Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1 SPAZI VETTORIALI

Definizione 1.1. *(vettori e spazi vettoriali) I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.*

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.
Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio. Oppure ci sono casi in cui il principio di sovrapposizione vale in generale come in Elettromagnetismo o in Meccanica Quantistica.

Definizione 1.2. *(lineare indipendenza) Dati n elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una generica combinazione lineare è $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Se $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ implica $\lambda_i = 0 \forall i$ allora i vettori x_i sono detti linearmente indipendenti.*

Definizione 1.3. *(dimensione di uno spazio) La dimensione di uno spazio $\dim V$ è definita dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si trovano in esso. Se $\dim V = n$ con $n \in \mathbb{N}$ allora lo spazio ha dimensione finita n. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ si possono trovare n vettori linearmente indipendenti, allora si dice che lo spazio ha dimensione infinita.*

Per ora ci limitiamo a ripassare alcune nozioni fondamentali sugli spazi a dimensione finita $\dim V = n$.

Definizione 1.4. *(base di uno spazio) Una base $y_1, y_2, \dots, y_m$ di V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera V, cioè che ogni $x \in V$ può essere scritto come $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$.*

Teorema 1.5. *Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita con $\dim V = n$. Sia $y_1, y_2, \dots, y_m$ una base di V, allora $m = n$.*

Dimostrazione. È ovvio che $m \leq n$ per definizione. Prendiamo $x_1, x_2, \dots, x_n$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Dato che

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1 + \lambda_2^{(1)} y_2 + \cdots + \lambda_m^{(1)} y_m$$

ci sarà almeno un i per cui $\lambda_i^{(1)} \neq 0$, per cui (senza perdita di generalità)

$$y_1 = \frac{x_1}{\lambda_1^{(1)}} - \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_2 - \cdots - \frac{\lambda_m^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_m.$$

Quindi $x_1, y_2, \dots, y_m$ sono una nuova base per V. A questo punto si può iterare questo procedimento fino a creare una nuova base di m vettori scelti fra gli $\{x_i\}$.Ma allora deve essere per forza $m = n$. □

Se prendiamo $\mathbb{R}^n$ una base è $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 nella i-esima posizione. Infatti sono linearmente indipendenti e $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots e_n x_n$$

Quindi generano $\mathbb{R}^n$. Quindi $\dim \mathbb{R}^n = n$. Se prendiamo $\mathbb{C}^n$ la sua dimensione come spazio vettoriale come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ è $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$. In questo caso omettiamo il $\mathbb{C}$ e scrivere semplicemente $\dim \mathbb{C}^n = n$. Come spazio vettoriale nel campo dei reali invece $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$, dove una possibile base è $e_j^1 = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, $e_j^2 = (0, \dots, i, \dots, 0)$ con $1 \geq j \leq n$.

Definizione 1.6. *(sottospazio vettoriale) Se abbiamo $m < n$ vettori linearmente indipendenti $y_1, y_2, \dots, y_m$ in uno spazio vettoriale V con $\dim V = n$, allora l'insieme di tutte le combinazioni lineari $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$ è un sottospazio vettoriale $V' \subset V$ con $\dim V'$.*

Data una base $x_1, x_2, \dots, x_n$ di elementi di V possiamo fare un isomorfismo fra V e $\mathbb{R}^n$. Dato un $x \in V$ lo scriviamo in modo univoco come $x =$ ed associamo

$$x \in V \longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) dove n è la loro dimensione. Ovviamente l'isomorfismo richiede la scelta preliminare di una base.

Definizione 1.7. *(applicazione lineare) Dati due spazi vettoriali V, $\dim V = n$, e W, $\dim W = m$, un'applicazione lineare è una funzione*

$$A : V \longrightarrow W$$

che rispetta la struttura lineare

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) + \cdots + \lambda_n A(x_n).$$

Proposizione 1.8. *Sia $e_1, e_2, \dots, e_n$ una base di uno spazio vettoriale V. La conoscenza di A sugli elementi della base implica la conoscenza di A su tutto lo spazio.*

Dimostrazione. Se $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ $\forall x \in V$, allora $A(x) = A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 A(e_1) + \lambda_2 A(e_2) + \cdots + \lambda_n (e_n)$. □

Se prendiamo una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ di V e una base $f_1, f_2, \ldots, f_m$ di W, allora possiamo tradurre A in un'applicazione lineare fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quindi scriverla in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ogni $A(e_i)$ può essere scomposto nella base $\{f_j\}$

$$A(e_i) = \sum_j a_{j,i} f_j$$

Quindi

$$A(x) = \sum_i \lambda_i A(e_i) = \sum_i \sum_j \lambda_i a_{j,i} f_j = \sum_j \mu_j f_j$$

Dal seguente prodotto si ottiene un vettore in $\mathbb{R}^m$, che corrisponde ad $A(x)$ nella base $\{f_j\}$.

