Криволинейные интегралы II типа (по координатам)

1. Определение и свойства криволинейного интеграла II типа

Пусть AB – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая, и на этой кривой задана функция $z=P(x,y)$.

1. Разобьем кривую AB произвольным образом на n частей $M_{i-1}M_i$ точками $M_0=A$, M_1, …, $M_n=B$ с длинами $\Delta\ell_i$.
2. Обозначим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ проекцию дуги $M_{i-1}M_i$ на ось Ox
3. На каждой части $M_{i-1}M_i$ выберем произвольную точку $(\xi_i;\eta_i)$ и вычислим произведение $P(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta x_i$.

Сумму

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta x_i \qquad (1)$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $P(x,y)$ по кривой AB по переменой x (соответствующей данному разбиению кривой AB и данному выбору точек $(\xi_i;\eta_i)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Если при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta \ell_i \to 0$, *существует конечный предел интегральной суммы (1), не зависящий от способа разбиения кривой AB и выбора точек* $(\xi_i; \eta_i)$, *то этот предел называется* ***криволинейным интегралом II типа по координате x функции P(x,y) вдоль дуги AB*** *и обозначается символом*

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx \qquad (2)$$

Если при составлении интегральной суммы значение функции $Q(\xi_i;\eta_i)$ умножить на проекцию дуги $M_{i-1}M_i$ на ось *Oy, то получим* ***криволинейным по координате у функции Q(x,y) вдоль дуги AB*** *и обозначается символом*

$$\int_{AB} Q(x,y)dy \qquad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Если существуют интегралы (2), (3), то их сумму называют ***криволинейным интегралом* II *типа общего вида* (*по координатам*)**

$$\int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

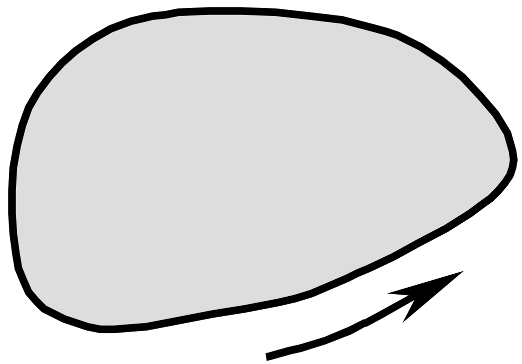
Замечание. Так как проекция дуги на оси зависит от направления дуги и меняет знак на обратный с изменением направления, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{BA} P(x,y)dx$$

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = -\int_{BA} Q(x,y)dy$$

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область остается слева по отношению к движущейся точке, называют ***положительным***. Противоположное ему направление называют ***отрицательным***.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II типа по замкнутому контуру обозначают:

$$\oint\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II ТИПА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл II типа меняет знак на противоположный, т.е.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{AB} Pdx + Qdy$$

2. Если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то интеграл по всей кривой равен сумме интегралов по ее частям, т.е.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II типа).

3. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II типа, т.е.

$$\int\limits_{AB} c \cdot P dx = c \cdot \int\limits_{AB} P dx, \qquad \int\limits_{AB} c \cdot Q dx = c \cdot \int\limits_{AB} Q dx$$

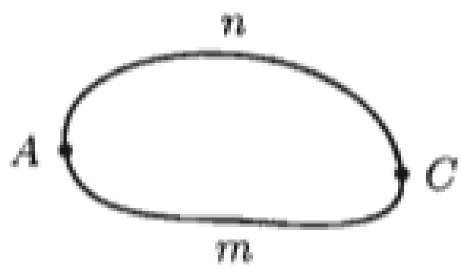
4. Криволинейный интеграл II типа от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II типа от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{AB} \left(P_1 + P_2\right) dx = \int\limits_{AB} P_1\, dx + \int\limits_{AB} P_2\, dx$$

$$\int\limits_{AB} \left(Q_1 + Q_2\right) dy = \int\limits_{AB} Q_1\, dy + \int\limits_{AB} Q_2\, dy$$

5. Криволинейный интеграл II типа по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой

Доказательство.



$$\oint\limits_{AmCnA} = \int\limits_{AmC} + \int\limits_{CnA}$$

$$\oint\limits_{CnAmC} = \int\limits_{CnA} + \int\limits_{AmC}$$

$$\oint\limits_{AmCnA} = \oint\limits_{CnAmC}$$

2. Вычисление криволинейного интеграла II типа

Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t) \qquad (4)$$

где $t \in [\alpha;\beta]$

(причем начальной точке A соответствует α , B соответствует β) .

