Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1

SPAZI VETTORIALI

Definizione 1.1. *(vettori e spazi vettoriali)*
I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.
Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio.

2

NORMA E TOPOLOGIA

Prendiamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria, non necessariamente finita. La discussione varrà anche per spazi definiti su $\mathbb{R}$, basta trascurare *(il coniugio) quando compare. Ora equipaggiamo V con una norma.

Definizione 2.1 ((norma e spazi normati))**.** *Una* norma $\|\| : V \mapsto \mathbb{R}$ *è una funzione che ad ogni elemento $v \in V$ associa un numero reale $\|v\|$, da intendersi come una nozione di "lunghezza" di v. Deve generalizzare il concetto di modulo in $\mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{z^* z}$. Una* norma*, per essere tale deve soddisfare le le seguenti proprietà:*

1) $\|v\| \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v = 0$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ *(disuguaglianza triangolare)*

In questo caso $(V, \|\|)$ *è uno* spazio normato.

La norma introduce anche una *metrica*, cioè una distanza fra due elementi v_1, v_2 definita da $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$.

Definizione 2.2. *(distanza e spazi metrici) In genere uno* spazio metrico *è un insieme, non necessariamente uno spazio vettoriale, in cui per ogni coppia di di elementi è definita una* distanza $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *tale che:*

1) $d(v_1, v_2) \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v_1 = v_2$

2) $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

3) $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$

Uno spazio normato $(V, \|\|)$ è quindi anche uno spazio metrico.

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1);$$
$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\| \leq \|v_1 - v_3\| + \|v_3 - v_2\| = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2).$$

Noi ci occuperemo sempre di spazi la cui metrica discende da una norma. Abbiamo già visto esempi di spazi normati in dimensione finita. Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, possiamo definire $\|z\| = \max_i |z_i|$, per cui 1) e 2) sono ovvie, 3) discende da

$$\|z + w\| = \max_i |z_i + w_i| \leq \max_i (|z_i| + |w_i|) \leq \max_i |z_i| + \max_i |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Oppure sempre su $\mathbb{C}^n$ possiamo prendere $\|z\| = \sum_{i=1}^n |z_i|$. Ancora 1) e 2) sono ovvie, mentre 3):

$$\|z + w\| = \sum_{i=1}^n |z_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Vediamo ora alcuni esempi che generalizzano i casi sopra in dimensione infinita. Prendiamo le sequenze z_i con $i \in \mathbb{N}^+$ di numeri complessi. Quindi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots,)$ limitiamoci alle sequenze limitate, cioè per cui $\sup_i |z_i| < \infty$. Questo è uno spazio vettoriale e $\|z\| = \sup_i |z_i|$ è una norma. Come prima si vede che

$$\|z + w\| = \sup_i |z_i + w_i| \leq \sup_i (|z_i| + |w_i|) \leq \sup_i |z_i| + \sup_i |w_i| = \|z + w\|.$$

Possiamo prendere invece le sequenze tali che $\sum_i |z_i| < \infty$, e usare come norma proprio $\|z\| = \sum_i |z_i|$.

Vediamo altri esempi usando spazi funzionali. Prendiamo l'insieme delle funzioni continue su un intervallo chiuso $f \in C([a,b])$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Questo è uno spazio vettoriale e su di esso possiamo prendere, ad esempio: $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$, oppure $\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$. Consideriamo ora gli aspetti topologici, cioè le nozioni di limite e continuità che la norma induce sugli spazi.

Definizione 2.3 (punto di accumulazione). *Prendiamo un sottoinsieme $A \subset V$, un $\underline{v} \in V$ si dice* punto di accumulazione *di A se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v \neq \underline{v}$ con $v \in A$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$.*

***Osservazione* 2.4.** $\underline{v}$ può appartenere o meno ad A.

Definizione 2.5 (chiusura di un insieme). *Si denota con $\overline{A}$ la* chiusura *di A, cioè l'unione di A e di tutti i suoi punti di accumulazione, per cui vale $A \subset \overline{A}$.*

Prendiamo ora una funzione $f : A \subset V \to W$ dove $(V, \|\|)$ e $(W, \|\|)$ sono entrambi dotati di norma e A è il dominio della funzione f.

Definizione 2.6 (limite di una funzione). *Prendiamo un $\underline{v}$ punto di accumulazione di A, si dice che $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w \in W$ se $\forall \delta > 0$ $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$ e $v \neq \underline{v} \Rightarrow \|f(v) - w\| < \delta$.*

Definizione 2.7 (continuità puntuale). *Nel caso in cui $\underline{v} \in A$ e $\lim_{v \to \underline{v}} = w = f(\underline{v})$ allora si dice che la funzione f è* continua *in $\underline{v}$.*

Definizione 2.8 (continuità). *Una funzione si dice* continua *se è continua in ogni punto del proprio dominio.*

Teorema 2.9 (unicità del limite). *Il limite di una funzione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w_1$ e $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w_2$ con $w_1 \neq w_2$. Per la 1) $\|w_1 - w_2\| = \alpha > 0$. Prendiamo $\delta < \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(v) - w_1\| < \frac{\alpha}{2}$ e $\|f(v) - w_2\| < \frac{\alpha}{2}$. Ora usando la 3):

$$\alpha = \|w_1 - w_2\| = \|w_1 - f(v) + f(v) - w_2\| \leq \|w_1 - f(v)\| + \|f(v) - w_2\| < \alpha.$$

Quindi $\alpha < \alpha$ il che non è possibile. □

Vediamo ora le successioni di elementi $v_i \in V$ con $i = 1, 2, \ldots$

Definizione 2.10 (limite di una successione). *Si dice che $\lim_{i \to \infty} v_i = \underset{tilde}{v}$ se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che, se $i > N \Rightarrow \|\utilde{v} - v_i\| < \delta$.*

Teorema 2.11 (esistenza e unicità del limite). *Sia $\utilde{v}$ un punto di accumulazione di $A \subset V$, possiamo sempre trovare una successione $v_i \in A$ di elementi che ha $\lim_{i \to \infty} v_i = \underset{tilde}{v}$. Il limite di una successione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Come prima per il limite di una funzione. □

Definizione 2.12 (successione di Cauchy). *Una successione si dice* di Cauchy *se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che $\forall i, j > N \|v_i - v_j\| < \delta$.*

Definizione 2.13 (completezza). *Uno spazio si dice completo se per ogni successione di Cauchy esiste un $\underline{v}$ tale che v_i converge a $\underline{v}$.*

Definizione 2.14 (spazio di Banach)**.** *Uno spazio normato e completo si chiama* spazio di Banach.

Vediamone alcuni esempi. Prendiamo $\mathbb{C}^n$ con la norma $\max_i |z_i|$ e la successione $z^j = \left(z_1^j, z_2^j, \dots, z_n^j\right)$ dove $j = 1, 2, \dots, \infty$ di Cauchy. Si vede che se z^j è di Cauchy, le n singole successioni in $\mathbb{C}$ z_i^j sono di Cauchy e, per la completezza di $\mathbb{C}$ convergono $z_i^j \to w_i$. Ora prendiamo $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ e verifichiamo che $\lim_{j\to\infty} z^j = w$. Quindi dalla completezza di $\mathbb{C}$ discende la completezza di $\mathbb{C}^n$ con la norma vista sopra. Vedremo che su $\mathbb{C}^n$ questo vale per qualsiasi norma.

3 PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definizione 3.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\, , \,) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 3.2. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(\, , \,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{gathered}(v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ = \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0.\end{gathered}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert ($\mathcal{H}$). Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$