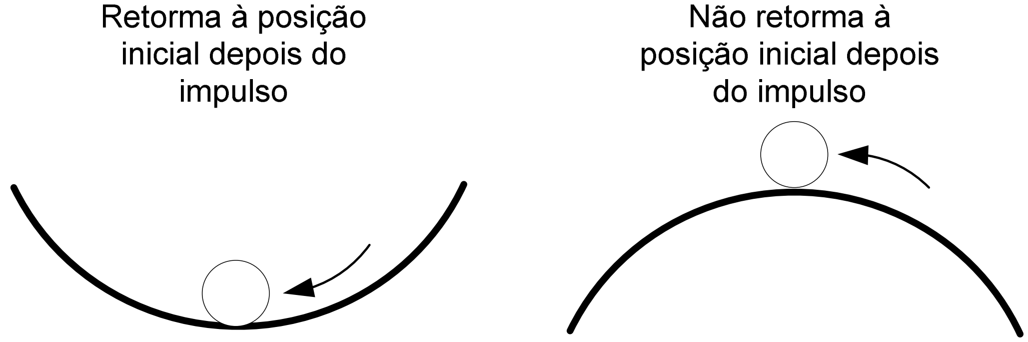
# Pólos, Zeros e Estabilidade

# Definindo Estabilidade

- A condição para estabilidade pode também ser expressa da seguinte maneira: se um sistema é estável quando sujeito a um impulso, a saída retoma a zero.
- Em termos mecânicos podemos dizer que um objeto está em equilíbrio estável se, quando empurrado, ele retoma a sua posição original depois de cessado o impulso.



(a) (b)

- Um sistema pode ser dito estável se para entradas limitadas, isto é, finitas, geram saídas limitadas.

# Pólos e Zeros

- Uma função de transferência em malha fechada G(s) de um sistema pode, em geral, ser representada por:

$$G(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + a_{m-2}s^{m-2} + \ldots + a_1 s + a_0)}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}$$

Ou

$$G(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

**PÓLOS** ⟹ **raízes do denominador de G(s) ($-p_1$, $-p_2$, ... $-p_n$ ).**

**ZEROS** ⟹ **raízes do numerador de G(s) ($-z_1$, $-z_2$, ... $-z_m$ ).**

**K** ⟹ **é uma constante que define o ganho do sistema.**

# Pólos e Zeros

- Os zeros são os valores de s para os quais a função de transferência é zero. Os pólos são os valores de s para os quais a função de transferência é infinita, isto é, eles fazem o denominador tornar-se zero.

- Pólos e zeros podem ser quantidades complexas ou reais.
- Em geral, pólos e zeros podem ser escritos como:

$$s = \sigma + j\omega$$

onde: $\sigma$ é a parte real do pólo ou zero.

$j\omega$ é a parte complexa do pólo ou zero.

# Exemplo:

1) Quais são os pólos e zeros dos sistemas, dadas as seguintes funções de transferência de malha fechada?

$$(a) \quad \frac{s - 1}{s^2 - 3s + 4}$$

$$(b) \quad \frac{2(s + 1)}{(s + 1)(s + 2)(s - 3)}$$

$$(c) \quad \frac{(s + 3)(s - 1)}{s(s + 2)(s + 3)(s - 4)}$$

$$(d) \quad \frac{s + 4}{s^2 + 1s + 3}$$

$$(e) \quad \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Exercício:

2) Quais são as funções de transferência dos sistemas tendo os seguintes pólos e zeros?

(a) Pólos -1, - 2; nenhum zero.

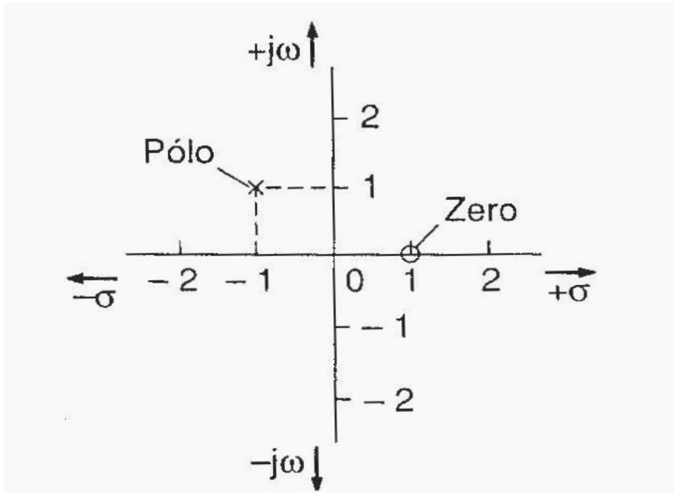
(b) Pólos +1, - 2: zero 0.

