I. EQUAZIONE DEL CALORE

Sia $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$, $u(x,0) = f(x)$, $u(0,t) = a(t)$, $u(\pi,t) = b(t)$. Se si scrive u come $u = u_a + u_b + u_f + u_F$, in cui u_a risolve il problema in cui solo a è diversa da 0, e così per le altre u, prima vediamo che i problemi per u_a e u_b possono essere riportati a problemi con condizioni al contorno omogenee, con condizione iniziale non nulla e secondo memebro non nullo, così che l'unico problema nuovo è rappresentato dall'equazione non omogenea con condizioni iniziali e al contorno nulle.

Per u_a, per esempio, sia $v(x,t) = u_a(x,t) - \cos\frac{x}{2}a(t)$. È chiaro che in $x = 0$ e $x = \pi$ è $v = 0$, ma in generale sarà $v(x,0) = p(x) \neq 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = P(x,t) \neq 0$. È $v = v_p + v_P$. Il problema per v_p si sa risolvere, per cui basta considerare il problema per v_P, con condizioni iniziali e al contorno nulle.

Sia allora $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$, $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$. Cerchiamo la soluzione nella forma $u(x,t) = \sum X_n(x)T_n(t)$. Sostituendo nell'equazione si trova $\sum T'_n X_n - T_n X''_n = F(x,t)$. Ora, l'idea è di leggere primo e secondo membro come una serie nelle X_n. Questo richiede che le X''_n siano proporzionali alle X_n, $X''_n = -\lambda_n X_n$, con le condizioni al contorno $X_n(0) = X_n(\pi) = 0$ in modo che siano soddisfatte le condizioni al contorno su u. È noto che risulta $X_n = \sin nx$, $\lambda_n = n^2$. A secondo membro, essendo le X_n un insieme completo, per ogni t potremo scrivere $F(x,t) = \sum F_n(t)X_n(x)$.

Allora l'equazione diventa:

$$\sum X_n(x)[T'_n + n^2 T_n] = \sum F_n(t)X_n(x).$$

L'uguaglianza delle due serie richiede l'uguaglianza dei coefficienti, cioè $T'_n + n^2 T_n = F_n(t)$. Questa equazione deve essere risolta con la condizione $T_n(0) = 0$, per soddisfare la condizione iniziale su u. È noto che la soluzione è $T_n(t) = A(t)e^{-n^2 t}$, con $A(t)$ che risolve

$$A'(t)e^{-n^2 t} = F_n(t) \qquad A(0) = 0.$$

Si trova quindi

$$T_n(t) = A(t)e^{-n^2 t} = \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau.$$

La soluzione u allora è

$$u(x,t) = \sum X_n(x) \int_0^t e^{-n^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau.$$

Ricordando che è $F_n(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(\xi,\tau)X_n(\xi)d\xi$ sostituendo si trova

$$u(x,t) = \sum \frac{2}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\pi d\xi X_n(x)X_n(\xi)e^{-n^2(t-\tau)}F(\xi,\tau).$$

Definiamo

$$G(x,t;\xi,\tau) \equiv \frac{2}{\pi} \sum X_n(x)X_n(\xi)e^{-n^2(t-\tau)}$$

e verifichiamo che l'espressione di u può essere scritta come $u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\pi d\xi G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)$, cioè che si può scambiare l'integrale e la serie. Per comodità supponiamo che sia $|F(x,t)| < M$.

