

Rapport préliminaire sur le sujet de recherche

Romain TARLIER

12 janvier 2026

A l'attention de M. Jean Bussac.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Cadre mathématique général	2
3	État de l'art	2
4	Étude des courbes caractéristiques des EDP	3
4.1	Pourquoi étudier les courbes caractéristiques	3
4.2	Comment exploiter les caractéristiques	3
5	Solutions faibles et condition d'entropie	4
5.1	Définition d'une solution faible	4
5.2	Non-unicité et condition d'entropie	4
6	Volumes finis et problèmes de Riemann	4
6.1	Méthode des volumes finis	4
6.2	Formulation intégrale et flux numériques	4
6.3	Apparition du problème de Riemann	5
6.4	Résolution analytique	5
6.5	Nécessité du schéma de Lax-Friedrichs	5
7	Résolution numérique et analyse de l'erreur	5
7.1	Implémentation du problème	5
7.2	Stabilité numérique et condition CFL	5
7.3	Implémentation de la solution analytique	5
7.4	Schéma de Lax-Friedrichs	6
7.5	Analyse de l'erreur et diffusion numérique	6
8	Conclusion et formulation de la problématique	7

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des équations aux dérivées partielles hyperboliques et de leur résolution numérique par la méthode des volumes finis. Une attention particulière est accordée aux problèmes de Riemann, qui apparaissent naturellement lors de la discrétisation, ainsi qu'au schéma de Lax-Friedrichs utilisé pour l'approximation numérique. L'objectif est de comprendre la formation des discontinuités et leur traitement numérique.

1 Introduction

L'objectif de ce projet de recherche est de s'approprier les notions et étapes essentielles liées à la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), en particulier dans le cadre des équations de conservation, ainsi que leur modélisation numérique en Python. L'accent est mis sur la compréhension des phénomènes de discontinuité apparaissant dans les solutions, communément appelés *problèmes de Riemann*.

La résolution numérique étudiée repose principalement sur le schéma de Lax-Friedrichs, choisi pour sa simplicité et sa robustesse face aux discontinuités. Le but concret est de comprendre comment ces discontinuités émergent, comment elles peuvent être caractérisées analytiquement, puis approchées numériquement à l'aide de méthodes de volumes finis.

2 Cadre mathématique général

On s'intéresse aux équations de conservation scalaires en une dimension d'espace, de la forme

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0, \quad (1)$$

où $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est la quantité conservée et f est une fonction flux supposée suffisamment régulière.

Ces équations apparaissent dans de nombreux contextes physiques, comme la dynamique des fluides, le trafic routier ou encore la propagation d'ondes. Cependant, pour des données initiales régulières, les solutions peuvent développer des discontinuités en temps fini, ce qui rend nécessaire une formulation plus faible du problème.

3 État de l'art

Les équations de conservation hyperboliques constituent un cadre fondamental pour la modélisation de phénomènes physiques caractérisés par la propagation d'ondes et l'apparition de discontinuités. Leur analyse mathématique et leur résolution numérique ont fait l'objet d'une littérature abondante depuis plusieurs décennies.

Un cadre théorique rigoureux pour l'étude des systèmes hyperboliques de lois de conservation est proposé par Godlewski et Raviart [6]. Cet ouvrage établit les bases mathématiques nécessaires à la compréhension des solutions faibles, des conditions d'entropie et de la convergence des schémas numériques. Les méthodes de volumes finis y occupent une place centrale, notamment en raison de leur capacité à préserver les propriétés de conservation au niveau discret.

L'analyse mathématique approfondie des systèmes de lois de conservation est développée dans les travaux de Denis Serre [2], qui mettent en évidence la structure fine des solutions et le rôle

fondamental des problèmes de Riemann. L'auteur y étudie en détail la formation des ondes de choc, des ondes de raréfaction et leurs interactions, fournissant ainsi un cadre conceptuel essentiel pour l'analyse qualitative des solutions.

Les contributions de Peter Lax [1] ont également joué un rôle majeur dans le développement de la théorie des systèmes hyperboliques. Les conditions d'admissibilité des chocs, aujourd'hui connues sous le nom de conditions de Lax, permettent de sélectionner des solutions physiquement pertinentes parmi l'ensemble des solutions faibles. Ces notions sont intimement liées aux propriétés entropiques des solutions.

Du point de vue de l'analyse globale et de la stabilité des solutions, l'ouvrage de Bressan [5] constitue une référence incontournable. Il y développe une théorie complète de l'existence et de l'unicité des solutions entropiques pour les systèmes de lois de conservation, ainsi qu'une analyse fine des interactions d'ondes et de leur impact sur la régularité des solutions.

Sur le plan numérique, l'ouvrage de Leveque [4] propose une présentation détaillée des méthodes de volumes finis pour les problèmes hyperboliques. Il met en évidence le lien étroit entre la résolution des problèmes de Riemann et la construction de schémas numériques robustes et précis, tout en fournissant de nombreux exemples applicatifs.

