Metodi Matematici I

Appunti di Metodi Matematici I

Marco Romagnoli (578061)
m.romagnoli3@studenti.unipi.it

30/12/2019

INDICE

1 **Spazi Vettoriali** 5

2 **Norma e Topologia** 7

3 **Prodotto scalare e Spazi di Hilbert** 9

1 SPAZI VETTORIALI

Definizione 1.0.1. *(vettori e spazi vettoriali) I vettori sono, essenzialmente, oggetti che si possono "sommare e moltiplicare per scalari". Formalmente uno spazio vettoriale V è un insieme dotato di una somma "$+$", sotto cui è un gruppo abeliano, e di una moltiplicazione con elementi di un campo C compatibile con la somma di cui sopra.*

Quindi dati $x, y \in V$ e $\lambda, \mu \in C$ vale che:

1. $x + y = y + x \in V$
2. $\lambda x \in V$
3. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
4. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
5. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

Inoltre, dati $0, 1 \in C$ allora $0 \cdot x = 0$ e $1 \cdot x = x$.

Per noi il campo C sarà sempre uno tra il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ e quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono le n-ple di numeri. $\mathbb{R}^n$ definito da tutti gli elementi del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, dove:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$;
- $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Analogamente si può definire $\mathbb{C}^n$.

Spesso (ma non sempre!) le "soluzioni di un problema" matematico o fisico formano uno spazio vettoriale. Ad esempio le soluzioni di un'equazione differenziale lineare come

$$\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) + \gamma(x)u(x) = 0 \tag{1}$$

in cui, se $u_1(x)$ e u_2 sono soluzioni, anche $\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)$ lo è, per ogni scelta di $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). In questo caso si dice che il problema è lineare e soddisfa il "principio di sovrapposizione". Capita spesso che un problema generico (quindi non lineare) diventi lineare nell'approssimazione di piccole fluttuazioni attorno ad un punto di equilibrio. Oppure ci sono casi in cui il principio di sovrapposizione vale in generale come in Elettromagnetismo o in Meccanica Quantistica.

Definizione 1.0.2. *(lineare indipendenza) Dati n elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una generica combinazione lineare è $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$. Se $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0$ implica $\lambda_i = 0 \forall i$ allora i vettori x_i sono detti linearmente indipendenti.*

Definizione 1.0.3. *(dimensione di uno spazio) La dimensione di uno spazio $\dim V$ è definita dal numero massimo di vettori linearmente indipendenti che si trovano in esso. Se $\dim V = n$ con $n \in \mathbb{N}$ allora lo spazio ha dimensione finita n. Se $\forall n \in \mathbb{N}$ si possono trovare n vettori linearmente indipendenti, allora si dice che lo spazio ha dimensione infinita.*

Per ora ci limitiamo a ripassare alcune nozioni fondamentali sugli spazi a dimensione finita $\dim V = n$.

Definizione 1.0.4. *(base di uno spazio) Una base $y_1, y_2, \dots, y_m$ di V è un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera V, cioè che ogni $x \in V$ può essere scritto come $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m$.*

Teorema 1.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale a dimensione finita con $\dim V = n$. Sia $y_1, y_2, \dots, y_m$ una base di V, allora $m = n$.*

Dimostrazione. È ovvio che $m \leq n$ per definizione. Prendiamo $x_1, x_2, \dots, x_n$ un insieme di vettori linearmente indipendenti. Dato che

$$x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1 + \lambda_2^{(1)} y_2 + \cdots + \lambda_m^{(1)} y_m$$

ci sarà almeno un i per cui $\lambda_i^{(1)} \neq 0$, per cui (senza perdita di generalità)

$$y_1 = \frac{x_1}{\lambda_1^{(1)}} - \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_2 - \cdots - \frac{\lambda_m^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} y_m.$$

Quindi $x_1, y_2, \dots, y_m$ sono una nuova base per V. A questo punto si può iterare questo procedimento fino a creare una nuova base di m vettori scelti fra gli $\{x_i\}$.Ma allora deve essere per forza $m = n$. □

Se prendiamo $\mathbb{R}^n$ una base è $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 nella i-esima posizione. Infatti sono linearmente indipendenti e $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \cdots e_n x_n$$

Quindi generano $\mathbb{R}^n$. Quindi $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2

NORMA E TOPOLOGIA

Prendiamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria, non necessariamente finita. La discussione varrà anche per spazi definiti su $\mathbb{R}$, basta trascurare *(il coniugio) quando compare. Ora equipaggiamo V con una norma.

