Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1 SPAZI VETTORIALI

Definizione 1.1. *(vettori e spazi vettoriali) I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.*

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.

Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio. Oppure ci sono casi in cui il principio di sovrapposizione vale in generale come in Elettromagnetismo o in Meccanica Quantistica.

Definizione 1.2. *(lineare indipendenza) Dati n elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una generica combinazione lineare è $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Se $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ implica $\lambda_i = 0 \forall i$ allora i vettori x_i sono detti linearmente indipendenti.*

Definizione 1.3. *(dimensione di uno spazio) La dimensione di uno spazio $\dim V$ è definita dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si trovano in esso. Se $\dim V = n$ con $n \in \mathbb{N}$ allora lo spazio ha dimensione finita n. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ si possono trovare n vettori linearmente indipendenti, allora si dice che lo spazio ha dimensione infinita.*

Per ora ci limitiamo a ripassare alcune nozioni fondamentali sugli spazi a dimensione finita $\dim V = n$.

Definizione 1.4. *(base di uno spazio) Una base $y_1, y_2, \ldots, y_m$ di V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera V, cioè che ogni $x \in V$ può essere scritto come $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$.*

Teorema 1.5. *Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita con $\dim V = n$. Sia $y_1, y_2, \ldots, y_m$ una base di V, allora $m = n$.*

Dimostrazione. È ovvio che $m \leq n$ per definizione. Prendiamo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Dato che

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1 + \lambda_2^{(1)} y_2 + \cdots + \lambda_m^{(1)} y_m$$

ci sarà almeno un i per cui $\lambda_i^{(1)} \neq 0$, per cui (senza perdita di generalità)

$$y_1 = \frac{x_1}{\lambda_1^{(1)}} - \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_2 - \cdots - \frac{\lambda_m^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_m.$$

Quindi $x_1, y_2, \ldots, y_m$ sono una nuova base per V. A questo punto si può iterare questo procedimento fino a creare una nuova base di m vettori scelti fra gli $\{x_i\}$.Ma allora deve essere per forza $m = n$. $\square$

Se prendiamo $\mathbb{R}^n$ una base è $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ con 1 nella i-esima posizione. Infatti sono linearmente indipendenti e $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots e_n x_n$$

Quindi generano $\mathbb{R}^n$. Quindi $\dim \mathbb{R}^n = n$. Se prendiamo $\mathbb{C}^n$ la sua dimensione come spazio vettoriale come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ è $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$. In questo caso omettiamo il $\mathbb{C}$ e scrivere semplicemente $\dim \mathbb{C}^n = n$. Come spazio vettoriale nel campo dei reali invece $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$, dove una possibile base è $e_j^1 = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $e_j^2 = (0, \ldots, i, \ldots, 0)$ con $1 \geq j \leq n$.

Definizione 1.6. *(sottospazio vettoriale) Se abbiamo $m < n$ vettori linearmente indipendenti $y_1, y_2, \ldots, y_m$ in uno spazio vettoriale V con $\dim V = n$, allora l'insieme di tutte le combinazioni lineari $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$ è un sottospazio vettoriale $V' \subset V$ con $\dim V'$.*

Data una base $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di elementi di V possiamo fare un isomorfismo fra V e $\mathbb{R}^n$. Dato un $x \in V$ lo scriviamo in modo univoco come $x =$ ed associamo

$$x \in V \longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) sono isomorfi a $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) dove n è la loro dimensione. Ovviamente l'isomorfismo richiede la scelta preliminare di una base.

1.1 APPLICAZIONI LINEARI

Definizione 1.7. *(applicazione lineare) Dati due spazi vettoriali V, $\dim V = n$, e W, $\dim W = m$, un'applicazione lineare è una funzione*

$$A : V \longrightarrow W$$

che rispetta la struttura lineare

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) + \cdots + \lambda_n A(x_n).$$

Proposizione 1.8. *Sia $e_1, e_2, \ldots, e_n$ una base di uno spazio vettoriale V. La conoscenza di A sugli elementi della base implica la conoscenza di A su tutto lo spazio.*

Dimostrazione. Se $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$ $\forall x \in V$, allora $A(x) = A(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 A(e_1) + \lambda_2 A(e_2) + \cdots + \lambda_n (e_n)$. □

Se prendiamo una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ di V e una base $f_1, f_2, \ldots, f_m$ di W, allora possiamo tradurre A in un'applicazione lineare fra $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ quindi scriverla in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ogni $A(e_i)$ può essere scomposto nella base $\{f_j\}$

$$A(e_i) = \sum_j a_{j,i} f_j$$

Quindi

$$A(x) = \sum_i \lambda_i A(e_i) = \sum_i \sum_j \lambda_i a_{j,i} f_j = \sum_j \mu_j f_j$$

Dal seguente prodotto si ottiene un vettore in $\mathbb{R}^m$, che corrisponde ad $A(x)$ nella base $\{f_j\}$. Un'applicazione lineare ha un nucleo $\ker V$ e un'immagine $\operatorname{Im} V$ definiti come segue:

$$\ker V = \{x \in V : A(x) = 0\}$$
$$\operatorname{Im} V = \{y \in W : \exists x \in V : A(x) = y\}.$$