Dans le contexte spécifique de la dynamique des fluides numérique, le livre de Toro [3] fait autorité. Il présente de nombreux solveurs de Riemann exacts et approchés, ainsi que des schémas haute résolution destinés à réduire la diffusion numérique tout en conservant la stabilité. Cet ouvrage illustre l'importance pratique des solveurs de Riemann dans les simulations d'écoulements compressibles.

Enfin, les travaux de Tadmor [7] ont contribué au développement de schémas numériques entropiquement stables. Ces méthodes visent à garantir, au niveau discret, le respect des inégalités d'entropie, renforçant ainsi la convergence vers la solution physiquement admissible.

Dans ce cadre général, le schéma de Lax-Friedrichs apparaît comme un schéma fondamental, à la fois simple et robuste. Bien que fortement diffusif, il constitue un point de départ privilégié pour l'analyse théorique et la compréhension des mécanismes de stabilisation numérique, avant l'introduction de schémas plus sophistiqués.

4 Étude des courbes caractéristiques des EDP

4.1 Pourquoi étudier les courbes caractéristiques

Les courbes caractéristiques constituent un outil fondamental dans l'analyse des EDP hyperboliques. Elles permettent de transformer une équation aux dérivées partielles en un ensemble d'équations différentielles ordinaires le long de trajectoires privilégiées dans le plan espace-temps.

Dans le cas des équations de conservation non linéaires, les caractéristiques peuvent se croiser, entraînant la formation de chocs et la perte de régularité de la solution. Cette situation justifie l'introduction de solutions faibles et de conditions d'entropie.

4.2 Comment exploiter les caractéristiques

On considère une équation de conservation scalaire :

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \quad (2)$$

Les courbes caractéristiques sont définies par :

$$\frac{dx}{dt} = f'(u). \quad (3)$$

Le long de ces courbes, la solution reste constante tant que les caractéristiques ne se croisent pas. Leur étude permet donc d'anticiper l'apparition de discontinuités.

5 Solutions faibles et condition d'entropie

Lorsque la solution développe des discontinuités, la notion classique de solution dérivable n'est plus adaptée. On introduit alors la notion de solution faible.

5.1 Définition d'une solution faible

Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est dite solution faible de l'équation de conservation si elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (4)$$

pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

5.2 Non-unicité et condition d'entropie

Les solutions faibles ne sont pas uniques en général. Afin de sélectionner la solution physiquement pertinente, on impose une condition d'entropie, telle que la condition de Lax, qui exclut certaines solutions non admissibles.

Cette condition joue un rôle central dans l'analyse des schémas numériques, lesquels doivent converger vers la solution entropique.

6 Volumes finis et problèmes de Riemann

6.1 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis repose sur une formulation intégrale des lois de conservation. Le domaine spatial est découpé en cellules, et l'équation est intégrée sur chaque volume de contrôle, garantissant ainsi la conservation des quantités physiques au niveau discret.

6.2 Formulation intégrale et flux numériques

En intégrant l'équation de conservation sur une cellule $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}(t) - F_{i-\frac{1}{2}}(t)), \quad (5)$$

où $\bar{u}_i(t)$ désigne la moyenne de la solution sur la cellule, et $F_{i\pm\frac{1}{2}}$ des flux numériques.

Le choix du flux numérique est crucial : il doit être consistant, conservatif et stable afin de garantir la convergence du schéma.

6.3 Apparition du problème de Riemann

À chaque interface entre deux cellules, la solution discrète est discontinue. Cette discontinuité locale correspond à un problème de Riemann, défini comme une équation de conservation avec des données initiales constantes par morceaux :

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, la méthode des volumes finis nécessite la résolution répétée de problèmes de Riemann élémentaires.

6.4 Résolution analytique

Dans certains cas simples, la solution analytique du problème de Riemann peut être obtenue. Elle est composée d'ondes élémentaires telles que les ondes de choc et les ondes de raréfaction. Ces solutions exactes servent de référence pour l'analyse des schémas numériques.

6.5 Nécessité du schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax-Friedrichs introduit une viscosité numérique artificielle permettant de sélectionner la solution entropique correcte. Bien que diffusif, il présente une grande robustesse face aux discontinuités.

7 Résolution numérique et analyse de l'erreur

7.1 Implémentation du problème

L'implémentation numérique est réalisée en Python. Elle comprend la discréttisation spatiale, l'imposition de conditions initiales de type Riemann, et l'évolution temporelle sous une condition de stabilité CFL.

7.2 Stabilité numérique et condition CFL

La stabilité des schémas explicites de volumes finis repose sur le respect d'une condition de type CFL, qui impose une contrainte sur le pas de temps :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\max |f'(u)|}. \quad (6)$$

Cette condition garantit que l'information ne se propage pas sur plus d'une cellule par pas de temps. Dans le cas du schéma de Lax-Friedrichs, la condition CFL est suffisante pour assurer la stabilité L^∞ .

