

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Н.Н. Корнеева, М.Ф. Насрутдинов, Ф.Ф. Шарифуллина

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань — 2016

УДК 514

Рекомендовано кафедрой алгебры и математической логики КФУ

Протокол №4 от 22 декабря 2015 г.

Печатается по решению учебно-методической комиссии

Высшей школы информационных технологий и информационных систем

Протокол №4 от 4 февраля 2016 г.

Научный редактор:

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры и
математической логики КФУ Арсланов М.М.

Корнеева Н.Н., Насрутдинов М.Ф., Шарифуллина Ф.Ф.

Сборник задач по аналитической геометрии. Учебно-методическое пособие / Корнеева Н.Н., Насрутдинов М.Ф., Шарифуллина Ф.Ф. — Казань: Казанский университет, 2016. — 64 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса Высшей школы информационных технологий и информационных систем для проведения практических занятий по курсу "Алгебра и геометрия" во втором семестре.

© Корнеева Н.Н., Насрутдинов М.Ф., Шарифуллина Ф.Ф., 2016

© Казанский университет, 2016

Оглавление

1	Векторная алгебра	4
2	Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов . . .	8
2.1	Скалярное произведение векторов	8
2.2	Векторное произведение векторов	11
2.3	Смешанное произведение векторов	13
3	Прямая линия на плоскости	15
3.1	Уравнение прямой на плоскости	15
3.2	Нормальное уравнение прямой. Расстояние до прямой .	20
4	Плоскость	22
5	Прямая линия в пространстве	27
5.1	Уравнение прямой в пространстве	27
5.2	Взаимное расположение прямых в пространстве и прямой и плоскости в пространстве	30
6	Кривые второго порядка	34
6.1	Эллипс	35
6.2	Гипербола	39
6.3	Парабола	44
7	Преобразования аффинных координат на плоскости и в пространстве	48
8	Кривые и поверхности второго порядка	52
8.1	Нахождение канонического вида кривых второго порядка	52
8.2	Нахождение канонического вида поверхностей второго порядка	59
	ЛИТЕРАТУРА	65

1 Векторная алгебра

Понятие вектора. Сложение векторов, умножение вектора на скаляр. Координаты вектора в базисе. Радиус-вектор точки.

Вектором называется направленный отрезок, который удобно записывать как упорядоченную пару точек. Первая точка называется началом вектора, вторая — концом. Вектор с началом A и концом B обозначается \overrightarrow{AB} . Если точки A и B совпадают, то вектор называется *нулевым*.

Модулем вектора \overrightarrow{AB} (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$) называется длина отрезка AB .

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на параллельных прямых, либо на одной прямой. Два коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} называются *сонаправленными* (обозначается $\vec{a} \parallel \vec{b}$), если их направления совпадают. Два коллинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} называются *противоположно направленными* (обозначается $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$), если их направления противоположны.

Векторы, параллельные одной плоскости или лежащие на одной плоскости, называются *компланарными*.

Два ненулевых вектора \vec{a} и \vec{b} называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправлены и их модули равны.

Суммой векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, идущий из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} при условии, что вектор \vec{b} приложен к концу вектора \vec{a} (правило треугольника).

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1. коммутативность: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. ассоциативность: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,
3. существование нейтрального элемента: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. существование противоположного элемента: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Произведением числа λ на вектор \vec{a} называется вектор $\lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору \vec{a} , модуль которого равен $|\lambda||\vec{a}|$ и который направлен в ту же сторону, что и вектор \vec{a} , если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$,
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называется вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — произвольные вещественные числа.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, одновременно не равные нулю, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k = 0$. В противном случае, векторы называются *линейно независимыми*.

Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Линейно независимая система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *базисом векторного пространства*, если любой вектор этого пространства может быть представлен как линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара \vec{e}_1, \vec{e}_2 неколлинеарных векторов. *Координатами* вектора \vec{a} по отношению к базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 называется пара чисел $\{x, y\}$ такая, что $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\},$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1\}.$$

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некопланарных векторов. *Координатами* вектора \vec{a} по отношению к базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется тройка чисел $\{x, y, z\}$ такая, что $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\},$$

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$$

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

Радиус-вектором точки A называется вектор \overrightarrow{OA} , где O — фиксированная точка.

Аффинным репером на плоскости называется набор $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, состоящий из точки O и базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на плоскости. *Координатами точки* A относительно репера $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ называются координаты ее радиус-вектора \overrightarrow{OA} относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Обозначается $A(x, y)$.

Если $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, то $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A\}$.

Аффинным репером в пространстве называется набор $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, состоящий из точки O и базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в пространстве. *Координатами точки* A относительно репера $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются координаты ее радиус-вектора \overrightarrow{OA} относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Обозначается $A(x, y, z)$.

Если $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, то $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$.

1.1. Векторы $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы \vec{a} , \vec{b} векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DA} , являющиеся сторонами этого параллелограмма.

1.2. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Выразить вектор \overrightarrow{AD} через векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} .

1.3. Точки E и P служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EP} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

1.4. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна 0.

1.5. Даны радиус-векторы \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 трех последовательных вершин A , B , C параллелограмма. Найти радиус-вектор \vec{r}_4 четвертой вершины D параллелограмма.

1.6. Зная радиус-векторы вершин треугольника \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 , найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

1.7. Даны три вектора $\vec{a} = \{2, 4\}$, $\vec{b} = \{-3, 1\}$, $\vec{c} = \{5, -2\}$. Найти векторы $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$ и $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

1.8. Даны три вектора $\vec{a} = \{4, -2\}$, $\vec{b} = \{3, 5\}$, $\vec{c} = \{1, -7\}$. Представить вектор \vec{c} как линейную комбинацию векторов \vec{a} и \vec{b} .

1.9. Какие из троек векторов линейно зависимы. Представить вектор \vec{c} (если это возможно) в виде линейной комбинации векторов \vec{a} и \vec{b} :

- 1) $\vec{a} = \{5, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{-1, 4, 2\}$, $\vec{c} = \{-1, -1, 6\}$;
- 2) $\vec{a} = \{6, 4, 2\}$, $\vec{b} = \{-9, 6, 3\}$, $\vec{c} = \{-3, 10, 5\}$.

1.10. Даны три вершины параллелограмма $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 0)$. Найти четвертую ее вершину.

1.11. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(2, 3)$, серединой отрезка служит точка $C(1, -2)$. Найти другой конец отрезка.

1.12. Точки K , L — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{b}$, выразить через векторы \vec{a} , \vec{b} векторы \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{CD} .

1.13. В треугольнике ABC проведены медианы AD , BE и CF . Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

1.14. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через \vec{a} и \vec{b} векторы \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EF} , идущие по сторонам этого шестиугольника.

1.15. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Найти какой-нибудь вектор \overrightarrow{OM} , идущий по биссектрисе угла AOB .

1.16. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

1.17. В параллелограмме найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам параллелограмма, была равна нулю.

1.18. Зная радиус-векторы \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор \vec{r} точки пересечения диагоналей параллелограмма.

1.19. Зная радиус-векторы \vec{r}_A , \vec{r}_B , \vec{r}_D , $\vec{r}_{A'}$ четырех вершин параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$, найти радиус-векторы остальных четырех его вершин.

1.20. Даны три вектора $\vec{a} = \{5, 3\}$, $\vec{b} = \{2, 0\}$, $\vec{c} = \{4, 2\}$. Подобрать числа α , γ так, чтобы три вектора $\alpha\vec{a}$, \vec{b} , $\gamma\vec{c}$ составили треугольник.

1.21. Даны три вектора $\vec{a} = \{5, 7, 2\}$, $\vec{b} = \{3, 0, 4\}$, $\vec{c} = \{-6, 1, -1\}$. Найти векторы $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ и $-\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$.

1.22. Представить вектор $\vec{d} = \{4, 12, -3\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{5, 7, 0\}$, $\vec{c} = \{3, -2, 4\}$.

1.23. Представить вектор $\vec{d} = \{0, 20, 18\}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = \{3, 5, 6\}$, $\vec{b} = \{2, -7, 1\}$, $\vec{c} = \{12, 0, 6\}$.

1.24. Показать, что для любых трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и любых трех чисел α , β , γ векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ компланарны.

- 1.25. Проверить, что четыре точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ служат вершинами трапеции.
- 1.26. Даны две точки $A(-4, 2)$, $B(8, -7)$. Найти точки C и D , которые делят отрезок AB на три равные части.
- 1.27. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 2)$ и $D(1, 5)$ разделен на три равные части.
- 1.28. Даны середины сторон треугольника $M_1(2, 4)$, $M_2(-3, 0)$, $M_3(2, 1)$. Найти его вершины.

2 Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их свойства. Геометрическая интерпретация. Координатная запись.

2.1 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$,
2. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$,
3. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$,
4. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$.

Из последней формулы следует, что $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$, или $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Дальнейшие формулы приведены для трехмерного случая, в двумерном случае отсутствуют слагаемые с третьей координатой.

Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы своими координатами $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ в ортонормированной системе координат, то их скалярное

произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Длина вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Расстояние между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ можно найти как длину вектора \overrightarrow{AB} :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Проекция произвольного вектора \vec{c} на ось u определяется формулой

$$pr_u \vec{c} = \vec{c}\vec{e},$$

где \vec{e} — единичный вектор, направленный по оси u .

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} определяется из формулы

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Векторы $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е. $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

2.1. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} в следующих случаях:

1) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$;

2) $\vec{a} \perp \vec{b}$;

3) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

2.2. В треугольнике ABC даны длины его сторон $AB = 7$, $BC = 5$, $CA = 6$. Найти скалярное произведение векторов \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{BA} .

2.3. Какой угол образуют векторы единичной длины \vec{s} и \vec{t} , если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно-перпендикулярны.

2.4. Даны единичные векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

2.5. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении α векторы $\vec{c} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$ будут перпендикулярны.

2.6. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3, 5, 7\}$ и $\vec{b} = \{-2, 6, 1\}$.

2.7. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = \{5, 2, 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2, -1, 2\}$.