Definizione 2.0.1. *(norma e spazi normati) Una* norma $\|\| : V \mapsto \mathbb{R}$ *è una funzione che ad ogni elemento $v \in V$ associa un numero reale $\|v\|$, da intendersi come una nozione di "lunghezza" di v. Deve generalizzare il concetto di modulo in $\mathbb{C}$ $|z| = \sqrt{z^* z}$. Una* norma*, per essere tale deve soddisfare le le seguenti proprietà:*

1) $\|v\| \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v = 0$

2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ *(disuguaglianza triangolare)*

In questo caso $(V, \| \cdot \|)$ *è uno* spazio normato.

La norma introduce anche una *metrica*, cioè una distanza fra due elementi v_1, v_2 definita da $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$.

Definizione 2.0.2. *(distanza e spazi metrici) In genere uno* spazio metrico *è un insieme, non necessariamente uno spazio vettoriale, in cui per ogni coppia di di elementi è definita una* distanza $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ *tale che:*

1) $d(v_1, v_2) \geq 0$ *e = si verifica* $\iff v_1 = v_2$

2) $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1)$

3) $d(v_1, v_2) \leq d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$

Uno spazio normato $(V, \| \cdot \|)$ è quindi anche uno spazio metrico.

$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1)$;
$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = \|v_1 - v_3 + v_3 - v_2\| \leq \|v_1 - v_3\| + \|v_3 - v_2\| = d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2)$.

Noi ci occuperemo sempre di spazi la cui metrica discende da una norma. Abbiamo già visto esempi di spazi normati in dimensione finita. Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, possiamo definire $\|z\| = \max_i |z_i|$, per cui 1) e 2) sono ovvie, 3) discende da

$$\|z + w\| = \max_i |z_i + w_i| \leq \max_i (|z_i| + |w_i|) \leq \max_i |z_i| + \max_i |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Oppure sempre su $\mathbb{C}^n$ possiamo prendere $\|z\| = \sum_{i=1}^n |z_i|$. Ancora 1) e 2) sono ovvie, mentre 3):

$$\|z + w\| = \sum_{i=1}^n |z_i + w_i| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| + \sum_{i=1}^n |w_i| = \|z\| + \|w\|.$$

Vediamo ora alcuni esempi che generalizzano i casi sopra in dimensione infinita. Prendiamo le sequenze z_i con $i \in \mathbb{N}^+$ di numeri complessi. Quindi $z = (z_1, z_2, \dots, z_n \dots,)$ limitiamoci alle sequenze limitate, cioè per cui $\sup_i |z_i| < \infty$. Questo è uno spazio vettoriale e $\|z\| = \sup_i |z_i|$ è una norma[1].

1 forse max

3 PRODOTTO SCALARE E SPAZI DI HILBERT

Definizione 3.0.1. *Prodotto Scalare Prendiamo uno spazio vettoriale V. Un prodotto scalare*

$$(\, , \,) : V \times V \longmapsto \mathbb{C}$$

è definito dalle seguenti proprietà:

1. $(v, v) \geq 0$ *e* $(v, v) = 0 \leftrightarrow v = 0$
2. $(v, w)* = (w, v)$
3. $(v, \lambda w) = \lambda(v, w)$
4. $(v, w_1 + w_2) = (v, w_1) + (v, w_2)$

Possiamo definire la seguente funzione $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ e dimostrare che è una norma.

Teorema 3.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare $(\, , \,)$. Sia $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Allora $\|v\|$ è una norma per cui, per ogni $v, w \in V$, vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{1}$$

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\|v\|$ è una norma ben definita, grazie al fatto che il prodotto scalare è definito positivo per costruzione.
Per cui $\|v - \lambda(v, w)w\| \geq 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\begin{gathered}(v - \lambda(v, w)w, v - \lambda(v, w)w) = \\ = \|v\|^2 - 2\lambda|(v, w)|^2 + \lambda^2|(v, w)|^2\|w\|^2 \geq 0.\end{gathered}$$

Per cui

$$4|(v, w)| \left(|(v, w)|^2 - \|v\|^2\|w\|^2 \right) \leq 0$$

da cui la disuguaglianza.

□

Quindi uno spazio dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Se lo spazio è anche completo si chiama spazio di Hilbert ($\mathcal{H}$). Un esempio di spazio di Hilbert è $\mathbb{C}^n$ con il prodotto scalare $(z, w) = \sqrt{\sum_i z_i^* w_i}$