I. OPERATORI CHIUSI

È noto che gli operatori non limitati non sono continui. Per esempio, in $L^2[0,\infty]$ per l'operatore di moltiplicazione per x, $Tf = g = xf$, definito sul dominio $D_T = \{f \in L^2, xf \in L^2\}$ esistono successioni $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ tali che $\|f_n\|^2 = \frac{1}{n} \to 0$, mentre $\|xf_n\|^2 = \frac{n}{3} \to \infty$. Anche per l'operatore derivata definito su $C^1[0,1] \subset L^2[0,1]$, $Df = f'(x)$, che non è limitato (se $f_n \equiv \exp(inx)$ è $\|f_n\| = 1$, $\|Df_n\| \to \infty$) la successione $\frac{1}{n}f_n$ tende a 0, mentre $\frac{1}{n}Df_n$ non tende a $D0 = 0$: $\|\frac{1}{n}Df_n\| = 1$.

In entrambi i casi esistono successioni x_n di vettori nel dominio dell'operatore convergenti a un vettore x nel dominio (il vettore nullo, nei due casi visti), ma è $\lim Tx_n \neq Tx$, proprietà che evidenzia la non continuità, Esiste però una differenza notevole. Per T ($Tf = xf$) vale questa proprietà: se $D_T \ni f_n \to f$ e $xf_n \to g$, allora $f \in D_T$ e $g = xf$. In altre parole, sulle successioni convergenti tali che anche la successione dei trasformati converge l'operatore si comporta "come se fosse continuo". La non continuità è manifestata nel fatto che esistono successioni convergenti i cui trasformati non convergono. Verifichiamo che T la proprietà detta.

Sia $f_n \to f$, $xf_n \to g$ (in norma L^2). Dobbiamo vedere che $f \in D_T$, cioè che $xf \in L^2$, e che $g = xf$. Dato che è $xf \in L^2[0,R]$ $\forall R > 0$, usando $|a+b|^2 \leq |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$ si ha:

$$\int_0^R |xf-g|^2 dx = \int_0^R |xf - xf_n + xf_n - g|^2 dx \leq 2\int_0^R |xf - xf_n|^2 dx + 2\int_0^R |xf_n - g|^2 dx \leq$$

$$2R^2 \int_0^R |f - f_n|^2 dx + 2\int_0^\infty |xf_n - g|^2 dx \leq 2R^2 \int_0^\infty |f - f_n|^2 dx + 2\int_0^\infty |xf_n - g|^2 dx.$$

Fissato ϵ, dato che $\|f_n - f\| \to 0$ e $\|xf_n - g\| \to 0$ posso prendere n così grande che entrambi gli addendi nell'ultimo membro siano $< \epsilon$ onde il primo membro è $< 2\epsilon$. Per l'arbitrarietà di ϵ ne segue $\int_0^R |xf-g|^2 dx = 0$, cioè $xf = g$ in $[0,R]$ quasi ovunque. Dato che questo vale per ogni R, è $xf = g \in L^2$ q.o., cioè $f \in D_T$. È quindi vero che il limite delle f_n è in D_T, e che $g = \lim Tf_n = xf = T \lim f_n$.

Per l'operatore D definito su C^1 questo non accade. Vediamo un esempio. Sia $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, $\{e_n = \exp(2n\pi ix)\}$ una base di L^2, $f_N = \sum_{-N}^{N}(e_k, f)e_k \equiv \sum_{-N}^{N} a_k e_k$. I coefficienti a_k sono

$$a_k = \frac{(-1)^k - 1}{2k^2\pi^2} \text{ se } k \neq 0 \qquad a_0 = \frac{1}{4}.$$

Ora, la successione f_N converge a f, la successione Df_N è ancora convergente perché i suoi coefficienti di Fourier decrescono come $\frac{1}{k}$ (il suo limite è la "derivata a tratti" $g(x) = -1$ in $(0, \frac{1}{2})$, $g(x) = 1$ in $(\frac{1}{2}, 1)$: è generale che se $\{a_k\}$ e $\{ka_k\}$ sono in l^2 allora f è assolutamente continua e la derivata si può passare sotto la serie; oppure si può verificare che g ha i coefficienti detti). Ma $f \notin C^1$, quindi, sebbene convergano le f_N e le Df_N non è vero che $\lim f_N \in D_D$.

Gli operatori che si comportano come T, tali cioè che, se $D_T \ni x_n \to x$ e $Tx_n \to y$, allora $x \in D_T$ e $y = Tx$, si chiamano operatori chiusi. Quelli per cui questo non accade si dicono non chiusi. La spiegazione del nome è nella seguente controparte geometrica della definizione.