2 NORMA E TOPOLOGIA

Prendiamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria, non necessariamente finita. La discussione varrà anche per spazi definiti su $\mathbb{R}$, basta trascurare *(il coniugio) quando compare. Ora equipaggiamo V con una norma.

Definizione 2.1 ((norma e spazi normati))**.** *Una* norma $\|\| : V \mapsto \mathbb{R}$ *è una funzione che ad ogni elemento $v \in V$ associa un numero reale $\|v\|$, da intendersi come una nozione di "lunghezza" di v. Deve generalizzare il concetto di modulo in $\mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{z^*z}$. Una* norma*, per essere tale deve soddisfare le le seguenti proprietà:*

1) $\|v\| \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v = 0$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ *(disuguaglianza triangolare)*

In questo caso $(V, \| \ \|)$ *è uno* spazio normato.

La norma introduce anche una *metrica*, cioè una distanza fra due elementi v_1, v_2 definita da $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$.

Definizione 2.2. *(distanza e spazi metrici) In genere uno* spazio metrico *è un insieme, non necessariamente uno spazio vettoriale, in cui per ogni coppia di di elementi è definita una* distanza $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *tale che:*

1) $d(v_1, v_2) \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v_1 = v_2$

2) $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

3) $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$

Uno spazio normato $(V, \| \ \|)$ è quindi anche uno spazio metrico.

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1);$$
$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\| \leq \|v_1 - v_3\| + \|v_3 - v_2\| = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2).$$

Noi ci occuperemo sempre di spazi la cui metrica discende da una norma. Abbiamo già visto esempi di spazi normati in dimensione finita. Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, possiamo definire $\|z\| = \max_i |z_i|$, per cui 1) e 2) sono ovvie, 3) discende da

$$\|z + w\| = \max_i |z_i + w_i| \leq \max_i (|z_i| + |w_i|) \leq \max_i |z_i| + \max_i |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Oppure sempre su $\mathbb{C}^n$ possiamo prendere $\|z\| = \sum_{i=1}^n |z_i|$. Ancora 1) e 2) sono ovvie, mentre 3):

$$\|z + w\| = \sum_{i=1}^n |z_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Vediamo ora alcuni esempi che generalizzano i casi sopra in dimensione infinita. Prendiamo le sequenze z_i con $i \in \mathbb{N}^+$ di numeri complessi. Quindi $z = (z_1, z_2, \dots, z_n \dots,)$ limitiamoci alle sequenze limitate, cioè per cui $\sup_i |z_i| < \infty$. Questo è uno spazio vettoriale e $\|z\| = \sup_i |z_i|$ è una norma. Come prima si vede che

$$\|z + w\| = \sup_i |z_i + w_i| \leq \sup_i (|z_i| + |w_i|) \leq \sup_i |z_i| + \sup_i |w_i| = \|z + w\|.$$

Possiamo prendere invece le sequenze tali che $\sum_i |z_i| < \infty$, e usare come norma proprio $\|z\| = \sum_i |z_i|$.

Vediamo altri esempi usando spazi funzionali. Prendiamo l'insieme delle funzioni continue su un intervallo chiuso $f \in C([a, b])$, $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Questo è uno spazio vettoriale e su di esso possiamo prendere, ad esempio: $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$, oppure $\|f\| = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. Consideriamo ora gli aspetti topologici, cioè le nozioni di limite e continuità che la norma induce sugli spazi.

Definizione 2.3 (punto di accumulazione)**.** *Prendiamo un sottoinsieme $A \subset V$, un $\underline{v} \in V$ si dice* punto di accumulazione *di A se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v \neq \underline{v}$ con $v \in A$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$.*

***Osservazione* 2.4.** $\underline{v}$ può appartenere o meno ad A.

Definizione 2.5 (chiusura di un insieme)**.** *Si denota con $\overline{A}$ la* chiusura *di A, cioè l'unione di A e di tutti i suoi punti di accumulazione, per cui vale $A \subset \overline{A}$.*

Prendiamo ora una funzione $f : A \subset V \to W$ dove $(V, \| \, \|)$ e $(W, \| \, \|)$ sono entrambi dotati di norma e A è il dominio della funzione f.