2.8. Даны точки: $A(1, -2, -3)$, $B(3, 1, -9)$. Вычислить расстояние между точками A и B .

2.9. Вычислить расстояния от начала координат O до точек:

1) $A(4, -2, -4)$;

2) $B(-4, 12, 6)$.

2.10. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3, -1, 6)$, $B(-1, 7, -2)$ и $C(1, -3, 2)$ прямоугольный.

2.11. Определить, есть ли тупой угол среди внутренних углов треугольника с вершинами $A(4, -1, 4)$, $B(0, 7, -4)$, $C(3, 1, -2)$.

2.12. На оси абсцисс найти точку, расстояние которой от точки $A(-3, 4, 8)$ равно 12.

2.13. Найти центр C и радиус R шаровой поверхности, которая проходит через точку $P(4, -1, -1)$ и касается всех трех координатных плоскостей.

2.14. Найти скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} в следующих случаях:

1) $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$;

2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

2.15. Доказать, что векторы $\vec{d} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}\vec{c})$ и \vec{c} перпендикулярны друг другу.

2.16. Проверить справедливость тождества $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$ и дать его геометрическое толкование.

2.17. Даны три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$, вычислить $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

2.18. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{3, 0, 6\}$ и $\vec{b} = \{2, -4, 0\}$.

2.19. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = \{2, 1, -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 3$.

2.20. Определить угол между векторами $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$.

2.21. Даны три вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$, где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} — орты. Вычислить проекцию $pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

2.22. Даны точки: $A(2, -3, 0)$, $B(3, 1, -9)$, $C(-1, 1, -12)$. Вычислить расстояние между:

1) A и C ;

2) B и C .

2.23. Вычислить расстояния от начала координат O до точек:

1) $A(12, -4, 3)$;

2) $B(12, 16, -15)$.

2.24. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ и $C(-3, 2, 1)$ равнобедренный.

2.25. Доказать, что внутренние углы треугольника с вершинами $A(3, -2, 5)$, $B(-2, 1, -3)$, $C(5, 1, -1)$ острые.

2.26. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1, -3, 7)$ и $B(5, 7, -5)$.

2.27. Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ и $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

2.2 Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор, обозначаемый символом $[\vec{a}, \vec{b}]$ и определяемый следующими условиями:

1) модуль вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$;

2) вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен каждому из векторов \vec{a} и \vec{b} ;

3) направление вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$ таково, что вектора \vec{a} , \vec{b} и $[\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую тройку векторов.

Три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют *правую тройку*, если кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} , отложенных от одного начала, осуществляется против часовой стрелки, если смотреть на плоскость, где лежат вектора \vec{a} и \vec{b} , с конца вектора \vec{c} . Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то вектора образуют *левую тройку*.

Свойства векторного произведения:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,

2. $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$,

3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Модуль векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Если система координатных осей правая и векторы \vec{a} и \vec{b} заданы в этой системе своими координатами $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, то векторное произведение вектора \vec{a} на вектор \vec{b} определяется формулой:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Векторы $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ или когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

2.28. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислить $||[\vec{a}, \vec{b}]||$.

2.29. Даны: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a}\vec{b} = 12$. Вычислить $||[\vec{a}, \vec{b}]||$.

2.30. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

- 1) $||(\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})||$;
- 2) $||(\vec{a} + 3\vec{b}), (\vec{a} - 2\vec{b})||$.

2.31. Даны векторы $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$ и $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$. Найти координаты векторных произведений:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}]$;
- 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}), \vec{b}]$;
- 3) $[(2\vec{a} - \vec{b}), (2\vec{a} + \vec{b})]$.

2.32. Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, 2, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[\vec{AB}, \vec{BC}]$.

2.33. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{2, -1, 1\}$.

2.34. Какому условию должны удовлетворять векторы \vec{a} и \vec{b} , чтобы векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?

2.35. Доказать тождество $[\vec{a}, \vec{b}]^2 + (\vec{a}\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.

2.36. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}]^2 \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$. В каком случае здесь будет знак равенства?

2.37. Даны: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ и $|\vec{a}, \vec{b}| = 72$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

2.38. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол 120° . Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить:

- 1) $[\vec{a}, \vec{b}]^2$;
- 2) $[(2\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} + 2\vec{b})]^2$;
- 3) $[(\vec{a} + 3\vec{b}), (3\vec{a} - \vec{b})]^2$.

2.39. Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, 2, 1)$. Найти координаты векторного произведения $[(\vec{BC} - 2\vec{CA}), \vec{CB}]$.

2.40. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.41. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ и $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

2.42. При каком значении α векторы $\vec{c} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся коллинеарными, если \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны.

2.43. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Доказать, что $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$.

2.44. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} связаны соотношениями $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$ и $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec{a} - \vec{d}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.

2.3 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , обозначаемым $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, называется число, равное векторному произведению $[\vec{a}, \vec{b}]$, умноженному скалярно на вектор \vec{c} , т. е. $[\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$,
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} равно объему параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , взятому со знаком

плюс, если тройка векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} правая, и со знаком минус, если эта тройка левая.

Если векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, то смешанное произведение определяется формулой

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Векторы $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ и $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.45. Векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.46. Вектор \vec{c} перпендикулярен к векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.47. Доказать, что $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \leq |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$. В каком случае здесь может иметь место знак равенства?

2.48. Даны три вектора: $\vec{a} = \{1, -1, 3\}$, $\vec{b} = \{-2, 2, 1\}$, $\vec{c} = \{3, -2, 5\}$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.49. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = \{2, 3, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$, $\vec{c} = \{1, 9, -11\}$.

2.50. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

2.51. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{e} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ и $\vec{f} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$, где \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — взаимно перпендикулярные орты.

2.52. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ и $D(4, 1, 3)$.

2.53. Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2.54. Векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} удовлетворяют условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$. Доказать, что вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны.

2.55. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 2\}$, $\vec{c} = \{3, -1, -2\}$.

2.56. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{e} = 2\vec{a} + 7\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

2.57. Даны вершины тетраэдра: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D .

2.58. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

3 Прямая линия на плоскости

3.1 Уравнение прямой на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости, вектор нормали, каноническое уравнение прямой, направляющий вектор, условие параллельности и перпендикулярности прямых, переход от общего уравнения к каноническому и от канонического к общему, уравнение прямой в отрезках.

В декартовых координатах каждая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени и, наоборот, каждое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

называется *общим уравнением прямой*.

Уравнение прямой в виде

$$y = kx + b \quad (2)$$

называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В этом уравнении коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox и называется угловым коэффициентом, коэффициент b — это величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy , считая от начала координат.

Если (x_0, y_0) — точка прямой, то уравнение прямой может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad (3)$$

где A, B — некоторые действительные числа.

Вектор, перпендикулярный прямой, называется *вектором нормали*. В прямоугольной системе координат для прямой, заданной уравнением (1) или (3), один из векторов нормали имеет координаты $\{A, B\}$.

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) и параллельной вектору $\{l, m\}$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad (4)$$

и называется *каноническим уравнением прямой*.

Вектор, параллельный прямой, называется *направляющим вектором прямой*. Направляющим вектором прямой, заданной уравнением (1) или (3), является вектор $\{B, -A\}$. Направляющим вектором прямой, заданной уравнением (4), является вектор $\{l, m\}$.

Условие параллельности вектора $\{l, m\}$ прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) , может быть записано в виде: $\{x - x_0, y - y_0\} = t \cdot \{l, m\}$, где $t \in \mathbf{R}$, а (x, y) — координаты произвольной точки прямой. Записывая уравнение по координатам, получим *параметрическое уравнение прямой*

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot a, \\ y = y_0 + t \cdot b. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \quad (6)$$

Уравнение прямой, не проходящей через начало координат и пересекающей оси координат в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$, имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7)$$

и называется *уравнением прямой в отрезках*.

Угол α между прямыми $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ можно найти как угол между векторами нормали

$\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$, используя скалярное произведение:

$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда их вектора нормали коллинеарны, т.е. когда координаты векторов нормали пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их вектора нормали, т.е. когда скалярное произведение векторов нормали равно нулю: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Если уравнение прямых записаны в параметрической или канонической форме, то угол между ними удобнее искать как угол между направляющими векторами $\{l_1, m_1\}$ и $\{l_2, m_2\}$:

$$\cos \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}}.$$

В этом случае для проверки параллельности и перпендикулярности прямых достаточно проверить параллельность и перпендикулярность направляющих векторов прямых.

3.1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $(3, -2)$ параллельно осям координат.

3.2. Дан треугольник ABC : $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, -5)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины A .

3.3. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки 3 и 5.

3.4. Написать в параметрической форме уравнения следующих прямых:

1) $3x + 6y + 5 = 0$,

2) $x = 2$.

3.5. Записать общее уравнение прямой, заданной параметрическим уравнением: $x = t$, $y = 1 - 3t$.

3.6. Привести общее уравнение прямой к уравнению в отрезках в каждом из следующих случаев:

1) $4x - 3y - 10 = 0$,

2) $x - y + 10 = 0$,

3) $x + 2 = 0$,

4) $y = 2$.

3.7. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y - 8 = 0$,

2) $x - y + 5 = 0$, $2x - 2y + 3 = 0$.

3.8. Установить какие из нижеследующих пар прямых будут взаимно перпендикулярны:

1) $x - 2y + 3 = 0$, $2x + y - 5 = 0$,

2) $2x + 3y - 6 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$.

3.9. Даны середины $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 2)$ и $M_3(4, 5)$ сторон треугольника. Составить уравнения сторон.

3.10. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - y - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ и точка пересечения диагоналей $M(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

3.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-8, 1)$ параллельно прямой $x + y + 7 = 0$.

3.12. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $6x + 5y - 19 = 0$.

3.13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(7, 9)$ перпендикулярно к прямой $3x - 2y + 4 = 0$.

3.14. Найти проекцию точки $(-5, 6)$ на прямую $7x - 13y - 105 = 0$.

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и через точку $(-1, -8)$.

3.16. Написать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $(3, -5)$ параллельно вектору $\{-4, 2\}$.