ТЕОРЕМА .

Если AB *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (4) *и функция* $P(x,y)$ *непрерывна на* AB, *то* $P(x,y)$ *интегрируема по переменной x по кривой* AB *и справедливо равенство*

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$

Аналогичным образом вычисляется $\int_{AB} Q(x,y)dy$

СЛЕДСТВИЕ .

Если выполнены условия:

1) АВ – *гладкая кривая в плоскости xOy, заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ *(где x пробегает отрезок с концами a и* b),

2) *функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *непрерывны на* АВ,

то существует криволинейный интеграл II *типа и справедливо равенство*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\Big)dx$$

ТЕОРЕМА (достаточные условия существования криволинейного интеграла II типа).

Если АВ – *кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *кусочно-непрерывны на AB, то существует интеграл*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ПРИМЕР 1.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} xydx + (y-x)dy$

где кривая AB соединяет точки A(0;0) и B(1;1) по:

1) прямой $y = x$;
2) параболе $y = x^2$;
3) параболе $y^2 = x$.

РЕШЕНИЕ.

1) $$\int\limits_{AB} xydx + (y-x)dy = \left[\begin{matrix} т.к. & y = x \\ & dy = dx \end{matrix}\right] = \int\limits_0^1 \left(x^2 + (x-x)\right)dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) $$\int\limits_{AB} xydx + (y-x)dy = \left[\begin{matrix} т.к. & y = x^2 \\ & dy = 2xdx \end{matrix}\right] = \int\limits_0^1 x \cdot x^2 dx + (x^2 - x)2xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^3 + 2x^3 - 2x^2\right)dx = \int\limits_0^1 \left(3x^3 - 2x^2)\right)dx = \left.\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{12}$$

ПРИМЕР 1.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} xydx + (y-x)dy$

где кривая АВ соединяет точки А(0;0) и В(1;1) по:

1) прямой $y = x$;
2) параболе $y = x^2$;
3) параболе $y^2 = x$.

РЕШЕНИЕ.

3) $$\int\limits_{AB} xydx + (y-x)dy = \left[\begin{array}{rr} т.к. & y^2 = x \\ & 2ydy = dx \end{array} \right] = \int\limits_0^1 y^2 \cdot y \cdot 2ydy + (y - y^2)dy =$$

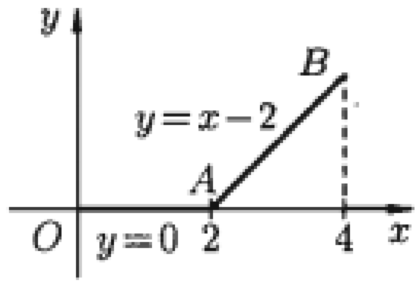
$$= \int\limits_0^1 (2y^4 + y - y^2)dy = \left(\frac{2y^5}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{17}{30}$$

ПРИМЕР 2.

Вычислить интеграл $\int\limits_L (x-y)^2\,dx + (y+x)^2\,dy$

L ломаная OAB, соединяет точки O(0;0), A(2;0), B(4;2).

РЕШЕНИЕ.



Так как L=OA+AB и
уравнение OA: $y=0, \quad x \in [0;2]$
уравнение AB: $y = x-2, \quad x \in [2;4] \quad (dy = dx)$

$$\int\limits_L (x-y)^2\,dx + (y+x)^2\,dy = \int\limits_{OA} (x-y)^2\,dx + (y+x)^2\,dy + \int\limits_{AB} (x-y)^2\,dx + (y+x)^2\,dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (x-0)^2\,dx + 0 + \int\limits_2^4 (x-(x-2))^2\,dx + ((x-2)+x)^2\,dx = \frac{136}{3}$$

ПРИМЕР 3.