Dalla linearità di A segue che $\ker V$ e $\operatorname{Im} V$ sono spazi vettoriali. Inoltre si dimostra che

$$\dim V = \dim \ker V + \dim \operatorname{Im} V. \tag{2}$$

Definizione 1.9. *(operatore lineare) Un operatore lineare su uno spazio è una funzione $A : V \to V$ che lo manda in se stesso.In questo caso se A è iniettivo (o suriettivo), allora A è invertibile e si può definire l'operatore lineare A^{-1} tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{I}$, dove $\mathbb{I}$ è l'identità.*

L'insieme delle applicazioni lineari da V a W è esso stesso uno spazio vettoriale dove $\lambda_1 A_1 \lambda_2 A_2$ è definito $(\lambda_1 A_1 \lambda_2 A_2)(x) = \lambda_1 A_1(x) \lambda_2 A_2(x)$. Rappresentandolo come matrice $\left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{nm}$ abbiamo proprio lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{nm}$. Le applicazioni lineari si possono comporre, se abbiamo tre spazio vettoriale e le seguenti applicazioni

$$V_1 \xrightarrow{A_1} V_2 \xrightarrow{A_2} V_3$$

allora $A_2 \circ A_1$, che chiameremo semplicemente $A_2 A_1$, è un'applicazione $V_1 \xrightarrow{A_2 A_1} V_3$ definita da $A_2 A_2(x) = A_2(A_1(x))$.
Quindi sullo spazio degli operatori su V, $V \xrightarrow{A} V$, possiamo definire un prodotto. Questo prodotto è non commutativo, in genere $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$. Se $A_1 A_2 = A_2 A_1$ allora si dice che gli operatori A_1 e A_2 commutano.

Studiamo ora altre strutture che si possono aggiungere allo spazio $\mathbb{C}^n$ o ($\mathbb{R}^n$).

Definizione 1.10. *(modulo e norma) Dato un numero complesso $z = x + iy \in \mathbb{C}$ possiamo definire il modulo*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Il concetto di modulo si può generalizzare anche allo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$. Ad esempio si può definire, dato $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, il modulo, che chiameremo norma

$$\|z\| = \sqrt{|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|}$$

Si può verificare che $\|\|$ così definita soddisfa alcune proprietà che l'accomunano al modulo definito per $\mathbb{C}$:

1. $\|z\| \geq 0$ e $\|z\| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\|\lambda z\| = |\lambda| \cdot \|z\|$
3. $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$.

2

NORMA E TOPOLOGIA

Prendiamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria, non necessariamente finita. La discussione varrà anche per spazi definiti su $\mathbb{R}$, basta trascurare *(il coniugio) quando compare. Ora equipaggiamo V con una norma.

Definizione 2.1 (norma e spazi normati)**.** *Una* norma $\| \ \| : V \mapsto \mathbb{R}$ *è una funzione che ad ogni elemento $v \in V$ associa un numero reale $\|v\|$, da intendersi come una nozione di "lunghezza" di v. Deve generalizzare il concetto di modulo in $\mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{z^* z}$. Una* norma*, per essere tale deve soddisfare le le seguenti proprietà:*

1) $\|v\| \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v = 0$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ *(disuguaglianza triangolare)*

In questo caso $(V, \| \ \|)$ *è uno* spazio normato.

La norma introduce anche una *metrica*, cioè una distanza fra due elementi v_1, v_2 definita da $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$.

Definizione 2.2 (distanza e spazi metrici)**.** *In genere uno* spazio metrico *è un insieme, non necessariamente uno spazio vettoriale, in cui per ogni coppia di di elementi è definita una* distanza $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *tale che:*

1) $d(v_1, v_2) \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v_1 = v_2$

2) $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

3) $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$

Uno spazio normato $(V, \| \ \|)$ è quindi anche uno spazio metrico.

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1);$$
$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\| \leq \|v_1 - v_3\| + \|v_3 - v_2\| = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2).$$

Noi ci occuperemo sempre di spazi la cui metrica discende da una norma. Abbiamo già visto esempi di spazi normati in dimensione finita. Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, possiamo definire $\|z\| = \max_i |z_i|$, per cui 1) e 2) sono ovvie, 3) discende da

$$\|z + w\| = \max_i |z_i + w_i| \leq \max_i (|z_i| + |w_i|) \leq \max_i |z_i| + \max_i |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Oppure sempre su $\mathbb{C}^n$ possiamo prendere $\|z\| = \sum_{i=1}^n |z_i|$. Ancora 1) e 2) sono ovvie, mentre 3):

$$\|z + w\| = \sum_{i=1}^n |z_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Vediamo ora alcuni esempi che generalizzano i casi sopra in dimensione infinita. Prendiamo le sequenze z_i con $i \in \mathbb{N}^+$ di numeri complessi. Quindi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots,)$ limitiamoci alle sequenze limitate, cioè per cui $\sup_i |z_i| < \infty$. Questo è uno spazio vettoriale e $\|z\| = \sup_i |z_i|$ è una norma. Come prima si vede che

$$\|z+w\| = \sup_i |z_i + w_i| \le \sup_i (|z_i| + |w_i|) \le \sup_i |z_i| + \sup_i |w_i| = \|z+w\|.$$

Possiamo prendere invece le sequenze tali che $\sum_i |z_i| < \infty$, e usare come norma proprio $\|z\| = \sum_i |z_i|$.