3.17. Написать в параметрической форме уравнения следующих прямых:

1) $x - 2y - 4 = 0$,

2) $y = -3x + 5$.

3.18. Записать общее уравнение прямой, заданной параметрическим уравнением: $x = 2 + 5t$, $y = 4 - 7t$.

3.19. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(2, 3)$

и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая каждый отрезок от начала координат.

3.20. Установить, какие из нижеследующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x - 2y + 4 = 0$, $-2x + 4y - 8 = 0$,

2) $x + y + 5 = 0$, $2x + 3y + 10 = 0$,

3) $4x + 6y - 7 = 0$, $2x + 3y - 1 = 0$.

3.21. Установить какие из нижеследующих пар прямых будут взаимно перпендикулярны:

1) $3x + 7y + 4 = 0$, $7x - 3y + 2 = 0$,

2) $5x + 6y - 8 = 0$, $6x + 5y + 2 = 0$.

3.22. Через точку $(7, 4)$ провести прямую, параллельную прямой $3x - 2y + 4 = 0$.

3.23. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y = 0$ и $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин $C(4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

3.24. Даны вершины треугольника: $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(0, 4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне.

3.25. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(-5, 2)$ на прямую $4x - y + 3 = 0$.

3.26. Даны вершины треугольника: $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$ и $C(-1, -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC .

3.27. Даны вершины четырехугольника: $A(-9, 0)$, $B(-3, 6)$, $C(3, 4)$ и $D(6, -3)$. Найти точку пересечения его диагоналей AC и BD и вычислить угол между ними.

3.28. Через точку $(3, 1)$ провести прямые, наклоненные к прямой $2x + 3y - 1 = 0$ под углом 45° .

3.29. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей: $x + 3y - 6 = 0$.

3.2 Нормальное уравнение прямой. Расстояние до прямой

Нормальное уравнение прямой. Задача определения расстояния от точки до прямой.

Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

где p — расстояние от прямой до начала координат, α — угол между нормалью к прямой и осью Ox .

Переход от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к нормальному уравнению осуществляется умножением общего уравнения на $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где знак противоположен знаку C .

Расстояние d от точки с координатами (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.30. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев:

- 1) $4x - 3y - 10 = 0$,
- 2) $x - y + 10 = 0$,
- 3) $x + 2 = 0$,
- 4) $y = 2$.

3.31. Вычислить расстояние d точки $A(2, 1)$ до прямых $4x + 3y + 10 = 0$ и $5x - 12y - 23 = 0$.

3.32. Определить расстояние от точек $(1, 0)$ и $(-1, 2)$ до прямой $3x - y + 4 = 0$.

3.33. На прямой $x - 3y + 1 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3, 1)$ и $(5, 4)$.

3.34. Доказать, что прямая $2x + y + 3 = 0$ пересекает отрезок, ограниченный точками $A(-5, 1)$ и $B(3, 7)$.

3.35. Установить, лежит ли точка $M(1, -3)$ и начало координат по одну или по разные стороны от прямой $2x - y + 5 = 0$.

3.36. Найти точку, симметричную точке $M(-2, 9)$ относительно прямой $2x - 3y + 18 = 0$.

3.37. Доказать, что прямые $3x - 7y + 2 = 0$, $-6x + 14y - 6 = 0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

3.38. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x + 7y = 0$.

3.39. Центр симметрии квадрата находится в точке $(-1, 0)$, уравнение одной из его сторон $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех других сторон.

3.40. Составить уравнение биссектрисы $\angle A$ треугольника ABC с вершинами $A(3, 1)$, $B(0, -3)$ и $C(7, 4)$.

3.41. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

3.42. Найти расстояния от точек $A(3, 1)$, $B(2, -4)$, $C(5, -1)$, $D(0, 0)$ до прямой $3x + 4y = 0$.

3.43. Вычислить расстояние d между параллельными прямыми $3x - 4y - 10 = 0$ и $6x - 8y + 5 = 0$.

3.44. Составить уравнения прямых, параллельных прямой $7x - 2y + 4 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии $\sqrt{53}$.

3.45. Установить, лежит ли точка $M(1, 3)$ и начало координат по одну или по разные стороны от каждой из следующих прямых:

1) $3x + 2y - 1 = 0$;

2) $x - 3y + 2 = 0$.

3.46. Доказать, что прямая $2x - 3y + 6 = 0$ не пересекает отрезок, ограниченный точками $A(-2, -3)$ и $B(1, -2)$.

3.47. Последовательные вершины четырехугольника суть точки $A(-3, 5)$, $B(-1, -4)$, $C(7, -1)$ и $D(2, 9)$. Установить, является ли этот четырехугольник выпуклым.

3.48. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 5)$ на одинаковых расстояниях от точек $B(-7, 3)$ и $C(11, -15)$.

3.49. Через точку пересечения прямых $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $2x - y + 4 = 0$.

3.50. Стороны AB , BC , CA треугольника ABC соответственно даны уравнениями $x + 21y - 22 = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$, $4x - 33y + 146 = 0$. Вычислить расстояние от центра тяжести (пересечение медиан) этого треугольника до стороны BC .

3.51. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$ и $C(5, -2)$.

4 Плоскость

Общее уравнение плоскости; нормальный вектор плоскости; угол между плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности плоскостей; уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой; уравнение плоскости в отрезках; параметрическое уравнение плоскости; нормальное уравнение плоскости; расстояние от точки до плоскости; переход от одного типа уравнения к другому.

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и каждое уравнение первой степени определяет плоскость.

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

называется *общим уравнением плоскости*.

Всякий (не равный нулю) вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее *нормальным вектором*.

Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

определяет плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Угол между двумя плоскостями, задаваемыми общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, находится как угол между нормальными векторами этих плоскостей $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$:

$$\cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их вектора нормали коллинеарны, т.е. когда их координаты пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их вектора нормали, т.е. когда скалярное произведение векторов нормали равно нулю: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной неколлинеарным векторам $\vec{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$ и $\vec{m} = \{m_1, m_2, m_3\}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной неколлинеарным векторам $\vec{l} = \{l_1, l_2, l_3\}$ и $\vec{m} = \{m_1, m_2, m_3\}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1u + m_1v, \\ y = y_0 + l_2u + m_2v, \\ z = z_0 + l_3u + m_3v, \end{cases} \quad (5)$$

где u, v — параметры.

Уравнение плоскости в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (6)$$

называется *уравнением плоскости в отрезках*. В этом уравнении a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Ox, Oy, Oz .

Нормальным уравнением плоскости называется уравнение вида

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (7)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — направляющие косинусы единичного вектора нормали плоскости, p — расстояние от начала координат до плоскости. Переход от общего уравнения (1) к нормальному уравнению (7)

осуществляется умножением на $\pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где знак противоположен знаку D .

Величина

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

определяет расстояние от плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ до точки с координатами (x_0, y_0, z_0) .

Если убрать знак модуля, то полученная величина называется *отклонением*. Если отклонение положительно, то точка (x_0, y_0, z_0) и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, если отклонение отрицательно, то по одну сторону от плоскости. Если плоскость проходит через начало координат и отклонение положительно, то точка лежит в полупространстве, в которое показывает нормальный вектор.

4.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(3, 1, 4)$, $M_3(2, 1, 5)$.

4.2. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и параллельных вектору $\{2, 1, -4\}$.

4.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, 3)$, $M_2(3, 1, 2)$ параллельно вектору $\{3, -1, -4\}$.

4.4. Даны вершины тетраэдра $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$ и $D(4, 0, 6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD .

4.5. Составить параметрическое уравнение плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ параллельно векторам $\{-5, 6, 4\}$ и $\{4, -2, 0\}$.

4.6. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическому уравнению: $x = 2 + 3u - 4v$, $y = 4 - v$, $z = 2 + 3u$.

4.7. Определить положение точек $A(-3, 3, 5)$, $B(0, -7, -4)$, $C(6, 5, 1)$, $D(-3, -5, 2)$ относительно плоскости $2x - 3y + 6z - 1 = 0$.

4.8. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости Oxz и проходящей через точку $(2, -5, 3)$.

4.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и через точку $(-3, 1, -2)$.

4.10. Вычислить длины отрезков, отсекаемые на осях координат плоскостью $2x - 3y - z + 12 = 0$.

4.11. Определить взаимное расположение троек плоскостей: $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $x - 3z + 18 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$.

4.12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $(3, -2, -7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

4.13. Через точку $P(7, -5, 1)$ провести плоскость, которая отсекала бы на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

4.14. Вычислить расстояние от плоскости $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ до начала координат.

4.15. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $2x - y + 2z + 9 = 0$ и $4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

4.16. Составить уравнения плоскостей, которые параллельны плоскости $2x - 2y - z - 3 = 0$ и отстоят от нее на расстоянии $d = 3$.

4.17. Найти угол между плоскостью $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$ и плоскостью Oyz .

4.18. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол 45° .

4.19. Вычислить высоту h_S пирамиды с вершинами $S(0, 6, 4)$, $A(3, 5, 3)$, $B(-2, 11, -5)$, $C(1, -1, 4)$.

4.20. Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между плоскостями $x - 3y + 2z - 5 = 0$ и $3x - 2y - z + 3 = 0$.

4.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(2, 0, -1)$, $M_2(-2, 4, 1)$, $M_3(0, 2, -1)$.

4.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 7, 2)$ и параллельной векторам $\{4, 1, 2\}$ и $\{5, 3, 1\}$.

4.23. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и через середину ребра CD .

4.24. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $(1, 7, 8)$, $(2, -6, -6)$ и параллельной оси Oz .

4.25. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 5 + 6u - 4v$.

