Chapitre 0

CALCUL NUMÉRIQUE

I - Fractions

Définition : Fraction

Soient a et b deux nombres entiers relatifs, b non nul.
Le quotient de la division de a par b est la **fraction** $\frac{a}{b}$.

Propriété : Simplification

Soient a un nombre entier relatif et b et k deux nombres entiers relatifs non nuls.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Exemple

Simplifions $A = \frac{30}{42}$ à l'aide des critères de divisibilité.

$$A = \frac{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 5}{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 7}$$

À l'aide des critères de divisibilité par 2 et 3, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits et ainsi :

$$\mathbf{A} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

Remarque

Une fraction qui ne peut plus être simplifiée est dite **irréductible**.

Propriétés : Somme et différence

Soient a et c deux entiers relatifs et k un entier relatif non nul.
On peut alors sommer :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

On peut aussi soustraire :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Exemple

Calculons $B = \frac{11}{30} + \frac{1}{6} - \frac{4}{5}$ et donnons sa forme irréductible.
On écrit d'abord les trois fractions avec le même dénominateur 30.

$$\begin{aligned} B &= \frac{11}{30} + \frac{1 \times \mathbf{5}}{6 \times \mathbf{5}} - \frac{4 \times \mathbf{6}}{5 \times \mathbf{6}} \\ &= \frac{11}{30} + \frac{5}{30} - \frac{24}{30} \end{aligned}$$

On calcule la somme algébrique des numérateurs.

$$\begin{aligned} B &= \frac{11+5-24}{30} \\ &= -\frac{8}{30} \end{aligned}$$

Pour terminer, on simplifie et on vérifie que B est bien sous forme irréductible.

$$\begin{aligned} B &= \frac{-4 \times \mathbf{2}}{15 \times \mathbf{2}} \\ &= -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}} \end{aligned}$$

Propriété : Produit

Soient a et c deux entiers relatifs et b et d deux entiers relatifs non nuls.
On peut alors multiplier :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemple

Calculons $C = \dfrac{3}{14} \times \dfrac{22}{15}$.
On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$C = \frac{3 \times 22}{14 \times 15}$$

On simplifie.

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 11}{\mathbf{2} \times 7 \times \mathbf{3} \times 5} \\ &= \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{35}} \end{aligned}$$

Définition : Inverse

L'**inverse** d'une fraction $\dfrac{a}{b}$ non nulle est la fraction $\dfrac{b}{a}$.

Propriété : Quotient

Soient a un entier relatif et b, c et d des entiers relatifs non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Remarque

Autrement dit, diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

Exemple

$$\frac{5}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{2}{7}$$

Exercice

En respectant les priorités d'opérations, calculer et donner sous forme irréductible :

$$D = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$$

II - Racine carrée

Définition : Racine carée

Soit a un nombre réel positif.
La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel **positif** dont le carré est égal à a.

Remarque

L'unicité de la racine carrée est très importante ! Elle servira dans une prochaine démonstration. Elle provient de l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Propriété : Positivité

Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples

- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$
- $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 9 donc $\sqrt{9} = 3$.
- $\sqrt{0} = 0$

Exemples

- $\sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3$
- $\sqrt{-3{,}6^2} = 3{,}6$
- $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

Propriétés : Opérations

Soient a et b deux réels positifs.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. Pour le premier point, on sait que $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ et

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\\
&= \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}\\
&= \left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2\\
&= a\times b\\
&= ab
\end{aligned}$$

Les deux nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ont le même carré et sont positifs, donc ils sont égaux.
Le second point est démontré de la même manière. □

Exemples

- $\sqrt{3600} = \sqrt{36\times 100} = \sqrt{36}\times\sqrt{100} = 6\times 10 = 60$
- $\dfrac{\sqrt{0{,}44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\dfrac{0{,}44}{11}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

Exercice

1) Calculer la somme $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}$.

2) Écrire $2\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{50}}{5}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.

3) Montrer que $\sqrt{288}+\sqrt{720} = 12\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

III - Puissances

Définition : Puissance entière

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel.
Pour $n \geqslant 2$, $a^n = a\times a\cdots\times a$ (n fois).
De plus, on a, par convention, $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.

Exemples

- $10^3 = 10\times 10\times 10 = 1\,000$
- $2^5 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 32$
- $(-7)^4 = (-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = 2\,401$

Définition : Puissance entière relative

Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel non nul.
On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemples

- $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$
- $2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \dfrac{1}{4}$

Propriétés : Règles de calcul sur les puissances

Soient a un nombre réel non nul et n, m deux nombres entiers relatifs.
On dispose des opérations suivantes :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

Exemples

- $5{,}2^3 \times 5{,}2^{-2} = 5{,}2^{3-2} = 5{,}2^1 = 5{,}2$
- $\dfrac{(-8)^7}{(-8)^9} = (-8)^{7-9} = (-8)^{-2} = \dfrac{1}{64}$
- $\left(\sqrt{2}^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}^{3\times 2}\right) = \sqrt{2}^6 = 8$

Remarque

Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de puissances.
Par exemple, $10^2 + 10^3 \neq 10^5$.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un entier relatif.
Alors,

$$a^n \times b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemples

- $0{,}2^7 \times 10^7 = (0{,}2 \times 10)^7 = 2^7 = 128$
- $\dfrac{11{,}1^{-3}}{1{,}11^{-3}} = \left(\dfrac{11{,}1}{1{,}11}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$