Vediamo altri esempi usando spazi funzionali. Prendiamo l'insieme delle funzioni continue su un intervallo chiuso $f \in C([a,b])$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Questo è uno spazio vettoriale e su di esso possiamo prendere, ad esempio: $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, oppure $\|f\| = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$. Consideriamo ora gli aspetti topologici, cioè le nozioni di limite e continuità che la norma induce sugli spazi.

Definizione 2.3 (punto di accumulazione). *Prendiamo un sottoinsieme $A \subset V$, un $\underline{v} \in V$ si dice* punto di accumulazione *di A se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v \neq \underline{v}$ con $v \in A$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$.*

***Osservazione* 2.4.** $\underline{v}$ può appartenere o meno ad A.

Definizione 2.5 (chiusura di un insieme). *Si denota con $\overline{A}$ la* chiusura *di A, cioè l'unione di A e di tutti i suoi punti di accumulazione, per cui vale $A \subset \overline{A}$.*

Prendiamo ora una funzione $f : A \subset V \to W$ dove $(V, \| \ \|)$ e $(W, \| \ \|)$ sono entrambi dotati di norma e A è il dominio della funzione f.

Definizione 2.6 (limite di una funzione). *Prendiamo un $\underline{v}$ punto di accumulazione di A, si dice che $\lim_{v\to\underline{v}} f(v) = w \in W$ se $\forall \delta > 0$ $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon$ e $v \neq \underline{v} \Rightarrow \|f(v) - w\| < \delta$.*

Definizione 2.7 (continuità puntuale). *Nel caso in cui $\underline{v} \in A$ e $\lim_{v\to\underline{v}} = w = f(\underline{v})$ allora si dice che la funzione f è* continua in $\underline{v}$.

Definizione 2.8 (continuità). *Una funzione si dice* continua *se è continua in ogni punto del proprio dominio.*

Teorema 2.9 (unicità del limite). *Il limite di una funzione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\lim_{v\to\underline{v}} f(v) = w_1$ e $\lim_{v\to\underline{v}} f(v) = w_2$ con $w_1 \neq w_2$. Per la 1) $\|w_1 - w_2\| = \alpha > 0$. Prendiamo $\delta < \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $\exists \varepsilon > 0$ tale che $\|v - \underline{v}\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(v) - w_1\| < \frac{\alpha}{2}$ e $\|f(v) - w_2\| < \frac{\alpha}{2}$. Ora usando la 3):

$$\alpha = \|w_1 - w_2\| = \|w_1 - f(v) + f(v) - w_2\| \le \|w_1 - f(v)\| + \|f(v) - w_2\| < \alpha.$$

Quindi $\alpha < \alpha$ il che non è possibile. □

Vediamo ora le successioni di elementi $v_i \in V$ con $i = 1, 2, \ldots$

Definizione 2.10 (limite di una successione). *Si dice che $\lim_{i\to\infty} v_i = \underset{\sim}{v}$ se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che, se $i > N \Rightarrow \|\underset{\sim}{v} - v_i\| < \delta$.*

Teorema 2.11 (esistenza e unicità del limite). *Sia $\underset{\sim}{v}$ un punto di accumulazione di $A \subset V$, possiamo sempre trovare una successione $v_i \in A$ di elementi che ha $\lim_{i\to\infty} v_i = \underset{\sim}{v}$. Il limite di una successione, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Come prima per il limite di una funzione. □

Definizione 2.12 (successione di Cauchy). *Una successione si dice* di Cauchy *se $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tale che $\forall i, j > N \quad \|v_i - v_j\| < \delta$.*

Definizione 2.13 (completezza). *Uno spazio si dice* completo *se per ogni successione di Cauchy esiste un $\underline{v}$ tale che v_i converge a $\underline{v}$.*

Definizione 2.14 (spazio di Banach). *Uno spazio normato e completo si chiama* spazio di Banach.

Vediamone alcuni esempi. Prendiamo $\mathbb{C}^n$ con la norma $\max_i |z_i|$ e la successione $z^j = \left(z_1^j, z_2^j, \ldots, z_n^j\right)$ dove $j = 1, 2, \ldots, \infty$ di Cauchy. Si vede che se z^j è di Cauchy, le n singole successioni in $\mathbb{C}$ z_i^j sono di Cauchy e, per la completezza di $\mathbb{C}$ convergono $z_i^j \to w_i$. Ora prendiamo $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ e verifichiamo che $\lim_{j\to\infty} z^j = w$.

Quindi dalla completezza di $\mathbb{C}$ discende la completezza di $\mathbb{C}^n$ con la norma vista sopra. Vedremo che su $\mathbb{C}^n$ questo vale per qualsiasi norma.

Esempio 2.15 *(norma uniforme).* Prendiamo lo spazio $C([a,b])$ con la norma $\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Questa è la norma della convergenza uniforme. Se f_n è di Cauchy lo sono anche tutte le successioni $f_n(x)$ e quindi abbiamo una funzione $f(x)$ a cui $f_n(x)$ convergono puntualmente $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x$.

Ma la convergenza è anche uniforme, non solo puntuale, infatti $\delta' < \delta$, $i, j > N$ $\|f_i - f_j\| < \delta'$ mandando $j \to +\infty$ abbiamo per $i > N$ $\|f_i - f\| \le \delta' < \delta$. Siccome la convergenza è uniforme $f(x)$ è anch'essa continua, quindi lo spazio $C([a,b])$ con la norma $\max_x |f(x||$ è completo, cioè uno spazio di Banach.