- 4.26. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через две точки $(4, 0, -2)$ и $(5, 1, 7)$.
- 4.27. Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $x - y + z - 1 = 0$.
- 4.28. Вычислить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $x - 7 = 0$.
- 4.29. Определить взаимное расположение троек плоскостей: $x + 2y - 3z = 0$, $3x + 6y - 9z + 10 = 0$, $2x + 4y - 6z - 1 = 0$.
- 4.30. Определить взаимное расположение троек плоскостей: $3x - y + 2z + 1 = 0$, $7x + 2y + z = 0$, $15x + 8y - z - 2 = 0$.
- 4.31. Найти плоскость, зная, что точка $P(3, -6, 2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.
- 4.32. Даны две точки $A(1, 3, -2)$ и $B(7, -4, 4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB .
- 4.33. Через точку $A(-5, 16, 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox , другая — ось Oy . Вычислить угол между этими двумя плоскостями.
- 4.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.
- 4.35. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.
- 4.36. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0, 0, 1)$ и $B(3, 0, 0)$ и образующей угол $\frac{\pi}{3}$ с плоскостью Oxy .
- 4.37. Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$ и одна из его вершин $(6, -5, 1)$. Составить уравнения трех других граней параллелепипеда.
- 4.38. На оси Oz найти точку, равноудаленную от двух плоскостей: $5x + z + 8 = 0$ и $x + 4y - 3z - 2 = 0$.
- 4.39. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями, заданными уравнениями $6x - 18y - 9z - 28 = 0$ и $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.
- 4.40. Можно ли провести плоскость через следующие четыре точки: $A(3, 1, 0)$, $B(0, 7, 2)$, $C(-1, 0, -5)$ и $D(4, 1, 5)$?
- 4.41. Найти центр сферы, вписанной в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x + 3y - 6z - 4 = 0$.

4.42. Найти точку, симметричную с началом координат относительно плоскости $6x + 2y - 9z + 121 = 0$.

4.43. Составить уравнения биссекторных плоскостей углов между плоскостями $5x - 5y - 2z - 3 = 0$ и $x + 7y - 2z + 1 = 0$.

5 Прямая линия в пространстве

Общее уравнение прямой; направляющий вектор прямой; каноническое уравнение прямой; уравнение прямой, проходящей через две точки; параметрическое уравнение прямой; переход от одного типа уравнения к другому; взаимное расположение прямых в пространстве; взаимное расположение прямой и плоскости.

5.1 Уравнение прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана уравнениями двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

при условии, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 , то есть плоскости не параллельны. Система (1) называется *общим уравнением прямой*.

Направляющим вектором прямой, заданной уравнением (1), будет вектор

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Пусть некоторая прямая l определена уравнениями (1) и α, β какие угодно числа, одновременно не равные нулю, тогда уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

определяет плоскость, проходящую через прямую l .

Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору с координатами $\{l, m, n\}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (2)$$

где t — параметр.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно вектору с координатами $\{l, m, n\}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (3)$$

В этом уравнении допустима символическая запись с нулем в знаменателе.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (4)$$

Угол между двумя прямыми

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

находится как угол между их направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$:

$$\cos \alpha = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие вектора коллинеарны, т.е. когда координаты направляющих векторов пропорциональны: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их направляющие вектора, т.е. когда скалярное произведение направляющих векторов равно нулю: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

5.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(4, 6, 9)$.

5.2. Составить параметрическое и каноническое уравнения прямой, заданной общим уравнением

$$\begin{cases} x + y - z + 5 = 0, \\ 2x - y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

5.3. Проверить, лежат ли на одной прямой следующие три точки: $(3, 0, 1)$, $(0, 2, 4)$, $(1, \frac{4}{3}, 3)$.

5.4. Через точку $(2, -5, 3)$ провести прямую, параллельную оси Oz .

5.5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 5, 1)$ параллельно прямой $x = 2 + 4t$, $y = -3t$, $z = -3$.

5.6. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

5.7. Определить угол между двумя прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

5.8. Проверить, перпендикулярны ли прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

5.9. В плоскости Oxz найти прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{1}$.

5.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(7, -1, 2)$, $M_2(5, -1, 4)$.

5.11. Составить каноническое и параметрическое уравнение прямой, заданной общим уравнением

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 0, \\ 3x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

5.12. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

5.13. Проверить, какие из следующих точек $A(5, 8, 15)$, $B(-1, -1, -3)$, $C(5, 7, 1)$, $D(0, 0, 1)$ лежат на прямой $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + 6t$.

5.14. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(0, -5, 4)$ параллельно прямой: $x + 2y + 6 = 0$, $z = 5$.

5.15. Определить угол между двумя прямыми

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

5.16. Вычислить углы, образованные противоположными ребрами тетраэдра с вершинами: $A(3, -1, 0)$, $B(0, -7, 3)$, $C(-2, 1, -1)$, $D(3, 2, 6)$.

5.17. Проверить, параллельны ли прямые

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

5.18. Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположащую сторону.

5.2 Взаимное расположение прямых в пространстве и прямой и плоскости в пространстве

Угол между прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится из формулы:

$$\sin \alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Прямая и плоскость параллельны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой ортогонален вектору нормали плоскости, т.е. когда скалярное произведение направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости равно нулю: $Al + Bm + Cn = 0$.

Прямая и плоскость перпендикулярны тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой коллинеарен вектору нормали плоскости, т.е. когда координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости пропорциональны: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

Условие того, что прямая лежит в плоскости, выражается следующими двумя равенствами:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Al + Bm + Cn = 0. \end{cases}$$

Условие принадлежности прямых

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

к одной плоскости, находится из условия компланарности направляющих векторов прямых и вектора, соединяющего точки прямых:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ определяется по формуле:

$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

находится по формуле:

$$d = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\text{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}} = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

5.19. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{-2}$.

5.20. Через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

5.21. Найти проекцию точки $A(4, -3, 1)$ на плоскость $x + 2y - z - 3 = 0$.

5.22. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(3, 1, -2)$ и через прямую $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

5.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $7x - y + 4z - 3 = 0$.

5.24. Установить расположение друг относительно друга следующей пары прямых (скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают); если прямые параллельны, написать уравнение плоскости через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и найти их общую точку: $x = 1 + 2t$, $y = 7 + t$, $z = 3 + 4t$ и $x = 6 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -2 + t$.

5.25. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости: $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и $3x + 5y - z - 2 = 0$.

5.26. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $A(2, 3, 1)$ на прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

5.27. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ параллельно прямой $x = -2t$, $y = -1 + 3t$, $z = 4$. Найти расстояние между указанными прямыми.

5.28. Найти расстояние от точки $A(1, -1, -2)$ до прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

5.29. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-4, -5, 3)$ и пересекает две прямые

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

5.30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, -2, -4)$ параллельно плоскости $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ и пересекающей прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.

5.31. Написать уравнение плоскости, проектирующей прямую

$$\begin{cases} x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость $2x + 3y + z - 6 = 0$. Составить уравнение проекции прямой на плоскость.

5.32. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

5.33. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x + y - 3z + 1 = 0$ с прямыми

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

5.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, -2, 1)$ перпендикулярно к прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

5.35. Из точки $A(3, -2, 4)$ опустить перпендикуляр на плоскость, заданную уравнением $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

5.36. Найти проекцию точки $A(2, -1, 3)$ на прямую $x = 3t$, $y = 5t - 7$, $z = 2t + 2$.

5.37. Найти точку, симметричную с точкой $A(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

5.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.

5.39. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 6t$, $z = 4t$ и коллинеарной прямой $x = -1 + 2t$, $y = 3t$, $z = -t$.

5.40. Установить расположение друг относительно друга следующих пар прямых (скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают); если прямые параллельны, написать уравнение плоскости через них проходящей; если прямые пересекаются, написать уравнение содержащей их плоскости и

найти их общую точку:

1) $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ и $x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$.

2) $x = 1 + 9t$, $y = 2 + 6t$, $z = 3 + 3t$ и $x = 7 + 6t$, $y = 6 + 4t$, $z = 5 + 2t$.

5.41. Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

2) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$.

5.42. Найти угол между прямой $x = 5 + 6t$, $y = 1 - 3t$, $z = 2 + t$ и плоскостью $7x + 2y - 3z + 5 = 0$.

5.43. Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(3, 2, 1)$ на ось Ox .

5.44. Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую, заданную уравнением $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

5.45. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

5.46. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ до прямой

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0. \end{cases}$$

5.47. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми:

$$\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

5.48. Написать уравнение плоскости, проектирующей прямую $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x - y + 3z + 8 = 0$. Составить уравнение проекции прямой на плоскость.

5.49. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ и $x = t + 1$, $y = 2t - 9$, $z = -t - 12$.

6 Кривые второго порядка

Линии второго порядка на плоскости. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Исследование их форм по их каноническим

уравнениям. Эксцентритет и директрисы эллипса, гиперболы и параболы. Полярные и параметрические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

6.1 Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Фокусы обозначают F_1 и F_2 , а расстояние между ними: $F_1F_2 = 2c$. По определению, $c < a$.

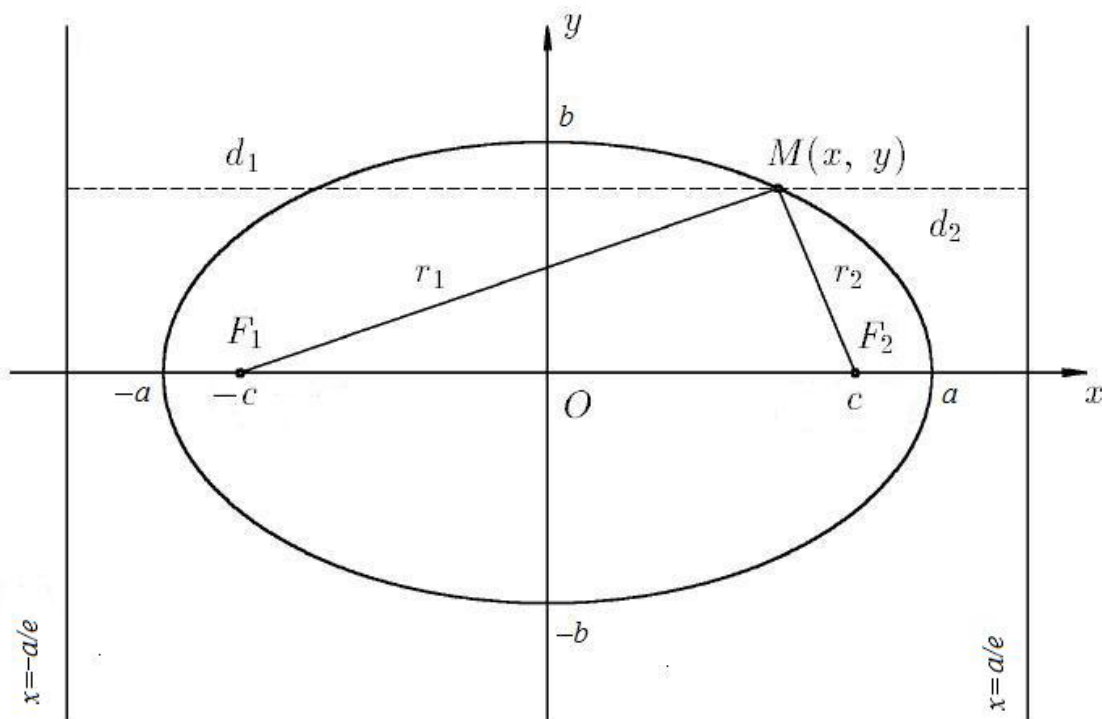


Рис. 1: Эллипс

Каноническое уравнение эллипса получим, выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середину между ними:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. Очевидно, $b < a$. Тогда фокусы имеют координаты: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Эллипс в указанной системе координат изображен на рисунке 1.