Вычислить интеграл $\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz$

L отрезок прямой от точки A(1;0;2) до B(3;1;4).

РЕШЕНИЕ.

Составим уравнение прямой AB

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$$

или в параметрической форме $x=2t+1,\quad y=t,\quad z=2t+2,\ t\in[0;1]$

$$\int\limits_L y^2dx+(x^2+z)dy+(x+y+z^2)dz=$$
$$=\int\limits_0^1 t^2 2dt+((2t+1)^2+(2t+2))dt+((2t+1)+t+(2t+2)^2)2dt=\frac{95}{3}$$

ПРИМЕР 4.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

в котором L — парабола $y = x^2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

параболу можно рассматривать как кривую, задаваемую параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \quad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \end{cases}$$

Поэтому

$$I = \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3)\,dt + \int\limits_{-1}^{1} (t^4 - 2t^3)2t\,dt = -(14/15).$$

3. Формула Остроградского-Грина

Связь между двойным интегралом по области D и криволинейным интегралом по границе Г этой области устанавливает формула Остроградского-Грина.

Теорема. *Если функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ *в области D, то имеет место* ***формула Остроградского-Грина***

$$\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

где Г – граница области D, и интегрирование вдоль кривой Г производится в положительном направлении (т.е. при движении вдоль кривой область D остается слева).

Доказательство.

Пусть $y=\varphi_1(x)$ – уравнение дуги AnB.

Пусть $y=\varphi_2(x)$ – уравнение дуги AmB.

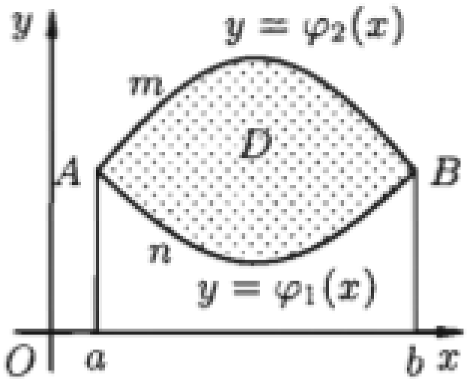


Рис. 240

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy = \int_a^b dx\, P\ (x;y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} =$$

$$= \int_a^b P(x;\varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x;\varphi_1(x))dx = \int_{AmB} P(x;y)dx - \int_{AnB} P(x;y)dx =$$

$$= -\int_{BmA} P(x;y)dx - \int_{AnB} P(x;y)dx = -\oint_{\Gamma} P(x,y)dx \qquad (1)$$

Аналогично,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_{\Gamma} Q(x,y)dy \qquad (2)$$

Если из равенства (2) вычесть (1), то получим формулу Остроградского-Грина.

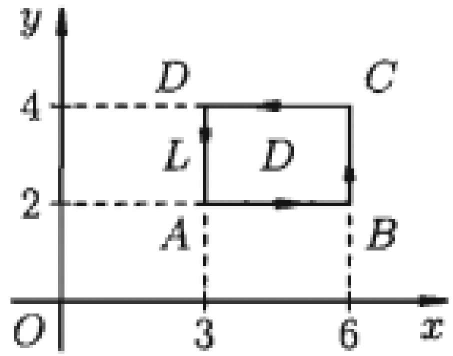
ПРИМЕР 5.

С помощью формулы Остроградского-Грина вычислить интеграл

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\cdot(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy$$

где Г – контур прямоугольника A(3;2), B(6;2), C(6;4), D(3;4).

РЕШЕНИЕ.



$$P(x;y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$Q(x;y)=y\cdot(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cdot\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}+1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\cdot(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy=$$

$$=\iint_D\left(\frac{y(y\sqrt{x^2+y^2}+1)}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy=\iint_D y^2dxdy=\int_3^6 dx\int_2^4 y^2dy=56$$

4. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ - две произвольные точки односвязной области D.