Definizione 2.6 (limite di una funzione)**.** *Prendiamo un $\underline{v}$ punto di accumulazione di A, si dice che $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w \in W$ se $\forall \delta > 0$ $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$ e $v \neq \underline{v} \Rightarrow \|f(v) - w\| < \delta$.*

Definizione 2.7 (continuità puntuale)**.** *Nel caso in cui $\underline{v} \in A$ e $\lim_{v \to \underline{v}} = w = f(\underline{v})$ allora si dice che la funzione f è* continua in $\underline{v}$*.*

Definizione 2.8 (continuità)**.** *Una funzione si dice* continua *se è continua in ogni punto del proprio dominio.*

Teorema 2.9 (unicità del limite)**.** *Il limite di una funzione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w_1$ e $\lim_{v \to \underline{v}} f(v) = w_2$ con $w_1 \neq w_2$. Per la 1) $\|w_1 - w_2\| = \alpha > 0$. Prendiamo $\delta < \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(v) - w_1\| < \frac{\alpha}{2}$ e $\|f(v) - w_2\| < \frac{\alpha}{2}$. Ora usando la 3):

$$\alpha = \|w_1 - w_2\| = \|w_1 - f(v) + f(v) - w_2\| \leq \|w_1 - f(v)\| + \|f(v) - w_2\| < \alpha.$$

Quindi $\alpha < \alpha$ il che non è possibile. □

Vediamo ora le successioni di elementi $v_i \in V$ con $i = 1, 2, \ldots$

Definizione 2.10 (limite di una successione)**.** *Si dice che $\lim_{i \to \infty} v_i = \underset{\sim}{v}$ se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che, se $i > N \Rightarrow \|\underset{\sim}{v} - v_i\| < \delta$.*

Teorema 2.11 (esistenza e unicità del limite)**.** *Sia $\underset{\sim}{v}$ un punto di accumulazione di $A \subset V$, possiamo sempre trovare una successione $v_i \in A$ di elementi che ha $\lim_{i \to \infty} v_i = \underset{\sim}{v}$. Il limite di una successione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Come prima per il limite di una funzione. □

Definizione 2.12 (successione di Cauchy)**.** *Una successione si dice* di Cauchy *se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che $\forall i, j > N \quad \|v_i - v_j\| < \delta$.*

Definizione 2.13 (completezza). *Uno spazio si dice* completo *se per ogni successione di Cauchy esiste un $\underline{v}$ tale che v_i converge a $\underline{v}$.*

Definizione 2.14 (spazio di Banach). *Uno spazio normato e completo si chiama* spazio di Banach.

Vediamone alcuni esempi. Prendiamo $\mathbb{C}^n$ con la norma $\max_i |z_i|$ e la successione $z^j = \left(z_1^j, z_2^j, \ldots, z_n^j\right)$ dove $j = 1, 2, \ldots, \infty$ di Cauchy. Si vede che se z^j è di Cauchy, le n singole successioni in $\mathbb{C}$ z_i^j sono di Cauchy e, per la completezza di $\mathbb{C}$ convergono $z_i^j \to w_i$. Ora prendiamo $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ e verifichiamo che $\lim_{j\to\infty} z^j = w$.

Quindi dalla completezza di $\mathbb{C}$ discende la completezza di $\mathbb{C}^n$ con la norma vista sopra. Vedremo che su $\mathbb{C}^n$ questo vale per qualsiasi norma.

***Esempio* 2.15** *(norma uniforme).* Prendiamo lo spazio $C([a,b])$ con la norma $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Questa è la norma della convergenza uniforme. Se f_n è di Cauchy lo sono anche tutte le successioni $f_n(x)$ e quindi abbiamo una funzione $f(x)$ a cui $f_n(x)$ convergono puntualmente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x$.

Ma la convergenza è anche uniforme, non solo puntuale, infatti $\delta' < \delta$, $i, j > N$ $\|f_i - f_j\| < \delta'$ mandando $f \to 0$ abbiamo per $i > N$ $\|f_i - f\| \leq \delta' < \delta$. Siccome la convergenza è uniforme $f(x)$ è anch'essa continua, quindi lo spazio $C([a,b])$ con la norma $\max_x |f(x||$ è completo, cioè uno spazio di Banach.