Sia $K \equiv H \times H$. Un suo elemento lo indico con $\{x, y\}$, $x, y \in H$. Definiamo in K una struttura vettoriale nel modo ovvio:

$$\{x,y\} + \{a,b\} = \{x+a, y+b\} \qquad \alpha\{x,y\} = \{\alpha x, \alpha y\}.$$

Introduciamo in K il prodotto scalare

$$(\{x,y\}, \{a,b\}) \equiv (x,a) + (y,b).$$

Allora

$$\|\{x,y\}\|^2 \equiv (\{x,y\},\{x,y\}) = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

è definita positiva e ha le proprietà di una norma, rispetto alla quale K risulta completo. Infatti, se $\{\{x_n, y_n\}\}$ è di Cauchy, dato ϵ, per $n, p > N_\epsilon$ è

$$\epsilon > \|\{x_n, y_n\} - \{x_p, y_p\}\|^2 = \|x_n - x_p\|^2 + \|y_n - y_p\|^2,$$

da cui si vede che anche $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono di Cauchy. Se x e y sono i rispettivi limiti, è immediato verificare che $\{x, y\}$ è il limite di $\{\{x_n, y_n\}\}$. Quindi K è completo ed è uno spazio di Hilbert. In generale

$$\{a_n.b_n\} \to \{a, b\} \Leftrightarrow a_n \to a, \quad b_n \to b.$$

Il grafico di un operatore T, G_T, è definito in modo naturale come segue:

$$G_T = \{\{a, b\}; a \in D_T, b = Ta\}.$$

G_T è un sottospazio vettoriale di K, perché D_T è un sottospazio vettoriale di H. G_T può essere chiuso relativamente alla norma di K (nel qual caso è un sottospazio di Hilbert) oppure no. Verifichiamo che G_T è chiuso se e solo se T è chiuso (e questo giustifica il nome).

G_T chiuso $\Rightarrow$ T chiuso. Sia $\{x_n\} \subset D_T$ una successione tale che $x_n \to x$ e $Tx_n \to y$. Allora in K la successione di elementi di G_T $\{x_n, Tx_n\}$ converge a $\{x, y\}$, che è in G_T perché G_T è chiuso. Questo significa che $x \in D_T$ e $y = Tx$, cioè T è chiuso.

T chiuso $\Rightarrow$ G_T chiuso. Sia $\{x_n, Tx_n\}$ una successione di Cauchy in G_T. Allora in K, che è chiuso, esiste un elemento $\{x, y\}$ tale che $\{x_n, Tx_n\} \to \{x, y\}$. Questo equivale a dire che $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Dato che T è chiuso, $x \in D_T$ e $y = Tx$. Allora $\{x, y\} \in G_T$ e quindi G_T è chiuso.

Un operatore limitato, essendo continuo, è evidentemente chiuso, perché se $x_n \to x$ certamente Tx_n converge a un certo y, e per la continuità è $y = Tx$. Un operatore chiuso può non essere limitato (esempio $Tf = xf$ in L^2 su un intervallo non limitato), ma se un operatore chiuso è definito su tutto H si può dimostrare che è limitato (teorema del grafico chiuso).

II. AGGIUNTO DI UN OPERATORE

Una famiglia importante di operatori chiusi è data dagli aggiunti di operatori T non limitati. L'aggiunto $T^\dagger$ di un operatore T non limitato (ma definito su un D_T denso, vedremo perché) è definito come segue. Il suo dominio $D_{T^\dagger}$ è costituito dai vettori x per i quali esiste un vettore x^* con la proprietà che

$$(x, Ty) = (x^*, y) \quad \forall y \in D_T.$$

Il vettore x^* è unico, perché se supponiamo che per due vettori x_1^* e x_2^* valga la proprietà detta, per la differenza sarebbe $(x_1^* - x_2^*, y) = 0$ $\forall y \in D_T$ denso, e quindi $x_1^* - x_2^* = 0$ (onde la richiesta che D_T sia denso). $T^\dagger$ è quindi ben definito, e per la linearità del prodotto scalare $D_{T^\dagger}$ è un sottospazio vettoriale e $T^\dagger$ è un operatore lineare. Non è mai $D_{T^\dagger} = \emptyset$, perché $x = 0$ è sempre in $D_{T^\dagger}$, con $x^* = 0$.