Esempio 2.16 *(spazio non completo).* Prendiamo ora sempre $C([a,b])$ ma con $\|f\| = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. Se prendiamo come esempio di successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & a \le x \le c - 1/n \\ \frac{n}{2}(x - c + 1/n) & c - 1/n \le x \le c + 1/n \\ 1 & c + 1/n \le x \le b \end{cases}$$

sono tutte funzioni continue. $f_n(x)$ converge puntualmente a

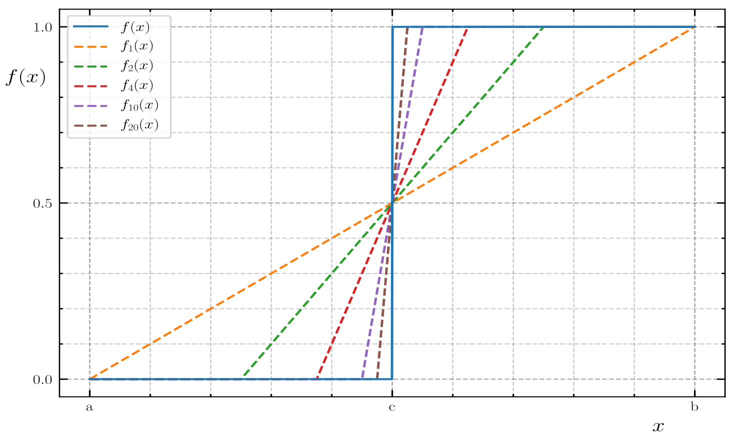

Figura 1: Funzione gradino $f(x)$ e la sua successione $f_n(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & a \le x \le c \\ \frac{1}{2} & x = c \\ 1 & c < x \le b \end{cases}$$

dove $f(x)$ chiaramente non appartiene a $C([a,b])$. La funzione converge in norma

$$\|f(x) - f_n(x)\| = 2\int_{c-1/n}^{c} \frac{n}{2}\left(x - c + \frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2nr} \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi la successione è di Cauchy, ma non converge ad un elemento di $C([a,b])$, per cui lo spazio non è completo.

Definizione 2.17 (norme equivalenti). *Due norme* $\| \ \|_1$ *e* $\| \ \|_2$ *sullo stesso spazio* V *si dicono* equivalenti *se esistono* $k, K > 0$ *tali che* $\forall v \in V$

$$k\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1.$$

Lemma 2.18. *Se due norme sono equivalenti lo sono anche le nozioni topologiche che da esse derivano.*

Dimostrazione. Prendiamo ad esempio una successione $v_n \in V$ tale che $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ con la norma $\| \ \|_1$, allora lo stesso deve essere valido per la norma $\| \ \|_2$. Per definizione vogliamo che $\forall \delta > 0 \ \exists N$ tale che $\|v - v_i\|_2 < \delta$ per $i > N$. Sappiamo che $\forall \delta/K \ \exists n$ tale che $\|v - v_i\|_1 < \delta/K$. Ma $\|v - v_i\|_2 \leq K\|v - v_i\|_1 < \delta$. Per dimostrare l'inverso usiamo $\|v\|_1 < \frac{1}{k}\|v\|_2$. Con ragionamenti analoghi si vede che tutte le altre nozioni topologiche (limite, continuità,...) sono equivalenti per norme equivalenti. □

Più in generale abbiamo che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, per cui per trovare controesempi di norme non equivalenti dobbiamo guardare agli spazi infiniti.

***Esempio* 2.19** *(norme non equivalenti).* Le norme $\|f\|_1 = max|f(x)|$ e $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)dx$ non possono essere equivalenti. Ad esempio:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq c - 1/n \\ n(x - c + 1/n) & c - 1/n \leq x \leq c \\ n(-x + c + 1/n) & c \leq x \leq c + 1/n \\ 0 & c + 1/n \leq x \leq b \end{cases}$$

abbiamo $\|f_n\|_1 = 1 \ \forall n$ mentre $\|f_n\|_2 = 1/n \to 0$ per $n \to \infty$ quindi non può esistere k tale che $\|f_n\|_1 \leq k\|f_n\|_2 \ \forall n$.

Vediamo altre nozioni di topologia.

Definizione 2.20 (Palla aperta). *Dato un elemento* $v \in V$, *definiamo* $B(v, R) \subset V$, *la* palla aperta *di raggio* R *attorno a* v *come l'insieme degli elementi* $w \in V$ *tali che* $\|v - w\| < R$.

Definizione 2.21 (Palla chiusa). $\overline{B(v,R)}$ *è la* palla chiusa *data dagli elementi per cui* $\|v - w\| \leq R$.

Definizione 2.22 (aperto). *Un insieme* $A \subset V$ *è* aperto *se per ogni suo elemento* $v \in A$ *esiste un* δ *tale che l'intera palla aperta* $B(v, \delta)$ *è contenuta in* A.

Definizione 2.23 (chiuso). *Un insieme* $C \subset V$ *è* chiuso *se il suo complementare è aperto.*

Teorema 2.24. *La palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Dato w con $\|w - v\| = r < R$, prendiamo $\delta < R - r$, se $t \in B(w, \delta)$, $\|t - w\| < \delta$. Quindi $\|t - v\| \leq \|z - w\| + \|w - v\| = \delta + r < R$ quindi $t \in B(v, R)$. □

In maniera analoga si dimostra che $\overline{B(v,R)}$ è chiuso.