Рассмотрим условия, при выполнении которых значение криволинейного интеграла

$$I = \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (3)$$

не зависит от выбора линии, соединяющей точки А и В, т.е. при каких условиях для любой дуги АВ этот интеграл будет равен одному и тому же числу. О таком криволинейном интеграле говорят, что он не зависит от пути интегрирования и его обозначают символом

$$I = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

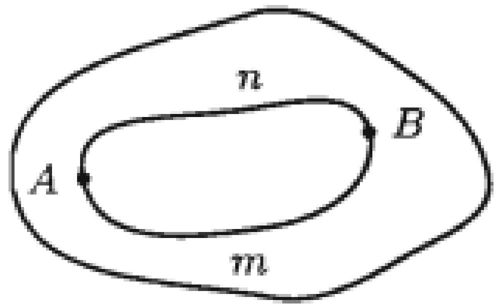
Теорема. Для того, чтобы криволинейный интеграл (3) не зависел от пути интегрирования в односвязной области D, в которой функции *P(x,y), Q(x,y)* непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4)$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный замкнутый контур *AmBnA* (или Г) в области D. Для него имеет место формула Остроградского-Грина

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \overset{(4)}{=} 0$$



или $\oint\limits_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

Учитывая свойства криволинейного интеграла

$$\oint\limits_{AmBnA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BnA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy = 0 \qquad \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy$$

Полученное равенство означает, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Следствие 1. В ходе доказательства теоремы было получено, что если выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (4)$$

то интеграл по замкнутому контуру равен нулю:

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Верно и обратное утверждение.

Следствие 2. Если выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (4)$$

то подынтегральное выражение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u(x;y)*, т.е.

$$P(x;y)dx + Q(x;y)dy = d\,u(x;y)$$

Тогда

$$I = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_A^B d\,u(x,y) = u(x;y)\Big|_A^B =$$

$$= u(B) - u(\mathrm{A}) = u(x_2;y_2) - u(x_1;y_1) \qquad (5)$$

Формула (5) называется ***обобщенной формулой Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала.***

ПРИМЕР 6.

Найти интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy$

РЕШЕНИЕ.

$$P(x;y) = y,$$

$$Q(x;y) = x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \Rightarrow$$ интеграл не зависит от пути интегрирования

В качестве пути интегрирования можно взять отрезок прямой $y = x$, дугу параболы $y = x^2$ и т. д. или воспользоваться формулой (5). Так как $ydx + xdy = d(xy)$, то

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy = \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} d(xy) = \left.(xy)\right|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1$$

Задача 1.

Используя формулы Остроградского-Грина вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} xydx + (x + y)dy$,

где Г – окружность $x^2 + y^2 = R^2$

Задача 2.

Используя формулы Остроградского-Грина вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2dx - xy^2dy$,

где Г – окружность $x^2 + y^2 = a^2$

Задача 3.

Используя формулы Остроградского-Грина вычислить $\oint\limits_{\Gamma} y^2dx + (x + y)^2 dy$,

где Г – треугольник ABC с вершинами *A(a;0), B(a;a), C(0;a)*.

Задача 4.

Показать, что криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (3x^2 y + y)dx + (x^3 + x)dy$,

где A(1;2), B(4;5), не зависит от пути интегрирования, и найти значение этого интеграла.

Задача 1.

Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_C xydx + (x+y)\,dy$, где кривая C − окружность радиуса R.

Решение.

$$P(x,y) = xy,\quad Q(x,y) = x + y.$$

С помощью формулы Грина

$$\iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy$$

преобразуем криволинейный интеграл в двойной:

$$I = \oint\limits_C xydx + (x+y)\,dy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial (x+y)}{\partial x} - \frac{\partial (xy)}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_R (1-x)\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, находим искомый интеграл:

$$I = \int\limits_R (1-x)\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1 - r\cos\theta)\,rdrd\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1 \left(r - r^2\cos\theta\right) dr\right] d\theta$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\left.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right)\right|_{r=0}^{1}\right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{3}\right) d\theta = \left.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{3}\right)\right|_0^{2\pi} = \pi.$$

Задача 2.

