнено неравенство  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m) \geqslant 0$ , частным случаем которого при  $m = 2$  является неравенство Коши—Буняковского.

Определитель Грама  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  можно истолковать как квадрат  $v_m^2$  объёма параллелепипеда  $P(\dot{o}\dot{p}_1, \dots, \dot{o}\dot{p}_m)$  со сторонами  $\dot{o}\dot{p}_1, \dots, \dot{o}\dot{p}_m$  ( $\dot{o}\dot{p}_i = \dot{o} + \mathbf{e}_i; i = 1, \dots, m$ ):

$$P(\dot{o}\dot{p}_1, \dots, \dot{o}\dot{p}_m) = \{t_1 \dot{o}\dot{p}_1 + \dots + t_m \dot{o}\dot{p}_m \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1\}. \quad (10)$$

Пусть  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$  — ортонормированный базис векторного пространства  $U$ , в котором лежат векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$  (возможно, линейно зависимые), и пусть

$$\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{f}_i.$$

По определению считаем

$$v_m = v_m(P(\dot{o}\dot{p}_1, \dots, \dot{o}\dot{p}_m)) = |\det(a_{ij})_1^m|,$$

что полностью соответствует замечаниям из [ВА I, гл. 3, § 1, п. 1]. Поэтому

$$(v_m)^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \det(\tilde{a}_{ij}), \quad \tilde{a}_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ki} a_{kj} = (\mathbf{e}_i \mid \mathbf{e}_j),$$

ввиду ортонормированности базиса  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ . Следовательно,

$$(v_m)^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_1) & \dots & (\mathbf{e}_m \mid \mathbf{e}_m) \end{vmatrix} = G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m).$$

Итак, определитель Грама  $G(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  равен квадрату объёма  $m$ -мерного параллелепипеда со сторонами  $\dot{o}\dot{p}_1, \dots, \dot{o}\dot{p}_m$ .

По поводу объёмов фигур в евклидовом пространстве более подробные разъяснения даны в учебном пособии [2].

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Найти расстояние от точки  $\dot{p} = (2, 1, -3, 4)$  до плоскости

$$\Pi: 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0, \quad x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0.$$

**2.** Найти расстояние между плоскостями

$$\Pi_1: x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2 = 0, \quad x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - 3 = 0,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 - 3 = 0;$$

$$\Pi_2: (1, -2, 5, 8, 2) + \langle (0, 1, 2, 1, 2), (2, 1, 2, -1, 1) \rangle.$$

3. Показать, что объём  $v_m$  параллелепипеда (11) вычисляется по формуле

$$v_m = \|\overrightarrow{op_1} \cdot l_1 \dots l_{m-1}\|,$$

где  $l_k$  — длина перпендикуляра, опущенного из точки  $\dot{p}_{k+1}$  на аффинную оболочку  $A(\dot{o}, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m)$ .

### § 3. Группы и геометрии

**1. Аффинная группа.** Вначале рассмотрим простейший пример.

Пример 1. Вещественная аффинная прямая  $\mathbb{A}$  по определению совпадает с множеством  $\mathbb{R}$  вещественных чисел. Другими словами, точка  $\dot{x} \in \mathbb{R}$  отождествляется (и мы этим отождествлением будем пользоваться) с вещественным числом  $x \in \mathbb{R}$ . Геометрия прямой описывается аффинными автоморфизмами в смысле п. 2 из § 1. В данном случае это будут отображения  $\Phi_{\alpha, \beta}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , определённые правилом

$$\Phi_{\alpha, \beta}: x \mapsto \alpha x + \beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Если угодно,  $x$  — координата точки  $\dot{x}$  в некотором реperе  $\{\dot{o}, e\}$ , т.е.  $\dot{x} = \dot{o} + x$ ,  $\Phi_{\alpha, \beta}(\dot{x}) = (\dot{o} + \beta) + \alpha x = \dot{o} + (\alpha x + \beta)$ . Обозначим символом  $A_1 = \text{Aff}(\mathbb{R})$  множество всех аффинных преобразований вида (1). Так как композиция

$$\Phi_{\alpha, \beta} \cdot \Phi_{\sigma, \tau} = \Phi_{\alpha\sigma, \alpha\tau + \beta} \quad (2)$$

любых двух преобразований  $\Phi_{\alpha, \beta}, \Phi_{\sigma, \tau} \in A_1$  снова принадлежит  $A_1$ , и так как  $\mathcal{E} = \Phi_{1,0} \in A_1$ , а  $\Phi_{\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta}$  — преобразование, обратное к  $\Phi_{\alpha, \beta}$ , то множество  $A_1$  вместе с естественной операцией умножения (2) является группой (см. [BA I, гл. 4, § 2]), называемой *одномерной вещественной аффинной группой*. Из (2) следует, что  $A_1$  — неабелева группа, а отображение

$$\pi: \Phi_{\alpha, \beta} \mapsto \alpha$$

является эпиморфизмом  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}^*$  на мультиликативную группу  $\mathbb{R}^*$  вещественных чисел, отличных от 0. Ясно, что  $\text{Ker } \pi = \{\Phi_{1, \beta} \mid \beta \in \mathbb{R}\}$  — подгруппа сдвигов в  $A_1$ , изоморфная аддитивной группе  $\mathbb{R}^+ = \{\mathbb{R}, +\}$  вещественных чисел. Мы имеем то, что принято называть *короткой точной последовательностью* морфизмов групп:

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^+ \rightarrow A_1 \rightarrow \mathbb{R}^* \rightarrow 1.$$

Пусть теперь  $(\mathbb{A}, V)$  —  $n$ -мерное аффинное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  — биективное аффинное преобразование (аффинный автоморфизм). Согласно общему определению (см. § 1)

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathbf{v},$$

где  $\mathcal{F}$  — невырожденный линейный оператор на  $V$ , обозначаемый в общем случае  $Df$ . По условию  $\det \mathcal{F} \neq 0$  и линейный оператор  $\mathcal{F}$  имеет обратный  $\mathcal{F}^{-1}$ , являющийся линейной частью аффинного преобразования  $f^{-1}$ :

$$f^{-1}(\dot{p} + \mathbf{v}) = f^{-1}(\dot{p}) + \mathcal{F}^{-1}\mathbf{v}.$$

Обозначив через  $e$  единичное (или тождественное) аффинное преобразование с линейной частью  $\mathcal{E}: \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ , мы видим, что  $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = e$ .

Пусть  $f$  и  $g$  — два аффинных преобразования пространства  $\mathbb{A}$ . Их композиция

$$h = f \cdot g: \dot{p} \mapsto f(g(\dot{p}))$$

снова является аффинным преобразованием с линейной частью  $\mathcal{H} = \mathcal{F}\mathcal{G}$  ( $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  — линейные части преобразований  $f$  и  $g$ ). Действительно,

$$\begin{aligned} h(\dot{p} + \mathbf{v}) &= f(g(\dot{p} + \mathbf{v})) = f(g(\dot{p}) + \mathcal{G}\mathbf{v}) = \\ &= f(g(\dot{p})) + \mathcal{F}(\mathcal{G}\mathbf{v}) = (f \cdot g)(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathcal{G}\mathbf{v} = h(\dot{p}) + \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Ассоциативность операции умножения на множестве  $\text{Aff}(\mathbb{A}) = A_n(\mathfrak{K})$  всех аффинных автоморфизмов следует из ассоциативности закона композиции на множестве произвольных отображений  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  (см. [ВА I]). Таким образом,  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  есть группа, называемая  $n$ -мерной аффинной группой (аффинного) пространства  $\mathbb{A}$ . Мы получили часть следующего утверждения.

**Теорема 1.** Сокупность  $A_n(\mathfrak{K})$  всех аффинных автоморфизмов  $n$ -мерного пространства  $(\mathbb{A}, V)$  над полем  $\mathfrak{K}$  образует группу. Все аффинные автоморфизмы, оставляющие на месте фиксированную точку  $\dot{o} \in \mathbb{A}$ , образуют подгруппу  $A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}} \subset A_n(\mathfrak{K})$ , изоморфную полной линейной группе  $GL(V) = GL_n(\mathfrak{K})$ . Подгруппа  $T = \{t_v \mid v \in V\}$  сдвигов пространства  $\mathbb{A}$  нормальна в  $A_n(\mathfrak{K})$  и служит ядром эпиморфизма  $D$  в точной последовательности

$$e \rightarrow T \xrightarrow{\varphi} A_n(\mathfrak{K}) \xrightarrow{D} GL_n(\mathfrak{K}) \rightarrow \bar{e}.$$

(Точность означает, что  $\text{Im } \varphi = \text{Ker } D$ .)

**Доказательство.** Рассмотрим аффинные автоморфизмы  $f, g \in A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$ . Так как  $f(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{F}\mathbf{x}$  и  $g(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}$ , то  $(f \circ g)(\dot{o} + \mathbf{x}) = f(g(\dot{o} + b\mathbf{x})) = f(\dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{F}\mathcal{G}\mathbf{x}$ , т.е.  $f \circ g \in A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$ . Аналогично показывается, что  $f^{-1} \in A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$ . Единичное отображение также содержится в  $A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$ . Таким образом,  $A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$  — подгруппа в  $A_n(\mathfrak{K})$ . Соответствие  $D: f \mapsto Df = \mathcal{F}$  для  $f \in A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$ , очевидно, является изоморфизмом  $A_n(\mathfrak{K})_{\dot{o}}$  на группу всех невырожденных линейных операторов, т.е. на  $GL(V)$ .

Мы ещё раньше отмечали, что сдвиги образуют подгруппу  $T \subset A_n(\mathfrak{K})$ , изоморфную аддитивной группе пространства  $V$ . Пусть  $t_v$  — сдвиг и  $f$  — произвольный аффинный автоморфизм с линейной частью  $\mathcal{F}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (f^{-1}t_v f)(\dot{p}) &= (f^{-1}t_v)f(\dot{p}) = f^{-1}(f(\dot{p}) + v) = \\ &= f^{-1}(f(\dot{p})) + \mathcal{F}^{-1}\mathbf{v} = \dot{p} + \mathcal{F}^{-1}\mathbf{v} = t_{\mathcal{F}^{-1}\mathbf{v}}(\dot{p}). \end{aligned}$$

Так как  $\dot{p}$  — произвольная точка, то отсюда следует, что

$$f^{-1}t_v f = t_{\mathcal{F}^{-1}\mathbf{v}}. \quad (3)$$

Равенство (3) показывает, что  $T$  — нормальная подгруппа в  $A_n(\mathbb{K})$ , т.е. ядро некоторого гомоморфизма. Найдём этот гомоморфизм.

Хорошо известное отображение  $D: f \mapsto Df = \mathcal{F}$  имеет в качестве ядра подгруппу  $\text{Ker } D = \{f \in A_n(\mathbb{K}) \mid \mathcal{F} = \mathcal{E}\}$ . Значит,

$$f \in \text{Ker } D \implies f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + \mathbf{v}.$$

В этом случае вектор  $\mathbf{u} = \overrightarrow{(p + \mathbf{v})f(p + \mathbf{v})} = \overrightarrow{(p + \mathbf{v})(f(p) + \mathbf{v})} = \overrightarrow{pf(p)}$  не зависит от точки  $\dot{p}$  и  $f(\dot{p} + \mathbf{v}) = (\dot{p} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = (\dot{p} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}$ , так что  $f = t_{\mathbf{u}}$  — сдвиг на вектор  $\mathbf{u}$ . Итак,  $\text{Ker } D = T$ . С другой стороны, выбрав какую-то начальную точку  $\dot{o}$  и построив для любого  $\mathcal{F} \in GL(V)$  отображение  $\dot{o} + \mathbf{v} \mapsto \dot{p} + \mathcal{F}\mathbf{v}$ , мы видим, что  $\text{Im } D = GL(V)$ , так что  $D$  — эпиморфизм.  $\square$

Докажем ещё следующее утверждение.

**Теорема 2.** Каждое аффинное преобразование  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  с линейной частью  $\mathcal{F}$  можно представить в виде  $f = t_{\mathbf{a}} g$ , где  $t_{\mathbf{a}}$  — сдвиг на вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)}$ ,  $g$  — аффинное преобразование, оставляющее на месте заданную точку  $\dot{o}$ . Это разложение зависит от точки  $\dot{o}$ . Если заменить  $\dot{o}$  на  $\dot{o}'$ , то вместо вектора  $\mathbf{a}$  нужно взять  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + (\mathcal{F} - \mathcal{E}) \overrightarrow{o\dot{o}'}$ .

**Доказательство.** Положим  $\mathbf{a} = \overrightarrow{of(o)}$  и  $g = t_{\mathbf{a}}^{-1} f$ . Мы уже знаем, что  $g$  — аффинное преобразование. При этом  $g(\dot{o}) = t_{\mathbf{a}}^{-1} \cdot f(\dot{o}) = t_{-\mathbf{a}} \cdot f(\dot{o}) = f(\dot{o}) - \overrightarrow{of(o)} = \dot{o}$ . Стало быть,  $g$  оставляет  $\dot{o}$  на месте.

Взяв вместо  $\dot{o}$  другую точку  $\dot{o}'$ , мы получили бы вектор  $\mathbf{a}' = \overrightarrow{o'f(o')}$ . Если  $\dot{o}' = \dot{o} + \mathbf{b}$ , то  $f(\dot{o}') = f(\dot{o}) + \mathcal{F}\mathbf{b}$ , или, что то же самое,  $\dot{o}' + \overrightarrow{o'f(o')} = \dot{o} + \overrightarrow{of(o)} + \mathcal{F}\mathbf{b}$ , откуда

$$\mathbf{a}' = \mathcal{F}\mathbf{b} - \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + (\mathcal{F} - \mathcal{E}) \overrightarrow{o\dot{o}'}. \quad \square$$

При фиксированной начальной точке  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  группу  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  можно представлять себе как множество  $(GL(V), V)$  пар  $(\mathcal{F}, \mathbf{v})$  с действием

$$(\mathcal{F}, \mathbf{v})(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{F}\mathbf{x} + \mathbf{v} \tag{4}$$

и с законом композиции

$$(\mathcal{F}_1, \mathbf{v}_1) \cdot (\mathcal{F}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2, \mathbf{v}_1 + \mathcal{F}_1 \mathbf{v}_2). \tag{5}$$

Действительно, если  $f_i = (\mathcal{F}_i, \mathbf{v}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , то

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2)(\dot{o} + \mathbf{x}) &= f_1(f_2(\dot{o} + \mathbf{x})) = \\ &= f_1(\dot{o} + \mathcal{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2) = \dot{o} + \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Отсюда следует (4) и (5).

Выберем теперь в  $\mathbb{A}$  какую-нибудь систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Тогда координатами точки  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$  будут по определению

координаты  $x_1, \dots, x_n$  вектора  $\overrightarrow{op} = \mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ . Если  $f$  — аффинное преобразование с линейной частью  $Df = \mathcal{F}$ , то

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o}) + \mathcal{F}\mathbf{x} = \dot{o} + \overrightarrow{f(\dot{o})} + \mathcal{F}\mathbf{x}.$$

Обозначим координаты точки  $f(\dot{p})$  через  $y_1, \dots, y_n$ ; пусть также  $\overrightarrow{f(\dot{o})} = \sum b_i \mathbf{e}_i$ , а  $F = (f_{ij})$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{F}$ , так что

$$(\mathcal{F}\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} x_j.$$

Собирая все данные, мы получим

$$y_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Короче,

$$Y = FX + B,$$

где  $Y, X, B$  — столбцы соответствующих координат (ср. с (3) из § 1, а ещё лучше — с (3) из § 1 гл. 2).

**2. Движения евклидова пространства.** Пусть  $(\mathbb{E}, V, \rho)$  — евклидово (точечное) пространство размерности  $n$ . По умолчанию предполагается, что  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Определение 1.** *Движение* (или *изометрией*) пространства  $\mathbb{E}$  называется любое отображение  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , сохраняющее расстояние, т.е.

$$\rho(f(\dot{p}), f(\dot{q})) = \rho(\dot{p}, \dot{q}) \quad (7)$$

для всех  $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{E}$ .

В определении движения  $f$  не предполагается, что  $f$  — аффинное преобразование, но на самом деле  $f$  им является, как показывает

**Теорема 3.** *Отображение  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  является движением тогда и только тогда, когда  $f$  — аффинное преобразование с линейной частью  $\mathcal{F}$  — ортогональным линейным оператором на  $V$ .*

**Доказательство.** В одну сторону утверждение почти очевидно. Действительно, любое аффинное преобразование с ортогональной линейной частью  $\mathcal{F}$  обладает свойством (7):

$$\begin{aligned} \rho(f(\dot{p}), f(\dot{q})) &= \rho(f(\dot{p}), f(\dot{p} + \mathbf{v})) = \|\overrightarrow{f(\dot{p}) f(\dot{p} + \mathbf{v})}\| = \\ &= \|\mathcal{F}(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{\dot{p}(\dot{p} + \mathbf{v})}\| = \|\overrightarrow{pq}\| = \rho(\dot{p}, \dot{q}). \end{aligned}$$

Заметим, в частности, что любой сдвиг есть движение.

Центр тяжести лежит в доказательстве обратного утверждения. Мы разобъём это доказательство на несколько этапов.

1. Очевидная проверка показывает, что произведение двух движений будет движением. Пусть  $f$  — движение,  $\dot{o}$  — фиксированная

точка,  $\dot{p}' = f(\dot{o})$ ,  $\mathbf{a} = \overrightarrow{o\dot{o}'}$  и  $t_{\mathbf{a}}$  — сдвиг на вектор  $\mathbf{a}$ . Тогда  $g = t_{\mathbf{a}}^{-1} \cdot f$  также есть движение. Так как

$$g(\dot{o}) = t_{\mathbf{a}}^{-1}(f(\dot{o})) = t_{\mathbf{a}}^{-1}(\dot{o}') = \dot{o},$$

то  $f = t_{\mathbf{a}}g$ , где  $g(\dot{o}) = \dot{o}$ , т.е. любое движение является произведением сдвига (параллельного переноса) и движения  $g$ , оставляющего неподвижной точку  $\dot{o}$ . Нам достаточно показать, что  $g$  — аффинное преобразование с ортогональной линейной частью.

2. Итак,  $g$  — движение и  $g(\dot{o}) = \dot{o}$ . Определим отображение  $\mathcal{G} : V \rightarrow V$ , полагая  $\mathcal{G}\mathbf{x} = \overrightarrow{\dot{o}g(\dot{o} + \mathbf{x})}$ , т.е.

$$g(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}. \quad (8)$$

Отображение  $\mathcal{G}$  обладает свойствами

$$\mathcal{G}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \|\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (9)$$

Действительно,  $g(\dot{o}) = \dot{o} \implies \mathcal{G}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Положим теперь  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ ,  $\dot{q} = \dot{o} + \mathbf{y}$ . Тогда  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ , поскольку  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{y} - \mathbf{x}$  и  $\overrightarrow{pq} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ . Так как  $g$  — движение, то  $\rho(g(\dot{p}), g(\dot{q})) = \rho(\dot{p}, \dot{q}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . Но из (8) следует, что  $g(\dot{p}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{x}$ ,  $g(\dot{q}) = \dot{o} + \mathcal{G}\mathbf{y}$ , и поэтому  $\rho(g(\dot{p}), g(\dot{q})) = \|\mathcal{G}\mathbf{y} - \mathcal{G}\mathbf{x}\|$ . Вместе это и даёт (9).

Полагая  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , получаем, в частности, с учётом (3)

$$\|\mathcal{G}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|. \quad (10)$$

3. Отображение  $\mathcal{G}$  сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(\mathcal{G}\mathbf{x} | \mathcal{G}\mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathbf{y}). \quad (11)$$

Действительно, согласно (9)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\|^2 = \\ &= (\mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y} | \mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 2(\mathcal{G}\mathbf{x} | \mathcal{G}\mathbf{y}) + \|\mathcal{G}\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Это соотношение с учётом (10) даёт (11).

4. Отображение  $\mathcal{G}$  линейно. В самом деле, положим  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , так что  $\|\mathbf{z} - \mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 0$ . Расписав это равенство более подробно, получим

$$\|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{z} | \mathbf{x}) - 2(\mathbf{z} | \mathbf{y}) + 2(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0.$$

Отсюда с учётом (10) и (11) находим

$$\|\mathcal{G}\mathbf{z}\|^2 + \|\mathcal{G}\mathbf{x}\|^2 + \|\mathcal{G}\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathcal{G}\mathbf{z} | \mathcal{G}\mathbf{x}) - 2(\mathcal{G}\mathbf{z} | \mathcal{G}\mathbf{y}) + 2(\mathcal{G}\mathbf{x} | \mathcal{G}\mathbf{y}) = 0,$$

что эквивалентно равенству  $\|\mathcal{G}\mathbf{z} - \mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y}\| = 0$ , т.е.  $\mathcal{G}\mathbf{z} - \mathcal{G}\mathbf{x} - \mathcal{G}\mathbf{y} = 0$ . Стало быть,

$$\mathcal{G}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{G}\mathbf{x} + \mathcal{G}\mathbf{y}.$$

Равенство  $\mathcal{G}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{G}\mathbf{x}$  доказывается аналогично.

5. Конец доказательства. Из (8) и из пп. 3, 4 следует, что  $g$  — аффинное преобразование с линейной частью — ортогональным линейным оператором  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Уточнением рассуждений, проведенных в п. 1 доказательства теоремы 2, служит

**Теорема 4.** *Пусть  $f$  — движение евклидова пространства  $(\mathbb{E}, V, \rho)$  с линейной частью — ортогональным линейным оператором  $\mathcal{F}$ . Существует разложение  $V$  в прямую сумму ортогональных подпространств, инвариантных относительно  $\mathcal{F}$ :*

$$V = L \oplus L^\perp, \quad (12)$$

и такая точка  $\dot{o} \in \mathbb{E}$ , что  $\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{x}$  для всех  $\mathbf{x} \in L$ , причём  $f = t_{\mathbf{a}} \cdot g$ ,  $\mathbf{a} \in L$  и  $g(\dot{o}) = \dot{o}$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $L$  совокупность всех векторов из  $V$ , остающихся неподвижными при действии  $\mathcal{F}$ . Очевидно, это будет векторное подпространство, инвариантное относительно  $\mathcal{F}$ . Как мы знаем (теорема 7 из § 1 гл. 3),  $L^\perp$  также  $\mathcal{F}$ -инвариантно и имеет место разложение (12).

Возьмём любую точку  $\dot{o}' \in \mathbb{E}$  и представим  $f$  в виде  $f = t_{\mathbf{a}'} \cdot g'$ ,  $g'(\dot{o}') = \dot{o}'$ . При замене точки  $\dot{o}'$  на точку  $\dot{o} = \dot{o}' + \mathbf{x}$  вектор  $\mathbf{a}'$  перейдёт в  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + (\mathcal{F} - \mathcal{E})\mathbf{x}$  (теорема 2), а  $g'$  в  $g$  с  $g(\dot{o}) = \dot{o}$ .

Пусть  $\mathbf{a}' = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ , где  $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in L$ ,  $\mathbf{c}, \mathbf{z} \in L^\perp$ . Подберём надлежащим образом вектор  $\mathbf{x}$ . Линейный оператор  $\mathcal{F} - \mathcal{E}$ , ограниченный на  $L^\perp$ , не имеет ядра, поскольку  $L \cap L^\perp = 0$ . Поэтому  $(\mathcal{F} - \mathcal{E})|_{L^\perp}$  невырожден. Это значит, в частности, что существует такой вектор  $\mathbf{z} \in L^\perp$ , для которого  $(\mathcal{F} - \mathcal{E})\mathbf{z} = -\mathbf{c}$ . Но тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{c} = \mathbf{b} \in L. \quad \square$$

**3. Группа изометрий.** Так как аффинные преобразования образуют группу (теорема 1) и ортогональные линейные операторы образуют группу (теорема 2 из § 2 гл. 3), то согласно теореме 1 совокупность всех движений евклидова пространства  $\mathbb{E}$  будет также группой. Назовём её *группой изометрий* пространства  $\mathbb{E}$  и обозначим символом  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ . Поскольку два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны (теорема 1 из § 2), имеется с точностью до изоморфизма лишь одна группа изометрий для каждой размерности. Ясно, что  $\text{Iso}(\mathbb{E})$  — подгруппа аффинной группы  $\text{Aff}(\mathbb{E})$ . В  $\text{Iso}(\mathbb{E})$  содержится подгруппа  $T$  сдвигов, изоморфная аддитивной группе векторного пространства  $V$ . Подгруппа движений, оставляющих на месте фиксированную точку  $\dot{o} \in \mathbb{E}$ , изоморфна ортогональной группе  $O(n)$ ,  $n = \dim \mathbb{E}$ . Если  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  — прямоугольная система координат в  $\mathbb{E}$ , то движение  $f$  запишется в виде

$$Y = FX + A, \quad (13)$$

где  $X = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $Y = [y_1, \dots, y_n]$  — столбцы координат точек  $\dot{p}$

и  $f(p)$  соответственно,  $A = [a_1 \dots, a_n]$  — столбец координат вектора  $\mathbf{a} \in V$ , отвечающего сдвигу  $t_{\mathbf{a}}$ ,  $F$  — ортогональная матрица.

Если  $F \in SO(n)$ , т.е.  $\det F = 1$ , то  $f$  называется *собственным движением*. Группу всех собственных движений пространства  $\text{Iso}(\mathbb{E})$  обозначим  $\text{Iso}_+(\mathbb{E})$  (это, впрочем, нами использоваться не будет).

Элементы группы изометрий, т.е. движения постоянно встречаются в геометрии и механике, поэтому имеет смысл остановиться на их интерпретации в случае небольших  $n$ .

Случай  $n = 1$ . Согласно общей формуле (13)

$$y = \varepsilon x + a, \quad (14)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  (ортогональность одномерного линейного оператора) и  $a$  — некоторая постоянная, соответствующая сдвигу. Если  $\varepsilon = 1$ , то получаем сдвиг прямой. Если  $\varepsilon = -1$ , то формула (14), переписанная в виде

$$y - a/2 = -(x - a/2),$$

наводит на мысль выбрать новое начало координат:  $x = x' + a/2$ ,  $y = y' + a/2$ . Теперь формула  $y' = -x'$  показывает, что мы имеем дело с *отражением* (симметрией) прямой относительно некоторой точки  $\dot{o}'$ .

Случай  $n = 2$ . Выбрав прямоугольную систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , в которой линейная часть  $\mathcal{F}$  движения  $f$  приводится к каноническому виду (теорема 10 из § 3 гл. 3), мы видим, что координатная запись  $f$  сводится к одной из следующих:

- 1)  $x' = x + a, \quad 2) \quad x' = x + a, \quad 3) \quad x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a,$   
 $y' = y + b; \quad y' = -y + b; \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b.$

В случае 1) мы имеем сдвиг на вектор  $a \mathbf{e}_1 + b \mathbf{e}_2$ . В случае 2) нужно перенести начало координат в точку  $\dot{o}' = (\dot{o}, -b/2)$ , т.е. ввести новые координаты  $\xi, \eta$ :

$$x = \xi \quad (x' = \xi'), \quad y = \eta \quad (y' = \eta' + b/2).$$

После этого формулы 2) примут вид

$$\xi' = \xi + a, \quad \eta' = -\eta.$$

В случае 3) при  $\varphi \neq 0$  перенесём начало координат в точку  $\dot{o}' = (x_0, y_0)$ , где  $x_0, y_0$  определяются из системы

$$x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi + a = x_0,$$

$$x_0 \sin \varphi + y_0 \cos \varphi + b = y_0.$$

Геометрически это означает, что  $f(\dot{o}') = \dot{o}'$ . Существование точки  $\dot{o}'$  вытекает из теоремы 3, в обозначениях которой  $L = 0$  (отсутствие неподвижных векторов при действии  $\mathcal{F}$ ) и  $t_{\mathbf{a}} = e$ , так что  $f = g =$

чистое вращение. Если рассуждать формально, то нужно ввести новые координаты  $\xi, \eta$ :

$$\begin{aligned}x &= \xi + x_0 \quad (x' = \xi' + x_0), \\y &= \eta + y_0 \quad (y' = \eta' + y_0),\end{aligned}$$

после чего формулы 3) примут вид

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ \eta' &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi.\end{aligned}$$

Таким образом, доказана

**Теорема 5.** Любое собственное движение плоскости есть либо сдвиг, либо вращение вокруг некоторой точки. Стало быть, собственное движение, оставляющее неподвижной какую-то точку, есть вращение вокруг этой точки. Несобственное движение плоскости сводится к отражению относительно некоторой прямой (у нас — оси абсцисс  $\xi$ ) и сдвига плоскости вдоль этой прямой. Из существования хотя бы одной неподвижной точки относительно несобственного движения вытекает существование целой прямой, состоящей из неподвижных точек.

Случай  $n = 3$ . Снова опираясь на теорему 10 из § 3 гл. 3, мы постараемся выбрать в трёхмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  такую прямоугольную систему координат  $\{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , чтобы линейная часть  $\mathcal{F}$  движения  $f$  приняла канонический вид. Тогда в координатной записи для  $f$  получается всего несколько возможностей:

$$\begin{array}{ll}1) \quad x' = x + a, & 2) \quad x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a, \\ y' = y + b, & y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b, \\ z' = z + c; & z' = z + c;\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}3) \quad x' = x + a, & 4) \quad x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + a, \\ y' = y + b, & y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + b, \\ z' = -z + c; & z' = -z + c.\end{array}$$

В случае 1) имеем сдвиг на вектор  $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ .

В случае 2) при  $\varphi \neq 0$ , проводя аналогию с плоскостью, мы придём (после перенесения начала координат в точку  $\dot{o}' = (x_0, y_0, 0)$ ) к формулам

$$\begin{aligned}\xi' &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ \eta' &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ \mu' &= \mu + c.\end{aligned}$$

Стало быть,  $f$  есть сдвиг на вектор  $(0, 0, c)$  вдоль прямой  $\dot{o}'\mu$ , соединённый с вращением вокруг этой же прямой на угол  $\varphi$ . Получается то, что в механике называют *винтовым движением* (навёртывание гайки на болт).

В случае 3), перейдя к новым координатам  $\xi, \eta, \mu$ :

$$\begin{aligned} x &= \xi, & x' &= \xi', \\ y &= \eta, & y' &= \eta', \\ z &= \mu + c/2; & z' &= \mu' + c/2, \end{aligned}$$

мы придём к формулам

$$\xi' = \xi + a, \quad \eta' = \eta + b, \quad \mu' = -\mu,$$

показывающим, что  $f$  сводится к отражению относительно плоскости  $\Pi = \dot{\partial}\xi\eta$  и к сдвигу на вектор  $(a, b, 0)$ , компланарный этой плоскости.

В случае 4), являющемся комбинацией 2) и 3), формулы приводятся к виду

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ \eta' &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ \mu' &= -\mu, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $f$  есть отражение относительно плоскости  $\dot{\partial}\xi\eta$ , соединённое с вращением вокруг оси  $\dot{\partial}\mu$  на угол  $\varphi$ .

**Теорема 6.** *Собственное движение  $f$  трёхмерного евклидова пространства  $\mathbb{E}$  является всегда винтовым, т.е.  $f$  сводится к сдвигу вдоль некоторой прямой и вращению вокруг этой же прямой (винтовое движение включает как чистый сдвиг, так и чистое вращение).*

*Несобственное движение есть отражение относительно некоторой плоскости  $\Pi$ , соединённое либо со сдвигом на вектор, компланарный той же плоскости  $\Pi$ , либо с вращением на угол  $\varphi$  вокруг прямой, перпендикулярной плоскости  $\Pi$  (при  $\varphi = \pi$  получается симметрия относительно точки).*

Из теоремы 6 в качестве частных случаев вытекают *теорема Эйлера* (1776 г.), согласно которой всякое перемещение твёрдого тела с одной закреплённой точкой  $\dot{o}$  представляет собой вращение вокруг некоторой оси (проходящей через точку  $\dot{o}$ ), и *теорема Шаля* (1830 г.) о том, что любое перемещение тела может быть осуществлено путём поступательного перемещения тела вдоль некоторого направления и вращения вокруг оси с этим направлением.

**4. Линейная геометрия, отвечающая группе.** В соответствии с точкой зрения, ставшей общепринятой более 125 лет назад и впервые чётко изложенной в “Эрлангенской программе” Ф. Клейна (1872 г.), под геометрией следует понимать совокупность инвариантов данной группы  $G$ . Пусть  $\Gamma$  — некоторое множество, или, как мы ещё будем говорить, пространство точек,  $G$  — какая-то подгруппа в группе всех биективных отображений  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ . Предметом геометрии,

отвечающей  $G$ , является изучение тех свойств пространственных *фигур* (или пространственных конфигураций точек) в  $\Gamma$ , которые остаются неизменными при действии преобразований из  $G$ .

Все фигуры разбиваются на классы  $G$ -конгруэнтных фигур. Именно, фигура  $\Phi_1$  объявляется конгруэнтной (или равной) фигуре  $\Phi_2$  ( $\Phi_1 \xrightarrow{G} \Phi_2$ ), если  $\Phi_2 = g(\Phi_1)$  хотя бы для одного элемента  $g \in G$ . Из аксиом группы непосредственно вытекает, что конгруэнтность является отношением эквивалентности, т.е. справедливы свойства:

- 1) рефлексивность (поскольку  $\Phi_1 \xrightarrow{G} \Phi_1 \iff \Phi_1 = e(\Phi_1)$ ,  $e$  — единичный элемент группы  $G$ ;
- 2) симметричность (поскольку  $\Phi_2 = g(\Phi_1) \implies \Phi_1 = g^{-1}(\Phi_2)$ ,  $g^{-1} \in G$  и, стало быть,  $\Phi_1 \xrightarrow{G} \Phi_2 \Leftrightarrow \Phi_2 \xrightarrow{G} \Phi_1$ );
- 3) транзитивность (так как  $\Phi_1 = g(\Phi_2)$ ,  $\Phi_2 = h(\Phi_3) \implies \Phi_1 = (gh)(\Phi_3)$ ).

Таким образом, классы конгруэнтных фигур не пересекаются. Рассматриваемые в линейных геометриях пространства  $\Gamma$  являются либо линейными (векторными) пространствами, либо пространствами, производными от линейных. Ближайшими к нам примерами служат: *евклидова геометрия* ( $\Gamma = \mathbb{E}$ ,  $G = \text{Iso}(\mathbb{E})$ ) и *аффинная геометрия* ( $\Gamma = \mathbb{A}$ ,  $G = \text{Aff}(\mathbb{A})$ ). Уже эти две геометрии различаются множествами изучаемых фигур. Элементарная евклидова геометрия на плоскости имеет дело с прямыми, углами, треугольниками, окружностями и т.д. и с соотношениями между линейными и угловыми элементами различных фигур. В аффинной геометрии приходится отказаться от всего, что обусловлено расстоянием между точками. Остановимся на некоторых простейших свойствах фигур в аффинной и евклидовой геометриях.

**Теорема 7.** Пусть  $(\mathbb{E}, V, \rho)$  — евклидово пространство. Любые две плоскости  $\Pi, \Pi' \in \mathbb{E}$  тогда и только тогда  $G$ -конгруэнтны ( $G = \text{Iso}(\mathbb{E})$ ), когда  $\dim \Pi = \dim \Pi'$ . В частности, все точки конгруэнтны. То же самое верно в случае аффинного пространства  $(\mathbb{A}, V)$  и группы  $G = \text{Aff}(\mathbb{A})$ .

**Доказательство.** Действительно, если  $\Pi = p + U$ ,  $\Pi' = p' + U'$  и  $f(\Pi) = \Pi'$ ,  $f \in G$ , то  $Df(U) = U'$ , а так как  $\det f := \det Df \neq 0$ , то  $\dim U = \dim U'$ , откуда по определению  $\dim \Pi = \dim \Pi'$ .

Обратно: пусть  $\dim \Pi = \dim \Pi' = m$ . Выберем в  $U$  (соответственно в  $U'$ ) ортонормированный базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$  (соответственно  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m)$ ) и дополним его до ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_i$  (соответственно  $\mathbf{e}'_i$ ) всего векторного пространства  $V$ . Существует ортогональный линейный оператор  $\mathcal{F}: V \rightarrow V$ , для которого  $\mathcal{F}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$ . Движение  $f$  с  $f(p) = p'$  и  $Df = \mathcal{F}$  будет переводить  $\Pi$  в  $\Pi'$ .

В случае аффинного пространства  $(\mathbb{A}, V)$  рассуждения совершенны аналогичны. Не нужно лишь заботиться об ортонормированности и ортогональности.  $\square$

Отмеченную в формулировке теоремы 7 конгруэнтность точек выражают ещё словами: группа  $G$  действует транзитивно на точках пространства  $\mathbb{E}$  (соответственно  $\mathbb{A}$ ). Транзитивность — важнейшее свойство группы  $G$  и отвечающей ей геометрии, без которого мы лишились бы возможности “сравнивать” различные фигуры. В случае аффинной геометрии группа  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  обладает гораздо более сильным свойством.

**Теорема 8.** В аффинной геометрии любые две системы  $\{\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_m\}$  и  $\{\dot{p}'_0, \dots, \dot{p}'_m\}$  в  $(\mathbb{A}, V)$  из  $m+1$  точек,  $0 \leq m \leq n$ , находящихся в общем положении, конгруэнтны.

**Доказательство.** Дополним данные системы до систем точек  $\{\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_n\}$  и  $\{\dot{p}'_0, \dots, \dot{p}'_n\}$ ,  $n = \dim \mathbb{A}$ , также находящихся в общем положении. По определению это значит, что векторы  $(\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \mathbf{e}_n = \overrightarrow{p_0 p_n})$  составляют один базис пространства  $V$ , а  $(\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{p'_0 p'_1}, \dots, \mathbf{e}'_n = \overrightarrow{p'_0 p'_n})$  — другой базис. Найдётся невырожденный линейный оператор  $\mathcal{F}: V \rightarrow V$  с  $\mathcal{F}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}'_i$ . Положив  $f(\dot{p}_0 + \mathbf{x}) = \dot{p}'_0 + \mathcal{F}\mathbf{x}$ , мы получим искомое аффинное преобразование  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , переводящее  $\dot{p}_i$  в  $\dot{p}'_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .  $\square$

Ясно, что теорема 8 перестаёт быть верной в евклидовой геометрии уже при  $m = 1$ , ибо для  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ -конгруэнтности пар точек  $\dot{p}, \dot{q}$  и  $\dot{p}', \dot{q}'$  необходимо, чтобы выполнялось условие  $\rho(\dot{p}, \dot{q}) = \rho(\dot{p}', \dot{q}')$ . Впрочем, это условие и достаточно, что можно усмотреть из доказательства теоремы 7.

Геометрический смысл аффинных автоморфизмов виден также из следующих рассуждений. Рассмотрим произвольное биективное отображение  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ , для которого

$$\overrightarrow{rs} = \lambda \overrightarrow{pq} \implies \overrightarrow{f(r)f(s)} = \lambda \overrightarrow{f(p)f(q)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (15)$$

(поле  $\mathbb{R}$  здесь можно заменить любым другим полем). Геометрически это значит, что  $f$  переводит коллинеарные точки в коллинеарные или, что то же самое, аффинную прямую отображает на некоторую другую аффинную прямую.

Положив  $\mathcal{F}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ , мы видим (при  $\lambda = 1$ ), что отображение  $\mathcal{F}: V \rightarrow V$  не зависит от выбора точек  $\dot{r}, \dot{s} \in \mathbb{A}$ , для которых  $\overrightarrow{rs} = \overrightarrow{pq}$ , а целиком определяется самим вектором  $\overrightarrow{pq}$ . Докажем, что определённое так отображение  $\mathcal{F}$  линейно. Условие  $\mathcal{F}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathcal{F}(\mathbf{v})$  вытекает из определения  $\mathcal{F}$  и из условия (15). Любые два вектора  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  можно представить в виде  $\mathbf{v} = \overrightarrow{pq}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{qr}$  для некоторых точек  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r} \in \mathbb{A}$ , поэтому  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$  и

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \overrightarrow{f(p)f(r)} = \overrightarrow{f(p)f(q)} + \overrightarrow{f(q)f(r)} = \mathcal{F}\mathbf{u} + \mathcal{F}\mathbf{v}.$$

Стало быть,  $\mathcal{F}$  — линейный оператор на  $V$ . Для любой точки  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{x}$  имеем

$$f(\dot{q}) = f(\dot{p}) + \overrightarrow{f(p)f(q)}, \quad \overrightarrow{f(p)f(q)} = \mathcal{F}(\overrightarrow{pq}) = \mathcal{F}\mathbf{x},$$

откуда  $f(\dot{p} + \mathbf{x}) = f(\dot{p}) + \mathcal{F}\mathbf{x}$ , т.е. биективное отображение  $f$ , обладающее свойством (15), обязательно является аффинным преобразованием.

Обратное также верно: если  $f$  — аффинный автоморфизм с линейной частью  $\mathcal{F}$  и если  $\overrightarrow{rs} = \lambda\overrightarrow{pq}$ , то  $\mathcal{F}(\overrightarrow{rs}) = \lambda\mathcal{F}(\overrightarrow{pq})$ . Но  $f(s) = f(\dot{r} + \overrightarrow{rs}) = f(\dot{r}) + \mathcal{F}(\overrightarrow{rs})$ , так что  $\mathcal{F}(\overrightarrow{rs}) = \overrightarrow{f(r)f(s)}$ . Аналогично,  $\mathcal{F}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ . Нами доказана

**Теорема 9.** *Свойство (15) биективного отображения  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  является характеристическим для аффинных преобразований.*

Рассмотрим теперь специальный случай, когда  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  — три точки на одной прямой (как говорят, *коллинеарные* точки) и  $\dot{p} \neq \dot{q}$ . Тогда найдётся такое число  $\lambda$ , что

$$\overrightarrow{pr} = \lambda\overrightarrow{pq}. \quad (15')$$

**Определение 2.** Число  $\lambda$  в формуле (15') называется *простым отношением* коллинеарных точек  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  и обозначается  $[\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}]$ .

Понятно, что из теоремы 9 вытекает

**Следствие.** *Аффинное преобразование  $f$  пространства  $\mathbb{A}$  сохраняет коллинеарность точек и простое отношение тройки коллинеарных точек.*

Формула (15'), переписанная в “аддитивной” форме  $\dot{r} - \dot{p} = \lambda(\dot{q} - \dot{p})$ , означает попросту, что любая точка  $\dot{r}$  на прямой  $\Pi_{\dot{p}, \dot{q}}$  записывается в виде  $\dot{r} = (1 - \lambda)\dot{p} + \lambda\dot{q}$ . В частности, в аффинной геометрии имеет смысл отношение *между*: образ внутренней точки  $\dot{r}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , остаётся внутренней точкой отрезка  $\dot{pq}$ . Мы уже отмечали раньше, что длина отрезка — понятие евклидовой геометрии, но середина отрезка — аффинное понятие.

**5. Аффинные преобразования евклидова пространства.** Эффект воздействия аффинных преобразований в окружающем нас мире наблюдается повсеместно. Простейший пример — растяжение резиновой ленты. Отметим более аккуратно ещё несколько фактов. В § 2, п. 4 мы условились понимать под объёмом  $v_n$  параллелограмма  $P(\dot{o}p_1, \dots, \dot{o}p_n)$  со сторонами  $\dot{o}p_1, \dots, \dot{o}p_n$  величину  $v_n = |\det(a_{ij})|_1^n$ , где  $(a_{ij})$  — матрица перехода от ортонормированного базиса  $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$  евклидова векторного пространства  $V$  к базису  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ,  $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{op_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . С другой стороны, если  $g$  — аффинный автоморфизм с линейной частью  $\mathcal{G}$ , то объёмом параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathcal{G}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{G}\mathbf{e}_n$  (точнее, на отрезках, отождествляемых с этими векторами), будет  $v'_n = |\det(b_{jk})|$ , где матрица  $(b_{jk})$  вычисляется по следующему правилу. Пусть

$$\mathcal{G}\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n g_{ji} \mathbf{f}_j.$$

Тогда

$$\sum_j b_{jk} f_j := \mathcal{G} \mathbf{e}_k = \sum_i a_{ik} \mathcal{G} \mathbf{f}_i = \sum_i a_{ik} \sum_j g_{ji} f_j = \sum_j \left( \sum_i g_{ji} a_{ik} \right) f_j,$$

т.е.  $b_{jk} = \sum_i g_{ji} a_{ik}$ , откуда

$$B = G A.$$

Следовательно,

$$v_n' = |\det(b_{jk})| = |\det G| \cdot v_n = |\det g| \cdot v_n.$$

Мы пришли к следующему выводу.

**Теорема 10.** *При аффинном преобразовании  $n$ -мерного евклидова пространства объём параллелепипеда, построенного на  $n$  векторах, умножается на абсолютную величину определителя преобразования. Другими словами, при аффинном преобразовании отношение объёмов параллелепипедов сохраняется.*

То же самое относится и к объёмам любых других фигур в евклидовом пространстве.

Следующее утверждение имеет наглядный геометрический смысл.

**Теорема 11.** *Всякое невырожденное аффинное преобразование  $f$   $n$ -мерного евклидова пространства  $(\mathbb{E}, V)$  есть произведение:*

- 1) сдвига на некоторый вектор;
- 2) движения, оставляющего неподвижной некоторую точку  $\dot{o}$ ;
- 3) аффинного преобразования  $h$ , являющегося композицией  $n$  сжатий (растяжений) вдоль взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке  $\dot{o}$ .

**Доказательство.** Действительно, согласно теореме 2  $f = t_a \cdot g$ , где  $g(\dot{o}) = \dot{o}$  для некоторой точки  $\dot{o}$ . Если  $\mathcal{G}$  — линейная часть преобразования  $g$ , то согласно теореме 15 из § 3 гл. 3  $\mathcal{G} = \mathcal{D}\mathcal{H}$ , где  $\mathcal{D}$  — ортогональный линейный оператор на  $V$ , а  $\mathcal{H}$  — положительно определённый симметричный оператор. В соответствии с теоремой 6 из § 3 гл. 3 выберем в  $\mathbb{E}$  прямоугольную систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , в которой оператор  $\mathcal{H}$  принимает канонический вид:

$$\mathcal{H} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$f = t_a \cdot d \cdot h, \quad d(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{D}\mathbf{x}, \quad h(\dot{o} + \mathbf{x}) = \dot{o} + \mathcal{H}\mathbf{x}, \quad (16)$$

так что  $d$  — движение пространства  $\mathbb{E}$ , а  $h$  — аффинное преобразование, которое можно ещё записать в виде произведения

$$h = h_1 h_2 \dots h_n. \quad (17)$$

Здесь  $h_k$  — аффинное преобразование с линейной частью  $\mathcal{H}_k$ :

$$\mathcal{H}_k \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \text{ при } i \neq k; \quad \mathcal{H}_k \mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k.$$

Формулы (16) и (17) дают искомое разложение аффинного преобразования  $f$ .  $\square$

**6. Выпуклые множества.** Вспоминая определение барицентрической комбинации точек (из § 1, п. 5)

$$\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda_1 \dot{p}_1 + \dots + \lambda_m \dot{p}_m, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1, \quad (18)$$

и барицентрических координат, мы замечаем теперь, что при  $m = 1$

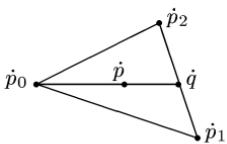


Рис. 8

точки  $\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda_1 \dot{p}_1$ ,  $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ , пробегают всю прямую  $\Pi_{\dot{p}_0, \dot{p}_1}$ . Если же дополнительно  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ ,  $i = 0, 1$ , то получится отрезок  $\dot{p}_0 \dot{p}_1$ . При  $m = 2$  точки  $\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda_1 \dot{p}_1 + \lambda_2 \dot{p}_2$ ,  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , пробегают открытый треугольник с вершинами  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2$ .

Действительно, внутренняя точка  $\dot{p}$  треугольника будет внутренней точкой отрезка  $\dot{p}_0 \dot{q}$ , где  $\dot{q}$  — внутренняя точка отрезка  $\dot{p}_1 \dot{p}_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda \dot{q}, & \lambda_0 + \lambda &= 1, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda > 0, \\ \dot{q} &= \alpha_1 \dot{p}_1 + \alpha_2 \dot{p}_2, & \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0. \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda(\alpha_1 \dot{p}_1 + \alpha_2 \dot{p}_2) = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda_1 \dot{p}_1 + \lambda_2 \dot{p}_2,$$

где  $\lambda_1 = \lambda \alpha_1 > 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda \alpha_2 > 0$  и  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$  (прямые вычисления или упр. 4 из § 1).

Обратно: если  $\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda_1 \dot{p}_1 + \lambda_2 \dot{p}_2$  и  $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2$ , то  $\dot{p} = \lambda_0 \dot{p}_0 + \lambda \dot{q}$ , где  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_0 + \lambda = 1$  и  $\dot{q} = \alpha_1 \dot{p}_1 + \alpha_2 \dot{p}_2$ ,  $\alpha_1 = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ ,  $\alpha_2 = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$ , так что  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Итак,  $\dot{q}$  — внутренняя точка отрезка  $\dot{p}_1 \dot{p}_2$ , а  $\dot{p}$  — внутренняя точка треугольника с вершинами  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2$  (рис. 8).

Рассуждая аналогичным образом, мы при  $m = 3$  придём к тетраэдру, а при любом  $m \leq n$  — к симплексу. Именно, дадим следующее

**Определение 3.** Открытым  $m$ -мерным симплексом с вершинами в точках общего положения  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  называется множество всех точек вида (18) с положительными барицентрическими координатами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Неотрицательные барицентрические координаты относительно системы  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$  соответствуют точкам замкнутого симплекса с вершинами  $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m$ .

**Теорема 12.** Образом любого  $m$ -мерного симплекса при аффинном автоморфизме является симплекс. Все  $m$ -мерные симплексы в аффинной геометрии конгруэнтны.

**Доказательство.** Это почти очевидно. Пусть  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  — аффинное преобразование с линейной частью — линейным оператором  $\mathcal{F} : V \rightarrow V$ . Применяя  $f$  к обеим частям равенства (18) с  $\lambda_i \geq 0$  и используя предложение 2, i) из § 1, мы придём к равенству

$$f(\dot{p}) = \lambda_0 f(\dot{p}_0) + \lambda_1 f(\dot{p}_1) + \dots + \lambda_m f(\dot{p}_m),$$

означающему, что  $f(\dot{p})$  — точка симплекса с вершинами  $f(\dot{p}_0), \dot{p}_1, \dots, f(\dot{p}_m)$ . Последнее утверждение теоремы есть перефразировка утверждения теоремы 8.  $\square$

**Определение 4.** Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  — аффинное пространство. Подмножество  $M \subset \mathbb{A}$  называется *выпуклым*, если вместе с любыми точками  $\dot{p}, \dot{q}$  оно целиком содержит отрезок  $\dot{p}\dot{q}$ .

Симплекс — важный пример выпуклого множества. Понятно, что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло.

**Определение 5.** Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество  $M$ , называется *выпуклой оболочкой множества  $M$*  и обозначается  $C(M)$ .

Очевидно, что  $C(M) = M$  в точности тогда, когда  $M$  выпукло. Собственно говоря,  $m$ -мерный симплекс с вершинами  $\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_m$  является выпуклой оболочкой указанной системы точек.

**Предложение 1.** Пусть  $M$  — выпуклое множество,  $\dot{p} \in \mathbb{A}$ . Тогда

$$C(M \cup \dot{p}) = \cup \dot{p}\dot{q}, \quad \dot{q} \in M.$$

**Доказательство.** По определению отрезок  $\dot{p}\dot{q}$ ,  $\dot{q} \in M$ , принадлежит любому выпуклому множеству, содержащему  $M$  и  $\dot{p}$ . Стало быть,  $\cup_{\dot{q} \in M} \dot{p}\dot{q} \subset C(M \cup \dot{p})$ .

Обратное включение будет следовать из выпуклости множества  $\cup \dot{p}\dot{q}$ ,  $\dot{q} \in M$ , проверкой которого мы и займёмся.

Пусть  $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \in M$ . Тогда произвольным точкам  $\dot{r}_1 \in \dot{p}\dot{q}_1$ ,  $\dot{r}_2 \in \dot{p}\dot{q}_2$  отвечает точка  $\dot{r} \in \dot{r}_1\dot{r}_2$ . Покажем, что  $\dot{r} \in \dot{p}\dot{q}$ , где  $\dot{q}$  — какая-то точка из  $M$ . Предположим сначала, что точки  $\dot{p}, \dot{q}_1, \dot{q}_2$  не лежат на одной прямой. Тогда они принадлежат своей аффинной оболочке — двумерной плоскости  $\Pi = A(\dot{p}, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ , к которой мы вправе применять обычную элементарную геометрию. В частности, мы замечаем, что прямая  $\Pi_{\dot{p}, \dot{r}}$  пересекает отрезок  $\dot{q}_1\dot{q}_2$  в некоторой точке  $\dot{q}$ . Ввиду выпуклости  $M$  имеем включение  $\dot{q} \in M$  (рис. 9). В таком случае  $\dot{r} \in \dot{p}\dot{q}$ , т.е. в этом случае всё доказано. Если же точки  $\dot{p}, \dot{q}_1, \dot{q}_2$  лежат на одной прямой, то в качестве  $\dot{q}$  можно взять просто одну из точек  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$ .  $\square$

**Теорема 13.** Аффинно-линейная функция  $f$  на выпуклой оболочке  $S = C(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_m)$  конечной системы точек  $\dot{p}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  (т.е. на симплексе), достигает своего максимума в одной из вершин:

$$\max_{\dot{p} \in S} f(\dot{p}) = \max_i f(\dot{p}_i).$$

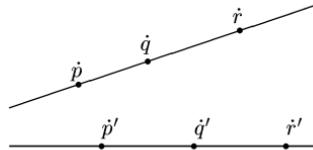


Рис. 9

**Доказательство.** При  $m = 0$  утверждение теоремы тривиально. Используем, далее, индукцию по  $m > 0$ . Считаем по предположению индукции, что максимум функции  $f$  на выпуклом множестве  $M = C(\dot{p}_0, \dots, \dot{p}_{m-1})$  равен  $\max_{i < m} f(\dot{p}_i)$ . Ввиду предложения 1 всякая точка  $\dot{s} \in S$  содержится в некотором отрезке  $\dot{p}_m \dot{q}$ ,  $\dot{q} \in M$ , и, значит,

$$\dot{s} = \dot{p}_m + \lambda \overrightarrow{p_m q}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Если  $\mathcal{F}$  — линейная часть функции  $f$ , то

$$f(\dot{s}) = f(\dot{p}_m) + \lambda \mathcal{F}(\overrightarrow{p_m q}), \quad \mathcal{F}(\overrightarrow{p_m q}) = f(\dot{q}) - f(\dot{p}_m),$$

а поэтому

$$f(\dot{s}) = (1 - \lambda)f(\dot{p}_m) + \lambda f(\dot{q}) \leq \max\{f(\dot{p}_m), f(\dot{q})\} \leq \max_{i \leq m} f(\dot{p}_i). \quad \square$$

Несложная теорема 13 относится к аппарату линейного программирования, имеющего прикладное значение.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Убедиться, что группа  $A_1(\mathbb{F}_p)$  автоморфизмов аффинной прямой над полем из  $p$  элементов ( $p$  простое) имеет порядок  $p(p - 1)$ . Какой группе изоморфна  $A_1(\mathbb{F}_3)$ ?

2. Дать геометрическое описание собственного движения  $f$  евклидовой плоскости, если

$$Df = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad f(\dot{o}) = (1, 1).$$

3. Провести классификацию собственных движений четырёхмерного евклидова точечного пространства.

## § 4. Пространства с индефинитной метрикой

**1. Индефинитная метрика.** Под пространством со скалярным произведением мы условились понимать векторное пространство  $V$ , рассматриваемое вместе с фиксированной невырожденной квадратичной формой

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j.$$

Евклидовы и эрмитовы (унитарные) пространства, соответствующие положительно-определенной форме  $q$  (обычной или эрмитовой), нами рассмотрены достаточно подробно. Важную роль играют также пространства с так называемой индефинитной метрикой, отвечающей неопределенной форме  $q$ . Как известно из § 4 гл. 1, при надлежащем выборе базиса  $(\mathbf{e}_i)$  пространства  $V$  невырожденная форма  $q$

принимает нормальный вид

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2 \quad (1)$$

(основным полем теперь считается  $\mathbb{R}$ ). Скалярным произведением на  $V$  будет

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_s y_s - x_{s+1} y_{s+1} - \dots - x_n y_n.$$

Чтобы оставаться в вещественной области, будем говорить только о квадрате нормы (длины)  $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} | \mathbf{x})$  вектора  $\mathbf{x}$ , которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения при  $1 \leq s \leq n-1$ . Вектор  $\mathbf{x}$  будем называть *изотропным*, если  $\|\mathbf{x}\|^2 = 0$ .

На аффинном пространстве  $\mathbb{E}$ , связанном с векторным пространством  $V$ , определён квадрат “расстояния”

$$\rho^2(\dot{p}, \dot{q}) = \sum_{i=1}^s (y_i - x_i)^2 - \sum_{i=s+1}^n (y_i - x_i)^2$$

между точками  $\dot{p}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\dot{q}(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}$ .

Квадратичная форма  $(\mathbf{x} | \mathbf{x})$  называется ещё *метрической формой* векторного пространства  $V$ , а  $\rho^2(\dot{p}, \dot{q})$  — *метрической формой* аффинного пространства  $\mathbb{E}$ . При  $1 \leq s \leq n-1$  пространство  $\mathbb{E}$  называется *псевдоевклидовым*, а при  $s=1$  говорят ещё о *пространстве Минковского* (иногда к нему относят случай  $s=n-1$ , но это несущественно: замена формы  $q$  на  $-q$ ). В случае  $n=4$  пространство Минковского отвечает физическому пространственно-временному континууму и играет важную роль во всех вопросах, связанных со специальной теорией относительности.

**2. Псевдоевклидовы движения.** Согласно общей концепции, изложенной в § 3, п. 4, геометрия псевдоевклидова пространства определяется группой  $G$  псевдоевклидовых движений, которая порождается подгруппой  $T$  параллельных переносов (сдвигов) и стационарной подгруппой  $O(s, n-s)$  некоторой фиксированной точки  $\dot{o} \in \mathbb{E}$  (подгруппой, оставляющей  $\dot{o}$  на месте). При  $s=n$  мы имеем ортогональную группу  $O(n) = O(n, 0)$ . В общем же случае “псевдоортогональная” группа  $O(s, n-s)$  состоит из линейных операторов  $\mathcal{F}: V \rightarrow V$ , сохраняющих форму (1). Говорят также, что  $O(s, n-s)$  — группа автоморфизмов формы  $q$ .

В выбранном каноническом базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  форма (1) имеет матрицу

$$I_s = \begin{vmatrix} E_s & 0 \\ 0 & -E_{n-s} \end{vmatrix},$$

а оператор  $\mathcal{F} \in O(s, n-s)$  — матрицу  $F$  такую, что

$${}^t F \cdot I_s \cdot F = I_s.$$

Чтобы это понять, надо вспомнить закон изменения матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису, в данном случае —

к базису  $(\mathcal{F}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{F}\mathbf{e}_n)$ . Очевидно, как и в случае ортогональной группы,  $\det \mathcal{F} = \det F = \pm 1$ . Если  $\det \mathcal{F} = 1$ , то говорят, что  $\mathcal{F}$  — *собственный автоморфизм* формы  $q$ , а аффинное преобразование  $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  с  $Df = \mathcal{F}$  — *собственное “псевдоевклидово” движение*. Заметим ещё, что автоморфизм  $\mathcal{F}$  формы  $q$  переводит изотропные векторы в изотропные, поскольку  $q(\mathcal{F}\mathbf{x}, \mathcal{F}\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ .

**3. Группа Лоренца.** Как уже отмечалось, четырёхмерное вещественное пространство с невырожденной симметричной метрикой сигнатуры  $(1, 3)$  занимает особое место.

Определение 1. Группа  $O(1, 3)$  называется *группой Лоренца* и обозначается  $\mathbf{L}$ .