Teorema 2.25. *Un insieme è chiuso* $\iff$ *contiene tutti i suoi punti di accumulazione:* $C = \overline{C}$.

Dimostrazione. Se $v \notin C$ allora $v \in C^c$ cioè v appartiene al complementare. Essendo C^c aperto esiste una palla attorno a v in cui nessun elemento appartiene a C, quindi v non può essere un punto di accumulazione di C. □

Se A_i sono insiemi aperti, $\bigcup_i A_i = A$ è ancora aperto. Nota che il numero degli A_i può anche essere infinito numerabile. $\bigcap_{i=1}^n A_i = A$ è aperto. Per l'intersezione potrebbero esserci casi in cui un'intersezione di infiniti insiemi aperti non produce un aperto. Dalle formule di De Morgan $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$ si deducono formule analoghe per i chiusi; ora è l'intersezione che può essere infinita numerabile. $\bigcap_i C_i = C$ è chiuso se C_i sono chiusi; $\cup_{i=1}^n C_i = C$ è chiuso se lo sono i C_i.

Definizione 2.26 (compatto)**.** *Un insieme W è* compatto *se per ogni successione $v_i \in W$ si può estrarre una sottosuccessione $v_{i_{(j)}}$ che converge ad un punto di W, $\lim_{j\to\infty} v_{i_{(j)}} = w \in W$.*

Un insieme compatto contiene tutti i suoi punti di accumulazione ed è necessariamente chiuso.

Definizione 2.27 (limitato)**.** *Un insieme è* limitato *se esiste k tale che $\|v\| < k$ per ogni suo elemento.*

Lemma 2.28 (compatto $\implies$ limitato)**.** *Un insieme compatto è necessariamente limitato.*

Dimostrazione. Se non lo fosse potremmo avere una successione tale che $\|v_n\| > n$, non può quindi esistere un punto di accumulazione dei $\|v_n\|$ e quindi nemmeno una sottosuccessione dei v_n convergente. $\square$

Corollario 2.29. *Un insieme chiuso contenuto in un compatto è necessariamente compatto.*

2.1 TEOREMA DI WEIERSTRASS

Vediamo ora l'importante Teorema di Weierstrass:

Teorema 2.30 (di Weierstrass)**.** *Sia $f : C \to W$ con $C \subset V$ compatto. Se f è continua, allora $\|f\|$ assume un massimo e un minimo in C.*

Dimostrazione. Sia $M = \sup\limits_{v\in C} \|f(v)\|$. Per definizione di sup esiste una successione v_i: $i = 1, \ldots, \infty$ tale che $\lim\limits_{i\to\infty} \|f(v_i)\| = M$. Ma per la compattezza esiste una sottosuccessione $v_{i_{(j)}}$ tale che $\lim\limits_{j\to\infty} v_{i_{(j)}} = w$ con $w \in C$. Per la continuità $\lim\limits_{j\to\infty} f(v_{i_{(j)}}) = f(w)$ e quindi deve essere $\|f(w)\| = \lim\limits_{j\to\infty} \|f(v_{i_{(j)}})\| = M$ per la continuità della funzione norma. Quindi il sup è anche un max. $\square$

È facile trovare esempi in cui l'assenza di compattezza e/o continuità invalidano l'esistenza del max (o del min). Abbiamo usato la continuità della funzione norma.

Dimostrazione. Per verificarlo basta prendere $\|v\| = \|v - v_i + v_i\| \le \|v - v_i\| + \|v_i\|$ insieme a $\|v_i\| = \|v_i - v + v\| \le \|v - v_i\| + \|v\|$ quindi $|\|v\| - \|v_i\|| \le \|v - v_i\|$. Per cui se $\lim\limits_{v\to v_i} v_i = v$ si ha anche $\lim\limits_{v\to v_i} \|v_i\| = \|v\|$. $\square$

Definizione 2.31 (L-lipschitzianità)**.** *In genere una funzione $f : V \to W$ è detta* L-lipschitziana *se esiste un L tale che $\|f(v) - f(w)\| \le L\|v - w\| \quad \forall$ coppia v, w.*

Le funzioni lipschitziane sono una sottoclasse di quelle continue.

Esempio* 2.32 *(lipschitziana). La funzione norma $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ è L-lipschitziana con $L = 1$.

Possiamo ora enunciare il seguente

Teorema 2.33 (equivalenza delle norme)**.** *In spazi a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti sono equivalenti e quindi inducono la stessa topologia.*

Dimostrazione. Prendiamo una base $e_1, \ldots, e_n$ che manda lo spazio in $\mathbb{C}^n$. Poi prendiamo una norma di riferimento, ad esempio $\|z\|_1 = \max\limits_i |z_i|$. Dimostreremo che ogni altra norma $\|\ \|_2$ è equivalente a $\|\ \|_1$. $\overline{B(0,1)} = \{v : \|v\|_1 \le 1\}$ è chiuso, $\overline{B(0,1)^c} = \{v : \|v\|_1 \ge 1\}$ è pure chiuso, quindi