(c) Pólos (-2 ± j1): zero +1.

(d) Pólos (1 ± j2): zero -1.

# Diagrama de Pólos e Zeros

- Os pólos e zeros de uma função de transferência podem ser representados em um diagrama de pólos e zeros




- O gráfico bidimensional é conhecido como plano s. Pólos ou zeros no semiplano esquerdo do gráfico são todos negativos; pólos ou zeros no semiplano direito são positivos. Pólos ou zeros são reais ou ocorrem em pares complexos conjugados como ($\sigma \pm j\omega$).

# Exercício

Esboçar os diagramas de pólos e zeros para os sistemas tendo os seguintes pólos e zeros:

(a) Pólos -2, + 3; zero +1.

(b) Pólos 0, -1, -2; zero -3.

(c) Pólos ($-1 \pm j2$);zero - 1.

(d) Pólos ($-2 \pm j1$),0; zero ($-3 \pm j2$).

# Estabilidade e Pólos

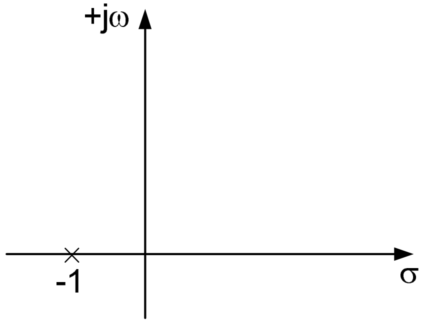
- A estabilidade dos sistemas pode ser determinada pela posição dos pólos no plano s.

Exemplo: Posição do pólo real e resposta ao impulso unitário:

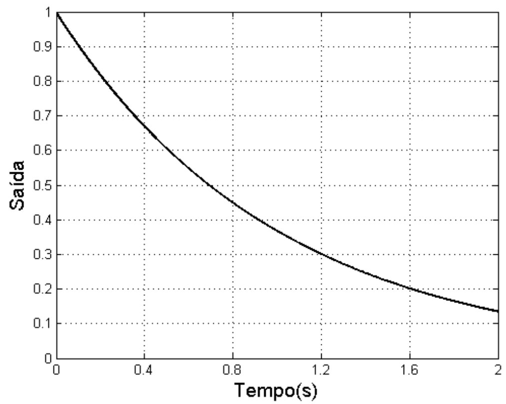
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Para a entrada impulso unitário ,R(s)=1 . Então:

$$C(s) = \frac{1}{s+a} \rightarrow c(t) = e^{-at}$$

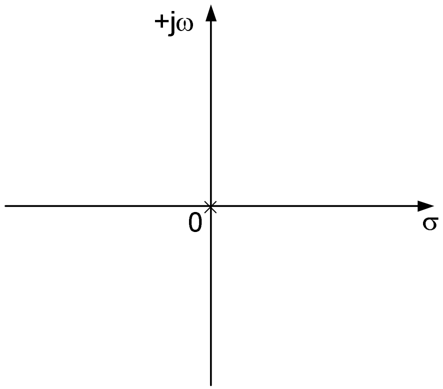


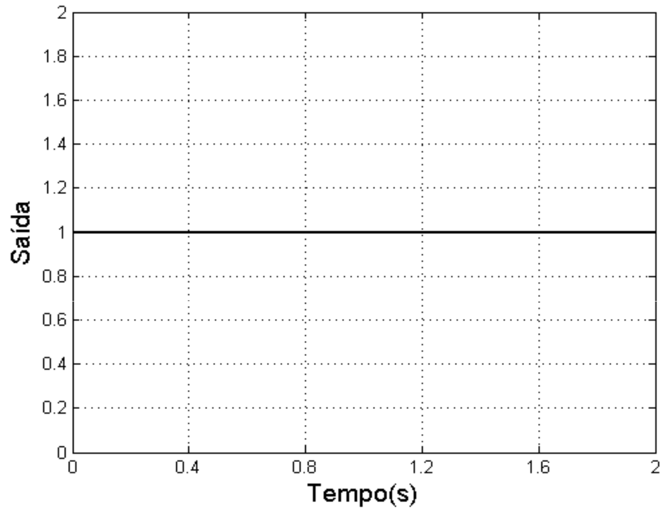

Plano s para o pólo em -1




Resposta ao impulso unitário para o pólo em -1

# Estabilidade e Pólos

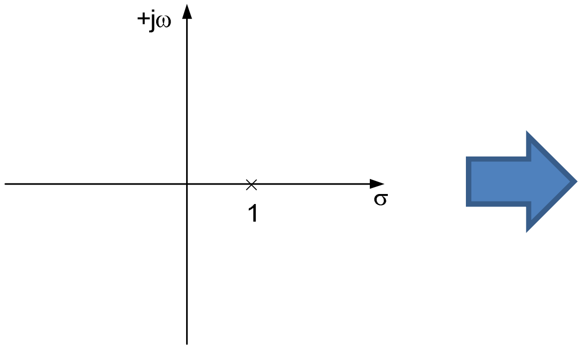


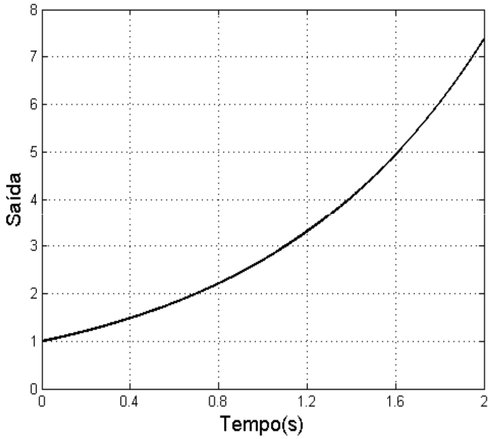

Plano s para o
pólo em 0 (zero)

Resposta ao impulso
unitário para  o pólo em 0 (zero)