Verifichiamo che $T^\dagger$ è chiuso. Se $D_{T^\dagger} \ni x_n \to x$ e $x_n^* \to z$, per ogni n è

$$(x_n, Ty) = (x_n^*, y) \quad \forall y \in D_T.$$

Facendo il limite per $n \to \infty$, per la continuità del prodotto scalare si trova

$$(x, Ty) = (z, y) \quad \forall y \in D_T.$$

Questa relazione dice che $x \in D_{T^\dagger}$ e che è $z = x^* \equiv T^\dagger x$. Quindi $T^\dagger$ è chiuso. Come per gli operatori limitati, $T^\dagger$ soddisfa con T la relazione

$$(x, Ty) = (T^\dagger x, y) \quad \forall y \in D_T,$$

con la differenza che per operatori limitati $D_T = H$, $D_{T^\dagger} = H$, mentre per operatori non limitati D_T è solamente denso, e $D_{T^\dagger}$ può ridursi al solo vettore nullo (vedremo un esempio).

Nel caso dell'operatore T visto all'inizio, $Tf = xf$, esso ha dominio denso (le funzioni a supporto compatto sono in D_T). Cerchiamo $T^\dagger$ e vediamo che è $T^\dagger = T$ (onde T è necessariamente chiuso, come del resto si è già visto). Dapprima vediamo che se $g \in D_{T^\dagger}$ allora è $g \in D_T$ e $T^\dagger g = Tg$ (e questa situazione, $D_{T^\dagger} \subset D_T$ e $T^\dagger g = Tg$ per $g \in D_{T^\dagger}$, si indica con la notazione $T^\dagger \subset T$) e poi vediamo che vale anche la relazione inversa $T \subset T^\dagger$. Quindi T e $T^\dagger$ risulteranno avere lo stesso dominio su cui agiscono nello stesso modo, per cui è $T = T^\dagger$. In generale, se per due operatori A e B è $D_A \subset D_B$ e su D_A è $Bx = Ax$ si dice che B è un'estensione di A, e si indica questo fatto con la notazione $A \subset B$.

$T^\dagger \subset T$. Se $g \in D_{T^\dagger}$ esiste g^* tale che $\forall f \in D_T$ è $(g^*, f) = (g, xf)$, ossia $\int_0^\infty [\overline{g^*} - x\overline{g}] f dx = 0$. Non sappiamo ancora che $xg \in L^2[0, \infty)$, ma certamente $xg \in L^2[0, R]$, perché è $|xg| < R|g|$. Se consideriamo le f con supporto in $[0, R]$, si vede che $g^* - xg$ è ortogonale a tali funzioni, e quindi in $[0, R]$ è $g^* = xg$ q.o.. Essendo R qualunque, è $L^2 \ni g^* = xg$, da cui $g \in D_T$ e $g^* \equiv T^\dagger g = xg = Tg$, ossia $D_{T^\dagger} \subset D_T$ e $T^\dagger g = Tg$.

$T \subset T^\dagger$. Se $g \in D_T$ è $xg \in L^2$, e evidentemente $(xg, f) = (g, xf)$ $\forall f \in D_T$, da cui $D_T \subset D_{T^\dagger}$ e $T^\dagger g = xg = Tg$.

III. CHIUSURA DI UN OPERATORE

Nel caso dell'operatore derivata definito su C^1, che risulta non chiuso perché esiste una successione convergente f_n, con Df_n anch'essa convergente, ma con $\lim f_n \notin D_D$, si potrebbe pensare di estendere il dominio di D aggiungendovi proprio quelle funzioni f che sono limiti di $f_n \in D_D$ tali che $Df_n \to g$ definendo $Df = g$. È quanto si fa quando si ha un operatore limitato definito su un sottospazio denso. In termini di grafico, l'estensione di un operatore T secondo il criterio detto (aggiungere al dominio gli $x = \lim x_n \in D_T$ tali che Tx_n convergono), se è possibile, corrisponde a definire un operatore il cui grafico è $\overline{G_T}$, che si chiama "chiusura di T" e si indica con $\overline{T}$. Quando è possibile, questa costruzione produce l'operatore $\overline{T}$ il cui grafico $G_{\overline{T}}$ è $\overline{G_T}$. Notiamo che in ogni caso, anche se non è il grafico di un operatore, $\overline{G_T}$ è un sottospazio vettoriale di K: se $\{a, b\}$ e $\{c, d\}$ sono in $\overline{G_T}$ esistono $x_n \to a$, $z_n \to c$ tali che $Tx_n \to b$ e $Tz_n \to d$, per cui $x_n + z_n \to a + c$ e $T(x_n + z_n) \to b + d$, onde $\{a + c, b + d\} \in \overline{G_T}$. Discorso simile per $\lambda\{a, b\}$.