$$S(0,1) := \{v : \|v\|_1 = 1\} = \overline{B(0,1)} \cap \overline{B(0,1)^c}.$$

è pure chiuso perché intersezione di chiusi. Un insieme chiuso e limitato in $\mathbb{C}^n$ con la norma $\|\ \|_1$ è anche compatto. Se $z^i = \left(z_1^i, \ldots, z_n^i\right)$ è una successione limitata lo sono anche tutte le z_j^i in $\mathbb{C}$. Quindi per ciascuna possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $z_1^{i_{(j)}} \to w_1$ ad un elemento dell'insieme per $j \to \infty$. Quindi estraiamo una sottosuccessione per cui converge anche $z_2^{i_{(j_{(t)})}} \to w_2$ e così via .... Alla fine abbiamo una sottosuccessione $z^{i_{(j)}} \to w = (w_1, \ldots, w_n)$. Convergendo $z_k^{i_{(j)}} \to w_k$ singolarmente, converge anche $z^{i_{(j)}} \to w$ nella norma $\| \; \|_1$. Ora dobbiamo mostrare che ogni norma $\| \; \|_2$ è lipschitziana, e quindi continua, rispetto a $\| \; \|_1$.

$$\begin{aligned} \|z\|_2 &= \|z_1 e_1 + z_2 e_2 + \ldots + z_n e_n\|_2 \le |z_1|\|e_1\|_2 + |z_2|\|e_2\|_2 + \ldots + |z_n|\|e_n\|_2 \\ &\le n \max_i (|z_1|\|e_1\|_2) \le n \max_i |z_i| \max_i \|e_i\|_2 = n\|z\|_1 \max_i \|e_i\|_2 \end{aligned}$$

Quindi qualsiasi norma $\| \; \|_2$ è K-lipschitziana con $K = n \max_i \|e_i\|_2$. Restringiamo $\| \; \|_2 : S(0,1) \to \mathbb{R}$, questa è una funzione continua su un compatto, dunque assume un massimo e un minimo M e $m \; > 0$. Ora prendiamo un v generico e $\underset{\sim}{v} = \frac{v}{\|v\|}$, dove $\|\underset{\sim}{v}\| = 1$,
$\|v\|_2 = \| \|v\|_1 \, \underset{\sim}{v}\| = \|v\|_1 \|\underset{\sim}{v}\|_2$ siccome $\underset{\sim}{v} \in S(0,1)$:

$$m\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le M\|v\|_1.$$

Quindi $\| \; \|_2$ e $\| \; \|_1$ sono norme equivalenti. □

Corollario 2.34. *In particolare, visto che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti, un chiuso e limitato è sempre compatto (se lo è per $\| \; \|_1$ lo è per tutte).*

Inoltre, $\mathbb{C}^n$, con qualsiasi norma è sempre uno spazio completo.
Se per due norme vale $\| \; \|_2 \le K\| \; \|_1$, ma non $k\| \; \|_1 \le \| \; \|_2$ allora non sono equivalenti, ma comunque alcune relazioni si possono stabilire. Ad esempio se un limite vale per $\| \; \|_1$, allora esso vale anche per $\| \; \|_2$, ma non è detto il contrario. Se A è aperto per $\| \; \|_1$ lo è anche per $\| \; \|_2$ ma non è detto il contrario. Prendiamo l'esempio di prima di $C([a,b])$ con $\|f\|_1 = max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|dx$. Abbiamo visto prima che $\| \; \|_1$ non può essere maggiorata da $\| \; \|_2$. Abbiamo però che $\| \; \|_2$ può essere maggiorata da $\| \; \|_1$:

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|dx \le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = (b-a)\|f\|_1.$$

2.2 COMPLETAMENTO DI UNO SPAZIO

Dato uno spazio $(V, \| \; \|)$ possiamo formalmente costruire il suo completamento $(\widetilde{V}, \| \; \|)$ con un procedimento analogo a quello che si usa per passare da Q a $\mathbb{R}$.

Definizione 2.35 (completamento di un insieme)**.** *Innanzitutto il completamento è definito come uno spazio di Banach tale che esiste una funzione iniettiva che mappa $V \to \widetilde{V}$ in un sottospazio di $\widetilde{V}$ che conserva la struttura vettoriale e la norma.*

Possiamo quindi pensare a $\widetilde{V}$ come V con l'aggiunta di tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione 2.36 (equivalenza di successioni di Cauchy)**.** *Prendiamo l'insieme di tutte le successioni di Cauchy $\{v_i\}$ in V, e dichiariamo due successioni $\{v_i\} \sim \{w_i\}$ equivalenti se $\lim_{i\to\infty} \|v_i - w_j\| = 0$.*

Le classi di equivalenza sono lo spazio $\widetilde{V}$ cercato. Chiamiamo $[\{v_i\}]$ la classe di equivalenza di $\{v_i\}$. Vediamo che $\widetilde{V}$ è uno spazio vettoriale definendo:

$$\lambda[\{v_i\}] = [\{\lambda v_i\}] \quad \text{e}$$
$$[\{v_i\} + [\{w_i\}] = [\{v_i + w_i\}]$$

Le operazioni sono ben definite, cioè non dipendono dal rappresentante nella classe di equivalenza.
Se $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v_i'\| = 0 \implies \lim_{i\to\infty} \|\lambda v_i - \lambda v_j\| = 0$,
e se $\lim_{i\to\infty} \|w_i - w_i'\| = 0 \implies \lim_{i\to\infty} \|v_1 + w_i - (v_i' + w_i')\| = 0$.