При указанном выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии эллипса, а начало координат — с центром симметрии. Точки пересечения эллипса с его осями симметрии называются *вершинами эллипса*. Отрезки, заключенные между вершинами эллипса, называются *осями эллипса*: $2a$ — *большой осью* и $2b$ — *малой осью*. Числа a и b называются, соответственно, *большой и малой полуосями эллипса*.

Число

$$e = \frac{c}{a} < 1,$$

где a — большая полуось, называется *эксцентриситетом эллипса*.

Расстояния любой точки $M(x, y)$ эллипса до фокусов называются ее *фокальными радиус-векторами* и вычисляются по формуле:

$$r_1 = F_1M = a + ex, \quad r_2 = F_2M = a - ex.$$

Прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm \frac{a}{e},$$

называются *директрисами эллипса*.

Эллипс обладает следующим свойством: если r — расстояние от точки эллипса до некоторого фокуса, d — расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение расстояний $\frac{r}{d}$ постоянно и равно эксцентриситету, то есть

$$\frac{r}{d} = e.$$

Средины параллельных хорд эллипса лежат на одной прямой, которая называется *диаметром эллипса*, сопряженным этим хордам. Если k — угловой коэффициент хорд эллипса, то уравнение сопряженного им диаметра имеет вид:

$$\frac{x}{a^2} + k \frac{y}{b^2} = 0.$$

Если хорды, параллельные одному диаметру эллипса, делятся другим диаметром пополам, то и хорды, параллельные другому диаметру эллипса,

делятся первым диаметром пополам. Такие два диаметра называются *сопряженными диаметрами эллипса*. Каждому диаметру эллипса отвечает вполне определенный сопряженный ему диаметр. Если k_1, k_2 — угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Главные диаметры (оси) эллипса одновременно являются перпендикулярными и сопряженными диаметрами.

Уравнение касательной к эллипсу, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, лежащую на эллипсе:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Полярное уравнение эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

где ρ, φ — полярные координаты произвольной точки эллипса, $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр. Полярная система координат при этом выбрана так, что полюс находится в фокусе, а полярная ось направлена по оси эллипса в сторону, противоположную ближайшей к этому фокусу директрисе.

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

где φ — параметр, называемый эксцентрическим углом точки эллипса.

6.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

- 1) расстояние между фокусами равно 8 и большая ось равна 10,
- 2) расстояние между директрисами равно 5 и расстояние между фокусами равно 4.

6.2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если расстояние между его фокусами равно 24 и эксцентриситет $e = \frac{12}{13}$.

6.3. Дан эллипс: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

6.4. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что малая ось его видна из фокуса под прямым углом.

6.5. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.

6.6. На эллипсе $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

6.7. Определить диаметр эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, сопряженный хордам, имеющим угловой коэффициент $k = \frac{2}{3}$.

6.8. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$ в точке $M(4, 3)$.

6.9. Определить касательные к эллипсу $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$, перпендикулярные прямой $13x + 12y - 115 = 0$.

6.10. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(5, 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что его эксцентриситет $e = 0,8$.

6.11. Дано уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить его полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе эллипса.

6.12. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

1) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

2) расстояние между директрисами равно 32 и эксцентриситет $e = \frac{1}{2}$.

6.13. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если расстояние между его фокусами равно 6 и расстояние между директрисами равно $16\frac{2}{3}$.

6.14. Дан эллипс: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найти его полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

6.15. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что:

1) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами,

2) расстояние между фокусам есть среднее арифметическое длин осей.

6.16. Составить уравнение такой хорды эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, которая точкой $M(2, 1)$ делится пополам.

6.17. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$, проведенных из точки $A(-6, 3)$.

6.18. Определить касательные к эллипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, параллельные прямой $x + y - 1 = 0$.

6.19. Найти общие касательные к следующим двум эллипсам: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ и $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$.

6.20. Эллипс касается оси абсцисс в точке $(7, 0)$ и оси ординат в точке $(0, 4)$. Составить уравнение эллипса, если известно, что оси его параллельны осям координат.

6.21. Через фокус $F(c, 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

6.22. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти точку, для которой произведение фокальных радиус-векторов равно квадрату малой полуоси.

6.23. При каком условии прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

6.24. Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

6.25. Дано уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить его полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе эллипса.

6.2 Гипербола

***Гипербола** — это геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух постоянных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.*

Фокусы обозначают F_1 и F_2 , а расстояние между ними $2c$. По определению, $c > a$.

Выбрав прямую, соединяющую фокусы, за ось абсцисс и поместив начало координат в середину между ними, получим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда фокусы имеют координаты: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Гипербола в указанной системе координат изображена на рисунке 2.

При указанном выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы, а начало координат — с центром симметрии.

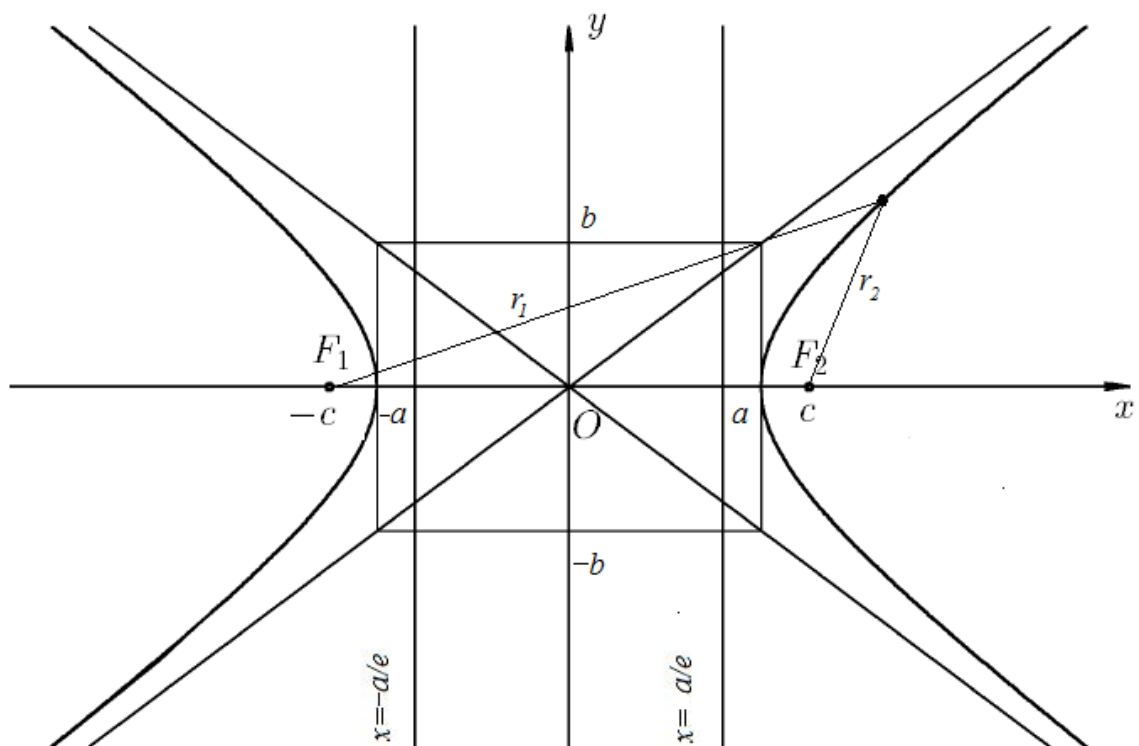


Рис. 2: Гипербола

Гипербола имеет две действительные вершины — точки пересечения гиперболы с осью Ox . Отрезок, заключенный между вершинами $2a$, называется *действительной осью гиперболы*. С осью Oy гипербола пересекается в двух мнимых точках $(0, \pm ib)$. Действительный отрезок $2b$ называется *мнимой осью гиперболы*. Числа a и b называются, соответственно, *действительной и мнимой полуосями гиперболы*.

Число

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Расстояния любой точки $M(x, y)$ гиперболы до фокусов $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ называются ее *фокальными радиус-векторами* и вычисляются по следующим формулам:

для левой ветви гиперболы: $r_1 = -a - ex$, $r_2 = a - ex$,

для правой ветви гиперболы: $r_1 = a + ex$, $r_2 = -a + ex$.

Прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm \frac{a}{e},$$

называются *директрисами гиперболы*.

