Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1 **Spazi Vettoriali** 5

2 **Prodotto scalare e Spazi di Hilbert** 7

1

SPAZI VETTORIALI

Definition 1.0.1. *(vettori e spazi vettoriali)*
I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.

Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio.

2

PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definition 2.0.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\ , \ ) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 2.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{gathered} (v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ = \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert ($\mathcal{H}$). Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$