Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1 SPAZI VETTORIALI

Definition 1.0.1. *(vettori e spazi vettoriali)*
I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.
Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio.

2 NORMA E TOPOLOGIA

Prendiamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria, non necessariamente finita. La discussione varrà anche per spazi definiti su $\mathbb{R}$, basta trascurare *(il coniugio) quando compare. Ora equipaggiamo V con una norma.

Definition 2.0.1. *(norma e spazi normati) Una* norma $\|\| : V \mapsto \mathbb{R}$ *è una funzione che ad ogni elemento $v \in V$ associa un numero reale $\|v\|$, da intendersi come una nozione di "lunghezza" di v. Deve generalizzare il concetto di modulo in $\mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{z^*z}$. Una* norma*, per essere tale deve soddisfare le le seguenti proprietà:*

1) $\|v\| \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v = 0$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ *(disuguaglianza triangolare)*

In questo caso $(V, \|\|)$ *è uno* spazio normato.

La norma introduce anche una *metrica*, cioè una distanza fra due elementi v_1, v_2 definita da $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$.

Definition 2.0.2. *(distanza e spazi metrici) In genere uno* spazio metrico *è un insieme, non necessariamente uno spazio vettoriale, in cui per ogni coppia di di elementi è definita una* distanza $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *tale che:*

1) $d(v_1, v_2) \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v_1 = v_2$

2) $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

3) $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$

Uno spazio normato $(V, \|\|)$ è quindi anche uno spazio metrico.

$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1)$;
$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\| \leq \|v_1 - v_3\| + \|v_3 - v_2\| = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$.

Noi ci occuperemo sempre di spazi la cui metrica discende da una norma. Abbiamo già visto esempi di spazi normati in dimensione finita. Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, possiamo definire $\|z\| = \max_i |z_i|$, per cui 1) e 2) sono ovvie, 3) discende da

$$\|z + w\| = \max_i |z_i + w_i| \leq \max_i (|z_i| + |w_i|) \leq \max_i |z_i| + \max_i |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Oppure sempre su $\mathbb{C}^n$ possiamo prendere $\|z\| = \sum_{i=1}^n |z_i|$. Ancora 1) e 2) sono ovvie, mentre 3):

$$\|z + w\| = \sum_{i=1}^n |z_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Vediamo ora alcuni esempi che generalizzano i casi sopra in dimensione infinita. Prendiamo le sequenze z_i con $i \in \mathbb{N}^+$ di numeri complessi. Quindi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n \ldots,)$ limitiamoci alle sequenze limitate, cioè per cui $\sup_i |z_i| < \infty$. Questo è uno spazio vettoriale e $\|z\| = \sup_i |z_i|$ è una norma[1].

1 forse max

3 PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definition 3.0.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\, , \,) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 3.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{gathered} (v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ = \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0. \end{gathered}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert $(\mathcal{H})$. Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$