В этом случае стандартными являются обозначения

$$\begin{aligned} V &= \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle, \\ \mathbf{x} &= t\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \\ \|\mathbf{x}\|^2 &= q(\mathbf{x}) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \end{aligned}$$

Достаточно интересным является частный случай “одномерной группы Лоренца”  $\mathbf{L}_1$  автоморфизмов двумерного пространства, сохраняющих метрику

$$(\mathbf{u} | \mathbf{u}) = t^2 - x^2.$$

Группа  $\mathbf{L}_1$  описывает физическое движение по прямой (у нас теперь  $x$  — не вектор, а координата вектора  $\mathbf{u} = t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1$ ). Ясно, что все изотропные векторы пропорциональны векторам  $\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1$ . Поэтому для оператора  $\mathcal{F}$  в силу его невырожденности имеются две возможности:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) &= \alpha(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1), \quad \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = \beta(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1), \\ \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) &= \alpha(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1), \quad \mathcal{F}(\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) = \beta(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

Рассмотрим одну из этих возможностей, например, первую. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathbf{e}_0 &= \frac{\alpha + \beta}{2}\mathbf{e}_0 + \frac{\alpha - \beta}{2}\mathbf{e}_1, \\ \mathcal{F}\mathbf{e}_1 &= \frac{\alpha - \beta}{2}\mathbf{e}_0 + \frac{\alpha + \beta}{2}\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

Матрица

$$F = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\alpha + \beta}{2} & \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} & \frac{\alpha + \beta}{2} \end{array} \right\|$$

оператора  $\mathcal{F}$  имеет определитель  $\det F = \alpha\beta$ . Ограничимся собственным преобразованием Лоренца, т.е. будем считать  $\alpha\beta = 1$ . Для пре-

образования координат получим

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2} & \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} \\ \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{2} & \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2} \left( t + \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{\alpha^{-1} + \alpha} x \right), \\ x' &= \frac{\alpha^{-1} + \alpha}{2} \left( \frac{\alpha^{-1} - \alpha}{\alpha^{-1} + \alpha} t + x \right). \end{aligned}$$

Введём обозначение

$$\frac{\alpha - \alpha^{-1}}{\alpha + \alpha^{-1}} = v = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}. \quad (2)$$

Ещё один повод к недоразумению: у нас  $v$  — скаляр, а не вектор, как было раньше. Рассматриваемая величина соответствует физической скорости, а скорость принято обозначать буквой  $v$ . Заметим, что всегда  $|v| < 1$ , и поэтому имеют смысл выражения, вытекающие из соотношения (2):

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1 - v}{1 + v}, & \alpha &= \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}, \\ \frac{\alpha + \alpha^{-1}}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned}$$

Наконец, получаем

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3)$$

Эта элегантная формула записана в масштабе, когда скорость света принята за единицу. В обычном масштабе преобразования приняли бы вид

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3')$$

Они соответствуют квадратичной форме  $c^2t^2 - x^2$ . Будем для простоты пользоваться формулой (3). Замечательно, что уравнения электродинамики Максвелла не меняются в результате применения преобразования Лоренца и Эйнштейн, следя мысли, впервые высказанный математиком А. Пуанкаре, предположил, что все физические законы не должны меняться от преобразований Лоренца (при  $n = 4$ ). Этим было положено начало *специальной теории относительности*. Мы не останавливаемся на физической интерпретации и на следствиях формулы (3). Заметим лишь, что при скорости  $v$ , близкой к

нулю (малой по сравнению со скоростью света), преобразования (3) принимают вид преобразований Галилея:

$$t' = t, \quad x' = x - vt.$$

Однако в общем случае положение точки характеризуется двумя координатами  $(t, x)$  — временной и пространственной. Положениям  $(x_1, t_1), (x_2, t_1)$  с одним и тем же  $t = t_1$ , в первой (неподвижной) системе координат соответствуют различные  $t'_1, t'_2$  во второй системе. Отсюда получается, например, закон изменения длин

$$x'_1 - x'_2 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2}} - \frac{x_2 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Наоборот, при  $x_1 = x_2, t_1 \neq t_2$  получаем закон изменения времени.

Если  $f_v$  — преобразование Лоренца (3), определённое параметром  $v$ , то

$$g_{v_1} \cdot g_{v_2} = g_v.$$

Найдём параметр (скорость)  $v$ . Положив

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - v_1 x}{\sqrt{1 - v_1^2}}, & x' &= \frac{x - v_1 t}{\sqrt{1 - v_1^2}}, \\ t'' &= \frac{t' - v_2 x'}{1 - v_2^2}, & x'' &= \frac{x' - v_2 t'}{\sqrt{1 - v_2^2}}, \end{aligned}$$

получим

$$t'' = \frac{t - v_1 x - v_2(x - v_1 t)}{\sqrt{1 - v_1^2} \cdot \sqrt{1 - v_2^2}} = \frac{t - (v_1 + v_2)x / (1 + v_1 v_2)}{\sqrt{1 - ((v_1 + v_2) / (1 + v_1 v_2))^2}}.$$

Значит,

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2},$$

что является просто законом сложения скоростей.

**4. Собственная группа Лоренца.** Что такое собственная группа Лоренца, отвечающая квадратичной форме

$$q(\mathbf{x}) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \tag{4}$$

мы уточним чуть позже. В одномерном случае для преобразования Лоренца мы получили явную формулу (3). Формула общего преобразования, сохраняющего  $q(\mathbf{x})$ , выглядела бы довольно громоздко. Поэтому мы изберём несколько иной путь описания группы **L**. Именно, рассмотрим пространство всех эрмитовых матриц порядка 2

$$P_{\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} t - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & t + x_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь  $\mathbf{x} = (t, x_1, x_2, x_3)$  — вектор из четырёхмерного вещественного пространства  $\mathbb{R}^4$ . Соответствие между векторами и эрмитовыми

матрицами взаимно однозначно и линейно:

$$P_{\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}} = \alpha P_{\mathbf{x}} + \beta P_{\mathbf{y}}.$$

Каждой комплексной матрице

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

т.е. каждому элементу группы  $SL_2(\mathbb{C})$ , поставим в соответствие преобразование  $\Gamma_A$  в пространстве эрмитовых матриц, полагая

$$\Gamma_A(P_{\mathbf{x}}) = A \cdot P_{\mathbf{x}} \cdot A^*.$$

Легко видеть, что

$$\{\Gamma_A(P_{\mathbf{x}})\}^* = A^{**} P_{\mathbf{x}}^* A^* = \Gamma_A(P_{\mathbf{x}}),$$

где  $A^* = {}^t \bar{A}$  — обычное эрмитово сопряжение. Так как

$$\Gamma_A(\Gamma_B(P_{\mathbf{x}})) = AB P_{\mathbf{x}} B^* A^* = AB P_{\mathbf{x}} (AB)^* = \Gamma_{AB}(P_{\mathbf{x}}),$$

то

$$\Gamma_A \Gamma_B = \Gamma_{AB},$$

причём оператор  $\Gamma_A$  линеен:

$$\Gamma_A(\alpha P_{\mathbf{x}} + \beta P_{\mathbf{y}}) = \alpha \Gamma_A(P_{\mathbf{x}}) + \beta \Gamma_A(P_{\mathbf{y}}).$$

Обратим внимание на то, что

$$\det A \cdot \det P_{\mathbf{x}} \cdot \det A^* = \det P_{\mathbf{x}},$$

поскольку  $\det A = \det A^* = 1$  по условию. Но

$$\det P_{\mathbf{x}} = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Значит, линейный оператор  $\Gamma_A$  не меняет квадратичной формы (4). В частности,  $\det \Gamma_A = \pm 1$ . На самом деле из простых топологических соображений (непрерывность функции  $\det$  и связность группы  $SL_2(\mathbb{C})$ ) следует, что  $\det \Gamma_A = +1$ . Мы примем это на веру, хотя при небольшом усилии этот факт можно установить.

Уравнение

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \tag{6}$$

определяет в  $\mathbb{R}^4$  конус — специальную поверхность второго порядка (или, как мы будем говорить в следующей главе, квадрику), на которой лежит целиком прямая, проходящая через начало координат и через любую точку на поверхности. Условие  $t > 0$  выделяет так называемую *верхнюю полость* конуса (6).

Далее, неравенства

$$t > 0, \quad t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$$

дают необходимые и достаточные условия положительной определённости матрицы  $P_{\mathbf{x}}$  или, что то же самое, положительной определённости соответствующей квадратичной формы (см. гл. 1, § 4, п. 8).

Ясно, что эти условия положительной определённости сохраняются и для матрицы

$$\Gamma_A(P_x) = A \cdot P_x \cdot A^*.$$

Значит, линейный оператор  $\Gamma_A$  сохраняет не только конус (6), но и его верхнюю полость.

Резюмируем свойства  $\Gamma_A$ :

- 1)  $\Gamma_A$  является автоморфизмом квадратичной формы (4);
- 2)  $\det \Gamma_A = 1$ ;
- 3)  $\Gamma_A$  сохраняет верхнюю полость конуса (6).

**Определение 2.** Всякий линейный оператор  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , удовлетворяющий условиям 1)–3), называется *собственным преобразованием Лоренца*, а группа  $L^+$  всех таких преобразований — *собственной группой Лоренца*.

На самом деле гомоморфизм  $\Gamma$  является эпиморфизмом (см. упр. 3). Найдём ядро  $\text{Ker } \Gamma$ . Пусть

$$P_x = A \cdot P_x \cdot A^*$$

для любой эрмитовой матрицы  $P_x$  (условие  $\Gamma_A = \mathcal{E}$ ). В частности, при  $e = (1, 0, 0, 0)$  имеем  $P_e = E$  и  $AA^* = E$ , откуда  $A^* = A^{-1}$ . Таким образом,

$$AP_x = P_x A.$$

Выбирая различные независимые матрицы  $P_x$ , получим  $A = \alpha E$ , а так как  $\det A = 1$ , то  $\alpha = \pm 1$ . Стало быть,  $\text{Ker } \Gamma = \{\pm E\}$ .

Мы получили следующее утверждение.

**Теорема 1.** Соответствие  $\Gamma : A \mapsto \Gamma_A$  между комплексными матрицами второго порядка с определителем 1 и собственными преобразованиями Лоренца является гомоморфным отображением группы  $SL_2(\mathbb{C})$  на группу  $L^+$  всех собственных преобразований Лоренца. Каждому собственному преобразованию Лоренца отвечают ровно две комплексные матрицы  $A$  и  $-A$ , отличающиеся лишь знаком.

Имея в виду теорему 1, часто группой Лоренца называют  $SL_2(\mathbb{C})$ , хотя правильнее было бы говорить о факторгруппе  $SL_2(\mathbb{C})/\{\pm E\}$ .

Так как по определению форма  $q(x)$  инвариантна относительно преобразований Лоренца, то эти преобразования переводят в себя поверхности  $S_c$ , заданные уравнениями

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Если  $c > 0$ , то  $S_c$  — двуполостный гиперболоид; если  $c < 0$ , то  $S_c$  — однополостный гиперболоид; наконец,  $S_0$  — конус (терминология, заимствованная из аналитической геометрии трёхмерного пространства, будет активно использоваться нами в следующей главе). На каждой из этих поверхностей (в отдельности на каждой полости гиперболоида или конуса)  $\Gamma_A$  является движением в том же смысле, в

каком ортогональный оператор на  $\mathbb{R}^n$  определяет движение на сфере  $S^{n-1}$  (движение — преобразование, сохраняющее расстояние между точками).

Верхняя полость двуполостного гиперболоида

$$t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad t > 0,$$

с определённой на ней группой движений  $\mathbf{L}^+$  (или  $SL_2(\mathbb{C})$ ) представляет собой одну из моделей пространства Лобачевского  $\Lambda^3$ . Мы не будем пока останавливаться подробно на самом понятии пространства Лобачевского, но обратим внимание на одно обстоятельство. Группа движений  $G$  какого-либо пространства  $S$  лишь тогда представляет интерес, когда любую точку  $\dot{p} \in S$  можно перевести в любую другую точку  $\dot{q} \in S$  некоторым движением  $g \in G$ :  $g(\dot{p}) = \dot{q}$ , или, что эквивалентно, любая точка  $\dot{q} \in S$  является образом относительно  $g \in G$  некоторой фиксированной точки  $\dot{p}_0 \in S$ . Мы уже отмечали в § 3, что группа  $\text{Aff}(\mathbb{A})$  действует транзитивно на аффинном пространстве  $\mathbb{A}$ , а  $\text{Iso}(\mathbb{E})$  — на евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$ . Группа  $O(n)$  действует, очевидно, транзитивно на сфере  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  (как это проще всего обосновать?).

Покажем теперь, что собственная группа Лоренца  $\mathbf{L}^+$  транзитивна на  $\Lambda^3$ . Для этого точке  $\mathbf{x} = (t, x_1, x_2, x_3) \in \Lambda^3$  сопоставим, как и ранее, эрмитову матрицу  $P_{\mathbf{x}}$  (см. (5)). Она будет положительно определённой и иметь определителем 1. Как нам известно, любую такую матрицу можно представить в виде

$$P_{\mathbf{x}} = A \cdot A^* = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^*,$$

где  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  — комплексная матрица с определителем 1. Это и означает, что  $P_{\mathbf{x}}$  получается из фиксированной матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  при помощи движения  $\Gamma_A$ .

Стационарной подгруппой  $\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}^+$  точки  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 0)$  служит совокупность всех  $\Gamma_A$  с

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другими словами,  $A \cdot A^* = E$ . Так как ещё  $\det A = 1$ , то мы заключаем, что

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}_0}^+ \cong SU(2)/\{\pm E\} \cong SO(3)$$

(последний изоморфизм будет установлен в [ВА III]; нам он пока не понадобится). Движения пространства  $\Lambda^3$  называют ещё *гиперболическими вращениями*.

**УПРАЖНЕНИЯ**

1. Рассмотреть подробно вторую возможность для действия оператора  $\mathcal{F} \in \mathbf{L}_1$ .
2. Доказать, что  $\det \Gamma_A = 1$  для линейного оператора  $\Gamma_A$ , определённого в п. 4.
3. Доказать, что гомоморфизм

$$\Gamma: SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbf{L}^+$$

является на самом деле эпиморфизмом, т.е. отображением на всю группу  $\mathbf{L}^+$ .

4. Прочитать § 12 в части 2 учебного пособия [2], чтобы усилить для себя физический аспект, присущий пространству Минковского и группе Лоренца.

# ГЛАВА 5

## КВАДРИКИ

---

Геометрические фигуры аффинной и евклидовой геометрий, которые будут изучаться в этой главе, знакомы читателю из курса аналитической геометрии. Используемая терминология — кривые, поверхности и т.д. — та же самая. Но мы уже видели в конце предыдущей главы, что возникает настоятельная необходимость выйти за пределы трёхмерного пространства. Чисто алгебраическая классификация поверхностей 2-го порядка в многомерных пространствах не очень сложна: надлежащий аппарат имеется в нашем распоряжении, хотя наглядное геометрическое воображение, вероятно, отойдёт на второй план. Важное место займёт изучение геометрических объектов с проективной точки зрения.

### § 1. Квадратичные функции

**1. Квадратичные функции на аффинном пространстве.** Пусть  $\mathbb{A}$  — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $V$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{K}$ . Будем смотреть на  $\mathbb{A}$  как на одномерное аффинное пространство  $\mathbb{K}_a$ . Например, множество  $\mathbb{R}$  вещественных чисел есть в то же время вещественная аффинная прямая  $\mathbb{R}_a = \mathbb{R}$ , на которой действует одномерная аффинная группа (см. § 1, 3 гл. 3).

По аналогии с билинейными формами  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  определяются биаффинные функции.

**Определение 1.** Функция  $\Phi: \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  называется *биаффинной*, если  $\Phi(\dot{p}, \dot{q})$  при фиксированной точке  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  или при фиксированной точке  $\dot{q}$  является аффинным отображением  $\dot{q} \mapsto \alpha \in \mathbb{K}_a$  (или  $\dot{p} \mapsto \alpha \in \mathbb{K}_a$ ). Биаффинная функция называется *симметричной*, когда

$$\Phi(\dot{p}, \dot{q}) = \Phi(\dot{q}, \dot{p}) \quad \forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}.$$

Мы не будем доказывать тот факт, что если выбрать какую-то точку  $\dot{o} \in \mathbb{A}$  в качестве “начала” и положить  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ ,  $\dot{q} = \dot{o} + \mathbf{y}$ , то любая биаффинная функция  $\Phi$  выражается в виде

$$\Phi(\dot{o} + \mathbf{x}, \dot{o} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{x}) + l'(\mathbf{y}) + \varphi_0, \quad (1)$$

где  $f$  — билинейная форма на  $V$ , а  $\varphi_0 = \Phi(\dot{o}, \dot{o})$  — скаляр. Зафиксировав вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$  и положив

$$h(\dot{o}) = l'(\mathbf{a}) + \varphi_0, \quad Dh(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + l(\mathbf{x}),$$

мы без труда убеждаемся в том, что действительно отображение

$$\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x} \mapsto h(\dot{o} + \mathbf{x}) = h(\dot{o}) + Dh(\mathbf{x})$$

аффинно-линейно, с линейной частью — линейной функцией  $Dh : V \rightarrow \mathbb{K}$ .

Для простоты мы возьмём (1) за определение биаффинной функции, мотивируя его обоснованность предыдущими замечаниями. Теперь легко проверяется, что симметричная биаффинная функция  $\Phi$  имеет запись

$$\Phi(\dot{o} + \mathbf{x}, \dot{o} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{y}) + \varphi_0 \quad (2)$$

с симметричной билинейной формой  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ , линейной функцией  $l : V \rightarrow \mathbb{K}$  ( $l' = l$ ) и скаляром  $\varphi_0 = \Phi(\dot{o}, \dot{o}) \in \mathbb{K}$ .

**Определение 2.** Положим  $Q(\dot{p}) = \Phi(\dot{p}, \dot{p})$ , где  $\Phi$  имеет вид (2), и назовём  $Q : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{K}$  квадратичной функцией на  $\mathbb{A}$ .

Пусть  $q$  — квадратичная форма на  $V$ :  $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . В соответствии с (2) имеем

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{x}) + \varphi_0 \quad (3)$$

Взяв систему координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $\mathbb{A}$  с началом в точке  $\dot{o}$ , мы получим координатную запись значения квадратичной функции  $Q$ :

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i + \varphi_0 \quad (4)$$

в точке  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ . Здесь коэффициенты  $\varphi_{ij}$  составляют симметричную матрицу  $F = (\varphi_{ij})$ . Сравнивая (3) и (4), мы замечаем, что в любой другой координатной системе  $Q(\dot{p})$  запишется аналогичным образом, т.е. в виде многочлена степени  $\leq 2$ , хотя и с какими-то другими коэффициентами.

Пусть  $x'_1, \dots, x'_n$  — координаты точки  $\dot{p} = \dot{o}' + \mathbf{x}'$  в системе координат  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ . Как мы знаем (см. (3) из § 1 гл. 4), старые координаты  $x_1, \dots, x_n$  выражаются через новые по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

с невырожденной матрицей  $A = (a_{ij})$ . В новых координатах матрицей квадратичной формы  $q$  будет  ${}^t A \cdot F \cdot A$  (см. (5) из § 4 гл. 1). В частности, её ранг  $r$  является инвариантом относительно аффинных преобразований и имеет смысл положить

$$\text{rank } Q := \text{rank } q = r.$$

**2. Центральные точки для квадратичной функции.** Введём ещё одно полезное понятие, для чего рассмотрим значение  $Q$  в точке  $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{y} = \dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{A}$ . Непосредственно из (3) получаем

$$Q(\dot{q}) = Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y}) = q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + 2l(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \varphi_0,$$

т.е.

$$Q(\dot{q}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2\{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{y})\} \quad (5)$$

(напомним, что  $f$  — симметричная билинейная форма, полярная к  $q$ ).

**Определение 3.** Точку  $\dot{p} \in \mathbb{A}$  назовём *центром* (или *центральной точкой*) для квадратичной функции  $Q$ , если

$$Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in V. \quad (6)$$

Множество всех центров квадратичной функции  $Q$  обозначается символом  $C(Q)$ . Про квадратичную функцию  $Q$  с  $C(Q) \neq \emptyset$  говорят, что она *центральная*.

Сравнение (5) и (6) показывает, что условие  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x} \in C(Q)$  записывается в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + l(\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in V. \quad (7)$$

В частности, точка  $\dot{o}$  центральная, когда в формуле (3) линейная функция  $l$  нулевая. Другими словами, если начало координат  $\dot{o}$  — центральная точка, то выражение  $Q(\dot{o} + \mathbf{x})$  не содержит членов первой степени относительно  $x_1, \dots, x_n$ . Для  $\dot{o} \in C(Q)$  условие (7) центральности точки  $\dot{o}' = \dot{o} + \mathbf{b}$  принимает вид  $f(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ . Значит,  $q(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$ . Вспоминая, что  $\varphi_0 = Q(\dot{o})$ , мы получаем из (3) равенство  $Q(\dot{o}') = Q(\dot{o})$ . Таким образом,

$$\dot{o}, \dot{o}' \in C(Q) \implies Q(\dot{o}) = Q(\dot{o}'). \quad (8)$$

Как узнать, является ли квадратичная функция  $Q$ , заданная формулой (3) или (4), центральной? А если она центральна, то как найти множество  $C(Q)$ ?

Для решения этих вопросов нужно исходить из условия (7), эквивалентного, как легко понять, системе уравнений

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) + l(\mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для координат вектора  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ , определяющего центральную точку  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ , получается, таким образом, система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{ij} x_j = -\varphi_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

совместность которой проверяется при помощи теоремы Кронекера—Капелли. В случае совместности системы (9) множество  $C(Q)$  будет либо точкой (случай  $\det F \neq 0$ ), либо, как это следует из упомянутой теоремы, аффинным подпространством размерности  $n - r$ . Направляющая плоскость  $U$  этого подпространства совпадает с пространством решений линейной системы

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{ij} x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

так что

$$U = \text{Ker } q = \text{Ker } f$$

(напомним, что  $\text{Ker } q = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in V\}$ ).

Нами доказана

**Теорема 1.** *Множество центров  $C(Q)$  квадратичной функции  $Q$ , заданной в системе координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  соотношением (4), состоит из точек  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$ , определяемых линейной системой (9). Если  $\dot{o}' = \dot{o} + \mathbf{x}'$  — центральная точка, то*

$$C(Q) = \dot{o}' + U$$

— аффинное пространство с направляющей плоскостью  $U = \text{Ker } q$ . Далее,  $C(Q) = \emptyset \Rightarrow r < n$ ;  $C(Q)$  — аффинно инвариантное образование, зависящее только от функции  $Q$ .

**3. Приведение квадратичной функции к каноническому виду.** Две квадратичные функции  $Q$  и  $Q'$  на  $\mathbb{A}$  аффинно эквивалентны, когда существует аффинный автоморфизм  $g \in \text{Aff}(\mathbb{A})$  такой, что  $Q' = Q \cdot g$ .

Естественное желание иметь для  $Q(\dot{p})$  наиболее простое выражение реализует

**Теорема 2.** *Пусть  $Q$  — квадратичная функция ранга  $r$  на  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  над  $\mathbb{K}$ . Если множество  $C(Q)$  пусто и, значит,  $r < n$ , то путём надлежащего выбора системы координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  функция  $Q$  приводится к виду*

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + 2x_{r+1} \quad (10)$$

с ненулевыми скалярами  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ ; в этом случае  $\text{Ker } q$  есть подпространство решений системы  $x_1 = \dots = x_r = 0$  ( $q$  — квадратичная форма, связанная с  $Q$ ).

Если  $Q$  центральна, то выбором надлежащей системы координат с началом в центральной точке  $\dot{o}$  её можно привести к виду

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + \varphi_0; \quad (11)$$

в этом случае  $Q(\dot{o}') = \varphi_0$  для любой точки  $\dot{o}' \in C(Q)$ . Функции вида (10) и (11) аффинно неэквивалентны.

Доказательство теоремы проще, чем её формулировка. Выберем сначала в  $V$  канонический базис для квадратичной формы  $q$  (см. § 4 гл. 1). В соответствующей системе координат  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  функция  $Q$  примет вид

$$Q(\dot{o}' + \mathbf{x}) = \alpha_1 x'_1{}^2 + \dots + \alpha_r x'_r{}^2 + 2\beta'_1 x'_1 + \dots + 2\beta'_n x'_n + \gamma'$$

с  $\alpha_1 \neq 0, \dots, \alpha_r \neq 0$ . Перенос начальной точки в  $\dot{o}''$ , сводящийся к замене координат

$$x''_1 = x'_i + \beta'_i / \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$x''_i = x'_i, \quad i = r + 1, \dots, n,$$

сделает равными нулю коэффициенты при  $x''_i, \dots, x''_r$  в линейной части, так что

$$Q(\dot{o}'') = \alpha_1 x''_1{}^2 + \dots + \alpha_r x''_r{}^2 + 2\beta''_{r+k} x''_{r+k} + \dots + \beta''_n x''_n + \gamma''.$$

Если не все  $\beta_j''$  равны нулю ( $\beta_{r+k}'' \neq 0$ ), то ещё одна аффинная замена координат

$$\begin{aligned}x_i &= x_i'', \quad i = 1, \dots, r, \\x_{r+1} &= \beta_{r+k}'' x_{r+k}'' + \dots + \beta_n'' x_n'' + \gamma''/2, \\x_{r+2} &= x_{r+1}'', \quad \dots, \quad x_{r+k} = x_{r+k-1}'', \\x_{r+k+i} &= x_{r+k+i}'', \quad i \geq 1,\end{aligned}$$

приведёт  $Q$  к виду (10). В противном случае  $Q$  с точностью до обозначений будет иметь вид (11).

Итак, мы можем считать  $Q$  приведённой к виду (10) или (11). Так как  $q(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2$ , то  $\text{Ker } q$  есть  $(n - r)$ -мерное подпространство в  $V$ , заданное уравнениями  $x_1 = \dots = x_r = 0$ . Предположим, что  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x}$  — центральная точка,  $\dot{p} + \mathbf{y}$  — любая точка. Тогда

$$\begin{aligned}Q(\dot{p} + \mathbf{y}) &= Q(\dot{o} + \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_i \alpha_i (x_i + y_i)^2 + 2(x_{r+1} + y_{r+1}) = \\&= Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i y_i\end{aligned}$$

для вида (10) и

$$Q(\dot{p} + \mathbf{y}) = Q(\dot{p}) + q(\mathbf{y}) + 2 \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i y_i$$

для  $Q$  вида (11). Условие (6) центральности точки  $\dot{p}$ , которое должно выполняться для произвольного  $\mathbf{y} \in V$ , в последнем случае сводится к  $x_1, \dots, x_r = 0$ , т.е. к  $\mathbf{x} \in \text{Ker } q$ , а в первом случае из-за наличия свободного члена  $2y_{r+1}$  оно вообще не может удовлетвориться, т.е.  $C(Q) = \emptyset$ .  $\square$

*Следствие.* Над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел всякая квадратичная функция  $Q$  путём надлежащего выбора системы координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $\mathbb{A}$  может быть приведена, причём единственным образом, к одному из канонических видов

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + 2x_{r+1}, \quad (12)$$

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + \varphi_0. \quad (13)$$

*Доказательство.* Так как положительный индекс инерции  $s$  квадратичной формы  $q$ , связанной с  $Q$ , и её ранг  $r$  инвариантны относительно невырожденных линейных преобразований (теорема 5 из § 4 гл. 1), то теорема 2 даёт всё, что нужно.  $\square$

Следствию можно придать несколько иную формулировку:

*Две квадратичные функции  $Q, Q'$  на  $\mathbb{A}$  аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры и когда они обе либо нецентральны, либо*

центральны с одинаковыми значениями на соответствующих центральных точках.

#### 4. Квадратичные функции на евклидовом пространстве.

В случае евклидова (точечного) пространства  $(\mathbb{E}, V)$  естественно изучать эквивалентность квадратичных функций относительно действия группы изометрий  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ .

**Определение 4.** Две квадратичные функции  $Q_1, Q_2$  на  $\mathbb{E}$  называются  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ -эквивалентными, если существует движение  $g \in \text{Iso}(\mathbb{E})$ , для которого  $Q_2 = Q_1 \cdot g$ , т.е.  $Q_2(\dot{p}) = Q_1(g(\dot{p}))$ .

**Теорема 3.** Любая квадратичная функция  $Q$  на  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  может быть приведена путём надлежащего выбора прямоугольной системы координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  в  $\mathbb{E}$  к одному из следующих видов:

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + \varphi_0, \quad \dot{o} \in C(Q), \quad (14)$$

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + 2\mu x_{r+1}, \quad \mu > 0. \quad (15)$$

Все вещественные числа  $\lambda_i$  отличны от нуля. Указанные виды определены однозначно с точностью до нумерации переменных  $x_i$ .

**Доказательство.** Пусть  $Q(\dot{o}' + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l'(\mathbf{x}) + Q(\dot{o}')$ . Начнём с выбора в евклидовом векторном пространстве  $V$  ортонормированного базиса  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , в котором  $q$  имеет канонический вид:

$$q(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2, \quad \lambda_i \neq 0, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{e}'_i.$$

Этот выбор обеспечивается теоремой 7 из § 3 гл. 3. Если  $Q$  — центральная функция, то, заменив в случае необходимости  $\dot{o}'$  на центр  $\dot{o}$  (который отыскивается так же, как в аффинном случае), мы придём к выражению (14). В случае же нецентральной функции имеем

$$Q(\dot{o}') + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \varphi'_i y_i + \varphi'_0.$$

Совершив преобразование координат (перенос начала)

$$z_i = y_i + \varphi'_i / \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$z_i = y_i, \quad i = r + 1, \dots, n,$$

получим

$$Q(\dot{o} + \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i z_i^2 + 2 \sum_{i=r+1}^n \mu_i z_i + 2\mu_0,$$

где из-за нецентральности  $Q$  не все  $\mu_i$ ,  $i > r$ , равны нулю. Введём “норму”

$$\mu = \sqrt{\mu_{r+1}^2 + \dots + \mu_n^2} > 0$$

линейной формы  $\sum_{i=r+1}^n \mu_i z_i$  и сделаем преобразование координат

$$\begin{aligned}x_i &= z_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\x_{r+1} &= \sum_{k=r+1}^n \frac{\mu_k}{\mu} z_k + \frac{\mu_0}{\mu}, \\x_i &= \sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} z_j, \quad i = r+2, \dots, n,\end{aligned}$$

используя матрицу  $A$  размера  $(n-r) \times (n-r)$ :

$$A = \begin{vmatrix} \mu_{r+1}/\mu & \mu_{r+2}/\mu & \dots & \mu_n/\mu \\ \alpha_{r+2,r+1} & \alpha_{r+2,r+2} & \dots & \alpha_{r+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n,r+1} & \alpha_{n,r+2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Так как мы хотим использовать только прямоугольные реперы, то матрицу  $A$  нужно брать ортогональной. Сумма квадратов элементов её первой строки равна 1, как и положено, а элементы  $\alpha_{ij}$  находятся в нашем распоряжении, поэтому ортогональная матрица  $A$  может быть построена (см. по этому поводу п. 5 из § 1 гл. 3). После подстановки будем иметь

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1}, \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i,$$

как и требуется в формуле (15).

Однозначность типов (14) и (15) докажем, исходя из следующих соображений. Согласно теореме о приведении к главным осям квадратичной формы  $q$  ранг  $r$  и числа  $\lambda_i$  определены единственным образом. Число  $\varphi_0 = Q(\dot{o})$  не зависит от выбора центра  $\dot{o}$  (см. (8)).

Нам осталось установить отсутствие произвола в выборе константы  $\mu > 0$  в формуле (15). Предположим, что в какой-то прямоугольной системе координат  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  будет

$$Q(\dot{o}' + \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (x'_i)^2 + 2\mu' x'_{r+1}, \quad \mu' > 0.$$

Пусть  $\mathcal{F}$  — симметричный линейный оператор на  $V$ , соответствующий билинейной форме  $f$ , полярной к  $q$  (см. п. 1 из § 3 гл. 3):

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathcal{F}\mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

Его матрица

$$F = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$$

имеет один и тот же вид в базисе  $(\mathbf{e}_i)$  и в базисе  $(\mathbf{e}'_i)$ . Значит,

$$\text{Im } \mathcal{F} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_r \rangle,$$

а поэтому матрица перехода от  $(\mathbf{e}_i)$  к  $(\mathbf{e}'_i)$  имеет вид

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{vmatrix}$$

с ортогональными матрицами  $B_1$  размера  $r \times r$  и  $B_2$  размера  $(n - r) \times (n - r)$ . С учётом переноса начала координат и отсутствия в выражениях для  $Q$  координат с номерами  $> r + 1$  получаем

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^r \lambda'_i (x'_i)^2 + 2\nu,$$

$$2\mu x_{r+1} = 2\mu' x'_{r+1} - 2\nu, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$x_{r+1} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot x'_{r+1} - \frac{\nu}{\mu}.$$

В силу ортогональности  $B$  в выражении  $x_{r+1} = \sum \alpha_j x'_j + \nu_0$  должно выполняться равенство  $\sum \alpha_j^2 = 1$ , которое в нашем случае сводится к соотношению

$$(\mu'/\mu)^2 = 1.$$

Отсюда вытекает нужное нам равенство  $\mu' = \mu$ , поскольку  $\mu'$  и  $\mu$  положительны.  $\square$

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Считая  $2s \geq r > 0$ , найти число классов эквивалентных нецентральных квадратичных функций на  $n$ -мерном вещественном аффинном пространстве.
2. Найти  $C(Q)$  для квадратичной функции  $Q$  над  $\mathbb{R}$  вида

$$x_1^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n x_i + 1.$$

## § 2. Квадрики в аффинном и евклидовом пространствах

**1. Общее понятие квадрики.** Каждой квадратичной функции  $Q$  на  $\mathbb{A}$  ставится в соответствие пространственная конфигурация точек  $S_Q$ , называемая *квадрикой* (или *поверхностью* (гиперповерхностью) *второго порядка*) и определяемая как “геометрическое место” (множество) всех точек  $\dot{p} \in \mathbb{A}$ , удовлетворяющих уравнению  $Q(\dot{p}) = 0$ . При  $n = 2$  квадрики называются ещё *коническими сечениями* (кривыми 2-го порядка). Квадрики можно рассматривать (и они действительно встречаются в различных задачах) над произвольным

полем  $\mathbb{K}$ , причём наиболее естественно брать в качестве  $\mathbb{K}$  алгебраически замкнутое поле, например  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Однако из соображений наглядности (тоже, впрочем, несколько условной) мы ограничимся случаем поля  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Здесь с самого начала удобно временно исключить из рассмотрения так называемые “нулевые” квадрики, на которых нет ни одной точки. Скажем, квадратичная функция  $x_1^2 + x_2^2 + 1$  определяет нулевую кривую. Более точно: в дальнейшем предполагается, что квадрика  $S_Q$ , заданная уравнением  $Q(\vec{p}) = 0$ , — непустое множество и что

$$\operatorname{rank} S_Q := r = \operatorname{rank} Q = \operatorname{rank} q > 0.$$

Считаем также  $n \geq 2$ .

**Определение 1.** Квадрика называется *двойным подпространством*, если она совпадает с аффинной плоскостью в  $\mathbb{A}$ .

Например, уравнение  $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$  в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{A}$  равносильно системе  $x_1 = 0, \dots, x_r = 0$  и, стало быть, определяет  $(n - r)$ -мерное подпространство. Определение двойного подпространства не зависит от системы координат, поэтому квадратичную функцию  $Q$ , определяющую  $S_Q$ , можно брать в каноническом виде. Как показывает следствие теоремы 2, любое двойное подпространство задаётся уравнением рассмотренного выше типа  $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 0$ . Заметим, что двойные (линейные) подпространства  $x_1^2 + x_2^2 = 0$  и  $2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$  изображают в трёхмерном пространстве одну и ту же прямую  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . Ситуация совершенно меняется и становится гораздо более удовлетворительной в случае квадрик, отличных от двойных подпространств.

**Теорема 1** (теорема единственности). *Если квадрика  $S$  не является двойным подпространством, то любые два её уравнения (в одной и той же системе координат) пропорциональны, т.е.*

$$S_{Q_1} = S = S_{Q_2} \implies Q_2 = \lambda Q_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

**Доказательство.** По условию наша квадрика  $S$  задаётся двумя уравнениями:  $Q_1(\vec{p}) = 0$  и  $Q_2(\vec{p}) = 0$ . Беглого взгляда на формулы (12) и (13) из § 1 достаточно, чтобы убедиться в существовании на квадрике  $S$  не менее двух различных точек. Более того, существуют хотя бы две различные точки  $\vec{p}, \vec{q} \in S$  такие, что проходящая через них прямая  $\Pi_{\vec{p}, \vec{q}}$  не содержится целиком в  $S$ . В самом деле, иначе в соответствии с теоремой 4 из § 1 гл. 4 квадрика  $S$  сводилась бы к аффинному подпространству (плоскости), т.е. была бы двойным подпространством. Легко видеть, что  $\Pi_{\vec{p}, \vec{q}} \cap S = \{\vec{p}, \vec{q}\}$  — множество из двух точек.

Зафиксируем две точки  $\vec{p}, \vec{q} \in S$  с указанным свойством и выберем  $\vec{r}$  за начало координат в  $\mathbb{A}$ , а вектор  $\vec{pq} \neq 0$  — за последний вектор базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ . Тогда  $\Pi_{\vec{p}, \vec{q}}$  будет состоять из точек с координатами  $(0, \dots, 0, \beta)$ . Точка  $\vec{r}$  имеет координаты  $(0, \dots, 0, 0)$ , а  $\vec{q}$  — координаты  $(0, \dots, 0, 1)$ .

Распишем  $Q_1$  по степеням координаты  $x_n$ :

$$Q_1(\dot{p} + \mathbf{x}) = \delta x_n^2 + g(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + h(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Здесь  $g$  — многочлен первой степени, а  $h$  — многочлен второй степени относительно  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ( $g$  и  $h$  не обязательно линейные многочлены). Тот факт, что  $\Pi_{\dot{p}, q}$  пересекается с  $S$  в двух разных точках, означает, что трёхчлен

$$\delta x_n^2 + g(0)x_n + h(0)$$

имеет два различных вещественных корня, т.е.  $g(0)^2 - 4\delta h(0) > 0$  (на самом деле  $\delta \neq 0$ ,  $g(0) \neq 0$ ,  $h(0) = 0$ ). Поделив на  $\delta$ , мы можем считать с самого начала  $\delta = 1$ . То же верно и для  $Q_2$ . Итак,

$$Q_i(\dot{p} + \mathbf{x}) = x_n^2 + g_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n + h_i(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = 1, 2,$$

причём  $\Delta_1(0) > 0$ ,  $\Delta_2(0) > 0$ , где

$$\Delta_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = g_i(x_1, \dots, x_{n-1})^2 - 4h_i(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad i = 1, 2,$$

— дискриминант многочлена  $Q_i$  от переменной  $x_n$  с коэффициентами в  $\mathbb{R}(x_1, \dots, x_{n-1})$ .

При осуществлённой нами нормировке нужно показать, что  $Q_2 = Q_1$ . Выберем произвольные, но фиксированные скаляры  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$  и рассмотрим в  $\mathbb{A}$  плоскость

$$x_1 = t\lambda_1, \dots, x_{n-1} = t\lambda_{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Тогда для

$$\mathbf{x} = t\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + t\lambda_{n-1} \mathbf{e}_{n-1} + x_n \mathbf{e}_n$$

будем иметь

$$Q_i(\dot{p} + \mathbf{x}) = x_n^2 + \tilde{g}_i(t)x_n + \tilde{h}_i(t), \quad (2)$$

где

$$\tilde{g}_i(t) = g_i(t\lambda_1, \dots, t\lambda_{n-1}), \quad \tilde{h}_i(t) = h_i(t\lambda_1, \dots, t\lambda_{n-1}). \quad (3)$$

Положим также

$$\tilde{\Delta}_i(t) = \tilde{g}_i(t)^2 - 4\tilde{h}_i(t), \quad i = 1, 2.$$

По условию  $\tilde{\Delta}_1(0) > 0$ ,  $\tilde{\Delta}_2(0) > 0$ . Найдётся, следовательно, такое  $\varepsilon > 0$ , что при  $|t| < \varepsilon$  будут выполнены неравенства

$$\tilde{\Delta}_1(t) > 0, \quad \tilde{\Delta}_2(t) > 0.$$

Иначе говоря, многочлены (2) имеют при любом  $|t| < \varepsilon$  два различных вещественных корня. Но по условию множества корней этих многочленов при фиксированном  $t$  совпадают — это есть просто пересечение  $S$  с подпространством (1). Раз нормализованные многочлены степени 2 имеют одинаковые корни, то их коэффициенты совпадают:

$$\tilde{g}_1(t) = \tilde{g}_2(t), \quad \tilde{h}_1(t) = \tilde{h}_2(t), \quad |t| < \varepsilon. \quad (4)$$

Но значений  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|t| < \varepsilon$ , бесконечно много, следовательно, равенства (4) справедливы при всех  $t$ . В частности, они выполнены при  $t = 1$ . Положив  $t = 1$  в (3), перепишем (4) в виде равенства полиномиальных функций:

$$\begin{aligned} g_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) &= g_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \\ h_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) &= h_2(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Из [ВА I] мы знаем, что две полиномиальные функции  $f_i : \lambda \mapsto \mapsto f_i(\lambda)$  степени  $m$ , совпадающие при  $k \geq m+1$  различных значениях  $\lambda$ , совпадают как многочлены:  $f_1(X) = f_2(X)$ . Обобщением на случай многочленов многих переменных служит следующее утверждение (см. [ВА I, упр. 2 в § 1 гл. 6]). Если многочлены  $f_1(X_1, \dots, X_{n-1})$  и  $f_2(X_1, \dots, X_{n-1})$  определяют одинаковые полиномиальные функции  $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , то они совпадают, т.е. их коэффициенты равны. Для доказательства нужно расписать многочлены по степеням одной переменной и воспользоваться индукцией по  $n$ .

Опираясь на это утверждение, мы переходим от (5) к равенствам

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_{n-1}) &= g_2(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ h_1(x_1, \dots, x_{n-1}) &= h_2(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

которые показывают, что  $Q_1 = Q_2$ .  $\square$

**2. Центр квадрики.** Непосредственно видно, что изображённая на рис. 10 квадрика симметрична относительно начала координат. Более общую геометрическую картину отражает

**Определение 2.** Точка  $\dot{o}$  аффинного пространства  $\mathbb{A}$  называется *центром* (или *центром симметрии*) квадрики  $S_Q$ , если вместе с любой точкой  $\dot{o} + \mathbf{x}$  к  $S_Q$  принадлежит и точка  $\dot{o} - \mathbf{x}$ . Квадрика  $S$  называется *центральной*, если у неё есть хотя бы один центр, и *нецентральной*, если центр отсутствует.

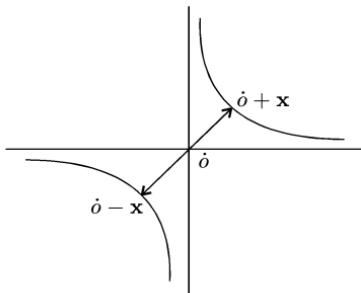


Рис. 10

Предположим, что центральная квадрика  $S$  с центром в точке  $\dot{o}$  не является двойным подпространством. Пусть

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + 2l(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 = 0$$

— её уравнение. В силу центральности  $S$  квадратичная функция  $Q_1(\dot{o} + \mathbf{x}) := Q(\dot{o} - \mathbf{x})$  определяет ту же квадрику  $S$ :

$$Q_1(\dot{o} + \mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) - 2l(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 = 0.$$

По теореме 1 имеет место пропорциональность

$$Q_1 = \lambda Q, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

а так как  $q \neq 0$ , то это возможно лишь при  $\lambda = 1$  и  $l = 0$ . Но мы уже знаем из п. 2, что  $l = 0$  — условие центральности точки  $\dot{o}$  для  $Q$ . Мы приходим к выводу, что центр квадрики (*не являющейся двойным подпространством*) и центр для квадратичной функции  $Q$ , задающей эту квадрику, совпадают. Множество  $C(S_Q)$  центров симметрии квадрики  $S_Q$  совпадает с множеством  $C(Q)$  центральных точек для квадратичной функции  $Q$  и является (в случае не-пустоты) аффинным подпространством (теорема 1 из § 1). Способ его описания в какой-либо координатной системе был нами разобран, поэтому вопрос о центральности любой квадрики  $S$  может быть решён эффективно.

### 3. Канонические типы квадрик в аффинном пространстве. Основной является

Теорема 2. Уравнение квадрики в  $n$ -мерном вещественном аффинном пространстве приводится аффинным автоморфизмом к одному и только одному из следующих канонических типов.

Случай центральной квадрики с центром симметрии в начале координат исчерпывается типами

$$\begin{aligned} I_{s,r} : & x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 1, & 0 < s \leq r; \\ I'_{s,r} : & x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0, & r/2 \leq s \leq r. \end{aligned}$$

Случай нецентральной квадрики исчерпывается типами

$$II_{s,r} : x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \quad r/2 \leq s \leq r.$$

Доказательство почти очевидно: достаточно применить следствие теоремы 2 из § 1 и заметить, что  $S_{\lambda Q} = S_Q$  для  $\lambda \neq 0$ . Это даёт возможность заменить в выражении (13) из § 1 постоянную  $\varphi_0$  на  $-1$  (если она отлична от нуля). Условие  $s > 0$  в  $I_{s,r}$  исключает нулевую квадрику. Равенство  $s = r$  в  $I'_{s,r}$  соответствует двойному подпространству.  $\square$

**Определение 3.** Квадрика типа  $I_{n,n}$  называется *эллипсоидом*, типа  $I_{s,n}$ ,  $s < n$  — *гиперболоидом*, типа  $II_{n-1,n-1}$  — *эллиптическим параболоидом*, типа  $II_{s,n-1}$  — *гиперболическим параболоидом*. Все эти квадрики *невырожденные*.

Квадрики типа  $I_{s,r}$ ,  $I'_{s,r}$  при  $r < n$  и типа  $II_{s,r}$  при  $r < n-1$  называются *цилиндрами*, а квадрики типа  $I'_{s,n}$  — *конусами*. Конусы и цилиндры вместе называются *вырожденными квадриками*.

Конус (рис. 11) можно характеризовать инвариантным образом как квадрику  $S$ , на которой имеется точка  $\dot{o}$ , обладающая тем свойством, что

$$\dot{o} + \mathbf{x} \in S \implies \dot{o} + \lambda \mathbf{x} \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Точка  $\dot{o}$  в этом случае называется *вершиной конуса* (она автоматически является центром симметрии), а прямые  $\dot{o} + \lambda \mathbf{x}$  — *образующими конуса*. Лишь квадрики типа  $I'_{s,r}$  обладают свойством (6)

конусов (вершиной конуса в данном случае является начало координат).

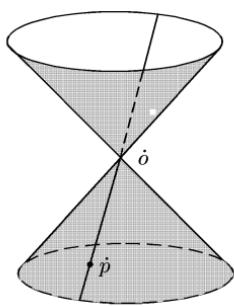


Рис. 11

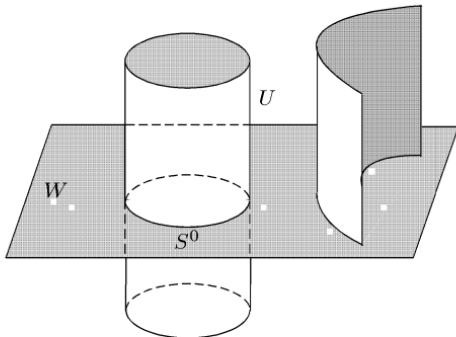


Рис. 12

Цилиндр  $S$  как квадрика (рис. 12) характеризуется тем, что существует такой вектор  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , для которого

$$\dot{p} \in S \implies \dot{p} + \lambda \mathbf{u} \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Другими словами, сдвиг  $t_{\lambda \mathbf{u}}$  вдоль  $\mathbf{u}$  переводит цилиндр  $S$  в себя:  $t_{\lambda \mathbf{u}}(S) = S$ . Так как  $t_{\mathbf{u}_1} \cdot t_{\mathbf{u}_2} = t_{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}$ , то все векторы, обладающие свойством (7), составляют векторное подпространство  $U \subset V$ . Плоскости вида  $\dot{p} + U$  с  $\dot{p} \in S$  называются *образующими цилиндра*  $S$ . Если  $V = U \oplus W$ ,  $\dot{q} \in S$ , то каждая образующая  $\dot{p} + U$  пересекает плоскость  $\dot{q} + W$  в единственной точке  $\dot{r}$  ( $\overline{\dot{p}\dot{q}} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u} \in U$ ,  $\mathbf{w} \in W$ , откуда  $\dot{p} + \mathbf{u} = \dot{q} - \mathbf{w} = \dot{r}$ ). Поэтому заданием подпространства  $U \subset V$  и квадрики

$$S^0 = S \cap (\dot{q} + W)$$

цилиндр  $S$  определяется однозначно. Квадрика  $S^0$  называется основанием цилиндра  $S$ .

Если  $\dot{p} = \dot{o} + \mathbf{x} \in S_Q$  и  $\dot{p} + \alpha \mathbf{u} \in S_Q$ , т.е.  $Q(\dot{p}) = 0$  и  $Q(\dot{p} + \alpha \mathbf{u}) = 0$ , то из соотношения (5) из § 1 имеем

$$q(\alpha \mathbf{u}) + 2\{f(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{u}) + l(\alpha \mathbf{u})\} = 0.$$

Значит,

$$\alpha^2 q(\mathbf{u}) + 2\alpha\{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{u})\} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

откуда

$$q(\mathbf{u}) = 0, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + l(\mathbf{u}) = 0. \quad (8)$$

Пусть  $\mathbf{u} \in U$  и

$$V = U \oplus W, \quad W = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \rangle, \quad U = \langle \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Тогда из соотношения (8) следует, что в выражении

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_j \varphi_j x_j + \varphi_0$$

коэффициенты  $\varphi_{i,j}$  и  $\varphi_j$  с  $j > m$  равны нулю. Стало быть, и в каноническом уравнении квадрики  $S_Q$  не будет координат, соответствующих базисным векторам подпространства  $U$ . Получается следующий вывод.

*Если  $r = \text{rank } Q$ , то  $S_Q$  — цилиндр  $\Leftrightarrow r < n$  в случае центральной квадрики и  $r < n - 1$  в случае нецентральной квадрики. Далее,  $\dim U = n - r$  или соответственно  $n - r - 1$ , а основанием  $S_Q^0$  цилиндра  $S_Q$  служит невырожденная квадрика или конус в аффинном пространстве размерности  $r$  (центральная квадрика) или  $r + 1$  (нецентральная квадрика).*

Определение 4. В зависимости от типа основания  $S^0$  цилиндр называется *эллиптическим, гиперболическим или коническим*. Говорят также о *цилинdre над квадрикой  $S^0$* .

Следует заметить, что конусы и цилиндры различаются по тому, является их вершина конечной или бесконечно удалённой точкой.

**4. Общие замечания о типах квадрик.** Мы назвали рангом квадратичной функции  $Q$  и соответствующей ей квадрики  $S_Q$  число  $r = \text{rank } q$ , где  $q$  — квадратичная форма, связанная с  $Q$ . Часто это число называют *малым рангом* квадрики  $S_Q$  и вводят наряду с  $r$  ещё *большой ранг*  $\tilde{r}$ . Для его определения по общему уравнению квадрики  $S_Q$  в какой-либо системе координат  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ :

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i + \varphi_0 = 0 \quad (9)$$

составляют две матрицы — матрицу  $F = (\varphi_{ij})$  квадратичной формы  $q$  и расширенную матрицу

$$\tilde{F} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} & \varphi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} & \varphi_n \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_n & \varphi_0 \end{vmatrix}.$$

Тогда по определению  $r = \text{rank } F$  и  $\tilde{r} = \text{rank } \tilde{F}$ . Для удобства положим

$$\varphi_{i,n+1} = \varphi_{n+1,i} := \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \varphi_{n+1,n+1} := \varphi_0,$$

так что  $\tilde{F} = (\varphi_{ij})_1^{n+1}$  и  $\tilde{r}$  есть ранг квадратичной формы  $\tilde{q}$ :

$$\tilde{q}(\mathbf{x}) = \tilde{Q}(\dot{o} + \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \varphi_{ij} x_i x_j.$$

Можно считать, что  $x_{n+1} = 1$ , придерживаясь этого соглашения и в формулах перехода от  $\{\dot{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к новому реперу  $\{\dot{o}'; \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ ,

т.е. мы полагаем

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + \dots + a_{1n}x'_n + a_{1,n+1}x'_{n+1}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= a_{nn}x'_1 + \dots + a_{nn}x'_n + a_{n,n+1}x'_{n+1}, \\ x_{n+1} &= x'_{n+1} \end{aligned}$$

$(x_{n+1} = x'_{n+1} = 1)$ . Матрица перехода  $A = (a_{ij})_1^{n+1}$ , разумеется, невырожденная. В новых координатах матрицей формы  $\tilde{q}$  станет, очевидно, матрица

$$\tilde{F}' = {}^t A \cdot \tilde{F} \cdot A.$$

Так как  $\det A \neq 0$ , то  $\tilde{r}$  — инвариант относительно аффинных преобразований, и, в частности,  $\tilde{r}$  легко вычисляется по уравнению квадрики  $S_Q$  в её каноническом виде. Мы видим, что квадрика  $S_Q$  вырождена, т.е. является конусом или цилиндром, если  $\tilde{r} < n+1$  или, что то же самое, если  $\det \tilde{F} = 0$ .

На аффинную инвариантность малого ранга  $r$  мы обращали внимание ранее. Число квадратов с коэффициентом  $\pm 1$  в каноническом уравнении определяется числом положительных и отрицательных корней характеристического многочлена  $\chi_F(t)$ , а единственность центра квадрики выражается условием  $\det F \neq 0$ . Если  $\det F = 0$ , то либо центров нет ( $\text{rank } F < \text{rank } \tilde{F}$ ), либо их бесконечно много ( $\text{rank } F = \text{rank } \tilde{F}$ ), что соответствует случаю цилиндрической квадрики. Итак, канонический тип квадрики  $S_Q$  целиком описывается без фактического приведения её уравнения  $\tilde{Q}(\dot{p}) = 0$  к каноническому виду.

Введём ещё некоторые понятия, возникающие естественным образом при исследовании квадрики. Предположим, что мы хотим найти пересечение квадрики (9) с прямой, проходящей через точку  $\dot{p}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ :

$$x_i = x_i^0 + \alpha_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем квадратное уравнение для  $t$

$$Q^{(0)}t^2 + 2Q^{(1)}t + Q^{(2)} = 0 \quad (11)$$

с коэффициентами

$$Q^{(0)} = q(\alpha),$$

$$Q^{(1)} = \sum_{i=1}^n Q_i(\dot{p}_0)\alpha_i, \quad Q_i(\dot{p}) = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}x_j + \varphi_i,$$

$$Q^{(2)} = Q(\dot{p}_0).$$

Здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — направляющий вектор прямой (10),  $x_1, \dots, x_n$  — координаты текущей точки  $\dot{p}$ .

**Определение 5.** Вектор  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  называется *асимптотическим* для квадрики  $S_Q$ , если  $q(\alpha) = 0$ . Уравнение

$$q(\alpha) = 0$$

задаёт так называемый *конус асимптотических направлений* квадрики  $S_Q$ .

Если прямая (10) неасимптотического направления, т.е.  $q(\alpha) \neq 0$ , то уравнение (11) имеет два (возможно, комплексно сопряжённых) корня, отвечающих паре точек (возможно, мнимых) пересечения прямой с квадрикой. Прямая асимптотического направления либо не пересекается с квадрикой, либо пересекается в одной точке, либо, наконец, целиком содержится в  $S_Q$  (в последнем случае прямая (3) есть прямолинейная образующая квадрики  $S_Q$ ).

Предположим, что  $\dot{p}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  — точка квадрики, т.е.  $Q^{(2)} = Q(\dot{p}_0) = 0$ . Точка  $\dot{p}_0$  называется *особой точкой* квадрики  $S_Q$ , если  $Q_i(\dot{p}_0) = 0$  для  $i = 1, \dots, n$ . Координаты  $x_1^0, \dots, x_n^0$  особой точки находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{ij} x_j + \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^n \varphi_j x_j + \varphi_0 = 0.$$

Ясно, что особые точки могут быть лишь у вырожденных квадрик, причём при  $\tilde{r} = n$  существует не более одной особой точки. В общем случае особые точки лежат на  $(n - \tilde{r})$ -мерной плоскости. Уравнение

$$\sum_{i=1}^n Q_i(\dot{p}_0)(x_i - x_i^0) = 0$$

задаёт касательную плоскость к квадрике  $S_Q$  в её неособой точке  $\dot{p}_0$ .

**5. Квадрики в евклидовом пространстве.** Пусть  $\mathbb{E}$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $V$  — связанное с ним векторное пространство над  $\mathbb{R}$ . Как и в общем аффинном пространстве, квадрика  $S_Q \subset \mathbb{E}$  задаётся уравнением  $Q(p) = 0$ .

Очевидной перефразировкой теоремы 3 из § 1 о  $\text{Iso}(\mathbb{E})$ -эквивалентности квадратичных функций на  $\mathbb{E}$  является

**Теорема 3.** Уравнение квадрики в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}$  приводится подлежащим выбором прямоугольной системы координат  $\{\hat{o}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  к одному и только одному каноническому типу. Именно, центральные квадрики с центром симметрии в начале координат  $\hat{o}$  исчерпываются типами

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 1, \quad 0 < s \leq r, \quad (12)$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s < r; \quad (13)$$

нецентальные квадрики исчерпываются типами

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_s^2}{a_s^2} - \frac{x_{s+1}^2}{a_{s+1}^2} - \dots - \frac{x_r^2}{a_r^2} + 2x_{r+1} = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s \leq r \quad (14)$$

(нулевые квадрики и двойные подпространства исключены).

Формулировку теоремы 3 следует дополнить описанием величин  $a_i$ . В случае (12)

$$a_i = \sqrt{\left| \frac{\varphi_0}{\lambda_i} \right|} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (12')$$

где  $0 \neq \varphi_0 = Q(\dot{o})$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  — характеристические корни (собственные значения) симметричной матрицы  $F = (\varphi_{ij})$ . Всегда можно выбрать такую нумерацию переменных  $x_i$ , чтобы в выражении

$$Q(\dot{o} + \mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + \varphi_0$$

для величин  $\lambda_i, \varphi_0$  выполнялись неравенства

$$\lambda_1 \varphi_0 < 0, \quad \dots, \quad \lambda_s \varphi_0 < 0; \quad \lambda_i \varphi_0 > 0, \quad i > s.$$

В случае (13) нужно положить

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (13')$$

причём, очевидно, всегда можно удовлетворить условию  $s \geq r/2$ , умножая в случае необходимости обе части уравнения на  $-1$ .

В случае (14) считаем

$$\lambda_1 \mu > 0, \quad \dots, \quad \lambda_s \mu > 0; \quad \lambda_i \mu < 0, \quad i > s,$$

так что

$$a_i = \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda_i} \right|} > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (14')$$

Аффинные названия невырожденных квадрик: *эллипсоид* ((12),  $s = n$ , рис. 13), *гиперболоид* ((12),  $0 < s < r = n$ , рис. 14, 15), *эллиптический параболоид* ((14),  $s = n - 1$ , рис. 16), *гиперболический параболоид* ((14),  $0 \leq s < r = n - 1$ , рис. 17), переносятся на евклидовы квадрики, у которых, однако, появляются непрерывные инварианты (параметры) — так называемые *полусоси*  $a_i$ . Их Iso( $\mathbb{E}$ )-инвариантность есть следствие Iso( $\mathbb{E}$ )-инвариантности величин  $\lambda_i, \varphi_0, \mu$ , установленной в теореме 3 из § 1. С аффинной точки зрения, например, все эллипсоиды эквивалентны при данном  $n$  “единичной сфере”. С евклидовой же точки зрения даже у сферы имеется свой инвариант — её радиус  $R = a_1 = \dots = a_n$  (эллипсоид с равными полуосами). Эллипсоид с полуосами  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ , очевидно, можно считать вписанным в сферу радиуса  $a_1$ , поскольку расстояние от центра до точки  $(x_1, \dots, x_n)$  эллипса равно  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  и

$$1 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \geq \frac{1}{a_1^2}(x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

т.е.  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a_1^2$ , причём равенство достигается в точке  $(a_1, 0, \dots, 0)$ . Аналогично,  $a_n$  — радиус сферы, вписанной в эллипсоид.

В случае гиперболоида полуоси  $a_{s+1}, \dots, a_n$  называются *мнимыми полуосами*. Эта терминология отражает тот факт, что в сечении гиперболоида плоскостью  $x_1 = \dots = x_s = 0$  нет вещественных точек. Вообще, исследование квадрик при помощи сечений — обычный геометрический приём, вносящий элемент наглядности в многомерную картину.

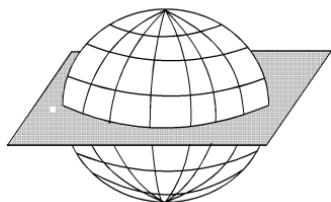


Рис. 13

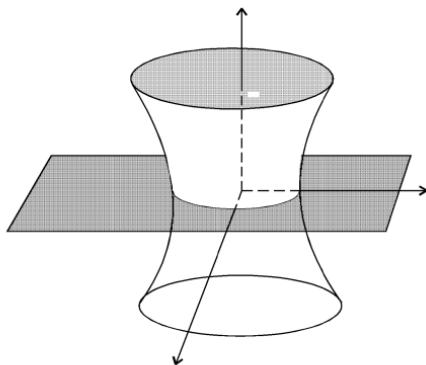


Рис. 15

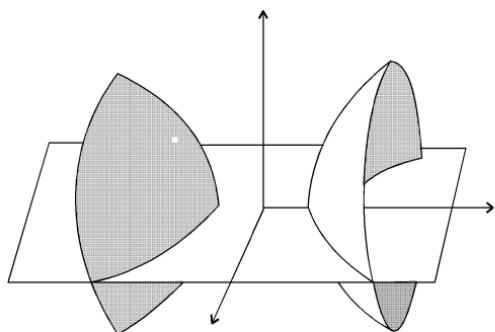


Рис. 14

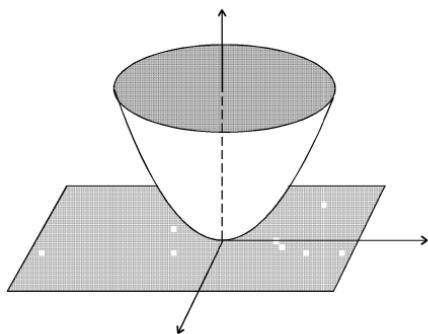


Рис. 16

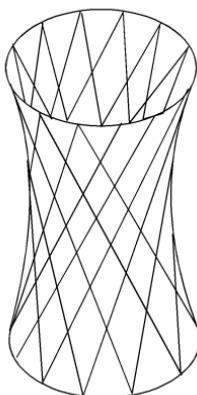


Рис. 17

Сечения эллипсоида гиперплоскостями  $x_i = \text{const} < a_i$  дадут снова эллипсоиды в пространстве размерности  $n - 1$ . Сечения гиперболоидов отличаются большим разнообразием. Гиперболу  $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2 = 1$  при  $n = 2$ , двуполостный и однополостный гиперболоиды

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

при  $n = 3$  мы можем изобразить на чертеже (рис. 14, 15).