Esiste una naturale immersione di V in $\widetilde{V}$, ad ogni $v \in V$ associamo la successione di Cauchy $\{v_i\}$ costante $v_i = v\ \forall i$. Definiamo quindi una norma in $\widetilde{V}$: $\|\{v_i\}\| = \lim_{i\to\infty} \|v_i\|$. Si vede che è ben definita, se

$$\lim_{i\to\infty} \|v_i - v_i'\| = 0 \implies \|[\{v_i\}]\| - \|[\{v_i'\}]\| = \lim_{i\to\infty}(\|v_i\| - \|v_i'\|) = 0.$$

In particolare l'immersione di V in $\widetilde{V}$ con la successione costante conserva la norma.
Ora vediamo che V è denso in $\widetilde{V}$:

Dimostrazione. Prendiamo una generica $[\{v_i\}]$, poi prendiamo una successione di successioni $[\{v_j\}]$ costanti, cioè:

$$[\{v_1, v_1, ..., v_1, ..\}],\ [\{v_2, v_2, ..., v_2, \}], \ldots.$$

Vediamo che questa successione converge a $[\{v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots\}]$.
$\|[\{v_i\}] - [\{v_j\}]\| = \lim_{i\to\infty} \|v_i - v_j\|$, ma siccome $\{v_i\}$ è di Cauchy $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tale che per $j > N$ $\lim_{i\to\infty} \|v_i - v_j\| < \varepsilon$, quindi $[\{v_j\}] \to [\{v_i\}]$. Allo stesso modo si vede che $\hat{V}$ è il completamento di V, data la successione $[\{v_j\}]$ costruiamo $[\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}]$ a cui essa converge. $\square$

$\widetilde{V}$ è uno spazio completo. Prendiamo una successione di Cauchy di successioni di Cauchy $[\{v_i^j\}]$. Visto che V è denso in $\widetilde{V}$ possiamo trovare successioni costanti arbitrariamente vicine a quelle sopra. Per ogni classe di equivalenza di successioni riusciamo ad ottenere degli elementi tutti in V, il cui limite è uguale all'elemento v_i. Prendiamo ad esempio $[\{w^j\}]$ (la successione costante $\{w^1, w^1, \ldots, w^1\}$]) tale che $\|[\{w^j\}] - [\{v_i^j\}]\| < \frac{1}{j}$. Abbiamo che

$$\|[\{w^j\}] - [\{w^k\}]\| \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \|[\{v_i^0\}] - [\{v_i^k\}]\|.$$

quindi anche $[\{w^1\}]$ è di Cauchy e converge a $[\{w^i\}] = \{w^1, w^2, w^3, \ldots\}]$ siccome

$$\|[\{v_i^j\}] - [\{w^i\}]\| \leq \frac{1}{j} + \|[\{w^0\}] - [\{w^i\}]\|.$$

abbiamo che anche $[\{v_i^j\}] \to [\{w^i\}]$ per $j \to \infty$.

Vediamo altri esempi ed esercizi sulle norme.
Prendiamo le funzioni $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ continue e derivabili con derivata continua e quindi limitata su $[-1,1]$. Prendiamo $\|f\|_1 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ e $\|f\|_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$.
Abbiamo $\|f\|_1 \leq \|f\|_2\ \forall f$, quindi $\|\ \|_1$ è maggiorata da $\|\ \|_2$ con $k = 1$.
$\|\ \|_2$ però non può essere maggiorata da $\|\ \|_1$. Ad esempio prendiamo $f_n = x^n$, $\|f_n\|_1 = 1$ e $\|f_n\|_2 = 1 + n$. Le due norme non sono equivalenti: prendiamo $g_n = |x|^{1+1/n}$, $g_n \in C^1([-1,1]) \subset C^0([-1,1])$. $g_n \to g = |x|$ per $n \to \infty$ nella norma $\|\ \|_1$, infatti

$$\|g_n - g\| = \max_{x\in[0,1]}(x(1 - x^{1/n})) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \to 0.$$

$g \notin C^1([-1,1])$ perché non derivabile in 0.

Definizione 2.37 (norma p)**.** *In $\mathbb{C}^n$ posiamo introdurre la* norma p*:*

$$\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p\right)^{1/p}$$

Per $p = 1, 2$ si riconduce ai casi già considerati $\|z\|_1 = \sum_i |z_i|$, $\|z\|_2 = \sqrt{\sum_i |z_i|^2}$. Verifichiamo che $\|\ \|_p$ è una norma per tutti i $p \geq 1$. Le proprietà 1) e 2) sono soddisfatte. Ci serve la seguente disuguaglianza, che generalizza quella di Cauchy-Schwartz:

Teorema 2.38 (disuguaglianza di Hölder)**.**

$$\sum_i |z_i^* w_i| \leq \left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_i |w_i|^q\right)^{1/q}$$

$\forall p \geq 1$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(Se $p = q = 2$ è Schwartz).