Il problema con un operatore T non limitato è che possono esistere due diverse successioni di vettori $\{x_n\}$ e $\{x'_n\}$ in D_T convergenti allo stesso x e tali che Tx_n e Tx'_n convergono a due limiti distinti. Per esempio, l'operatore definito in $L^2(-\pi, \pi) \cap C^0$ da $Tf = g(x) \equiv f(0)$ non è limitato (se $f_n(x) = \cos nx\chi_{[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}]}$ è $f_n \to 0$, $Tf_n = 1$) e ha questa proprietà. Infatti, se $f_n(x) = 0$ per $x \leq 0$, $f_n(x) = nx$ per $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 1$ per $x \geq \frac{1}{n}$, allora $f_n \to f(x) = 0$ per $x \leq 0$, $f(x) = 1$ per $x > 0$, e $Tf_n = 0\,\forall n$. D'altra parte, se $g_n(x) = 0$ per $x \leq -\frac{1}{n}$, $g_n(x) = 1 + nx$ per $-\frac{1}{n} \leq x \leq 0$, $g_n(x) = 1$ per $x \geq 0$. g_n ha lo stesso limite delle f_n (i limiti differiscono solo in $x = 0$) e $Tg_n = 1$. Abbiamo cioè in D_T due successioni convergenti allo stesso elemento di L^2, i cui trasformati hanno limiti diversi.

In termini di grafico, i due vettori di K $\{f(x), 0\}$ e $\{f(x), 1\}$ appartengono entrambi alla chiusura $\overline{G_T}$ di G_T, essendo i limiti rispettivamente di $\{f_n, Tf_n\}$ e di $\{g_n, Tg_n\}$. Quindi anche $\{0, 1\} = \lim\{g_n - f_n, T(g_n - f_n)\}$ è in $\overline{G_T}$. Ora, il fatto che un vettore di K $\{0, a\}$ con $a \neq 0$ sia in $\overline{G_T}$ ci dice che $\overline{G_T}$ non può essere il grafico di un operatore lineare, che necessariamente trasforma il vettore nullo nel vettore nullo. Quindi condizione necessaria perché sia possibile l'estensione di T col procedimento detto è che $\{0, a \neq 0\} \notin \overline{G_T}$. La condizione d'altra parte è sufficiente a permettere la costruzione di $\overline{T}$. Infatti, se in $\overline{G_T}$ comparissero due elementi $\{x, y\}$ e $\{x, y'\}$ per linearità sarebbe in $\overline{G_T}$ anche la differenza $\{0, y - y'\}$. In conclusione, l'operatore $\overline{T}$ esiste se e solo se in $\overline{G_T}$ non compaiono elementi $\{0, a\}$ con $a \neq 0$. Questo equivale a dire che se una successione $\{x_n\}$ in D_T tende a 0 e la successione dei trasformati Tx_n tende a y allora è $y = 0$.

Verifichiamo che l'operatore D definito in $C^1[0, 1]$ da $Df = f'$ soddisfa la condizione detta. Sia $f_n \in D_D$, $f_n \to 0$, $f'_n \to g$. Per vedere che è $g = 0$ basta vedere che è $(\varphi, g) = 0\ \forall\varphi \in C_0^\infty$, che è denso in L^2. Si ha

$$(\varphi, Df_n) = (\varphi, f'_n) = \int_0^1 \overline{\varphi(x)} f'_n(x)dx = \overline{\varphi(x)} f_n(x)|_0^1 - \int_0^1 \overline{\varphi'(x)} f_n(x)dx = -(\varphi', f_n),$$

avendo eliminato il termine di bordo perché $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Facendo il limite per $n \to \infty$, dato che $f'_n \to g$ mentre $f_n \to 0$, si trova $(\varphi, g) = 0$, da cui $g(x) = 0$ perché è ortogonale al denso C_0^∞. Quindi l'operatore T ammette chiusura $\overline{T}$, il cui dominio è implicitamente definito proprio dalla condizione: $f = \lim f_n \in D_T$ con Tf_n convergente a una certa $g(x)$, e $\overline{T}f \equiv g(x)$.

Tale dominio è costituito dalle $f(x)$ assolutamente continue (AC) le cui derivate sono in L^2. Ricordiamo che le funzioni assolutamente continue sono quelle funzioni tali che $f(x) = f(0) + \int_0^x h(t)dt$ con $h \in L^1$. Si dimostra che allora f risulta derivabile quasi ovunque con $f'(x) = h(x)$ quasi ovunque, onde nell'integrale si può sostituire h con f'. Verifichiamo che l'operatore $\overline{T}$ è proprio l'operatore di derivazione, esteso da C^1 alle funzioni assolutamente continue con $f' \in L^2$ (che è incluso in L^1): $\overline{T}f = f'$.