Гиперболоиды трёх различных типов при  $n = 4$  сводятся к ним и к эллипсоидам при помощи сечений. Так, например, двуполостный гиперболоид

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} - \frac{x_4^2}{a_4^2} = 1,$$

встречающийся в теории относительности, состоит из двух связных компонент, расположенных в полупространствах  $x_1 \geq a_1$  и  $x_1 \leq -a_1$ . Его сечения гиперплоскостями  $x_i = \text{const}$ ,  $i > 1$ , являются обычными двуполостными гиперболоидами, а сечение гиперплоскостью  $x_1 = \text{const}$ ,  $|x_1| > a_1$ , даёт эллипсоид. Столь же многообразно семейство параболоидов. Мы не останавливаемся подробно ни на их анализе, ни на анализе конусов и цилиндров (эллиптических, гиперболических, параболических).

### УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Убедиться, что в аффинном пространстве  $\mathbb{A}$  размерности 3 над  $\mathbb{R}$  любая квадрика может быть задана в надлежащей системе координат одним из следующих уравнений:

- |                                 |                                 |                                  |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$ | 2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1;$ | 3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1;$ |
| 4) $x_1^2 - x_2^2 = 2x_3;$      | 5) $x_1^2 + x_2^2 = 2x_3;$      | 6) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1;$ |
| 7) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$ | 8) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0;$ | 9) $x_1^2 + x_2^2 = -1;$         |
| 10) $x_1^2 + x_2^2 = 1;$        | 11) $x_1^2 = 2x_2;$             | 12) $x_1^2 - x_2^2 = 1;$         |
| 13) $x_1^2 - x_2^2 = 0;$        | 14) $x_1^2 - 1 = 0;$            | 15) $x_1^2 + x_2^2 = 0 = 0;$     |
| 16) $x_1^2 + 1 = 0$             | 17) $x_1^2 = 0.$                |                                  |

**2.** Пусть  $S$  — квадрика в евклидовом точечном пространстве  $\mathbb{E}$ . Если её уравнением в ортонормированном репере  $\{\delta; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  будет

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + \mu_0 = 0,$$

то говорят о репере *главных направлений* квадрики  $S$  (вспомним о “главных осях” квадратичной формы). Найти главные направления квадрик:

- a)  $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 12xy + 4xz + 8yz + 18 = 0;$   
 б)  $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 8x - 10y + 14z - 6 = 0.$

**3.** Упражнению 3.3.8 на экстремальные значения вещественной квадратичной формы  $q(\mathbf{x})$  можно придать больший геометрический смысл. Напомним, что речь идёт о значениях  $q(\mathbf{v})$  при  $\|\mathbf{v}\| = 1$ , или, что то же самое, о значениях  $q(\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|^2$ . Убедиться в том, что

$$\max_{\|\mathbf{v}\|=1} q(\mathbf{v}) = \min_{q(\mathbf{v})} \|\mathbf{v}\|^2$$

(аналогично — при переносе местами  $\max$  и  $\min$ ). Пусть, скажем,  $n = 2$  и  $q(\mathbf{v}) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 1$  — уравнение эллипса. Если  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , — корни характеристического многочлена  $\lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2) = 0$  и  $(x_i, y_i)$  — соответствующие точки экстремума, то  $x_i^2 + y_i^2 = 1/\lambda_i$ , т.е. один из корней отвечает квадрату минимального (а второй — максимального) расстояния от начала координат до эллипса. Заодно получается условие перпендикулярности главных осей (направлений) эллипса и формула  $\pi/\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$  для площади эллипса (обосновать!).

**4.** При каких значениях параметра  $t$  квадрика

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2tx_1x_3 + 2tx_2x_3 - 4t = 0$$

является эллипсоидом?

**5.** Найти аффинный тип кривой, являющейся пересечением квадрики

$$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 6x_1x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

и плоскости  $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ .

**6.** Когда два гиперболоида имеют общий асимптотический конус?

**7.** Какую квадрику напоминает башня Шухова в Москве?

### § 3. Проективные пространства

Развитие проективной геометрии, особенно в первой половине XIX века, оказало существенное влияние на всю математику. Мы коснёмся лишь немногих фактов, относящихся к ней, отсылая за подробностями к учебному пособию [2] и к специальной литературе.

**1. Модели проективной плоскости.** В аффинной плоскости над полем  $\mathbb{K}$  любые две точки лежат на единственной прямой, а любые две непараллельные прямые пересекаются в единственной точке.

Напомним из курса аналитической геометрии построение проективной плоскости  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}\mathbb{P}^2$ , в которой:

- i) любые две различные точки лежат на единственной прямой;
- ii) любые две различные прямые пересекаются в единственной точке.

Для построения  $\mathbb{P}^2$  начнём с произвольного трёхмерного векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{K}$  и определим  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ , считая точкой  $p \in \mathbb{P}(V)$  одномерное векторное подпространство (прямую) в  $V$ , а прямой  $L \subset \mathbb{P}(V)$  — двумерное векторное подпространство в  $V$ . Точка  $p$  лежит на проективной прямой  $L$  (или инцидентна с  $L$ ), когда аффинное подпространство  $p$  содержится в  $L$ . Свойство инцидентности i), очевидно, выполнено: если  $p \neq q$  — точки, то они же являются различными прямыми в  $V$ , так что их суммой будет двумерное подпространство  $L$ , т.е. прямая в  $\mathbb{P}(V)$ , причём единственная

прямая, содержащая  $p$  и  $q$ . Далее, две различные проективные прямые  $L$  и  $M$  суть различные двумерные подпространства в  $V$ , так что их суммой  $L + M$  в  $V$  должно быть всё пространство  $V$ . Поэтому по формуле (7) из § 2 гл. 1 имеем

$$\dim(L \cap M) = \dim L + \dim M - \dim(L + M) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Это означает, что  $L \cap M$  — одномерное аффинное подпространство, т.е. единственная точка  $p \in \mathbb{P}(V)$ , в которой пересекаются проективные прямые  $L$  и  $M$ . Свойство инцидентности ii), таким образом, тоже выполнено.

Выше была приведена одна из реализаций проективной плоскости, близкая к тому, что принято называть связкой в аффинном пространстве. Мы добьёмся известной наглядности в изображении проективной плоскости, используя также следующую модель.

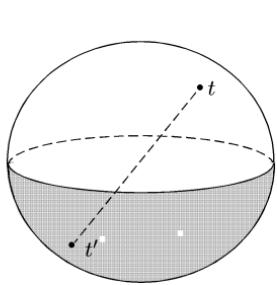


Рис. 18

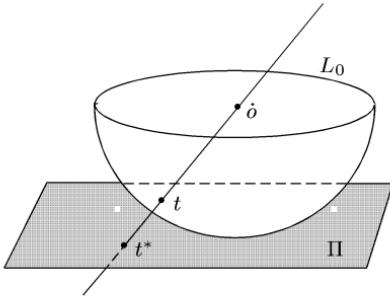


Рис. 19

Пусть  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  — поле вещественных чисел. В евклидовом пространстве  $E = \mathbb{R}^3$  берётся двумерная сфера

$$S^2: x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Каждая прямая, проходящая через начало  $\dot{o}$  в  $\mathbb{R}^3$ , пересекает единичную сферу в двух диаметрально противоположных точках, а каждая плоскость, содержащая  $\dot{o}$ , пересекает сферу по большой окружности.

В проективном пространстве  $\mathbb{RP}^2$  за точку можно брать пару  $(t, t')$  диаметрально противоположных точек (рис. 18), а за прямую — большую окружность на  $S^2$ , считая, что точка  $p = (t, t')$  лежит на прямой  $L$ , когда большая окружность  $L$  проходит через  $t$  и  $t'$ . Совершенно очевидно, что две различные большие окружности пересекают  $S^2$  точно в одной паре  $(t, t')$  диаметрально противоположных точек. Свойства инцидентности i), ii) выполнены.

Можно ограничиться рассмотрением нижней полусферы  $S_-^2$ , состоящей из всех точек  $(x, y, z)$  в  $\mathbb{R}^3$  с  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \leq 0$  (рис. 19). Её границей является экватор  $S^1 \subset S^2$  с уравнением  $x^2 + y^2 = 1$  и  $z = 0$ . Одна из диаметрально противоположных точек сферы  $S^2$

должна лежать на  $S_-^2$ , а обе — только в том случае, когда они будут диаметрально противоположными точками экватора  $S^1$ . Итак, точка  $p \in \mathbb{RP}^2$  есть точка полусфера  $S_-^2$  при условии, что диаметрально противоположные точки её экватора отождествляются. Прямой  $L$  в  $\mathbb{RP}^2$  считается пересечение с  $S_-^2$  любой большой окружности на  $S^2$ . В частности, сам экватор  $S^1$  с отождествлёнными противоположными точками является прямой в  $\mathbb{RP}^2$ .

Рассмотрим аффинную плоскость  $\Pi$ , касательную к полусфере  $S_-^2$  в её южном полюсе  $(0, 0, -1)$ , и спроектируем полусферу из начальной точки  $\dot{o}$  на  $\Pi$ . Это значит, что точке  $t \in S_-^2 \setminus S^1$  ставится в соответствие точка  $t^* \in \Pi$ , лежащая на прямой, соединяющей  $\dot{o}$  и  $t$ . Очевидно, что проекция

$$\sigma: S_-^2 \setminus S^1 \rightarrow \Pi$$

является взаимно однозначным отображением. Каждой прямой на  $\mathbb{RP}^2$ , т.е. дуге большой окружности на  $S^2$ , отображение  $\pi$  ставит в соответствие прямую на  $\Pi$ . Отображение  $\sigma^{-1}$  переводит точки в точки, сохраняя инцидентность. Образом  $\sigma^{-1}$  будет множество всех точек в  $\mathbb{RP}^2$ , за исключением точек прямой  $L_0$ , представленной экватором  $S^1$  полусфера  $S_-^2$ . Таким образом, проективная плоскость может быть получена из аффинной плоскости добавлением всех точек некоторой новой проективной прямой  $L_0$ , называемой **бесконечно удалённой прямой**. Любое множество параллельных прямых на аффинной плоскости отображается при  $\sigma^{-1}$  на множество дуг больших окружностей на  $S_-^2$ , проходящих через концы некоторого диаметра экватора  $S^1$ . При этом определяется пара  $(t, t')$  диаметрально противоположных точек экватора, т.е., по соглашению, одна точка на  $L_0$ . Стало быть, добавление бесконечно удалённой прямой к аффинной плоскости есть добавление точек пересечения всех тех пар параллельных прямых, которые не пересекаются в  $\Pi$ . Следует заметить,

что бесконечно удалённая прямая  $L_0$  не является аффинной прямой.

В отличие от проективной плоскости, проективная прямая  $\mathbb{RP}^1$  изображается точками окружности (одномерной сферы) без отождествления диаметрально противоположных точек. В самом деле,  $\mathbb{RP}^1$  есть пучок прямых, проходящих через фиксированную точку  $\dot{o}$  обычной плоскости (рис. 20). На

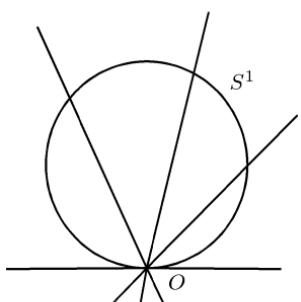


Рис. 20

фиксированной окружности  $S^1$ , проходящей через точку  $\dot{o}$ , каждой прямой пучка соответствует ровно одна точка (её пересечение с  $S^1$ ). Точке  $\dot{o}$  соответствует касательная к  $S^1$  в  $\dot{o}$ . Итак, окружность — модель проективной прямой.

**2. Проективное пространство произвольной размерности.** Создав себе наглядное представление о проективной прямой и проективной плоскости, нетрудно ввести понятие проективного пространства более высокой размерности и над любым полем. Его можно мыслить как множество точек вместе с некоторыми выделенными подмножествами, называемыми *проективными подпространствами* и подчиняющимися естественным аксиомам или отношениям инцидентности. Аксиоматический путь (его называют ещё *синтетическим*) имеет свои преимущества, но является чрезвычайно окольным и более приспособленным для изложения в отдельном курсе. Поэтому мы изберём непосредственный подход, по существу эквивалентный рассмотрению связки в аффинном пространстве.

**Определение 1.** *Проективным пространством*  $\mathbb{P}^n = \mathbb{K}\mathbb{P}^n = = \mathbb{P}(V)$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{K}$  называется совокупность (однородных или векторных) прямых  $(n+1)$ -мерного векторного пространства  $V$  над  $\mathbb{K}$ . Прямые пространства  $V$  называются *точками* *пространства*  $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ . Если  $U \subset V$  —  $(m+1)$ -мерное векторное подпространство в  $V$ , то подмножество  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ , состоящее из всех прямых пространства  $V$ , содержащихся в  $U$ , называется *проективным подпространством* (а также *проективным линейным многообразием* или *плоскостью*) размерности  $m$  пространства  $\mathbb{P}^n$ . В случае  $m = n - 1$  говорят о *проективной гиперплоскости*. Считается, что  $\mathbb{P}(\{\mathbf{o}\}) = \emptyset$  — пустое множество.

Можно несколько иначе выразить то же самое определение, сказав, что *проективным пространством*, порождённым векторным пространством  $V$  над  $\mathbb{K}$ , называется фактормножество  $\mathbb{P}(V)$  дополнения  $V^*$  к  $\{\mathbf{x}\}$  в  $V$  по отношению эквивалентности между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  в  $V^*$ :

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}.$$

Класс эквивалентности  $\tilde{\mathbf{x}}$ , определённый элементом  $\mathbf{x} \in V^*$  (не-нулевым вектором  $\mathbf{x} \in V$ ), есть точка проективного пространства  $\mathbb{P}(V)$ . Итак, по определению

$$\widetilde{\lambda \mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*. \tag{1}$$

Отображение  $\Pi : \mathbf{x} \mapsto \tilde{\mathbf{x}}$  называется *каноническим отображением*  $V^*$  на фактормножество  $\mathbb{P}(V)$ . Следует подчеркнуть, что на  $\mathbb{P}(V)$  не определены линейные операции, и мы не можем, например, положить  $\tilde{\mathbf{x}} \oplus \tilde{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{x} + \mathbf{y}}$ . Двумерное векторное подпространство  $U \subset V$  определяет проективную прямую  $\mathbb{P}(U)$ , а трёхмерное векторное подпространство — проективную плоскость. Если  $U \subset W$ , т.е. если  $U$  — векторное подпространство другого подпространства  $W \subset V$ , то  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$ , поскольку каждая прямая из  $V$ , содержащаяся в  $U$ , содержится и в  $W$ . Если  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$ , то говорят, что проективное подпространство  $\mathbb{P}(U)$  *лежит на* или *инцидентно* с  $\mathbb{P}(W)$ . Имеет

смысл положить

$$\mathbb{P}(U) \cap \mathbb{P}(U') = \mathbb{P}(U \cap U').$$

Для каждого множества  $S \subset \mathbb{P}(V)$  существует наименьшее содержащее его проективное подпространство  $\mathbb{P}(U)$ : если  $S = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots\}$ , то  $U = \langle x_1, x_2, \dots \rangle_{\mathbb{K}}$ . Говорят, что  $S$  есть *система образующих* для  $\mathbb{P}(U)$ . Наименьшим проективным подпространством, содержащим  $\mathbb{P}(U)$  и  $\mathbb{P}(U')$ , очевидно, следует считать  $\mathbb{P}(U+U')$ . Каждое подпространство  $\mathbb{P}(W)$  можно рассматривать как самостоятельное проективное пространство с выделенными подмножествами  $\mathbb{P}(U)$  для  $U \subset W$ .

**3. Однородные координаты.** Пусть  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$  — базис векторного пространства  $V$ . Если

$$x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \in V^*,$$

то  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  принято называть *однородными координатами* точки  $\tilde{x}$  относительно базиса  $(e_i)$  пространства  $V$ . Каждая система  $(\xi_i)$  из  $n+1$  элементов поля  $\mathbb{K}$ , одновременно не равных нулю, есть *однородная* (или *проективная*) система координат некоторой точки из  $\mathbb{P}(V)$  относительно  $(e_i)$ . Две такие системы  $(\xi_i), (\mu_i)$  будут системами однородных координат одной и той же точки из  $\mathbb{P}(V)$  относительно одного и того же базиса  $(e_i)$  тогда и только тогда, когда  $\mu_i = \lambda \xi_i, i = 0, 1, \dots, n$ , для некоторого  $\lambda \neq 0$  из  $\mathbb{K}$ . Этот факт мы будем выражать записью

$$\tilde{x} = (\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n),$$

означающей, что имеется взаимно однозначное соответствие между точкой  $\tilde{x} \in \mathbb{P}(V)$  и классом пропорциональных друг другу систем её однородных координат в данном базисе.

Если  $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n)$  — какой-то другой базис пространства  $V$ , причём

$$e'_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} e_i, \quad 0 \leq j \leq n,$$

то  $(\xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n)$  будет системой однородных координат точки  $\tilde{x}$  относительно базиса  $(e'_i)$  тогда и только тогда, когда найдётся  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , для которого

$$\lambda \xi_i = \sum_{i=0}^n a_{ij} \xi'_j, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Действительно,

$$(\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n) = \tilde{x} = (\xi'_0 : \xi'_1 : \dots : \xi'_n),$$

и достаточно вспомнить из гл. 1 правило перехода от новых координат к старым.

Отметим ещё, что, как следует из теоремы 4 (§ 3 гл. 1), всякое подпространство  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  задаётся в данном базисе  $(e_i)$  систе-

мой линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} a_{10}\xi_0 + a_{11}\xi_1 + \dots + a_{1n}\xi_n &= 0, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \\ a_{r0}\xi_0 + a_{r1}\xi_1 + \dots + a_{rn}\xi_n &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

**4. Аффинные карты.** Выделим в векторном пространстве  $V$  с базисом  $(\mathbf{e}_i)$  векторное подпространство

$$V_0 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

а в аффинном пространстве  $(\mathbb{E} = V, V)$  — гиперплоскость

$$\mathbb{E}_0 = \mathbf{e}_0 + V_0 = \{ \mathbf{e}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V_0 \}.$$

Как мы уже знаем, пара  $(\mathbb{E}_0, V_0)$  есть аффинное пространство, если для  $\dot{\mathbf{a}} := \mathbf{a} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{a}'$ ,  $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{b}'$  положить

$$\overrightarrow{ab} = \mathbf{b}' - \mathbf{a}'.$$

Прямая  $\langle \mathbf{x} \rangle \subset V$ , не содержащаяся в  $V_0$ , пересекается с  $\mathbb{E}_0$  в единственной точке. Действительно,

$$\mathbf{x} \notin V_0 \implies \mathbf{x} = \xi_0 \mathbf{e}_0 + \dots + \xi_n \mathbf{e}_n, \quad \xi_0 \neq 0.$$

Значит,  $\lambda \mathbf{x} = \lambda \xi_0 \mathbf{e}_0 + \dots + \lambda \xi_n \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_0 + \mathbf{y}$  с  $\mathbf{y} \in V_0$  тогда и только тогда, когда  $\lambda \xi_0 = 1$ .

Поставим в соответствие прямой  $\langle \mathbf{x} \rangle$  эту точку пересечения  $\langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{E}_0$ . Мы получим биективное соответствие

$$\Phi: \langle \mathbf{x} \rangle \mapsto \langle \mathbf{x} \rangle \cap \mathbb{E}_0$$

между прямыми  $\langle \mathbf{x} \rangle \not\subset V_0$  и точками аффинного пространства  $\mathbb{E}_0$ . Другими словами,  $\Phi$  индуцирует биективное отображение

$$\Phi_0: \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0) \rightarrow \mathbb{E}_0. \tag{4}$$

Под  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$  понимается проективное пространство  $\mathbb{P}(V)$  с удалённой (выброшенной) гиперплоскостью  $\mathbb{P}(V_0)$ .

**Определение 2.** Аффинное пространство  $\mathbb{E}_0$  вместе с отображением  $\Phi_0$  (а иногда и просто  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$ ), отождествляемое с  $\mathbb{E}_0$ , называется *аффинной картой* проективного пространства  $\mathbb{P}(V)$ . При этом  $\mathbb{P}(V_0)$  называется *бесконечно удалённой гиперплоскостью* относительно карты  $\mathbb{E}_0$ . Бесконечно удалёнными считаются также точки и плоскости, содержащиеся в  $\mathbb{P}(V_0)$ .

Выразим то же самое в координатах. По своему смыслу  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$  состоит из точек  $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$  с  $\xi_0 \neq 0$ . Выберем в  $\mathbb{E}_0$  аффинную систему координат  $\{\dot{\mathbf{e}}_0; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , понимая под  $\dot{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{e}_0$  точку в  $\mathbb{E}_0$ , а под  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — базисные векторы пространства  $V_0$ , с которым ассоциировано  $\mathbb{E}_0$ . Чтобы найти аффинные координаты точки  $\tilde{\mathbf{x}}$ , надо найти точку пересечения прямой  $\langle \mathbf{x} \rangle = \langle \xi_0 \mathbf{e}_0 + \xi_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \xi_n \mathbf{e}_n \rangle$  с  $\mathbb{E}_0$ . Мы видели, что эта точка имеет

вид

$$\mathbf{e}_0 + \frac{\xi_1}{\xi_0} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{\xi_n}{\xi_0} \mathbf{e}_n.$$

Значит, в системе координат  $\{\dot{\mathbf{e}}_0; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  карты  $\mathbb{E}_0$  аффинными координатами точки  $\tilde{\mathbf{x}}$  будут  $\xi_1/\xi_0, \dots, \xi_n/\xi_0$ .

Итак, приписывая точке  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$  координаты точки  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{E}_0$ , мы получаем аффинную (или неоднородную) систему координат в  $\mathbb{P}(V)$ , определённую, правда, лишь на множестве  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$ . Между точками этого множества и их неоднородными координатами (в фиксированном базисе) имеется биективное соответствие.

Если  $U$  — векторное подпространство в  $V$  размерности  $m+1$ , то  $m$ -мерная проективная плоскость  $\mathbb{P}(U)$  либо будет бесконечно удалённой относительно  $\mathbb{E}_0$  (в случае  $U \subset V_0$ ), либо её образом

$$\Phi_0(\mathbb{P}(U)) = U \cap \mathbb{E}_0 = \mathbf{e}_0 + U_0$$

будет  $m$ -мерная аффинная плоскость на карте  $\mathbb{E}_0$ . С другой стороны, любой  $m$ -мерной аффинной плоскости  $\mathbf{e}_0 + U_0 \subset \mathbb{E}_0$  соответствует  $m$ -мерная проективная плоскость  $\mathbb{P}(U)$ , где  $U = \langle \mathbf{e}_0, U_0 \rangle$ . Проведённое рассуждение показывает, что  $\Phi_0$  есть не только биективное точечное соответствие между  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_0)$  и  $\mathbb{E}_0$ , но и соответствие между плоскостями одинаковых размерностей. В этом смысле  $\mathbb{P}(V)$  получается из  $\mathbb{E}_0$  добавлением бесконечно удалённой гиперплоскости.

Взяв вместо  $\mathbf{e}_0$  вектор  $\mathbf{e}_i$ , а вместо  $V_0$  гиперплоскость

$$V_i = \langle \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

мы получим другую аффинную карту  $(\mathbb{E}_i, \Phi_i)$ . Она состоит из точек  $(\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$  с  $\xi_i \neq 0$ . В  $\mathbb{E}_i$  с системой координат  $\{\dot{\mathbf{e}}_i; \mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$  аффинными координатами точки  $(\xi_0 : \xi_1 : \dots : \xi_n)$  будут

$$\left( \frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i} \right).$$

Беря за исходные векторы последовательно  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots$ , мы получаем  $n+1$  карт

$$(\mathbb{E}_i, \Phi_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Их объединение “совпадает” с  $\mathbb{P}(V)$ . Действительно, для любой точки  $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{P}(V)$  хотя бы одна координата  $\xi_i$  отлична от нуля, а это значит, что  $\Phi_i(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathbb{E}_i$ . С принятым нами соглашением об отождествлении  $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_i)$  и  $\mathbb{E}_i$  имеем

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V) = \bigcup_{i=0}^n \mathbb{E}_i.$$

Легко видеть, что меньшим числом карт пространство  $\mathbb{P}^n$  не покрывается.

**5. Понятие алгебраического многообразия.** Будем говорить, что многочлен

$$f(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}[t_0, t_1, \dots, t_n]$$

обращается в нуль в точке  $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{P}(V)$ , если  $f(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ . Это значит, что  $f(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \dots, \lambda\xi_n) = 0$  для всех  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Положив

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_m,$$

где  $f_i$  — сумма всех одночленов степени  $i$  в  $f$ , мы видим, что из условия

$$\begin{aligned} 0 &= f(\lambda\xi_0, \dots, \lambda\xi_n) = \\ &= f(\xi_0, \dots, \xi_n) + \lambda f_1(\xi_0, \dots, \xi_n) + \dots + \lambda^m f_m(\xi_0, \dots, \xi_n) \end{aligned}$$

в случае бесконечного поля  $\mathbb{K}$  следуют равенства  $f_i(\xi_0, \dots, \xi_n) = 0$  для  $i = 0, 1, \dots, m$ . Стало быть, если  $f$  обращается в нуль в некоторой точке  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}(V)$ , то в той же точке обращаются в нуль и все его однородные составляющие. Естественно поэтому ввести следующее

**Определение 3.** Подмножество  $S \subset \mathbb{P}^n$  точек  $(\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n)$ , удовлетворяющих системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} g_1(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= 0, \\ &\dots \\ g_k(\alpha_0, \dots, \alpha_n) &= 0, \end{aligned}$$

где  $g_1, \dots, g_k$  — однородные многочлены, называется (*проективным*) *алгебраическим многообразием*.

Точнее, следовало бы говорить о замкнутом алгебраическом множестве в  $\mathbb{P}^n$ , поскольку многообразия уместно вводить на языке однородных простых идеалов и топологии Зарисского. Мы, однако, в детали входить не будем. Алгебраические многообразия (в особенности комплексные алгебраические многообразия, когда  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) — предмет изучения большой самостоятельной математической дисциплины — алгебраической геометрии.

Ограничимся для простоты случаем одного уравнения

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Найдём уравнение пересечения  $S_0 = S \cap \mathbb{E}_0$ . Если  $\dot{x} \in \mathbb{E}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n)$ , то  $\alpha_0 \neq 0$ . Поэтому условие  $g(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0$  равносильно условию

$$g\left(1, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right) = 0.$$

Так как  $\alpha_1/\alpha_0, \dots, \alpha_n/\alpha_0$  — аффинные координаты точки  $\dot{x}$ , то это и есть уравнение “*аффинного*” многообразия  $S_0$ , т.е. уравнение многообразия  $S$  в  $\mathbb{E}_0$ . Аналогично, делением на  $\alpha_i$  находятся уравнения  $S$  в  $\mathbb{E}_i$ .

Обратно: если координаты точек в  $\mathbb{E}_0$  обозначены  $x_1, \dots, x_n$  и множество  $S_0$  задано уравнением

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где  $f$  — произвольный, не обязательно однородный многочлен степени  $m$ , то

$$g(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_0)^m f\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \dots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)$$

— однородный многочлен. Действительно, из одночлена

$$(x_1)^{k_1} \dots (x_n)^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n \leq m,$$

в  $f$  получается одночлен  $(\alpha_0)^{m-k_1-\dots-k_n} (\alpha_1)^{k_1} \dots (\alpha_n)^{k_n}$  степени  $m$  в  $g$ . При этом

$$g(1, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Следовательно, если  $S$  задано уравнением  $g = 0$  в  $\mathbb{P}^n$ , то  $S \cap \mathbb{E}_0 = S_0$ .

**Пример 1** (конические сечения). Считаем ниже  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

1) Окружность  $S$ , имеющая в карте  $\mathbb{E}_0$  уравнение  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , в проективных однородных координатах задаётся уравнением  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_0^2$ . Её пересечение  $S \cap \mathbb{P}(V_0)$  с бесконечно удалённой прямой  $\mathbb{P}(V_0)$  относительно карты  $\mathbb{E}_0$  находится из условия  $\alpha_0 = 0$  (это уравнение  $V_0$  и  $\mathbb{P}(V_0)$ ). Из  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$  следует, что и  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Таких точек ( $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ) вообще нет, и, значит,  $S \cap \mathbb{P}(V_0) = \emptyset$ .

2) Гипербола  $S$  с уравнением  $x_1^2 - x_2^2 = 1$  в карте  $\mathbb{E}_0$  в однородных координатах имеет уравнение  $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 = \alpha_0^2$ . Её пересечение с бесконечно удалённой прямой  $\mathbb{P}(V_0)$  получается из условия  $\alpha_0 = 0$ , т.е.  $\alpha_2 = \pm \alpha_1$ . При этом  $\alpha_1 \neq 0$ , иначе все три координаты были бы равны нулю. Поделив на  $\alpha_1$ , две точки пересечения  $S \cap \mathbb{P}(V_0)$  можно записать в виде  $(0 : 1 : 1)$ ,  $(0 : 1 : -1)$ . С другой стороны, в карте  $\mathbb{E}_1$  будет  $\alpha_1 \neq 0$ , и уравнение гиперболы в карте  $S$  приобретает вид  $x_0^2 + x_1^2 = 1$  ( $x_0 = \alpha_0/\alpha_1$ ,  $x_2 = \alpha_2/\alpha_1$ ), т.е.  $S \cap \mathbb{E}_1$  является окружностью и  $S \cap \mathbb{P}(V_1) = \emptyset$ .

3) Парабола  $x_1 = x_2^2$  (уравнение в  $\mathbb{E}_0$ ) при  $x_1 = \alpha_1/\alpha_0$ ,  $x_2 = \alpha_2/\alpha_0$  задаётся уравнением  $\alpha_0\alpha_1 = \alpha_2^2$ . Пересечение с  $\mathbb{P}(V_0)$  ( $\alpha_0 = 0$ ) содержит одну (двойную) точку  $(0 : 1 : 0)$ . Совершив переход к другой системе координат  $\alpha_0 = \beta_0 - \beta_1$ ,  $\alpha_1 = \beta_0 + \beta_1$ ,  $\alpha_2 = \beta_2$ , мы получим уравнение  $\beta_1^2 + \beta_2^2 = \beta_0^2$ , которое в новой карте  $\mathbb{E}'_0$  даст окружность. Таким образом, окружность (или эллипс), гипербола и парабола — это одна кривая на проективной плоскости, рассматриваемая лишь в разных аффинных картах. Собственно, этот результат, известный из аналитической геометрии, приведён лишь для иллюстрации рассматриваемых понятий.

**6. Проективная группа.** Пусть  $\mathbb{P}(V)$  — проективное пространство, порождённое векторным пространством  $V$  над полем  $\mathbb{K}$ , так что точка  $\tilde{x} \in \mathbb{P}(V)$  есть векторная прямая  $\langle x \rangle \subset V$ . Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — невырожденный линейный оператор на  $V$ . Он переводит прямую в прямую и не может перевести её в  $\mathbf{0}$ . Стало быть, имеет смысл

**Определение 4.** Каждый невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}$  на  $V$  индуцирует некоторое преобразование  $\tilde{\mathcal{A}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , называемое *проективным преобразованием*:

$$\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{x} = \widetilde{\mathcal{A}x}. \tag{5}$$

Равенство (5) полностью согласуется с принятым нами определением точки  $\tilde{\mathbf{x}}$ , поскольку

$$\tilde{\mathcal{A}} \cdot \lambda \tilde{\mathbf{x}} = \lambda \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}. \quad (6)$$

Из (6) следует также, что  $\lambda \tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$ . На самом деле верна

*Теорема 1. Равенство  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{A}}$  имеет место тогда и только тогда, когда  $\mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$ .*

*Доказательство.* Нам нужно только показать, что  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} = \lambda \mathcal{A}$ . Так как  $\tilde{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}}$ , то  $\mathcal{B} \mathbf{x} = \lambda_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{A} \mathbf{x}$  для любого вектора  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  из  $V$  и какого-то скаляра  $\lambda_{\mathbf{x}} \neq 0$ , зависящего от  $\mathbf{x}$ . Если  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ , то

$$\lambda_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{A} \mathbf{y} = \mathcal{B} \mathbf{y} = \alpha \mathcal{B} \mathbf{x} = \alpha \lambda_{\mathbf{x}} \mathcal{A} \mathbf{x} = \lambda_{\mathbf{x}} \mathcal{A} \mathbf{y},$$

откуда  $\lambda_{\mathbf{y}} = \lambda_{\mathbf{x}}$ . Если же  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — линейно независимые векторы, то линейно независимыми будут векторы  $\mathcal{A} \mathbf{x}$ ,  $\mathcal{A} \mathbf{y}$ , а из соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{x}} \cdot \mathcal{A} \mathbf{x} + \lambda_{\mathbf{y}} \cdot \mathcal{A} \mathbf{y} &= \mathcal{B} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{y} = \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \mathcal{A} \mathbf{x} + \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \mathcal{A} \mathbf{y} \end{aligned}$$

вытекает, что  $\lambda_{\mathbf{x}} = \lambda_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} = \lambda_{\mathbf{y}}$ . Это значит, что  $\lambda_{\mathbf{x}} = \lambda$  — скаляр, не зависящий от  $\mathbf{x}$ , и, следовательно,  $\mathcal{B} = \lambda \cdot \mathcal{A}$ .  $\square$

Чтобы получить запись проективного преобразования  $\tilde{\mathcal{A}}$  в координатах, выберем базис  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$  и обозначим через  $A = (a_{ij})$  матрицу линейного оператора  $\mathcal{A}$  в этом базисе:

$$\mathcal{A} \mathbf{e}_j = \sum_{i=0}^n a_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Если  $\tilde{\mathbf{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  и  $\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}} = (\beta_0 : \beta_1 : \dots : \beta_n)$ , то

$$\beta_i = \lambda \sum_{j=0}^n a_{ij} \alpha_j, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (7)$$

где  $\lambda \neq 0$  — некоторый скаляр. Это видно непосредственно из равенства

$$\lambda^{-1} \sum_{i=0}^n \beta_i \mathbf{e}_i = \mathcal{A} \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathcal{A} \mathbf{e}_j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ij} \mathbf{e}_i$$

и согласуется с законом преобразования координат вектора при действии линейного оператора (см. гл. 2).

Пусть теперь  $\mathbb{E}_0$  — аффинная карта в  $\mathbb{P}(V)$ . Она состоит из точек  $\tilde{\mathbf{x}} = (\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n)$  с  $\alpha_0 \neq 0$ . Если окажется, что  $\beta_0 \neq 0$  в (7), то  $\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}_0$ . Аффинными координатами точки  $\tilde{\mathbf{x}}$  являются  $x_j = \alpha_j / \alpha_0$ ,  $1 \leq j \leq n$ , а для точки  $\tilde{\mathcal{A}} \tilde{\mathbf{x}}$  — координаты  $y_j = \beta_j / \beta_0$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Если разделить равенства (7) с номерами  $i = 1, 2, \dots, n$  на  $\beta_0$ , а затем разделить числители и знаменатели в правых частях на  $\alpha_0$ , то получится запись проективного преобразования  $\tilde{\mathcal{A}}$  в аффинных координатах карты  $\mathbb{E}_0$ :

$$y_i = \frac{a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + a_{i0}}{a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n + a_{00}}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (8)$$

Характерно то, что во всех этих формулах — общий знаменатель. Неопределённый множитель  $\lambda$  исчез.

**Замечание.** Следует, конечно, иметь в виду, что проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{A}}$  вполне может переводить точку из  $\mathbb{E}_0$  (точнее, из множества  $\Phi_0^{-1}(\mathbb{E}_0)$ ) в точку, не принадлежащую карте, т.е. в бесконечно удалённую (иначе: принадлежащую  $\mathbb{P}(V_0)$ ). Формулы (8) в этом случае теряют смысл. Этого заведомо не произойдёт, если  $a_{0j} = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ ;  $a_{00} = 1$ . Тогда мы получаем известные формулы аффинного преобразования карты  $\mathbb{E}_0$ . Стало быть, аффинное преобразование — частный случай проективного.

Для любого вектора  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  из  $V$  найдётся в силу невырожденности  $\mathcal{A}$  такой вектор  $\mathbf{x}$ , что  $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ . Значит, любая точка  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{P}(V)$  является образом некоторой точки  $\tilde{\mathbf{x}}$  при проективном преобразовании  $\tilde{\mathcal{A}}$ :  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{x}}$ . Аналогично, любые две различные точки  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}}$  переходят в различные:  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{z}} \Rightarrow \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{z} \Rightarrow \mathcal{A}\mathbf{z} = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x} \Rightarrow \mathcal{A}(\mathbf{z} - \lambda\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{x}}$ .

Итак, всякое проективное преобразование биективно.

**Определение 5.** В группе всех биективных отображений  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$  проективные преобразования образуют подгруппу, обозначаемую символом  $PGL(V)$  и называемую *проективной группой*.

Обозначение  $PGL(V)$  связано с тем, что эта группа является гомоморфным образом полной линейной группы  $GL(V) = GL_{n+1}(\mathfrak{K})$ . В самом деле, отображение  $\pi: \mathcal{A} \mapsto \tilde{\mathcal{A}}$  удовлетворяет условию гомоморфизма  $\pi(\mathcal{AB}) = \pi(\mathcal{A})\pi(\mathcal{B})$ , поскольку

$$\widetilde{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}} = \widetilde{\mathcal{A}}(\widetilde{\mathcal{B}\mathbf{x}}) = (\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{\mathcal{B}})\mathbf{x}.$$

Из теоремы 1 следует, что ядро  $\text{Ker } \pi$  состоит из операторов подобия  $\lambda\mathcal{E}$ :  $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{E}} \Rightarrow \mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$ . Так как отображение  $\Psi: \lambda \mapsto \lambda\mathcal{E}$  является, очевидно, изоморфизмом групп  $\mathfrak{K}^*$  и  $\text{Ker } \pi = \{\lambda\mathcal{E} \mid \lambda \in \mathfrak{K}^*\}$ , то на основании всего вышесказанного получается

**Теорема 2.** Все проективные преобразования пространства  $\mathbb{P}(V)$  образуют проективную группу  $PGL(V)$ , являющуюся гомоморфным образом полной линейной группы  $GL(V)$ . Ядро гомоморфизма  $\pi$  изоморфно мультипликативной группе  $\mathfrak{K}^*$  поля  $\mathfrak{K}$  и имеет место “короткая точная последовательность”

$$1 \rightarrow \mathfrak{K}^* \xrightarrow{\Psi} GL(V) \xrightarrow{\pi} PGL(V) \rightarrow 1. \quad (9)$$

В данном случае мы могли бы обойтись без точной последовательности (9), означающей просто, что  $\Psi$  — изоморфное вложение,  $\text{Im } \Psi = \text{Ker } \pi$ , а  $\pi$  — эпиморфизм. Но мы воспользовались случаем, чтобы ещё раз ввести в обиход само понятие точной последовательности, широко применяемой в современной математике.

**7. Проективная геометрия.** Мы знаем, что проективная группа  $PGL(V)$  действует транзитивно на  $\mathbb{P}(V)$ , т.е. переводит любую точку в любую другую точку. В соответствии с общей концепцией (см. гл. 4, § 2, п. 4), группе  $PGL(V)$  отвечает некоторая геометрия. Эта геометрия называется *проективной*. Предметом проективной геометрии является изучение тех свойств пространственных фигур в  $\mathbb{P}(V)$ , которые не меняются при действии преобразований из  $PGL(V)$ . Такие свойства называют также *проективными*. Свойство параллельности прямых или плоскостей, очевидно, не относится к числу проективных. Теорема Пифагора тоже не является проективной, поскольку она содержит понятия длины и угла. Требованием проективности исключается многое теорем не только евклидовой, но и аффинной геометрии. Тем не менее проективная геометрия относится к числу весьма содержательных и крайне необходимых геометрий. Чуть позднее мы остановимся на одном важном проективном свойстве четырёх коллинеарных точек, а пока отметим ряд свойств проективной группы  $PGL(V)$ .

1) Согласно замечанию, сделанному после формул (8), группа  $PGL(V)$  содержит в качестве подгруппы аффинную группу  $\text{Aff}(\mathbb{E}_0)$ , действующую на аффинной карте  $\mathbb{E}_0$  (а также группы  $\text{Aff}(\mathbb{E}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

2) Будем говорить, что точки  $\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$   $n$ -мерного проективного пространства  $\mathbb{P}(V)$  находятся в общем положении, если никакие  $n + 1$  из них не лежат в одной гиперплоскости. Другими словами, любые  $n + 1$  векторов

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+1}$$

линейно независимы.

**Теорема 3.** Пусть  $\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}$  и  $\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{n+1}$  — две системы точек в  $\mathbb{P}(V)$ , находящихся в общем положении. Тогда существует, и при этом единственное, проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{A}} \in PGL(V)$ , для которого  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ .

**Доказательство.** Согласно определению

$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1} \rangle = V = \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n+1} \rangle,$$

поэтому существует невырожденный линейный оператор  $\mathcal{A}'$ , для которого

$$\mathcal{A}'\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i, \quad 1 \leq i \leq n + 1. \tag{10}$$

На первый взгляд, не остаётся никакого произвола для отыскания

А. Но условие  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\mathbf{y}}_i$  в терминах векторов  $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in V$  приобретает вид

$$\mathcal{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i, \quad \lambda_i \neq 0, \quad 0 \leq i \leq n+1.$$

Так как  $\widetilde{\lambda_0^{-1}\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}$ , то нормируем  $\mathcal{A}$  условием  $\lambda_0 = 1$ .

Определим теперь линейный оператор  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B}\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{y}_i, \quad 1 \leq i \leq n+1, \quad (11)$$

и, пользуясь тем, что скаляры  $\lambda_i$  находятся в нашем распоряжении, подберём их так, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{B}\mathcal{A}'\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0. \quad (12)$$

Из определения системы точек в общем положении следует, что

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \mathbf{y}_i, \quad (13)$$

причём все коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  отличны от нуля. В соответствии с (10) имеем

$$\mathcal{B}\mathcal{A}'\mathbf{x}_0 = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathcal{A}'\mathbf{x}_i\right) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathbf{y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mathcal{B}\mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \lambda_i \mathbf{y}_i.$$

Ввиду (13) нам остаётся положить  $\alpha_i \lambda_i = \beta_i, 1 \leq i \leq n+1$ , чтобы удовлетворить условию (12). Скаляры  $\lambda_i = \alpha_i^{-1} \beta_i$ , а вместе с ними и преобразования (11) полностью определены. Положив теперь

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{A}',$$

мы получим однозначно определённый линейный оператор, которому соответствует проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{A}}$  с требуемыми свойствами.  $\square$

Ясно, что теорема 3 — аналог теоремы 8 из § 3 гл. 4, относящейся к аффинным преобразованиям.

**Следствие.** *Любые две тройки  $\tilde{\mathbf{x}}_0, \tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2$  и  $\tilde{\mathbf{y}}_0, \tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{\mathbf{y}}_2$  попарно различных точек на проективной прямой  $\mathbb{P}^1$  однозначно определяют проективное преобразование  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , переводящее соответственно  $\tilde{\mathbf{x}}_i$  в  $\tilde{\mathbf{y}}_i, i = 0, 1, 2$ .*

Это утверждение означает между прочим, что свойство точки лежать между двумя другими точками не является проективным. Из теоремы следует также (утверждение о единственности  $\tilde{\mathcal{A}}$ ), что не всякую четвёрку точек на прямой можно перевести в заданную.

3) Пусть  $\mathbb{P}(U), \mathbb{P}(W)$  — две  $t$ -мерные плоскости в  $\mathbb{P}(V)$ . Тогда они  $PGL(V)$ -конгруэнтны, т.е. их можно перевести друг в друга проективным преобразованием.

В самом деле, пусть

$$U = \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle, \quad W = \langle \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle.$$

Дополним  $\{\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_m\}$  до базиса  $(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_m, \dots, \mathbf{u}_n)$ ,  $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_m\}$  — до базиса  $(\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_m, \dots, \mathbf{w}_n)$  пространства  $V$  и рассмотрим линейный оператор  $\tilde{\mathcal{A}} : V \rightarrow V$ , для которого  $\mathcal{A}\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{\mathbf{w}}_i$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}\widetilde{\sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i} = \mathcal{A}(\widetilde{\sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i}) = \widetilde{\sum_i \alpha_i \mathbf{w}_i}$ , так что  $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbb{P}(U)) = \mathbb{P}(W)$ .

4) Всякое проективное преобразование  $\tilde{D}$  плоскости  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$  может быть продолжено до проективного преобразования всего пространства  $\mathbb{P}(V)$ .

В самом деле, вместе с  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  векторы  $\mathcal{D}\mathbf{u}_0, \mathcal{D}\mathbf{u}_1, \dots, \mathcal{D}\mathbf{u}_m$  также образуют базис подпространства  $U \subset V$ . Пусть

$$(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_{m+1}, \dots, \mathbf{u}_n), \quad (\mathcal{D}\mathbf{u}_0, \dots, \mathcal{D}\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n)$$

— базисы в  $V$ , получающиеся дополнением указанных базисов в  $U$ . Полагая

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_i = \mathcal{D}\mathbf{u}_i, \quad 0 \leq i \leq m,$$

$$\mathcal{A}\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i, \quad m+1 \leq i \leq n,$$

мы получим линейный оператор  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , которому соответствует проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{A}} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , совпадающее с  $\tilde{D}$  на  $\mathbb{P}(U)$ .

**8. Двойное отношение.** Пусть  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$  — проективное пространство и  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4$  — четыре точки из  $\mathbb{P}(V)$ , лежащие на прямой  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ , причём

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_3, \quad \tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_4, \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 \neq \tilde{\mathbf{a}}_3, \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 \neq \tilde{\mathbf{a}}_4.$$

Это значит, что

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4 \rangle = U = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4 \rangle.$$

Обозначим через

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}, \mathbf{b} \\ \mathbf{c}, \mathbf{d} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \quad (14)$$

определитель матрицы перехода от базиса  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  двумерного векторного пространства к другому его базису  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ :

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}, \quad \mathbf{b} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}.$$

В силу условий, наложенных на точки  $\tilde{\mathbf{a}}_i$ , можно образовать выражение

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \left( \frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4} \right) \left( \frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4} \right)^{-1}. \quad (15)$$

**Определение 6.** Выражение (15) называется *двойным отношением* четырёх точек  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4$ .

Следует, конечно, убедиться, что  $[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4]$  зависит только от точек  $\tilde{\mathbf{a}}_i$ , а не от выбора векторов  $\mathbf{a}_i$  (вспомним, что  $\widetilde{\lambda \mathbf{a}_i} = \tilde{\mathbf{a}}_i$ ), т.е. оно не меняется при замене  $\mathbf{a}_i$  на  $\lambda_i \mathbf{a}_i$ .

Действительно, заменим  $\mathbf{a}_1$  на  $\mathbf{b}_1 = \lambda\mathbf{a}_1$ . Если  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3 = \gamma\mathbf{a}_1 + \delta\mathbf{a}_4$ , то  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{a}_3 = \gamma\lambda^{-1}\mathbf{b}_1 + \delta\mathbf{a}_4$ , и поэтому

$$\left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\lambda^{-1} & \delta \end{vmatrix} = \left(\frac{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_4}\right).$$

Множитель

$$\left(\frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4}\right)^{-1}$$

при этом, очевидно, тоже не меняется. Так же обстоит дело при замене  $\mathbf{a}_2$  на  $\lambda\mathbf{a}_2$ .

Заменим теперь  $\mathbf{a}_4$  на  $\mathbf{b}_4 = \lambda\mathbf{a}_4$ . Если

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_3 &= \gamma\mathbf{a}_1 + \delta\mathbf{a}_4, & \mathbf{a}_3 &= \gamma'\mathbf{a}_2 + \delta'\mathbf{a}_4, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_3 &= \gamma\mathbf{a}_1 + \delta\lambda^{-1}\mathbf{b}_4, & \mathbf{a}_3 &= \gamma'\mathbf{a}_2 + \delta'\lambda^{-1}\mathbf{b}_4, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & \delta\lambda^{-1} \end{vmatrix} = \lambda \left(\frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4}\right), \\ \left(\frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4}\right) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma' & \delta'\lambda^{-1} \end{vmatrix} = \lambda \left(\frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4}\right). \end{aligned}$$

Отношение в правой части (15) при этом не меняется. Так же обстоит дело при замене  $\mathbf{a}_3$  на  $\lambda\mathbf{a}_3$ . Одновременная замена  $\mathbf{a}_i$  на  $\lambda\mathbf{a}_i$  сводится к последовательной замене одного из них, поэтому двойное отношение четырёх точек корректно определено формулой (15).

*Теорема 4. Двойное отношение не меняется при проективном преобразовании, т.е.*

$$[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_4] = [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] \quad (16)$$

для любого  $\tilde{\mathcal{A}} \in PGL(V)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A} \in GL(V)$ ,  $U$  — двумерное векторное подпространство в  $V$ ,  $U' = \mathcal{A}(U)$ . В силу невырожденности  $\mathcal{A}$  любые два линейно независимых вектора перейдут под действием  $\mathcal{A}$  в линейно независимые. Если теперь

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = U = \langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle,$$

то

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{a}, \mathcal{A}\mathbf{b} \rangle = U' = \langle \mathcal{A}\mathbf{c}, \mathcal{A}\mathbf{d} \rangle,$$

а соотношениям, связывающим базисы  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ :

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c} + \beta\mathbf{d}, \quad \mathbf{b} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d},$$

соответствуют ровно такие же соотношения в плоскости  $U'$ :

$$\mathcal{A}\mathbf{a} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{c} + \beta\mathcal{A}\mathbf{d}, \quad \mathcal{A}\mathbf{b} = \gamma\mathcal{A}\mathbf{c} + \delta\mathcal{A}\mathbf{d}.$$

Это значит, что

$$\left( \frac{\mathbf{a}, \mathbf{b}}{\mathbf{c}, \mathbf{d}} \right) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \left( \frac{\mathcal{A}\mathbf{a}, \mathcal{A}\mathbf{b}}{\mathcal{A}\mathbf{c}, \mathcal{A}\mathbf{d}} \right).$$

Стало быть, в применении к нашей ситуации имеем

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] &= [\widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_1}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_2}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_3}, \widetilde{\mathcal{A}\mathbf{a}_4}] = \\ &= \left( \frac{\mathcal{A}\mathbf{a}_1, \mathcal{A}\mathbf{a}_3}{\mathcal{A}\mathbf{a}_1, \mathcal{A}\mathbf{a}_4} \right) \left( \frac{\mathcal{A}\mathbf{a}_2, \mathcal{A}\mathbf{a}_3}{\mathcal{A}\mathbf{a}_2, \mathcal{A}\mathbf{a}_4} \right)^{-1} = \left( \frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4} \right) \left( \frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4} \right)^{-1} = \\ &= [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4]. \quad \square \end{aligned}$$

**9. Выражения двойного отношения в координатах.** Введём на прямой  $\mathbb{P}(U)$  с точками  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4$ , для которых можно задать двойное отношение, некоторую однородную систему координат. Именно, пусть  $U = \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$  и  $\mathbf{a}_i = \alpha_i \mathbf{e} + \beta_i \mathbf{f}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Тогда

$$\tilde{\mathbf{a}}_i = (\alpha_i : \beta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (17)$$

Смысль (17) ясен из общего определения однородных координат в проективном пространстве. Если  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_3 = \gamma \mathbf{a}_1 + \delta \mathbf{a}_4$ , то

$$\left( \frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4} \right) = \delta. \quad (18)$$

Кроме того, из соотношения

$$\alpha_3 \mathbf{e} + \beta_3 \mathbf{f} = \gamma(\alpha_1 \mathbf{e} + \beta_1 \mathbf{f}) + \delta(\alpha_4 \mathbf{e} + \beta_4 \mathbf{f})$$

получаем  $\alpha_3 = \gamma \alpha_1 + \delta \alpha_4$ ,  $\beta_3 = \gamma \beta_1 + \delta \beta_4$ . Поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma \alpha_1 + \delta \alpha_4 & \gamma \beta_1 + \delta \beta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta \alpha_4 & \delta \beta_4 \end{vmatrix} = \delta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix},$$

что в сочетании с (18) даёт

$$\left( \frac{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4} \right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Аналогично

$$\left( \frac{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4} \right) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Таким образом, по определению (6) двойного отношения имеем

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & | & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & | & \alpha_4 & \beta_4 \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 & | & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & | & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Если  $\alpha_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , и  $x_i = \beta_i/\alpha_i$ , то из (19) следует

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & | & 1 & x_2 \\ 1 & x_3 & | & 1 & x_4 \\ \hline 1 & x_1 & | & 1 & x_2 \\ 1 & x_4 & | & 1 & x_3 \end{vmatrix},$$

т.е.

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)}. \quad (20)$$

Выражение (20) или эквивалентное ему выражение

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4}$$

можно брать в качестве определения двойного отношения, но это не очень удобно, потому что формально оно зависит от выбора аффинной карты (условие  $\alpha_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ), в то время как выражение, стоящее в правой части равенства (19), имеет смысл и в том случае, когда одна из точек  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  является несобственной (бесконечно удалённой).

Если за бесконечно удалённую точку по отношению к карте  $E_0$  выбрана точка  $\tilde{\mathbf{a}}_4 = (0 : 1)$ , то из (19) получаем

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Если, сверх того, выбрать  $\tilde{\mathbf{a}}_3$  за начало координат ( $1 : 0$ ), а  $\tilde{\mathbf{a}}_2$  — за единичную точку ( $1 : 1$ ), то  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = 1$  и

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = x_1. \quad (21)$$

Это не что иное как координата точки  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  в системе координат, в которой  $\tilde{\mathbf{a}}_4$  — бесконечно удалённая,  $\tilde{\mathbf{a}}_3$  — нулевая и  $\tilde{\mathbf{a}}_2$  — единичная точки.

Полезно и такое рассуждение. Будем выбирать не точки, а однородную систему координат на  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ . Пусть  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3$  — три фиксированные точки прямой  $\mathbb{P}^1$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_2$ . Положим  $\mathbf{e} = \nu \mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{f} = \mu \mathbf{a}_2$ , где скаляры  $\nu, \mu$  таковы, что  $\tilde{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{e} + \mathbf{f}$ . Тогда  $\tilde{\mathbf{a}}_1 = (1 : 0)$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_2 = (0 : 1)$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_3 = (1 : 1)$ . Если теперь  $\tilde{\mathbf{a}}_4 = (\alpha : \beta)$  — произвольная точка на  $\mathbb{P}^1$ , то по формуле (19), где следует положить

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 1;$$

$$\alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 1; \quad \alpha_4 = \alpha, \quad \beta_4 = \beta,$$

находим

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = \alpha/\beta.$$

Мы видим, что отношение однородных координат  $\alpha, \beta$ , задающее точку  $\tilde{\mathbf{a}}_4$ , само однозначно определяется двойным отношением  $[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4]$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 5.** При трёх попарно различных фиксированных точках  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3$  проективной прямой  $\mathbb{P}^1$  всякая четвёртая точка  $\tilde{\mathbf{a}}_4 \in \mathbb{P}^1$  однозначно задаётся двойным отношением  $[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4]$ .

Мы готовы теперь доказать утверждение, существенно уточняющее следствие теоремы 3.

**Теорема 6.** Две четвёрки  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4$  и  $\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{b}}_4$  коллинеарных точек в  $n$ -мерном проективном пространстве  $PGL(V)$ -конгруэнтны (эквивалентны в смысле проективной геометрии) тогда и только тогда, когда

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = [\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{b}}_4]. \quad (22)$$

**Доказательство.** Необходимость условия (22) следует из (16), коль скоро  $\tilde{\mathbf{b}}_i = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_i$ .

Пусть теперь выполнено условие (22). Согласно свойству 3) проективной группы, найдётся проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{B}}: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , переводящее прямую  $\mathbb{P}(U)$ , на которой лежат точки  $\tilde{\mathbf{a}}_i$ , в прямую  $\mathbb{P}(W)$ , на которой лежат точки  $\tilde{\mathbf{b}}_i$ . Согласно следствию теоремы 3 существует проективное преобразование  $\tilde{\mathcal{D}}$  прямой  $\mathbb{P}(W)$ , переводящее  $\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathbf{a}}_i$  в  $\tilde{\mathbf{b}}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Используя свойство 4) проективной группы, продолжим  $\tilde{\mathcal{D}}$  до проективного преобразования  $\tilde{\mathcal{A}}_1$  всего пространства  $\mathbb{P}(V)$ . Преобразование  $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}_1\tilde{\mathcal{B}}$  переводит точки  $\tilde{\mathbf{a}}_i$  в точки  $\tilde{\mathbf{b}}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , соответственно, а точку  $\tilde{\mathbf{a}}_4$  — в некоторую точку  $\tilde{\mathbf{c}}_4$  на прямой  $\mathbb{P}(W)$ . По теореме 4 имеем

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3, \tilde{\mathbf{a}}_4] = [\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{c}}_4],$$

что с учётом (22) даёт

$$[\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{b}}_4] = [\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_3, \tilde{\mathbf{c}}_4].$$

Из теоремы 5 следует, что  $\tilde{\mathbf{c}}_4 = \tilde{\mathbf{b}}_4$ .  $\square$

### УПРАЖНЕНИЯ

1. В основе знаменитого *кода Хэмминга*  $H$  длины 7 лежит конфигурация из семи точек и семи прямых проективной плоскости  $\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$  ( $7 = 2^2 + 2 + 1$ ). Эта конфигурация схематично изображена на рис. 21.

В каждой строке матрицы инцидентности  $J$  стоят по три единицы: они отвечают трём точкам на одной прямой. Каждая строка служит также кодовым словом в  $H$  веса 3. Кодовые слова веса 4 составляют матрицу  $\tilde{J}$ :

$$J = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \tilde{J} = \left[ \begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

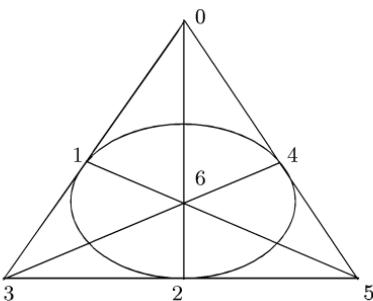


Рис. 21

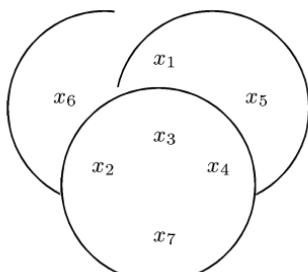


Рис. 22

Матрица  $\tilde{J}$  получается из  $J$  заменой 0 на 1 и 1 на 0. Всего в  $H$  имеется 16 кодовых слов. Мы выписали 14. Вот оставшиеся два: (00000000), (11111111).

а) Проверить, что код  $H$  — суть четырёхмерное векторное подпространство в  $\mathbb{F}_2^7$ , определённое линейной системой

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = 0$$

(в каждом уравнении задействованы переменные, лежащие в одном из трёх кругов на рис. 22).

б) Доказать, что  $PGL(\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2)$  — неабелева группа порядка 168, которую можно реализовать перестановками степени 7, действующими на множестве точек проективной плоскости.

в) Доказать, что

$$PGL(\mathbb{F}_2\mathbb{P}^2) = \text{Aut}(H) := \{\sigma \in S_7 \mid \sigma(H) = H\}.$$

2. Пусть  $\Pi = \mathbb{F}_2\mathbb{P}^2$  — проективная плоскость, состоящая из семи точек, а  $\tilde{p}, \tilde{q}$  — две различные точки плоскости  $\Pi$ . Сколько существует автоморфизмов, переводящих  $\tilde{p}$  в  $\tilde{q}$ ?

3. Доказать, что над полем  $\mathbb{C}$  любое проективное преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

## § 4. Квадрики в проективном пространстве

**1. Классификация.** Пусть  $V$  — вещественное векторное пространство размерности  $n+1 \geq 2$ ,  $q$  — квадратичная форма на  $V$ ,  $f$  — симметричная билинейная форма, полярная к  $q$ . Множество  $C$ , состоящее из векторов  $x \in V$ , удовлетворяющих уравнению  $q(x) = 0$ , называется (*изотропным*) *конусом* с вершиной  $\mathbf{0}$ . Если это множество состоит не только из  $\mathbf{0}$ , то образ  $\tilde{C}$  множества  $C \setminus \{\mathbf{0}\}$  при отображении  $\pi$  множества  $V \setminus \{\mathbf{0}\}$  в проективное пространство  $\mathbb{P}(V)$  (см. § 3) называется *проективной квадрикой* (*проективным коническим сечением* при  $n = 2$ ). Это определение полностью согласуется с общим определением проективного алгебраического многообразия, данного ранее. Стоит только выразить  $q(x)$  в какой-нибудь однородной системе координат. Если форма  $q$  невырождена, то и квадрика  $\tilde{C}$  называется *невырожденной*. Когда  $\tilde{C}$  как геометрическое место точек

есть проективная плоскость размерности  $n - r$ ,  $r < n$  (с уравнением  $x_0^2 + \dots + x_r^2 = 0$ ), то  $\tilde{C}$  называют, как и в аффинном случае, *двойным подпространством*.