Гипербола обладает следующим свойством: если r — расстояние от точки гиперболы до некоторого фокуса, d — расстояние от той же точки до односторонней с этим фокусом директрисы, то отношение расстояний $\frac{r}{d}$ постоянно и равно эксцентриситету, то есть

$$\frac{r}{d} = e.$$

Середины параллельных хорд гиперболы лежат на одной прямой, которая называется *диаметром гиперболы*, сопряженным этим хордам. Если k — угловой коэффициент хорд гиперболы, то уравнение *сопряженного им диаметра* имеет вид:

$$\frac{x}{a^2} - k \frac{y}{b^2} = 0.$$

Если хорды, параллельные одному диаметру гиперболы, делятся другим диаметром пополам, то и хорды, параллельные другому диаметру гиперболы, делятся первым диаметром пополам. Такие два диаметра называются *сопряженными диаметрами гиперболы*. Если k_1, k_2 — угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Уравнение касательной к гиперболе, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, лежащую на гиперболе:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Две гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

называются *сопряженными*.

Полярное уравнение гиперболы (для двух ветвей гиперболы) имеет вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{-p}{1 + e \cos \varphi},$$

где ρ , φ — полярные координаты произвольной точки гиперболы, $p = \frac{b^2}{a}$ — фокальный параметр. Полярная система координат при этом выбрана так, что полюс находится в фокусе, а полярная ось направлена по оси гиперболы в сторону, противоположную ближайшей к этому фокусу директрисе.

Параметрическое уравнение гиперболы имеет вид:

$$x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right),$$

где t — параметр.

6.26. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

- 1) действительная ось равна 48 и эксцентриситет $e = \frac{13}{12}$,
- 2) уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 20.

6.27. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если расстояние между директрисами равно $7\frac{1}{7}$ и эксцентриситет $e = \frac{7}{5}$.

6.28. Даны уравнения асимптот гиперболы $y = \pm \frac{5}{12}x$ и координаты точки $M(24, 5)$, лежащей на гиперболе. Составить уравнение гиперболы.

6.29. Дана гипербола: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Определить фокусы гиперболы, написать уравнение асимптот и директрис.

6.30. Определить фокальные радиус-векторы точки $M(-5, \frac{9}{4})$ гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

6.31. Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

6.32. Определить эксцентриситет равносторонней гиперболы.

6.33. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.

6.34. Написать уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, при условии, что ее эксцентриситет $e = \frac{5}{4}$.

6.35. Составить уравнение такой хорды гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, которая точкой $M(5, 1)$ делится пополам.

6.36. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M(5, -4)$.

6.37. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, которая параллельна прямой $3x - y - 17 = 0$.

6.38. На гиперболе $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ найти точку, которая была бы в три раза ближе от одной асимптоты, чем от другой.

6.39. Дано уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Составить полярное уравнение ее правой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в правом фокусе гиперболы.

6.40. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) расстояние между директрисами равно $22\frac{2}{13}$ и расстояние между фокусами равно 26,

2) действительная ось равна 16 и угол φ между асимптотой и осью абсцисс определяется условием $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{3}{4}$.

6.41. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат, симметрично относительно начала координат, если уравнения асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48.

6.42. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Найти координаты фокусов, эксцентриситет гиперболы, написать уравнения асимптот и директрис, уравнение сопряженной гиперболы, найти эксцентриситет сопряженной гиперболы.

6.43. Вычислить эксцентриситет гиперболы, если угол между ее асимптотами равен 60° .

6.44. Написать уравнения двух сопряженных гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 7,2 и расстояние между директрисами второй равно 12,8.

6.45. Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.

6.46. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой фокальные радиусы-векторы перпендикулярны друг другу.

- 6.47. Через точку $M(2, 0)$ провести касательную к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$.
- 6.48. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, если касательная перпендикулярна к прямой $2x + 5y + 11 = 0$.
- 6.49. Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси.
- 6.50. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.
- 6.51. Доказать, что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.
- 6.52. При каком условии прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$?
- 6.53. Определить произведение расстояния от фокусов гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до касательной.
- 6.54. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и произвольной касательной к этой гиперболе.
- 6.55. Дано уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Составить полярное уравнение ее правой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в левом фокусе гиперболы.

6.3 Парабола

Парабола — это геометрическое место точек, равноудаленных от постоянной точки, называемой фокусом, и от постоянной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначают буквой F , расстояние от фокуса до директрисы — p .

Если выбрать за ось абсцисс прямую, проходящую через фокус параболы перпендикулярно директрисе и направленную от директрисы к фокусу, а начало координат поместить посередине между фокусом и директрисой, то получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Парабола в указанной системе координат изображена на рисунке 3.

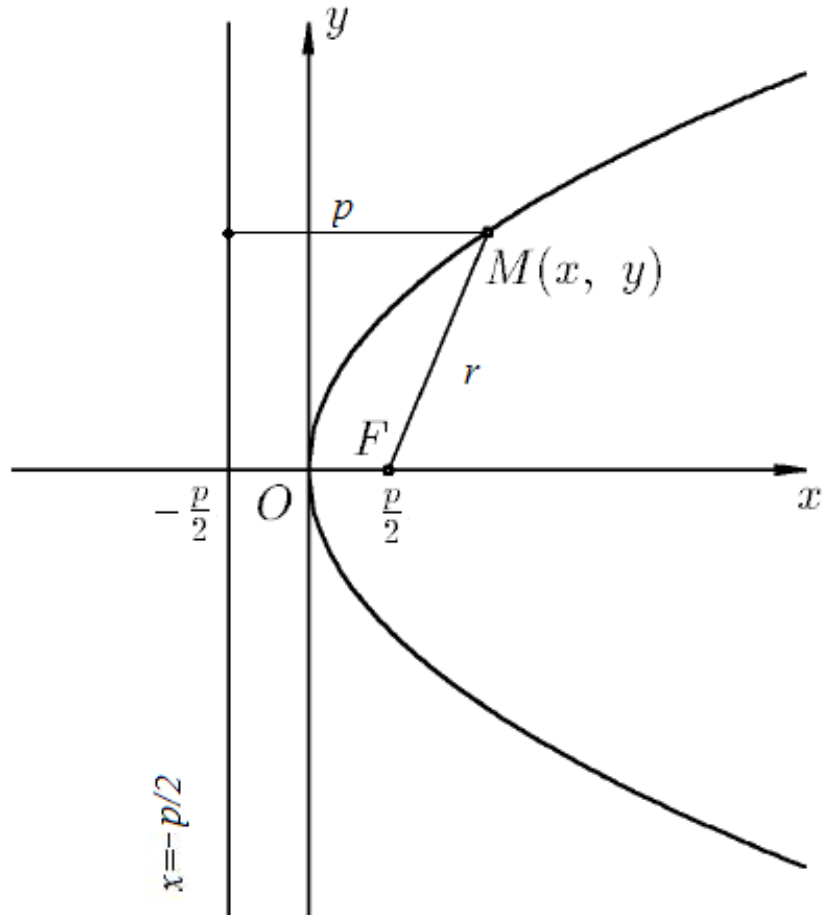


Рис. 3: Парабола

Парабола имеет одну ось симметрии, называемую *осью параболы*. Точка пересечения параболы с осью называется *вершиной параболы*. При указанном выборе системы координат ось параболы совпадает с осью Ox , а вершина параболы — с началом координат.

В указанной системе координат фокус имеет координаты $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса определяется уравнением:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Расстояние любой точки $M(x, y)$ параболы до фокуса называется ее *фокальным радиус-вектором* и вычисляются по формуле:

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Средины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, которая называется *диаметром параболы*, сопряженным этим хордам. Все диаметры параболы параллельны ее оси симметрии. Если k — угловой коэффициент хорд параболы, то уравнение сопряженного им диаметра имеет вид:

$$y = \frac{p}{k}.$$

Уравнение касательной к параболе, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$, лежащую на параболе:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Полярное уравнение параболы имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

где ρ , φ — полярные координаты произвольной точки параболы, p — параметр параболы. Полярная система координат при этом выбрана так, что полюс находится в фокусе параболы, а полярная ось направлена по оси параболы в сторону, противоположную директрисе параболы.

6.56. Составить каноническое уравнение параболы, если расстояние фокуса от вершины равно 3.

6.57. Составить уравнение параболы, если она симметрична относительно оси Oy , проходит через точку $(4, -8)$ и ее вершина находится в начале координат.

6.58. Определить координаты фокуса и записать уравнение директрисы параболы $x^2 = 4y$.

6.59. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

6.60. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$ в точке $M(9, 6)$.

6.61. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную, перпендикулярно прямой $2x + y - 7 = 0$.

6.62. Составить уравнение параболы, если фокус имеет координаты $(5, 0)$, а ось ординат служит директрисой.

- 6.63.** Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(7, 2)$ и директриса $x - 5 = 0$.
- 6.64.** Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = -8x$.
- 6.65.** Вычислить фокальный радиус-вектор точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.
- 6.66.** Через точку $A(2, 1)$ провести такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая делится в этой точке пополам.
- 6.67.** Через точку $A(5, -7)$ провести касательную к параболе $y^2 = 8x$.
- 6.68.** Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную, параллельно прямой $3x - y + 5 = 0$.
- 6.69.** Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную, образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$.
- 6.70.** Дано уравнение касательной $x - 3y + 9 = 0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.
- 6.71.** Найти общие касательные эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ и параболы $y^2 = \frac{20}{3}x$.
- 6.72.** Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.
- 6.73.** При каком условии прямая $Ax + By + C = 0$ касается параболы $y^2 = 2px$?
- 6.74.** Доказать, что любая касательная параболы пересекает директрису и фокальную хорду, перпендикулярную к оси, в точках, равноудаленных от фокуса.
- 6.75.** Доказать, что любая касательная параболы $y^2 = 2px$ отсекает на отрицательной части оси Ox отрезок, равный абсциссе точки касания, а на оси Oy — отрезок, равный половине ординаты точки касания.
- 6.76.** Дано уравнение параболы: $y^2 = 6x$. Составить ее полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.
- *****
- 6.77.** Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{5}{1 - 0.5 \cos \varphi}.$$

6.78. Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{6}{1 - \cos \varphi}.$$

6.79. Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{10}{1 - 1.5 \cos \varphi}.$$

6.80. Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{144}{13 - 5 \cos \varphi}.$$

6.81. Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{18}{4 - 5 \cos \varphi}.$$

6.82. Определить, какая линия задается уравнением в полярных координатах и найти канонический вид:

$$\rho = \frac{1}{3 - 3 \cos \varphi}.$$

7 Преобразования аффинных координат на плоскости и в пространстве

Преобразование координат на плоскости при параллельном переносе начала координат, при повороте прямоугольной системы координат вокруг начала координат. Преобразование координат на плоскости и в пространстве.