Sia $f = \lim f_n$ con $f_n \in C^1$, $g = \lim f'_n$. Per le f_n è

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f'_n(t)dt.$$

Il fatto che sia $f'_n \to g$ implica $\int_0^x f'_n(t)dt \to \int_0^x g(t)dt$ uniformemente, e quindi in L^2:

$$|\int_0^x f'_n(t)dt - \int_0^x g(t)dt| \leq \int_0^x |f'_n - g|dx \leq \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x |f'_n - g|^2 dt} \leq \|f'_n - g\|.$$

Inoltre, dato che $f_n \to f$ in L^2, anche la successione delle funzioni costanti $f_n(0)$ ha limite. Tale limite è evidentemente una funzione costante (le $f_n(0)$ sono ortogonali alle $\exp(2n\pi ix)$ con $n \neq 0$, e per la continuità del prodotto scalare lo è anche il limite), per cui facendo il limite si trova

$$f(x) = a + \int_0^x g(t)dt,$$

dove si legge che f è assolutamente continua ($L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$), è $a = f(0)$ e $g = f'$.

Quanto visto mostra che il dominio di $\overline{D}$ è incluso nell'insieme delle f AC con $f' \in L^2$. Vediamo che viceversa una funzione f di tale insieme è $f(x) = \lim f_n$ con $f_n \in C^1$ e f'_n convergente in L^2 a f'. Per vederlo usiamo il fatto che se $h(x)$ è il limite in L^2 di una successione $\{h_N\}$, allora su un compatto $\int_0^x h_N(t)dt \to \int_0^x h(t)dt$ uniformemente, e quindi in L^2. In particolare per $x \in [0,1]$ è

$$|\int_0^x h(t)dt - \int_0^x h_N(t)dt| \leq \int_0^x |h(t) - h_N(t)|dt \leq \sqrt{x}[\int_0^x |h(t) - h_N(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}} < \|h - h_N\|.$$

Allora, se è $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$ e $L^2 \ni f'(t) = \lim \sum^N a_k \cos k\pi t \equiv \lim g_N(t)$, è

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \lim g_N(t)dt = \lim[f(0) + \int_0^x g_N(t)dt] \equiv \lim f_N(x)$$

nel senso di L^2. Ora, le f_N sono evidentemente in C^1 , e le $f'_N = g_N$ convergono a f'. Quindi $\{f, f'\} \in \overline{G_T}$, ossia $f \in D_{\overline{T}}$ e $\overline{T}f = f'$.

IV. ANCORA SULLA DERIVATA

Si poteva essere tentati di definire l'operatore D di derivata sul dominio seguente:

$$D_D = \{f(x) : f(x) \text{ è derivabile q.o.}, f'(x) \in L^2\}.$$

Un tale operatore non è chiuso. Si vede notando che sono nel dominio le funzioni a gradino (cioè costanti su sottointervalli), che sono dense in L^2. Infatti in L^2 sono dense le funzioni continue, che su $[0,1]$ sono anche uniformemente continue, onde possono essere approssimate uniformemente, e quindi in L^2, da funzioni a gradino. Per vederlo, presa f continua e dato ϵ, sia $\delta(\epsilon)$ buono per la uniforme continuità. Se si suddivide $[0,1]$ in N sottointervalli di lunghezza minore di δ e in ogni sottointevallo si definisce $s_n(x) = f(a_n)$, essendo a_n l'estremo sinistro del sottointervallo, risulta $|f(x) - s_n(x)| < \epsilon$, da cui segue $\|f - s_n\| < \epsilon$.

Quindi le funzioni a gradino approssimano bene quanto si vuole le funzioni continue, e quindi tutte le f di L^2. In particolare, data $f(x) = x$, esiste una successione $s_n(x)$ di funzioni a gradino che converge in norma a $f(x)$. Per tali s_n è $Ds_n = s'_n(x) = 0$ q.o., e quindi si ha: $s_n \to f$, $s'_n = 0$, $f \in D_D$, ma $\lim s'_n \neq Df = 1$. Quindi sul dominio detto D non è chiuso, per una ragione in un certo senso opposta a quella per cui non era chiuso se il dominio era C^1. In quel caso, il dominio era troppo piccolo, ora è troppo grande.

L'operatore definito sopra è un esempio di operatore il cui aggiunto ha come dominio il solo vettore nullo. Infatti, supponiamo che sia $f(x) \in D_{D^\dagger}$, cioè esiste f^* tale che $\forall g \in D_D$ sia $(f, Dg) = (f, g') = (f^*, g)$. Considerando come g le funzioni a scalino ($g'(x) = 0$ q.o.) si trova $(f^*, g) = (f, g') = 0$, e siccome le funzioni a scalino sono dense si conclude $f^* = 0$, cioè sul suo dominio $D^\dagger$ fa 0. D'altra parte, se è $g(x) = \cos n\pi x$, essendo $f^* = 0$ si trova $(f, \sin n\pi x) = 0$, e quindi, essendo ortogonale alla base dei seni, è $f(x) = 0$: il dominio di $D^\dagger$ contiene solo il vettore nullo.