Выберем в  $V$  любой базис  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ . В соответствующей системе координат с началом в  $\mathbf{0}$  конус  $C$  задаётся уравнением вида

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^n \varphi_{ij} x_i x_j = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является также уравнением квадрики  $\tilde{C}$  в однородных координатах. Как известно, базис  $(\mathbf{e}_i)$  можно выбрать таким образом, чтобы форма  $q$  приняла нормальный вид. Переход от одного базиса к другому совершается при помощи линейного оператора  $A \in GL(V)$ , которому соответствует проективное преобразование  $\tilde{A} \in PGL(V)$  (см. § 3). Используя ещё возможность умножения обеих частей уравнения (1) на  $-1$ , мы правомерны считать, что в нормальном виде форма  $q$  имеет не менее половины положительных квадратов. Надо вспомнить ещё о законе инерции для вещественных квадратичных форм. В результате мы приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.** *Всякая, не являющаяся двойным подпространством квадрика  $\tilde{C}$  в  $n$ -мерном проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  (проективно) эквивалентна квадрике с каноническим уравнением*

$$x_0^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0, \quad [r/2] \leq s < r. \quad (2)$$

*Для проективной эквивалентности двух квадрик в  $\mathbb{P}(V)$  необходимо и достаточно, чтобы левые части их уравнений имели одинаковые ранги и сигнатуры (считается выполненной нормировкой  $s \geq [r/2]$ ).*

**2. Примеры и изображения проективных квадрик.** Мы видим, что классификация проективных квадрик проще, чем в аффинной и тем более в евклидовой геометрии. Хорошей иллюстрацией служит пример 1 из § 3: аффинно различные эллипсы, гипербола и парабола соответствуют одной и той же проективной кривой в различных аффинных картах. Аналогичная ситуация наблюдается и в многомерном случае. Например, в  $\mathbb{P}^3$  имеются две различные невырожденные квадрики, определённые соответственно уравнениями

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0, \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0. \quad (3)$$

Квадрика  $\tilde{C}$ :  $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0$  включает эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид: первый соответствует карте  $\mathbb{E}_3 = \mathbf{e}_3 + V_3$ , второй — карте  $\mathbb{E}_0$ ,  $\mathbb{E}_1$  или  $\mathbb{E}_2$ , а третий — карте, которую удобно выделить в новой системе координат

$$\beta_0 = \alpha_0, \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_3, \quad \beta_3 = \alpha_2 + \alpha_3.$$

Тогда уравнение квадрики  $\tilde{C}$  запишется в виде

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2\beta_3 = 0,$$

что в карте  $\mathbb{E}' = \mathbf{e}_3' + V_3'$  соответствует эллиптическому параболоиду. Эти три случая различаются пересечением аффинной квадрики  $C_a$  с бесконечно удалённой проективной плоскостью  $\mathbb{P}(V_i)$ :

$C_a \cap \mathbb{P}(V_3) = \emptyset$ , если  $C_a$  — эллипсоид;

$C_a \cap \mathbb{P}(V_2)$  — окружность, если  $C_a$  — двуполостный гиперболоид;

$C_a \cap \mathbb{P}(V_3')$  — двойная точка  $(0 : 0 : 1 : 0)$ , если  $C_a$  — эллиптический параболоид.

Аналогично показывается, что квадрика, отвечающая второму уравнению в (3), включает однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Нетрудно получить и в общем случае изображение проективной квадрики (1) (ненулевой и не являющейся двойным подпространством) на аффинной карте  $(\mathbb{E}, \Phi)$ . Всегда можно выбрать такой базис  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  пространства  $V$ , что гиперплоскость  $\mathbb{E}$  совпадает с  $\mathbb{E}_0 = \mathbf{e}_0 + V_0$ . Тогда  $\Phi = \Phi_0$ , и в системе координат  $\{\mathbf{e}_0; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  квадрика  $S = \tilde{C} \cap \mathbb{E} = \Phi_0(\tilde{C})$  определяется уравнением

$$Q(\mathbf{e}_0 + \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n \varphi_{i0} y_i + \varphi_{00}. \quad (4)$$

Условия  $(\varphi_{ij}) \neq (0)$  достаточно для того, чтобы аффинная квадрика  $S$  с уравнением (4) не была нулевой или двойным подпространством. Действительно, в противном случае квадратичная функция  $Q$  в некоторой системе координат  $\{\mathbf{f}_0; \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$  приняла бы вид

$$\pm \left( \sum_{i=1}^r z_i^2 + \varepsilon \right),$$

где  $\varepsilon = 0$  или  $\varepsilon = 1$ . Тогда уравнением проективной квадрики в однородных координатах, отвечающих базису  $(\mathbf{f}_i)$ , было бы  $\sum_{i=1}^r z_i^2 = 0$  или  $\sum_{i=0}^r z_i^2 = 0$ , что не так.

Обратно: всякая аффинная квадрика  $S$  (ненулевая и не двойное подпространство, скажем, с уравнением (4)) является изображением в частности одной проективной квадрики из  $\mathbb{P}(V)$ . Действительно, уравнению (4) квадрики  $S$  в системе координат  $\{\mathbf{e}_0; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  соответствуют квадратичная форма  $q$  вида (1) и конус  $C$ . Так как  $(\varphi_{ij})_1^n \neq 0$ , то и  $(\varphi_{ij})_0^n \neq 0$ . Если, далее,  $q(\mathbf{z}) = \pm \sum_{i=0}^r z_i^2$  в какой-нибудь системе координат, то  $C$  — плоскость, что не так, поскольку пересечение  $S = C \cap \mathbb{E}$  — квадрика. Итак,  $q(\mathbf{x}) = 0$  — уравнение проективной квадрики  $\tilde{C}$  и  $S$  — изображение  $\tilde{C}$  в аффинной карте  $\mathbb{E}$ . Если одновременно  $S$  — изображение проективной квадрики  $\tilde{C}' \subset \mathbb{P}(V)$  с уравнением  $q_1(\mathbf{x}) = 0$ , то по теореме 1 из § 2

соответствующие квадратичные функции  $Q$  и  $Q_1$  пропорциональны. В таком случае будут пропорциональными  $q$  и  $q_1$ , так что  $\tilde{C} = \tilde{C}'$ .

Обратим внимание на тот факт, что в проективном пространстве стирается всякое различие между цилиндрами и конусами. Дело в том, что прямолинейные образующие любого цилиндра, параллельные с аффинной точки зрения, пересекаются в бесконечно удалённой точке. Скажем, конус  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ , эллиптический цилиндр, параболический цилиндр и гиперболический цилиндр в трёхмерном аффинном пространстве являются изображениями в различных аффинных картах всего лишь одного цилиндра  $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$  в трёхмерном проективном пространстве.

**3. Пересечение прямой с проективной квадрикой.** Как и следует ожидать, любая проективная квадрика имеет непустое пересечение с любой прямой (в отличие от аффинного случая).

Именно, пусть квадрика  $\tilde{C}$  задана уравнением (1), а прямая — уравнением

$$x_i = \mu a_i + \nu b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Имеется в виду, что  $\tilde{\mathbf{a}} = (a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = (b_0 : b_1 : \dots : b_n)$  — две лежащие на прямой точки. После подстановки (5) в (1) получим уравнение

$$q(\mathbf{a})\mu^2 + 2f(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mu\nu + q(\mathbf{b})\nu^2 = 0. \quad (6)$$

Нас интересуют решения  $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$ , поскольку координаты  $x_0, \dots, x_n$  не должны обращаться в нуль одновременно.

Если

$$D = f(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 - q(\mathbf{a})q(\mathbf{b}) \neq 0,$$

то получаем два решения  $(\mu, \nu)$ , соответствующие двум разным (возможно, комплексно-сопряжённым) точкам пересечения прямой с квадрикой  $\tilde{C}$ .

Если же  $D = 0$ , но не все  $q(\mathbf{a}), q(\mathbf{b}), f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  равны нулю, то прямая и квадрика имеют одну двойную общую точку. Если эта точка  $\tilde{p}$  не является особой, т.е.  $\frac{\partial q}{\partial x_i} \Big|_{\tilde{p}} \neq 0$  хотя бы для одного  $i$ , то в этой точке прямая (5) касается квадрики.

Наконец, при

$$q(\mathbf{a}) = q(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

уравнение (6) обращается в тождество и прямая (5) целиком лежит на квадрике  $\tilde{C}$ , являясь её прямолинейной образующей.

Мы видим, что понятие асимптотического направления для проективной квадрики не имеет смысла.

**4. Общие замечания о проективных квадриках.** 1) Рассмотрим точку  $\tilde{a} \in \mathbb{P}(V)$  и уравнение

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=0}^n \varphi_{ij} a_i x_j = 0, \quad (7)$$

где  $f$  — билинейная форма, полярная к  $q$ . Если обращаются в нуль коэффициенты при всех  $x_j$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_{00}a_0 + \varphi_{10}a_1 + \dots + \varphi_{n0}a_n &= 0, \\ \dots &\dots \\ \varphi_{0n}a_0 + \varphi_{1n}a_1 + \dots + \varphi_{nn}a_n &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

и так как не все однородные координаты  $a_i$  равны нулю, то (8) равносильно условию  $\det(\varphi_{ij})_0^n = 0$ . Таким образом, (7) будет тождеством только в случае вырожденной квадрики  $\tilde{C}(q(\mathbf{x}) = 0)$  с точкой  $\tilde{a}$  на ней. Точка  $\tilde{a}$  при этом особая.

Исключив из рассмотрения указанную ситуацию, мы видим, что уравнение (7) определяет в  $\mathbb{P}(V)$  гиперплоскость  $\Pi$ , которая называется *полярой* точки  $\tilde{a}$  относительно квадрики  $\tilde{C}$ . Точка  $\tilde{a}$  называется *полюсом* своей поляры  $\Pi$ . Ясно, что поляра  $\Pi$  точки  $\tilde{a}$  проходит через  $\tilde{a}$  в точности тогда, когда  $\tilde{a} \in \tilde{C}$ .

Любая гиперплоскость  $\Pi$ :

$$p_0x_0 + p_1x_1 + \dots + p_nx_n = 0$$

имеет единственный полюс относительно любой невырожденной квадрики  $\tilde{C} \subset \mathbb{P}(V)$ . Действительно, в случае  $\det(\varphi_{ij})_0^n \neq 0$  система

$$\varphi_{0j}a_0 + \varphi_{1j}a_1 + \dots + \varphi_{nj}a_n = p_j, \quad 0 \leq j \leq n,$$

имеет одно и только одно решение.

2) Квадрики, равно как и общие алгебраические многообразия, естественно изучать с комплексной точки зрения. Именно, комплексные проективные многообразия, вложенные в  $\mathbb{CP}^n$ , дают возможность разобраться во многих тонкостях, не разрешимых в вещественном случае. Ситуация напоминает проблему о корнях многочлена с вещественными коэффициентами. Из [ВА I] мы знаем, что только привлечение поля  $\mathbb{C}$  позволяет дать исчерпывающее решение этого вопроса. В части 3 учебного пособия [2] проводится предметное сравнение  $\mathbb{RP}^n$  и  $\mathbb{CP}^n$ ; важную роль при этом играет комплексификация  $\mathbb{P}(V^\mathbb{C})$  проективного пространства  $\mathbb{P}(V)$  над  $\mathbb{R}$  в духе § 4 из гл. 3. Каноническое вложение  $V \subset V^\mathbb{C}$  позволяет сопоставить каждой  $\mathbb{R}$ -прямой в  $V$  её комплексификацию —  $\mathbb{C}$ -прямую в  $V^\mathbb{C}$ , что определяет вложение  $\mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(V^\mathbb{C})$ . Точки в  $\mathbb{P}(V^\mathbb{C})$  суть “комплексные точки” вещественного проективного пространства  $\mathbb{P}(V)$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Убедиться, что в пространстве  $\mathbb{RP}^3$  имеется ровно 8 классов проективно эквивалентных квадрик (включая нулевые и вырожденные квадрики, а также двойные подпространства). В подходящей однородной системе координат представители этих классов задаются уравнениями:

$$1 : \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0; \quad 2 : \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0;$$

$$3 : \xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0; \quad 4 : \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0;$$

$$5 : \xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0; \quad 6 : \xi_0^2 + \xi_1^2 = 0;$$

$$7 : \xi_0^2 - \xi_1^2 = 0; \quad 8 : \xi_0^2 = 0.$$

**2.** Используя упр. 1 и упр. 5.2.1, указать аффинные изображения квадрик типов 1–3.

# ГЛАВА 6

## ТЕНЗОРЫ

---

На протяжении всего курса нам приходилось иметь дело с такими общими математическими понятиями, как векторное пространство  $V$  над  $\mathbb{K}$ , сопряжённое (или двойственное, дуальное) к  $V$  пространство  $V^*$  линейных форм, пространство  $\mathcal{L}_2(V, \mathbb{K})$  билинейных форм на  $V$ , пространство  $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$  (часто обозначаемое  $\text{End } V$  или  $\text{Hom}(V, V)$ ) линейных операторов на  $V$  и т.п. Было введено даже (см. гл. 1, § 4, п. 1) пространство полилинейных отображений. Как правило, вычисления с элементами из  $V$ ,  $V^*$ ,  $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$  и пр. становились эффективными после выбора базиса и описания закона изменения координат (вектора, линейной или билинейной формы) при переходе к новому базису. Мы собираемся теперь посмотреть на все указанные понятия с единой точки зрения и навести в вычислениях некоторый формализм (или порядок), уже давно с успехом используемый в механике, физике, геометрии.

### § 1. Начала тензорного исчисления

**1. Понятие о тензорах.** Разумной общности можно достичь, ограничившись лишь полилинейными отображениями некоторого специального вида.

**Определение 1.** Пусть  $\mathbb{K}$  — поле,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{K}$ ,  $V^*$  — сопряжённое к  $V$  пространство,  $p$  и  $q$  — целые числа  $\geqslant 0$ ,

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^*}_{q}$$

— декартово произведение  $p$  экземпляров пространства  $V$  и  $q$  экземпляров пространства  $V^*$ . Всякое  $(p+q)$ -линейное отображение

$$f: V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathbb{K}$$

называется *тензором на  $V$  типа  $(p, q)$*  и *валентности* (или *ранга*)  $p+q$ . Говорят также, что  $f$  — *смешанный тензор*,  $p$  раз *ковариантный* и  $q$  раз *контравариантный*. При  $p=0$  тензор  $f$  будет просто контравариантным, а при  $q=0$  — ковариантным.

В частности, тензорами типа  $(1, 0)$  являются обычные линейные функции на  $V$ , т.е. элементы из  $V^*$ , а тензорами типа  $(0, 1)$  — линейные функции на  $V^*$ , т.е. элементы из  $V^{**}$ . Но в силу рефлексивности конечномерных векторных пространств (теорема 2 из § 3 гл. 1) между  $V$  и  $V^{**}$  существует естественный изоморфизм, позволяющий отождествить  $\varphi \in V^{**}$  с некоторым вектором  $\mathbf{x}_\varphi \in V$  (или вектор

$\mathbf{x}$  — с линейной функцией  $\varepsilon_{\mathbf{x}} \in V^{**}$ ). Это отождествление реализуется в записи линейной формы

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}), \quad (1)$$

которую мы уже применяли ранее. При фиксированном  $f$  это есть линейная функция на  $V$ , а при фиксированном  $\mathbf{x}$  — линейная функция на  $V^*$ . Итак, тензоры типа  $(0, 1)$  можно считать векторами — элементами из  $V$ .

Далее, ковариантный тензор типа  $(2, 0)$  есть, очевидно, билинейная форма на  $V$ , а контравариантный тензор типа  $(0, 2)$  — билинейная форма на  $V^*$ .

Интересна интерпретация простейшего смешанного тензора, именно тензора  $f$  типа  $(1, 1)$ . По определению  $f(\mathbf{x}, u)$  — функция, линейная по  $\mathbf{x} \in V$  и по  $u \in V^*$ . При любом фиксированном  $\mathbf{x}$  функция  $f$  линейна по  $u$ , поэтому найдётся вектор  $\mathcal{F}\mathbf{x} \in V$ , для которого

$$f(\mathbf{x}, u) = (u, \mathcal{F}\mathbf{x}) \quad (2)$$

(мы использовали запись (1)). Так как  $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, u) = \alpha f(\mathbf{x}, u) + \beta f(\mathbf{y}, u)$ , то

$$(u, \mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})) = \alpha(u, \mathcal{F}\mathbf{x}) + \beta(u, \mathcal{F}\mathbf{y}) = (u, \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y}),$$

откуда

$$\mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y},$$

т.е.  $\mathcal{F}$  — линейный оператор на  $V$ . Обратно, для каждого  $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(V)$  строится функция  $f: V \times V^* \rightarrow \mathbb{K}$  по формуле (2), линейная по  $\mathbf{x} \in V$  и  $u \in V^*$ . Ясно, что соответствие  $f \mapsto \mathcal{F}$  биективно. Таким образом, каждому тензору типа  $(1, 1)$  отвечает, и притом единственный, линейный оператор на  $V$ .

Условившись ещё понимать под тензором типа  $(0, 0)$  обычный скаляр (элемент поля  $\mathbb{K}$ ), мы приходим к выводу, что все тензоры ранга  $\leq 2$  нам хорошо известны.

Совокупность  $\mathbb{T}^{p,q} = \mathbb{T}_p^q(V)$  всех тензоров на  $V$  типа  $(p, q)$  образует векторное пространство. Действительно, если  $f, g \in \mathbb{T}_p^q(V)$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , то под  $\alpha f + \beta g$  естественно понимать тензор, определённый формулой

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) &= \\ &= \alpha f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) + \beta f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q). \end{aligned} \quad (3)$$

## 2. Произведение тензоров.

Вначале пусть

$$f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{K}, \quad g: W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathbb{K}$$

— произвольные полилинейные формы. Это значит, что  $V_i, W_j$  — никак не связанные друг с другом векторные пространства.

**Определение 2.** Под *тензорным произведением*  $f$  и  $g$  понимают отображение

$$f \otimes g: V_1 \times \dots \times V_r \times W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathbb{K},$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r; w_1, \dots, w_s) = f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) g(w_1, \dots, w_s).$$

Существенно подчеркнуть, что переменные  $\mathbf{v}_i$  независимы от переменных  $w_j$ .

Очевидно, что  $f \otimes g$  — полилинейное отображение, поскольку, например, при фиксированных  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r; \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s$  мы имеем функцию, пропорциональную  $g(\mathbf{w}_1, \dots)$ , которая линейна по  $\mathbf{w}_1$ .

Если, скажем,  $f$  и  $g$  — линейные формы на  $V$ , то

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y})$$

— билинейная форма специального вида на  $V$ , причём даже этот простенький пример показывает, что нет никаких оснований ожидать равенства  $f \otimes g = g \otimes f$ . В самом деле,

$$(g \otimes f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) = (f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

В то же время выполняется закон ассоциативности

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) \tag{4}$$

для любых трёх полилинейных форм (скажем,  $h: U_1 \times \dots \times U_t \rightarrow \mathbb{K}$ ), поскольку левая и правая части совпадают как функции с

$$f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) g(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s) h(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t).$$

Пусть теперь  $f$  — тензор типа  $(p, q)$  и  $g$  — тензор типа  $(r, s)$ . Тогда  $f \otimes g$  будет полилинейной функцией на декартовом произведении

$$V^p \times (V^*)^q \times V^r \times (V^*)^s.$$

Отождествив это произведение с

$$V^{p+r} \times (V^*)^{q+s},$$

мы можем рассматривать  $f \otimes g$  как тензор на  $V$  типа  $(p+r, q+s)$ , определённый формулой

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{p+r}; u_1, \dots, u_{q+s}) &= \\ &= f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p; u_1, \dots, u_q) g(\mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_{p+r}; u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) \end{aligned} \tag{5}$$

для всех  $\mathbf{v}_i \in V$  и  $u_j \in V^*$ . В дальнейшем точка с запятой, разделяющая аргументы разных типов, как правило, будет опускаться.

**Определение 3.** Тензор  $f \otimes g$ , заданный формулой (5), называется (*тензорным*) *произведением тензоров*  $f$  и  $g$ .

**Пример 1.** Пусть  $f, g, h$  — три линейные функции на  $V$  и  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — два вектора из  $V$ . Как мы заметили ранее, при известных отождествлениях можно

говорить о трёх тензорах  $f, g, h$  типа  $(1, 0)$  и о двух тензорах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  типа  $(0, 1)$ , а в таком случае — и о тензоре

$$t = f \otimes g \otimes h \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

типа  $(3, 2)$ . Если  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ ,  $u, v \in V^*$ , то

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, u, v) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})h(\mathbf{z})\mathbf{a}(u)\mathbf{b}(v),$$

где под  $\mathbf{a}(u)$ ,  $\mathbf{b}(v)$  следует понимать выражения, определённые формулой (1):  $\mathbf{a}(u) = (\mathbf{a}, u) = (u, \mathbf{a}) = u(\mathbf{a})$ .

Из формулы (5) и из определения (3) линейной комбинации  $\alpha f + \beta g$  тензоров видно, что имеет место дистрибутивность тензорного умножения:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g) \otimes h &= \alpha f \otimes h + \beta g \otimes h, \\ h \otimes (\alpha f + \beta g) &= \alpha h \otimes f + \beta h \otimes g. \end{aligned} \tag{6}$$

Резюмируем сказанное:

1) операция умножения  $\otimes$  определена для тензоров произвольных типов;

2) валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;

3) тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

**3. Координаты тензора.** Мы уже почувствовали необходимость в чётком разделении элементов из  $V$  и  $V^*$ . Тензорный анализ в классическом понимании начинается тогда, когда в пространстве  $T_p^q(V)$  выбирается базис и тензор описывается своими координатами. Обычно в  $V$  и  $V^*$  выбираются дуальные (взаимные) базисы

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \quad V^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle$$

с указанным расположением индексов у базисных векторов. Для наглядности векторы с верхними индексами у нас изображаются обычным (бледным) шрифтом. Расположение индексов у соответствующих координат противоположное, т.е. мы полагаем  $\sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i$  для  $\mathbf{x} \in V$ ,  $f = \sum_i \beta_i e^i$  для  $f \in V^*$ . Напомним, что

$$(\mathbf{e}_i, e^j) = (e^j, \mathbf{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \tag{7}$$

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = \sum_i \alpha^i \beta_i.$$

Верхние индексы не следует смешивать с показателями степеней; впрочем, последние у нас встречаться не будут.

В тензорном анализе суммирование обычно ведётся по так называемым *немым индексам*, встречающимся один раз сверху и один раз снизу. Поэтому для тех, кто часто соприкасается с тензорами, “двухэтажное” расположение индексов постепенно привело к молчаливому

соглашению опускать знак суммирования, отождествляя, например,  $\mathbf{x} = \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i$  с  $\mathbf{x} = \alpha^i \mathbf{e}_i$ . Мы этого соглашения не придерживаемся. Условимся, однако, суммирование по различным индексам заменять знаком кратной суммы:

$$\sum_i \sum_j \dots \sum_k = \sum_{i,j,\dots,k},$$

не указывая пределов суммирования, поскольку из контекста ясно, какие значения пробегают индексы (обычно от 1 до  $n = \dim V$ ).

Пусть дан произвольный тензор  $T$  типа  $(p, q)$ , значения которого обозначаются в виде

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} := T(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}). \quad (8)$$

**Определение 4.** Числа  $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  называются *координатами (коэффициентами или компонентами) тензора  $T$  в базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$* .

Мы придадим этому определению привычный смысл, выбрав надлежащий базис в самом пространстве  $\mathbb{T}^{p:q}$  тензоров типа  $(p, q)$ . Именно, рассмотрим так называемый *разложимый* тензор типа  $(p, q)$

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}, \quad (9)$$

отождествляя, как и ранее,  $\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_q}$  с линейными функциями на  $V^*$ :  $\mathbf{e}_j(f) = f(\mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j)$ . Так как  $(e^i, \mathbf{e}_{i'}) = \delta_{i'}^i$ ,  $(\mathbf{e}_k, e^{k'}) = \delta_k^{k'}$ , то

$$\begin{aligned} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}) (\mathbf{e}_{i'_1}, \dots, \mathbf{e}_{i'_p}, e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) &= \\ &= \delta_{i'_1}^{i_1} \dots \delta_{i'_p}^{i_p} \delta_{j'_1}^{j_1} \dots \delta_{j'_q}^{j_q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Построим тензор

$$T_1 = \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

являющийся линейной комбинацией тензоров (9) с коэффициентами (8). Используя формулы (3) и (10), получим

$$T_1(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q},$$

т.е. как раз координаты тензора  $T$  (см. (8)). Но своими координатами тензор  $T$  определяется полностью, поскольку в силу его полилинейности для произвольных векторов

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i_1} \xi^{i_1} \mathbf{e}_{i_1}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_p = \sum_{i_p} \rho^{i_p} \mathbf{e}_{i_p}$$

и линейных форм

$$u^1 = \sum_{j_1} \sigma_{j_1} e^{j_1}, \quad \dots, \quad u^q = \sum_{j_q} \tau_{j_q} e^{j_q}$$

имеем

$$T(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, u^1, \dots, u^q) = \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \xi^{i_1} \dots \rho^{i_p} \sigma_{j_1} \dots \tau_{j_q}. \quad (11)$$

Вспомним в этой связи, что билинейную форму  $f : V^2 \rightarrow \mathfrak{K}$  мы записывали в виде  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum f_{ij} x_i y_j$ . Единственное различие заключается в расположении индексов. Теперь мы писали бы  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum f_{ij} x^i y^j$ .

Раз координаты тензоров  $T_1$  и  $T$  совпадают, должны совпадать сами тензоры, т.е.

$$T = \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}. \quad (12)$$

В частности, всякая билинейная форма  $f$  имеет вид

$$f = \sum_{ij} f_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Осталось показать, что разложимые тензоры вида (9), отвечающие различным наборам индексов  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ , линейно независимы, но это прямо следует из правила (10) вычисления их значений. Действительно, предположив существование линейной зависимости

$$\sum \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = 0$$

с какими-то коэффициентами  $\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \in \mathfrak{K}$  и обращаясь с левой частью этого равенства, как с тензором  $T_1$  выше, мы немедленно приходим к выводу, что  $\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0$ .

Размерность пространства  $\mathbb{T}^{p,q}$  равна числу различных базисных векторов (9). Она совпадает, следовательно, с числом  $n^{p+q}$  всевозможных наборов индексов  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ , каждый из которых независимо от других пробегает значения от 1 до  $n$ . Из соображений наглядности координаты (8) тензора  $T$  следовало бы размещать в виде пространственной кубической таблицы. Размерность куба равна валентности тензора  $T$ . Привычные нам строки, столбцы, квадратные матрицы будут частными случаями таких  $(p+q)$ -мерных таблиц.

Резюмируем сказанное в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** Тензоры на  $V$  типа  $(p, q)$  составляют векторное пространство  $\mathbb{T}_p^q(V)$  размерности  $n^{p+q}$  с базисными векторами

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

где  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис пространства  $V$ , а  $(e^1, \dots, e^n)$  — дуальный базис пространства  $V^*$ .

Существует, и притом только один, тензор с наперёд заданными координатами  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ .

**4. Тензоры в разных системах координат.** Нам нужно получить правило изменения координат тензора при переходе к новому базису. Пусть  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  — какой-то другой базис пространства  $V$ ,  $(e'^1, \dots, e'^n)$  — дуальный к нему базис пространства  $V^*$  и  $A = (a_j^i)$  — матрица перехода от  $(\mathbf{e}_i)$  к  $(\mathbf{e}'_i)$ . Элементы  $a_j^i$  матрицы  $A$  обозначены так, что верхний индекс указывает номер строки, а нижний — номер столбца. В этих обозначениях

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathbf{e}_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Обозначив через  $B = (b_j^i)$  матрицу, транспонированную к матрице перехода от  $(e^i)$  к  $(e'^i)$ , мы должны писать

$$e'^k = \sum_i b_i^k e^i \quad (14)$$

в точном соответствии с правилом суммирования по “разноэтажным” одинаково обозначаемым индексам. Введём вспомогательную матрицу  $B^{-1} = C = (c_i^k)$ :

$$e^k = \sum_i c_i^k e'^i.$$

Используя свойство (7) дуальных базисов, находим

$$c_j^k = \left( \sum_i c_i^k e'^i, \mathbf{e}'_j \right) = (e^k, \mathbf{e}'_j) = \left( e^k, \sum_i a_j^i \mathbf{e}_i \right) = a_j^k.$$

Стало быть,  $C = A$  и

$$e^k = \sum_i a_i^k e'^i.$$

Далее,  $B = A^{-1}$ , и мы видим, что матрицей перехода от  $(e^i)$  к  $(e'^i)$  является  ${}^t B = {}^t(A^{-1}) = {}^t A^{-1}$  — матрица, которую называют *контраградиентной* к  $A$ .

Найдём теперь координаты  $T'_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  нашего тензора  $T$  в базисе

$$e'^{i_1} \otimes \dots \otimes e'^{i_p} \otimes \mathbf{e}'_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}'_{j_q}.$$

По определению (см. (8))

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = \sum_{i,j} T'_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} e'^{i'_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}'_{j'_q} = \\ &= \sum \left( \sum_{i_1 \dots i_p} b_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p} T'_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} a_{j'_1 \dots j'_q}^{j_1 \dots j_q} \right) e^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}. \end{aligned}$$

Итак, справедлива

**Теорема 2.** При переходе от дуальных базисов  $(\mathbf{e}_i)$ ,  $(e^i)$  пространстве  $V$  и  $V^*$  к новым дуальным базисам тех же пространств по формулам (13) и (14) координаты тензора  $T$  типа  $(p, q)$  преобразуются по формулам

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \sum_{i', j'} b_{i_1 \dots i_p}^{i' \dots i'_p} T_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} a_{j'_1 \dots j'_q}^{j_1 \dots j_q}. \quad (15)$$

Говорят, что в формуле (15) матрица  $A = (a_j^i)$  действует на верхние индексы координат тензора, а матрица  $B = (b_j^i) = A^{-1}$  — на нижние индексы.

Определение тензора, данное в самом начале, можно теперь выразить иначе, назвав тензором на  $V$  типа  $(p, q)$  соответствие  $T$ , относящее каждому базису пространства  $V$  систему из  $n^{p+q}$  скаляров  $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$  (внизу стоят  $p$  ковариантных индексов, вверху —  $q$  контравариантных индексов) таким образом, что системы, отвечающие различным базисам, связаны между собой соотношениями (15).

Действия над тензорами, сформулированные на языке полилинейных форм, легко описать и на координатном уровне. Скажем, если  $S$  и  $T$  — два тензора одинакового типа, то их линейной комбинацией  $\alpha S + \beta T$  называется тензор с координатами

$$\alpha S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + \beta T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}.$$

Произведением тензоров  $(Q_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q})$  и  $(R_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_t})$  любых типов будет тензор с координатами

$$T_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_s}^{j_1 \dots j_q l_1 \dots l_t} = Q_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} R_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_t}. \quad (16)$$

Это определение на самом деле от выбора базиса не зависит, поскольку применение к левой части (16) преобразования (15) сводится к перераспределению величин  $a_j^{j'}$ ,  $b_j^i$  между множителями  $Q$  и  $R$  в правой части.

**Пример 2.** Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{F}$  на  $V$ . Мы видели (см. пример 1), что  $\mathcal{F}$  можно интерпретировать как тензор типа  $(1, 1)$ . Это согласуется и с матричными обозначениями. Если  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  и  $\mathcal{F}\mathbf{e}_k = \sum_i f_k^i \mathbf{e}_i$ , то в случае перехода к новому базису по формулам

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_k = \sum_i b_k^i \mathbf{e}'_i, \quad \sum_i b_k^i a_i^l = \delta_k^l$$

будем иметь

$$\sum_s f'_k^s \mathbf{e}'_s = \mathcal{F}\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathcal{F}\mathbf{e}_i = \sum_{i,j} a_k^i f_i^j \mathbf{e}_j = \sum_{i,j,s} a_k^i f_i^j b_j^s \mathbf{e}'_s.$$

Отсюда

$$f'_k^s = \sum_{i,j} a_k^i f_i^j b_j^s, \quad (17)$$

как это и должно быть для тензора  $F = (f_j^i)$ , один раз ковариантного и один раз контравариантного. Формула (17) в иных обозначениях нам уже встречалась при выражении матрицы линейного оператора в различных базисах.

Тензоры в физике и математике рассматриваются большей частью как геометрические объекты (наборы величин) произвольной природы, подчиняющиеся правилу преобразования (15). Для физики, кроме того, важны не сами тензоры, а тензорные поля (тензор кривизны, тензор гравитационного поля и пр.). Коротко говоря, под *тензорным полем* понимается отображение пространства  $V$  в множество всех тензоров данного типа на  $V$ . Подробности см. в [2, ч. 4, § 8].

**5. Тензорное произведение пространств.** Операция тензорного произведения тензоров допускает естественное обобщение, находящее многочисленные применения в дифференциальной геометрии, теории представлений групп, и в математической физике. Не стремясь к максимальной общности, необходимость в которой у нас вряд ли возникнет (а если так, то зачем вводить её заблаговременно?), ограничимся достаточно интересной конструкцией тензорного произведения векторных пространств. Эта конструкция найдёт применение в [ВА III].

**Теорема 3.** Пусть  $V, W$  — векторные пространства над полем  $\mathbb{K}$ . Тогда существуют векторное пространство  $T$  над  $\mathbb{K}$  и билинейное отображение  $\tau: V \times W \rightarrow T$ , удовлетворяющее условиям:

(T1) если  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  линейно независимы и  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W$ , то  $\sum_{i=1}^k \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 0 \implies \mathbf{w}_1 = 0, \dots, \mathbf{w}_k = 0$ ;

(T2) если  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \in W$  линейно независимы и  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ , то  $\sum_i \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 0 \implies \mathbf{v}_1 = 0, \dots, \mathbf{v}_k = 0$ ;

(T3)  $\tau$  — сюръективное отображение, т.е.

$$T = \langle \tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Кроме того, пара  $(\tau, T)$  универсальна в том смысле, что какова бы ни была пара  $(\tau', T')$ , состоящая из векторного пространства  $T'$  и билинейного отображения  $\tau': V \times W \rightarrow T'$ , найдётся единственное линейное отображение  $\sigma: T \rightarrow T'$ , для которого  $\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ ,  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{w} \in W$ .

**Доказательство.** Ниже даётся лишь набросок необходимых рассуждений.

а) Если  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{K}}$ ,  $W = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \rangle_{\mathbb{K}}$ , то (T1)–(T3) эквивалентны в совокупности единственному условию: векторы  $\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , составляют базис пространства  $T$ .

б) Для любого  $n$ -мерного пространства  $T$  над  $\mathbb{K}$  отображение  $\tau$  с  $\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{w} = \sum_j \beta_j \mathbf{f}_j$  можно определить соотношением

$$\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij},$$

где  $(\mathbf{t}_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$  — базис в  $T$ . Согласно а) пара  $(\tau, T)$  удовлетворяет условиям  $(T1)-(T3)$ , и все пары получаются таким способом.

в) Для всякой пары  $(\tau', T')$  с билинейным отображением  $\tau': V \times W \rightarrow T'$  определим линейное отображение  $\sigma: T \rightarrow T'$ , полагая  $\sigma(\sum \gamma_{ij} \mathbf{t}_{ij}) = \sum \gamma_{ij} \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$ ,  $\gamma_{ij} \in \mathbb{K}$ . Согласно а) и б)  $\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum \alpha_i \beta_j \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \sigma(\sum \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij}) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ . Обратно: если  $\sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ , то  $\sigma(\mathbf{t}_{ij}) = \sigma(\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)) = \tau'(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$ .

г) Предположив существование двух универсальных пар  $(\tau, T)$ ,  $(\tau', T')$ , мы легко обнаруживаем, что линейные отображения  $\sigma: T \rightarrow T'$ ,  $\sigma': T' \rightarrow T$  являются на самом деле взаимно обратными изоморфизмами:  $\sigma' \circ \sigma = e_T$ ,  $\sigma \circ \sigma' = e_{T'}$ . Таким образом,  $T \cong T'$ , причём изоморфизм  $\sigma: T \rightarrow T'$  обладает свойством, указанным в формулировке теоремы.  $\square$

**Определение 5.** Пару  $(\tau, T)$ , однозначно определённую с точностью до изоморфизма по заданным векторным пространствам  $V$ ,  $W$ , называют *тензорным произведением* этих пространств.

Нетрудно показать, что в системе  $(T1)-(T3)$  можно опустить условие  $(T1)$  или  $(T2)$ , а при априорном предположении  $\dim T = nm$  для определения тензорного произведения достаточно оставить одно из трёх условий.

Записывая  $T = V \otimes_{\mathbb{K}} W$  или просто  $V \otimes W$ , мы должны ещё помнить, что векторное пространство  $T$  снабжено билинейным отображением  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  декартова произведения  $V \times W$  на  $T$ , удовлетворяющим условиям  $(T1)-(T3)$ . Итак, элементами тензорного произведения  $V \otimes W$  служат формальные линейные комбинации с коэффициентами из  $\mathbb{K}$  упорядоченных пар  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  с  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{w} \in W$ . При этом предполагаются выполненными следующие условия:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w} &= 0, \\ \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2 &= 0, \\ \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \lambda \mathbf{w} &= 0, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \\ \lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) &= \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \lambda \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{18}$$

Непосредственно из теоремы 3 видно, что биективные отображения  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ ,  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$ ,  $\mathbf{v} \otimes \lambda \mapsto \lambda \otimes \mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v}$  устанавливают изоморфизмы, называемые *каноническими*, векторных пространств

$$V \otimes W \cong W \otimes V,$$

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W),$$

$$V \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K} \otimes V \cong V$$

(эти изоморфизмы нельзя заменить равенствами). Выполнены также

законы дистрибутивности

$$(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W),$$

$$U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W).$$

Следующим шагом в рассматриваемой конструкции должен быть синтез пространств и линейных операторов на них.

**Определение 6.** Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ ,  $\mathcal{B}: W \rightarrow W$  — линейные операторы. Их *тензорным произведением* называется линейный оператор

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}: V \otimes W \rightarrow V \otimes W,$$

действующий по правилу

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} \quad (19)$$

(далее по линейности  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\sum(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i)) = \sum \mathcal{A}\mathbf{v}_i \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}_i$ ).

Ясно, что это определение согласовано с соотношениями (18). Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_1 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_2 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} = \\ = (\mathcal{A}\mathbf{v}_1 + \mathcal{A}\mathbf{v}_2) \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_1 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_2 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому действие  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  на  $V \otimes W$  задано корректно. Отметим также непосредственно вытекающие из (19) соотношения

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) &= \mathcal{A}\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}\mathcal{D}, \\ (\mathcal{A} + \mathcal{C}) \otimes \mathcal{B} &= \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}, \\ \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{D}) &= \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \\ \mathcal{A} \otimes \lambda \mathcal{B} &= \lambda \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \end{aligned}$$

Проверку их оставляем читателю.

Пусть, как прежде,  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ ,  $W = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m \rangle$ . Матрицу  $A \otimes B$  размера  $nm \times nm$  оператора  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  в базисе

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_m, \dots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_m)$$

мы получим, заметив, что

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_i &= \sum_{i'} \alpha_{i'i} \mathbf{e}_{i'}, \quad B\mathbf{f}_j = \sum_{j'} \beta_{j'j} \mathbf{f}_{j'}, \\ (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) &= \sum_{i', j'} \alpha_{i'i} \beta_{j'j} \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{f}_{j'}. \end{aligned}$$

Стало быть, с  $A = (\alpha_{i'i})$ ,  $B = (\beta_{j'j})$  имеем

$$A \otimes B = (\alpha_{i'i} \beta_{j'j}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \dots & \alpha_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}B & \alpha_{n2}B & \dots & \alpha_{nn}B \end{vmatrix}. \quad (20)$$

В частности, имеем формулу для следа

$$\operatorname{tr} A \otimes B = \alpha_{11} \operatorname{tr} B + \dots + \alpha_{nn} \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B. \quad (21)$$

Отметим попутно, что

$$\begin{aligned} \det A \otimes B &= \det((A \otimes E_m)(E_n \otimes B)) = \\ &= \det(A \otimes E_m) \cdot \det(E_n \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n, \end{aligned} \quad (22)$$

так что невырожденность операторов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  влечёт невырожденность их тензорного произведения  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

Формулы (21) и (22) используются в теории представлений групп.

### УПРАЖНЕНИЯ

**1. Символ Кронекера.** Проверить, что  $\delta_i^j$  является элементом из  $\mathbb{T}_1^1(V)$ , представляющим тождественное отображение пространства  $V$  в себя.

**2. Метрический тензор.** Пусть  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle_{\mathbb{R}}$  — евклидово векторное пространство со скалярным произведением, заданным положительно определённой билинейной формой

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j, \quad g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

(следуя традиции, принятой геометрами, мы используем здесь букву  $g$  и символы  $g_{ij}$ ). Принято  $G_0 = (g_{ij})$  называть *метрическим тензором* (типа  $(2, 0)$ ) пространства  $V$ . Таким образом, компоненты метрического тензора — это элементы матрицы Грама исходного базиса в  $V$  относительно соответствующего скалярного произведения.

Теперь мы вспоминаем, что евклидово пространство канонически изоморфно своему двойственному пространству  $V^*$ , а базис  $(\mathbf{e}_i)$  отождествляется с дуальным к нему базисом  $(\mathbf{e}^i)$  пространства  $V^*$ :  $(\mathbf{e}_i | *) = \mathbf{e}^i$  (см. (13) из § 1 гл. 3). Если  $g^{ij} = g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)$ , то  $G^0 = (g^{ij})$  также называется *метрическим тензором* (теперь уже типа  $(0, 2)$ ) пространства  $V$ . При этом  $g_{ij}$  и  $g^{ij}$  являются ковариантными и контравариантными координатами метрического тензора  $G$ .

Проверить, что  $G^0 G_0 = E$ , т.е.

$$\sum_j g^{ij} f_{jk} = \delta_j^i.$$

**3. Подъём поля скаляров.** Пусть  $V$  — вещественное векторное пространство с базисом  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ,  $V^{\mathbb{C}}$  — его комплексификация (см. п. 3 § 4 гл. 3). Поскольку поле  $\mathbb{C}$  суть векторное пространство над  $\mathbb{R}$  с базисом  $(1, i)$ , мы можем построить векторное пространство

$$\mathbb{C} \otimes V = \langle 1 \otimes \mathbf{e}_1, \dots, 1 \otimes \mathbf{e}_n, i \otimes \mathbf{e}_1, \dots, i \otimes \mathbf{e}_n \rangle.$$

Проверить, что  $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\mathbb{R} \otimes V \rightarrow V^{\mathbb{C}} : 1 \otimes \mathbf{e}_k \mapsto \mathbf{e}_k, \quad i \otimes \mathbf{e}_k \mapsto i \mathbf{e}_k$$

определяет изоморфизм  $\mathbb{C} \otimes V$  с  $V^{\mathbb{C}}$ .

Более общо: пусть  $\mathfrak{K}$  — подполе поля  $\mathfrak{L}$ ,  $V$  — векторное пространство над  $\mathfrak{K}$ . Рассмотрев сначала  $\mathfrak{L}$  как векторное пространство над  $\mathfrak{K}$ , построим тензорное

произведение  $\mathfrak{L} \otimes_{\mathfrak{K}} V$ . После этого введём на нём структуру векторного пространства над  $\mathfrak{L}$ , определив умножение на скаляры  $a \in \mathfrak{L}$  формулой

$$a(b \otimes \mathbf{x}) = (ab) \otimes \mathbf{x}, \quad a, b \in \mathfrak{L}, \quad \mathbf{x} \in V.$$

Убедиться в корректности этого определения.

4. Пусть  $\dim V > 1$ ,  $\dim W > 1$ . Показать, что в тензорном произведении  $V \otimes W$  существуют элементы, не представимые в виде  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ .

5. Пусть  $A, B$  — обратимые квадратные матрицы. Указать матрицу, обратную к  $A \otimes B$ .

6. Сравнить

$$\begin{vmatrix} \beta_{11}A & \beta_{12}A & \dots & \beta_{1m}A \\ \beta_{21}A & \beta_{22}A & \dots & \beta_{2m}A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1}A & \beta_{m2}A & \dots & \beta_{mm}A \end{vmatrix}$$

с клеточной матрицей (20).

7. Доказать формулу (22) для квадратных матриц  $A, B$  порядков  $n$  и  $m$  соответственно с комплексными коэффициентами, используя возможность их приведения к треугольному виду.

## § 2. Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров

**1. Свёртка тензора.** Для линейного оператора  $\mathcal{F}: V \rightarrow V$  с матрицей  $F = (f_j^i)$  в некотором базисе  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  инвариантным образом определено понятие следа (см. гл. 2, § 2):

$$\operatorname{tr} \mathcal{F} = \sum_i f_i^i.$$

Инвариантность следа, т.е. его независимость от выбора базиса, легко усматривается из формулы (17) из § 1 при интерпретации  $(f_j^i)$  как тензора типа  $(1, 1)$ , поскольку в базисе  $(\mathbf{e}'_i)$  имеем

$$\sum_k f'_k{}^k = \sum_{i,j,k} a_k^i f_i^j b_j^k = \sum_{i,j} f_i^j \sum_k b_j^k a_k^i = \sum_{i,j} f_i^j \delta_j^i = \sum_i f_i^i = \operatorname{tr} \mathcal{F}.$$

Операции взятия следа в тензорном анализе соответствует более общая *операция свёртывания*. Чтобы её определить, проще всего временно отождествить смешанный тензор  $T$  типа  $(p, q)$  с его значением как  $(p+q)$ -линейной формы на произвольных векторах  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$ ,  $u_1, \dots, u_q \in V^*$ . Зафиксировав все переменные, кроме  $\mathbf{x}_r$  и  $u_s$ , мы получим билинейную форму:

$$f(\mathbf{x}_r, u_s) := T(\dots, \mathbf{x}_r, \dots, u_s, \dots).$$

Определение 1. Сумма

$$\overline{T} = \sum_k f(\mathbf{e}_k, e^k) \tag{1}$$

называется *свёрткой тензора*  $T$  по  $r$ -му ковариантному индексу и по  $s$ -му контравариантному индексу.

В сумме (1) каждое слагаемое  $f(\mathbf{e}_k, e^k)$ , являющееся полилинейной формой от  $\mathbf{x}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_r, \dots, \hat{u}_s \dots, u_q$ , зависит от выбора базиса в  $V$ , но  $\overline{T}$  от выбора базиса не зависит (как всегда,  $\hat{a}$  означает пропуск символа  $a$ ). Действительно, если  $\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathbf{e}_i$ ,  $A = (a_k^i)$ , то  $e'^k = \sum_i b_k^i e^i$ , где  $B = (b_k^i) = A^{-1}$  (см. § 1, п. 4). Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_k f(\mathbf{e}'_k, e'^k) &= \sum_{i,j,k} a_k^i b_k^j f(\mathbf{e}_i, e^j) = \\ &= \sum_{i,j} \left( \sum_k b_k^j a_k^i \right) f(\mathbf{e}_i, e^j) = \sum_{i,j} \delta_j^i f(\mathbf{e}_i, e^j) = \sum_i f(\mathbf{e}_i, e^i) = \overline{T}, \end{aligned}$$

что и доказывает инвариантность  $\overline{T}$ . Как мы знаем, билинейную форму  $f$  можно представить в виде

$$f(\mathbf{x}_r, u_s) = (u_s, \mathcal{F}\mathbf{x}_r),$$

где  $\mathcal{F}$  — линейный оператор, зависящий от  $\mathbf{x}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_r, \dots, \hat{u}_s \dots, u_q$ . В таком случае  $\overline{T} = \text{tr } \mathcal{F}$ , а это ещё раз устанавливает независимость  $\overline{T}$  от выбора базиса и делает очевидной связь между операциями свёртывания и взятия следа.

Если обозначить операцию свёртывания по паре индексов  $r, s$  символом  $\text{tr}_r^s$ , то  $\text{tr}_r^s$  будет линейным отображением

$$\mathbb{T}_p^q(V) \rightarrow \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V),$$

относящим каждому разложимому смешанному тензору

$$R = f_1 \otimes \dots \otimes f_p \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_q, \quad \mathbf{v}_i \in V, \quad f_j \in V^*,$$

тензор

$$\text{tr}_r^s(R) = (f_r, \mathbf{v}_s) f_1 \otimes \dots \otimes \widehat{f}_r \otimes \dots \otimes \widehat{\mathbf{v}}_s \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_q.$$

Так как  $(e^r, \mathbf{e}_s) = \delta_s^r$ , то операцию  $\text{tr}_r^s$  удобно выразить в координатной форме. Пусть

$$T = \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

(ср. с формулой (12) из § 1). Тогда

$$\begin{aligned} \overline{T} = \text{tr}_r^s(T) &= \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \text{tr}_r^s(e^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}) = \\ &= \sum_{i,j} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \delta_{j_s}^{i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \dots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = \\ &= \sum_{i,j} T_{i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_p}^{j_1 \dots \widehat{j_s} \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \dots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}, \end{aligned}$$

где

$$\overline{T}_{i_1 \dots i_{r-1} i_r+1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{s-1} j_s+1 \dots j_q} = \sum_k T_{i_1 \dots i_{r-1} k i_r+1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{s-1} k j_s+1 \dots j_q}. \quad (2)$$

Мы знаем, что разложимые тензоры

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}^{i_r} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \hat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

составляют базис пространства  $\mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V)$ , поэтому  $\overline{T}_{i_1 \dots i_{r-1} i_r+1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{s-1} j_s+1 \dots j_q}$  — координаты тензора  $\overline{T}$ . Нами доказана

**Теорема 1.** *Свёртка по  $r$ -му ковариантному индексу и по  $s$ -му контравариантному индексу смешанного тензора  $T$  типа  $(p, q)$  является тензором  $\overline{T}$  типа  $(p-1, q-1)$  с координатами, определёнными по формуле (2).*

К тензору  $\overline{T} = \text{tr}_r^s(T)$  можно в свою очередь применить операцию свёртывания. В результате  $m$ -кратного свёртывания, где  $m = \min(p, q)$ , получится либо скаляр, либо чисто ковариантный (или чисто контравариантный) тензор, к которому операция свёртывания уже не применима. В этом случае говорят о *полном свёртывании* тензора. Взятие следа линейного оператора — пример полного свёртывания. Примером неполного свёртывания может служить произведение двух линейных операторов  $A$  и  $B$ . В самом деле, если  $A = (a_j^i)$ ,  $B = (b_l^k)$  — матрицы этих операторов в каком-то базисе, то тензор

$$T = T_{jl}^{ik}, \quad T_{jl}^{ik} = a_j^i b_l^k,$$

свёрнутый по ковариантному индексу тензора  $A$  и по контравариантному индексу тензора  $B$ , будет равен тензору  $C = (c_l^i)$ , где

$$c_l^i = \sum_j T_{jl}^{ij} = \sum_j a_j^i b_l^j.$$

Легко догадаться, что  $c_l^i$  — элемент произведения матриц  $AB$ .

Рассмотренный пример иллюстрирует часто применяемую операцию, которая состоит в образовании произведения двух тензоров (не являющихся одновременно контравариантными или ковариантными) и последующего свёртывания полученного смешанного тензора по одной или нескольким парам индексов.

**2. Структурный тензор алгебры.** Пусть  $V$  — конечномерная алгебра над полем  $\mathfrak{K}$  (см. определение 1 из § 2 гл. 2) с операцией умножения  $(a, b) \mapsto a * b$ , не обязательно ассоциативной. Если  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис пространства  $V$ , то

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = \sum_k \gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

**Определение 2.** Скаляры  $\gamma_{ij}^k \in \mathfrak{K}$  называются *структурными константами* алгебры  $V$  в данном базисе.

В силу билинейности операции умножения  $*$  алгебра  $V$  полностью определяется заданием базиса и структурных констант в нём. В другом базисе  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  структурные константы, однако, будут совсем иными

$$\mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \sum_k \gamma'_{ij}^k \mathbf{e}'_k,$$

и мы хотим найти связь между структурными константами в различных базисах. Пусть

$$\mathbf{e}'_i = \sum_s a_i^s \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{e}_j = \sum_t b_j^t \mathbf{e}_t,$$

так что  $B = (b_j^t) = A^{-1}$ ,  $A = (a_i^s)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_k \gamma'_{ij}^k b_j^t e'_k &= \mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \left( \sum_s a_i^s \mathbf{e}_s \right) * \left( \sum_j \mathbf{e}_t \right) = \\ &= \sum_{s,t} a_i^s a_j^t \mathbf{e}_s * \mathbf{e}_t = \sum_{s,t,r} a_i^s a_j^t \gamma_{st}^r \mathbf{e}_r = \sum_{s,t,r,k} a_i^s a_j^t \gamma_{st}^r b_r^k \mathbf{e}'_k, \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma'_{ij}^k = \sum_{s,t,r} a_i^s a_j^t \gamma_{st}^r b_r^k.$$

Сравнив эту формулу с формулой (15) из § 1, мы видим, что структурные константы меняются так же, как координаты тензора типа  $(2, 1)$ . Следовательно, мы имеем право рассматривать так называемый структурный тензор  $\Gamma = (\gamma_{ij}^k)$  алгебры  $V$ . Заданием  $\Gamma$  алгебра  $V$  полностью определяется.

Для фиксированного  $\mathbf{a} \in V$  рассмотрим отображение  $L_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{x}$ , являющееся, очевидно, линейным оператором на  $V$ . Важным инструментом для исследования строения алгебры  $V$  служит *форма следа* — билинейная симметричная форма

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{tr } L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}}. \quad (3)$$

Билинейность формы  $f_V$  вытекает из билинейности операции  $*$ , её симметричность — из общего свойства  $\text{tr } \mathcal{A}\mathcal{B} = \text{tr } \mathcal{B}\mathcal{A}$  (соотношение (12') из § 2 гл. 2).

Для явного вычисления  $f_V$  запишем

$$\mathbf{a} = \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_i \beta^i \mathbf{e}_i,$$

$$L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} \mathbf{e}_k = \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \mathbf{e}_i * (\mathbf{e}_j * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma_{jk}^s \gamma_{is}^t \mathbf{e}_t.$$

Чтобы вычислить  $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , нужно взять диагональные коэффициенты матрицы

$$(R_k^t) \quad c \quad R_k^t = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma_{jk}^s \gamma_{is}^t$$

и просуммировать их:

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j,s,t} \alpha^i \beta^j \gamma_{jk}^s \gamma_{is}^t. \quad (4)$$

Как и следовало ожидать, мы записали  $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  в виде полной свёртки тензора.

Пример 1. С точки зрения механики и физики интересно рассмотреть трёхмерную алгебру Ли  $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$  (см. пример 6 из § 2 гл. 2), операция умножения в которой  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  задаётся правилом векторного умножения векторов в трёхмерном евклидовом пространстве

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1.$$

Здесь  $\gamma_{ij}^k \neq 0$  лишь для трёх попарно различных индексов  $i, j, k$ , причём  $\gamma_{ji}^k = -\gamma_{ij}^k$ . Для любых векторов

$$\mathbf{a} = \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \beta^1 \mathbf{e}_1 + \beta^2 \mathbf{e}_2 + \beta^3 \mathbf{e}_3$$

скалярное произведение вычисляется по обычной формуле

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 + \alpha^3 \beta^3, \quad (5)$$

а произведение в алгебре — по формуле

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\alpha^2 \beta^3 - \alpha^3 \beta^2) \mathbf{e}_1 + (\alpha^3 \beta^1 - \alpha^1 \beta^3) \mathbf{e}_2 + (\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1) \mathbf{e}_3. \quad (6)$$

Вспомним в этой связи выражение для координат момента силы.

Опираясь на формулу (6), можно непосредственно проверить, что скалярное произведение (5) обладает свойством “ассоциативности”

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}] | \mathbf{c}) = (\mathbf{a} | [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \quad (7)$$

Это красивое соотношение является на самом деле следствием свойства ассоциативности формы следа в произвольной конечномерной алгебре Ли  $V$

$$f_V([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = f_V(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \quad (8)$$

Для доказательства (8) заметим, что тождество Якоби в  $V$

$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [[\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y}] + [[\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}] = 0,$$

переписанное в виде

$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]],$$

даёт нам для всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$L_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = L_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{y}} - L_{\mathbf{y}} L_{\mathbf{x}}.$$

Так как  $\text{tr } \mathcal{A}\mathcal{B} = \text{tr } \mathcal{B}\mathcal{A}$ , то, полагая поочерёдно  $\mathcal{A} = L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}$ ,  $\mathcal{B} = L_{\mathbf{c}}$  или  $\mathcal{A} = L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}}$ ,  $\mathcal{B} = L_{\mathbf{a}}$ , получим

$$\begin{aligned} f_V([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) &= \text{tr } L_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} L_{\mathbf{c}} = \text{tr } (L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{c}}) = \\ &= \text{tr } L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - \text{tr } L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} = \text{tr } L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - \text{tr } L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}} = \\ &= \text{tr } L_{\mathbf{a}} (L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}}) = \text{tr } L_{\mathbf{a}} L_{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]} = f_V(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]), \end{aligned}$$

что и даёт соотношение (8).

Эквивалентность (7) и (8) в случае нашей трёхмерной алгебры прямо вытекает из подсчёта  $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  по тензорной формуле (4):

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2(\alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 + \alpha^3 \beta^3) = -2(\mathbf{a} | \mathbf{b}).$$

Обратим ещё внимание на следующее обстоятельство. Соотношение (7), переписанное в виде

$$(L_{\mathbf{a}} \mathbf{x} | \mathbf{y}) + (\mathbf{x} | L_{\mathbf{a}} \mathbf{y}) = 0$$

и означающее попросту кососимметричность матрицы, отвечающей оператору  $L_{\mathbf{a}}$  в каком-нибудь базисе, чем-то напоминает условие ортогональности оператора  $\mathcal{A} \in O_3(\mathbb{R}) = \text{Aut}((\mathbf{x} | \mathbf{y}))$ :

$$(\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

Оказывается, связь здесь самая непосредственная, и корни её уходят в общую теорию групп и алгебр Ли.

**3. Симметричные тензоры.** В теории билинейных форм мы акцентировали внимание на двух классах: симметричных и кососимметричных. В случае тензоров можно говорить о симметричности или кососимметричности по выделенной совокупности индексов, одновременно ковариантных или контравариантных. Например, симметричность тензора по первым двум ковариантным индексам и по последним двум контравариантным индексам означает попросту, что имеют место равенства

$$T_{ij\dots k}^{r\dots st} = T_{ij\dots k}^{r\dots ts} = T_{ji\dots k}^{r\dots st} = T_{ji\dots k}^{r\dots ts}.$$

Перестановка ковариантного индекса с контравариантным, вообще говоря, не несёт смысловой нагрузки и не приводит к тензору.

Обсуждая вопросы симметричности и кососимметричности, мы нисколько не потеряем в общности, если ограничимся тензорами типа  $(p, 0)$  или  $(0, q)$ , причём перестановки будем применять ко всем  $p$  (или  $q$ ) индексам, а не к какой-то их части. Кроме того, поле  $\mathfrak{K}$ , которое до сей поры считалось произвольным, мы будем считать имеющим нулевую характеристику. В приложениях наиболее важны поля  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{C}$ .

Итак, пусть для определённости  $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$ , т.е.

$$T = \sum_{i_1 \dots i_p} T_{i_1 \dots i_p} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}, \quad (9)$$

$S_p$  — симметрическая группа степени  $p$ , действующая на множестве индексов  $\{1, 2, \dots, p\}$ . Для любой перестановки  $\pi \in S_p$  положим

$$f_\pi(T)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{x}_{\pi p}) \quad (10)$$

(здесь  $\mathbf{x}_i$  — вектор с номером  $i$ ; его  $k$ -й координатой будет  $x_i^k$ ).

Так как  $T$  — полилинейная форма на  $V^p$ , то и  $f_\pi(T)$  — полилинейная форма, причём того же типа  $(p, 0)$ . Действительно, если,

скажем,  $\pi k = 1$ , то

$$\begin{aligned} f_\pi(T)(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) &= T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_{\pi p}) = \\ &= \alpha T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\pi p}) + \beta T(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_{\pi p}) = \\ &= \alpha f_\pi(T)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) + \beta f_\pi(T)(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p). \end{aligned}$$

Полагая ещё по определению

$$f_\pi(\alpha T' + \beta T'') = \alpha f_\pi(T') + \beta f_\pi(T''),$$

мы видим, что  $\pi$  индуцирует невырожденный линейный оператор  $f_\pi: \mathbb{T}^{p;0} \rightarrow \mathbb{T}^{p;0}$ . Полезно заметить ещё, что  $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$  (см. [ВА I, гл. 1, § 8, п. 4]).

В соответствии с выражением (9) тензора  $T$  через базисные элементы  $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}$  его координатами являются  $T_{i_1 \dots i_p} = T(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p})$ . Координатами тензора  $f_\pi T$  в том же базисе будут

$$f_\pi(T)_{i_1 \dots i_p} = f_\pi(T)(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_p}) = T(\mathbf{e}_{i_{\pi 1}}, \dots, \mathbf{e}_{i_{\pi p}}) = T_{i_{\pi 1} \dots i_{\pi p}},$$

т.е.