Пусть $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ — ”исходная” (”старая”) и $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ — ”новая” системы координат на плоскости. Пусть (x_0, y_0) — координаты точки O' , $\{a_{11}, a_{21}\}$ и $\{a_{12}, a_{22}\}$ — координаты векторов \vec{e}'_1 и \vec{e}'_2 в исходной системе координат.

Если точка M в исходной системе координат имеет координаты (x, y) , а в новой — (x', y') , то старые и новые координаты связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_{11}x' + a_{12}y', \\y &= y_0 + a_{21}x' + a_{22}y'.$$

Частные случаи формул преобразования координат на плоскости:

1. Изменение координат при параллельном переносе начала координат в точку $O'(x_0, y_0)$:

$$\begin{aligned}x &= x' + x_0, \\y &= y' + y_0.\end{aligned}$$

2. Изменение координат при повороте прямоугольной системы координат вокруг начала координат на угол α :

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}$$

Пусть $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ — "старая" и "новая" системы координат в пространстве, причем (x_0, y_0, z_0) — координаты нового начала координат O' в старой системе координат, а новые базисные векторы в старой системе координат имеют координаты: $\vec{e}'_1\{a_{11}, a_{21}, a_{31}\}$, $\vec{e}'_2\{a_{12}, a_{22}, a_{32}\}$ и $\vec{e}'_3\{a_{13}, a_{23}, a_{33}\}$.

Если (x, y, z) — координаты точки M в старой системе координат, а (x', y', z') — в новой, то они связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\y &= y_0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\z &= z_0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.$$

7.1. Написать формулы преобразования координат, если начало координат (без изменения направления осей) перенесено в точку:

- 1) $A(3, 4)$,
- 2) $B(-2, 1)$.

7.2. Начало координат перенесено (без изменения направления осей) в точку $O'(3, -4)$. Координаты точек $A(1, 3)$, $B(-3, 0)$ определены в новой системе координат. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

7.3. Определить старые координаты начала O' новой системы координат, если формулы преобразования координат заданы следующими равенствами: $x = x' + 3$, $y = y' + 5$.

7.4. Написать формулы преобразования координат, если оси координат повернуты на угол:

- 1) $\pi/3$,
- 2) $\pi/2$.

7.5. Оси координат повернуты на угол $\frac{\pi}{3}$. Координаты точек $A(2\sqrt{3}, -4)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

7.6. Написать формулы преобразования координат, если даны старые координаты новых базисных векторов и старые координаты нового начала координат: $\vec{e}'_1 = \{2, 5\}$, $\vec{e}'_2 = \{7, 9\}$, $O'(3, 1)$.

7.7. Начало и векторы базиса новой системы координат на плоскости заданы своими координатами относительно исходной системы координат: $O'(1, -1)$, $\vec{e}'_1 = \{2, 3\}$, $\vec{e}'_2 = \{1, 2\}$.

- 1) Какое уравнение в новой системе координат будет иметь прямая $2x - 3y + 5 = 0$?
- 2) Какое уравнение относительно исходной системы координат будет иметь ось $O'y'$?

7.8. Координаты некоторых точек удовлетворяют уравнению $xy + 3x - 2y - 6 = 0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек после переноса начала координат в точку $O'(2, -3)$?

7.9. Векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , \vec{x} заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 образуют базис и найти координаты вектора \vec{x} в этом базисе: $\vec{e}_1 = \{1, 1, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{1, 1, 2\}$, $\vec{e}_3 = \{1, 2, 3\}$, $\vec{x} = \{6, 9, 14\}$.

7.10. Написать формулы преобразования координат, если начало координат (без изменения направления осей) перенесено в точку $(-3, 5)$.

7.11. Даны точки $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ и $C(-2, 5)$. Найти их координаты в новой системе координат, если начало координат перенесено (без изменения направления осей):

- 1) в точку A ,
- 2) в точку $(7, -1)$.

7.12. Написать формулы преобразования координат, если оси координат повернуты на угол:

1) $-\pi/4$,

2) π .

7.13. Даны точки $A(3, 1)$, $B(-1, 5)$ и $C(-3, -1)$. Найти их координаты в новой системе координат, если оси координат повернуты на угол:

1) $-\pi/4$,

2) $\pi/2$,

3) π .

7.14. Написать формулы преобразования координат, если даны старые координаты новых базисных векторов и старые координаты нового начала координат: $\vec{e}'_1 = \{0, 2\}$, $\vec{e}'_2 = \{-7, 0\}$, $O'(3, 5)$.

7.15. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$ и формулы преобразования координат: $x = 2x' - 5y' + 3$, $y = -x' + 2y' - 2$. Найти координаты нового начала O' и новых единичных векторов \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 относительно системы координат Oxy .

7.16. Даны две системы координат Oxy и $O'x'y'$. По отношению к первой системе начало второй находится в точке $O'(2, 1, 3)$, единичные векторы второй системы: $\vec{e}'_1 = \{2, 4, 1\}$, $\vec{e}'_2 = \{0, 4, 4\}$, $\vec{e}'_3 = \{1, 1, 0\}$.

1) написать выражения координат точек относительно первой системы через их координаты во второй системе,

2) выразить координаты точек относительно второй системы через их координаты в первой системе,

3) найти координаты начала O и единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ первой системы относительно второй.

7.17. Найти уравнение гиперболы в системе координат, координатными осями которой являются асимптоты.

7.18. Координаты некоторых точек удовлетворяют следующему уравнению $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22 = 0$. Какому уравнению будут удовлетворять координаты тех же точек после переноса начала координат в точку $O'(-1, 5)$, если направление осей не изменилось?

7.19. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что каждая из систем является базисом и найти формулы перехода от одной системы к другой: $\vec{e}_1 = \{1, 2, 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2, 3, 3\}$,

$$\vec{e}_3 = \{3, 7, 1\} \text{ и } \vec{e}'_1 = \{3, 1, 4\}, \vec{e}'_2 = \{5, 2, 1\}, \vec{e}'_3 = \{1, 1, -6\}.$$

8 Кривые и поверхности второго порядка

Кривые и поверхности второго порядка, их классификация по их каноническим уравнениям. Исследование форм кривых и поверхностей второго порядка по их уравнениям.

8.1 Нахождение канонического вида кривых второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

где хотя бы одно из чисел a_{11} , a_{12} , a_{22} отлично от нуля. Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется группой старших членов, группа $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ — линейной частью.

При помощи преобразования координат на плоскости (перенос начала координат, поворот осей координат) общее уравнение кривой второго порядка приводится к одному из следующих видов:

Каноническое уравнение кривой	Тип кривой на вещественно-комплексной плоскости	Тип кривой на вещественной плоскости
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	действительный эллипс	эллипс
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллипс	пустое множество
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара комплексно-сопряженных прямых, пересекающихся в вещественной точке	точка
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	гипербола	гипербола

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара вещественных пересекающихся прямых	пара пересекающихся прямых
$y^2 = 2px$	парабола	парабола
$\frac{y^2}{b^2} = 1$	пара вещественных параллельных различных прямых	пара параллельных различных прямых
$\frac{y^2}{b^2} = -1$	пара комплексно- сопряженных параллельных различных прямых	пустое множество
$y^2 = 0$	пара вещественных совпадающих прямых	пара совпадающих прямых

Для определения вида кривой необходимо привести ее к одному из указанных в таблице типов, используя перенос начала координат в новую точку и поворот осей координат на некоторый угол.

При параллельном переносе начала координат в точку (x_0, y_0)

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0$$

коэффициенты старших членов не меняются, изменяются только коэффициенты линейной части следующим образом:

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned}$$

При повороте осей координат на угол α вокруг начала координат

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

коэффициенты меняются следующим образом:

$$\begin{aligned}a'_{11} &= a_{12} \sin 2\alpha + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\a'_{12} &= -\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2\alpha + a_{12} \cos 2\alpha, \\a'_{22} &= -a_{12} \sin 2\alpha - \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \\a'_{13} &= a_{13} \cos \alpha + a_{23} \sin \alpha, \\a'_{23} &= a_{23} \cos \alpha - a_{13} \sin \alpha, \\a'_{33} &= a_{33}.\end{aligned}$$

Центром некоторой линии называется такая точка плоскости, по отношению к которой точки этой линии расположены симметрично парами. Кривые второго порядка могут либо не иметь центра, либо иметь единственный центр, либо иметь целую линию центров. Если кривая имеет центр, то его координаты находятся из условия:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

Линии второго порядка, обладающие единственным центром, называются *центральными*. Линия является центральной, если и только если

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для приведения к простейшему виду центральной линии второго порядка необходимо сначала перенести начало координат в центр. После этого преобразования коэффициенты a'_{13} , a'_{23} будут равны нулю и уравнение линии второго порядка примет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a'_{33} = 0.$$

Дальнейшее упрощение достигается поворотом осей координат на угол α , удовлетворяющий условию:

$$a_{12} \operatorname{tg}^2 \alpha - (a_{22} - a_{11}) \operatorname{tg} \alpha - a_{12} = 0. \quad (1)$$

При повороте осей координат на указанный угол коэффициент a'_{12} станет равным нулю.

Для приведения к простейшему виду нецентральной линии второго порядка целесообразно сначала повернуть оси координат на угол α , который

находится из уравнения (1). После этого преобразования коэффициент a'_{12} и один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} будут равны нулю и уравнение линии второго порядка примет вид:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a_{33} = 0$$

или

$$a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a_{33} = 0.$$

Дальнейшее упрощение достигается путем параллельного переноса повернутых осей в новое начало координат.

Инвариантами кривой второго порядка называются выражения, составленные из коэффициентов кривой второго порядка и не меняющие своей величины ни при каком преобразовании одной прямоугольной системы координат в другую прямоугольную систему координат.