Ora cerchiamo l'aggiunto dell'operatore D (derivata definita su $\mathcal{C}^1$) e della sua chiusura $\overline{D}$, definita sulle $f(x)$ AC con $f' \in L^2$. Risulta $D^\dagger = \overline{D}^\dagger$ per le seguenti ragioni. Essendo $D \subset \overline{D}$ sarà $D^\dagger \supset \overline{D}^\dagger$: in generale $A \subset B \Rightarrow A^\dagger \supset B^\dagger$, perché se $x \in D_{B^\dagger}$ è $(x, By) = (B^\dagger x, y)$ $\forall y \in D_B$, quindi in particolare per $y \in D_A$, onde $x \in D_{B^\dagger} \Rightarrow x \in D_{A^\dagger}$ e $A^\dagger x = B^\dagger x$, cioè $B^\dagger \subset A^\dagger$. Ma per un operatore T e la sua chiusura $\overline{T}$ definita sul dominio degli $z = \lim z_n \in D_T$ tali che $Tz_n \to y$ è anche $T^\dagger \subset \overline{T}^\dagger$: per $x \in D_{T^\dagger}$ e $z \in D_{\overline{T}}$ infatti si ha

$$(x, \overline{T}z) = (x, \lim Tz_n) = \lim(x, Tz_n) = \lim(T^\dagger x, z_n) = (T^\dagger x, z)$$

cioè $x \in D_{T^\dagger} \Rightarrow x \in D_{\overline{T}^\dagger}$ e $\overline{T}^\dagger x = T^\dagger x$, ossia $T^\dagger \subset \overline{T}^\dagger$.

Fissiamo le idee su $\overline{D}$, e per semplicità chiamiamolo T. Se $f \in D_{T^\dagger}$ e $f^* = T^\dagger f$ deve essere $(f, Tg) \equiv (f, g') = (f^*, g)$. Definendo $F^*(x) = \int_0^x f^*(t)dt$ si trova

$$(f, g') = (f^*, g) = \int_0^1 \overline{f^*(x)}g(x)dx = \overline{F^*(x)}g(x)|_0^1 - \int_0^1 \overline{F^*(x)}g'(x)dx = (f^*, u) - \int_0^1 \overline{F^*(x)}g'(x)dx$$

con $u(x) = 1$, $u \in D_T$. Ma essendo $f^* = T^\dagger f$ è $(f^*, u) = (T^\dagger f, u) = (f, Tu) = 0$. Quindi il termine di bordo scompare e si ottiene

$$0 = \int_0^1 [\overline{f(x)} + \overline{F^*(x)}]g'(x)dx \Rightarrow f(x) + \int_0^x f^*(t)\, dt = 0$$

perché le g' con $g \in D_T$ sono un insieme denso (per esempio le x^n sono di questo tipo). Quindi ogni $f \in D_{T^\dagger}$ è AC e $L^2 \ni f^* = T^\dagger f = -f'$, $f(0) = 0$ e $f(1) = -(f^*, u) = 0$. Queste condizioni su f sono necessarie perché sia $f \in D_{T^\dagger}$, ma esse risultano anche sufficienti perché l'uguaglianza $(f, g') = (-f', g)$ sia soddisfatta $\forall g \in D_T$:

$$(f, g') + (f', g) = \int_0^1 [\overline{f(x)}g'(x) + \overline{f(x)}g'(x)]dx = \int_0^1 \frac{d}{dx}[\overline{f(x)}g(x)]dx = \overline{f(1)}g(1) - \overline{f(0)}g(0) = 0.$$

In conclusione è $D_{T^\dagger} = \{f(x),\ f \text{ è AC}, f(1) = f(0) = 0,\ f' \in L^2\}$ e $T^\dagger f = -f'$.

L'operatore $T^\dagger$ ha quindi un dominio incluso in D_T e sulle f di tale dominio è $T^\dagger f = -f' = -Tf$. $T^\dagger$ è necessariamente chiuso, essendo l'aggiunto di un operatore, ma si può verificarne la chiusura anche direttamente. Infatti, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni AC, con $f_n' \in L^2$ e tali che $f_n(1) = f_n(0) = 0$ (cioè in $D_{T^\dagger}$), tali che $f_n \to f$ e $T^\dagger f_n = -f_n' \to g$. Da $f_n(x) = \int_0^x f_n'(t)\,dt$ mandando n a ∞ si ricava $f(x) = -\int_0^x g(t)\,dt$. Ne segue che f è AC con $f' = -g$, che è $f(0) = 0$ e

$$f(1) = -\int_0^1 g(t)\,dt = (1, \lim f_n') = \lim(1, f_n') = \lim 0 = 0$$

avendo usato il fatto che $\int_0^1 f_n'(t)dt = f_n(1) - f_n(0) = 0$. Quindi f è AC e vale 0 agli estremi, $f' = -g \in L^2$, cioè f è in $D_{T^\dagger}$, e il limite dei trasformati $(-g)$ è il trasformato del limite delle f_n, cioè di f. Quindi ritroviamo che l'operatore è chiuso.