Per comodità pongo $g_N = \frac{2}{\pi}\sum^N X_n(x)X_n(\xi)e^{-n^2(t-\tau)}F(\xi,\tau)$, $f_N = \frac{2M}{\pi}\sum^N e^{-n^2(t-\tau)}$. Noto che è $|g_N| \leq f_N < \frac{2M}{\pi}\sum^\infty e^{-n^2(t-\tau)}$. Quest'ultima funzione è L^1 per il teorema di Beppo Levi, che dice: se si ha una successione crescente di funzioni f_N e la successione dei corrispondenti integrali è limitata, allora la successione converge quasi ovunque a una $f \in L^1$ e il limite degli integrali è l'integrale del limite. Le nostre f_N sono evidentemente crescenti, e $\int f_N d\xi d\tau = 2M \int_0^t \sum^N e^{-n^2(t-\tau)} d\tau = 2M \sum^N \frac{1-e^{n^2}}{n^2} < 2M \sum^\infty \frac{1}{n^2}$. Quindi le f_N convergono quasi ovunque, quindi anche le g_N convergono quasi ovunque, e per il teorema della convergenza dominata $\lim \int g_N = \int \lim g_N$.

Interpretiamo la funzione G. Supponiamo che nel piano ξ,τ la $F(\xi,\tau)$ sia uguale a $\frac{1}{\epsilon^2}$ su un quadratino Q_ϵ di lato ϵ di centro (α,β), e 0 altrove. Allora è $u(x,t) = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{Q_\epsilon} d\xi d\tau G(x,t;\xi,\tau) = G(x,t;\overline{\xi},\overline{\tau})$ (per il teorema della media), essendo $(\overline{\xi},\overline{\tau})$ un punto appropriato in Q_ϵ. Nel limite $\epsilon \to 0$, che rappresenta il caso ideale di una sorgente

F “concentrata nel punto (α,β)” pur mantenendo integrale costante uguale a 1 (è l'analogo della densità di carica corrispondente a una carica puntiforme), il punto $(\overline{\xi},\overline{\tau})$ tende a (α,β), e si ottiene:

$$u(x,t) = G(x,t;\alpha,\beta).$$

Nel limite descritto sopra si dice che la F è uguale alla $\delta(\xi-\alpha)\delta(\tau-\beta)$, e quindi la G rappresenta la soluzione quando la sorgente a secondo membro dell'equazione è una δ, e le condizioni iniziali e al contorno sono nulle. La G si chiama la funzione di Green del problema.

II. EQUAZIONE DI POISSON

Nel quadrato $0 < x, y < \pi$ considero l'equazione $\Delta u = F(x,y)$ con condizioni al contorno nulle. Al solito, se le condizioni al contorno non fossero nulle, ma per esempio avessi $u = a, b, c, d$ sui quattro lati, dovrei aggiungere alla soluzione del problema che stiamo considerando $u_a + u_b + u_c + u_d$, essendo u_a soluzione dell'equazione omogenea con condizioni al contorno nulle su tre lati, e uguale a a sul lato giusto, e così via.

Sia quindi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y)$, $u = 0$ al contorno. Cerchiamo la soluzione nella forma $u(x,y) = \sum X_n(x)Y_n(y)$. Sostituendo nell'equazione si trova

$$\sum X_n''Y_n + X_nY_n'' = F(x,y).$$

Ci proponiamo di leggere primo e secondo membro come una serie nelle X_n. Questo richiede, per il primo membro, che sia $X_n'' = -\lambda_n X_n$ con le condizioni al contorno $X_n(0) = X_n(\pi) = 0$, così che sia $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$. Le soluzioni sono $X_n(x) = \sin nx$. A secondo membro, per ogni y sviluppiamo $F(x,y)$nella base delle X_n: $F(x,y) = \sum F_n(y)X_n(x)$.

L'equazione è diventata

$$\sum X_n(x)[Y_n'' - n^2Y_n] = \sum F_n(y)X_n(x).$$

Richiedendo che i coefficienti di Fourier delle due serie siano uguali si ottengono le equazioni per le Y_n,

$$Y_n''(y) - n^2Y_n(u) = F_n(y),$$

che devono essere risolte con le condizioni al contorno $Y_n(0) = Y_n(\pi) = 0$, così che sia $u = 0$ per $y = 0, \pi$.