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1 \dots i_p} T_{i_{\pi 1} \dots i_{\pi p}} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p},$$

или, что равносильно,

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1 \dots i_p} T_{i_1 \dots i_p} e^{i_{\pi^{-1} 1}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\pi^{-1} p}}. \quad (11)$$

Отсюда, между прочим, следует, что

$$f_{\pi^{-1}}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p}) = e^{i_{\pi 1}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\pi p}}.$$

Конечно, если бы мы рассматривали действие  $S_p$  на контравариантных тензорах, то получили бы формулу

$$f_{\pi^{-1}}(T) = \sum_{i_1 \dots i_p} T^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1} 1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1} p}}. \quad (11')$$

**Определение 3.** Тензор  $T$  типа  $(p, 0)$  (или  $(0, q)$ ) называется *симметричным*, если  $f_\pi(T) = T$  для всех  $\pi \in S_p$  (соответственно для всех  $\pi \in S_q$ ). *Симметризацией* (или *симметрированием*) тензоров из  $T_p^0(V)$  называется отображение

$$S = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi: T_p^0(V) \rightarrow T_p^0(V). \quad (12)$$

Подпространства симметричных тензоров в  $\mathbb{T}_p^0(V)$  и  $\mathbb{T}_0^q(V)$  обозначим соответственно через  $\mathbb{T}_p^+(V)$  и  $\mathbb{T}_+^q(V)$ .

Например,

$$S(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2) = \frac{1}{3}(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1).$$

Очевидно, результат симметризации всякого тензора из  $\mathbb{T}_p^0$  симметричен:

$$f_\sigma(S(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\sigma(f_\pi(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_{\sigma\pi}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} f_\tau(T) = S(T).$$

Мы воспользовались здесь тем фактом, что при фиксированной перестановке  $\sigma \in S_p$  элементы  $\sigma\pi$  пробегают вместе с  $\pi$  все элементы группы  $S_p$ , причём ровно по одному разу. Итак,  $\text{Im } S \subset \mathbb{T}_p^+(V)$ .

Напротив, на симметричных тензорах симметризация является тождественной операцией, как это следует непосредственно из (12), так что  $T \in \mathbb{T}_p^+(V) \implies T = S(T)$ . Стало быть, имеет место

**Теорема 2.** *Действие отображения симметризации  $S$  на  $\mathbb{T}_p^0$  обладает свойствами  $S^2 = S$  и  $\text{Im } S = \mathbb{T}_p^+(V)$ .*

**Пример 2.** Одним из классических примеров тензора является *тензор инерции* — симметричная матрица  $J = (J_{ij})$  порядка 3, где  $J_{ii}$  — осевой момент инерции твёрдого тела относительно оси  $e_i$ , а  $J_{ij}, i \neq j$ , — центробежные моменты инерции, взятые с обратными знаками. Итак, пусть дано вращающееся твёрдое тело с одной закреплённой точкой  $\delta$ . Предполагается, что тело состоит из некоторого числа  $n$  частиц с массами  $m_k$ ; положение частиц задано векторами-столбцами  $[x_k, y_k, z_k]$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Тензор  $J$ , описывающий распределение массы и используемый при вычислении углового момента и кинетической энергии тела, задаётся матричным соотношением

$$J = \left( \sum_k (x_k, y_k, z_k) [x_k, y_k, z_k] \right) E - \sum_k [x_k, y_k, z_k] (x_k, y_k, z_k) \quad (*)$$

(здесь, как обычно,  $E$  — единичная матрица порядка 3,  $(x_k, y_k, z_k) = {}^t [x_k, y_k, z_k]$  — вектор-строка; суммирование заменяется интегрированием в случае непрерывно распределённой массы тела). Переходя от первоначального прямоугольного репера  $(\delta; e_1, e_2, e_3)$  к штрихованному при помощи ортогональной матрицы  $A$  по обычному правилу  $[x_k, y_k, z_k] \rightarrow A[x_k, y_k, z_k] = [x'_k, y'_k, z'_k]$  (понятно, что  $A$  не действует на массы  $m_k$ ), мы получим матрицу

$$J' = AJ {}^t A = AJA^{-1},$$

т.е.  $J'_{ij} = \sum_{r,s} a_i^r a_j^s J_{rs}$ , как и положено для тензора валентности 2. Если выписать компоненты  $J_{ij}$  в явном виде, то из (\*) будем иметь

$$J = \begin{vmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k x_k z_k & -\sum_k m_k y_k z_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{vmatrix}.$$

Координаты  $J_{ij}$  не могут рассматриваться как физические величины, имеющие независимый от выбора репера смысл, но как мы видели, в целом  $J$  такой смысл приобретает, причём с  $J$  ассоциируются три тензорных инвариантa:

$$J_1 = \text{tr } J = 2 \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2),$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \det J.$$

Инвариантность  $J_1, J_2, J_3$  относительно поворотов — следствие инвариантности характеристического многочлена матрицы  $J$ .

Приведение  $J$  к главным осям, а симметричность  $J$  это позволяет сделать, даст нам матрицу  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  с собственными значениями  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$ , называемыми *главными моментами инерции*. В частности, тензор инерции положительно определён. Если  $\omega$  — угловая скорость вращающегося тела, а  $\mathbf{j}$  — угловой момент, то  $\mathbf{j} = J\omega$ . Параллельность  $\mathbf{j}$  и  $\omega$  имеет место тогда и только тогда, когда тело вращается вокруг одной из своих главных осей.

В своё время теоремой 3 из § 4 гл. 1 мы установили биективное соответствие между квадратичными формами и симметричными билinearными формами. Это соответствие в более слабой форме продолжает иметь место и в случае полилинейных форм.

**Определение 4.** Функцию  $Q: \mathbf{x} \mapsto \mathfrak{K}$  на  $V$  назовём *однородной степени  $p$* , если

$$Q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}),$$

где  $F: V^p \rightarrow \mathfrak{K}$  — какая-нибудь  $p$ -линейная форма на  $V$ .

Отображение симметризации, применённое к форме  $F$ , даёт нам по теореме 2 симметричную  $p$ -линейную форму  $S(F)$ :

$$(S(F))(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} F(\mathbf{x}_{\pi 1}, \dots, \mathbf{x}_{\pi p}),$$

где  $F: V^p \rightarrow \mathfrak{K}$  — какая-нибудь  $p$ -линейная форма на  $V$ .

Ясно, что

$$Q(\mathbf{x}) = (S(F))(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}). \quad (13)$$

Форма  $S(F)$  называется  *$p$ -линейной формой, полярной к  $Q$* .

Мы получили часть следующего утверждения.

**Теорема 3.** Каждая однородная функция  $Q$  степени  $p$  выражается через свою полярную  $p$ -линейную форму в виде (13). Форма, полярная к  $Q$ , единственна.

**Доказательство.** Единственность полярной формы следует из её координатного выражения. Пусть

$$(S(F))(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \sum (S(F))_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}.$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) = \sum (S(F))_{i_1 \dots i_p} x^{i_1} \dots x^{i_p}. \quad (14)$$

Однородный многочлен  $f[X_1, \dots, X_n]$  степени  $p$  от  $n$  независимых переменных, значение которого при  $X_i = x^i$  есть  $Q(\mathbf{x})$ , единственным образом записывается в виде

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_p} f_{i_1 \dots i_p} X_{i_1} \dots X_{i_p}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) и (15), получаем

$$f_{i_1 \dots i_p} = c \cdot (S(F))_{i_1 \dots i_p},$$

где  $c = c(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}$  — множитель, равный числу различных размещений, которые возникают при всевозможных перестановках индексов в строке  $i_1, \dots, i_p$ . Например, при  $p = 4$  имеем  $c(i, i, k, l) = 12$ ,  $c(i, i, i, j) = 4$  и т.д. Вместе с  $f_{i_1 \dots i_p}$  однозначно определёнными оказываются и коэффициенты  $(S(F))_{i_1 \dots i_p}$ .  $\square$

По существу мы получили биективное соответствие между пространством симметричных тензоров  $\mathbb{T}_p^+(V)$  и пространством  $\mathfrak{K}[X_1, \dots, X_n]_p$  однородных многочленов (форм) степени  $p$  от  $n$  независимых переменных. То же самое относится к пространству  $\mathbb{T}_+^p(V)$ . Заметим в этой связи,

$$\dim \mathfrak{K}[X_1, \dots, X_n]_p = \binom{n+p-1}{p}.$$

**4. Кососимметричные тензоры.** Как и ранее, ограничимся тензорами типа  $(p, 0)$  или  $(0, q)$  и зададим действие симметрической группы  $S_p$  на  $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$  формулой (10) или (11).

**Определение 5.** Назовём тензор  $T$  *кососимметричным* или *антисимметричным*, если

$$f_\pi(T) = \varepsilon_\pi T \quad \forall \pi \in S_p, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_\pi$  — знак (или чётность) перестановки  $\pi$ .

Напомним, что  $\varepsilon: \pi \mapsto \varepsilon_\pi$  — гомоморфизм группы  $S_p$  в  $\{\pm 1\}$  со значениями  $\varepsilon_\tau = -1$  на всех транспозициях  $\tau$ .

Условие (16) можно заменить эквивалентным ему требованием

$$f_\tau(T) = -T, \quad (16')$$

где  $\tau$  пробегает множество транспозиций (это ясно из определения и из равенства  $f_\sigma(f_\pi(T)) = f_{\sigma\pi}(T)$ , что в свою очередь выражается в виде

$$T(\dots, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{y}, \dots) = -T(\dots, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{x}, \dots), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (17)$$

(на месте точек стоят произвольные векторы — одни и те же в обеих частях равенства (17)). У нас  $\text{char } \mathfrak{K} = 0$ , поэтому при  $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$  из (17) следует

$$T(\dots, \mathbf{z}, \dots, \mathbf{z}, \dots) = 0. \quad (17')$$

Положив  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  в (17') и воспользовавшись полилинейностью  $T$ , мы получим

$$\begin{aligned} T(\dots, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \dots, \mathbf{x} + \mathbf{y}, \dots) &= \\ &= T(\dots, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}, \dots) + T(\dots, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}, \dots) + T(\dots, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{y}, \dots) + \\ &\quad + T(\dots, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{x}, \dots), \end{aligned}$$

а это значит, что из (17') следует (17). Поэтому условия (17) и (17') равносильны.

Свойство кососимметричности тензора  $T$  очевидным образом выражается на языке координат  $T_{i_1 \dots i_p}$ . Например, при  $p = 2$  кососимметричность означает  $T_{ij} = -T_{ji}$  (кососимметричность линейного оператора или квадратной матрицы порядка  $n$ ), причём это свойство, как и следовало ожидать, с выбором базиса не связано. В общем случае

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p} = \varepsilon_\pi T_{i_1 \dots i_p}.$$

Стало быть, любая координата кососимметричного тензора однозначно определяется координатой с теми же индексами, расположеными, скажем, в порядке возрастания:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n. \quad (18)$$

Всякая координата с двумя одинаковыми индексами равна нулю. Напротив, координаты вида (18) с различными наборами индексов никак не связаны между собой, так что всего получается  $\binom{n}{p}$  независимых координат. Эти предварительные соображения мы сейчас уточним и разовьём.

**Определение 6.** Отображение

$$A = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi: \mathbb{T}_p^0(V) \rightarrow \mathbb{T}_p^0(V) \quad (19)$$

называется *альтернированием*.

Естественно также ввести множество  $\Lambda^p(V^*)$  кососимметричных тензоров, содержащихся в  $\mathbb{T}_p^0(V)$  (соответственно  $\Lambda^q(V) \subset \mathbb{T}_0^q$ ). На самом деле эти множества являются подпространствами, как это видно, например, из следующей импликации:

$$\begin{aligned} f_\pi P = \varepsilon_\pi P, \quad f_\pi R = \varepsilon_\pi R \implies f_\pi(\alpha P + \beta R) &= \alpha f_\pi P + \beta f_\pi R = \\ &= \alpha \varepsilon_\pi P + \beta \varepsilon_\pi R = \varepsilon_\pi(\alpha P + \beta R) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

**Теорема 4.** *Отображение альтернирования (19) является линейным оператором*

$$A(\alpha T + \beta R) = \alpha A(T) + \beta A(R),$$

*обладающим следующими свойствами:*

- 1)  $A^2 = A$ ;
- 2)  $\text{Im } A = \Lambda^p(V^*)$ ;
- 3)  $A(f_\sigma(T)) = \varepsilon_\sigma A(T)$ .

**Доказательство.** 1) Согласно (19) имеем

$$A^2 = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \pi \in S_p} \varepsilon_\sigma \varepsilon_\pi f_\sigma \circ f_\pi = \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \pi \in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi} = \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in S_p} \varepsilon_\rho f_\rho = A.$$

Здесь учтено, что любой элемент  $\rho \in S_p$  ровно  $p!$  способами представляется в виде произведения  $\sigma\pi$ :  $\sigma$  выбирается любым,  $\pi$  находится

из равенства  $\pi = \sigma^{-1}\rho$ . Использована также мультипликативность  $\varepsilon_\sigma$  и  $f_\sigma$  по  $\sigma$ .

2) Для всякого  $T \in \mathbb{T}_p^0$  имеем

$$f_\sigma(A(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\sigma(f_\pi(T)) = \varepsilon_\sigma \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi}(T) = \varepsilon_\sigma A(T),$$

так что  $\text{Im } A \subseteq \Lambda_p(V^*)$ . С другой стороны,

$$T \in \Lambda^p(V^*) \implies A(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi^2 T = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} T = T.$$

Это и даёт нужное утверждение.

3) В 2) было проверено, что  $f_\sigma A = \varepsilon_\sigma A$ . По тем же причинам  $A f_\sigma = \varepsilon_\sigma A$ .  $\square$

**5. Тензорные пространства.** В дальнейшем мы будем придерживаться терминологии, ставшей общепринятой в разных областях математики.

**Определение 7.** Ковариантный кососимметричный тензор, т.е. элемент пространства  $\Lambda^p(V^*)$ , принято называть *внешней  $p$ -формой* или, более подробно, *внешней формой степени  $p$  на  $V$* . Контравариантные кососимметричные векторы (элементы пространства  $\Lambda^p(V)$ ) называются  *$p$ -векторами*.

Считается, что  $\Lambda^1(V^*) = V^*$  и  $\Lambda^1(V) = V$ . Введём, далее, внешнюю прямую сумму (см. § 2 гл. 1)

$$\mathbb{T}(V^*) = \mathfrak{K} \oplus \mathbb{T}_1^0(V) \oplus \mathbb{T}_2^0(V) \oplus \dots \quad (5)$$

бесконечного числа тензорных пространств  $\mathbb{T}_p^0(V)$ ,  $p = 0, 1, \dots$  Элементами этой суммы считаются последовательности

$$(f_0, f_1, f_2, \dots) = \sum_{i \geq 0} f_i, \quad f_i \in \mathbb{T}_i^0(V),$$

члены которой почти все (т.е. исключая конечное их число) равны нулю. На  $\mathbb{T}(V^*)$  можно смотреть как на бесконечномерную ассоциативную алгебру с умножением, определённым для тензоров:

$$\left( \sum_{i=0}^s f_i \right) \otimes \left( \sum_{j=0}^t g_j \right) = \sum_{i+j=0}^{s+t} f_i \otimes g_j = \sum_{k=0}^{s+t} h_k. \quad (6)$$

При этом, разумеется, выполнено условие

$$\lambda(f \otimes g) = \lambda f \otimes g = f \otimes \lambda g, \quad \lambda \in \mathfrak{K}.$$

Мы назовём  $\mathbb{T}(V^*)$  *алгеброй ковариантных тензоров*.

Правило (6) весьма напоминает правило умножения многочленов и отличается от него разве лишь некоммутативностью. В  $\mathbb{T}_p^0(V)$  выделяется подпространство  $\mathbb{T}_p^+(V)$  симметричных тензоров, отождествляемое, как мы видели в конце п. 3, с пространством однородных

многочленов степени  $p$  от  $n$  переменных. Их внешняя прямая сумма является обычной алгеброй многочленов, а правило (6), надлежащим образом доопределённое, совпадает с правилом умножения многочленов.

Совершенно аналогичным образом вводится *алгебра контравариантных тензоров*

$$\mathbb{T}(V) = \mathfrak{K} \oplus \mathbb{T}_0^1 \oplus \mathbb{T}_0^2 + \dots, \quad (7)$$

а в ней выделяется подпространство

$$S(V) = T_+(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}_+^q(V)$$

симметричных тензоров, снова изоморфное алгебре обычных многочленов от  $n = \dim V$  переменных. В явном виде структура коммутативной ассоциативной алгебры на пространстве  $S(V)$  вводится по формуле

$$T_1 T_2 = S(T_1 \otimes T_2), \quad T_1 \in T_+^p(V), \quad T_2 \in T_+^q(V).$$

Алгебра  $S(V)$  над полем  $\mathfrak{K}$  называется *симметрической алгеброй* пространства  $V$ .

Теперь мы обращаем своё внимание на подпространства

$$\begin{aligned} \Lambda(V^*) &= \mathfrak{K} \oplus \Lambda^1(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*) \oplus \dots \subset \mathbb{T}(V^*), \\ \Lambda(V) &= \mathfrak{K} \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \dots \subset \mathbb{T}(V). \end{aligned} \quad (8)$$

В отличие от симметричных тензоров (ковариантных или контравариантных), подпространства, определённые соотношениями (8), не являются подалгебрами в  $\mathbb{T}(V^*)$  и соответственно в  $\mathbb{T}(V)$ . Оказывается, однако, что на  $\Lambda(V^*)$  и  $\Lambda(V)$  можно ввести естественным образом операцию, превращающую их в ассоциативные алгебры.

**Замечание.** Рассмотренные нами операции симметризации и альтернирования возможны лишь над полем  $\mathfrak{K}$  характеристики нуль. Как избавиться от этого ограничения, показано в [2].

## УПРАЖНЕНИЯ

**1. Поднятие и опускание индексов.** Пусть по-прежнему  $(V, g)$  — евклидово векторное пространство,  $T$  — тензор типа  $(p, q)$  с координатами  $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ . Построим тензор с координатами  $\sum_k g^{ik} T_{ki_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и у координат полученного тензора индекс  $i$  обозначим через  $i_1$ , а затем положим

$$T_{i_2 \dots i_p}^{i_1 j_1 j_2 \dots j_q} = \sum_k g^{i_1 k} T_{ki_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Говорят, что тензор в левой части этого равенства суть результат применения к  $T$  операции *поднятия индекса  $i_1$* . Операция *опускания индекса* при помоши

метрического тензора  $G$  определяется аналогично. Например,

$$T_{i_1 \dots i_p j_2}^{j_1 j_3 \dots j_q} = \sum_k g_{j_2 k} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 k j_3 \dots j_q}$$

— координаты тензора, полученного в результате опускания у тензора  $T$  индекса  $j_2$  на последнее место в ряду нижних индексов.

В общем, подъём  $s$ -го индекса и опускание  $t$ -го индекса — это линейные отображения

$$\mathbb{T}_p^q(V) \rightarrow \mathbb{T}_{p-1}^{q+1}, \quad \mathbb{T}_p^q \rightarrow \mathbb{T}_{p+1}^{q-1},$$

в результате применения которых получаются тензоры с компонентами

$$T_{i_1 \dots i_{s-1}}^{i_s} {}_{i_{s+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}, \quad T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{t-1}} {}_{j_t}^{j_{t+1} \dots j_q}.$$

Мы здесь воспользовались “блочным расположением” сложных индексов у координат тензора. Например, тензор  $T \in V \otimes V^*$  можно задавать компонентами, которые обозначаются  $T_i^j$ , а  $T \in V \otimes V^* \otimes V \otimes V$  — компонентами  $T_{i_1 \dots i_2 i_3}^{j_1}$ .

Операции подъёма и опускания индексов можно применять несколько раз, причём и к самому метрическому тензору.

Показать, что

$$g^{ik} g^{jl} g_{kl} = g^{ij}, \quad g_{ik} g_{jl} g^{kl} = g_{ij}.$$

Убедиться в справедливости равенства  $g^{ik} x_k = x^i$ , означающего, что контравариантные координаты  $x^i$  вектора  $\mathbf{x}$  получаются применением операции поднятия индекса у ковариантных координат  $x_i$  того же вектора.

**2.** Пусть  $\dim V > 1$ . Показать, что  $\mathbb{T}(V)$  — некоммутативное кольцо без делителей нуля. Единственными обратимыми элементами в  $\mathbb{T}(V)$  являются ненулевые скаляры.

**3.** Вычислить в явном виде тензорные инварианты  $J_2$ ,  $J_3$  в примере 2.

### § 3. Внешняя алгебра

**1. Внешнее умножение.** Безразлично, как вести дальнейшее изложение — на языке внешних форм или  $p$ -векторов. Для разнообразия возьмём пространство  $\Lambda(V)$ .

Определение 1. Зададим *операцию внешнего умножения*

$$\wedge: \Lambda(V) \times \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V),$$

полагая

$$Q \wedge R = A(Q \otimes R) \tag{1}$$

для любого  $q$ -вектора  $Q$  и любого  $r$ -вектора  $R$  (считается, что  $\lambda \wedge R = R \wedge \lambda = \lambda R \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ ). Под  $A(Q \otimes R)$  здесь понимается результат применения отображения альтернирования к тензору  $Q \otimes R$ . Так как  $Q \otimes R \in \mathbb{T}_0^{q+r}(V)$ , а тензор  $A(Q \otimes R)$  согласно теореме 4 из § 2 кососимметричен, то формулой (1) задано отображение

$$\wedge: \Lambda^q(V) \times \Lambda^r(V) \rightarrow \Lambda^{q+r}(V).$$

Чтобы задать внешнее произведение  $Q' \wedge R'$  любых двух элементов пространства  $\Lambda(V)$ , запишем

$$Q' = \sum_{i \geq 0} Q_i, \quad R' = \sum_{j \geq 0} R_j; \quad Q_i \in \Lambda^i(V), \quad R_j \in \Lambda^j(V),$$

и положим

$$Q' \wedge R' = \sum_{i+j \geq 0} Q_i \wedge R_j.$$

Заметим ещё, что если в (1) заменить  $R$  на  $\alpha R + \beta T \in \Lambda^r(V)$ , то

$$\begin{aligned} Q \wedge (\alpha R + \beta T) &= A(Q \otimes (\alpha R + \beta T)) = A(\alpha Q \otimes R + \beta Q \otimes T) = \\ &= \alpha A(Q \otimes R) + \beta A(Q \otimes T) = \alpha(Q \wedge R) + \beta(Q \wedge T). \end{aligned}$$

Аналогично,  $(\alpha Q + \beta S) \wedge R = \alpha(Q \wedge R) + \beta(S \wedge R)$ .

**2. Внешняя алгебра векторного пространства.** Мы установили, что операция внешнего умножения билинейна (или дистрибутивна), т.е. она наделяет  $\Lambda(V)$  строением алгебры.

Определение 2. Алгебра  $\Lambda(V)$  над полем  $\mathbb{K}$  называется *внешней алгеброй пространства  $V$*  (или *алгеброй Гассмана*).

Алгебра  $\Lambda(V)$  обладает единичным элементом, отождествляемым с  $1 \in \mathbb{K}$ . Более важное свойство внешней алгебры заключено в теореме 2 ниже.

Лемма. Для любых тензоров  $Q \in \mathbb{T}_0^q(V)$ ,  $R \in \mathbb{T}_0^r(V)$  справедливы соотношения

$$A(A(Q) \otimes R) = A(Q \otimes A(R)) = A(Q \otimes R).$$

Доказательство. Заметим, что по определению

$$A(Q) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi(Q),$$

в то время как

$$A(A(Q) \otimes R) = \frac{1}{(q+r)!} \sum_{\sigma \in S_{q+r}} \varepsilon_\sigma f_\sigma(A(Q) \otimes R).$$

Опираясь на линейность отображения альтернирования, получаем

$$A(A(Q) \otimes R) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \varepsilon_\pi A(f_\pi(Q) \otimes R). \quad (2)$$

Рассмотрим вложение  $\varphi: S_q \rightarrow S_{q+r}$ , понимая под  $\tilde{\pi} = \varphi(\pi)$ ,  $\pi \in S_q$  перестановку из  $S_{q+r}$ , действующую по правилу

$$\tilde{\pi}i = \begin{cases} \pi i, & \text{если } i \leq p, \\ i, & \text{если } i > p. \end{cases}$$

Тогда  $f_\pi(Q) \otimes R = f_{\tilde{\pi}}(Q \otimes R)$  (см. формулу (11) из § 2) и согласно теореме 4, 3) из § 2

$$A(f_\pi(Q) \otimes R) = Af_{\tilde{\pi}}(Q \otimes R) = \varepsilon_{\tilde{\pi}} A(Q \otimes R).$$

Заметив ещё, что  $\varepsilon_{\tilde{\pi}} = \varepsilon_\pi$ , мы приведём соотношение (2) к требуемому виду

$$A(Q \otimes R) = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in S_q} \varepsilon_\pi^2 A(Q \otimes R) = A(Q \otimes R),$$

поскольку  $\varepsilon_\pi^2 = 1$ . Соотношение  $A(Q \otimes A(R)) = A(Q \otimes R)$  доказывается аналогично.  $\square$

**Теорема 2.** *Внешняя алгебра  $\Lambda(V)$  ассоциативна.*

**Доказательство.** Нам нужно убедиться в справедливости тождества

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) \quad (3)$$

для любых  $P, Q, R \in \Lambda(V)$ . В силу билинейности операции  $\wedge$  достаточно рассмотреть случай

$$P \in \Lambda^p(V), \quad Q \in \Lambda^q(V), \quad R \in \Lambda^r(V).$$

Согласно (1)

$$(P \wedge Q) \wedge R = A(A(P \otimes Q) \otimes R),$$

а по лемме

$$A(A(P \otimes Q) \otimes R) = A((P \otimes Q) \otimes R).$$

Опираясь, далее, на ассоциативность тензорного произведения и снова используя лемму, получим

$$\begin{aligned} A((P \otimes Q) \otimes R) &= A(P \otimes (Q \otimes R)) = \\ &= A(P \otimes A(Q \otimes R)) = P \wedge (Q \wedge R). \end{aligned}$$

Всё вместе взятое даёт нам тождество (3).  $\square$

В ассоциативной алгебре, как и в группе, безразлична расстановка скобок, поэтому произведение  $P_{i_1} \wedge P_{i_2} \wedge \dots \wedge P_{i_m}$  имеет смысл. Стоит ещё отметить, что в соответствии с (1)

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} - \mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) = A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad (4)$$

для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$  ( $p = r = 1$ ), так что

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0. \quad (5)$$

**Следствие.** Пусть  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  — произвольные векторы из  $V$ . Тогда

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_p). \quad (6)$$

**Доказательство.** При  $p = 2$  соотношение (6) совпадает с (4). При  $p > 2$ , используя индукцию по  $p$ , на основе леммы и теоремы 2 получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p &= (\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{p-1}) \wedge \mathbf{x}_p = A((\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{p-1}) \otimes \mathbf{x}_p) = \\ &= A(A(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{p-1}) \otimes \mathbf{x}_p) = A(\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_{p-1} \otimes \mathbf{x}_p). \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис векторного пространства  $V$ . Тогда  $p$ -векторы

$$\mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, \quad (7)$$

образуют базис пространства  $\Lambda^p(V)$ .

**Доказательство.** В любом произведении  $\mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p}$  можно переставлять множители, меняя при этом знак всего произведения или получая 0, когда  $j_r = j_s$  для каких-нибудь двух индексов (см. (5)). Поэтому множество всех таких произведений содержится в множестве тензоров вида (7).

Пусть, далее,  $P \in \Lambda^p(V)$ . Как всякий тензор из  $\mathbb{T}_0^p(V)$ ,  $P$  выражается через базис:

$$P = \sum_{j_1 \dots j_p} P^{j_1 \dots j_p} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p}.$$

Ввиду линейности отображения альтернирования, теоремы 4 из § 2 и соотношения (6) имеем

$$P = A(P) = \sum_{j_1 \dots j_p} P^{j_1 \dots j_p} A(\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p}) = \sum_{j_1 \dots j_p} P^{j_1 \dots j_p} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p},$$

а это значит, что любой  $p$ -вектор выражается через  $p$ -векторы (7). Нам осталось доказать их линейную независимость. Предположим, что

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = 0.$$

Тогда ввиду (6)

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda^{i_1 \dots i_p} A(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) = 0,$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{1}{p!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda^{i_1 \dots i_p} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) = 0.$$

С учётом формулы (11') из § 2 получаем

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda^{i_1 \dots i_p} \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi (\mathbf{e}_{i_{\pi 1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{\pi p}}) = 0. \quad (8)$$

Если  $\pi \neq e$ , то последовательность индексов  $i_{\pi 1}, \dots, i_{\pi p}$  уже не будет упорядоченной по возрастанию. Стало быть, соотношение (8) переписывается в виде

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \lambda^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} + \dots = 0, \quad (9)$$

где точками обозначена линейная комбинация тензоров  $\mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p}$  хотя бы с одной инверсией в последовательности индексов  $j_1, \dots, j_p$ .

Так как тензоры  $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$  линейно независимы, то из (9) следует, что  $\lambda^{i_1 \dots i_p} = 0$ .  $\square$

Напомним (см. (8) из § 2), что  $\Lambda(V)$  — внешняя прямая сумма подпространств  $\Lambda^p(V)$ , так что, в частности,

$$\dim \Lambda(V) = \sum_{p \geq 0} \dim \Lambda^p(V),$$

и имеет место

**Следствие.** *Внешняя алгебра  $\Lambda(V)$  пространства  $V$  имеет раз мерность  $2^n$ . При этом*

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}.$$

*Базис пространства  $\Lambda^n(V)$  состоит из одного  $n$ -вектора*

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n.$$

**Доказательство** достаточно очевидно, поскольку число  $p$ -векторов  $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$  с  $i_1 < \dots < i_p$  равно числу сочетаний из  $n$  по  $p$ . Далее,  $\binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{p} = 0$  при  $p > n$  и

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n. \quad \square$$

Отметим ещё одно полезное свойство операции внешнего умножения. Именно,

$$Q \in \Lambda^q(V), \quad R \in \Lambda^r(V) \implies Q \wedge R = (-1)^{qr} R \wedge Q. \quad (10)$$

Имея в виду соотношение (10), говорят, что внешняя алгебра пространства  $V$  (обобщённо) *антикоммутативна*.

В силу билинейности операции  $\wedge$  для доказательства (10) достаточно рассмотреть случай

$$Q = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}, \quad R = \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r}.$$

Используя  $q$  раз соотношение (5), получаем

$$(\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}) \wedge \mathbf{e}_{j_k} = (-1)^q \mathbf{e}_{j_k} \wedge (\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_q}),$$

т.е.  $Q \wedge \mathbf{e}_{j_k} = (-1)^q \mathbf{e}_{j_k} \wedge Q$  независимо от того, совпадает  $j_k$  с каким-нибудь индексом  $i_s$  или нет. Таким образом,

$$\begin{aligned} Q \wedge R &= Q \wedge (\mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) = (-1)^q \mathbf{e}_{j_1} \wedge (Q \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) = \\ &= (-1)^{2q} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge (Q \wedge \mathbf{e}_{j_3} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_r}) = \dots = (-1)^{qr} R \wedge Q. \end{aligned}$$

Из соотношения (10) следует, что

$$P \wedge P = 0 \quad (11)$$

для любого  $p$ -вектора  $P$  при нечётном  $p$ . В случае чётного  $p$  соотношение (11) не обязано выполняться.

Пример 1. Пусть  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ ,  $n \geq 4$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) &= \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4) + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \neq 0. \end{aligned}$$

**3. Связь с определителями.** Используя операцию внешнего умножения, легко сформулировать критерий линейной независимости векторов и получить заново все свойства определителей.

Теорема 4. Пусть  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\mathbb{K}$ . Для линейной независимости  $p$  векторов  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p \neq 0.$$

**Доказательство.** Если векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  образуют зависимую систему, то один из них, скажем,  $\mathbf{x}_p$ , есть линейная комбинация остальных. При его замене этой комбинацией внешнее произведение  $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p$  разлагается в сумму внешних произведений  $\alpha_i \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_{p-1} \wedge \mathbf{x}_i$ ,  $i < p$ , содержащих каждое по два одинаковых множителя и, следовательно, равных нулю.

Если, напротив,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$  линейно независимы, то мы можем их принять за первые  $p$  векторов некоторого базиса. Тогда  $p$ -вектор  $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p$  будет элементом соответствующего базиса для  $\Lambda^p(V)$  и поэтому не равен нулю.  $\square$

Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис пространства  $V$  и  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  — любые  $n$  векторов из  $V$ . Имеем

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n x_j^i \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Согласно следствию теоремы 3

$$\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n = \Delta \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n,$$

где  $\Delta = \Delta(x_j^i)$  — некоторая скалярная функция векторов  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , или, что то же самое, функция столбцов матрицы  $(x_j^i)$ . Из свойств внешнего умножения немедленно следует, что эта функция линейна и кососимметрична, причём  $\Delta = 1$  для  $\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Теорема единственности определителя [ВА I, гл. 3, § 1, теорема 3] показывает, что  $\Delta = \det(x_j^i)$ . Таким образом,

$$\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_n = \det(x_j^i) \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n. \tag{12}$$

Соотношению (12) в любом  $p$ -мерном подпространстве  $U \subset V$  с двумя произвольными базисами  $(\mathbf{a}_i)$ ,  $(\mathbf{b}_i)$  отвечает соотношение

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p = \lambda \mathbf{b}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_p, \quad \lambda \in \mathbb{K}. \tag{12'}$$

**Замечание.** Из соотношения (12) без труда выводятся все свойства определителей. Более того, внешнюю алгебру можно положить в основу значительной части линейной алгебры, достигнув при этом наибольшей естественности в доказательствах ряда теорем. Для нас это несколько запоздалое замечание, о котором, впрочем, жалеть не стоит (всему своё время).

Обобщением соотношения (12) служит аналогичная формула для векторов  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p \in V$  в количестве  $p$  штук. Именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p &= \sum_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left( \sum_{\pi \in S_p} x_1^{i_{\pi 1}} \dots x_p^{i_{\pi p}} \mathbf{e}_{i_{\pi 1}} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_{\pi p}} \right) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{\pi \in S_p} x_1^{i_{\pi 1}} \dots x_p^{i_{\pi p}} (\varepsilon_\pi \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}) \right) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi x_1^{i_{\pi 1}} \dots x_p^{i_{\pi p}} \right) \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}. \end{aligned}$$

По формуле (3) из [ВА I, гл. 3, § 1] полного развертывания определителя имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) &:= \sum_{\pi \in S_p} \varepsilon_\pi x_1^{i_{\pi 1}} \dots x_p^{i_{\pi p}} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_p^{i_p} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_1^{i_p} & \dots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} = \det(x_j^{i_k}). \quad (13) \end{aligned}$$

Стало быть, справедлива

**Теорема 5.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — базис пространства  $V$  и

$$\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^n x_j^i \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq j \leq p,$$

— любые  $p$  векторов из  $V$ . Тогда

$$\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \Delta_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \quad (14)$$

где  $\Delta_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$  — определитель вида (13).

При  $p = n$  формула (14) превращается в (12). Заметим, что на  $T = \Delta_{i_1 \dots i_p}$  можно смотреть как на внешнюю  $p$ -форму, нормированную условием  $\Delta_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) = 1$ . В частности,  $\det = \Delta_{1 \dots n}$  — единственная относительно базиса  $(\mathbf{e}_i)$  внешняя  $n$ -форма на  $V$ , для которой  $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ .

**4. Векторные подпространства и  $p$ -векторы.** По-прежнему пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над  $\mathbb{K}$ .

Определение 3. *Аннулятором  $p$ -вектора  $P \neq 0$  из  $\Lambda^p(V)$  называется векторное подпространство*

$$\text{Ann } P = \{\mathbf{x} \in V \mid P \wedge \mathbf{x} = 0\}.$$

Условимся ещё называть  $p$ -вектор  $P$  *разложимым*, если

$$P = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p$$

для каких-нибудь векторов  $\mathbf{a}_i \in V$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ .

В том, что множество  $\text{Ann } P$  действительно есть векторное пространство, мы легко убеждаемся непосредственной проверкой:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \text{Ann } P \implies$$

$$\begin{aligned} \implies P \wedge (\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) &= \alpha_1 P \wedge \mathbf{x}_1 + \alpha_2 P \wedge \mathbf{x}_2 = 0 \implies \\ \implies \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 &\in \text{Ann } P \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть  $\text{Ann } P = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \rangle$  — подпространство размерности  $r$ . Тогда  $r \leq p$  и существует такой  $(p - r)$ -вектор  $Q$ , для которого

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_r \wedge Q.$$

Равенство  $r = p$  имеет место тогда и только тогда, когда  $p$ -вектор  $P$  разложим.

Доказательство. Считаем с самого начала, что

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r; \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Записав

$$P = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} P^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}, \quad (15)$$

мы в явном виде выражаем условия на аннулятор:

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} P^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (16)$$

Если  $j$  совпадает с одним из  $i_k$ , то  $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j = 0$ , поэтому в левой части равенства (16) остаются слагаемые с  $i_1 \neq j, \dots, i_p \neq j$ . Так как  $(p + 1)$ -векторы  $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \wedge \mathbf{e}_j$  с различными наборами  $i_1, \dots, i_p$  линейно независимы, то условие (16) приводит к тому, что  $P^{i_1 \dots i_p} = 0$  для всех наборов индексов, не содержащих целиком отрезка  $1, 2, \dots, r$ . По условию  $P \neq 0$ , поэтому  $r \leq p$  и

$$\begin{aligned} P &= \sum P^{12\dots r i_{r+1} \dots i_p} \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} = \\ &= \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_r \wedge Q, \quad (17) \end{aligned}$$

где

$$Q = \sum P^{12\dots r i_{r+1}\dots i_p} \mathbf{e}_{r+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p}$$

— некоторый  $(p - r)$ -вектор.

Если теперь  $r = p$ , то для  $P$  получается выражение  $P = \lambda \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p$ , означающее, что  $P$  — разложимый  $p$ -вектор. Обратно: если  $P \neq 0$  разложим, т.е.

$$P = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p,$$

то  $\mathbf{a}_i \in \text{Ann } P$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ . Стало быть,  $\dim \text{Ann } P \geq p$ , а так как по уже доказанному всегда  $\dim \text{Ann } P \leq p$ , то  $\dim \text{Ann } P = p$ .  $\square$

**Теорема 7.** Пусть  $U = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \rangle$ ,  $W = \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p \rangle$  — два подпространства в  $V$  одинаковой размерности  $p$ . Для совпадения  $U$  и  $W$  необходимо и достаточно, чтобы были пропорциональными  $p$ -векторы  $P = \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p$  и  $Q = \mathbf{b}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_p$ .

**Доказательство.** Как мы видели (теорема 6),  $U = \text{Ann } P = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p \rangle$ . Если также  $\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p \rangle = \text{Ann } P$ , то в силу (12') будем иметь  $P = \lambda Q$ . Обратно: если  $P = \lambda Q$ , то

$$U = \text{Ann } P = \text{Ann } Q = W. \quad \square$$

Уточнением теорем 6 и 7 служит

**Теорема 8.** Пусть  $U = \text{Ann } P$ ,  $W = \text{Ann } Q$ , где  $P$  — разложимый  $p$ -вектор и  $Q$  — разложимый  $q$ -вектор. Тогда:

- 1)  $U \supseteq W \iff P = Q \wedge R$  ( $R$  — некоторый  $(p - q)$ -вектор);
- 2)  $U \cap W = 0 \iff P \wedge Q \neq 0$ .

Если  $U \cap W = 0$ , то  $U \oplus W = \text{Ann}(P \wedge Q)$ .

**Доказательство.** Утверждение 1) содержится в теореме 6. Если, далее,  $P = \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_p$ ,  $Q = \mathbf{b}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_q$  и  $P \wedge Q \neq 0$ , то векторы  $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq j \leq q$ , линейно независимы и составляют базис пространства  $U \oplus W$ . Если же  $P \wedge Q = 0$ , то существует нетривиальная линейная зависимость

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_p \mathbf{a}_p + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \beta_q \mathbf{b}_q = 0,$$

из которой следует, что  $U \cap W \neq 0$ .  $\square$

**5. Условия разложимости  $p$ -векторов.** Теоремы 6–8 указывают на особую роль разложимых  $p$ -векторов. Встречаются они и в других вопросах. Условия разложимости  $p$ -вектора  $P \in \Lambda^p(V)$  могут быть записаны в виде алгебраических соотношений на его компоненты  $P^{i_1\dots i_p}$  (см. (15)). В самом деле, пусть  $\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i$  — произвольный вектор. Произведение  $P \wedge \mathbf{x}$  является  $(p + 1)$ -вектором с координатами — линейными формами от  $x^1, \dots, x^n$ . Число компонент  $(p + 1)$ -вектора равно  $\binom{n}{p+1}$ . Поэтому условие  $\mathbf{x} \in \text{Ann } P$  равносильно системе из  $\binom{n}{p+1}$  однородных уравнений с  $n$  неизвестными. Пространство решений этой системы, совпадающее с  $\text{Ann } P$ , имеет по теореме 6 размерность  $r \leq p$ , причём  $r = p$  тогда и только тогда,

когда  $P$  разложим. Другими словами,  $P$  разложим в точности тогда, когда ранг матрицы системы не превосходит  $n - p$ , т.е. когда все миноры порядка  $n - p + 1$  равны нулю. Это и есть нужное условие разложимости.

**Теорема 9.** *Всякий  $(n - 1)$ -вектор  $P \neq 0$  разложим.*

**Доказательство.** Согласно (12)

$$P \wedge \mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n, \quad f(\mathbf{x}) \in \mathbb{K},$$

где  $f$  — скалярная функция, а  $(\mathbf{e}_i)$  — некоторый базис в  $V$ . Из свойств операции внешнего умножения следует, что  $f$  — линейная функция. Кроме того,  $\text{Ann } P = \text{Ker } f$  и, следовательно,  $\dim \text{Ann } P = \dim \text{Ker } f \geq n - 1$ . По теореме 6 имеем  $\dim \text{Ann } P \leq n - 1$ , так что  $f \neq 0$ . Поэтому  $\dim \text{Ker } f \leq n - 1$  и, стало быть,  $\dim \text{Ann } P = n - 1$ . Снова по теореме 6 это равенство влечёт разложимость  $P$ .  $\square$

**Пример 2.** Пусть  $V$  — трёхмерное евклидово векторное пространство с ортонормированным базисом  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Если  $P = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$ , то

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} = (\mathbf{c} | \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3,$$

где  $(\mathbf{c} | \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ . Можно проверить, что  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  есть векторное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Понятно, что  $P \wedge P = 0$  для разложимого  $p$ -вектора  $P$ . Оказывается, что в случае бивекторов ( $p = 2$ ) условия  $P \wedge P = 0$  достаточно для разложимости.

**Теорема 10.** *Бивектор*

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq n} P^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \quad (18)$$

*разложим тогда и только тогда, когда  $P \wedge P = 0$ .*

**Доказательство.** Нужно доказать, что если  $P \wedge P = 0$ , то  $P$  разложим. Рассуждаем по индукции относительно  $n = \dim V$ . При  $n = 3$  утверждение следует из теоремы 9.

Соберём в (18) все члены, содержащие  $\mathbf{e}_1$ . Они дадут выражение вида  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a}$ . Положим ещё

$$Q = \sum_{2 \leq i < j \leq n} P^{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j. \quad (19)$$

Будем иметь

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + Q,$$

причём можно считать, что  $\mathbf{a}$  есть линейная комбинация векторов  $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  и  $Q \neq 0$ . Из условия  $P \wedge P = 0$  следует что

$$(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a}) \wedge Q + Q \wedge (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a}) + Q \wedge Q = 0.$$

При помощи соотношения (10) получаем отсюда

$$2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge Q + Q \wedge Q = 0. \quad (20)$$

Все 4-векторы в левой части (20) представим через базисные векторы  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_l$ . В  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge Q$  входит множитель  $\mathbf{e}_1$ , а в  $Q$ , как видно из (19), входят только члены  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$  с  $i, j \geq 2$ . Поэтому в  $Q \wedge Q$  множитель  $\mathbf{e}_1$  не встретится. Следовательно, равенство (20) распадается на два:

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge Q = 0, \quad Q \wedge Q = 0. \quad (21)$$

Но  $Q \in \Lambda^2(U)$ , где  $U = \langle \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ . Поэтому для  $Q$  выполнено предположение индукции, и он оказывается разложимым:  $Q = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ . Подставив это выражение в первое равенство (21), получим

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0. \quad (22)$$

Из четырёх сомножителей этого произведения линейно зависимыми могут быть только  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in U$ . Если  $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ , то  $P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = = (\mathbf{e}_1 - \lambda \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a}$ , и всё доказано. На этом основании считаем  $\mathbf{e}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  линейно независимыми. По теореме 4 имеем  $R = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$ , а по теореме 3 в таком случае  $\dim \text{Ann } R = 3$ . Более точно,  $\text{Ann } R = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Но в соответствии с (22) и  $\mathbf{c} \in \text{Ann } R$ . Значит,  $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ . В таком случае

$$Q = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

и

$$P = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + Q = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{b}) \wedge \mathbf{a}. \quad \square$$

*Следствие. Бивектор*

$$\begin{aligned} P = P^{12} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + P^{13} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + P^{14} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + \\ + P^{23} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + P^{24} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + P^{34} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

разложим тогда и только тогда, когда его координаты  $P^{ij}$  связаны соотношением

$$P^{12}P^{34} - P^{13}P^{24} + P^{14}P^{23} = 0. \quad (23)$$

Пусть теперь  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$  — трёхмерное проективное пространство, порождённое четырёхмерным вещественным векторным пространством  $V$ . Напомним, что прямые в  $\mathbb{P}^3$  соответствуют двумерным плоскостям в  $V$ . По теореме 6 любая плоскость  $U \subset V$  есть аннулятор разложимого бивектора  $P$ , определённого с точностью до скаляра. Другими словами, координаты  $(P^{12} : P^{13} : \dots : P^{34})$  бивектора  $P$  можно рассматривать как однородные координаты прямой линии в  $\mathbb{P}^3$  (*плюккеровы координаты прямой*). Эти координаты в количестве шести штук определяют также точку в пятимерном проективном пространстве  $\mathbb{RP}^5$ . Мы видим, что прямые в проективном трёхмерном пространстве взаимно однозначно соответствуют точкам квадрики, определённой уравнением (23) в пятимерном проективном пространстве.

## УПРАЖНЕНИЯ

**1.** Пусть  $V = \mathbb{R}^n$  — вещественное пространство, натянутое на векторы-столбцы  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ , и  $B$  — произвольный вектор-столбец. Показать, что компоненты  $\lambda_k$  решения векторного уравнения

$$\sum_k \lambda_k A^{(k)} = B$$

даются соотношением

$$(A^{(1)} \wedge \dots \wedge A^{(n)})\lambda_k = A^{(1)} \wedge \dots \wedge A^{(k-1)} \wedge B \wedge A^{(k+1)} \wedge \dots \wedge A^{(n)}.$$

Вывести отсюда формулы Крамера [ВА I, гл. 3, § 3].

**2.** Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $\mathfrak{K}$  характеристики нуль,

$$Z = \sum_{k=0}^n Z_k \quad (Z_k \in \Lambda^k(V))$$

— элемент внешней алгебры  $\Lambda(V)$ ,

$$\mathcal{Z}(\Lambda(V)) = \{Z \mid Z \wedge X = X \wedge Z \quad \forall X \in \Lambda(V)\}$$

— центр внешней алгебры.

Показать:

а) для обратимости  $Z$ , т.е. для существования  $Z^{-1}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $Z_{(0)} \neq 0$ ;

б)  $Z \in \mathcal{Z}(\Lambda(V)) \iff \begin{cases} Z_{2i-1} = 0 \text{ при } i = 1, \dots, m, \text{ если } n = 2m, \\ Z_{2i-1} = 0 \text{ при } i = 1, \dots, m-1, \text{ если } n = 2m-1. \end{cases}$

Как переформулировать указанные условия в случае бесконечномерного пространства  $V$ ?

**3.** Пусть  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Его  $p$ -й внешней степенью называется линейный оператор

$$\wedge^p \mathcal{A} : \Lambda^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V),$$

определенный на разложимых  $p$ -векторах формулой

$$(\wedge^p \mathcal{A})(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) \wedge \dots \wedge \mathcal{A}(\mathbf{x}_p).$$

Это, очевидно, есть знакопеременное полилинейное отображение. При фиксированном базисе пространства  $V$  можно говорить о матрице  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  и о её  $p$ -й внешней степени  $\wedge^p A$ . Показать, что

$$\det \wedge^p A \cdot \det \wedge^{n-p} A = (\det A)^{\binom{n}{p}}.$$

**4.** Пусть на векторном пространстве  $V$  задана невырожденная квадратичная форма  $q$ . Пусть  $f$  — билинейная форма, полярная к  $q$ . Тогда на  $\Lambda^p(V)$  можно ввести квадратичную форму  $q^{\wedge p}$  формулами

$$q^{\wedge 0} = 1, \quad q^{\wedge p}(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p) = \begin{vmatrix} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_1) & \dots & f(\mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p) \end{vmatrix}.$$

Доказать, что полученное продолжение формы  $q$  на алгебру  $\Lambda(V)$  является невырожденной квадратичной формой.

**5.** Ориентацией  $n$ -мерного евклидова векторного пространства  $(V, (*|*))$  называется элемент  $d \in \Lambda^n(V)$ , для которого  $(d|d)^{\wedge n} = 1$ .

Пусть, далее,  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ ,  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$  — два базиса в  $V$ . Говорят, что эти базисы *одинаково ориентированы*, если определитель матрицы перехода от одного из них к другому положителен. Понятно, что порядок базисных векторов при этом важен. Ясно также, что множество упорядоченных базисов пространства  $V$  разбивается в точности на два класса, состоящих из одинаково ориентированных базисов, тогда как базисы из разных классов ориентированы по-разному (или противоположно). Выбор одного из этих классов называется *ориентацией* пространства  $V$ .

Существует ли какая-либо связь между двумя определениями ориентации?

# ГЛАВА 7

## ПРИЛОЖЕНИЯ

---

Материал, собранный в этой главе и рассчитанный на обширную категорию читателей, обычно не излагается целиком в основном курсе линейной алгебры и геометрии по тривиальной причине отсутствия аудиторного времени. Вместе с тем полезно ознакомиться хотя бы с некоторыми приложениями математического аппарата, развитого в основном тексте. Собственный студенческий опыт автора показывает, что такого рода выходы за пределы обязательного минимума развивают естественное любопытство. На тот же эффект расчетан и последний параграф, где приведены некоторые нерешённые задачи. На самом деле их гораздо больше: они постоянно возникают в процессе творческой деятельности любого математика.

### § 1. Норма и функции линейного оператора

**1. Норма линейного оператора.** Пусть  $V$  — нормированное (в смысле определений из гл. 3, § 2, п. 5), не обязательно конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ . Если  $\|\cdot\|$  — норма на  $V$ , то естественно поинтересоваться, будет ли нормированным векторное пространство  $\mathcal{L}(V)$  линейных операторов на  $V$ . Существуют по крайней мере два эквивалентных способа введения нормы на  $\mathcal{L}(V)$ .

**Определение 1.** Назовём *нормой*  $\|\mathcal{A}\|_s$  *линейного оператора*  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  точную верхнюю грань значений функции  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$  на векторах  $\mathbf{v} \in V$  единичной длины:

$$\|\mathcal{A}\|_s = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|. \quad (1)$$

Вообще говоря, существование  $\|\mathcal{A}\|_s$  не гарантировано.

**Пример 1.** На пространстве  $V = \mathbb{R}[t]$  всех многочленов с нормой  $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt}$  рассмотрим оператор дифференцирования  $\mathcal{D}_t$ . Имеем

$$\|\sqrt{2n+1} t^n\| = \sqrt{(2n+1) \int_0^1 t^{2n} dt} = 1.$$

Интересующая нас величина

$$\|\mathcal{D}_t(\sqrt{2n+1} t^n)\| = \|n \sqrt{2n+1} t^{n-1}\| = n \sqrt{2n+1} \sqrt{\int_0^1 t^{2n-2} dt} = n \sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$$

неограниченно растёт вместе со степенью  $n$  многочлена.

**Теорема 1.** Если  $V$  — конечномерное векторное пространство, то точная верхняя грань  $\|\mathcal{A}\|_s$  существует.

**Доказательство.** По определению нормы и по определению линейного оператора функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$ , будучи суперпозицией двух

непрерывных функций  $\mathbf{v} \mapsto \mathcal{A}\mathbf{v}$  и  $\mathcal{A}\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$ , является непрерывной функцией координат  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  вектора  $\mathbf{v}$ ,  $n = \dim V$ . По известным теоремам Больцано—Вейерштрасса непрерывная функция  $\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$  на ограниченном и замкнутом множестве (у нас на  $(n - 1)$ -мерной сфере  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ) является ограниченной функцией и, стало быть,  $\|\mathcal{A}\|_s$  существует, поскольку ограниченное множество всегда имеет точную верхнюю грань. Более того, на сфере  $\|\mathbf{v}\| = 1$  найдётся точка (вектор  $\mathbf{v}_0$ ), в которой  $\|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$  достигает своей верхней грани.  $\square$

Таким образом, доказано больше:  $\|\mathcal{A}\|_s = \|\mathcal{A}\mathbf{v}_0\|$  хотя бы для одного единичного вектора  $\mathbf{v}_0 \in V$ . Вектор с этим свойством иногда называют *максимальным вектором линейного оператора*  $\mathcal{A}$ .

Конечномерное пространство  $\mathcal{L}(V)$ , наделённое нормой (1), становится нормированным пространством (очевидно, банаховым) в обычном смысле этого слова. В самом деле,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|_s = 0 &\iff \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathcal{A}\mathbf{v} = 0 \text{ (для } \mathbf{v} \text{ с } \|\mathbf{v}\| = 1\text{)} \iff \\ &\iff \mathcal{A}\mathbf{v} = 0 \text{ (для всех } \mathbf{v} \in V\text{)} \iff \mathcal{A} = \mathcal{O}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\|\lambda\mathcal{A}\|_s = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\lambda\mathcal{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = |\lambda| \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\|_s,$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\|_s &= \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{v}\| = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v} + \mathcal{B}\mathbf{v}\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} (\|\mathcal{A}\mathbf{v}\| + \|\mathcal{B}\mathbf{v}\|) = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| + \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{B}\mathbf{v}\| = \|\mathcal{A}\|_s + \|\mathcal{B}\|_s. \end{aligned}$$

Выполнены, следовательно, все свойства, входящие в определение нормы. Далее, имеет место неравенство

$$\|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|_s \cdot \|\mathbf{v}\| \tag{2}$$

для каждого вектора  $\mathbf{v} \in V$ . Действительно,

$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| = 1, \quad \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathcal{A}\mathbf{v} \right\| = \left\| \mathcal{A} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\| \leqslant \|\mathcal{A}\|_s.$$

Неравенство (2) можно положить в основу другого определения нормы.

**Определение 2.** Линейный оператор  $\mathcal{A}$  на векторном пространстве  $V$  с нормой  $\|\cdot\|$  называется *ограниченным*, если существует неотрицательное вещественное число  $N$  такое, что

$$\|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leqslant N \cdot \|\mathbf{v}\| \tag{3}$$

для каждого вектора  $\mathbf{v} \in V$ . Нижняя грань  $\inf N$  множества всех констант, для которых справедливо неравенство (3), называется *нормой* оператора  $\mathcal{A}$  и обозначается символом  $\|\mathcal{A}\|_i$ .

Приведённый выше пример 1 показывает, что оператор  $\mathcal{D}_t$  неограниченный. Вместе с тем в конечномерном случае из неравенства (2) вытекает неравенство (3) с  $N \leq \|\mathcal{A}\|_s$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** *Каждый линейный оператор  $\mathcal{A}$  на конечномерном нормированном векторном пространстве ограничен.*

Мы видели, что  $\|\mathcal{A}\|_i \leq \|\mathcal{A}\|_s$ . С другой стороны,

$$\|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathcal{A}\|_i \cdot \|\mathbf{v}\| \implies \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathcal{A}\|_i \quad \text{при } \|\mathbf{v}\| = 1,$$

откуда  $\|\mathcal{A}\|_s \leq \|\mathcal{A}\|_i$ . Таким образом,  $\|\mathcal{A}\|_i = \|\mathcal{A}\|_s$ , т.е. обе нормы совпадают. В дальнейшем норму на  $V$  и норму линейного оператора  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  будем обозначать одним и тем же символом  $\|\cdot\|$ . Это не может привести к недоразумению, поскольку для векторов и операторов у нас используются различные буквы.

**Пример 2.** Дополним пример 1, рассмотрев на пространстве  $\mathbb{R}[t]$  оператор  $\mathcal{F}_t$  умножения на  $t$ . Утверждается, что он ограничен. Действительно,

$$\|\mathcal{F}\mathbf{f}\| = \sqrt{\int_0^1 (tf(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 t^2 f(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} = \|f\|,$$

откуда  $\|\mathcal{F}_t\| \leq 1$ .

Заметим, что норма единичного оператора  $\mathcal{E}: V \rightarrow V$  равна 1, поскольку  $\|\mathcal{E}\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$  для любого вектора  $\mathbf{v} \in V$ . Менее тривиальный пример доставляет диагонализируемый оператор  $\mathcal{A}$ , действующий на  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $V$  с нормой  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v} | \mathbf{v})}$  и заданный соотношениями

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — ортонормированный базис в  $V$ . Без ограничения общности считаем

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Тогда для любого вектора  $\mathbf{v} = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i$  имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|^2 &= (\mathcal{A}\mathbf{v} | \mathcal{A}\mathbf{v}) = \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (\mathcal{A}\mathbf{e}_i | \mathcal{A}\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (\lambda_i \mathbf{e}_i | \lambda_j \mathbf{e}_j) = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i^2 \leq \\ &\leq \lambda_1^2 \sum_i \alpha_i^2 = \lambda_1^2 \cdot \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned}$$

откуда  $\|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leq |\lambda_1| \cdot \|\mathbf{v}\|$  и, следовательно,  $\|\mathcal{A}\| \leq |\lambda_1|$ . Так как  $\|\mathcal{A}\mathbf{e}_1\| = \|\lambda_1 \mathbf{e}_1\| = |\lambda_1|$ , то на самом деле  $\|\mathcal{A}\| = |\lambda_1|$  и  $\mathbf{e}_1$  — максимальный вектор для  $\mathcal{A}$ .

Дополнительное важное свойство нормы оператора связано с её поведением относительно композиции операторов.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — два ограниченных линейных оператора на нормированном векторном пространстве  $V$ . Тогда  $\mathcal{AB}$  — ограниченный оператор и

$$\|\mathcal{AB}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|. \quad (4)$$

**Доказательство.** Действительно, в силу неравенства (2) для любого вектора  $\mathbf{v} \in V$  имеем

$$\|(\mathcal{AB})\mathbf{v}\| = \|\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{v})\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\mathbf{v}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \cdot \|\mathbf{v}\|,$$

откуда вытекает ограниченность  $\mathcal{AB}$ , причём согласно второму определению нормы оператора выполнено неравенство (4).  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  — ограниченный линейный оператор. Тогда

$$\|\mathcal{A}^m\| \leq \|\mathcal{A}\|^m.$$

Выпишем ещё раз свойства нормы на  $\mathcal{L}(V)$ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\| &= \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = \inf\{N \mid \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| \leq N \cdot \|\mathbf{v}\|\}, \\ \|\lambda\mathcal{A}\| &= |\lambda| \cdot \|\mathcal{A}\|, \\ \|\mathcal{A}\| &= 0 \iff \mathcal{A} = 0, \\ \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| &\leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|, \\ \|\mathcal{A}^m\| &\leq \|\mathcal{A}\|^m. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенство  $\|\mathcal{AB}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$  может быть строгим. Если, например,  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{P}_x$  — проекция точки плоскости  $\mathbb{R}^2$  на координатную ось  $x$ ,  $\mathcal{P}_y$  — проекция на координатную ось  $y$ , то

$$\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y = \mathcal{P}_y \mathcal{P}_x = \mathcal{O},$$

в то время как  $\|\mathcal{P}_x\| = \|\mathcal{P}_y\| = 1$ .

**2. Функции линейных операторов (матриц).** Ранее мы уже встречались с необходимостью рассматривать многочлены  $f(\mathcal{A})$  от операторов. Наличие нормы на  $\mathcal{L}(V)$  позволяет непосредственно перенести на функции со значениями в  $V$  (линейные операторы) теорию функциональных рядов. При этом существенна полнота пространства  $\mathcal{L}(V)$ . Из сходимости ряда  $\sum_{i \geq 0} \mathcal{A}_i$ , составленного из линейных операторов  $\mathcal{A}_i$ , вытекает, что если  $\mathcal{A}$  — сумма ряда, то каждому выбору базиса  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  в  $V$  отвечает матрица  $A = \sum_{i \geq 0} A_i$  оператора  $\mathcal{A}$ , являющаяся суммой матриц  $A_i$  операторов  $\mathcal{A}_i$ . Обратно: каждому сходящемуся ряду матриц можно сопоставить сходящийся ряд линейных операторов.

Как и в случае обычных числовых функций, особый интерес представляют функции операторов, представимые в виде степенных ряд-

дов. Из определения сходимости по норме и из так называемого критерия Вейерштрасса вытекает, что ряд  $\sum_{i \geq 0} \alpha_i \mathcal{A}^i$  сходится абсолютно и равномерно на множестве

$$\Omega \subset \mathcal{L}(V), \quad \Omega = \{\mathcal{A} \mid \|\mathcal{A}\| \leq a\},$$

если сходится числовой ряд  $\sum_{i \geq 0} \alpha_i a^i$ .