Используя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint\limits_C x^2ydx - xy^2dy$. Кривая C представляет собой окружность $x^2+y^2=a^2$ обход которой производится против часовой стрелки.

Решение.

$$P(x,y)=x^2y,\;\; Q(x,y)=-xy^2,\;\; \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial\left(-xy^2\right)}{\partial x}=-y^2,\;\; \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2y\right)}{\partial y}=x^2.$$

Тогда

$$I=\oint\limits_C x^2ydx-xy^2dy=\iint\limits_R\left(-y^2-x^2\right)dxdy=-\iint\limits_R\left(x^2+y^2\right)dxdy,$$

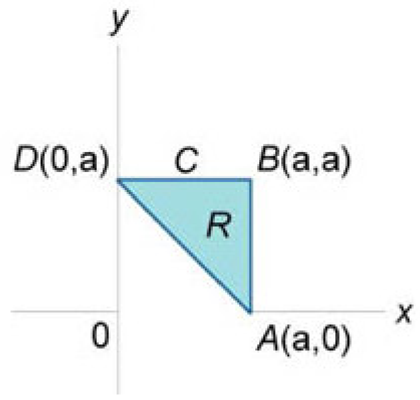
где R – круг радиуса a с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, находим искомый интеграл:

$$I=-\iint\limits_R\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^a\left(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)rdr=-\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^a r^3dr=-2\pi\cdot\left[\left.\left(\frac{r^4}{4}\right)\right|_0^a\right]$$

$$=-\frac{\pi a^4}{2}.$$

Задача 3.

С помощью формулы Грина вычислить интеграл $\oint\limits_C y^2dx + (x+y)^2dy$, где контур C представляет собой треугольник ABC с вершинами $A(a,0)$, $B(a,a)$, $D(0,a)$



Решение.

В заданном криволинейном интеграле $P = y^2$, $Q = (x+y)^2$, так что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left((x+y)^2\right)}{\partial x} = 2(x+y), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial y} = 2y.$$

Тогда по формуле Грина получаем

$$I = \oint\limits_C y^2dx + (x+y)^2dy = \iint\limits_R [2(x+y) - 2y]\,dxdy = 2\iint\limits_R xdxdy.$$

Уравнение стороны AD имеет вид $y = -x + a$. Следовательно, полученный двойной интеграл вычисляется следующим образом:

$$I = 2\iint\limits_R xdxdy = 2\int\limits_0^a\left[\int\limits_{-x+a}^a dy\right]xdx = 2\int\limits_0^a\left[y|_{-x+a}^a\right]xdx = 2\int\limits_0^a[a-(-x+a)]\,xdx = 2\int\limits_0^a x^2dx$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a\right] = \frac{2a^3}{3}.$$

Задача 4.

Показать, что криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (3x^2y + y)\, dx + (x^3 + x)\, dy$, где точки A, B имеют координаты $A\,(1, 2)$, $B\,(4, 5)$, не зависит от пути интегрирования, и найти значение этого интеграла.

Решение.

$$P\,(x, y) = 3x^2y + y, \quad Q\,(x, y) = x^3 + x$$

и их частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial\left(3x^2y + y\right)}{\partial y} = 3x^2 + 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^3 + x\right)}{\partial x} = 3x^2 + 1$$

непрерывны и условие потенциальности поля $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено, то криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Заметим, что

$$\left(3x^2y + y\right) dx + \left(x^3 + x\right) dy = \left(3x^2ydx + x^3dy\right) + \left(ydx + xdy\right) = d\left(x^3y\right) + d\,(xy) = d\left(x^3y + xy\right) = du,$$

то есть $u = x^3y + xy$. Тогда по формуле

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = u\,(B) - u\,(A)$$

находим значение интеграла

$$I = \int\limits_{AB} \left(3x^2y + y\right) dx + \left(x^3 + x\right) dy = u\,(B) - u\,(A) = \left(4^3 \cdot 5 + 4 \cdot 5\right) - \left(1^3 \cdot 2 + 1 \cdot 2\right) = 336.$$