Инвариантами кривой второго порядка являются:

$$I_1 = a_{11} + a_{22},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Следующее выражение, называемое *семиинвариантом*, является инвариантом поворота относительно прямоугольной системы координат:

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

называется *характеристическим* и имеет действительные корни λ_1 и λ_2 .

Линии второго порядка можно разбить на три группы:

1. Линии, имеющие единственный центр симметрии: эллипс, мнимый эллипс, гипербола, две пересекающиеся прямые, две мнимые пересекающиеся прямые. Они удовлетворяют условию: $I_2 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение кривой второго порядка

приводится к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения (2).

2. Линии, не имеющие центра симметрии: парабола. Она удовлетворяет условию: $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение кривой второго порядка приводится к виду:

$$I_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}y = 0.$$

3. Линии, имеющие прямую центров симметрии: две параллельные прямые, две мнимые параллельные прямые, две совпадающие прямые. Они удовлетворяют условию: $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение кривой второго порядка приводится к виду:

$$I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

Метод Лагранжа приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду состоит в последовательном выделении в уравнении полных квадратов. Преобразования при этом не сохраняют углы и расстояния.

8.1. Установить, какие из следующих линий являются центральными (т. е. имеют единственный центр), какие не имеют центра, какие имеют бесконечно много центров. Если линия является центральной, то найти координаты ее центра. Если линия имеет бесконечно много центров, то составить уравнение геометрического места центров.

- 1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
- 2) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$;
- 3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

8.2. При каких значениях m и n уравнение $x^2 + 6xy + my^2 + 3x + ny - 4 = 0$ определяет:

- 1) центральную линию;
- 2) линию без центра;
- 3) линию, имеющую бесконечно много центров.

8.3. Установить, что следующие уравнения определяют центральные линии; преобразовать каждое из них путем переноса начала координат в центр:

1) $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$;

2) $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$.

8.4. Каждое из следующих уравнений привести к каноническому виду; установить, какие геометрические образы они определяют; для каждого случая изобразить на чертеже оси первоначальной координатной системы, оси других координатных систем, которые вводятся по ходу решения, и геометрический образ, определяемый данным уравнением:

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

2) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;

3) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

4) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;

5) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.

8.5. Пользуясь инвариантами, привести к простейшему виду уравнения следующих кривых:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;

2) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

8.6. Определить вид и расположение линий второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа:

1) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$;

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0$;

3) $4xy - 6x - 10y = 0$;

4) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$.

8.7. Установить, какие из следующих линий являются центральными (т. е. имеют единственный центр), какие не имеют центра, какие имеют бесконечно много центров. Если линия является центральной, то найти координаты ее центра. Если линия имеет бесконечно много центров, то составить уравнение геометрического места центров.

1) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$;

2) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$;

3) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$.

8.8. При каких значениях m и n уравнение $mx^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + ny - 13 = 0$ определяет:

- 1) центральную линию;
- 2) линию без центра;
- 3) линию, имеющую бесконечно много центров.

8.9. Установить, что следующие уравнения определяют центральные линии; преобразовать каждое из них путем переноса начала координат в центр:

- 1) $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$;
- 2) $4x^2 + 2xy + 6y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

8.10. Каждое из следующих уравнений привести к каноническому виду; установить, какие геометрические образы они определяют; для каждого случая изобразить на чертеже оси первоначальной координатной системы, оси других координатных систем, которые вводятся по ходу решения, и геометрический образ, определяемый данным уравнением:

- 1) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
- 2) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
- 3) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;
- 4) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;
- 5) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

8.11. Пользуясь инвариантами, привести к простейшему виду уравнения следующих кривых:

- 1) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
- 2) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$;
- 3) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

8.12. Определить вид и расположение линий второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа:

- 1) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$;
- 2) $x^2 - 6xy + 10y^2 + 10x - 32y + 25 = 0$;
- 3) $2xy + 2x - 2y - 1 = 0$;
- 4) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$.

8.2 Нахождение канонического вида поверхностей второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

где хотя бы одно из чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отлично от нуля. Группа слагаемых $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ называется группой старших членов, а группа $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}$ — линейной частью.

При помощи преобразования координат в пространстве общее уравнение поверхности второго порядка приводится к одному из следующих видов:

Каноническое уравнение поверхности	Тип поверхности в вещественно-комплексном пространстве	Тип поверхности в вещественном пространстве
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	действительный эллипсоид	эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	мнимый эллипсоид	пустое множество
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	мнимый конус с вершиной в вещественной точке	точка
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	однopolостный гиперболоид	однopolостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	двуполостный гиперболоид	двуполостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	действительный конус	конус

$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	эллиптический параболоид	эллиптический параболоид
$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	гиперболический параболоид	гиперболический параболоид
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	действительный эллиптический цилиндр	эллиптический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллиптический цилиндр	пустое множество
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара комплексно- сопряженных плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой	прямая
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	гиперболический цилиндр	гиперболический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара вещественных пересекающихся плоскостей	пара пересекающихся плоскостей
$y^2 = 2px$	параболический цилиндр	параболический цилиндр
$\frac{y^2}{b^2} = 1$	пара вещественных параллельных различных плоскостей	пара параллельных различных плоскостей

$\frac{y^2}{b^2} = -1$	пара комплексно-сопряженных параллельных различных плоскостей	пустое множество
$y^2 = 0$	пара вещественных совпадающих плоскостей	пара совпадающих плоскостей

Для определения вида поверхности необходимо привести ее к одному из указанных в таблице типов.

Центром некоторой поверхности называется такая точка пространства, по отношению к которой точки этой поверхности расположены симметрично парами. Координаты центра находятся из условия

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Поверхности второго порядка могут либо не иметь центра, либо иметь единственный центр, либо иметь линию центров, либо иметь целую плоскость центров.

Инвариантами поверхности второго порядка являются:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Следующие выражения, называемые *семиинвариантами*, являются инвариантами поворота прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned}
K_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \\
K_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \\
&\text{Уравнение} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}
\end{aligned}$$

называется *характеристическим* и имеет действительные корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Поверхности второго порядка можно разбить на пять групп:

1. Поверхности, имеющие единственный центр симметрии: эллипсоид, мнимый эллипсоид, конус, мнимый конус, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид. Они удовлетворяют условию: $I_3 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второго порядка приводится к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0,$$

где λ_1, λ_2 и λ_3 — корни уравнения (3).

2. Поверхности, не имеющие центра симметрии: эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Они удовлетворяют условию: $I_3 = 0, I_4 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второго порядка приводится к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}z = 0,$$

где λ_1, λ_2 — ненулевые корни уравнения (3).

3. Поверхности, имеющие прямую центров симметрии: эллиптический цилиндр, мнимый эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, две пересекающиеся плоскости, две мнимые пересекающиеся плоскости. Они удовлетворяют условию: $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второго порядка приводится к виду:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0,$$

где λ_1, λ_2 — ненулевые корни уравнения (3).

4. Параболический цилиндр. Он удовлетворяет условию: $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 = 0, K_3 \neq 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второго порядка приводится к виду:

$$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}y = 0,$$

где λ_1 — ненулевой корень уравнения (3).

5. Поверхности, имеющие плоскость центров симметрии: две параллельные плоскости, две мнимые параллельные плоскости, две совпадающие плоскости. Они удовлетворяют условию: $I_3 = 0, I_4 = 0, I_2 = 0, K_3 = 0$. При помощи преобразования прямоугольной системы координат уравнение поверхности второго порядка приводится к виду:

$$I_1 x^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0.$$

Метод Лагранжа приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду состоит в последовательном выделении в уравнении полных квадратов. Преобразования при этом не сохраняют углы и расстояния.

8.13. Найти центр, линию центров или плоскость центров поверхности второго порядка:

- 1) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 12x + 6y - 9 = 0$;
- 2) $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz + 12xz + 8x - 4y + 12z - 5 = 0$.

8.14. Найти центр поверхности второго порядка

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz + 6xz + 2x - 6y - 2z = 0.$$

Какой вид примет уравнение поверхности после переноса начала координат в центр?

8.15. Каждое из следующих уравнений поверхностей второго порядка привести к каноническому виду; установить, какие геометрические образы они определяют:

- 1) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$;

- 2) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;
 3) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$.

8.16. Определить вид поверхности второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа:

- 1) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;
 2) $xy + xz + yz + 2x + 2y - 2z = 0$;
 3) $x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz + 2x + 2y + 4z = 0$.

8.17. Найти центр, линию центров или плоскость центров поверхности второго порядка:

- 1) $3x^2 + 2y^2 + 4yz - 2xz - 4x - 8z - 8 = 0$;
 2) $5x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 12xy - 6xz + 12x - 36z = 0$.

8.18. Найти центр поверхности $4xy + 4xz - 4x - 4z - 1 = 0$. Какой вид примет уравнение поверхности после переноса начала координат в центр?

8.19. Каждое из следующих уравнений поверхностей второго порядка привести к каноническому виду; установить, какие геометрические образы они определяют:

- 1) $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12x + 4y + 8z - 1 = 0$;
 2) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 6yz + 4x - 6y + 2z - 5 = 0$;
 3) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

8.20. Определить вид поверхности второго порядка, пользуясь приведением многочлена к сумме квадратов методом Лагранжа:

- 1) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;
 2) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + x + y - z = 0$;
 3) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$.

Литература

- [1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия* — М.: Физматлит, 2009. — 224 с. — <http://e.lanbook.com/view/book/2179/>
- [2] Цубербиллер О. Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии* — СПб.: Лань, 2009. — 336 с. — <http://e.lanbook.com/view/book/430/>
- [3] Игудесман К.Б. *Задачи по аналитической геометрии. Часть 1* — Казань: КГУ, 2003. — 64 с. — <http://old.kpfu.ru/infres/igudesman/tasks.pdf>
- [4] Игудесман К.Б. *Задачи по аналитической геометрии. Часть II* — Казань, КГУ, 2007. — 63 с. — <http://old.kpfu.ru/infres/igudesman/main.pdf>
- [5] Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии* — М.: Лань, 2011. — 224 с. — <http://e.lanbook.com/view/book/2044/>