Come abbiamo già discusso, se restringiamo D_T, il dominio del corrispondente operatore aggiunto sarà più grande (o uguale) del dominio attualeChiediamoci se sia possibile restringere il dominio D_T (che deve comunque rimanere denso in H perché esista $T^\dagger$) in modo tale che sia $D_{T^\dagger} = D_T$. Vediamo che anche sul risultante dominio esteso di $T^\dagger$ è $T^\dagger g = -g'$. Non si può ripetere il discorso di prima, perché, avendo ristretto D_T, il vettore u potrebbe non appartenere piú a D_T (e infatti come vedremo in generale $u \notin D_T$). Però in $D_{T^\dagger}$ ci sono certamente i $\sin n\pi x$, perché sono nel dominio del $T^\dagger$ originario. Allora da

$$(f^*, g) = (f, g') = \int_0^1 \overline{f(x)}g'(x)dx = \int_0^1 \overline{f^*(x)}g(x)dx = \overline{F^*(x)}g(x)|_0^1 - \int_0^1 \overline{F^*(x)}g'(x)dx$$

ponendo $g(x) = \sin n\pi x$ si vede che il termine di bordo scompare, e si ottiene $(f + F^*, \cos n\pi x) = 0$ per $n \geq 1$, onde $f(x) + \int_0^x f^*(t)dt = \text{costante} = f(0)$, e $f^*(x) = -f'(x)$.

Una conseguenza di $T^\dagger f = -f'$ e dell'uguaglianza dei domini (ancora da determinare) di $T^\dagger$ e T è la seguente. Se $g \in D_T$ è

$$(g, Tg) = (g, g') = (T^\dagger g, g) = -(g', g),$$

cioè $\int_0^1 \frac{d}{dx}|g(x)|^2\,dx = 0$, da cui $|g(1)|^2 = |g(0)|^2$, ossia $g(1) = e^{i\alpha_g}g(0)$. Prendendo g e h in D_T, e quindi h tale che $h(1) = e^{i\alpha_h}h(0)$, da $(h, Tg) = (T^\dagger h, g)$ segue $(h, g') + (h', g) = 0$, e quindi $\overline{h(1)}g(1) - \overline{h(0)}g(0) = 0$, cioè $[e^{i(\alpha_g - \alpha_h)} - 1]\overline{h(0)}g(0) = 0$. Questo significa che α_g di fatto è indipendente da g, e quindi le funzioni di un D_T cosí ristretto sono tali che $g(1) = e^{i\alpha}g(0)$. Notiamo che $u(x) = 1$ non soddisfa questa condizione se non è $\alpha = 0$.

Chiamiamo T_α l'operatore derivata definito sulle g AC con $g' \in L^2$ che soddisfano la condizione al contorno detta, con α fissato. Verifichiamo che, se è

$$D_{T_\alpha} = \{f : f\ AC, \quad f \in L^2, \quad f(1) = e^{i\alpha}f(0)\}$$

allora $T_\alpha^\dagger = -T_\alpha$.

Se $f \in D_{T_\alpha}$, per ogni $g \in D_{T_\alpha}$ è

$$(f, T_\alpha g) = (f, g') = \overline{f}g|_0^1 - (f', g) = -(f', g) \equiv (T_\alpha^\dagger f, g)$$

da cui si vede che è $-T_\alpha \subset T_\alpha^\dagger$. Ma è anche $T_\alpha^\dagger \subset -T^\alpha$. Dato che sappiamo già che f è AC e $T_\alpha^\dagger f = -f'$, basta vedere che se $f \in D_{T_\alpha^\dagger}$ allora è $f(1) = e^{i\alpha}f(0)$. In effetti, se $f \in D_{T_\alpha^\dagger}$ e $g \in D_{T_\alpha}$ si ha

$$(f, T_\alpha g) = (f, g') = (T_\alpha^\dagger f, g) = -(f', g) \Rightarrow \overline{f(1)}g(1) = \overline{f(0)}g(0) \Rightarrow [\overline{f(1)}e^{i\alpha} - f(0)]g(0) = 0,$$

da cui $f(1) = e^{i\alpha}f(0)$. È quindi vero che le funzioni in $D_{T_\alpha^\dagger}$ sono anche in D_{T_α}, e quindi è $T_\alpha^\dagger = -T_\alpha$. Se $Z_\alpha \equiv -iT_\alpha$, Z_α risulta autoaggiunto.