**Пример 3.** Если  $\mathcal{A}$  — nilпотентный оператор ( $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ ), то оператор  $\mathcal{E} - \mathcal{A}$  обратим, причём

$$(\mathcal{E} - \mathcal{A})^{-1} = \mathcal{E} + \mathcal{A} + \dots + \mathcal{A}^{m-1},$$

в чём легко убедиться непосредственной проверкой. Пусть теперь  $V$  — произвольное банахово пространство и  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  — линейный оператор с нормой  $\|\mathcal{A}\| < 1$ . Тогда снова оператор  $\mathcal{E} - \mathcal{A}$  будет обратимым в  $\mathcal{L}(V)$  с  $(\mathcal{E} - \mathcal{A})^{-1} = \sum_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$ . Действительно, сходимость ряда  $\sum_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$  следует из сходимости геометрической прогрессии  $\sum_{i \geq 0} \|\mathcal{A}\|^i$  (под  $\mathcal{A}^0$  понимается единичный оператор  $\mathcal{E}$ ), мажорирующей ряд из норм  $\sum_{i \geq 0} \|\mathcal{A}^i\|$ . Пусть  $\mathcal{B}$  — сумма ряда  $\sum_{i \geq 0} \mathcal{A}^i$ . Тогда  $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}$  — сумма ряда  $\sum_{i \geq 1} \mathcal{A}^i$ . Это означает, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = (\mathcal{E} - \mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{E},$$

т.е.  $\mathcal{B}$  — оператор, обратный к  $\mathcal{E} - \mathcal{A}$ .

**4. Экспонента.** Безусловно, наиболее важным рядом, сходящимся нормально для каждого линейного оператора  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$  ( $V$  — конечномерное нормированное пространство или произвольное банахово пространство, если  $\mathcal{A}$  — ограниченный оператор), является ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{A}^k$ . Его сходимость обеспечивается тем, что ряд из норм  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \|\mathcal{A}^k\|$  мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \|\mathcal{A}\|^k = \exp \|\mathcal{A}\|$$

— обычной экспоненциальной функцией вещественной переменной.

**Определение 3.** Сумму ряда  $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \mathcal{A}^k$  (соответственно  $\sum_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$ ) обозначают через  $\exp \mathcal{A}$  (соответственно  $\exp A$ ) и называют *экспонентой линейного оператора  $\mathcal{A}$*  (*экспонентой матрицы  $A$* ). Вместо  $\exp \mathcal{A}$  часто пишут  $e^{\mathcal{A}}$ . В силу равномерной сходимости ряда  $\sum \frac{1}{k!} \mathcal{A}^k$  на множестве  $\Omega = \{\mathcal{A} \mid \|\mathcal{A}\| \leq a\}$  функция  $\mathcal{X} \mapsto \exp \mathcal{X}$  непрерывна и является отображением  $\mathcal{L}(V)$  в себя.

Вот прямое доказательство в несколько строк существования экспоненты  $\exp A$  для  $n \times n$ -матрицы  $A$ . Обозначим

$$(a_{ij}) = A, \quad \left( a_{ij}^{(s)} \right) = A^s.$$

Пусть  $m$  — верхняя граница для абсолютных значений коэффициентов  $a_{ij}$ :  $|a_{ij}| \leq m$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Пусть мы уже знаем, что

$$\left| a_{ij}^{(s)} \right| \leq (nm)^s, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (*)$$

Тогда

$$\left| a_{ij}^{(s+1)} \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(s)} a_{kj} \right| \leq n (nm)^s m = (nm)^{s+1},$$

т.е. неравенство  $(*)$  справедливо для всех  $s$ . Это означает, что *каждый* из  $n^2$  числовых рядов  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} a_{ij}^{(s)}$  сходится равномерно на множестве всех матриц с максимумом абсолютных значений коэффициентов, не превосходящих  $m$ . Ряд

$$E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots,$$

являющийся объединением  $n^2$  равномерно сходящихся числовых рядов, сам равномерно сходится.

Пример 4. Пусть  $V$  — пространство вещественных многочленов степени  $\leq n-1$  от переменной  $t$ ,  $\mathcal{D}_t$  — оператор дифференцирования. Известная формула Тейлора для многочленов гласит, что если  $f(t+a)$  — многочлен степени  $\leq n-1$ , получающийся из  $f(t)$  подстановкой  $t+a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , вместо  $t$ , то

$$f(t+a) = f(t) + \frac{a}{1!} f^{(1)}(t) + \dots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t).$$

То же самое можно переписать в виде

$$f(t+a) = \left\{ \mathcal{E} + \frac{1}{1!} a \mathcal{D}_t + \frac{1}{2!} (a \mathcal{D}_t)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} (a \mathcal{D}_t)^{n-1} \right\} f(t) = (\exp a \mathcal{D}_t) f(t).$$

Ввиду нильпотентности оператора  $a \mathcal{D}_t$  на  $V$  ряд для  $\exp a \mathcal{D}_t$  обрывается и выражается конечной суммой. Это общее свойство нильпотентных операторов. В нашем случае  $\exp a \mathcal{D}_t = \mathcal{H}_a$  — оператор сдвига на  $a \in \mathbb{R}$ , переводящий  $f(t)$  в  $f(t+a)$ . В его линейности можно убедиться непосредственной проверкой.

Как мы знаем, в базисе

$$\left( \mathbf{e}_i = \frac{t^i}{(n-i)!} \mid 1 \leq i \leq n \right)$$

оператору  $\mathcal{D}_t$  отвечает матрица  $D = J_n$  — верхняя клетка Жордана порядка  $n$ , поэтому матрицей оператора  $\mathcal{H}_a$  в этом базисе будет

$$H_a = \exp a J_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2/2! & \dots & a^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-3}/(n-3)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в определении экспоненты мы считали основное поле вещественным или комплексным. Как это принято в теории функций комплексной переменной, полагаем

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Содержащуюся здесь формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

можно получить, воспользовавшись рядом

$$e^{iy} = \sum_{k \geq 0} \frac{(iy)^k}{k!} = a(y) + ib(y)$$

и разложениями функций  $\cos y, \sin y$  в степенные ряды от вещественной переменной  $y$ .

**Пример 5.** Комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  с точки зрения векторных пространств над полем  $\mathbb{C}$  лучше называть *комплексной прямой*  $\mathbb{C}^1$ , изображаемой вещественной плоскостью  $\mathbb{R}^2$ . В базисе  $(\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = i)$  матрица  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}: \mathbf{v} \mapsto (x + iy)\mathbf{v}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Из определения экспоненты комплексного числа следует, что

$$\exp A = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

Вывод:  $\exp \mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A}$  — оператор умножения на комплексное число  $z = x + iy$ , есть композиция поворота на угол  $y$  и растяжения в  $e^x$  раз.

Пользуясь тем, что в произведении абсолютно сходящихся рядов члены получающегося ряда можно переставлять, докажем следующее полезное утверждение.

**Теорема 4.** Если матрицы  $A$  и  $B$  размера  $n \times n$  перестановочны, то

$$(\exp A)(\exp B) = \exp(A + B).$$

**Доказательство.** Имеем

$$(\exp A)(\exp B) =$$

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} A^s \right) \left( \sum_{t \geq 0} \frac{1}{t!} B^t \right) = \sum_{s,t \geq 0} A^s B^t = \sum_{k \geq 0} \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!(k-s)!} A^s B^{k-s} = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{s=0}^k \frac{k!}{s!(k-s)!} A^s B^{k-s} \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} A^s B^{k-s} \right) = \\ &\quad = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (A + B)^k = \exp(A + B). \end{aligned}$$

Здесь мы применили формулу бинома Ньютона

$$\sum_{s=0}^k \binom{k}{s} A^s B^{k-s} = (A + B)^k,$$

справедливую в любом коммутативном кольце и, в частности, в кольце  $\mathbb{Z}[A, B]$ .

Законность почлененного умножения наших рядов вытекает из редукции доказательства к числовому случаю. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{2K} \frac{(A+B)^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^K \frac{B^k}{k!} \right) + R_K,$$

где  $R_K = \sum \frac{A^s}{s!} \frac{B^t}{t!}$  — сумма по всем парам  $(s, t)$  с  $\max(s, t) > K$ ,  $(s+t) \leqslant 2K$ . Число таких пар равно  $K(K+1)$ . Если  $m$  — верхняя граница для модулей коэффициентов матриц  $A$  и  $B$ , то коэффициенты произведения  $\frac{A^s}{s!} \frac{B^t}{t!}$  не превосходит

$$\frac{n(nm)^s}{s!} \frac{n(nm)^t}{t!} \leqslant \frac{(nm_0)^{2K}}{K!},$$

где  $m_0$  — некоторое положительное число. Значит, коэффициенты матрицы  $R_K$  по абсолютной величине не превосходят

$$\frac{K(K+1)(nm_0)^{2K}}{K!},$$

т.е.  $R_K$  стремится к нулю при неограниченном возрастании  $K$ . Это и даёт нужную формулу.  $\square$

Для нулевой матрицы  $O$  имеем по определению  $\exp O = E$ . Так как матрицы  $A$  и  $-A$ , очевидно, перестановочны, то согласно теореме 4

$$\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp O = E,$$

откуда мы извлекаем

**Следствие.** Пусть  $A$  — произвольная  $n \times n$ -матрица (вещественная или комплексная). Тогда  $\exp A$  — невырожденная матрица и

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A).$$

**4. Однопараметрические подгруппы линейной группы.** Функция  $\exp$  интересна во многих отношениях, в том числе с теоретико-групповой точки зрения, как это видно из следующего простого утверждения.

**Теорема 5. Соответствие**

$$\varphi_A : t \mapsto \exp(tA), \quad t \in \mathbb{R},$$

*определенное для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , есть непрерывное гомоморфное отображение аддитивной группы вещественных чисел  $\mathbb{R}^+$  в  $GL_n(\mathbb{K})$ .*

**Доказательство.** В самом деле, перефразируя следствие теоремы 4, мы можем утверждать, что  $\varphi_A(t) \in GL_n(\mathbb{K})$ , причём

$$(\varphi_A(t))^{-1} = \varphi_A(-t).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi_A(s) \cdot \varphi(t) &= \\ &= \exp(sA) \cdot \exp(tA) = \exp(sA + tA) = \exp((s+t)A) = \\ &= \varphi_A(s+t), \end{aligned}$$

т.е. действительно  $\varphi_A$  — гомоморфизм  $\mathbb{R}^+ \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$ . Его непрерывность заложена в определении экспоненты.  $\square$

**Определение 4.** Обычно множество  $\{\exp(tA) \mid t \in \mathbb{R}\}$  называют *однопараметрической группой линейных операторов* на  $V$  (при фиксированном базисе — однопараметрической группой матриц).

**Пример 6.** Если  $A = a$  — вещественное число, то  $\{\exp(ta) \mid t \in \mathbb{R}\}$  — группа вещественных чисел по умножению. Если  $A = \sqrt{-1} = i$ , то  $\{\exp(ti) \mid t \in \mathbb{R}\}$  — окружность.

Чтобы иметь более определённое суждение о природе матрицы  $\exp A$  (оператора  $\exp A$ ), мы докажем следующее утверждение.

**Теорема 6.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — характеристические корни матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , рассматриваемые со своими кратностями (т.е.  $\lambda_i$  не обязательно различны).

Тогда характеристическими корнями матрицы  $\exp A$  являются

$$\exp \lambda_1, \exp \lambda_2, \dots, \exp \lambda_n.$$

**Доказательство.** Как мы знаем (теорема 1 из § 4 гл. 2), любая комплексная матрица подобна треугольной. В частности, для нашей матрицы  $A$  найдётся невырожденная матрица  $B$  такая, что  $A = B^{-1}TB$ , где  $T$  — (верхняя) треугольная матрица. Мы знаем также, что матрицы  $A$  и  $T$  имеют одни и те же характеристические корни. Так как характеристическими корнями треугольной матрицы являются её коэффициенты, стоящие на главной диагонали, то без ограничения общности считаем  $\lambda_i$  упорядоченными таким образом, что

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{array} \right\|.$$

Имеем

$$T^k = \begin{vmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{vmatrix},$$

откуда

$$\exp T = \begin{vmatrix} \exp \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \exp \lambda_2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \exp \lambda_n \end{vmatrix},$$

т.е.  $\exp \lambda_1, \dots, \exp \lambda_n$  — характеристические корни матрицы  $\exp T$ . Осталось заметить, что  $\exp A = B^{-1} \cdot \exp T \cdot B$  (см. упр. 7.1.1), а поэтому  $\exp \lambda_i$  будут также характеристическими корнями матрицы  $\exp A$ .  $\square$

**Следствие.** Для любой матрицы  $A$  справедливо соотношение

$$\det \exp A = \exp(\operatorname{tr} A). \quad (6)$$

**Доказательство.** В самом деле, определитель матрицы равен произведению всех её характеристических корней, а след — сумме характеристических корней, так что всё немедленно вытекает из теоремы 6. Более наглядно:

$$\begin{aligned} \det \exp A &= \det B^{-1} \cdot \exp T \cdot B = \det \exp T = \\ &= \prod_{i=1}^n \exp \lambda_i = \exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \exp(\operatorname{tr} A). \quad \square \end{aligned}$$

Из соотношения (6) вновь вытекает, что  $\exp A$  — всегда невырожденная матрица, причём  $\det \exp A$  — положительное вещественное число для всех  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу экспоненты матриц (линейных операторов). Как всегда, обозначаем через  ${}^t A$  матрицу, транспонированную к  $A$ , а через  $\overline{A}$  — матрицу, полученную из  $A$  заменой всех её коэффициентов комплексно-сопряжёнными числами (если  $A$  — вещественная матрица, то  $\overline{A} = A$ ). Напомним, что

$${}^t(A^k) = ({}^t A)^k, \quad \overline{A^k} = (\overline{A})^k. \quad (7)$$

По поводу первого соотношения см. [ВА I, гл. 2, § 3, п. 3], а второе является следствием того простого факта, что коэффициенты матрицы  $A^k$  записываются в виде однородных форм степени  $k$  от коэффициентов матрицы  $A$ . Отображение же  $z \mapsto \overline{z}$  суть автоморфизм поля  $\mathbb{C}$ . Далее,

$${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B, \quad \overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Поэтому прямо из определения  $\exp A$  и из соотношений (7) получаем

$${}^t(\exp A) = \exp({}^tA), \quad \overline{\exp A} = \exp \overline{A}. \quad (8)$$

Ниже используем общепринятые обозначения для некоторых матричных пространств:

1)  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$  — пространство всех матриц порядка  $n$  над полем  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ;

2)  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$  — пространство  $n \times n$ -матриц с нулевым следом;

3)  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{K})$  — пространство кососимметричных  $n \times n$ -матриц  $X$  (вещественных или комплексных),  ${}^tX + X = 0$ ;

4)  $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{u}_n$  — пространство над  $\mathbb{R}$  (но не над  $\mathbb{C}$ ) косоэрмитовых матриц  $X \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $X^* + X = 0$  ( $X^* := {}^t\overline{X}$ );

5)  $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{su}_n$  — пространство над  $\mathbb{R}$  косоэрмитовых матриц с нулевым следом.

В примере 6 из § 2 гл. 2 было введено понятие алгебры Ли (см. также пример 2 из § 3 гл. 3). Справедливо следующее утверждение.

**Предложение.** *Каждое из пространств 1)–5) наделено структурой (классической) алгебры Ли относительно обычной операции коммутирования матриц  $[A, B] = AB - BA$ .*

**Доказательство.** Элементарная проверка, основанная на свойствах отображений

$$X \mapsto {}^tX, \quad X \mapsto X^*, \quad X \mapsto \operatorname{tr} X,$$

известных нам из первых глав. В качестве примера рассмотрим случай 4):

$$\begin{aligned} [A, B]^* &= (AB - BA)^* = \\ &= (AB)^* - (BA)^* = B^*A^* - A^*B^* = (-B)(-A) - (-A)(-B) = \\ &= BA - AB = -[A, B]. \end{aligned}$$

В случае 5) добавлено условие  $\operatorname{tr} X = 0$ , сохраняющееся при коммутировании, поскольку всегда

$$\operatorname{tr}[X, Y] = \operatorname{tr} AB - \operatorname{tr} BA = 0. \quad \square$$

Ещё раз условимся в обозначениях, на этот раз неоднократно встречавшихся нам групп (также классических):

1')  $GL(n, \mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})$  — полная линейная группа степени  $n$  над  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ;

2')  $SL(n, \mathbb{K}) = SL_n(\mathbb{K})$  — специальная линейная группа матриц из  $M_n(\mathbb{K})$  с определителем 1;

3')  $SO(n) = SO(n, \mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$  (или  $SO(n, \mathbb{C})$ ) — группа вещественных или комплексных ортогональных матриц с определителем 1;

4')  $U(n) = U_n$  — группа унитарных матриц порядка  $n$ ;

5')  $SU(n) = SU_n$  — специальная унитарная группа (группа унитарных матриц с определителем 1).

**Теорема 7.** Отображением  $X \mapsto \exp X$  устанавливается соответствие  $i \rightarrow i'$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , между алгебрами Ли указанных типов и группами.

**Доказательство.** 1) См. следствие теоремы 4.

2) Утверждение зафиксировано в 1) и в формуле (6).

3) Если  ${}^t X + X = 0$ , то, применяя следствие теоремы 4 и формулу (6), находим

$${}^t(\exp X) = \exp {}^t X = \exp(-X) = (\exp X)^{-1},$$

т.е.

$${}^t(\exp X) \cdot \exp X = E \implies \exp X \in SO(n).$$

$$4) X^* + X = 0 \implies (\exp X)^* = \exp X^* = \exp(-X) = (\exp X)^{-1} \implies \exp X \in U(n).$$

5) Если  $X \in \mathfrak{su}(n)$ , то  $\det \exp X = 1$  и  $\exp X \in SU(n)$ .  $\square$

Можно было бы доказать, что имеется взаимно однозначное соответствие типа

$$A \in \dots \iff \exp A \in \dots,$$

если в левой части брать из алгебры Ли матрицы с нормой  $\|A\| < \varepsilon$  для какого-то малого  $\varepsilon$ , а в правой части — матрицы вида  $\exp A = E + B$  с  $\|B\| < \delta$ . Но в целом стрелки в утверждении теоремы 7 нельзя обратить, как показывает следующий

**Пример 7.** Жорданова клетка

$$J_2(-1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

является элементом группы  $SL(2, \mathbb{C})$ . Предположим, что  $J_2(-1) = \exp A$ , где  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Так как  $J_2(-1)$  не приводится к диагональной форме, то матрица  $A$  также недиагонализируема (см. упр. 7.1.1). Стало быть, характеристические корни  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  должны совпадать, т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Но  $\mu_i := \exp \lambda_i = \exp 0 = 1$  — характеристические корни матрицы  $J_2(-1)$  (теорема 6), в то время как на самом деле  $\mu_i = -1$ . Это означает, что матрица  $A$  не существует. Другими словами, не каждый элемент группы  $SL(2, \mathbb{C})$  лежит в однопараметрической подгруппе.

**5. Спектральный радиус.** Попытка решить упр. 9 ниже приводит к выводу, что норма  $\|\mathcal{A}\|$  нормального оператора  $\mathcal{A}$  на конечномерном эрмитовом пространстве равна максимальному из модулей его собственных значений.

**Определение 5.** Пусть  $\mathcal{A}$  — произвольный линейный оператор на  $n$ -мерном векторном пространстве  $V$  над  $\mathbb{C}$ , и пусть  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  — его собственные значения. Тогда величина

$$r(\mathcal{A}) = \max_{j=1, \dots, n} |\lambda_j|$$

называется *спектральным радиусом* оператора  $\mathcal{A}$ .

Как мы видели,  $r(\mathcal{A}) = \|\mathcal{A}\|$  для диагонализируемого линейного оператора  $\mathcal{A}$ , но, вообще говоря,  $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\|$ . Действительно, если  $\lambda = r(\mathcal{A})$  и  $\mathbf{v}$  — собственный вектор ( $\|\mathbf{v}\| = 1$ ), отвечающий  $\lambda$ , то

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|.$$

Это неравенство может быть строгим.

Пример 8. Рассмотрим линейный оператор  $\mathcal{A}$  с матрицей  $A = J_n(\lambda)$  в ортонормированном базисе  $(\mathbf{e}_i)$  пространства  $V$ , снабжённого стандартным скалярным произведением

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_i x_i \bar{y}_i \quad (\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_i y_i \mathbf{e}_i).$$

Ради простоты считаем  $\mathfrak{K} = \mathbb{R}$  и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , так что

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1\lambda + x_2)^2 + \dots + (x_{n-1}\lambda + x_n)^2 + (x_n\lambda)^2}.$$

Если  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 1$ , то

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + (1 - x_1^2)},$$

и простые соображения показывают, что

$$r(\mathcal{A}) = \lambda < \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\|.$$

Далее,  $\lambda = 0 \implies (J_n(0))^k = 0$  при  $k \geq n$ , и, следовательно,  $r(\mathcal{A}) = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}\|^{1/k}$ . Ориентируясь на упр. 2.4.12, мы замечаем, что и при  $\lambda \neq 0$  ( $\|\mathbf{x}\| = 1$ ) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \| (J_n(\lambda))^k \mathbf{x} \|^{1/k} &= \\ &= \lambda \left\{ \left( x_1 + \frac{k}{\lambda} x_2 + \dots + \frac{\binom{k}{n-1}}{\lambda^{n-1}} x_n \right)^2 + \left( x_2 + \frac{k}{\lambda} x_3 + \dots + \frac{\binom{k}{n-2}}{\lambda^{n-2}} x_n \right)^2 + \dots \right\}^{1/2k} = \\ &= \lambda (1 + a_1(\mathbf{x}, \lambda)k + \dots + a_{n-1}(\mathbf{x}, \lambda)k^{n-1})^{1/(2k)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \| (J_n(\lambda))^k \mathbf{x} \|^{1/k} &= \\ &= \lambda \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + a_1(\mathbf{x}, \lambda)k + \dots + a_{n-1}(\mathbf{x}, \lambda)k^{n-1})^{1/2k} = \lambda \cdot 1 = r(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Используя рассмотренный пример и теорему о ЖНФ, можно показать, что и в случае общего линейного оператора  $\mathcal{A}$  имеют место следующие факты:

- 1)  $r(\mathcal{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}^k\|^{1/k};$
- 2)  $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}^k\|^{1/k} \leq \|\mathcal{A}\|$  (см. следствие теоремы 3).

Опираясь на теорему 7 из [2, ч. 1, § 10] об эквивалентности норм на конечномерном пространстве (которое обязательно является банаховым), мы можем также прийти к неравенствам:

3)  $r(\mathcal{A}) \leq \max_k \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$ ,  $r(\mathcal{A}) \leq \max_j \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$  для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$ .

**Замечание.** Понятно, что  $r(\mathcal{A}) = r(A)$ , где  $A$  — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в любом базисе, и все соображения, связанные со спектральным радиусом, можно переводить на матричный язык. Более детально свойства нормы оператора исследованы в [15].

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить, что

$$\dim \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = n^2 - 1, \quad \dim \mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = n(n-1)/2, \quad \dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1.$$

2. Построить изоморфизм групп  $U(1)$  и  $SO(2, \mathbb{R})$ .

3. Следующие матрицы над  $\mathbb{C}$  называются *матрицами Паули*:

$$\sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Положим

$$T_1 = \frac{1}{2}i\sigma_1, \quad T_2 = -\frac{1}{2}i\sigma_2, \quad T_3 = \frac{1}{2}i\sigma_3.$$

Очевидно,

$$\langle T_1, T_2, T_3 \rangle_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2),$$

$$\langle T_1, T_2, T_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(2).$$

Проверить, что

$$[T_1, T_2] = T_3, \quad [T_3, T_1] = T_2, \quad [T_2, T_3] = T_1.$$

4. Установить изоморфизм алгебр Ли  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  и  $\mathfrak{su}(2)$  с алгеброй Ли векторов в трёхмерном евклидовом пространстве относительно векторного произведения.

5. Доказать, что если  $A, B$  —  $n \times n$ -матрицы и  $\det B \neq 0$ , то

$$\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B.$$

6. Найти  $\exp A$  для матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Доказать, что каждый унитарный оператор  $\mathcal{A}$  представляется в виде  $\mathcal{A} = e^{i\mathcal{B}}$ , где  $\mathcal{B}$  — эрмитов оператор.

8. Доказать, что  $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \|\mathcal{B}\|$ , если  $\mathcal{A}$  — унитарный, а  $\mathcal{B}$  — произвольный линейный оператор.

9. Доказать, что  $\|\mathcal{A}^k\| = \|\mathcal{A}\|^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , для каждого нормального оператора  $\mathcal{A}$ .

10. Доказать, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^k = \mathcal{O} \iff r(\mathcal{A}) < 1$ .

## § 2. Линейные дифференциальные уравнения

**1. Производная экспоненты.** Пусть  $P(t) = (p_{ij}(t))$  — матрица, коэффициенты которой  $p_{ij}(t)$  являются дифференцируемыми функциями от вещественной переменной  $t$ . Полагая по определению

$$\frac{d}{dt} P(t) := \left\| \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \right\|$$

и называя  $P'(t) = dP/dt$  производной матрицы  $P$ , будем, очевидно, иметь обычное правило дифференцирования произведения матриц

$$\frac{d}{dt} (PQ) = \frac{dP}{dt} Q + P \frac{dQ}{dt}.$$

Вообще говоря,

$$P'(t) P(t) \neq P(t) P'(t),$$

как показывает пример матрицы  $\begin{vmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Например,

$$\frac{dP^2}{dt} \neq 2P \frac{dP}{dt}.$$

Однако в интересующем нас частном случае матрица и её производная перестановочны.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — матрица с постоянными коэффициентами (вещественными или комплексными),  $F(t) = \exp(tA)$ .

Тогда

$$\frac{d}{dt} F(t) = A \cdot F(t). \quad (1)$$

**Доказательство.** По своему определению матрицы  $F(t)$  и  $A$  перестановочны, т.е. в правой части доказываемого соотношения (1) можно было бы поставить  $F(t)A$ . Обозначим через  $\Delta t$  малое приращение переменной  $t$ . По теореме 4 из § 1 имеем

$$F(t + \Delta t) = F(t) F(\Delta t),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} [F(t + \Delta t) - F(t)] &= \\ &= \frac{1}{\Delta t} [F(\Delta t) - E] \cdot F(t) = \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\Delta t A)^i - E \right] \cdot F(t) = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} (\Delta t)^{i-1} A^i \right] \cdot F(t). \end{aligned}$$

Из соображений непрерывности степенных рядов мы приходим к выводу, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ A + \frac{1}{2!}(\Delta t)A^2 + \frac{1}{3!}(\Delta t)^2A^3 + \dots \right] = A.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}F(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}[F(t + \Delta t) - F(t)] = A \cdot F(t). \quad \square$$

## 2. Дифференциальные уравнения.

Пусть теперь

$$\begin{aligned} z'_1 &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n, \\ z'_2 &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ z'_n &= a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n \end{aligned} \tag{2}$$

— однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, записываемая коротко в виде

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}. \tag{2'}$$

Здесь  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]$  — вектор-столбец; его компоненты  $z_i = z_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , — неизвестные дифференцируемые функции от  $t$ , рассматриваемые на каком-то интервале  $r_1 < t < r_2$  и удовлетворяющие начальным условиям  $z_i(0) = z_i^0$ .

Общая теория дифференциальных уравнений<sup>1)</sup> гарантирует существование и единственность  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ . Более того, из (2) и (2') видно, что решения, отвечающие различным начальным условиям, образуют векторное пространство, а так называемые фундаментальные решения составляют базис этого пространства.

Обратившись вновь к соотношению (1), мы замечаем что оно допускает следующую интерпретацию: каждый столбец  $\mathbf{z}_j = [f_{1j}, \dots, f_{nj}]$  матрицы  $F(t) = (f_{ij}(t))$  суть решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию  $\mathbf{z}_j(0) = [0, \dots, 1, \dots, 0]$  с 1 на  $j$ -м месте (поскольку  $F(0) = E$ ). Так как начальные условия при  $j = 1, \dots, n$  линейно независимы, а все другие являются их линейными комбинациями, то  $n$  столбцов матрицы  $F(t)$  исчерпывают всё множество фундаментальных решений системы (2). Пространство решений оказывается  $n$ -мерным.

Более общая система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}, \tag{3}$$

<sup>1)</sup> См., например: Понtryagin L.S. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 1961.

где

$$A = (a_{ij}), \quad \mathbf{z} = [z_1, \dots, z_n], \quad \mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n].$$

Как и в случае алгебраических уравнений, возможно, что система (3) несовместна. Если это не так и  $\mathbf{z}_0$  — какое-то частное решение, то общим решением системы (3) будет  $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \mathbf{z}_0$ , где  $\mathbf{z}$  — общее решение однородной системы (2), ассоциированной с (3).

### 3. Линейное дифференциальное уравнение порядка $n$ .

Имеется в виду уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z^{(1)} + a_n z = 0, \quad (4)$$

где по-прежнему  $z = z(t)$  — неизвестная функция независимой переменной  $t$ , а коэффициенты  $a_1, \dots, a_n$  — вещественные или комплексные числа. Не касаясь общей теоремы о существовании и единственности решения  $z(t)$ , удовлетворяющего начальным условиям

$$z(0) = z^0, \quad z^{(1)}(0) = z_1^0, \quad \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}^0,$$

заметим, что линейность уравнения (4) относительно  $z$  и её производных имеет следствием линейность пространства решений. Сами же решения можно найти путём сведения (4) к специальной системе (2). Именно, положив

$$z_1 = z, \quad z_2 = z^{(1)}, \quad z_3 = z^{(2)}, \quad \dots, \quad z_{n-1} = z^{(n-2)}, \quad z_n = z^{(n-1)},$$

мы придём к системе (2') с матрицей специального вида

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 \end{vmatrix}.$$

Далее используем тот же приём, что и в п. 2.

Но к уравнению (4) можно подойти с другой стороны. Переайдём к линейным операторам, действующим на пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Пусть  $\mathcal{D}_t$  — оператор дифференцирования по  $t$  и

$$\chi(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_t^n + a_1 \mathcal{D}_t^{n-1} + \dots + a_{n-1} \mathcal{D}_t + a_n \mathcal{E}$$

— линейный оператор, позволяющий переписать (4) в виде

$$\chi(\mathcal{D}_t)z = 0. \quad (4')$$

Многочлен  $\chi(t)$  называется *характеристическим многочленом* дифференциального уравнения (4'). В этой терминологии есть определённый смысл. Так, попробовав искать решение в виде  $z = e^{\lambda t}$ , мы приходим к соотношению

$$\chi(\lambda)e^{\lambda t} = \chi(\mathcal{D}_t)e^{\lambda t} = 0,$$

из которого следует, что

$$e^{\lambda t} \text{ — решение уравнения (4')} \iff \chi(\lambda) = 0.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  — совокупность всех попарно различных корней характеристического многочлена  $\chi(t)$  уравнения (4'), причём корень  $\lambda_j$  имеет кратность  $k_j$ , так что  $k_1 + \dots + k_m = n$ . Тогда функции

$$t^{k_j} e^{\lambda_j t}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 0 \leq k_j \leq k_j - 1,$$

составляют фундаментальную систему решений.

Доказательство мы не будем приводить, отсылая читателя к упомянутому учебнику Л.С. Понtryгина. В частном случае простых корней (все  $k_j = 1$ ) рассуждения совсем несложные, но наличие кратных корней вынуждает использовать ЖНФ (см. гл. 2).

Наша задача заключалась лишь в том, чтобы проиллюстрировать методы линейной алгебры в теории дифференциальных уравнений простейшего типа.

### § 3. Выпуклые многогранники и линейное программирование

**1. Формулировка задачи.** Основная задача линейного программирования ставится следующим образом. Дано конечномерное аффинное пространство  $\mathbb{A}$  над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  и  $m+1$  аффинно-линейных функций  $f_1, \dots, f_m; f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Требуется отыскать точку (или точки)  $\dot{a} \in \mathbb{A}$ , удовлетворяющие условиям

$$f_1(\dot{a}) \geq 0, \quad \dots, \quad f_m(\dot{a}) \geq 0,$$

для которых функция  $f$  принимает наибольшее возможное значение при этих ограничениях.

Вариант, в котором некоторые из неравенств направлены в обратную сторону,  $f_i(\dot{a}) \leq 0$  и/или требуется отыскать точки, в которых  $f$  принимает наименьшее возможное значение, сводится к предыдущему случаю заменой знака соответствующих функций. Условие  $f_i(\dot{a}) = 0$  равносильно совокупности условий  $f_i(\dot{a}) \geq 0$  и  $-f_i(\dot{a}) \geq 0$ . Все функции  $f_i$  можно считать непостоянными.

**2. Мотивировка.** Рассмотрим следующую математическую модель производства. Пусть имеется предприятие, использующее  $m$  видов различных ресурсов и производящее  $n$  видов различных продуктов. Ресурсы и продукты измеряются в своих единицах неотрицательными вещественными числами (случай, когда это целые числа, например, количество штук автомобилей, мы не рассматриваем; при больших объёмах производства и потребления ресурсов он хорошо аппроксимируется “непрерывной” моделью).

Объём выпуска всех видов продукции данного предприятия естественно описывать вектором производства  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Широкое распространение получила следующая линейная модель потребления ресурсов. Считается, что расход ресурса с номером  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) на производство единицы продукции вида  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) составляет  $a_{ij} \geq 0$ , причём наличие ресурса  $i$  ограничено величиной  $b_i$ . Другими словами,

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m,$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

При этом, конечно,

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

т.е. предприятие не добывает производимых им продуктов на стороне — для продажи или для запчастей. Предполагается, что система неравенств (1), (2) совместна. Любой вектор производства, удовлетворяющий этой системе неравенств, называется *допустимым*.

Пусть, далее,  $\pi_j$  — прибыль, получаемая предприятием с каждой единицей  $j$ -го продукта. Положим

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \pi_j x_j. \quad (3)$$

Функцию (3) в линейном программировании принято называть *целевой функцией*. Допустимый вектор производства, обеспечивающий максимум целевой функции (3), называется *оптимальным* по прибыли. Интересы предприятия заключаются в том, чтобы извлечь наибольшую прибыль, т.е. правильно распорядившись имеющимися ресурсами, получить оптимальный вектор производства. Мы видим, что эта задача является частным случаем задачи, сформулированной в п. 1.

Прежде чем переходить к более содержательной геометрической интерпретации общей задачи линейного программирования, рассмотрим пример из конкретной экономики.

Пример. Предположим, что некая фирма (назовём её MBRB) производит два вида продукции: моторные лодки и речные трамвайчики (коротко — MB и RB). Фирма располагает четырьмя типами оборудования, каждое фиксированной мощности: по сборке MB, по сборке RB, по сборке моторов и по штамповке листового металла. Задача: сколько моторных лодок и сколько речных трамвайчиков следует производить фирме? Прибыль от MB или от RB зависит от рыночной цены за моторную лодку или за речной трамвайчик и от посто-

янных издержек фирмы. Предположим, что рыночная цена и средние переменные издержки производства (хорошо известные понятия экономики) постоянны, т.е. они не меняются при выпуске продукции в разумных пределах. Более определённо, допустим, что рыночная цена моторной лодки равна 70 000 руб., а цена речного трамвайчика — 125 000 руб. Средние переменные издержки производства MB равны 65 500 руб, а средние переменные издержки производства RB — 120 000 руб.

Таким образом, фирма получает 4 500 руб. за вычетом переменных издержек за каждую произведенную MB и 5 000 руб. — за каждый RB. Если  $N_{mb}$  (соответственно  $N_{rb}$ ) — число MB (соответственно RB), произведенных фирмой за один день, то доходы фирмы (до вычета постоянных издержек) должны равняться

$$\pi = f(N_{mb}, N_{rb}) = 4500N_{mb} + 5000N_{rb}. \quad (4)$$

Допустим, что каждая MB (соответственно RB), произведенная за день, использует 15 % мощности MB-оборудования, 12 % мощности моторного оборудования, 9 % — оборудования по штамповке металла (соответственно 17 % мощности RB-оборудования, 8 % мощности моторного оборудования и 13 % — оборудования по штамповке металла). Ясно, что ограничения на решения руководителей фирмы будут следующие:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant 15N_{mb} \leqslant 100, \\ 0 &\leqslant 17N_{rb} \leqslant 100, \\ 12N_{mb} + 8N_{rb} &\leqslant 100, \\ 9N_{mb} + 13N_{rb} &\leqslant 100. \end{aligned}$$

Опустив очевидные пояснения, проиллюстрируем это с помощью рис. 23.

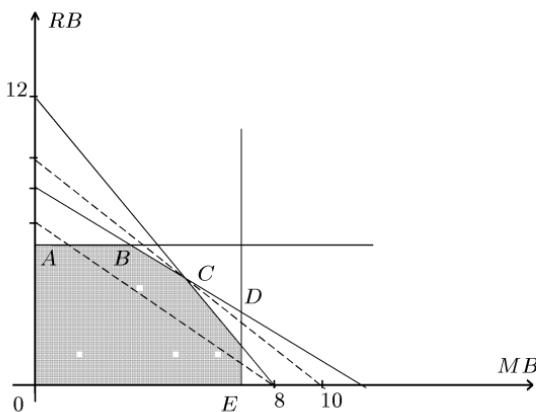


Рис. 23

Чтобы учесть все указанные выше ограничения, сочетание выпуска моторных лодок и речных трамвайчиков должно лежать внутри области ОABCDE, являющейся “ареной” для действий руководителей фирмы. Каждая прямая линия одинаковых прибылей (штрихованные прямые на чертеже) показывает различные комбинации производства MB и RB, которые ведут к одной и той же суммарной прибыли. Чертёж показывает, что оптимальное решение лежит в точке C, где фирма водного транспорта производит 5,95 MB и 3,57 RB в день. С этими данными по выпуску валовой доход фирмы MBRB составит 44 625 руб. в день.

В рассмотренном примере целевая функция (4) принимает своё максимальное значение в вершине С выпуклого многоугольника. Мы собираемся показать, что это отнюдь не случайно. Разумеется, практические приложения линейного программирования связаны с разработкой конкретных алгоритмов отыскания оптимального вектора производства, которые можно применять вручную или на ЭВМ. Здесь мы ограничимся изложением геометрических аспектов задачи, лежащих, конечно, в основе всех алгоритмов.

**3. Основные геометрические понятия.** Фиксируем конечно-мерное аффинное пространство  $\mathbb{A}$  над полем  $\mathbb{R}$ . Буквы  $f$  с индексами будут обозначать аффинно-линейные функции на  $\mathbb{A}$ .

*Полупространством* называется множество точек вида

$$\{\dot{a} \in \mathbb{A} \mid f(\dot{a}) \geq 0\},$$

где  $f$  — непостоянная аффинно-линейная функция. *Многогранником* называется пересечение конечного числа полупространств.

Напомним (см. гл. 4, § 3, п. 6), что подмножество  $S \subset A$  выпуклое, если из  $\dot{a}_1, \dot{a}_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  следует, что  $\lambda\dot{a}_1 + (1 - \lambda)\dot{a}_2 \in S$ . Поскольку

$$f(\lambda\dot{a}_1 + (1 - \lambda)\dot{a}_2) = \lambda f(\dot{a}_1) + (1 - \lambda)f(\dot{a}_2),$$

все полупространства выпуклы. Так как пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым, то все многогранники выпуклые. Как и ранее, будем говорить, что любая точка

$$\lambda\dot{a}_1 + (1 - \lambda)\dot{a}_2, \quad 0 < \lambda < 1,$$

является *внутренней* точкой отрезка  $\dot{a}_1\dot{a}_2$  с концами  $\dot{a}_1$  и  $\dot{a}_2$ .

Пусть  $S$  — выпуклое множество. Выпуклое подмножество  $T \subset S$  называется *гранью* множества  $S$ , если любой отрезок с концами в  $S$ , некоторая внутренняя точка которого лежит в  $T$ , целиком лежит в  $T$ . Всё множество  $S$  является своею гранью. Грань множества  $S$ , состоящая из одной точки, называется *вершиной*  $S$ . (Читателю следует представить себе куб, октаэдр и многогранный угол в трёхмерном пространстве, чтобы иметь наглядную картину основной ситуации, важной для линейного программирования. Границ этих фигур в смысле нашего определения — это грани, рёбра и вершины из школьной геометрии плюс сама фигура. Вершины шара — это все точки его поверхности. Число всех граней многогранника  $S$  не превосходит числа подмножеств в системе аффинно-линейных функций  $f_1, \dots, f_m$ , определяющих  $S$ , и, следовательно, конечно.)

Многогранник  $S \subset \mathbb{A}$  естественно называть *ограниченным*, если для какой-либо системы координат в  $\mathbb{A}$  найдётся такое число  $N$ , что координаты любой точки  $\dot{a} \in S$  по абсолютной величине не превосходят  $N$ . От выбора системы координат это определение не зависит.

Важнейший результат, доказываемый ниже, будет состоять в том, что максимум аффинно-линейной функции на ограниченном много-

граннике (в приложениях этот случай наиболее распространён) достигается на одной из его вершин; последних конечное число. Но прежде нам придётся разобраться подробнее в структуре многогранников и их граней.

**Лемма 1.** *Пересечение семейства граней и грань грани выпуклого множества  $S$  является гранью  $S$ .*

**Доказательство.** а) Пусть  $T = \cap T_i$ ,  $T_i$  — грани  $S$ . Любой отрезок с концами в  $S$ , внутренняя точка которого принадлежит  $T_i$ , целиком лежит в  $T_i$ . Значит, если его внутренняя точка лежит в  $T$ , то он лежит в  $T$ .

б) Пусть  $T_1 \subset T \subset S$ ,  $T$  — грань множества  $S$ . Любой отрезок с концами в  $S$ , внутренняя точка которого лежит в  $T_1$ , целиком лежит в  $T$ , ибо  $T$  — грань  $S$ . Значит, его концы лежат в  $T$ , и потому он целиком лежит в  $T_1$ , ибо  $T_1$  — грань грани  $T$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Пусть  $S$  — многогранник, заданный неравенствами*

$$f_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

*Тогда для любого индекса  $i$  многогранник*

$$S_i = S \cap \{\dot{a} \mid f_i(\dot{a}) = 0\}$$

*либо пуст, либо является гранью  $S$ .*

**Доказательство.** Пусть  $S_i$  непуст,  $\dot{a}_1, \dot{a}_2 \in S$  и внутренняя точка  $\lambda \dot{a}_1 + (1 - \lambda) \dot{a}_2$  отрезка лежит в  $S_i$ . Функция

$$f_i(\lambda \dot{a}_1 + (1 - \lambda) \dot{a}_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

линейна по  $\lambda$ , обращается в нуль для некоторого  $0 < \lambda_0 < 1$  и, кроме того, неотрицательна при  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$ . Поэтому она тождественно равна нулю, так что весь отрезок лежит в  $S_i$ .  $\square$

**Лемма 3.** *Непостоянная аффинно-линейная функция  $f$  на многограннике*

$$S = \{\dot{a} \mid f_i(\dot{a}) \geq 0; 1 \leq i \leq m\}$$

*не может принимать максимальное значение в точке  $\dot{a} \in S$ , для которой все  $f_i(\dot{a}) > 0$ .*

**Доказательство.** Так как  $f$  непостоянна, то  $Df \neq 0$ . Выберем в векторном пространстве  $V$ , ассоциированном с  $\mathbb{A}$ , вектор  $\mathbf{v} \in V$ , для которого  $Df(\mathbf{v}) \neq 0$ . Можно считать, что  $Df(\mathbf{v}) > 0$ , изменив в случае необходимости вектор  $\mathbf{v}$  на противоположный. Если число  $\varepsilon > 0$  достаточно мало и  $\dot{a} \in S$ , то  $f_i(\dot{a} + \varepsilon \mathbf{v}) > 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ : достаточно взять  $\varepsilon < \min_i(f_i(\dot{a}) / |Df_i(\mathbf{v})|)$ . Поэтому  $\dot{a} + \varepsilon \mathbf{v} \in S$  для таких  $\varepsilon$ . Но  $f(\dot{a} + \varepsilon \mathbf{v}) = f(\dot{a}) + \varepsilon Df(\dot{a})$ , так что  $f(\dot{a})$  не является максимальным значением  $f$ .  $\square$

Теперь мы можем доказать наш основной результат.

**Теорема.** *Предположим, что аффинно-линейная функция  $f$  ограничена сверху на многограннике  $S$ .*

Тогда она принимает своё максимальное значение во всех точках некоторой грани  $S$ , являющейся также многогранником. Если  $S$  ограничен, то  $f$  принимает своё максимальное значение в некоторой вершине многогранника  $S$ .

**Доказательство.** Проведём индукцию по размерности пространства  $\mathbb{A}$ . Случай  $\dim \mathbb{A} = 0$  очевиден. Пусть  $\dim \mathbb{A} = n$ , и пусть для меньших размерностей теорема доказана. Пусть многогранник  $S$  задан системой неравенств  $f_1 \geq 0, \dots, f_m \geq 0$ . Так как множество  $S$  замкнуто, то ограниченная сверху функция  $f$  на нём принимает максимальное значение в некоторой точке  $\dot{a}$ . Если  $f_1(\dot{a}) > 0, \dots, f_m(\dot{a}) > 0$ , то по лемме 3  $f$  может быть только константой; в частности, своё максимальное значение она принимает на всём  $S$ . Считаем теперь, что  $f_i(\dot{a}) = 0$  для некоторого  $i$ . Это значит, что  $f$  принимает максимальное значение в точке непустого многогранника  $S_i$ , который является гранью  $S$  и лежит в аффинном подпространстве  $\{\dot{a} \mid f_i(\dot{a}) = 0\}$  размерности  $n - 1$ , ибо  $f_i$  непостоянна. По индуктивному предположению максимальное значение ограничения  $f$  на  $S_i$  принимается во всех точках некоторой грани многогранника  $S_i$ . По леммам 1 и 2 она же будет гранью исходного многогранника  $S$ , причём — многогранником, ибо к неравенствам, определяющим её в  $S_i$ , с левыми частями, продолженными на всё пространство  $\mathbb{A}$ , следует добавить равенство  $f_i = 0$ .

Теперь индукцией по размерности аффинной оболочки  $S$  покажем, что у любого ограниченного многогранника обязательно есть вершина. В самом деле, для размерности нуль это очевидно. Пусть размерность больше нуля. Мы можем считать, что аффинная оболочка многогранника  $S$  есть всё  $\mathbb{A}$ . Возьмём любую непостоянную аффинно-линейную функцию на  $\mathbb{A}$ . Она должна принимать на  $S$  максимальное значение, ибо  $S$  ограничен и замкнут. Стало быть, у  $S$  есть непустая грань, во всех точках которой это значение принимается. Она является ограниченным многогранником, аффинная оболочка которого имеет строго меньшую размерность. По индуктивному предположению у неё есть вершина, являющаяся по лемме 3 также вершиной многогранника  $S$ .

Окончательно, пусть  $S$  ограничен и  $T$  — многогранная грань  $S$ , на которой исходная функция  $f$  принимает своё максимальное значение. Тогда любая вершина  $T$ , существование которой доказано, является искомой вершиной многогранника  $S$ .  $\square$

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что всякий ограниченный многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин.
2. Используя упр. 1 и теорему 13 из § 3 гл. 4, доказать, что максимум линейной функции на ограниченном многограннике достигается в одной из его вершин.

## § 4. Неотрицательные матрицы

**1. Производственная мотивировка.** Следуя [12, 15], изложим задачу планирования производства в достаточно известной экономической модели Леонтьева<sup>1)</sup>. Некий концерн владеет  $n$  фабриками  $F_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . На фабрике  $F_j$  производится продукт  $P_j$ . Для производства единицы продукта  $P_k$  нужно использовать  $a_{jk} \geq 0$  единиц продукта  $P_j$ ,  $j \neq k$  (естественно полагать  $a_{jj} = 0$ ). Для производства  $x_k$  единиц продукта  $P_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n$  концерну потребуется в итоге  $\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$  единиц продукта  $P_j$ . Таким образом, для рынка остаётся

$$y_j = x_j - \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \quad (1)$$

единиц продукта  $P_j$ .

Задача планирования принимает следующий вид: при заданной рыночной потребности  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  с  $y_j \geq 0$  нужно найти вектор производства  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  с  $x_j \geq 0$ , удовлетворяющий условию (1). Полагая  $A = (a_{jk})$ , мы перепишем (1) в матричной форме:

$$\mathbf{y} = (E - A)\mathbf{x}. \quad (1')$$

Теперь мы используем обозначение

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad A \geq \mathbf{0} \quad (2)$$

для векторов и матриц с неотрицательными вещественными компонентами (коэффициентами), называя их коротко *неотрицательными*. В случае строгих неравенств говорят о *положительных* векторах и матрицах (не смешивать с положительно определёнными матрицами).

Воспользуемся теперь элементарными результатами о спектральном радиусе матрицы (или отождествляемого с нею линейного оператора в  $\mathbb{R}^n$ ) из п. 6 § 1. Если  $r(A) < 1$ , то, как следует из примера 3 из § 1, матрица  $E - A$  обратима, причём  $(E - A)^{-1} = \sum_{k \geq 0} A^k$ . Так как матрица  $A$  по определению неотрицательна, то неотрицательна любая её степень  $A^k$ , а в таком случае неотрицательна и матрица  $(E - A)^{-1}$ . Поэтому нужное решение  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ , отвечающее матричному соотношению (1'), даётся формулой

$$\mathbf{x} = (E - A)^{-1}\mathbf{y}.$$

Условие  $r(A) < 1$  вряд ли интерпретируется в экономических терминах, но к этому можно прийти, используя неравенство 3) из § 1, п. 5:

<sup>1)</sup> Василий Васильевич Леонтьев (1905–1999) — выпускник Петербургского университета, впоследствии профессор Гарвардского университета, крупный экономист, лауреат Нобелевской премии.

$r(A) \leq \max_k \sum_{j=1}^n a_{jk}$ . Следовательно,  $\sum_{j=1}^n a_{jk} < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , является достаточным условием для разрешимости нашей задачи. Это условие уже допускает экономическую интерпретацию. Действительно,  $\sum_{j=1}^n a_{jk}$  — издержки, которые несут на фабрике  $F_k$  при изготовлении единицы продукта  $P_k$ . Требование  $\sum_{j=1}^n a_{jk} < 1$  означает, следовательно, что фабрика  $F_k$  работает рентабельно.

Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** *Если все фабрики работают рентабельно, то задача планирования разрешима, причём единственным образом.*

**2. Свойства неотрицательных матриц.** Согласно теореме 1 система (1) с матрицей  $A \geq 0$ , удовлетворяющей условиям (2), имеет единственное решение при любом  $y \geq 0$ , т.е.  $\det(E - A) \neq 0$ . Заметим теперь, что если  $A \geq 0$  и  $1 \geq \lambda \geq 0$ , то матрица  $\lambda A \geq 0$  удовлетворяет тем же условиям (2), так что

$$\det(E - \lambda A) \neq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Определитель  $\det(E - \lambda A)$  положителен при  $\lambda = 0$  и непрерывен по  $\lambda$ , а поэтому он положителен и при  $\lambda = 1$ , т.е. имеет место

**Теорема 2.** *Пусть  $A = (a_{jk}) \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^n a_{jk} < 1$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\det(E - A) > 0$ .*

Неотрицательные матрицы — важный и неотъемлемый инструмент исследования в теории игр, комбинаторике, задачах оптимизации, математической экономике (линейное и динамическое программирование), теории вероятностей, в генетике.

Пусть  $P$  — матрица, отвечающая некоторой перестановке  $\pi \in S_n$  (см., в частности, упр. 6 в [ВА I, гл. 2, § 3]). Например, при  $n = 3$  и  $\pi = (1\ 2\ 3)$  имеем

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Понятно, что  ${}^t P = P^{-1}$ . Преобразование подобия  $A \mapsto P^{-1}AP$  осуществляет перестановку одновременно строк и столбцов матрицы  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

**Определение 1.** Пусть при  $n > 1$  найдётся матрица перестановки  $P$ , для которой

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix},$$

где  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  — квадратные матрицы порядка  $< n$ . Тогда  $A$  называется *приводимой* матрицей. Если такой матрицы  $P$  не существует, то  $A$  — *неприводимая* матрица.

Понятно, что матрица  $A > 0$  всегда неприводима, поскольку при любой перестановке её строк и столбцов угол нулей возникнуть не может.

Основным результатом, относящимся к неприводимым неотрицательным матрицам, является следующая классическая теорема Персона—Фробениуса (1907–1912), усовершенствованная впоследствии Виландом.

**Теорема 3.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  — произвольная неотрицательная неприводимая матрица с характеристическими корнями  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ .

Тогда:

1)  $A$  обладает положительным собственным значением  $r = r(A)$  алгебраической кратности 1;

2) собственному значению  $r$  отвечает положительный собственный вектор  $\mathbf{x}$ :  $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$ ;

3) если  $r = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$  — множество всех характеристических корней, по модулю равных  $r$ , то  $\lambda_j = \theta_j r$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , где  $\theta_j = e^{2\pi ij/k}$ , причём  $n$  точек в  $\mathbb{C}$ , отвечающих  $\lambda_s$ ,  $0 \leq s \leq n-1$ , инвариантны относительно вращений около начала координат с углами, кратными  $2\pi/k$ ;

4) если  $k > 1$ , то найдётся матрица перестановки  $P$ , для которой

$$P^{-1}AP = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

где  $A_{j,j+1}$  —  $n_j \times n_{j+1}$ -матрица и  $A_{k1}$  —  $n_k \times n_1$ -матрица;

5) если  $a_{jj} > 0$  хотя бы для одного  $j$ , то  $k = 1$ ;

6) если найдётся  $i \neq j$  с  $a_{ij}a_{ji} > 0$ , то  $k \leq 2$ .

Доказательство теоремы 3 довольно длинное и здесь не приводится (см. [14, 15]).

**3. Стохастические матрицы.** Напомним (см. [ВА I, гл. 2, § 3, упр. 4]) следующее

**Определение 2.** Матрица  $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  называется *стохастической*, если

$$P \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если, кроме того,  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то матрица  $P$  называется *дважды стохастической*.

Матрица перестановки — один из частных видов дважды стохастической матрицы.

**Теорема 4.** Стохастичность неотрицательной матрицы  $P$  имеет место тогда и только тогда, когда  $P\mathbf{e} = \mathbf{e}$  для  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots]$

..., 1]. Кроме того,  $r(P) = 1$  для каждой стохастической матрицы  $P$ .

**Доказательство.** Если матрица  $P = (p_{ij})$  стохастична, то, очевидно,  $P\mathbf{e} = \mathbf{e}$ , так что 1 — собственное значение. Обратно: свойство  $P\mathbf{e} = \mathbf{e}$  — лишь иная запись стохастичности  $P$ .

Далее, из  $P\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  для стохастической матрицы  $P$  следует, что  $\sum_{j=1}^n p_{ij}x_j = \lambda x_i$ . Поэтому, полагая  $|x_m| = \max_{1 \leq j \leq n} \{x_j\}$ , мы приходим к неравенству

$$|\lambda| \cdot |x_i| \leq \sum_{j=1}^n p_{ij}|x_j| \leq |x_m| \sum_{j=1}^n p_{ij} = |x_m|.$$

В частности, при  $i = m$  имеем

$$|\lambda| \cdot |x_m| \leq |x_m| \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \Rightarrow r(P) = 1. \quad \square$$

Связь стохастических матриц с общими неотрицательными матрицами устанавливает

**Теорема 5.** Пусть  $A$  — произвольная неотрицательная матрица с положительным собственным вектором  $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]$ , отвечающим вещественному собственному значению  $r = r(A)$ . Пусть  $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ .

Тогда матрица

$$P = (p_{ij}) = \frac{1}{r} C^{-1} A C$$

является стохастической.

**Доказательство.** По условию  $A\mathbf{c} = r\mathbf{c}$ , что эквивалентно системе равенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = r c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как  $p_{ij} = r^{-1}c_i^{-1}a_{ij}c_j$ , то

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = r^{-1}c_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = r^{-1}c_i^{-1} \cdot r c_i = 1. \quad \square$$

Легко видеть, что стохастичность матриц  $P = (p_{ij})$ ,  $Q = (q_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  влечёт стохастичность их произведения  $PQ = R = (r_{ij})$ :

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n p_{ik}q_{kj} = \sum_{k=1}^n p_{ik} \sum_{j=1}^n q_{kj} = \sum_{k=1}^n p_{ik} = 1.$$

В частности, любая степень стохастической матрицы является стохастической.

Мы лишиены возможности доказать здесь интересное свойство

*эргодичности* — существование предела

$$\tilde{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j,$$

где  $\tilde{P}$  снова является стохастической матрицей с  $\tilde{P}^2 = \tilde{P} = \tilde{P}\tilde{P}$ . Если  $P$  — неприводимая стохастическая матрица, для которой

$$\lambda \in \text{Spec}(P), \quad |\lambda| = 1 \implies \lambda = 1,$$

то существует даже предел

$$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k. \quad (3)$$

Наконец, если  $P$  — дважды стохастическая матрица и  $\dim \text{Ker}(P - E) = 1$ , то

$$\tilde{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} P^j = \begin{vmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{vmatrix}.$$

Всякая стохастическая матрица  $P$  переводит, очевидно, любой вероятностный вектор  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ , снова в вероятностный, причём в случае  $P > 0$  любому вероятностному вектору  $\mathbf{x}$  отвечает положительный вектор  $P\mathbf{x}$ . Именно по этой причине стохастические матрицы играют важную роль в теории вероятностей. Пусть дана некоторая физическая система  $\mathbf{S}$ , которая может находиться точно в одном из  $n$  состояний  $s_1, \dots, s_n$ . Пусть систему возможно наблюдать в дискретные моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ , и пусть  $\mathbf{p}_k = [p_1(t_k), \dots, p_n(t_k)]$  — вероятностный вектор, где  $p_j(t_k)$  — абсолютная вероятность нахождения системы в состоянии  $s_j$  в момент времени  $t_k$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Предположим теперь (и это предположение вполне реалистично), что известны условные вероятности  $p_{ij}$  перехода в момент времени  $t_k$  системы  $\mathbf{S}$  в состояние  $s_i$ , коль скоро в момент времени  $t_{k-1}$  система находилась в состоянии  $s_j$ . По правилам теории вероятностей

$$p_i(t_k) = \sum_{j=1}^n p_{ij} p_j(t_{k-1}).$$

Полагая  $P = (p_{ij})$ , перепишем это в матричном виде:  $\mathbf{p}_k = P\mathbf{p}_{k-1}$ . Если, наконец, начальное состояние системы  $\mathbf{S}$  есть  $s_r$ , то  $\mathbf{p}_0$  — вектор-столбец с 1 на  $r$ -м месте и нулями на остальных местах. Итак,

$$\mathbf{p}_k = P^k \mathbf{p}_0.$$

Описанный здесь процесс носит название *однородной цепи Мар-*

кова с матрицей перехода  $P$  (в обычной цепи Маркова<sup>2)</sup> условная вероятность  $p_{ij} = p_{ij}(t_k; t_{k-1})$  зависит от момента времени  $t_k$ ). Естественно поинтересоваться предельным поведением последовательности  $\{\mathbf{p}_k\}$ , т.е. фактически — пределом (3).

Пример. Матрица перехода

$$P = \begin{vmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{vmatrix}$$

отвечает элементарному сообщению типа “да”, “нет” и искажениям в процессе передачи “да → нет” с вероятностью  $p$ , “нет → да” с вероятностью  $q$ ;  $1-p$  : “да → да”;  $1-q$  : “нет → нет”.

Записав  $P = Q + E$ ,  $Q = \begin{vmatrix} -p & p \\ q & -q \end{vmatrix}$ , мы будем иметь  $Q^2 = -(p+q)Q$ . У нас  $0 \leq p, q \leq 1$ , поэтому  $p+q = 0 \implies P = E$  — тривиальный случай. Пусть, далее,  $p+q > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} P^k = (Q+E)^k &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} Q^k = E + \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (p+q)^{j-1} Q = \\ &= E + \frac{1}{p+q} Q - \frac{(1-p-q)^k}{p+q} Q. \end{aligned}$$

Очевидно,  $-1 \leq 1-p-q \leq 1$ . При  $1-p-q = 1$  мы опять приходим к тривиальному случаю  $P = E$ . При  $1-p-q = -1$  имеем  $p=q=1$ , так что

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad P^{2k} = E, \quad P^{2k+1} = P,$$

поэтому предел  $P^\infty$  не существует.

Теперь рассмотрим общий случай  $-1 < 1-p-q < 1$ . Имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} (1-p-q)^k = 0$ , так что

$$P^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} P^k = E + \frac{1}{p+q} Q = \begin{vmatrix} q/(p+q) & p/(p+q) \\ q/(p+q) & p/(p+q) \end{vmatrix}.$$

В частности, при  $0 < p = q < 1$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}.$$

В заключение отметим, что всякая ненулевая неотрицательная матрица  $A = (a_{ij})$  из пространства  $S\text{Mag}_n(\mathbb{Q})$  полумагических матриц порядка  $n$  (см. пример 8 из § 1 гл. 1) приводит к дважды стохастической матрице  $P = (p_{ij})$ . Действительно, если  $\sum_j a_{ij} = \alpha = \sum_i a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}$ , то достаточно положить  $p_{ij} = 1/\alpha$ . Это лишь дополнительная иллюстрация к теореме 5.

<sup>2)</sup> Андрей Андреевич Марков (1856–1922) — крупный русский математик, один из виднейших представителей Петербургской математической школы.

## § 5. Геометрия Лобачевского

**1. Пространство Лобачевского.** Пусть  $V$  —  $(n+1)$ -мерное векторное пространство над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}(V)$  — порождённое  $V$  проективное пространство. Пусть  $q$  — невырожденная квадратичная форма на  $V$ , имеющая положительный индекс инерции  $n$  и отрицательный индекс 1;  $f$  — симметричная билинейная форма, полярная к  $q$ . Как мы знаем из гл. 1, существует базис  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  пространства  $V$ , в котором форма  $q$  принимает нормальный вид

$$q(\mathbf{x}) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2. \quad (1)$$

Пару  $(V, q)$  мы могли бы считать “псевдоевклидовым” пространством (пространством Минковского), но сейчас нам полезнее подойти к предмету с другой стороны.