Risolviamo con il metodo della variazione delle costanti. Come soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea scelgo $\sinh ny$ e $\sinh n(\pi - y)$, che soddisfano la condizione al contorno in $y = 0$ e $y = \pi$ rispettivamente. Cerchiamo Y_n nella forma $Y_n(y) = A(y)\sinh ny + B(y)\sinh n(\pi - y)$. Sulle funzioni A e B possiamo imporre due condizioni. Una sarà che l'equazione per Y_n sia soddisfatta, l'altra che scompaiano i termini con le derivate seconde. Quest'ultimo obbiettivo si raggiunge richiedendo che sia $A'\sinh ny + B'\sinh n(\pi - y) = 0$, dopo di che la richiesta che l'equazione per Y_n sia soddisfatta diventa $nA'\cosh ny - nB'\cosh n(\pi - y) = F_n(y)$. In conclusione otteniamo per A' e B' il sistema di equazioni

$$A'\sinh ny + B'\sinh n(\pi - y) = 0 \qquad nA'\cosh ny - nB'\cosh n(\pi - y) = F_n(y)$$

da cui ricaviamo A' e B' e poi, per integrazione, A e B. Notiamo che, per come abbiamo scelto le soluzioni dell'omogenea, perché sia $Y_n(0) = Y_n(\pi) = 0$ deve essere $B(0) = 0$, $A(\pi) = 0$.

Il determinante del sistema è $\Delta = -n\sinh ny\cosh n(\pi - y) - n\cosh ny\sinh n(\pi - y)$, indipendente da y perché, a parte n, è il wronskiano di due soluzioni di $z'' - n^2z = 0$. Quindi $\Delta = \Delta(0) = -n\sinh n\pi$. Le soluzioni del sistema allora sono:

$$A'(y) = \frac{\sinh n(\pi - y)F_n(y)}{n\sinh n\pi} \qquad B'(y) = -\frac{\sinh nyF_n(y)}{n\sinh n\pi}.$$

Tenendo conto delle condizioni al contorno si trova:

$$A(y) = -\int_y^\pi \frac{\sinh n(\pi - \eta)F_n(\eta)}{n\sinh n\pi}d\eta \qquad B(y) = -\int_0^y \frac{\sinh n\eta F_n(\eta)}{n\sinh n\pi}d\eta.$$

Alla fine per Y_n si trova

$$Y_n(y) = -\frac{1}{n\sinh n\pi}[\sinh ny\int_y^\pi \sinh n(\pi - \eta)F_n(\eta)d\eta + \sinh n(\pi - y)\int_0^y \sinh n\eta F_n(\eta)d\eta] = \int_0^\pi G_n(y.\eta)F_n(\eta)d\eta,$$

$$G_n(y,\eta) = -\frac{\sinh ny \sinh n(\pi-\eta)}{n \sinh n\pi} \text{ se } y < \eta \qquad G_n(y,\eta) = -\frac{\sinh n(\pi-y)\sinh n\eta}{n\sinh n\pi} \text{ se } y > \eta.$$

È quindi, ricordando che è $F_n(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\xi F(\xi,\eta)X_n(\xi)$,

$$u(x,y) = \sum X_n(x)\int_0^\pi d\eta G_n(y,\eta)\frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\xi F(\xi,\eta)X_n(\xi) = \int\int_Q d\xi d\eta G(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)$$

essendo $G(x,y;\xi,\eta) = \frac{2}{\pi}\sum X_n(x)X_n(\xi)G_n(y,\eta)$, e avendo scambiato la serie con l'integrale, cosa che si dimostra lecita sotto ipotesi ragionevoli, più o meno come nel caso dell'equazione del calore.