# Estabilidade e Pólos



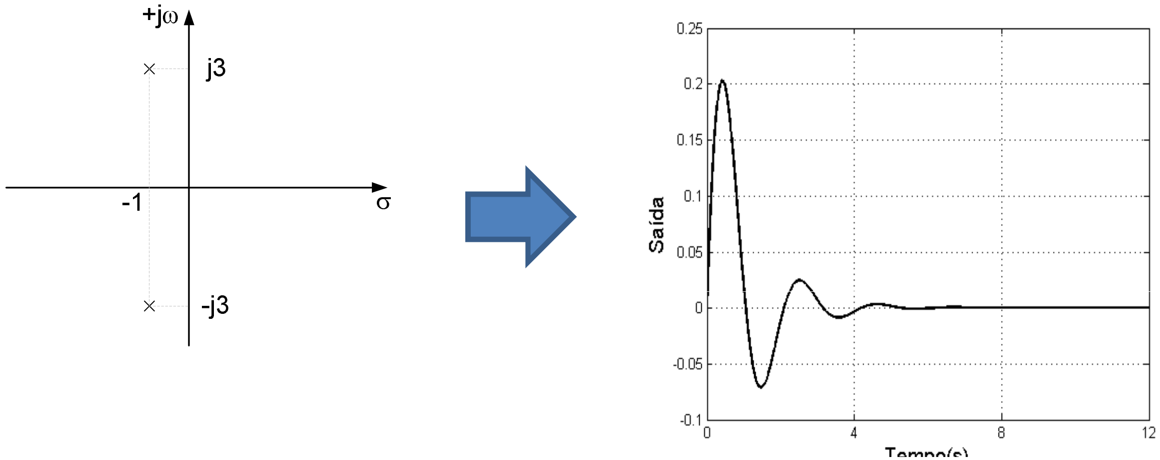

Plano s para o pólo em +1

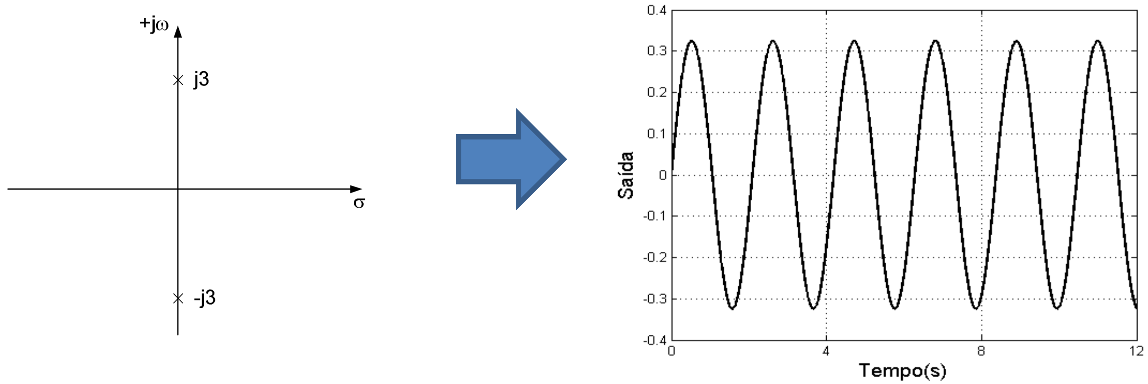



Resposta ao impulso unitário para o pólo em +1

# Estabilidade e Pólos

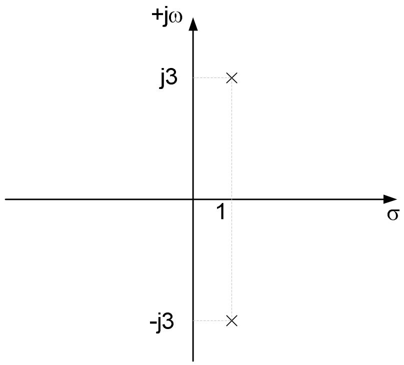
- Exemplo: Posição do pólo complexo e resposta ao impulso unitário:

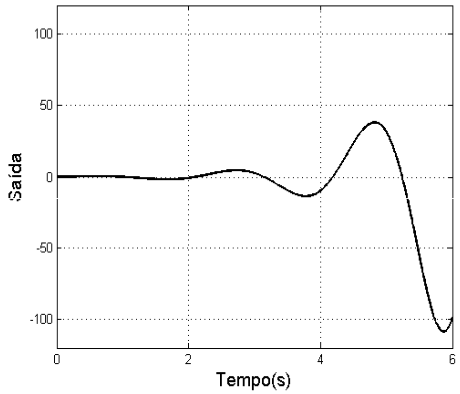


# Estabilidade e Pólos

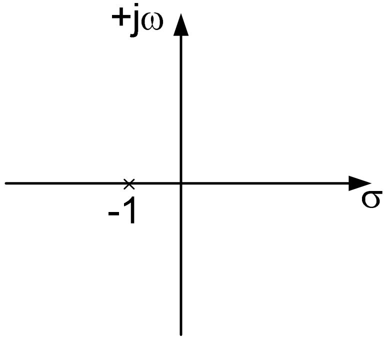
- Exemplo: Posição do pólo complexo e resposta ao impulso unitário:

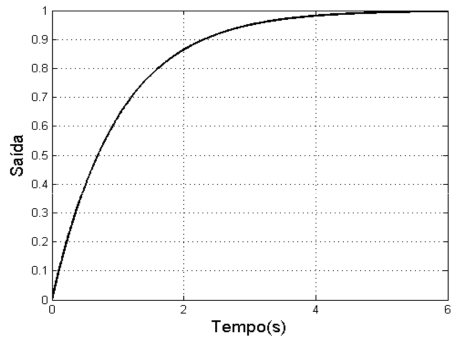


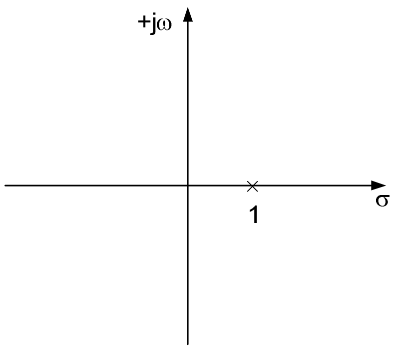



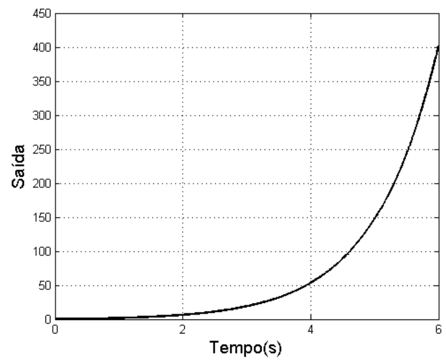
# Estabilidade e Pólos

- Exemplo: Posição do pólo real  e resposta ao degrau unitário:



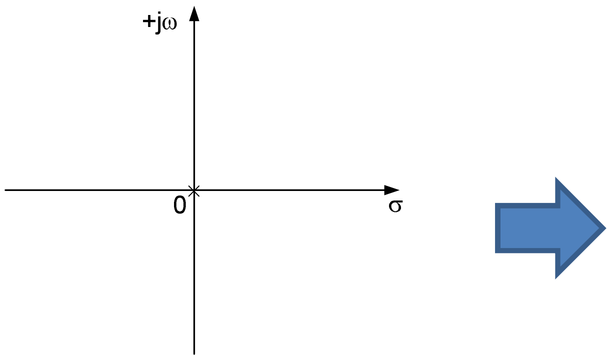



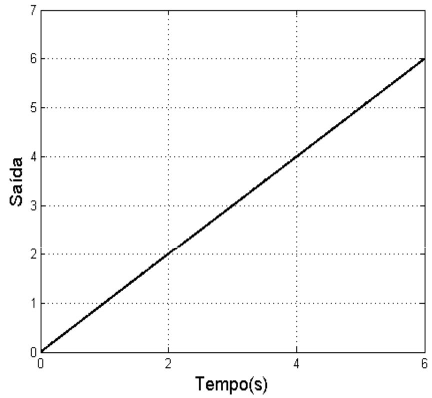



# Estabilidade e Pólos

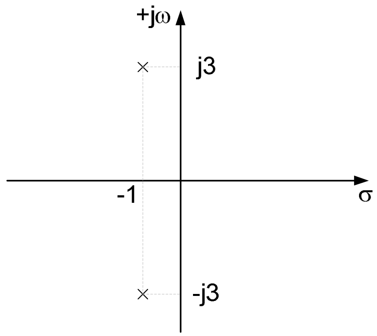
- Exemplo: Posição do pólo real  e resposta ao degrau unitário:

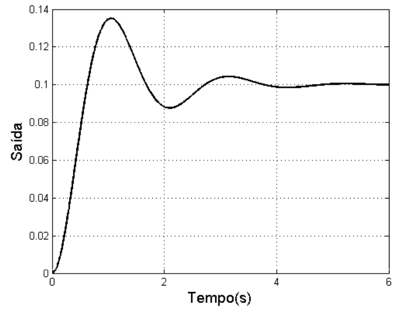


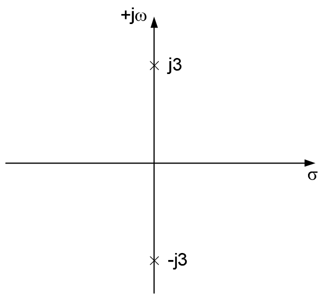



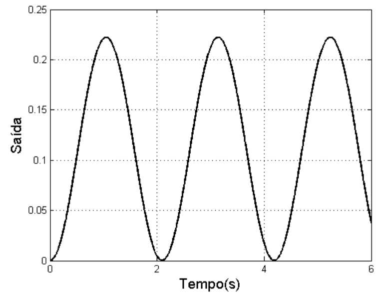
# Estabilidade e Pólos

- Exemplo: Posição do pólo complexo e resposta ao degrau unitário:



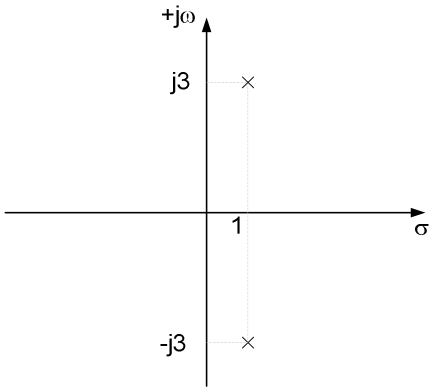



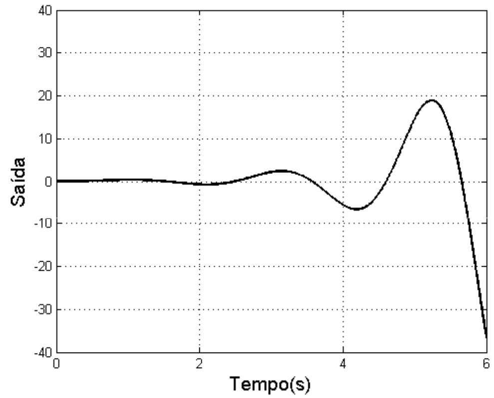



# Estabilidade e Pólos

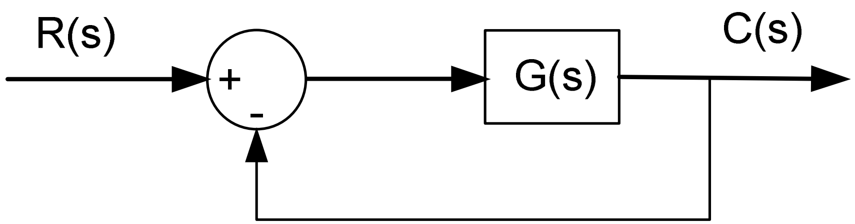
- Exemplo: Posição do pólo complexo e resposta ao degrau unitário:



# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- A estabilidade é determinada pelas raízes da equação característica do sistema. Entretanto, se este polinômio for de ordem 3 ou superior, a determinação de suas raízes não são facilmente obtidas.
- O critério de Routh-Hurwitz pode ser utilizado para determinar a estabilidade dos sistemas em tais situações.
- Seja um sistema em malha fechada:




$$G_1(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad \Longrightarrow \quad 1+G(s)=0$$

Equação característica

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Seja o polinômio da equação característica de forma genérica:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + .... + a_{n-1} s + a_n = 0, \qquad a_n \neq 0$$

- Se qualquer dos coeficientes $a_o$, $a_1$, ... $a_n$, for nulo ou negativo na presença de ao menos um coeficiente positivo, existe uma ou mais raízes imaginárias com parte real positiva. Portanto, o sistema não é estável.

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- O primeiro teste a ser feito consiste em inspecionar os coeficientes $a_o$, $a_1$, ... $a_n$, isto é, os valores dos coeficientes na expressão:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + .... + a_{n-1} s + a_n = 0, \qquad a_n \neq 0$$

- Se os coeficientes são todos positivos e se nenhum é zero, então, o sistema pode ser estável.
- Para sistemas que têm denominadores que podem ser estáveis, um segundo teste deve ser realizado

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Os coeficientes $a_n$, $a_{n-1}$, ... $a_0$ são escritos em uma ordem particular chamada de ARRANJO DE ROUTH:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_0$ | $a_2$ | $a_4$ | $a_6$ | . | . | . |
| $s^{n-1}$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $a_7$ | . | . | . |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | . | . | . |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | . | . | . |
| $s^{n-4}$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | . | . | . |
| . | . | . | | | | | |
| . | . | . | | | | | |
| . | . | . | | | | | |
| $s^2$ | $e_1$ | $e_2$ | | | | | |
| $s^1$ | $f_1$ | | | | | | |
| $s^0$ | $g_1$ | | | | | | |

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Os coeficientes $b_1$, $b_2$, $b_3$ ...são calculados como a seguir:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$\vdots$$

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Os coeficientes $c_1$, $c_2$, $c_3$ ...são calculados como a seguir:

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$\vdots$$

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo:

Considere-se o seguinte polinômio:

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$$

Vai-se seguir o procedimento apresentado e construir a tabela de coeficientes. (As duas primeiras linhas podem ser obtidas diretamente do polinômio dado. Os demais termos são obtidos a partir destes. Se qualquer dos coeficientes for inexistente, este pode ser substituído por um zero na tabela.)