На  $x_0, x_1, \dots, x_n$  можно смотреть как на однородные координаты точки

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}(V), \quad \mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

в данной системе проективных координат. Уравнением  $q(\mathbf{x}) = 0$  задаётся проективная квадрика (в  $V$  мы её назвали бы конусом).

**Определение 1.** Множество  $\Lambda \subset V$ , заданное условием  $q(\mathbf{x}) < 0$ , т.е.

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < x_0^2 \quad (2)$$

(световой конус в теории относительности), есть “внутренность” конуса  $q(\mathbf{x}) = 0$ . Прямым, проходящим через начало координат и лежащим внутри конуса, соответствует множество

$$\tilde{\Lambda} = P_r(\Lambda) \subset \mathbb{P}(V),$$

которое называется  $n$ -мерным пространством Лобачевского.

Фактически  $\tilde{\Lambda}$  целиком содержится в аффинной карте  $(\mathbb{E}_0, \Phi_0)$ , определённой условием  $x_0 \neq 0$ : это условие необходимо для выполнения неравенства (2). В системе аффинных координат

$$y_i = x_i / x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

пространство  $\tilde{\Lambda}$  задаётся неравенством

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 < 1, \quad (2')$$

т.е.  $\Phi_0(\tilde{\Lambda})$  (рис. 24) изображается в виде открытого  $(n-1)$ -мерного шара радиуса 1 с центром в точке  $\dot{\mathbf{e}}_0$ .

Вспомним теперь, что  $\mathbb{E}_0 = \mathbf{e}_0 + V_0$ , где  $\mathbf{e}_0$  — первый вектор того базиса, в котором  $q(\mathbf{x})$  имеет вид (1), и  $V_0$  — векторная гиперплоскость, определённая условием  $x_0 = 0$ . Другими словами,  $\mathbb{E}_0$  — аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством  $V_0$ . На  $V_0$  определена квадратичная форма  $q_0 = q|_{V_0}$ , имеющая в базисе

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  вид  $q_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$  и являющаяся, следовательно, положительно определённой. При помощи  $q_0$  на  $\mathbb{E}_0$  вводится евклидова функция расстояния. Таким образом,  $\mathbb{E}_0$  наделяется структурой евклидова пространства.

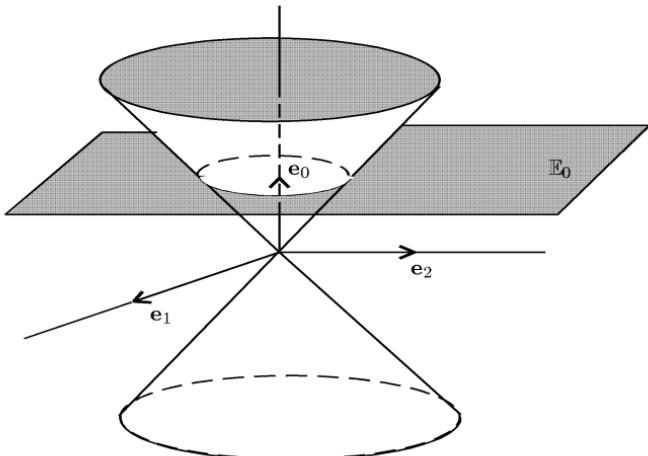


Рис. 24

Мы обобщим теперь наши рассуждения и попытаемся связать с каждой точкой  $\tilde{\mathbf{e}} \in \tilde{\Lambda}$  аффинную карту  $(\mathbb{E}_{\mathbf{e}}, \Phi_{\mathbf{e}})$  пространства  $\mathbb{P}(V)$ . Так как  $q(\mathbf{e}) < 0$  и  $\tilde{\lambda}\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}$ , то вектор  $\mathbf{e}$  можно считать нормированным условием  $q(\mathbf{e}) = -1$ . Положим

$$V_{\mathbf{e}} = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = 0\}, \quad (3)$$

где  $f$  — билинейная форма, полярная к  $q$ . Стало быть,  $V_{\mathbf{e}}$  — псевдоортогональное дополнение к  $\mathbf{e}$ . Пусть, далее,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{e}} = \mathbf{e} + V_{\mathbf{e}}.$$

Квадратичная форма  $q_{\mathbf{e}} = q|_{V_{\mathbf{e}}}$  положительно определена. В самом деле, записав вектор  $\mathbf{x} \in V$  в виде  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e} + \mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x}' \in V_{\mathbf{e}}$ , и воспользовавшись определением (3), мы видим, что  $q(\mathbf{x}) = -\alpha^2 + q(\mathbf{x}') = -\alpha^2 + q_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}')$ . Отсюда видно, что отрицательный индекс инерции формы  $q_{\mathbf{e}}$  должен быть равен нулю.

Итак,  $(V_{\mathbf{e}}, q_{\mathbf{e}})$  — евклидово векторное пространство со скалярным произведением  $(\mathbf{x}' | \mathbf{y}')_{\mathbf{e}}$ , что позволяет рассматривать  $\mathbb{E}_{\mathbf{e}}$  как (точечное) евклидово пространство. Отображение

$$\Phi_{\mathbf{e}}: \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V_{\mathbf{e}}) \rightarrow \mathbb{E}_{\mathbf{e}}$$

определяется обычным образом:  $\Phi_{\mathbf{e}}(\tilde{\mathbf{x}})$  есть точка пересечения прямой  $\langle \mathbf{x} \rangle$  с  $\mathbb{E}_{\mathbf{e}}$ . В частности,

$$\Phi_{\mathbf{e}}(\tilde{\Lambda}) = \Lambda \cap \mathbb{E}_{\mathbf{e}}.$$

Вектор  $\mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x}' \in V_{\mathbf{e}}$ , принадлежит множеству  $\Lambda$  тогда и только тогда, когда  $q(\mathbf{x}) = q_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}') - 1 < 0$ , т.е.  $q(\mathbf{x}') < 1$ , а это значит, что на аффинной карте  $(\mathbb{E}_{\mathbf{e}}, \Phi_{\mathbf{e}})$  пространство  $\tilde{\Lambda}$  изображается в виде открытого евклидова шара радиуса 1 с центром в точке  $\tilde{\mathbf{e}} \in \Phi_{\mathbf{e}}(\tilde{\mathbf{e}})$ .

**2. Движения пространства Лобачевского.** Псевдоортогональная группа  $O(q) = O(n, 1) \subset GL(V)$ , или, что то же самое, группа автоморфизмов квадратичной формы  $q$ , состоит из линейных операторов  $\mathcal{A} \in GL(V)$ , для которых

$$q(\mathcal{A}\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4)$$

Сравнивая определения (2) и (4), мы видим, что  $\mathcal{A}(\Lambda) = \Lambda$ . Рассмотрим образ  $\widetilde{O(q)}$  группы  $O(q)$  при эпиморфизме  $\pi: GL(V) \rightarrow PGL(V)$  (см. гл. 5, § 3, п. 6)

$$\widetilde{O(q)} = \{\tilde{\mathcal{A}} = \pi(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in O(q)\}.$$

Так как  $\mathcal{A}(\Lambda) = \Lambda$  и  $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{x}$ , то

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Lambda} \iff \mathbf{x} \in \Lambda \implies \mathcal{A}\mathbf{x} \in \Lambda \implies \tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Lambda}.$$

Итак,  $\widetilde{O(q)}$  — подгруппа проективной группы  $PGL(V)$ , сохраняющая  $\tilde{\Lambda}$ .

**Определение 2.** Элементы группы  $\widetilde{O(q)}$  называются *движениями*, а сама группа  $\widetilde{O(q)}$  — *группой движений*  $n$ -мерного пространства Лобачевского  $\tilde{\Lambda}$ . Группе  $\widetilde{O(q)}$ , действующей на  $\tilde{\Lambda}$ , отвечает геометрия, называемая *гиперболической геометрией* или *геометрией Лобачевского*<sup>1)</sup>.

В этом определении непривычным является употребление термина “движение”, его принято ассоциировать с таким преобразованием множества, которое сохраняет какую-то метрику на множестве. Наша основная задача — ввести такую метрику на  $\tilde{\Lambda}$ , чтобы группа  $\widetilde{O(q)}$  оправдывала своё название. Но пока мы остановимся на другом свойстве группы  $\widetilde{O(q)}$ , которое столь же необходимо для содержательного определения геометрии.

**Теорема 1.** Группа  $\widetilde{O(q)}$  действует на  $\tilde{\Lambda}$  транзитивно, т.е. в геометрии Лобачевского все точки  $\widetilde{O(q)}$ -конгруэнтны.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{e}}$  — любые две точки пространства  $\tilde{\Lambda}$ . Как мы уже видели, без ограничения общности можно считать, что  $q(\tilde{\mathbf{c}}) = q(\tilde{\mathbf{e}}) = -1$ . В векторных гиперплоскостях  $V_{\mathbf{c}}$  и  $V_{\mathbf{e}}$

<sup>1)</sup> В честь Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856) — великого русского геометра, открывшего и впервые изложившего (в 1829 г.) основы новой геометрии. Его сочинением “О началах геометрии” и последующими моделями плоскости Лобачевского была, в частности, доказана независимость пятого постулата Евклида.

(см. (3)) выберем ортонормированные базисы  $(\mathbf{c}'_i)$ ,  $(\mathbf{e}'_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  (ортонормированность относительно скалярных произведений  $(\cdot | \cdot)_c$  и  $(\cdot | \cdot)_e$ ). Матрица  $F$  билинейной формы, полярной к  $q$ , в каждом из базисов  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}'_i)$ ,  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}'_i)$  пространства  $V$  имеет один и тот же вид  $\text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ . Поэтому линейный оператор  $\mathcal{A}$ , заданный равенствами  $\mathcal{A}\mathbf{c} = \mathbf{e}$ ,  $\mathcal{A}\mathbf{c}'_i = \mathbf{e}'_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , очевидно, является автоморфизмом формы  $q$  (или  $f$ ), т.е.  $\mathcal{A} \in O(q)$ . При этом  $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{e}}$ , так что  $\tilde{\mathcal{A}}$  — движение пространства Лобачевского, переводящее точку  $\tilde{\mathbf{c}}$  в точку  $\tilde{\mathbf{e}}$ .  $\square$

Некоторую информацию о группе  $\widetilde{O}(q)$  даёт

**Теорема 2.** *Стационарная подгруппа  $\widetilde{O}(q)_{\tilde{\mathbf{e}}}$  любой точки  $\tilde{\mathbf{e}} \in \tilde{\Lambda}$  изоморфна группе  $SO(n)$  вращений вокруг точки  $\dot{\mathbf{e}} = \Phi_e(\tilde{\mathbf{e}})$  на аффинной карте  $(\mathbb{E}_e, \Phi_e)$ .*

**Доказательство.** Наша цель — показать, что движению  $\tilde{\mathcal{A}}$  пространства Лобачевского  $\tilde{\Lambda}$ , оставляющему на месте точку  $\tilde{\mathbf{e}} \in \tilde{\Lambda}$ , соответствует вращение в  $\mathbb{E}_e$  вокруг точки  $\dot{\mathbf{e}}$ ; верно и обратное.

Итак, пусть  $\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}$ , т.е.  $\mathcal{A}\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ . По условию  $q(\mathbf{e}) = -1$ . Так как  $\mathcal{A} \in O(q)$ , то

$$q(\lambda\mathbf{e}) = q(\mathbf{e}) \implies \lambda = \pm 1.$$

Без ограничения общности считаем  $\lambda = 1$ , заменяя в случае необходимости  $\mathcal{A}$  на  $-\mathcal{A}$ . Из (3) следует, что  $\mathcal{A}(V_e) = V_e$ . Полагая  $\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}} = \mathcal{A}|_{V_e}$ ,  $\mathcal{A}'_e = \mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}|_{V_e}$ , будем иметь

$$\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}') = \mathbf{e} + \mathcal{A}'_e \mathbf{x}' \quad (5)$$

для любой точки  $\dot{\mathbf{x}} := \mathbf{x} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{x}' \in \mathbb{E}_e$ , где  $\mathbf{x}' \in V_e$ .

Таким образом,  $\mathcal{A}'_e$  — ортогональный линейный оператор на  $V_e$ , а  $\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}$  — вращение пространства  $\mathbb{E}_e$  вокруг точки  $\dot{\mathbf{e}} := \mathbf{e}$ . Так как

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Lambda} \implies \mathbf{x} = \mu(\mathbf{e} + \mathbf{x}'), \quad \mu \neq 0,$$

то с учётом (5) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_e(\tilde{\mathcal{A}} \cdot \tilde{\mathbf{x}}) &= \Phi_e(\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{x}) = \Phi_e(\mu(\dot{\mathbf{e}} + \mathcal{A}'_e \mathbf{x}')) = \\ &= \dot{\mathbf{e}} + \mathcal{A}'_e \mathbf{x}' = \mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}(\mathbf{e} + \mathbf{x}') = \mathcal{A}(\Phi_e \tilde{\mathbf{x}}), \end{aligned}$$

т.е. именно вращение  $\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}$  и изображает действие  $\tilde{\mathcal{A}}: \tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{\Lambda}$  на аффинной карте  $(\mathbb{E}_e, \Phi_e)$ .

В свою очередь если  $\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}$  — вращение пространства  $\mathbb{E}_e$  вокруг точки  $\dot{\mathbf{e}}$  с линейной частью  $\mathcal{A}'_e$ , то линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ , определённый равенствами  $\mathcal{A}\mathbf{e} = \mathbf{e}$ ,  $\mathcal{A}\mathbf{x}' = \mathcal{A}'_e \mathbf{x}'$ , будет, очевидно, автоморфизмом формы  $q$ , оставляющим инвариантной аффинную гиперплоскость  $\mathbb{E}_e \subset V$ . При этом  $\tilde{\mathcal{A}} \in \widetilde{O}(q)$  действует на  $\tilde{\Lambda}$  в точном соответствии с действием  $\mathcal{A}_{\dot{\mathbf{e}}}$  на  $\mathbb{E}_e$ .  $\square$

**3. Метрика Лобачевского.** В дальнейшем мы фиксируем точку  $\dot{e}_0$  — центр открытого шара ( $2'$ ) в евклидовом пространстве  $E_0 = e_0 + V_0$  и возвращаемся к аффинной карте  $(E_0, \Phi_0)$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2 \in \tilde{\Lambda}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_2$ . Проведём через  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1)$  и  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2)$  прямую  $L$  аффинного пространства  $E_0$ .

Тогда  $L$  пересекает сферу

$$S^{n-1}: y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = 1 \quad (6)$$

в двух различных точках.

**Доказательство.** Точки прямой  $L$  задаются в виде  $\dot{p} + t\mathbf{a}'$ , где  $\dot{p}$  — некоторая точка в  $E_0$ ,  $\mathbf{0} \neq \mathbf{a}'$  — вектор из  $V_0$  и  $t$  — произвольное вещественное число (координата точки на прямой). Если  $\mathbf{a}' = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n$ ,  $\dot{p} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , то аффинные координаты  $y_i$  точки  $\dot{r} = \dot{p} + t\mathbf{a}'$  имеют вид  $y_i = \beta_i + t\alpha_i$ . Точка пересечения прямой  $L$  со сферой (6) получается из уравнения

$$\alpha t^2 + \beta t + \gamma = \sum_{i=1}^n (t\alpha_i + \beta_i)^2 - 1 = 0.$$

Квадратный трёхчлен  $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$  с положительным коэффициентом  $\alpha = \sum_i \alpha_i^2$  при  $t^2$  принимает отрицательные значения в точках  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2)$  прямой  $L$ , поскольку для них  $\sum_i y_i^2 - 1 < 0$ . Значит,  $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$  имеет два различных вещественных корня.  $\square$

Пусть  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_2)$  — точки пересечения  $L$  со сферой (6), взятые в таком порядке, чтобы координаты  $t_k$  точек  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2), \Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_2)$  на прямой шли в порядке возрастания (в случае необходимости меняем местами точки  $\tilde{\mathbf{a}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{a}}_2$ ). Положим

$$\Delta(\dot{a}_1, \dot{a}_2) := \delta \cdot |\dot{a}_1 \dot{a}_2| = [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1], \quad (7)$$

где, как обычно,  $[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1]$  — двойное отношение четырёх точек (см. гл. 5, § 3). У нас  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_2$ , но соотношение (7) сохраняется и при  $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_2$ , когда  $\delta \cdot |\dot{a}_1 \dot{a}_2| = 1$ , а  $L$  — любая прямая, проходящая через точку  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1)$ .

**Лемма 2.** Если  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_2$ , то  $\Delta(\dot{a}_1, \dot{a}_2) > 1$ .

**Доказательство.** Прямая  $L$ , проходящая через  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2)$ , может рассматриваться как аффинная карта проективной прямой  $\mathbb{P}^1$ . Определим на  $\mathbb{P}^1$  другую аффинную карту, взяв за бесконечно удалённую точку  $\tilde{\mathbf{b}}_1$ . Введём в этой аффинной карте систему координат, взяв за нулевую точку  $\tilde{\mathbf{b}}_2$ , а за единичную —  $\tilde{\mathbf{a}}_2$  (понять, что это значит, лучше всего из описания свойств двойного отношения в гл. 5). Тогда по формуле (21) из § 3 гл. 5 получим, что  $[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1] = x$  — аффинная координата точки  $\tilde{\mathbf{a}}_1$ . Так как  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1)$

лежит между  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_1)$  и  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2)$ :

$$\begin{array}{cccc} \infty & x & 1 & 0 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_1) & \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1) & \Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2) & \Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_2), \end{array}$$

то  $x > 1$ . Остаётся добавить, что двойное отношение не зависит от выбора аффинной карты.

**Замечание.** Из свойств двойного отношения следует, что

$$[\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2] = [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1]^{-1} < 1.$$

**Теорема 3.** *Выражение  $\Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2)$ , определённое по формуле (7), инвариантно относительно движений пространства Лобачевского, т.е.*

$$\Delta(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2) = \Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) \quad \forall \tilde{\mathcal{A}} \in \widetilde{O(q)}.$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\mathcal{A}} \in \widetilde{O(q)}$ . Если  $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_2$ , то  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2$  и  $\Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) = \Delta(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2)$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{a}}_1 \neq \tilde{\mathbf{a}}_2$ . Так как  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1$  лежат на одной прямой  $\mathbb{P}^1$  пространства  $\mathbb{P}(V) \supset \tilde{\Lambda}$ , то  $\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1$  тоже лежат на одной прямой  $\tilde{\mathcal{A}}(\mathbb{P}^1)$ . Далее,  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathbf{b}}_2) \in S^{n-1}$ , где  $S^{n-1}$  — сфера, определённая уравнением (6). По своему смыслу  $\tilde{\mathcal{A}}$  переводит  $S^{n-1}$  в себя, так что  $\Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2)$  — это точки пересечения с  $S^{n-1}$  прямой, проходящей через  $\Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2)$ .

Согласно теореме 4 из § 3 гл. 5

$$[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1] = [\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathbf{b}}_1] = \Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2). \quad (8)$$

Осталось показать, что  $[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1] = \Delta(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2)$ , а это верно, если точки  $\Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2)$  расположены на соединяющей их аффинной прямой в порядке возрастания координат. Предположив, что это не так, мы должны признать, что в порядке возрастания координат идут точки  $\Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2), \Phi_0(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1)$ . Но тогда по лемме 2

$$[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2] = \Delta(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2) > 1,$$

откуда

$$[\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1] = [\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{b}}_2]^{-1} < 1.$$

Полученное неравенство, однако, противоречит соотношению (8) и лемме 2. □

**Определение 3.** *Расстоянием Лобачевского* между точками  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2 \in \tilde{\Lambda}$  называется величина

$$\rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) = \log \Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2), \quad (9)$$

где  $\Delta$  — функция, заданная соотношением (7).

Основание логарифма, влияющее лишь на масштаб, не указывается. Из доказанных нами фактов относительно  $\Delta$  вытекают следующие свойства метрики Лобачевского  $\rho$ :

- 1)  $\rho(\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathbf{a}}_2) = \rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) \quad \forall \tilde{\mathcal{A}} \in \widetilde{O(q)}$ ;
- 2)  $\rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) = \rho(\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_1)$ ;
- 3)  $\rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) \geq 0$ , причём  $\rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) = 0 \iff \tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_2$ ;
- 4)  $\rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_3) = \rho(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) + \rho(\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3)$ , если точки  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3$  коллинеарны и  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_2)$  лежит между точками  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_1)$  и  $\Phi_0(\tilde{\mathbf{a}}_3)$ .

Для доказательства последнего утверждения нужно проверить равенство

$$\Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_3) = \Delta(\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2) \cdot \Delta(\tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3),$$

но оно вытекает непосредственно из определения двойного отношения.

Стоит обратить внимание на тот факт, что пространство Лобачевского не ограничено, хотя оно и “помещается” в шаре.

Метрика Лобачевского позволяет ввести понятие *угла* в пространстве  $\tilde{\Lambda}$ . Углы с вершиной в точке  $\tilde{\mathbf{e}}_0$  ( $\tilde{\mathbf{e}}_0$  — центр сферы (6)) измеряются так же, как в аффинной карте. Для определения величины угла  $Y$  с вершиной в любой другой точке  $\tilde{\mathbf{e}}$  рассмотрим движение  $\tilde{\mathcal{A}} \in \widetilde{O(q)}$ , переводящее  $\tilde{\mathbf{e}}$  в  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ , и положим величину угла  $Y$  равной величине угла  $\tilde{\mathcal{A}}(Y)$  (для последнего величины в геометрии Лобачевского и в аффинной карте совпадают, поскольку его вершиной является  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ ). Это определение не зависит от выбора движения  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Действительно, если  $\tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}_0$  для какого-то другого движения  $\tilde{\mathcal{B}}$ , то  $\tilde{\mathcal{C}} = \tilde{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{A}}^{-1}$  — движение и  $\tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathbf{e}}_0 = \tilde{\mathbf{e}}_0$ . Тогда  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{\mathcal{A}}$  и  $\tilde{\mathcal{B}}(Y) = \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{\mathcal{A}}(Y))$ . Согласно теореме 2  $\tilde{\mathcal{C}}$  реализуется евклидовым движением аффинной карты  $(\mathbb{E}_0, \Phi_0)$ . Поэтому величины углов  $\tilde{\mathcal{B}}(Y)$  и  $\tilde{\mathcal{A}}(Y)$  в аффинной карте совпадают.

Пусть снова  $Y$  — угол с вершиной в точке  $\tilde{\mathbf{e}}$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  — любое движение Лобачевского и  $Y' = \tilde{\mathcal{A}}(Y)$ . По определению  $\tilde{\Lambda}$ -величина угла  $Y'$  равна Е-величине (евклидовой величине) угла  $\tilde{\mathcal{A}}'(Y')$ , измеренного в аффинной карте, где  $\tilde{\mathcal{A}}'$  —  $\tilde{\Lambda}$ -движение, переводящее вершину  $\tilde{\mathbf{e}}$  угла  $Y'$  в  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ . Но тогда движение  $\tilde{\mathcal{A}}'\tilde{\mathcal{A}}$  переводит  $\tilde{\mathbf{e}}$  в  $\tilde{\mathbf{e}}_0$ , и величина угла  $Y$  равна величине угла  $(\tilde{\mathcal{A}}'\tilde{\mathcal{A}})(Y)$ , измеренного в аффинной карте. Так как  $(\tilde{\mathcal{A}}'\tilde{\mathcal{A}})(Y) = \tilde{\mathcal{A}}'(\tilde{\mathcal{A}}(Y)) = \tilde{\mathcal{A}}'(Y')$ , то мы доказали, что величины углов не меняются при движении Лобачевского.

Любое утверждение относительно углов с общей вершиной, справедливое в евклидовом пространстве, будет справедливо и в пространстве Лобачевского. В частности, *развернутый угол* равен  $\pi$ :

если углы  $\dot{r}\dot{q}\dot{r}$  и  $\dot{r}\dot{q}\dot{s}$  находятся в одной плоскости и имеют общую сторону  $\dot{q}\dot{r}$ , лежащую между  $\dot{q}\dot{r}$  и  $\dot{q}\dot{s}$ , то их сумма равна углу  $\dot{r}\dot{q}\dot{s}$ .

**4. Плоскость Лобачевского.** Как нетрудно видеть, одномерная геометрия Лобачевского совпадает с одномерной евклидовой геометрией (если  $\tilde{\Lambda}$  задано неравенством  $x^2 < 1$ , то функция

$$f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$$

определяет отображение  $\tilde{\Lambda}$  на вещественную прямую, причём  $\tilde{\Lambda}$ -расстояние переходит в евклидово и  $\tilde{\Lambda}$ -движение — в евклидово движение).

Остановимся несколько более подробно на двумерном пространстве Лобачевского. Из гл. 4 мы знаем, что всякое движение евклидовой плоскости с неподвижной точкой  $\dot{e}$  является либо поворотом вокруг  $\dot{e}$  на некоторый угол, либо отражением относительно прямой, проходящей через  $\dot{e}$ . Соответствующая терминология переносится и на плоскость Лобачевского.

В равной мере справедливы также следующие утверждения.

1) *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, биссектриса угла при вершине перпендикулярна к основанию и делит его пополам.*

2) *Три признака равенства треугольника: по стороне и двум прилежащим углам; по двум сторонам и углу между ними; по трём сторонам.*

3) *Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.*

4) *Во всяком треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.*

5) *Во всяком треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон.*

6) *Из точки  $\tilde{e}$ , не лежащей на прямой  $\ell$ , можно опустить на  $\ell$  перпендикуляр, причём единственный.*

Приведём обоснование последнего утверждения, для чего рассмотрим изображения  $\tilde{e}$  и  $\ell$  на аффинной карте  $(\mathbb{E}_e, \Phi_e)$ , опуская для простоты символ  $\Phi_e$ .

Прямая  $\ell$  представляется на этой карте как хорда круга  $\Lambda$ , а точка  $\tilde{e}$  — как его центр  $e$ . Опустим евклидов перпендикуляр  $h$  из  $e$  на  $\ell$  и покажем, что он будет перпендикуляром в смысле геометрии Лобачевского. Для этого рассмотрим отражение плоскости  $\tilde{\Lambda}$  относительно  $h$ . На карте  $\mathbb{E}_e$  оно представляется как евклидово отражение и поэтому переводит прямую  $\ell$  в себя. Отсюда следует, что  $h \perp \ell$  и в геометрии Лобачевского.

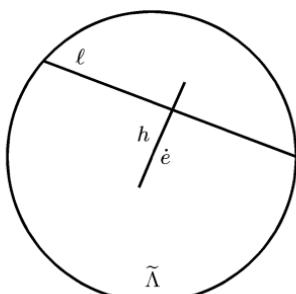


Рис. 25

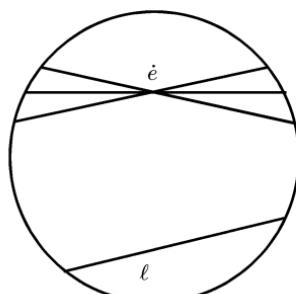


Рис. 26

Единственность перпендикуляра, как и в евклидовой геометрии, вытекает из утверждения 3).  $\square$

Используя 6), нетрудно проверить, что перпендикуляр короче наклонной. В качестве упражнения предлагается найти  $\tilde{\Lambda}$ -расстояние точки  $(a, b)$  (в круге  $x^2 + y^2 < 1$ ) от оси  $x$  и написать уравнение геометрического места точек, равноудалённых от оси  $x$ .

Таким образом, многие теоремы двумерной евклидовой геометрии справедливы и для двумерной геометрии Лобачевского. Но все теоремы о конфигурациях фигур на евклидовой плоскости выводятся из небольшого числа аксиом, выраждающих простейшие свойства точек и прямых (например, через любые две точки проходит единственная прямая, а из любых трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими). Можно попытаться проверить, какие из этих аксиом остаются верными в геометрии Лобачевского. Если бы оказалось, что все они справедливы, то можно было бы утверждать, что и все теоремы евклидовой геометрии справедливы в геометрии Лобачевского, поскольку они являются логическим следствием аксиом. Однако, это не так. В действительности геометрия Лобачевского подчиняется всем аксиомам евклидовой геометрии, кроме одной — аксиомы о параллельных, гласящей, что через точку  $\dot{e}$ , лежащую вне прямой  $\ell$ , можно провести не более одной прямой, не пересекающей  $\ell$ . Но из рис. 26 видно, что аксиома о параллельных не имеет места в геометрии Лобачевского. Поэтому теоремы, обычное доказательство которых опирается на эту аксиому, могут быть неверны в геометрии Лобачевского. Существование и непротиворечивость геометрии Лобачевского являются доказательством того, что аксиома о параллельных не может быть выведена из остальных аксиом евклидовой геометрии.

Одной из теорем геометрии Лобачевского с существенно неевклидовым содержанием является

**Теорема 4.** *Сумма углов треугольника в плоскости Лобачевского меньше  $\pi$ .*

**Доказательство.** а) Рассмотрим сначала случай прямоуголь-

ного треугольника, действуя в аффинной карте  $(\mathbb{E}_0, \Phi_0)$  и обозначая для простоты (до конца параграфа) точки в  $\tilde{\Lambda}$  и в  $\Lambda$  одинаковыми заглавными латинскими буквами, а  $\tilde{\Lambda}$ -движения — греческими буквами. При помощи  $\tilde{\Lambda}$ -движения совместим вершину при прямом угле с точкой  $O$ . Мы получим треугольник  $AOB$ . Докажем, что каждый его угол  $\widehat{BAO}$  и  $\widehat{OBA}$  в смысле геометрии Лобачевского (пишем  $\widehat{BAO}|_\Lambda$ ) меньше, чем измеренный в аффинной карте (пишем  $\widehat{BAO}|_E$ ):

$$\widehat{BAO}|_\Lambda < \widehat{BAO}|_E, \quad \widehat{OBA}|_\Lambda < \widehat{OBA}|_E. \quad (9)$$

Мы знаем, конечно, что  $\widehat{AOB}|_\Lambda = \widehat{AOB}|_E = \pi/2$ . Из (9) будет следовать нужное утверждение, поскольку сумма углов треугольника в евклидовой геометрии равна  $\pi$ .

Доказательства неравенств (9) одинаковы, поэтому ограничимся первым из них.

Найдём движение, переводящее  $A$  в  $O$ , и умножим его на другое движение — поворот вокруг точки  $O$  — так, чтобы сторона  $\varphi(A)\varphi(O)$  ( $\varphi$  — результирующее движение) лежала на одной прямой со стороной  $AO$ .

Дальнейшие рассуждения опираются на рис. 27 и на утверждения 1)–6), сформулированные в начале этого пункта.

По определению

$$\widehat{BAO}|_\Lambda = \varphi(B)\widehat{O}\varphi(O)|_E,$$

и нам достаточно доказать, что в аффинной евклидовой карте имеет место неравенство  $\varphi(B)\widehat{O}\varphi(O) < \widehat{BAO}$ . В свою очередь это неравенство в силу утверждения 4) будет следовать из евклидовых соотношений

$$O\varphi(O) = AO, \quad (10)$$

$$\varphi(O)\varphi(B) < OB. \quad (11)$$

Отрезки  $AO$  и  $O\varphi(O) = \varphi(A)\varphi(O)$  равны в геометрии Лобачевского, поскольку один получается из другого  $\tilde{\Lambda}$ -движением  $\varphi$ . Поэтому поворот на угол  $\pi$  вокруг  $O$  должен совместить  $A$  с  $\varphi(O)$ . Но этот поворот является и евклидовым движением, откуда следует равенство (10).

Для доказательства неравенства (11) воспользуемся свойством

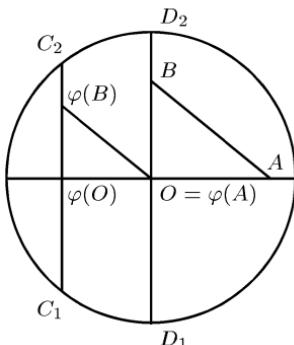


Рис. 27

расстояния Лобачевского

$$\rho(O, B) = \rho(\varphi(O), \varphi(B)).$$

Обозначим в соответствии с рис. 27 евклидовы длины:  $OB = x$ ,  $\varphi(O)\varphi(B) = y$ ,  $\varphi(O)C_2 = r$ . Заметим ещё, что  $OD_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ . По определению расстояния Лобачевского

$$\rho(O, B) = \log[O, B, D_2, D_1] =$$

$$= \log\left(\frac{OD_2}{D_2B} : \frac{OD_1}{D_1B}\right) = \log\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1+x}{1}\right) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

$$\rho(\varphi(O), \varphi(B)) = \log[\varphi(O), \varphi(B), C_2, C_1] =$$

$$= \log\left(\frac{\varphi(O)C_2}{C_2\varphi(B)} : \frac{\varphi(O)C_1}{C_1\varphi(B)}\right) = \log\left(\frac{r}{r-y} \cdot \frac{r+y}{r}\right) = \log\left(\frac{r+y}{r-y}\right).$$

Стало быть,

$$\frac{r+y}{r-y} = \frac{1+x}{1-y} \implies \frac{1+y/r}{1-y/r} = \frac{1+x}{1-x} \implies y = rx,$$

а так как  $r < 1$ , то  $y < x$ .

б) Для доказательства в общем случае воспользуемся утверждением 3). Из него следует, что треугольник не может иметь двух тупых углов: если бы у  $\triangle ABC$  (рис. 28) углы при вершинах  $A, B$  были тупые, то внешний угол при вершине  $A$  был бы острым и, значит, вопреки 3) меньше внутреннего угла при вершине  $B$ .

Пусть теперь в  $\triangle ABC$  углы при вершинах  $A$  и  $B$  острые (если один из них прямой, то теорема доказана (см. а))). Опустим, пользуясь 6), из  $C$  перпендикуляр  $CD$  на сторону  $AB$  (рис. 29). Тогда  $D$  лежит между  $A$  и  $B$ : допустив, что  $A$  лежит между  $D$  и  $B$ , мы приходим к выводу, что в  $\triangle CAD$  внешний угол при вершине  $A$  острый, а внутренний угол при вершине  $D$  прямой, что опять противоречит утверждению 3).

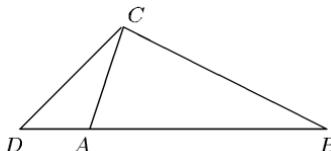


Рис. 28

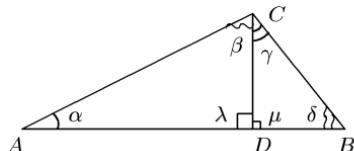


Рис. 29

Итак, точка  $D$  лежит между  $A$  и  $B$ , а треугольник  $ABC$  разбивается на два прямоугольных:  $ADC$  и  $BDC$ , для каждого из которых теорема доказана. Имеем

$$\alpha + \beta + \lambda < \pi, \quad \gamma + \delta + \mu < \pi,$$

откуда

$$\alpha + (\beta + \gamma) + \delta + \lambda + \mu < 2\pi,$$

а так как  $\lambda = \mu = \pi/2$ , то

$$\alpha + (\beta + \gamma) + \delta < \pi,$$

а это и есть утверждение теоремы.  $\square$

**Замечание.** Можно доказать, что в плоскости Лобачевского имеются треугольники со сколь угодно малой суммой углов. Далее, в евклидовой геометрии сумма углов  $n$ -угольника равна  $\pi(n - 2)$ . Так как всякий многоугольник  $M$  с углами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  может быть разбит на треугольники, то из теоремы 4 следует, что в геометрии Лобачевского справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i < \pi(n - 2). \quad (12)$$

**Теорема 5.** Пусть

$$v(M) := \pi(n - 2) - \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Если

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k,$$

причём многоугольники  $M_1, M_2, \dots, M_k$  не имеют попарно общих внутренних точек, то

$$v(M) = \sum_{i=1}^k v(M_i).$$

**Доказательство.** Очевидно,  $v(M)$  не изменится, если какую-нибудь внутреннюю точку на стороне многоугольника  $M$  объявить вершиной: число сторон увеличится на 1, а сумма углов увеличится на  $\pi$ . Следовательно, можно считать, что если вершина многоугольника  $M_i$  принадлежит  $M_j$ , то она является и вершиной  $M_j$ . Стало быть, пересечение любых двух многоугольников  $M_i, M_j$  будет являться объединением их общих сторон. Нетрудно видеть также, что найдётся такой многоугольник  $M_j$ , что  $\cup_{i \neq j} M_i$  будет многоугольником. Это позволяет свести доказательство к случаю  $k = 2$ .

Пусть многоугольники  $M_1$  и  $M_2$  имеют соответственно  $n_1$  и  $n_2$  сторон, причём  $m$  сторон у них общие. Эти стороны идут подряд, иначе множество  $M_1 \cup M_2$  не было бы многоугольником. Число сторон многоугольника  $M$  равно  $n_1 + n_2 - 2m$ . Сумма углов многоугольников  $M_1$  и  $M_2$  равна сумме углов многоугольника  $M$  плюс  $2\pi(m - 1)$ . Элементарная выкладка показывает, что

$$v(M) = v(M_1) + v(M_2). \quad \square$$

Свойства функции  $v$  аналогичны свойствам площади фигур на евклидовой плоскости. В плоскости Лобачевского значение  $v(M)$  можно по определению считать площадью многоугольника  $M$ .

Приведём своеобразный признак равенства треугольников.

**Теорема 6.** Если все углы треугольника  $ABC$  на плоскости Лобачевского равны соответственно углам треугольника  $A'B'C'$ , то эти треугольники равны.

**Доказательство.** Движением плоскости Лобачевского можно совместить вершину  $A'$  треугольника  $A'B'C'$  с  $A$  и сделать так, чтобы сторона  $A'B'$  пошла по  $AB$ , а сторона  $A'C'$  — по  $AC$  (рис. 30). Тогда стороны  $BC$  и  $B'C'$  не могут пересечься, поскольку это противоречило бы утверждению 3).

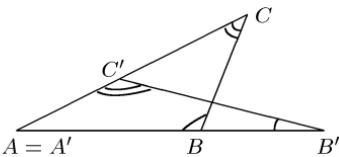


Рис. 30

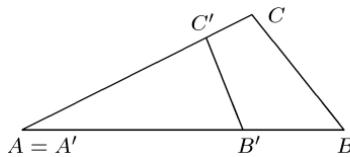


Рис. 31

Следовательно, один из этих треугольников будет лежать целиком внутри другого (рис. 31). Обозначим через  $M$  дополнительный четырёхугольник. Так как суммы углов в  $\Delta ABC$  и  $\Delta A'B'C'$  равны, то из теоремы 5 следует, что  $v(M) = 0$ , но это противоречит неравенству (12). Остаётся единственная возможность, что треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  совпадут.  $\square$

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

А. Записки лекций И.Р. Шафаревича 60-х годов.

Б. Винберг Э.Б., Линейная алгебра и геометрия. — М., МГУ, 1966.

В. Никулин В.В., Шафаревич И.Р., Геометрии и группы. — М., Наука, 1983.

В части IV книги В можно получить основательное знакомство не только с плоскостью Лобачевского (в другой её модели), но и с общей точкой зрения на геометрию.

## § 6. Нерешённые задачи

**1. Проблема Штрассена.** Как и в случае гауссовой величины  $G_n$  (см. замечание 2 в [BA I, гл. 1, § 3]), представляет значительный интерес оценка числа операций, необходимых для перемножения двух квадратных матриц большого порядка  $n$ . Так как умножение двух чисел более трудоёмко, чем сложение, то преобладающее значение при априорных оценках необходимого машинного времени имеет число операций умножения.

Непосредственно видно, что умножение двух  $n \times n$ -матриц требует  $n^3$  умножений коэффициентов матриц и  $n^2(n - 1)$  сложений. Начнём с  $n = 2$ :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{vmatrix}.$$

Из тождеств

$$aA + bC = (a - d)(A - D) + (b - d)(C + D) + d(A + C) + (a - b)D,$$

$$aB + bD = -(a - b)D + a(B + D),$$

$$cA + dC = (c - d)A + d(A + C),$$

$$cB + dD = (a - d)(A - D) - (a - c)(A + B) + a(B + D) - (c - d)A$$

видно, что для умножения двух  $2 \times 2$ -матриц с любыми коэффициентами (которые в свою очередь могут быть матрицами) достаточно 7 умножений (вместо 8) за счёт большего числа 18 сложений (вместо 4). Применяя этот метод к матрицам порядка  $n = 2^k$ , разбитым на четыре  $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ -блока и используя простую индукцию по  $k$ , нетрудно показать, что их можно перемножить, применив  $7^k$  умножений и  $6(7^k - 4^k)$  сложений. Пусть теперь  $n$  — любое произвольно большое натуральное число. Дополнив матрицы порядка  $n$  до ближайшего порядка  $2^k$  нулями, можно убедиться в том, что для их умножения достаточно  $O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})$  операций (V. Strassen, 1969).

Позднее было доказано (Coppersmith-Winograd, 1982), что достаточно и  $O(n^{2.50})$  операций. Остаётся открытой следующая

**Гипотеза.** *Существует алгоритм, гарантирующий умножение двух  $n \times n$ -матриц при больших натуральных  $n$  за  $O(n^{2+\varepsilon})$  операций, где  $\varepsilon$  — любое сколь угодно малое вещественное число.*

**2. Ортогональные разложения.** Пусть  $\mathcal{L}$  — комплексное векторное пространство всех матриц порядка  $n$  с нулевым следом:

$$\mathcal{L} = \langle A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \rangle.$$

Относительно операции коммутирования

$$[A, B] = AB - BA$$

пространство  $\mathcal{L}$  является алгеброй Ли  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  (или, как принято говорить, алгеброй Ли типа  $A_{n-1}$ ). На  $\mathcal{L}$  определено невырожденное скалярное произведение

$$(A | B) = \operatorname{tr} AB,$$

обладающее (см. (7) из § 2 гл. 6) свойством ассоциативности:

$$([A, B] | C) = (A | [B, C]).$$

Легко проверяется, что ограничение  $(A | B)|_{\mathcal{H}_0}$  на подпространство

$$\mathcal{H}_0 = \left\langle \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \sum \lambda_i = 0 \right\rangle$$

всех диагональных матриц из  $\mathcal{L}$  невырождено. То же относится и к любой сопряжённой подалгебре

$$\mathcal{H} = X^{-1} \mathcal{H}_0 X, \quad \det X \neq 0$$

(в теории алгебр Ли говорят о подалгебре Картана  $\mathcal{H}$ ). Можно показать, что  $\mathcal{L}$  как векторное пространство может быть разложено в прямую сумму подалгебр Картана:

$$\mathcal{L} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_n, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_i = X_i^{-1} \mathcal{H}_0 X_i, \quad X_i$$

— подходящим образом выбранные невырожденные матрицы. Ставится следующий

*Вопрос. Можно ли найти такие матрицы сопряжения  $X_i$ , чтобы в разложении (1) подпространства  $\mathcal{H}_i$  были попарно ортогональны?*

Если это так, то говорят об *ортогональном разложении* (коротко: ОР) алгебры Ли  $\mathcal{L}$ . Существование ОР интересно с точки зрения приложений к теории конечных групп, целочисленных решёток и т.д. (см. по этому поводу монографию: *Kostrikin A.I., Pham Hieu Tiep. Orthogonal Decompositions and Integral Lattices*. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1994).

*Гипотеза.* *ОР алгебры Ли  $\mathcal{L} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  существует тогда и только тогда, когда  $n = p^k$  — степень некоторого простого числа  $p$ .*

В одну сторону гипотеза доказана: для каждого  $n = p^k$  ОР построено. Осталось доказать, что при  $n \neq p^k$  ОР построить невозможно. Очевидно,  $n = 6$  — наименьшее целое число, для которого гипотезу надо доказать или опровергнуть. Итак, существуют ли 7 попарно ортогональных 5-мерных подпространств  $\mathcal{H}_i$  в  $\mathfrak{sl}(6, \mathbb{C})$ , удовлетворяющих условию (1)? Ответить на этот, казалось бы, весьма конкретный вопрос пока не представляется возможным.

**3. Конечные проективные плоскости.** Развивая тему § 3 из гл. 5, назовём *проективной плоскостью*  $\Pi$  множество точек с выделенными подмножествами — прямыми, удовлетворяющими следующим аксиомам.

P1. *Любые две различные точки принадлежат одной и только одной прямой.*

P2. *Любые две различные прямые содержат одну и только одну общую точку.*

P3. *Существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.*

Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Пусть дано целое число  $n \geq 2$ . В проективной плоскости  $\Pi$  следующие свойства эквивалентны:*

- 1) некоторая прямая состоит в точности из  $n + 1$  точек;
- 2) некоторая точка принадлежит в точности  $n + 1$  различным прямым;
- 3) каждая прямая состоит в точности из  $n + 1$  точек;

4) каждая точка принадлежит в точности  $n + 1$  различным прямым;

5)  $\Pi$  содержит ровно  $n^2 + n + 1$  точек;

6)  $\Pi$  содержит ровно  $n^2 + n + 1$  прямых;

Доказательство можно извлечь, например, из книги: Холл М. Теория групп. — М.: ИЛ, 1962.

**Определение.** В случае  $|\Pi| = n^2 + n + 1$  говорят о *проективной плоскости порядка  $n$* .

В [ВА III] будет установлено, что для любого простого числа  $p$  и любого натурального числа  $k$  существует поле  $\mathbb{F}_q = GF(q)$  из  $q = p^k$  элементов (при  $k = 1$  нам это известно). Если  $V$  — трёхмерное векторное пространство над  $\mathbb{F}_q$ , то  $\mathbb{F}_q \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$  — дезаргова (см. [2]) проективная плоскость порядка  $q$ . Вообще говоря, при  $k > 1$  существуют и недезарговы проективные плоскости порядка  $q$ . Но (и это самое замечательное) до сих пор не построено ни одной проективной плоскости порядка  $n \neq p^k$ .

**Гипотеза.** *Порядок любой конечной проективной плоскости должен быть степенью некоторого простого числа  $p$ .*

По своей формулировке эта гипотеза напоминает гипотезу из п. 2, и какая-то скрытая аналогия на самом деле существует, но задача о проективных плоскостях имеет более почтенный возраст. Результаты однако довольно скромные.

Приведём интересный результат арифметического характера (Bruck, Ryser): *если  $\Pi$  — проективная плоскость порядка  $n$  и  $n \equiv \equiv 1, 2 \pmod{4}$ , то  $n = a^2 + b^2$  — сумма квадратов двух целых чисел.*

Скажем,  $n = 6$ , не представимое в виде суммы двух квадратов, не может быть порядком проективной плоскости. Долгие годы оставался открытым вопрос о возможности построения проективной плоскости порядка  $10 = 3^2 + 1^2$ . Лишь грубый счёт на ЭВМ “Крейг” в течение 700 ч чистого процессорного времени привёл к выводу о non-existence таковой плоскости. Разумеется, идти по такому пути далее не представляется возможным. При  $n > 10$  гипотеза остаётся недоказанной.

**4. Базисы пространств и латинские квадраты.** На уровне понимания гл. 1 формулируется следующая

**Гипотеза 1** (Rota, 1989). *Пусть  $V$  —  $n$ -мерное векторное пространство над любым бесконечным полем. Предположим, что  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — какие-то  $n$  базисов пространства  $V$ .*

*Тогда каждый из базисов  $B_i$  может быть так упорядочен, скажем,  $B_i = (\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \dots, \mathbf{b}_{in})$ , что наборы  $C_j = (\mathbf{b}_{1j}, \mathbf{b}_{2j}, \dots, \mathbf{b}_{nj})$ ,  $1 \leq j \leq n$ , тоже будут базисами в  $V$ .*

Другими словами, после надлежащего упорядочения каждая строка и каждый столбец матрицы  $B = (\mathbf{b}_{ij})$  будут состоять из базисных элементов. Уже при  $n = 3$  возникает маленькое упражнение, а при при любых  $n$  гипотеза, имеющая отношение к теории инвариантов,

пока не доказана. Между тем установлено, что при любом чётном  $n$  гипотеза 1 вытекает из гипотезы 2 ниже, относящейся к другому стариинному комбинаторному объекту.

Квадратную  $n \times n$ -таблицу (или матрицу)  $L$ , заполненную  $n$  символами, скажем, целыми числами  $0, 1, \dots, n-1$ , называют *латинским квадратом*, если символы в каждой строке и в каждом столбце оказываются различными. *Знаком* строки или столбца латинского квадрата  $L$  называется знак перестановки на множестве  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , отвечающей данной строке или данному столбцу. Произведение всех  $2n$  знаков строк и столбцов называется *знаком*  $\varepsilon(L)$  квадрата  $L$ . По определению  $L$  *чётный*, если  $\varepsilon(L) = +1$ , и *нечётный*, если  $\varepsilon(L) = -1$ . При нечётном  $n$  число чётных и нечётных латинских квадратов порядка  $n$  одинаково, но уже при  $n = 2, 4, 6$  это не так.

Гипотеза 2 (Alon-Tarsi, 1986). *Пусть  $n$  — чётное натуральное число. Тогда  $\sum \varepsilon(L) \neq 0$ , где сумма берётся по всем латинским квадратам  $L$  порядка  $n$ .*

Совсем недавно было доказано [Drisko A.A. // Advances in Math. — 1997. — № 128. — Р. 20–35], что если  $n = p + 1$ , где  $p$  — нечётное простое число, то гипотеза 2 верна. Следовательно, верна при любом  $n = p + 1$  и гипотеза 1. Возможно ли обобщение этого результата на случай  $n = p^k + 1$ ?

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

---

Номер **p.q.r** отсылает к упражнению **r** из § **q** главы **p**.

**1.2.9.**  $\dim \text{Mag}_3(\mathbb{Q}) = 3$ .  $\dim \text{Mag}_4(\mathbb{Q}) = 8$ .

**1.2.10.** Непосредственно проверяется, что  $SA = \sigma(A)S = AS$  для любой полумагической матрицы  $A$ . Кроме того,  $S^m = n^{m-1}S$  для любого показателя  $m \geq 1$ .

Если теперь  $\text{Mag}_n^0(\mathbb{Q})$  (соответственно  $\text{SMag}_n^0$ ) — множество магических (соответственно полумагических) матриц с нулевым следом, то

$$\text{Mag}_n(\mathbb{Q}) = \text{Mag}_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}S, \quad \text{SMag}_n(\mathbb{Q}) = \text{SMag}_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}S \quad (*)$$

(достаточно заметить, что  $\text{tr}(A - \frac{1}{n}\text{tr}(A)S) = 0$ ).

Далее,

$$\dim \text{Mag}_n^0(\mathbb{Q}) \geq \dim \text{SMag}_n^0(\mathbb{Q}) - 2,$$

поскольку пространство магических квадратов получается из полумагических квадратов добавлением ровно двух ограничений. Более точно,

$$\text{SMag}_n^0(\mathbb{Q}) = \text{Mag}_n^0(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}E \oplus \mathbb{Q}D. \quad (**)$$

Действительно, предположим, что имеется соотношение  $A + \lambda E + \mu D = 0$ , где  $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ ,  $A \in \text{Mag}_n^0(\mathbb{Q})$ . Умножив его на  $S$ , получим  $(\lambda + \mu)S = 0$ , откуда  $\lambda + \mu = 0$ . Если же в соотношении перейти к следу, то получим  $n\lambda + \mu \text{tr } D = 0$ . Результатом будет  $\lambda = \mu = 0$ .

Остаётся сопоставить равенства  $(*)$  и  $(**)$ .

**1.2.11.** Указание. Рассмотреть отображение из прямой суммы подпространств  $V_i$  в прямую сумму  $k - 1$  экземпляров пространства  $V$ , а именно

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \mapsto (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{v}_k).$$

Пересечение всех  $V_i$  есть ядро этого отображения, имеющее размерность не менее, чем  $\dim V_1 + \dots + \dim V_k - (k - 1)n$ .

**1.4.3.**  $-1/2 < \lambda < 1$ ,  $\mu < -2$ .

**1.4.4.**  $z_1 = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$ ,  $z_2 = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$ ,  $x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$ .

**2.1.3.** Очевидно.

**2.2.7.** Пусть  $\dim \text{Im } \mathcal{A}^{i-1} = k + l$ , причём

$$\text{Im } \mathcal{A}^{i-1} = \left\langle \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_k; \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_{k+l} \right\rangle,$$

где  $\langle \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{A}^{i-1}\mathbf{e}_k \rangle = \text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}$ . Таким образом,

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_{k+l}; \mathbf{e}_{k+l+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle,$$

$$\langle \mathbf{e}_{k+l+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \text{Ker } \mathcal{A}^{i-1},$$

$$\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{e}_{k+l+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle = \text{Ker } \mathcal{A}^i,$$

и мы имеем

$$\dim \text{Ker } \mathcal{A}^i = n - l, \quad \dim \text{Ker } \mathcal{A}^{i-1} = n - k - l,$$

$$\dim(\text{Im } \mathcal{A}^{i-1} \cap \text{Ker } \mathcal{A}) = k = (n - l) - (n - k - l).$$

**2.2.8.** По условию  $A = C^{-1}BC$ , где  $C \in M_n(\mathbb{C})$ . Нужно доказать, что среди решений уравнения  $XA = BX$  наряду с  $X = C$  найдётся и невырожденная вещественная матрица  $D$ . Решения над  $\mathbb{C}$  нашего уравнения составляют комплексное векторное пространство  $W$  с базисом  $C_1, \dots, C_m$ . Представив  $C_j$  в виде  $C_j = G_j + iH_j$  с  $G_j, H_j \in M_n(\mathbb{R})$ , мы убеждаемся в том, что  $C_j A = BC_j$  и  $H_j A = BH_j$ , т.е. пространство  $W$  допускает вещественный базис  $(D_1, \dots, D_m)$  (некоторую выборку из  $G_1, \dots, G_m; H_1, \dots, H_m$ ). Пусть  $f(t_1, \dots, t_m) = \det(t_1 D_1 + \dots + t_m D_m)$  — вещественный многочлен от  $m$  переменных. По условию он не равен тождественно нулю над  $\mathbb{C}$ , а в таком случае он не равен тождественно нулю и над  $\mathbb{R}$ . Значит, наше матричное уравнение имеет невырожденное вещественное решение  $t_1^0 D_1 + \dots + t_m^0 D_m$ .

**2.2.9. а)** Очевидно.

б) В случае  $n = \dim_{\mathbb{K}} V = 1$  утверждение справедливо. Действуем по индукции относительно  $n$ . Пусть  $W$  — произвольная гиперплоскость в  $V$ , так что  $V = \langle W, \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{K}}$ . По предположению индукции существует вектор  $\mathbf{w} \in W$  такой, что  $\mu_{\mathcal{A}, \mathbf{w}}(\mathcal{A})W = \mathbf{0}$ . Положим

$$f_k(t) = \mu_{\mathcal{A}, \mathbf{w} + k\mathbf{e}}(t), \quad k = 0, 1, \dots$$

Согласно а)  $f_k(t)$  делит  $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ . Но таких делителей конечное число, поэтому  $f_i(t) = f_j(t) := f(t)$  для некоторой пары индексов  $i, j$ ,  $i \neq j$  (поле  $\mathbb{K}$  бесконечно). Итак,

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{w} + i\mathbf{e}) = \mathbf{0} = f(\mathcal{A})(\mathbf{w} + j\mathbf{e}).$$

Отсюда  $f(\mathcal{A})\mathbf{w} = \mathbf{0} = f(\mathcal{A})\mathbf{e}$ , и вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{w} + i\mathbf{e}$  или  $\mathbf{a} = \mathbf{w} + j\mathbf{e}$  будет искомым.

**2.2.10. а)** Ясно, что

$$(*) \implies W + U \supset W_1 + (U \cap V_1) = V_1.$$

Далее,  $\mathcal{P}_2(W + U) = W_2 + \mathcal{P}_2(U) = V_2$ . Поэтому  $V = W + U$ .

б) По условию  $\mathbf{v} \in V \implies \mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w} \in W$ ,  $\mathbf{u} \in U$ . Значит,  $\mathbf{v} = [\mathcal{P}_1(\mathbf{w}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{w})] + [\mathcal{P}_1(\mathbf{u}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{u})] = [\mathcal{P}_1(\mathbf{w}) + \mathcal{P}_1(\mathbf{u})] + [\mathcal{P}_2(\mathbf{w}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{u})]$ . Если  $\mathbf{v} \in V_1$ , то  $\mathcal{P}_2(\mathbf{w}) + \mathcal{P}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ . Но по условию  $\mathcal{P}_2(U) \cap W_1 = \mathbf{0}$ , поэтому  $\mathcal{P}_2(\mathbf{w}) = \mathbf{0} = \mathcal{P}_2(\mathbf{u})$  и, следовательно,  $V_1 = W_1 + (U \cap V_1)$ . Применяя  $\mathcal{P}_2$  к  $V = W + U$ , получаем  $V_2 = W_2 + \mathcal{P}_2(U)$ , т.е. справедливы разложения  $(*)$ .

Наконец,  $\mathbf{w} \in W \cap U \implies \mathcal{P}_2(\mathbf{w}) \in \mathcal{P}_2(W) \cap \mathcal{P}_2(U) = W_2 \cap \mathcal{P}_2(U) = \mathbf{0} \implies \mathbf{w} \in W_1$  и  $\mathbf{w} \in W_1 \cap U$ , т.е.  $W \cap U = W_1 \cap U$ .

**2.2.11.** Матрице  $A$  отвечает линейный оператор  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$  с  $\text{tr } \mathcal{A} = 0$ . Пусть при этом  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ . Задача заключается в построении нового базиса  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , относительно которого оператору  $\mathcal{A}$  отвечала бы матрица  $A'$  с нужными свойствами.

Если  $\mathcal{A} = \lambda \mathcal{E}$ , то  $\text{tr } \mathcal{A} = n\lambda$  и  $\lambda = 0$ . Если  $\mathcal{A} \neq \lambda \mathcal{E}$ , то обязательно найдутся два линейно независимых вектора вида  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 = \mathcal{A}\mathbf{e}'_1$ . Это даёт

возможность поставить 0 в левом верхнем углу матрицы оператора  $\mathcal{A}$ . Пусть уже построены линейно независимые векторы  $e'_1, \dots, e'_k$ , относительно которых  $a'_{11} = \dots = a'_{kk} = 0$ . Берём теперь такой вектор  $e'_{k+1} \notin V_k$ ,  $V_k = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$ , чтобы  $e'_{k+2} := Ae'_{k+1}$  не содержался в  $\langle V_k, e'_{k+1} \rangle$ . Получаем ещё один нуль на диагонали. Если это невозможно, то приходим к ситуации, когда  $x \notin V_k \implies Ax \in V_k$ . В случае  $Ax \in V_k \forall x \notin V_k$  любой базис пространства  $V$ , продолжающий  $e'_1, \dots, e'_k$ , будет искомым. Пусть теперь  $Ax = \lambda_x x + \dots$ , где точками обозначен вектор из  $V_k$ . Если  $\lambda_x = \lambda \forall x \notin V_k$ , то снова  $\text{tr } \mathcal{A} = (n - k)\lambda = 0 \implies \lambda = 0$ , и всё доказано. Если же  $Au = \lambda u$ ,  $Av = \mu v$ ,  $\lambda \neq \mu$ , для некоторых векторов  $u, v \notin V_k$ , то полагаем, например,  $e'_{k+1} = u + v$ ,  $e'_{k+2} = \mathcal{A}(u + v) = \lambda u + \mu v$ . Это даёт возможность поставить дополнительный нуль на диагонали. Очевидная индукция завершает рассуждение.

**2.2.12.** Да, существенно. Если, например,  $n = p$  и  $A = E$ , то  $\text{tr } A = 0$ , а все подобные матрицы  $C^{-1}AC$  совпадают с  $A$ .

**2.3.2.** Для матриц  $E_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , положим  $P_i = \mathcal{D}(E_{ii})$ . Тогда

$$P_i P_j = \mathcal{D}(E_{ii}) \mathcal{D}(E_{jj}) = \mathcal{D}(E_{ii} E_{jj}) = \mathcal{D}(\delta_{ij} E_{ii}) = \delta_{ij} P_i,$$

т.е.  $P_1, \dots, P_n$  — ортогональная система идемпотентных матриц. Отождествляя  $n \times n$ -матрицы с операторами на координатном векторном пространстве  $V$ , для единичной матрицы  $E$  будем иметь

$$\mathcal{D}(E)V = P_1V \oplus \dots \oplus P_nV,$$

откуда  $\sum_i \text{rank } P_i = \text{rank } \mathcal{D}(E)$ . Если  $P_i \neq 0$  при всех  $i$ , то отсюда вытекает, что  $\text{rank } P_i = 1$ . Естественно ожидать, что так оно и есть. Действительно, в противном случае  $P_i = 0$  для некоторого  $i$ , а тогда

$$P_j = \mathcal{D}(E_{ji} E_{ii} E_{ij}) = \mathcal{D}(E_{ji}) P_i f(E_{ij}) = 0 \quad \forall j,$$

так что  $\mathcal{D}(E) = \sum_i P_i = 0$ . Но в этом случае  $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(EX) = \mathcal{D}(E)f(X) = 0$  для произвольной матрицы  $X$  — противоречие. Мы приходим к выводу, что  $\text{rank } \mathcal{D}(E) = n$ , а из  $\mathcal{D}(E)^2 = \mathcal{D}(E)$  следует, что  $\mathcal{D}(E) = E$ .