7.3 Implémentation de la solution analytique

Lorsque cela est possible, la solution analytique est implémentée afin de comparer les résultats numériques aux solutions exactes. Cette comparaison permet d'évaluer l'erreur numérique et la diffusion introduite par le schéma.

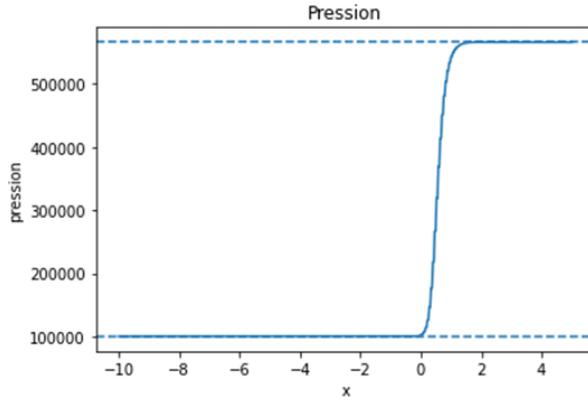


FIGURE 1 – Tracé de la pression par Lax-Friedrichs

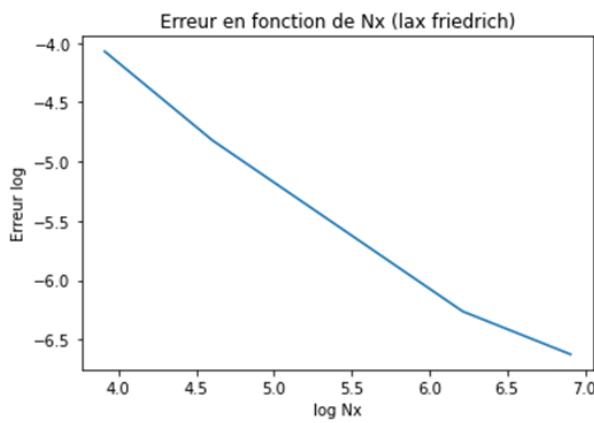


FIGURE 2 – Graph log-log de l’erreur, presque d’ordre 1 (pente de -0.8)

7.4 Schéma de Lax-Friedrichs

Le schéma de Lax-Friedrichs s’écrit :

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n)). \quad (7)$$

Les résultats montrent une bonne stabilité numérique mais également un fort caractère diffusif, notamment au voisinage des chocs (voir Figure 1).

7.5 Analyse de l’erreur et diffusion numérique

Le schéma de Lax-Friedrichs est connu pour son caractère fortement diffusif. Cette diffusion numérique se traduit par un lissage excessif des discontinuités, en particulier au voisinage des chocs.

L’erreur numérique peut être analysée en comparant la solution approchée u_h à la solution exacte u , lorsque celle-ci est connue. On observe que l’erreur décroît lorsque le maillage est raffiné (Figure 2), mais au prix d’un coût de calcul plus élevé.

Cette diffusion nous rappelle bien que le schéma de Lax-Friedrichs est ici utilisé à des fins pédagogiques (comme souvent) ou comme base pour des méthodes plus avancées, mais qu’il n’est pas assez précis pour mener une réelle recherche. Avant de poursuivre avec des méthodes plus efficaces, il me faut déjà corriger le cadre numérique de mon étude afin d’obtenir un ordre 1 (et

non 0.80).

8 Conclusion et formulation de la problématique

Ce travail met en évidence les liens entre l'analyse théorique des EDP hyperboliques, les problèmes de Riemann et leur résolution numérique. Le schéma de Lax-Friedrichs constitue une première étape avant l'étude de méthodes plus précises telles que les schémas de Godunov ou les schémas haute résolution. La direction actuelle de ce projet consiste à considérer des systèmes d'équations de conservation, comme les équations d'Euler. Ces études préliminaires me permettent de formuler une problématique (inspirée de l'étude parallèle de mon sujet, de la thèse de Muñoz Moncayo [9], et de la vôtre [8]) :

Comment le choix du solveur de Riemann influence-t-il la précision et la robustesse des simulations des équations d'Euler, en vue d'une extension à des écoulements multiphasiques ?

Références

- [1] P. D. Lax, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM, 1973.
- [2] D. Serre, *Systems of Conservation Laws I : Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, 1999.
- [3] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [4] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Oxford University Press, 2000.
- [6] E. Godlewski, P.-A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer, 1996.
- [7] E. Tadmor, Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws, *Mathematics of Computation*, 1987.
- [8] J. Bussac, *Simulation d'écoulements triphasiques avec deux phases miscibles*, hal-03454958, 2021.
- [9] C. Muñoz-Moncayo, *Fast, Robust, Iterative Riemann Solvers for the Shallow Water and Euler Equations*, King Abdullah University of Science and Technology, 2022.