Si poteva procedere diversamente, partendo con un operatore derivata definito sul dominio

$$D_T = \{f(x) : f\ AC, \quad f' \in L^2, \quad f(0) = f(1) = 0\}.$$

Il dominio è denso perché contiene i $\sin n\pi x$, T è tale che $(f, Tg) + (Tf, g) = \int_0^1 \frac{d}{dx}[\overline{f(x)}g(x)]dx = 0\ \forall f, g \in D_T$; quindi $D_{T^\dagger} \supseteq D_T$, e su D_T $T^\dagger f = -f' = -Tf$. Vediamo che $D_{T^\dagger}$ è costituito dalle f AC con $f' \in L^2$.

Se $g(x) = \sin n\pi x$ come già visto si ha

$$(f, g') = (f^*, g) \Rightarrow f(x) = a - \int_0^x f^*(t)dt \Rightarrow f^*(x) = -f'.$$

Questa condizione è anche sufficiente a garantire $(f, g') = -(f', g)$ perchè il termine di bordo scompare grazie alla condizione $g(1) = g(0) = 0$, quindi

$$D_{T^\dagger} = \{f\ AC, f' \in L^2\}.$$

Ora si può allargare il dominio di T, con conseguente restrizione di $D_{T^\dagger}$ e ritrovare la condizione perché sia $D_T = D_{T^\dagger}$. Finché è $D_T \subseteq D_{T^\dagger}$ la richiesta $(g, g') = -(g', g) \Rightarrow g(1) = e^{i\alpha_g}g(0)$, e da $(h, g') = -(h', g)$ per ogni h, $g \in D_T$ si vede che α è la stessa per tutte le funzioni di D_T. Cercando l'aggiunto di T definito sul dominio delle f AC con $f(1) = e^{i\alpha}f(0)$ e $f' \in L^2$ si ritrova che $T^\dagger$ ha lo stesso dominio, e inoltre, come già notato, $T^\dagger f = -f' = -Tf$.

In $L^2(-\infty, \infty)$, se definiamo la derivata su $D_T = \{f\ AC,\ f' \in L^2\}$, tale operatore risulta antiautoaggiunto, cioè $T^\dagger = -T$, e se $Z = \pm iT$ è $Z^\dagger = Z$. Infatti, essendo $f(x)f'(x) \in L^1$ in quanto prodotto di funzioni L^2, deve esistere il limite per $a \to \pm\infty$ di $\int_0^a f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}[f^2(a) - f^2(0)]$, e quindi di $f(a)$. Ma se una $f \in L^2$ ha limite per $x \to \pm\infty$, tale limite è 0. Questo garantisce che se $f \in D_T$ allora $f \in D_{T^\dagger}$ e $T^\dagger f = -f'$. Infatti $\forall f$, $g \in D_T$ è

$$(f, Tg) = \int \overline{f(x)}g'(x)dx = \overline{f(x)}g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int \overline{f'(x)}g(x)dx = (-f', g) \equiv (T^\dagger f, g).$$

Vediamo ora che è $D_{T^\dagger} \subset D_T$. Fissato R, le funzioni $\{\sin n\pi\frac{x}{R}, \cos(n + \frac{1}{2})\pi\frac{x}{R}\}$, che sono un insieme completo in $L^2[-R, R]$, se prolungate a 0 oltre $|x| \leq R$ sono in D_T, e anche l'insieme delle loro derivate, più la costante, è un insieme completo in $L^2[-R, R]$ (sono le soluzioni di $X'' = -\lambda X$ con condizioni al contorno $X(\pm R) = 0$ o $X'(\pm R) = 0$ rispettivamente). Se $\{g_n\}$ è il primo dei due insiemi completi e $f \in D_{T^\dagger}$, si trova

$$(f, g_n') = (f^*, g_n) = \overline{F^*}g_n|_{-R}^{R} - (F^*, g_n') = -(F^*, g_n')$$

perchè il termine di bordo scompare. Si trova $(f + F^*, g_n') = 0$, da cui $f + F^* =$ costante in $[-R, R]$, e siccome R è qualunque, $f(x) + F^*(x) = f(0)$, da cui f è AC , $f' = -f^* \in L^2$, cioè $D_{T^\dagger} \subset D_T$. In conclusione è $D_{T^\dagger} = D_T$ e $T^\dagger = -T$: T è antiautoaggiunto, $-iT$ è autoaggiunto.