L'interpretazione di G, detta la funzione di Green, dovrebbe a questo punto essere chiara. Se $F(\xi,\eta)$ è 0 dappertutto tranne in un quadrato di centro (α,β) e lato ϵ, dove vale $\frac{1}{\epsilon^2}$, per la u si ha

$$u(x,y) = \frac{1}{\epsilon^2}\int_{Q_\epsilon} d\xi d\eta G(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{\epsilon^2}\epsilon^2 G(x,y;\overline{\xi},\overline{\eta}) \to G(x,y;\alpha,\beta),$$

dove $(\overline{\xi},\overline{\eta})$ è un appropriato punto in Q_ϵ, dipendente da ϵ, che tende a (α,β) per $\epsilon \to 0$. La funzione di Green $G(x,y;\alpha,\beta)$ rappresenta come sempre la soluzione quando la sorgente è una $\delta(\xi-\alpha)\delta(\eta-\beta)$ (carica unitaria in (α,β)).

III. CORDA VIBRANTE

Sia $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$ per $0 < x < l$, con $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$, $u(0,t) = a(t)$, $u(l,t) = b(t)$. Se u_a (e le altre) sono la soluzione del problema in cui solo a (o le altre) è diversa da 0, i problemi nuovi sono per u_a, u_b e u_F. I problemi per u_a e u_b si possono riportare a problemi per l'equazione non omogenea con condizioni al contorno omogenee e condizioni iniziali non nulle, così che l'unico problema veramente nuovo è l'equazione non omogenea con condizioni al contorno e iniziali nulle. Per esempio, se si pone

$$v(x,t) = u(x,t) - a(t)\cos\frac{\pi x}{2l} - b(t)\sin\frac{\pi x}{2l}$$

è chiaro che agli estremi è $v = 0$, ma l'equazione soddisfatta da v non è omogenea (anche se fosse $F = 0$) e le condizioni iniziali per v non sono nulle (anche se fosse $f = g = 0$). Osservo comunque che per l'equazione della corda vibrante esiste un altro metodo per trattare le condizioni al contorno non omogenee, che prescinde dal riportare il problema a un problema non omogeneo con condizioni iniziali non omogenee ma condizioni al contorno omogenee (vedere sezione successiva).

Sia allora $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$ con condizioni al contorno e iniziali nulle. Come sempre cerchiamo la soluzione nella forma $u(x,t) = \sum X_n(x)T_n(t)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\frac{1}{c^2}\sum T_n'' X_n - \sum T_n X_n'' = F(x,t).$$

Al solito, vogliamo leggere primo e secondo membro come una serie nelle X_n. Questo richiede che sia $X_n'' = -\lambda_n X_n$, con $X_n(0) = X_n(l) = 0$, per soddisfare le condizioni al contorno su u. Ne segue $X_n(x) = \sin n\frac{\pi}{l}x$. Essendo le X_n un insieme completo, per ogni t la $F(x,t)$ si potrà sviluppare nelle X_n: $F(x,t) = \sum F_n(t)X_n(x)$, con

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l F(x,t)X_n(x)dx.$$

A questo punto l'equazione è diventata, moltiplicando per c^2:

$$\sum X_n(x)[T_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}T_n] = c^2\sum F_n(t)X_n(x).$$

Uguagliando i coefficienti delle due serie di Fourier risulta per le T_n l'equazione

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2}T_n = c^2F_n(t),$$

che deve essere risolta con le condizioni iniziali $T_n(0) = T_n'(0) = 0$ per soddisfare le condizioni iniziali omogenee imposte alla u.

Cerchiamo la soluzione nella forma $T_n(t) = A(t)\sin\frac{n\pi ct}{l} + B(t)\cos\frac{n\pi ct}{l}$, avendo scelto come soluzioni dell'omogenea quella che si annulla a $t = 0$ e quella con derivata nulla a $t = 0$. La condizione che scrivendo T_n'' non compaiano derivate seconde di A e B dà:

$$A'(t)\sin\frac{n\pi ct}{l} + B'(t)\cos\frac{n\pi ct}{l} = 0,$$

da cui segue che è $T_n' = A(t)\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi c}{l}t - B(t)\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi c}{l}t$, per cui le condizioni $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$ richiedono $A(0) = B(0) = 0$.