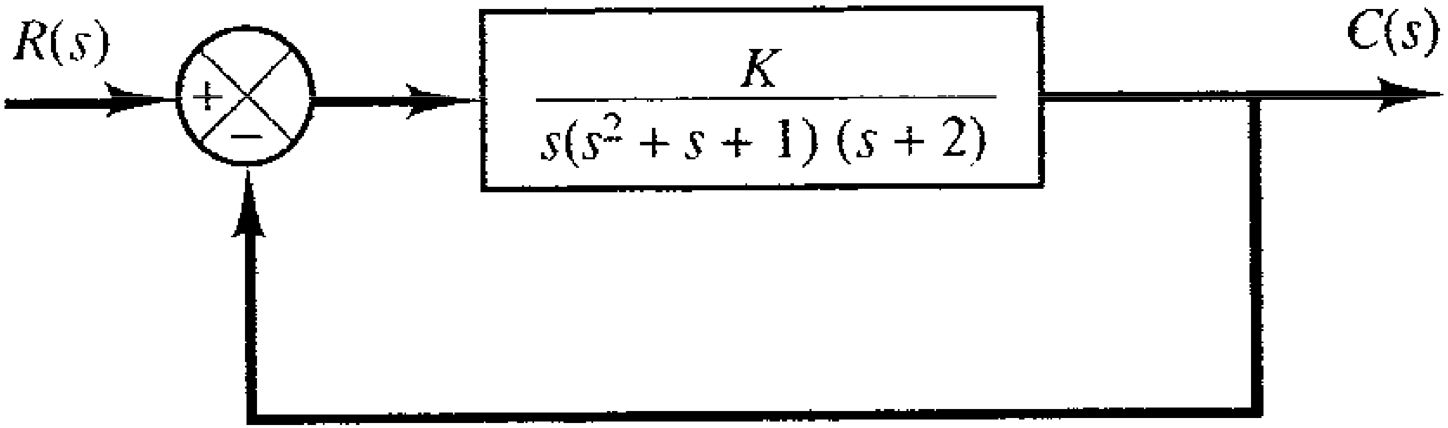
| | | | | ‖ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 3 | 5 | ‖ | $s^4$ | 1 | 3 | 5 | |
| $s^3$ | 2 | 4 | 0 | ‖ | $s^3$ | $\cancel{2}$ | $\cancel{4}$ | $\cancel{0}$ | A segunda linha foi dividida |
| | | | | ‖ | | 1 | 2 | 0 | por 2. |
| $s^2$ | 1 | 5 | | ‖ | $s^2$ | 1 | 5 | | |
| $s^1$ | $-6$ | | | ‖ | $s^1$ | $-3$ | | | |
| $s_0$ | 5 | | | ‖ | $s^0$ | 5 | | | |

Neste exemplo o número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna é igual a dois. Isto significa que há duas raízes com partes reais positivas. Note-se que o resultado não se altera quando os coeficientes de qualquer linha são multiplicados ou divididos por um número positivo para simplificar os cálculos.

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Exemplo:

Determine a faixa de valores de K para que o sistema seja estável.



# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Casos especiais:

a) Se um termo da primeira coluna for nulo, mas os termos restantes não forem nulos ou não houver termo o restante, então o termo nulo é substituído por um numero ε positivo muito pequeno e o resto da tabela é calculado.

Exempo :

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

O arranjo tabular de coeficientes é

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Casos especiais:

a) Se um termo da primeira coluna for nulo, mas os termos restantes não forem nulos ou não houver termo o restante, então o termo nulo é substituído por um numero ε positivo muito pequeno e o resto da tabela é calculado.

Exemplo :

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

O arranjo tabular de coeficientes é

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \epsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Se o sinal do coeficiente acima de zero ($\epsilon$) é o mesmo sinal do coeficiente abaixo, isto indica que há um par de raízes imaginárias. De fato, a Eq. (5-7) tem duas raízes em $s = \pm j$.

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Se, entretanto, o sinal do coeficiente acima do zero ($\epsilon$) é oposto ao do coeficiente abaixo, isto indica que há uma mudança de sinal. Por exemplo, para a seguinte equação

$$s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2(s+2) = 0$$

a tabela de coeficientes é

$$\begin{array}{lllll} & s^3 & 1 & -3 \\ \text{Uma mudança de sinal:} & s^2 & 0 \approx \epsilon & 2 \\ & s^1 & -3 - \dfrac{2}{\epsilon} & \\ \text{Uma mudança de sinal:} & & & \\ & s^0 & 2 & \end{array}$$

Há duas mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna. Isto está de acordo com o resultado correto indicado pela forma fatorada de equação polinomial.

# Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

- Exemplo.

Aplique o critério de estabilidade de Routh para um sistema cujo equação característica é:

$$s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$$