Dimostrazione. Chiamiamo $\xi_i = \frac{|z_i|^p}{\sum_j |z_j|^p}$ e $\eta_i = \frac{|w_i|^q}{\sum_j |w_j|^q}$ la disuguaglianza si riscrive come $\sum_i \eta_i^{1/q} \xi_i^{1/p} \leq 1$ dove $\sum_i \xi_i = \sum_i \eta_i = 1$.
Usiamo che per $\alpha \leq 1$ si ha $t^\alpha \leq \alpha t + 1 - \alpha$, $(\alpha t + 1 - \alpha - t^\alpha)' = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1}$ quindi il minimo di $\alpha t + 1 - \alpha - t^\alpha$ si ha per $t = 1$ ed è uguale a zero.
Chiamiamo $t = \xi_i / \eta_i$ e $\alpha = 1/p$, quindi dev'essere $1 - \alpha = 1/q$ e abbiamo

$$\left(\frac{\xi_i}{\eta_i}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{p}\frac{\xi_i}{\eta_i} + \frac{1}{q} \implies \xi_i^{1/p} \eta_i^{1/q} \leq \frac{1}{p}\xi_i + \frac{1}{q}\eta_i.$$

Sommando su i, $\sum_i \eta_i^{1/q} \xi_i^{1/p} \leq 1$ che è la disuguaglianza cercata. □

La disuguaglianza è saturata solo se $\xi_i = \eta_i \ \forall i$.
Possiamo scrivere la disuguaglianza di Hölder come

$$(z, w) \leq \|z\|_p \|w\|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

La disuguaglianza triangolare per $\| \ \|_p$ è chiamata

Teorema 2.39 (disuguaglianza di Minkowski)**.**

$$\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p.$$

Dimostrazione. partiamo da

$$\sum_i (|z_i| + |w_i|)^p = \sum_i |z_i| (|z_i| + |w_i|)^{p-1} + \sum_i |w_i| (|z_i| + |w_i|)^{p-1}$$

ora usiamo Hölder per entrambi i termini

$$\leq \left(\left(\sum_i |z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_i |w_i|^p\right)^{1/p} \right) \left(\sum_i (|z_i| + |w_i|)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$= (\|z\|_p + \|w\|_p) \left(\sum_i (|z_i| + |w_i|)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad q = \frac{1}{1 - 1/p} = \frac{p}{p-1}$$

quindi otteniamo

$$\left(\sum_i (|z_i| + |w_i|)^p\right)^{1/p} \leq \|z\|_p + \|w\|_p$$

infine

$$\|z + w\|_p = \left(\sum_i |z_i + w_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_i (|z_i| + |w_i|)\right)^{1/p} \leq |z\|_p + \|w\|_p.$$

□

Se prendiamo successioni infinite $z = \{z_1, z_2, \dots\}$ possiamo introdurre le norme $\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p\right)^{1/p}$. Occorre però scegliere uno spazio adeguato.

Definizione 2.40 (spazi ℓ^p). *Si definisce lo spazio ℓ^p l'insieme delle successioni per cui $\sum_i^\infty |z_i|^p < \infty$ e quindi definiamo $\|z\|_p$ come sopra.*

Le proprietà 1), 2), e 3) della norma valgono come per le n-ple finite. Vedremo che ℓ^p è uno spazio normato completo. Prendiamo in $\mathbb{C}^2$ $\|z\|_p = (|z_1|^p + |z_2|^p)^{1/p}$, con $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. Vediamo che le norme $\| \ \|_p$ non dipendono dalle fasi θ_1 e θ_2: $\|z\|_p = (\rho_1^p + \rho_2^p)^{1/p}$, $S_p(0,1) = \{z : \|z\|_p = 1\}$

$$(\rho_1^p + \rho_2^p)^{1/p} = 1 \implies \rho_2 = (1 - \rho_1^p)^{1/p}$$

notiamo che, per $\rho_1 < 1$, $\lim_{p\to\infty} (1 - \rho_1^p)^{1/p} = 1$.

$$\lim_{p\to\infty} S_p(0,1) = \{(\rho_1, \rho_2) : \max\{\rho_1, \rho_2\} = 1 := S_{\max}(0,1)$$

quindi $\| \ \|_p$ per $p \to \infty$ diventa $\| \ \|_\infty = max_i |z_i|$ (questo vale sia per $\mathbb{C}^n$ che per le successioni infinite).
Calcoliamo m e M che abbiamo usato per dimostrare la equivalenza delle norme. La norma di riferimento è $\| \ \|_\infty$. Chiamiamo m_p e M_p il minimo e il massimo assunto da $\| \ \|_p$ nell'insieme $\|z\|_\infty = \max\{\rho_1, \rho_2\} = 1$. Prendiamo $\rho_1 = 1$ e $0 \le \rho_2 \le 1$ (l'altro pezzo è equivalente) $\|z\|_p = (1 + \rho_2^p)^{1/p}$ quindi il minimo è realizzato in $\rho_1 = 0$ e il massimo in $\rho_2 = 1$, $m_p = 1$, $M_p = 2^{1/p}$. In $\mathbb{C}^n$ possiamo sempre ricondurci ai moduli degli $z_i = \rho_i e^{i\theta_i}$

$$\|z\|_p = \left(\sum_i \rho_i^p\right)^{1/p}, \qquad S_\infty(0,1) = \bigcup_i \{\rho_i = 1\}$$

$$m_p = \min_{p_i > 1} (1 + \sum_{i>1} \rho_i^p)^{1/p} = 1$$

$$M_p = \max_{\rho_i > 1} \left(1 + \sum_{i>1} \rho_i^p\right)^{1/p} = n^{1/p}$$

3 PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definizione 3.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\, , \,) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 3.2. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(\, , \,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{gathered}(v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ = \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0.\end{gathered}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert ($\mathcal{H}$). Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$