La condizione che $T_n(t)$ risolva l'equazione dà:

$$A'(t)\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi c}{l}t - B'(t)\frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi c}{l}t = c^2 F_n(t).$$

Risolvendo le due equazioni per $A'(t)$ e $B'(t)$ si trova:

$$A'(t) = \frac{cl}{n\pi}\cos\frac{n\pi c}{l}tF_n(t) \qquad B'(t) = -\frac{cl}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{l}tF_n(t).$$

Le soluzioni che soddisfano $A(0) = 0$ e $B(0) = 0$ sono:

$$A(t) = \frac{cl}{n\pi}\int_0^t \cos\frac{n\pi c}{l}\tau F_n(\tau)d\tau \qquad B(t) = -\frac{cl}{n\pi}\int_0^t \sin\frac{n\pi c}{l}\tau F_n(\tau)d\tau$$

da cui per $T_n(\tau)$ si trova

$$T_n(\tau) = \frac{cl}{n\pi}\int_0^t [\sin\frac{n\pi c}{l}t\cos\frac{n\pi c}{l}\tau - \cos\frac{n\pi c}{l}t\sin\frac{n\pi c}{l}\tau]F_n(\tau)d\tau = \frac{cl}{n\pi}\int_0^t \sin\frac{n\pi c}{l}(t-\tau)F_n(\tau)d\tau.$$

Ora scrivo la u sotto forma di serie, e poi vedo che, scambiando serie e integrale, si riesce a ottenere la u non in forma di serie. Non mi preoccupo di discutere la legittimità dello scambio di ordine fra serie e integrale, perché sarà facile verificare che sotto ipotesi molto blande l'espressione ottenuta per u risolve il problema iniziale.

L'espressione in forma di serie della u è:

$$u(x,t) = \sum X_n(x)T_n(t) = \sum \frac{cl}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t \sin\frac{n\pi c}{l}(t-\tau)F_n(\tau)d\tau =$$

$$= \sum \frac{cl}{2n\pi}\int_0^t [\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct+c\tau) - \cos\frac{n\pi}{l}(x+ct-c\tau)]F_n(\tau)d\tau.$$

Se ora scriviamo

$$\frac{l}{n\pi}[\cos\frac{n\pi}{l}(x-ct+c\tau) - \cos\frac{n\pi}{l}(x+ct-c\tau)] = \int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau}\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

per la u si trova

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\sum\int_0^t d\tau F_n(\tau)\int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} d\xi \sin\frac{n\pi}{l}\xi = \frac{c}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} d\xi \sum F_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto lo scambio di ordine fra somma e integrazione accennato prima. Ora, le $F_n(\tau)$ sono proprio i coefficienti di Fourier nella base dei seni della funzione $F(\xi,\tau)$, per cui è $\sum F_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi = F(\xi,\tau)$, e l'espressione di u finalmente diventa:

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-ct+c\tau}^{x+ct-c\tau} d\xi F(\xi,\tau).$$

Prima di verificare che quest'ultima espressione è effettivamente soluzione del problema notiamo che, quale che sia x in $(0,l)$, al crescere di t l'estremo superiore dell'integrale su ξ diventa più grande di l, mentre l'estremo inferiore diventa più piccolo di 0. Nasce la domanda: cosa dobbiamo intender per $F(\xi,\tau)$ quando ξ è esterno all'intervallo $(0,l)$ su cui la F è inizialmente definita (F è essenzialmente la densità di forza esterna che agisce sulla corda) ? La risposta è implicita nel fatto che nell'integrale si è sostituita la serie $\sum F_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi$ con $F(\xi,\tau)$: per $F(\xi,\tau)$ si deve intendere la funzione rappresentata, per ogni valore di ξ, dalla serie di seni con i coefficienti di Fourier della F fisica assegnata in $(0,l)$. Tale funzione evidentemente è il prolungamento dispari (serie di seni) della $F(x,t)$, periodica con periodo $2l$ (il periodo dei seni che compaiono nella serie).