***Esempio* 2.16** *(spazio non completo).* Prendiamo ora sempre $C([a,b])$ ma con $\|f\| = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. Se prendiamo come esempio di successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq c - 1/n \\ \frac{n}{2}(x - c + 1/n) & c - 1/n \leq x \leq c + 1/n \\ 1 & c + 1/n \leq x \leq b \end{cases}$$

sono tutte funzioni continue. $f_n(x)$ converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq c \\ \frac{1}{2} & x = c \\ 1 & c < x \leq b \end{cases}$$

dove $f(x)$ chiaramente non appartiene a $C([a,b])$. La funzione converge in norma

$$\|f(x) - f_n(x)\| = 2\int_{c-1/n}^{c} \frac{n}{2}\left(x - c + \frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2nr} \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi la successione è di Cauchy, ma non converge ad un elemento di $C([a,b])$, per cui lo spazio non è completo.

Definizione 2.17 (norme equivalenti). *Due norme $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ sullo stesso spazio V si dicono* equivalenti *se esistono $k, K > 0$ tali che $\forall v \in V$*

$$k\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1.$$

Lemma 2.18. *Se due norme sono equivalenti lo sono anche le nozioni topologiche che da esse derivano.*

Dimostrazione. Prendiamo ad esempio una successione $v_n \in V$ tale che $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ con la norma $\|\ \|_1$, allora lo stesso deve essere valido per la norma $\|\ \|_2$. Per definizione vogliamo che $\forall\delta > 0\ \exists N$ tale che $\|v - v_i\|_2 < \delta$ per $i > N$. Sappiamo che $\forall\delta/K\ \exists n$ tale che $\|v - v_i\|_1 < \delta/K$. Ma $\|v - v_i\|_2 \leq K\|v - v_i\|_1 < \delta$. Per dimostrare l'inverso usiamo $\|v\|_1 < \frac{1}{k}\|v\|_2$. Con ragionamenti analoghi si vede che tutte le altre nozioni topologiche (limite, continuità,...) sono equivalenti per norme equivalenti. □

Più in generale abbiamo che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, per cui per trovare controesempi di norme non equivalenti dobbiamo guardare agli spazi infiniti.

***Esempio* 2.19** *(norme non equivalenti).* Le norme $\|f\|_1 = max|f(x)|$ e $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)dx$ non possono essere equivalenti. Ad esempio:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq c - 1/n \\ n(x - c + 1/n) & c - 1/n \leq x \leq c \\ n(-x + c + 1/n) & c \leq x \leq c + 1/n \\ 0 & c + 1/n \leq x \leq b \end{cases}$$

abbiamo $\|f_n\|_1 = 1\ \forall n$ mentre $\|f_n\|_2 = 1/n \to 0$ per $n \to \infty$ quindi non può esistere k tale che $\|f_n\|_1 \leq k\|f_n\|_2\ \forall n$.

Vediamo altre nozioni di topologia.

Definizione 2.20 (Palla aperta). *Dato un elemento $v \in V$, definiamo $B(v, R) \subset V$, la* palla aperta *di raggio R attorno a v come l'insieme degli elementi $w \in V$ tali che $\|v - w\| < R$.*

Definizione 2.21 (Palla chiusa). *$\overline{B(v, R)}$ è la* palla chiusa *data dagli elementi per cui $\|v - w\| \leq R$.*

Definizione 2.22 (aperto). *Un insieme $A \subset V$ è* aperto *se per ogni suo elemento $v \in A$ esiste un δ tale che l'intera palla aperta $B(v, \delta)$ è contenuta in A.*

Definizione 2.23 (chiuso). *Un insieme $C \subset V$ è* chiuso *se il suo complementare è aperto.*

Teorema 2.24. *La palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Dato w con $\|w - v\| = r < R$, prendiamo $\delta < R - r$, se $t \in B(w, \delta)$, $\|t - w\| < \delta$. Quindi $\|t - v\| \leq \|z - w\| + \|w - v\| = \delta + r < R$ quindi $t \in B(v, R)$. □

In maniera analoga si dimostra che $\overline{B(v, R)}$ è chiuso.

Teorema 2.25. *Un insieme è chiuso $\iff$ contiene tutti i suoi punti di accumulazione: $C = \overline{C}$.*

Dimostrazione. Se $v \notin C$ allora $v \in C^c$ cioè v appartiene al complementare. Essendo C^c aperto esiste una palla attorno a v in cui nessun elemento appartiene a C, quindi v non può essere un punto di accumulazione di C. □

3 PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definizione 3.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\, , \,) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 3.2. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(\, , \,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{aligned} &(v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ &= \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert ($\mathcal{H}$). Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$