Далее,  $\dim P_i V = 1 \implies P_i V = \langle A^{(1)} \rangle$ . Пусть  $A^{(i)}$  — вектор-столбец в  $V = \mathbb{K}^n$  вида  $A^{(i)} = \mathcal{D}(E_{i1}) A^{(1)}$ ,  $2 \leq i \leq n$ . Так как  $E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$ , то

$$\mathcal{D}(E_{ij}) A^{(k)} = \mathcal{D}(E_{ij}) \mathcal{D}(E_{k1}) A^{(1)} = \mathcal{D}(E_{ij} E_{k1}) = \delta_{jk} A^{(i)}. \quad (*)$$

В частности,  $\mathcal{D}(E_{1i}) A^{(i)} = A^{(1)}$  и  $P_i A^{(i)} = A^{(i)}$ . Стало быть,  $A^{(i)} \neq 0$  и  $A^{(i)} \in P_i V$ , т.е.  $P_i V = \langle A^{(i)} \rangle$ ,  $1 \leq i \leq n$ ;  $V = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ . Пусть  $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$  —  $n \times n$ -матрица (строка столбцов). По определению  $\text{rank } A = n$ . Согласно  $(*)$

$$\mathcal{D}(E_{ij}) A = (\mathbf{0}, \dots, \underbrace{A^{(i)}}_j, \dots, \mathbf{0}) = AE_{ij}$$

и, значит,  $\mathcal{D}(X)A = AX$ . Полагая  $C = A^{-1}$ , будем иметь  $\mathcal{D}(X) = C^{-1}XC = f_C(X)$ .  $\square$

**2.3.3.** По предположению

$$\mathcal{A}^p V = \mathcal{A}^{p+1} V = \dots = \mathcal{A}^{2p} V = \mathcal{A}^p (\mathcal{A}^p V),$$

откуда  $\text{Im } \mathcal{A}^p \cap \text{Ker } \mathcal{A}^p = \mathbf{0}$ , что с учётом теоремы 4 из § 1 приводит к прямой сумме  $V = \text{Ker } \mathcal{A}^p \oplus \text{Im } \mathcal{A}^p$ . Инвариантность слагаемых относительно  $\mathcal{A}$  очевидна и отмечалась ранее.

**2.3.5.** Нормализованному многочлену  $f(t) = t^m + \sum_{i=1}^m a_i t^{m-i} \in \mathbb{C}[t]$  сопоставим комплексно-сопряжённый  $\bar{f}(t) = t^m + \sum_{i=1}^m \bar{a}_i t^{m-i}$ . Из условий следует, что  $\chi_A(t) = f(t)\bar{f}(t)$  — произведение нормализованных взаимно простых комплексно-сопряжённых многочленов. Следовательно,  $\chi_A(t) = p^2 + q^2$  для некоторых взаимно простых вещественных многочленов  $p(t), q(t)$ . Определим  $r(t), s(t) \in \mathbb{R}[t]$  такие, что  $pr - qs = 1$ , и положим  $g = ps + qr$ ,  $h = r^2 + s^2$ . Тогда

$$1 + g^2 = (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2 = (r^2 + s^2)(p^2 + q^2) = h(t) \chi_A(t).$$

Остается положить  $B = g(A)$ .

**2.3.6.** Если одна из матриц  $A, B$  невырождена, то всё в порядке. Скажем,  $\chi_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda E) = \det A^{-1}(AB - \lambda E)A = \det(BA - \lambda E) = \chi_{BA}(\lambda)$ . Так как  $\lambda$ -многочлены  $\det(AB - \lambda E)$  и  $\det(BA - \lambda E)$  непрерывно зависят от коэффициентов матриц  $A, B$ , то интересующее нас равенство справедливо и для вырожденных матриц.

**2.3.7.** Привести матрицу  $B$  к диагональному виду.

**2.3.8.** Убедиться в том, что матрица  $A \in M_n(\mathbb{Q})$ , интерпретируемая как линейный оператор на координатном пространстве  $\mathbb{Q}^n$ , является полумагической в точности тогда, когда столбец  $e := [1, 1, \dots, 1]$  служит собственным вектором одновременно для  $A$  и  ${}^t A$  (с одним и тем же собственным значением  $\lambda = \sigma(A) = \sigma({}^t A)$ ). Коль скоро это так, то  $A, B \in \text{SMag}_n(\mathbb{Q}) \implies (AB)e = A(Be) = \sigma(B)Ae = \sigma(A)\sigma(B)e; {}^t(AB)e = {}^t B({}^t Ae) = \sigma(A)\sigma(B)e \implies AB \in \text{SMag}_n(\mathbb{Q})$ .

**2.3.9.** При  $n = 1$  утверждение верно. Далее — индукция по  $n$ . Пусть  $n$  — наименьший порядок, для которого утверждение неверно, т.е. для некоторой  $n \times n$ -матрицы  $A = (a_{ij})$  все матрицы из  $S(A)$  имеют собственное значение 1. Другими словами, любой матрице  $D = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\theta_i = \pm 1$ , отвечает вектор-стобец  $x \neq \mathbf{0}$  с  $DAx = x$ , или, что то же самое,  $(A - D)x = \mathbf{0}$ . Приходим к соотношению

$$d(\theta_1, \dots, \theta_n) = \det(A - \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)) = 0$$

для всех  $2^n$  выборов  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Разлагая определитель по элементам первой строки, получим выражение

$$d(\theta_1, \dots, \theta_n) = (a_{11} - \theta_1)d^*(\theta_2, \dots, \theta_n) + \text{члены без } \theta_1. \quad (*)$$

По предположению индукции определитель  $d^*(\theta_2, \dots, \theta_n)$  порядка  $n - 1$  отличен от нуля для некоторого набора  $\theta_2^0, \dots, \theta_n^0$ . В таком случае из

$$d(1, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0) = 0 = d(-1, \theta_2^0, \dots, \theta_n^0)$$

и из  $(*)$  следует, что

$$(a_{11} - 1)d^*(\theta_2^0, \dots, \theta_n^0) = (a_{11} + 1)d^*(\theta_2^0, \dots, \theta_n^0),$$

откуда  $a_{11} - 1 = a_{11} + 1$  — противоречие, поскольку  $\text{char } \mathfrak{K} \neq 2$ .

**2.3.10.** В одну сторону импликация вытекает из результатов п. 1 о проекторах. Предположим теперь, что  $\text{rank } \mathcal{A} = r$ ,  $\text{rank}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = n - r$ . Тогда  $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r; \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ , векторы  $\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \dots, \mathcal{A}\mathbf{e}_r$  линейно независимы и  $\mathcal{A}\mathbf{e}_{r+1} = \dots = \mathcal{A}\mathbf{e}_n = 0$ . Так как  $(\mathcal{E} - \mathcal{A})(\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n) = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  и  $\text{rank}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = n - r$ , то

$$(\mathcal{E} - \mathcal{A})(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r) \subseteq \langle \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle.$$

Если  $(\mathcal{E} - \mathcal{A})\mathbf{e}_i = \alpha_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ , то, положив

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i - \alpha_{r+1}\mathbf{e}_{r+1} - \dots - \alpha_n\mathbf{e}_n, \quad i \leq r; \quad \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i, \quad r+1 \leq i \leq n,$$

мы будем иметь  $\mathcal{A}\mathbf{e}'_i = \mathcal{A}\mathbf{e}_i$  и

$$(\mathcal{E} - \mathcal{A})\mathbf{e}'_i = 0, \quad i \leq r; \quad (\mathcal{E} - \mathcal{A})\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i, \quad r+1 \leq i \leq n.$$

Значит,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{E} - \mathcal{A}$  — проекторы и  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ .

**2.4.1.** Матрица  $A$  имеет вид  $A = (m+1)E - S$  и

$$\det A = (m+1)^{n-1}(m+1-n).$$

**2.4.2.**  $A_1, A_2, A_4$  и  $A_3$  соответственно.

**2.4.3.** а)  $J(A) = J_2(3) + J_1(3) + J_1(3) + J_1(-2)$ ; б) да — в случае ранга 1 или 4, нет — в случае ранга 3.

**2.4.4.** а)  $\chi_A(t) = \chi_B(t) = (t-4)^2(t-2)$ ;

б)  $\mu_A(t) = (t-4)(t-2)$ ,  $\chi_B(t) = (t-4)^2(t-2)$ ;

в)  $J(A) = \text{diag}(2, 4, 4)$ ,  $J(B) = J_1(2) + J_2(4)$ .

**2.4.5.** Удобно рассмотреть расширение  $\tilde{\mathbb{K}}$  поля  $\mathbb{K}$ , содержащее все характеристические корни матрицы  $A$  (разумеется,  $\mathbb{K} = \mathbb{C} \implies \tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$ ). Аналог теоремы 4 позволяет привести  $A$  к треугольному виду, а так как  $\text{tr } A^k = \text{tr}(C^{-1}AC)^k$ , то с самого начала можно считать  $A$  верхней треугольной матрицей с характеристическими корнями  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  по диагонали. Пусть  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$  — все попарно различные корни кратностей  $n_0 \geq 0, n_1 \geq 1, \dots, n_p \geq 1$ ,  $\sum n_i = n$ . Для степени  $A^k$  характеристическими корнями будут  $\lambda_0^k, \dots, \lambda_p^k$ , так что по условию

$$n_1\lambda_1^k + \dots + n_p\lambda_p^k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

При  $p \geq 1$  имеем линейную однородную систему с отличным от нуля определителем Вандермонда, откуда  $n_1 = \dots = n_p = 0$  — противоречие. Таким образом,  $\lambda_0 = 0$  — единственный характеристический корень кратности  $n$  и, следовательно,  $\chi_A(t) = t^n$ , т.е.  $A^n = 0$ . Обратное утверждение тривиально.

**2.4.6.** Пусть сначала  $A$  — жорданова клетка порядка  $m$ . Тогда непосредственно проверяется, что  $\Pi_m^{-1}A\Pi_m = {}^t A$ , где  $\Pi_m = [\delta_{i,m+1-j}]_1^m$  — матрица с 1 на побочной диагонали и с 0 на всех остальных местах. Если  $A$  — прямая сумма клеток Жордана, то берётся прямая сумма матриц вида  $\Pi_m$ .

**2.4.7.** Без ограничения общности считаем  $A$  приведённой к ЖНФ:  $A = J(A)$ . Соотношение  $A^N = E$  выполняется в точности тогда, когда

$J_m^N(\lambda) = E_m$  для каждой жордановой клетки  $J_m(\lambda)$ , входящей в  $J(A)$ . Но это возможно только при  $m = 1$ . Таким образом,

$$F = J(A), \quad A^N = E \implies A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_i^N = 1.$$

**2.4.8.** Пусть сначала  $A$  — магическая  $3 \times 3$ -матрица с нулевым следом. Так как  $\text{tr } A = 0 \implies \sigma(A) = 0$ , то, используя матрицу  $S$  из упр. 1.2.9, получаем  $AS = \sigma(A)S = 0 \implies \det A = 0$  (в противном случае  $S = A^{-1}(AS) = 0$  — противоречие). По теореме Гамильтона—Кэли имеем  $A^3 = \lambda A$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , так что  $A^3$  — магическая матрица. В таком случае и  $A^m = \lambda^{(m-1)/2}A$  — магическая матрица,  $m = 2k + 1 \geq 3$ .

Если теперь  $A$  — произвольная магическая  $3 \times 3$ -матрица, то  $A_0 := A - (1/3)(\text{tr } A)S$  — магическая матрица и  $\text{tr } A_0 = 0$ . Стало быть,  $A_0^m \in \text{Mag}_3(\mathbb{Q})$  для любого нечётного  $m \geq 1$ . Но  $SA_0 = A_0S = \sigma(A_0) = 0$ , поэтому

$$A^m = \left( A_0 + \frac{1}{3}(\text{tr } A)S \right)^m = A_0^m + \left( \frac{1}{3}\text{tr } A \right)^m S^m \in \text{Mag}_3(\mathbb{Q}).$$

**2.4.10.**  $s(t) = (t^2 - 2\mu t + \lambda\mu)/(\lambda - \mu)$ ,  $n(t) = (t - \lambda)(t - \mu)/(\lambda - \mu)$ .

**2.4.11.** Пусть  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \prod_{i=1}^p (t - \lambda_i)^{n_i}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ ,  $\sum_i n_i = n$ . По теореме 3 имеем разложение  $V = \bigoplus_{i=1}^p V(\lambda_i)$  в прямую сумму корневых подпространств. Полагаем  $\mathcal{S}\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$  для любого  $\mathbf{x} \in V(\lambda_i)$  и  $\mathcal{N} = \mathcal{A} - \mathcal{S}$ . Если  $A$  — матрица оператора  $\mathcal{A}$  в жордановом базисе, то соответственно

$$S = \lambda_1 E_{n_1} + \dots + \lambda_p E_{n_p}, \quad N = A - S = N_{n_1} + \dots + N_{n_p},$$

где  $N_{n_i}$  — прямая сумма жордановых клеток  $J_k(0)$ ,  $k \leq n_i$ . Так как  $E_{n_i} N_{n_i} = N_{n_i} E_{n_i}$ , то  $SN = NS$ .

По китайской теореме об остатках (принять на веру или заглянуть в [ВА III]) эффективно строится комплексный многочлен  $f(t)$  такой, что

$$f(t) - \lambda_i = (t - \lambda_i)^{n_i} h_i(t), \quad h_i(t) \in \mathbb{C}[t], \quad i = 1, \dots, p.$$

Если теперь  $\mathbf{w}$  — произвольный вектор из  $V(\lambda_i)$ , то

$$\mathbf{w} = \chi_i(\mathcal{A}) f_i(\mathcal{A}) \mathbf{v}, \quad \chi_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{n_j},$$

и поэтому  $(f(\mathcal{A}) - \lambda_i)\mathbf{w} = \chi_{\mathcal{A}} \mathcal{A} f_i(\mathcal{A}) h_i(\mathcal{A}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , т.е. можно положить  $\mathcal{S} = f(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{A} - f(\mathcal{A})$ . Очевидно, можно считать  $\deg f(t) < n$ .

**2.4.12.**

$$(J_n(\lambda))^k = \begin{vmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda^{k-n+1} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{n-2}\lambda^{k-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{vmatrix}.$$

**2.4.13.** По теореме Гамильтона—Кэли (см. также упр. 14 в конце гл. 2 из [ВА I])  $2 \times 2$ -матрица  $[X, Y] = XY - YX$  удовлетворяет соотношению  $[X, Y]^2 = \lambda E$ ,  $\lambda = -\det[X, Y]$ , поскольку, как мы знаем,  $\text{tr}[X, Y] = 0$ . Так как  $[E, Z] = 0$ , то и  $[[X, Y]^2, Z] = 0$ .

**3.1.1.** а)  $\langle t^2 - 1/3 \rangle$ .

**3.1.2.** а)  $\cos \alpha = 3/\sqrt{10}$ ; б)  $\mathbf{z} \perp \mathbf{x} \implies z_1 + z_3 = 0$ ,  $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3]$ .

**3.1.3.** Пусть  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  — какой-нибудь ортонормированный базис  $n$ -мерного евклидова пространства  $V$ . Ввиду невырожденности матрицы  $A = (a_{ij})$  система векторов  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  с  $\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \mathbf{e}_i$  тоже будет базисом в  $V$ . Применяя к  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  процесс ортогонализации, описанный в теореме 6, получим ортонормированный базис  $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ , где  $\mathbf{e}'_j = \sum_{k=1}^j c'_{kj} \mathbf{a}_k$ ,  $c'_{kj} \neq 0$ ; матрица перехода  $C' = (c'_{kj})$  верхняя треугольная. Обратная к ней матрица  $C = (C')^{-1} = (c_{kj})$  тоже верхняя треугольная. Имеем

$$\mathbf{e}'_j = \sum_k c'_{kj} \mathbf{a}_k = \sum_i \left( \sum_k a_{ik} c'_{kj} \right) \mathbf{e}_i = \sum_i b_{ij} \mathbf{e}_i.$$

Матрица  $B = (b_{ij})$  ортогональная как всякая матрица перехода от одного ортонормированного базиса  $\mathbf{e}_i$  к другому  $\mathbf{e}'_i$ . Таким образом,  $B = AC' = AC^{-1}$ ,  $A = BC$ .

**3.1.4.** Матрицы  $(E \pm A)^{\pm 1}$ ,  $A^{\pm 1}$  коммутируют. Поэтому

$$\begin{aligned} {}^t K &= {}^t(E - A)^{-1} \cdot {}^t(E + A) = (E - {}^t A)(E + {}^t A) = \\ &= (E - A^{-1})(E + A^{-1}) = (E - A^{-1})A^{-1} \cdot A(E + A^{-1}) = \\ &= (A(E - A^{-1}))^{-1}(E + A) = (A - E)^{-1}(E + A) = -K. \\ {}^t A &= {}^t(E - K)^{-1} {}^t(E + K) = (E - {}^t K)^{-1} (E + {}^t K) = (E + K)^{-1} (E - K) = A^{-1}. \end{aligned}$$

Следует отметить ещё, что  $\det(E - A) = 0 \iff (E - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  для некоторого  $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in M_n(\mathbb{R})$ .

**3.1.5.** Из (18) следует, что

$$\begin{aligned} \det A &= \det(E - K)^{-1} \det(E + K) = (\det(E - K))^{-1} \det {}^t(E + K) = \\ &= (\det(E - K))^{-1} \det(E + {}^t K) = (\det(E - K)^{-1}) \det(E - K) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично поступаем в случае (19).

**3.1.6.** Из определения ортогональной матрицы  $A$  следует, что если  $\phi_A(\lambda) = 0$ , то и  $\phi_A(1/\lambda) = 0$ , поскольку  $1/\lambda = \bar{\lambda}/(\lambda\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}$ , а многочлен  $\phi_A(t)$  вещественный. Стало быть, многочлены  $f(t) := t^n \phi_A(1/t)$  и  $\phi_A(t)$  имеют одни и те же корни, причём с одинаковыми кратностями. Остётся добавить, что  $\phi_A(0) = \pm 1$ , так что старшие коэффициенты многочленов  $f(t)$  и  $\phi_A(t)$  могут отличаться лишь знаком.

**3.1.7.** Перейти к ортонормированному базису

$$(A_{(1)}/\|A_{(1)}\|, \dots, A_{(n)}/\|A_{(n)}\|)$$

пространства  $\mathbb{R}^n$ .

**3.1.8.** Получить из  $(X_{(i)})$  ортогональный базис  $(Y_{(i)})$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Сравнить  $\|Y_{(i)}\|$  с  $\|X_{(i)}\|$ ,  $\det[Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}]$  — с  $[X_{(1)}, \dots, X_{(n)}]$  и воспользоваться предыдущим упражнением.

**3.2.1.** Нет, как показывает хотя бы пример матрицы

$$A = \begin{vmatrix} i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & i \end{vmatrix}.$$

Имеем  ${}^t A \cdot A = E$ ,  $\det A = 1$ , т.е.  $A \in S\text{CO}(n)$ , но  ${}^t \overline{A} \cdot A \neq E$ , так что  $A \notin U(n)$ .

**3.3.1.** Без ограничения общности считаем унитарную матрицу  $A \in SU(n)$  имеющей диагональный вид

$$A = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \quad \lambda_0 = \overline{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}, \quad \lambda_i \overline{\lambda_i} = 1.$$

При  $n > 2$  одним из решений уравнения  $XYX^{-1}Y^{-1} = A$  является пара унитарных матриц

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \alpha_i \overline{\alpha_i} = 1.$$

Непосредственно проверяется, что  $\alpha_k = \lambda_k \lambda_{k+1} \dots \lambda_{n-1}$  — вполне подходящее значение. При  $n = 2$  имеем

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ -\bar{\alpha} & 0 \end{vmatrix},$$

где  $\lambda = e^{i\theta}$ ,  $\alpha = e^{i(\pi-\theta)/2}$ .

**3.3.2.** Пусть  $\chi_n(t) := \chi_J(t)$  — характеристический многочлен матрицы Якоби порядка  $n$  ( $\chi_0(t) = 1$ ). Рассматривая главные миноры в  $J$  и разлагая их по элементам последней строки, придём к рекуррентному соотношению

$$\chi_k(t) = (a_k - t)\chi_{k-1}(t) - b_{k-1}c_{k-1}\chi_{k-2}(t), \quad k \geq 2.$$

Отсюда следует, что  $\chi_n(t)$  зависит от произведений  $b_1c_1, \dots, b_{n-1}c_{n-1}$ , а не от чисел  $b_k, c_k$  в отдельности. В таком случае, заменив в  $J$  коэффициенты  $b_k, c_k$  на  $\sqrt{b_k}c_k$ , мы придём к симметрической матрице Якоби  $J'$  с тем же характеристическим многочленом  $\chi_n(t)$ . Но, как мы знаем (см. примечание 2), характеристические корни матрицы  $J'$  вещественные, поэтому и  $\text{Spec}(J') \subset \mathbb{R}$ .

Обращаясь к вопросу о кратности любого собственного значения  $\lambda$  (при действии  $J$  на  $\mathbb{R}^n$ ), заметим, что координаты  $x_1, \dots, x_n$  соответствующего собственного вектора  $\mathbf{x}$  связаны линейными соотношениями

$$-c_{k-2}x_{k-2} + (a_{k-1} - \lambda)x_{k-1} - b_{k-1}x_k = 0, \\ k = 2, 3, \dots, n+1 \quad (c_0 = 0 = b_n).$$

В соответствии с этими соотношениями  $x_k = \sigma_k x_1$ , где коэффициент пропорциональности  $\sigma_k$  имеет вид дроби со знаменателем  $b_1b_2\dots b_{k-1}$  и с числителем — функцией от  $b_1c_1, \dots, b_{k-1}c_{k-1}$ ,  $(a_1 - \lambda), \dots, (a_{k-1} - \lambda)$ . Без ограничения общности считаем  $x_1 = 1$ , а в таком случае  $\mathbf{x}$  — однозначно определённый собственный вектор. Стало быть, алгебраическая кратность корня  $\lambda$ , совпадающая в данном случае с его геометрической кратностью, равна 1.

### 3.3.3. Да.

**3.3.4.** Понятно, что одновременно диагонализируемые операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  перестановочны. Обратно, пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — перестановочные диагонализируемые линейные операторы. Диагонализируемость  $\mathcal{A}$  означает, что  $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_p}$ ,  $\{\lambda^1, \dots, \lambda_p\} = \text{Spec}(\mathcal{A})$ . По лемме 6, где  $\mathbb{C}$  можно заменить на любое поле, содержащее  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  и  $\text{Spec}(\mathcal{B})$ , каждое из подпространств  $V^{\lambda_i}$  инвариантно относительно  $\mathcal{B}$ . Но если  $W$  — любое инвариантное подпространство, то диагонализируемость  $\mathcal{B}$  влечёт диагонализируемость его ограничения на  $W$ . В частности, в  $V^{\lambda_i}$  можно выбрать базис  $(\mathbf{e}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{e}_{n_i}^{(i)})$ , диагонализирующий  $\mathcal{B}$ . Так как это верно для  $i = 1, \dots, p$  и так как  $\mathcal{A}\mathbf{e}_k^{(i)} = \lambda_i \mathbf{e}_k^{(i)}$ , то  $(\mathbf{e}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{n_1}^{(1)}, \mathbf{e}_1^{(2)}, \dots, \mathbf{e}_{n_p}^{(p)})$  — базис, диагонализирующий  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

**3.3.5.** Так как  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ , то из эрмитовости (симметричности)  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  следует эрмитовость произведения. Кроме того, из теоремы о спектральном разложении следует, что  $\sqrt{\mathcal{A}}$  является многочленом от  $\mathcal{A}$ , а  $\sqrt{\mathcal{B}}$  — многочленом от  $\mathcal{B}$ . Поэтому

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \implies \sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}}\sqrt{\mathcal{A}},$$

и мы имеем

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = (\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{A}})(\sqrt{\mathcal{B}}\sqrt{\mathcal{B}}) = (\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}})^2,$$

а так как  $(\sqrt{\mathcal{A}})^* = \sqrt{\mathcal{A}} > 0$ ,  $(\sqrt{\mathcal{B}})^* = \sqrt{\mathcal{B}} > 0$ , то  $(\sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}})^* = \sqrt{\mathcal{A}}\sqrt{\mathcal{B}}$  и, следовательно,  $\mathcal{A}\mathcal{B} > 0$ .

**3.3.6.** Очевидно,  ${}^t(A^2) = ({}^t A)^2 = (-A)^2 = A^2$ , поэтому, интерпретируя  $A$  как линейный оператор на пространстве векторов-столбцов со стандартным скалярным произведением, будем иметь  $(A^2 \mathbf{x} | \mathbf{x}) = (A\mathbf{x} | {}^t A\mathbf{x}) = -(A\mathbf{x} | A\mathbf{x}) \leqslant 0$ . Далее,  $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \implies A^2 \mathbf{x} = \lambda^2 \mathbf{x}$  и  $\lambda^2 \leqslant 0$ .

### 3.3.7. Рассмотреть две квадратичные формы

$$q(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathbf{x} | \mathbf{x}), \quad r(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}\mathbf{x} | \mathbf{x}),$$

ассоциированные с  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  соответственно. По условию форма  $q(\mathbf{x})$  положительно определена, поэтому по теореме 8 из § 2 формы  $q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})$  могут быть приведены к каноническому виду одновременно. Если  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  — матрицы операторов  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  в соответствующем базисе, то

$$\text{Spec}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \text{Spec}(AB) = \{\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n\} \in \mathbb{R},$$

поскольку  $\lambda_i \in \mathbb{R}, \mu_i \in \mathbb{R}$ . То же самое можно доказать и другим способом.

**3.3.8.** Для определения стационарных значений формы  $q(\mathbf{x})$  удобно воспользоваться известным из анализа методом Лагранжа. В прямоугольных координатах евклидова векторного пространства  $V$  будем иметь  $q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j$ ,  $(\mathbf{x} | \mathbf{x}) = 1$ . В соответствии с методом Лагранжа строится функция

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} x_i x_j - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$$

и приравниваются нулю её первые частные производные по  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Приходим к линейной системе

$$\sum_{j=1}^n (f_{ij} - \delta_{ij} \lambda) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которая встречалась нам при нахождении собственных значений и собственных векторов симметричного оператора  $\mathcal{F}$ , ассоциированного с  $q$ . Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Итак, по доказанному форма  $q(\mathbf{x})$  принимает стационарное значение на каком-то собственном векторе  $\mathbf{e}_i$  (длины 1) оператора  $\mathcal{F}$ . Так как  $\mathcal{F}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ , то

$$q(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_i | \mathcal{F}\mathbf{e}_i) = \lambda_i (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_i) = \lambda_i.$$

Это значит, что стационарные значения формы  $q(\mathbf{x})$  совпадают с коэффициентами её канонической формы.

**3.3.9. Указание.** Без ограничения общности данное семейство коммутирующих линейных операторов на пространстве  $V$  над  $\mathbb{C}$ ,  $\dim V < \infty$ , можно считать конечным, поскольку, в силу конечномерности  $\mathcal{L}(V)$ , в этом семействе всегда можно выбрать конечное базисное подмножество

$$\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \mid \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i, 1 \leq i, j \leq m\}.$$

Далее — индукция по  $m$  и рассуждения, использованные при доказательстве леммы 6.

Если уже найден собственный вектор  $\mathbf{x}$  для  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{m-1}$ :  $\mathcal{A}_i \mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$ , то рассматривается  $\mathcal{A}_m$ -инвариантное подпространство  $W = \mathbb{C}[\mathcal{A}_m]\mathbf{x}$ , а в нём — собственный вектор  $\mathbf{y} = f(\mathcal{A}_m)\mathbf{x}$ :  $\mathcal{A}_m \mathbf{y} = \lambda_m \mathbf{y}$ , где  $f$  — некоторый многочлен. Но в таком случае  $\mathcal{A}_i \mathbf{y} = \mathcal{A}_i f(\mathcal{A}_m)\mathbf{x} = f(\mathcal{A}_m)\mathcal{A}_i \mathbf{x} = f(\mathcal{A}_m)\lambda_i \mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{y}$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ .

**3.3.10. Указание.** При  $n = 1$  утверждение очевидно. Далее — рассуждение по индукции относительно  $n$ . Можно считать, что  $A_j$ ,  $j \in J$ , — матрица линейного оператора  $\mathcal{A}_j$ , действующего на векторном пространстве  $V$  с фиксированным базисом  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , причём  $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i$  для  $i, j \in J$ . Согласно упр. 3.3.9 семейство  $\{\mathcal{A}_j \mid j \in J\}$  обладает общим собственным вектором  $\mathcal{A}_j \mathbf{x} = \lambda_j \mathbf{x}$ . Без ограничения общности полагаем  $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ , заменяя в случае необходимости  $\mathfrak{S}$  на сопряжённое множество  $\mathfrak{S}' = (C')^{-1} \mathfrak{S} C'$ . При таком соглашении имеем

$$A_j = \begin{vmatrix} \lambda_j & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jn} \\ 0 & B_j & & \end{vmatrix}, \quad B_j \in M_{n-1}(\mathbb{C}). \quad (*)$$

Из условия  $\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j \mathcal{A}_i$  следует, что  $B_i B_j = B_j B_i$ , и по предположению индукции найдётся такая невырожденная матрица  $D \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ , что все матрицы  $D^{-1} B_i D$  будут верхнетреугольными. Теперь достаточно положить

$$C = C' C'', \quad C'' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix}.$$

**3.3.12. Указание.** В соответствии с упр. 3.3.11 максимальная размерность коммутативной подалгебры в  $M_n(\mathbb{C})$  не может быть меньше

$[n^2/4] + 1$ . Для доказательства максимальности этого числа используем рассуждения из статьи: Mirzakhani M. // Amer. Math. Monthly.—1998. — March. — P. 260–262. Преположим, что  $m \geq [n^2/4] + 2$ . Как и в упр. 3.3.10, записываем матрицы  $A_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , в виде (\*) с коммутирующими матрицами  $B_j \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ :  $B_i B_j = B_j B_i$ . Пусть

$$\mathfrak{R} = \langle B_1, \dots, B_m \rangle_{\mathbb{C}}.$$

По предположению индукции  $r = \dim \mathfrak{R} \leq [(n-1)^2/4] + 1$ . Без ограничения общности считаем  $B_1, \dots, B_r$  линейно независимыми, так что  $B_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} B_j$ . При  $i > r$  положим  $C_i = A_i - \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} A_j$ . Очевидно, матрицы  $C_j$  линейно независимы, причём при  $i = r+1, \dots, m$  каждая из них имеет вид  $C_i = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_i \\ 0 \end{vmatrix}$ , где  $\mathbf{c}_i$  —  $1 \times n$ -матрица. Кроме того, векторы  $\mathbf{c}_i$  должны быть линейно независимыми над  $\mathbb{C}$ .

Заметим теперь, что верхнетреугольные коммутирующие матрицы  $A_j$  мы можем также записать в виде

$$A_j = \begin{vmatrix} B'_j & \mu_{1j} \\ & \vdots \\ 0 & \mu_{nj} \end{vmatrix}$$

с коммутирующими матрицами  $B'_j$ . Снова используя предположение индукции, мы приходим к множеству линейно независимых  $n \times 1$ -матриц  $\mathbf{c}'_{s+1}, \dots, \mathbf{c}'_m$ , где  $s \leq [(n-1)^2/4] + 1$ . При этом  $C'_j = \begin{vmatrix} \mathbf{c}'_j \\ 0 \end{vmatrix}$  для  $j \geq s+1$ .

Так как  $C_i$  и  $C'_j$  принадлежат к одному коммутирующему семейству, то  $\mathbf{c}_i \mathbf{c}'_j = 0$  для  $i = r+1, \dots, m$  и  $j = s+1, \dots, m$ .

Наконец, рассмотрим  $(m-r) \times n$ -матрицу  $C$ ,  $i$ -й строкой которой служит  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = r+1, \dots, m$ . Поскольку  $\mathbf{c}_i$  линейно независимы,  $\text{rank } C \geq m-r$ . С другой стороны,  $C \mathbf{c}'_j = 0$  для  $j = s+1, \dots, m$ . Так как  $\mathbf{c}'_j$  линейно независимы и так как  $\dim \text{Ker } C + \dim \text{Im } C = n$  (теорема 4 из § 1 гл. 2) для линейного оператора  $C$  с матрицей  $C$ , то, с учётом неравенства для  $m, r, s$ , получаем

$$n \geq (m-r) + (m-s) \geq 2\left(\left[\frac{n^2}{4}\right] - \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] + 1\right) \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2 > n$$

— противоречие, доказывающее нужное нам утверждение.

**3.3.13. Указание.** Выберем базис в  $V$ , относительно которого матрицей формы  $f$  будет

$$J_0 = \begin{vmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим симметричную невырожденную форму  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  с матрицей

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & -E_m \\ -E_m & 0 \end{vmatrix}$$

и согласованное с этой матрицей разложение  $V = V_1 \oplus V_2$ , так что

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2) - \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1).$$

С другой стороны, в силу соответствия между линейными операторами и билинейными формами имеем

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathcal{A}\mathbf{y}),$$

где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор, обладающий всеми требуемыми свойствами: невырожденность  $\varphi \Rightarrow$  невырожденность  $\mathcal{A}$ ; симметричность  $\varphi \Rightarrow$  симметричность  $\mathcal{A}$ .

**3.4.1.** Рассмотреть ортонормированный базис, в котором  $\mathcal{A}$  принимает канонический вид, и интерпретировать каждый блок

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

как умножение на  $e^{i\varphi}$  в одномерном подпространстве пространства  $U$ .

**3.4.2.** Положить  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  (обычная запись комплексного числа). Тогда в базисе  $(\mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_n)$  матрица  $A_{\mathbb{R}}$  оператора  $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$  принимает блочно-треугольный вид с блоками

$$\begin{vmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{vmatrix}$$

по диагонали. Согласно правилу вычисления определителя с углом нулей

$$\det A_{\mathbb{R}} = \prod_{j=1}^n (\alpha_j^2 + \beta_j^2) = \prod_{j=1}^n |\lambda_j|^2 = \left| \prod \lambda_j \right|^2 = |\det A|^2.$$

Так как определитель линейного оператора от выбора базиса не зависит, то утверждение тем самым доказано. Остаётся воспроизвести детали.

**3.5.1.** Потому что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$  расходится.

**3.5.7.**  $t = \cos(2i-1) \frac{\pi}{n+1}$  для  $T_n(t)$  и  $t = \cos \frac{i\pi}{n+1}$  для  $U_n(t)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**3.5.8.** Да, имеет: с точностью до линейной замены переменной,  $f_n$  — многочлен Чебышева второго рода.

**4.1.1.** Согласно следствию теоремы 4

$$\Pi' \cap \Pi'' = \dot{r} + U, \quad U = U' \cap U''.$$

Поэтому

$$\dot{r} \in \Pi' \cap \Pi'' \iff \dot{p} + \mathbf{u}' = \dot{r} = \dot{q} + \mathbf{u}'' \iff \overrightarrow{pq} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}'' \in U' + U''.$$

**4.1.6.** Достаточно заметить, что утверждение справедливо для равностороннего треугольника, что существует аффинное преобразование  $f$ , переводящее равносторонний треугольник в заданный треугольник, и что  $f$  переводит прямые в прямые, середины отрезков в середины и, следовательно, медианы в медианы.

**4.2.1. 7.**

**4.2.2. 7.**

**4.3.1.** Симметрическая группа  $S_3$ .

**4.3.2.** Вращение на угол  $\pi/4$  вокруг точки  $(-1/\sqrt{2}, 1+1/\sqrt{2})$ .

**4.3.3.** а) поворот вокруг неподвижной точки в двух ортогональных плоскостях; б) поворот в одной плоскости плюс сдвиг в ортогональной плоскости; в) сдвиг.

**5.2.3.** Как и в упр. 3.3.8, в соответствии с методом Лагранжа составляется функция  $\sum_i x_i^2 - \lambda \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j$  и записываются условия экстремальности  $x_i - \lambda \sum_j f_{ij} x_j = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Приходим к характеристическому уравнению относительно  $\mu = 1/\lambda$ .

**5.2.4.**  $-1/2 < t < 1$ .

**5.2.5.** Гипербола.

**5.2.6.** В случае пропорциональности всех соответствующих коэффициентов (возможно, кроме свободных) их уравнений.

**6.1.3.** Указание: см. [2, ч. 4, § 1].

**6.1.4.** Взять, например,  $V = \mathcal{K}^2 = W$  и рассмотреть элемент

$$(1, 0) \otimes (0, 1) + (0, 1) \otimes (1, 0).$$

Если попытаться представить его в виде  $(a, b) \otimes (c, d)$ , то в итоге получатся противоречивые соотношения  $ad = 1$ ,  $bc = 1$ ,  $ac = 0$ ,  $bd = 0$ .

**6.1.5.**  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ .

**6.1.6.** Обе матрицы совпадают с  $A \otimes B$ .

**6.3.2.** Указание: воспользоваться соотношением (10).

**6.3.3.** Указание: воспользоваться формулой Лапласа [ВА I, гл. 3, § 3, упр. 8].

**7.1.4.** Из упр. 7.1.3 следует нужный изоморфизм для алгебры  $\mathfrak{su}(2)$ . Действительно, если

$$A = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3, \quad B = \beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3,$$

то

$$[A, B] = AB - BA = C = \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 + \gamma_3 T_3,$$

и мы легко проверяем, что вектор

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

суть векторное (или внешнее) произведение.

То же верно и для  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ , если заметить, что матрицы

$$P_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad P_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

составляют базис пространства  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$  и

$$[P_1, P_2] = P_3, \quad [P_3, P_1] = P_2, \quad [P_2, P_3] = P_1.$$

### 7.1.5. Из очевидного соотношения

$$(B^{-1}AB)^k = B^{-1}AB \cdot B^{-1}AB \cdots B^{-1}AB = B^{-1}A^k B$$

следует, что

$$\begin{aligned} \exp(B^{-1}AB) &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (B^{-1}AB)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} B^{-1}A^k B = \\ &= B^{-1} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \cdot B = B^{-1}(\exp A) \cdot B. \end{aligned}$$

### 7.1.6. $(e^2/2)A$ .

**7.1.7.** Из гл. 3, § 3 известно, что в подходящем ортонормированном базисе матрица  $A$  унитарного оператора  $\mathcal{A}$  записывается в виде  $A = B \cdot \text{diag}\{e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}\} \cdot B^{-1}$ , так что  $A = \exp i(B\text{diag}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}B^{-1})$ .

**7.1.8.** Как для всякой изометрии,  $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ , поэтому  $\|(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x})\| = \|\mathcal{B}\mathbf{x}\|$ . Остальное ясно:

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathbf{x}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathcal{B}\mathbf{x}\| = \|\mathcal{B}\|.$$

**7.1.9.** Выбрать базис, в котором нормальный оператор  $\mathcal{A}$  имеет диагональную матрицу

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1} \sqrt{|\lambda_1 x_1|^2 + \dots + |\lambda_n x_n|^2} = |\lambda_1|.$$

Отсюда всё следует.

**7.1.10.** Схема рассуждений достаточно естественна и изложена в [15]. Так как  $r(\mathcal{A})^k \leq \|\mathcal{A}^k\|$  (см. 2) в п. 9), то в случае  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^k = \mathcal{O}$  имеем  $\lim_{k \rightarrow \infty} r(\mathcal{A})^k = \mathcal{O}$ , а значит,  $r(\mathcal{A}) < 1$ . Обратно: при  $r(\mathcal{A}) = 1 - 2\varepsilon < 1$  и достаточно большом  $k$  из 1) в п. 6 вытекает, что  $\|\mathcal{A}^k\|^{1/k} \leq r(\mathcal{A}) + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ , откуда  $\|\mathcal{A}^k\| \leq (1 - \varepsilon)^k$  и, стало быть,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ .

### 7.3.1. Пусть

$$S = \{\dot{a} \mid f_i(\dot{a}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

— наш ограниченный многогранник. Если  $\dot{a} \in S$  и, скажем,

$$f_1(\dot{a}) = 0, \quad \dots, \quad f_r(\dot{a}) = 0, \quad f_{r+1}(\dot{a}) > 0, \quad \dots, \quad f_m(\dot{a}) > 0, \quad (*)$$

то уравнения  $f_i(\dot{x}) = 0, 1 \leq i \leq r$ , определяют плоскость  $\Pi_{\dot{a}}$  ( $\Pi_{\dot{a}} = S$  при  $r = 0$ ). Множество  $S_{\dot{a}} = \Pi_{\dot{a}} \cap S$  будет гранью в  $S$ , содержащей точку  $\dot{a}$ .

Пусть теперь  $S'$  — выпуклая оболочка множества всех вершин многогранника  $S$ . Так как  $S$  — выпуклое множество, то  $S' \subset S$ . Остаётся показать, что всякая точка  $\dot{a} \in S$  содержится в  $S'$ . Докажем это индукцией по  $\dim \Pi_{\dot{a}}$ . Если  $\dim \Pi_{\dot{a}} = 0$ , то  $\dot{a}$  — вершина и, стало быть, содержится в  $S'$  по определению. Считаем далее  $\dim \Pi_{\dot{a}} > 0$  и полагаем для определённости, что выполнены соотношения (\*). Проведём в плоскости  $\Pi_{\dot{a}}$  через точку  $\dot{a}$

любую прямую  $\{\dot{a} + \lambda \mathbf{x}\}$ , пересечение которой с многогранником  $S$  задаётся неравенствами

$$f_i(\dot{a} + \lambda \mathbf{x}) = f_i(\dot{a}) + \lambda \mathcal{F}_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad r+1 \leqslant i \leqslant m$$

( $\mathcal{F}_i$  — линейная часть функции  $f_i$ ). Многогранник  $S$  ограничен, поэтому данное пересечение представляет собой отрезок  $\dot{p}\dot{q}$ . Как и на всей плоскости  $\Pi_{\dot{a}}$ , функции  $f_1, \dots, f_r$  обращаются в нуль в каждой из точек  $\dot{p}, \dot{q}$ . Но и  $f_i(\dot{p}) = f_i(\dot{q}) = 0$  хотя бы для одного  $i > r$ , а это значит, что  $\dim \Pi_{\dot{p}} < \dim \Pi_{\dot{a}}$  и  $\dim \Pi_{\dot{q}} < \dim \Pi_{\dot{a}}$ . По предположению индукции можно считать, что  $\dot{p}, \dot{q} \in S'$ . Так как  $\dot{a} \in \dot{p}\dot{q}$ , то и  $\dot{a} \in S'$ . Это рассуждение, очевидно, почти повторяет доказательство теоремы из § 3 гл. 7.

# МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

---

Наивно думать, что всё содержание книги было когда-то изложено в реально читаемом курсе. На самом деле, уже начиная с главы 3, приходилось жертвовать отдельными фрагментами, а глава 7 затрагивалась лишь частично (экспонента линейного оператора и геометрия Лобачевского). Правда, некоторый материал сознательно переносился в упражнения. Один из вариантов курса отражён ниже в списке экзаменационных вопросов на устном экзамене. Экзаменационный билет включал два вопроса из разных разделов и не очень сложную задачу.

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Теорема о базисе конечномерного векторного пространства над полем.
  2. Закон изменения координат вектора при переходе к новому базису.
  3. Изоморфизм пространств одинаковой конечной размерности.
  4. Теорема о размерности суммы подпространств.
  5. Когда сумма подпространств является прямой?
  6. Теорема о размерности двойственного векторного пространства.
- Рефлексивность.
7. Геометрическая интерпретация решений линейной однородной системы.
  8. Задание линейных отображений векторных пространств матрицами. Преобразование координат вектора.
  9. Критерий биективности линейного отображения в терминах ядра (в терминах образа).
  10. Алгебра линейных операторов. Минимальный многочлен. Критерий невырожденности оператора.
  11. Теорема о связи между матрицами линейного оператора в различных базисах.
  12. Инвариантные подпространства: общие факты; теорема об операторе проектирования.
  13. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен.
  14. Теорема о геометрической и алгебраической кратности. Свойства следа оператора.
  15. Теорема о диагонализуемости линейного оператора с простым спектром.
  16. Инвариантные подпространства комплексных и вещественных линейных операторов.
  17. Теорема о приведении комплексного линейного оператора к треугольному виду.
  18. Теорема Гамильтона—Кэли и её следствие.
  19. Формулировка теоремы о ЖНФ матрицы и её следствия (критерий диагонализуемости).
  20. Теорема о ЖНФ нильпотентной матрицы.

21. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.
22. Единственность ЖНФ матрицы.
23. Матрицы билинейной формы в различных базисах.
24. Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы.
25. Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду.
26. Однозначная определённость сигнатуры вещественной квадратичной формы (закон инерции).
27. Метод Якоби приведения невырожденной симметричной билинейной формы.
28. Положительно определённые формы и матрицы. Критерий Сильвестра.
29. Канонический вид кососимметричной билинейной формы.
30. Евклидовы векторные пространства. Неравенство Коши—Буняковского и его следствия.
31. Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс Грама—Шмидта.
32. Теорема об ортогональном разложении пространства.
33. Естественный изоморфизм евклидова векторного пространства и двойственного пространства.
34. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Группы  $O(n)$  и  $SO(n)$ .
35. Связь между линейными операторами и билинейными формами на евклидовом векторном пространстве. Свойство самосопряжённости.
36. Теорема о диагонализации самосопряжённого оператора.
37. Приведение квадратичной формы к главным осям. Матричная формулировка.
38. Теорема о приведении пары квадратичных форм.
39. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора.
40. Теорема о представлении невырожденного оператора в виде композиции самосопряжённого и ортогонального операторов.
41. Эрмитовы формы и пространства. Существование ортонормированного базиса.
42. Эрмитовы и унитарные линейные операторы. Группы  $U(n)$  и  $SU(n)$ .
43. Аффинные пространства: изоморфизм; системы координат.
44. Аффинно-линейные функции и системы линейных уравнений. Задание подпространств.
45. Теорема о расстоянии от точки до плоскости в евклидовом пространстве.
46. Метод наименьших квадратов. Понятие об аппроксимации функций. Переопределённые линейные системы.
47. Теорема о расстоянии между плоскостями евклидова пространства.
48. Определитель Грама и объём параллелепипеда. Понятие ориентации вещественного пространства.
49. Разложение аффинного преобразования евклидова точечного пространства в произведение сдвига, движения с неподвижной точкой и растяжения во взаимно перпендикулярных направлениях.

50. Определитель аффинного преобразования как коэффициент изменения ориентированного объёма.
51. Классификация движений прямой и плоскости.
52. Классификация движений трёхмерного евклидова пространства.
53. Квадратичные функции на аффинном пространстве. Свойство центральности.
54. Приведение квадратичной функции к каноническому виду.
55. Соответствие между квадриками и квадратичными функциями.
56. Типы квадрик.
57. Малый и большой ранг квадрики. Свойства конусов и цилиндров.
58. Понятие о тензорах. Тензоры валентности  $\leq 2$ .
59. Координаты тензора. Понятие о свёртке.
60. Кососимметричные тензоры. Свойства операции альтернирования.
61. Внешнее умножение и внешняя алгебра.
62. Базис внешней алгебры.
63. Внешнее умножение и определители.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автоморфизмы пространства 175  
— формы 209
- Аксиомы векторного пространства 12
- Алгебра внешняя 286  
— Грассмана 286  
— Йордана 129  
— Ли 72, 129  
— — классическая 308  
— —  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  308  
— —  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  308  
— —  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$  308  
— —  $\mathfrak{su}(n)$  308  
— —  $\mathfrak{u}(n)$  308  
— над полем ассоциативная 66  
— операторов 66  
— полумагических квадратов 86  
— симметрическая 284  
— тензорная 283
- Алгоритм Грама—Шмидта 108  
— Штрассена 340
- Альтернирование тензора 282
- Аннулятор  $p$ -вектора 292
- Антисимметризация тензора 281
- Антиизоморфизм алгебр 84
- Аппроксимация 156, 157
- Базис канонический квадратичной форм 46
- Базис пространства 20  
— — взаимный 35  
— — двойственный 35  
— — дуальный 35  
— — жорданов 88  
— — ортогональный 107  
— — ортонормированный 107, 120  
— — симплектический 114  
— — собственный 81
- Базис тензорный 264
- Базисы ориентированные 297
- Бивекторы 294
- Валентность тензора 260
- Вектор асимптотический 232  
— вероятностный 325  
— корневой 90  
— изотропный 209  
— ковариантный 34  
— контравариантный 34  
— максимальный 299  
— нормированный 105  
— нулевой 12  
— производства 316  
— оптимальный по прибыли 316  
— противоположный 12  
— собственный 77  
— характеристический 77  
— циклический 99
- Векторы ортогональные 106
- Вершина выпуклого множества 318  
— конуса 228
- Вид нормальной формы 49  
— канонический изометрии 136
- Вращения гиперболические 215
- Геометрия проективная 247
- Гиперплоскость 28  
— бесконечно удалённая 241  
— инвариантная 84
- Гиперболоид 228, 233
- Гиперповерхность второго порядка 224
- Грань выпуклого множества 318
- Группа аддитивная пространства 12  
— аффинная 194

- Группа движений 198  
 — изометрий 198  
 — линейная полная 71, 308  
 — — специальная 308  
 — Лоренца 210  
 — однопараметрическая 306  
 — ортогональная 116, 122, 131  
 — — специальная 122, 308  
 — проективная 246  
 — симплектическая 114  
 — унитарная 122, 131  
 — — специальная 122, 309
- Движение евклидова точечного пространства** 196  
 — — — винтовое 200  
 — — — собственное 199
- Движения псевдоевклидовы** 210  
 — пространства Лобачевского 329
- Двойственность пространств** 34
- Действие симметрической группы на тензорах** 278
- Дельта-функция** 15
- Дифференциал аффинного отображения** 175
- Длина вектора** 103
- Дополнение ортогональное** 109  
 — прямое 29
- Задача о перпендикуляре** 158
- Зависимость линейная** 18
- Закон ассоциативности** 12  
 — дистрибутивности 12  
 — инерции 49  
 — коммутативности 12
- Значение собственное** 77  
 — характеристическое 77  
 — стационарное квадратичной формы 146
- Изометрия линейных пространств**  
 130
- Изоморфизм аффинных пространств**  
 175  
 — векторных пространств 24, 110  
 — естественный 25, 111  
 — канонический 25  
 — метрический 111
- Изоморфизм проективный** 244
- Индекс инерции формы** 50  
 — нильпотентности оператора 69
- Карта аффинная** 241  
 Квадрат латинский 343  
 — магический 16  
 — полумагический 16
- Квадрика аффинная** 224  
 — вырожденная 228  
 — проективная 254  
 — центральная 227
- Клетка жорданова** 88  
 — циклическая 99
- Код Хемминга** 253
- Комбинация линейная** 13  
 — точек барицентрическая 180
- Коммутатор в  $\mathbb{K}$ -алгебре Ли** 72  
 — в группе 146
- Комплексификация линейного пространства** 152  
 — оператора 152
- Компонента группы Лоренца** 214  
 — нильпотентная оператора 102  
 — полупростая оператора 102  
 — тензора 264
- Конгруэнтность матриц** 43
- Константы структурные алгебры**  
 274
- Конус асимптотических направлений** 232
- Координаты тензора** 264
- Координаты аффинные** 176  
 — барицентрические 171  
 — вектора 22  
 — однородные 240  
 — Плюккера 295
- Коразмерность подпространства** 28, 31
- Коэффициенты Фурье** 157
- Кратность собственных значений**  
 алгебраическая 82  
 — — — геометрическая 81
- Критерий диагонализируемости** 80, 90
- Сильвестра** 54
- Циклическости пространства** 100
- Максимум квадратичной формы** 146

- Матрица билинейной формы 42  
 — дважды стохастическая 323  
 — жорданова 88  
 — композиции линейных отображений 63  
 — линейного оператора 67  
 — магическая 16  
 — — отображения 61  
 — неотрицательная 321  
 — ортогональная 113  
 — Паули 311  
 — положительная 321  
 — положительно определённая 51  
 — полумагическая 16  
 — перехода 23, 326  
 —, подобная данной 70  
 — приводимая 322  
 — стохастическая 322  
 — унитарная 122  
 — эрмитова 118  
 — эрмитово сопряжённая 122  
 — Якоби 146  
 Метод Лагранжа 47  
 — наименьших квадратов 157  
 — Якоби 52  
 Метрика 123  
 — индефинитная 208  
 — Лобачевского 333  
 Минор главный матрицы 52  
 Многогранник 318  
 Многообразие алгебраическое 243  
 — аффинное линейное 175  
 Многочлен, аннулирующий линейный оператор 68  
 — возвратный 115  
 — Лежандра 165  
 — минимальный 68  
 — сферический 165  
 — тригонометрический 161  
 — Фурье 161  
 — характеристический 79  
 — Чебышева 169, 171  
 — Эрмита 170  
 Множество выпуклое 207  
 Модели проективной плоскости 236  
 Моменты инерции 280
- Направление асимптотическое 232**  
 — главное квадрики 235

- Направление линейного многообразия 175  
 Независимость линейная 18  
 Неравенство Адамара 117  
 — Коши—Буняковского 105  
 — Коши—Буняковского—Шварца 119  
 — Минковского 107  
 — треугольника 107  
 Норма вектора 105, 124  
 — линейного оператора 298, 299
- Оболочка аффинная 180**  
 — выпуклая 207  
 — линейная 14  
 — — множества векторов 14  
 Образ линейного отображения 60  
 Образующие конуса 228  
 — цилиндра 229  
 Объём  $n$ -мерный 192  
 Овеществление линейного пространства 149  
 — — оператора 149  
 Оператор диагонализируемый 80  
 — единичный 65  
 — комплексно сопряжённый 154  
 — кососимметричный 128  
 — косоэрмитов 128  
 — линейный 64  
 — нильпотентный 69  
 — нормальный 139  
 — ограниченный 299  
 — ортогональный 113, 136  
 — положительно определённый 143  
 — проектирования 65  
 — самосопряжённый 128  
 — симметричный 128  
 — симплектический 114  
 — сопряжённый 83, 127  
 — унитарный 130  
 — эрмитов 128  
 Операция свёртывания 272  
 Определитель Грама 160, 190  
 — линейного оператора 71  
 Опускание индекса тензора 284  
 Ориентация пространства 296  
 Основание цилиндра 229  
 Отношение двойное 249  
 — простое 204

- Отображение альтернирования 282  
 — аффинное 175  
 — аффинно-линейное 175  
 — билинейное 35  
 — линейное 25, 60  
 — полилинейное 40  
 — полулинейное 121  
 — полуторалинейное 117  
 — симметризации 278  
 — сопряжённое 121  
 —  $\theta$ -линейное 126  
 Отрезок 188
- Параболоид 228, 233  
 Параллелепипед 192  
 Параллельность плоскостей 179, 185  
 Перенос параллельный 174  
 Перпендикуляр к двум подпространствам 189  
 Плоскость вещественная 154  
 — гиперболическая 55  
 — мнимая 154  
 — проективная 236  
 — симплектическая 55  
 Плоскости скрещивающиеся 185  
 Подалгебра 66  
 Подгруппа операторов однопараметрическая 306  
 — стационарная 209, 329  
 Подмногообразие линейное 175  
 Подмножество выпуклое 207  
 — ограниченное 123  
 Поднятие индекса тензора 284  
 Подпространства аффинные параллельные 179, 185  
 Подпространство аффинное 177  
 — векторное 14  
 — двойное 225, 255  
 — изотропное 46  
 — инвариантное относительно оператора 75  
 — корневое 90  
 — направляющее 177  
 —, натянутое на векторы 14  
 —, порождённое векторами 14  
 — циклическое 93  
 Подъём индексов тензора 284  
 — поля скаляров 271
- Покрытие проективного пространства аффинное 242  
 Положение общее подпространств 185  
 — — точек 179  
 Полость верхняя конуса 213  
 Полупространство 318  
 Поляра точки 258  
 Поляризация квадратичной формы 45  
 Порядок конечной проективной плоскости 342  
 Последовательность Коши 123  
 — сходящаяся 123  
 — точная 193  
 — фундаментальная 123  
 Преобразование аффинное невырожденное 175  
 — Кэли 116  
 Приведение билинейной формы к каноническому виду 46, 133  
 — квадратичной формы к каноническому виду 46, 134  
 — матрицы к каноническому виду 89  
 Принцип Стейница о замене 22  
 Программа Эрлангенская 201  
 Программирование линейное 315  
 Проектор 65, 74  
 Проекция вектора 108  
 Произведение векторов внутреннее 118  
 — скалярное 104  
 — симплектическое 113  
 Произведение тензорное 41, 262  
 — — линейных отображений 41, 262  
 — — пространств 269  
 Производная экспоненты 312  
 Пространства изометричные 130  
 — изоморфные 130  
 Пространство аффинное 173  
 — банахово 124  
 — бесконечномерное 20  
 — векторное 12  
 —, двойственное к данному 34  
 — евклидово 104  
 — комплексное 16  
 — конечномерное 20

Пространство координатное  $n$ -мерное 15  
 — линейное 12  
 — Лобачевского 215, 327  
 — магических квадратов 16, 86  
 — матриц 16  
 — метрическое 123  
 — метрическое полное 124  
 — Минковского 209  
 — нормированное 123, 124  
 — нормированное полное 124  
 — нульмерное 14, 20  
 — полумагических квадратов 16, 86  
 — проективное 239  
 — трёхмерное вещественное 16  
 — симплектическое 113  
 — сопряжённое 34  
 — унитарное 118  
 — функций 15  
 — циклическое 93, 99  
 — эрмитово 118  
 Процесс ортогонализации Грама—Шмидта 108  
 Пфаффиан 57

Равенство Парсеваля 159  
 Радикал формы 43  
 Радиус спектральный 310  
 Разложение оператора полярное 145  
 — спектральное 140  
 — ортогональное алгебры Ли 341  
 —  $p$ -вектора 292, 294  
 Размерность алгебры 65  
 — векторного пространства 20  
 — аффинного пространства 174  
 — проективного пространства 239  
 Ранг билинейной формы 43  
 — квадрики 225  
 — семейства векторов 19  
 — тензора 260  
 Расположение подпространств 185  
 Расстояние между множествами 190  
 — Лобачевского 332  
 — точками 188  
 — от точки до подпространства 188

Репер 176  
 — главных направлений квадрики 235  
 Рефлексивность 36  
 Ряд абсолютно сходящийся 125  
 — Фурье 161  
  
 Свёртка тензора 273  
 — по индексам 274  
 — — полная 274  
 — функций 22  
 Сдвиг 174  
 Семейство векторов линейно зависимое 18  
 — — — независимое максимальное 19  
 Середина отрезка 188  
 Сигнатура квадратичной формы 50  
 Символ Кронекера 271  
 Симметризация тензора 278  
 Симплекс 206  
 Система аффинных координат 176  
 — координат барицентрическая 181  
 — — — прямоугольная 187  
 — функций ортогональная 156  
 Системы векторов линейно независимые 18  
 — — — максимальные 19  
 — — — эквивалентные 19  
 Скаляр 12  
 След линейного оператора 71  
 — матрицы 16  
 Сопряжение формальное 164  
 Спаривание пространств 35  
 — — каноническое 35  
 Спектр оператора 79  
 — — простой 80  
 Степень внешняя оператора 296  
 Структура комплексная 147  
 — — каноническая 151  
 Сумма линейных операторов прямая 76  
 — подпространств 26  
 — подпространств прямая 28  
 — — — внешняя 30  
 Сфера 123  
 Сходимость в среднем 159  
 — по норме 125

- Тензор** 260  
 — антисимметричный 281  
 — инерции 279  
 — ковариантный 260  
 — контравариантный 260  
 — кососимметричный 281  
 — Кронекера 271  
 — метрический 271  
 — симметричный 278  
 — смешанный 260  
 — структурный алгебры 274
- Теорема Гамильтона—Кэли** 87  
 — об инерции 49  
 — о продолжении базиса 20  
 — Перрона—Фробениуса 323  
 — Шалля 201  
 — Шура 147  
 — Эйлера 201  
 — Якоби 52
- Теория относительности специальная** 211
- Тип тензора** 34, 260
- Точка аффинного пространства** 173  
 — критическая 51  
 — невырожденная 51  
 — проективного пространства 239  
 — седловая 52  
 — центральная 219
- Точки коллинеарные** 203
- Углы в пространстве Лобачевского** 333
- Угол между прямой и аффинным подпространством** 187  
 — — прямым 187
- Уклонение среднеквадратичное** 157
- Умножение внешнее** 285  
 — на скаляр 12  
 — тензорное 262  
 — тензорное линейных операторов 270
- Унитарность** 12
- Уравнение вековое** 79  
 — дифференциальное 313  
 — характеристическое 79
- Фактороператор** 84
- Факторпространство** 31
- Фигуры конгруэнтные** 202
- Форма билинейная** 41  
 — внешняя 283  
 — жорданова нормальная 89  
 — квадратичная 45  
 — кососимметричная 43  
 — метрическая 209  
 — — положительно определённая 50, 118  
 — полилинейная 40  
 — полуторалинейная 117  
 — полярная 45, 280  
 — симметричная 41  
 — эрмитова 117
- Формула Грассмана** 26
- косинусов** 103
- Функции аффинно-эквивалентные** 220
- Функция аффинно-линейная** 183  
 — биаффинная 217  
 — весовая 169  
 — квадратичная 218  
 — линейная 33  
 — полилинейная 40  
 — полулинейная 121  
 —, сопряжённая к данной 121  
 — целевая 316
- Центр** 219  
 — квадрики 227
- Цепь Маркова** 325
- Цилиндр** 228
- Часть линейная аффинной функции** 175
- Шар замкнутый** 123  
 — открытый 123  
 —  $n$ -мерный 123
- Эквивалентность систем векторов** 19
- Экспонента линейного оператора** 302
- Эллипсоид** 228, 233
- Ядро линейного отображения** 60  
 — формы 43

Учебное издание

*КОСТРИКИН Алексей Иванович*

**ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ**

**Часть II  
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Редактор *E.Ю. Ходан*  
Оригинал-макет *Н.Н. Андреева*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 08.04.04.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 25,3. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru  
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»  
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3  
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72  
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>