Verifichiamo ora che la u ottenuta risolve il problema. A $t=0$ è evidentemente $u(x,0)=0$. Per $\frac{\partial u}{\partial t}$ si trova:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau[cF(x+ct-c\tau,\tau)+cF(x-ct+c\tau,\tau)]$$

che è 0 a $t=0$.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, è $u(0,t)=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau\int_{-ct+c\tau}^{ct-c\tau}d\xi F(\xi,\tau)$, che è nulla perché $F(\xi,\tau)$ è dispari in ξ, come discusso. Analogamente è $u(l,t)=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau\int_{l-ct+c\tau}^{l+ct-c\tau}d\xi F(\xi,\tau)=0$, perché la $F(\xi,\tau)$ ha in ξ le proprietà di simmetria dei $\sin n\frac{\pi}{l}\xi$, che sono antisimmetrici rispetto a l.

Per verificare che u soddisfa l'equazione osservo che:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2F(x,t)+\frac{c^3}{2}\int_0^t d\tau[F_1(x+ct-c\tau,\tau)-F_1(x+ct-c\tau,\tau)]$$

dove l'indice 1 accanto alle F indica la derivata di F rispetto al primo argomento;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau[F(x+ct-c\tau,\tau)-F(x-ct+c\tau,\tau)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{c}{2}\int_0^t d\tau[F_1(x+ct-c\tau,\tau)-F_1(x-ct+c\tau,\tau).$$

È immediato ora verificare che l'equazione di partenza è soddisfatta.

IV. ESTREMI DELLA CORDA

Per risolvere il problema della corda vibrante con condizioni non omogenee agli estremi, considero prima l'equazione omogenea con condizioni iniziali nulle, e $u(0,t)=a(t)$, $u(l,t)=0$. Sappiamo che l'equazione delle onde omogenea implica $u(x,t)=p(x+t)+q(x-t)$ (pongo $c=1$), a prescindere da condizioni iniziali e al contorno. Considero prima il caso che l'altro estremo sia a ∞ (corda semiinfinita), cioè il problema deve soddisfare la sola condizione al contorno in $x=0$, e u è definita per $x>0$.

p e q sono fissate dalle condizioni iniziali, per cui si deve avere:

$$p(x)+q(x)=0 \quad p'(x)-q'(x)=0\Rightarrow p(x)-q(x)=2k \tag{1}$$

Se ne ricava $p(x)=k$, $q(x)=-k$ per $x\geq 0$ (è la regione dove sono assegnate le condizioni iniziali). Siccome nella u compare sempre $p(x+t)+q(x-t)$, la costante scompare e si può prendere $p(x)=q(x)=0$ per $x>0$. Dato che pert $x>0$, $t>0$ è $x+t>0$, sarà

$$u(x,t)=q(x-t), \tag{2}$$

con $q=0$ per $x>t$.

A dettare il prolungamento di q a argomenti negativi è la condizione al contorno a $x=0$. Per $x=0$ e $t>0$ deve essere $q(-t)=a(t)$, cioè per argomento negativo deve essere $q(x)=a(-x)$. Quindi è $u(x,t)=q(x-t)=a(t-x)$ per $t-x>0$, $u=0$ per $t<x$. In questa espressione, per soddisfare le condizioni a $t=0$, la a, che è definita solo per argomento positivo, deve essere prolungata a 0 per argomento negativo.

L'interpretazione è chiara: fissato $x>0$, dove la corda è inizialmente a riposo con velocità nulla, finché la perturbazione originata in $x=0$ a $t=0$ non è arrivata nel punto x, la corda resta ferma. Graficamente, se si rappresenta t in ascisse e $a(t)$ in ordinate, $a(-x)$ è la funzione riflessa rispetto all'asse delle ordinate, avendo posto x sulle ascisse. La sostituzione di x con $x-t$, che fa passare da $a(-x)$ a $a(t-x)$, descrive la propagazione nel verso delle x crescenti del segnale rappresentato a $t=0$ da $a(-x)$, di cui la parte che ha significato fisica è quella rappresentata per $x>0$, dove risiede la corda.

La soluzione $u(x,t)=a(t-x)$ è valida per ogni $t>0$, $x>0$: soddisfa l'equazione della corda vibrante (è funzione di $x-t$), soddisfa la condizione al contorno e le condizioni iniziali. Per una corda semiinfinita. cioè estesa per $x>0$, non ci sono altre condizioni da soddisfare. Per una corda finita, supponiamo prima che sia $u(l,t)=0$. In questo caso, per $t<l$ la soluzione trovata va bene, perché è $a(t-l)=0$ per $t<l$. ma per $t>l$ in generale è $a(t-l)\neq 0$. Quindi la u di prima non va piú bene.

Si rimedia aggiungendo a $a(t-x)$ un'altra soluzione dell'eq. della corda vibrante, che viaggia verso le x decrescenti e che per tempi $t\geq l$ compensa esattamente l'effetto di $a(t-x)$, cosí da garantire $u(l,t)=0$. Deve essere una funzione di $t+x$ (viaggia verso sinistra) opposta a $a(t-l)$, che arriva a $x=l$ proprio al tempo $t=l$. Tale onda è evidentemente $-a((t-l)+(x-l))=-a(t+x-2l)$. Si può pensare questa onda come esistente già a $t=0$, e avente supporto in $x>2l$, oppure dire che quando l'onda generata dalla perturbazione in 0 arriva a $x=l$, dove è $u(l,t)=0$, nasce un'onda riflessa e cambiata di segno che viaggia in senso opposto, cosí da compensare in $x=l$ l'effetto dell'onda primaria e assicurare $u(l,t)=0$.

Ora, quando l'onda riflessa viaggiante verso sinistra arriva a $x=0$, il che avviene a $t=2l$, la somma $a(t-x)-a(t+x-2l)$ in $x=0$ non soddisfa piú la condizione al contorno. Si rimedia aggiungendo un'onda che compensi l'onda secondaria e viaggi verso destra, arrivando a $x=0$ al tempo $2l$: sarà $a(t-2l-x)$. È chiaro come prosegue la storia: ogni volta che un'onda colpisce un estremo, nasce un'onda riflessa, cambiata di segno, che viaggia in senso opposto. Tutte queste onde si possono pensare come esistenti già a $t=0$, con supporti sempre piú lontani da $[0,l]$, di cui ha significato fisico solo la "fotografia" in $[0.l]$, ma sembra piú comodo pensarle come onde riflesse che nascono ogni volta che un'onda colpisce un estremo.

Se le condizioni al contorno fossero $u(0,t)=a(t)$, $u(l,t)=b(t)$, alla soluzione descritta prima bisogna aggiungere la soluzione del problema con $a=0$, $b\neq 0$. Ponendo $z=l-x$, $v(z,t)=u(l-z,t)$, è chiaro che per v si ha un problema come quello appena studiato, con $v(0,t)=b(t)$. La soluzione è $v(z,t)=b(t-z)$, ossia $u(x,t)=b(t+x-l)$, onda che viaggia verso sinistra e che in $x=l$ vale $b(t)$. Quando questa onda arriva all'estremo $x=0$, dove deve essere $u(0,t)=0$, essa deve essere compensata da un'onda riflessa, cambiata di segno, che viaggia in senso opposto, e cosí via.

Ora considero il caso che in $x=0$ sia assegnata la condizione al contorno $u_x=a(t)$. Comincio col caso della corda semiinfinita ($x>0$). Le considerazioni che ci hanno portato alle equazioni 1 e 2, che dipendevano solo dalle condizioni iniziali, restano valide. Si deve solo trovare come la funzione q, nulla per argomento positivo, è prolungata per argomenti negativi, e la risposta anche ora è data dalla condizione al contorno.

Per $t>0$ deve essere

$$u_x(0,t)=a(t)=\partial_x q(x-t)|_{x=0}=-\partial_t q(x-t)|_{x=0}=-\partial_t q(-t) \tag{3}$$

Se si pone $z=-t$ ($z<0$ per $t>0$) si vede che per $z<0$ $q(z)$ obbedisce all'equazione $q'(z)=a(-z)$, da cui

$$q(z)=q(0)+\int_0^z a(-s)\,ds=-\int_0^{-z} a(s)\,ds \tag{4}$$

dove si è usato $q(0)=0$ per la continuità di q, che è nulla per argomenti positivi. Allora dalla 2 si trova

$$u(x,t)=q(x-t)=-\int_0^{t-x} a(s)\,ds\equiv A(t-x). \tag{5}$$

La 5 dà u per argomenti tali che $x-t<0$, mentre per $x-t>0$ è $u=0$. L'interpretazione è la stessa discussa sopra: dato x, u resta 0 in x finché la perturbazione originata a $x=0$ non ha avuto tempo di farsi sentire in x, e questo tempo ($c=1$) è proprio x.

Se la corda è finita e in $x=l$ è data la condizione al contorno $u(l,t)=0$, quando l'onda raggiunge $x=l$ il suo effetto deve essere compensato da un'onda riflessa cambiata di segno, che viaggia in senso opposto e che arriva a $x=l$ proprio a $t=l$. Tale onda è descritta da $A(t-l+(x-l))=A(t+x-2l)$. Se invece in $x=l$ deve essere $u_x(l,t)=0$ si deve compensare l'effetto di $A(t-x)$ aggiungendo un'onda che viaggia in senso opposto, che arriva a $x=l$ al tempo $t=l$, la cui derivata rispetto a x compensi in $x=l$ la derivata di $A(t-x)$. Tale onda è $A(t-l+(x-l)$. Infatti $\partial_x[A(t-x)+A(t+x-2l)=-A'(t-x)+A'(t+x-2l)$ è nulla per $x=l$.

Quando, al tempo $t=2l$, l'onda secondaria ($A(t+x-2l)$ o $-A(t+x-2l)$ a seconda che in $x=l$ sia assegnata u_x o u) arriva a $x=0$, dove è assegnata u_x, se ne deve compensare l'effetto aggiungendo un'onda riflessa che viaggia verso le x crescenti, che parte da $x=0$ al tempo $t=2l$. Tale onda è $A(t-2l-x)$ nel primo caso, $-A(t-2l-x)$ nel secondo. E cosí via. La prescrizione generale è: quando un'onda arriva a un estremo nel quale è assegnata u, nasce un onda riflessa, viaggiante in senso opposto all'onda incidente, cambiata di segno. Se invece un'onda arriva a un estremo nel quale è assegnata u_x, l'onda riflessa non è cambiata di segno.

Se la condizione al contorno su u_x fosse assegnata all'estremo $x=l$, $u_x(l,t)=b(t)$, ponendo $z=l-x$ si avrebbe per $v(z,t)=u(l-z,t)$ un problema come quello appena discusso, con (notare il cambiamento di segno davanti a $b(t)$)

$$v_z(z,t)|z=0=u_z(l-z,t)|_{z=0}=-u_x(x,t)|_{x=l}=-b(t).$$

La soluzione è data dall'eq. 5: $v(z,t) = \int_0^{t-z} b(s)ds$, onde è $u(x,t) = \int_0^{t+x-l} b(s)ds \equiv B(t+x-l)$. Il seguito della discussione (riflessioni etc.) è come sopra. Se sono assegnate condizioni non omogenee a entrambi gli estremi, si sommano le soluzioni corrispondenti a condizione non omogenea in uno solo dei due estremi.