CHAPITRE 9

# FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

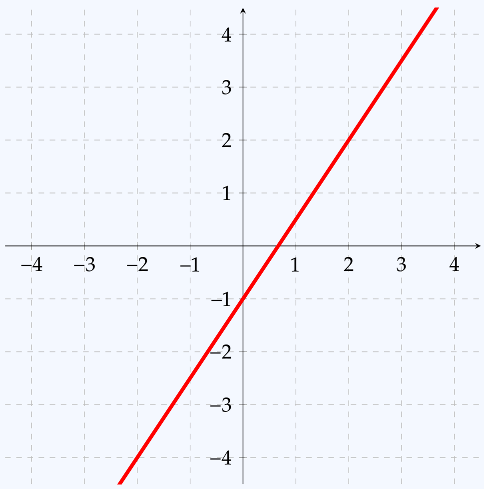
## I - Fonctions affines

**Définition**

Les fonctions représentées par des droites sont appelées les **fonctions affines**. Ce sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ dont l'expression algébrique est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a$ et $b$ deux nombres réels.

**Exemple**

On donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de $x \mapsto \frac{3}{2}x - 1$ sur l'intervalle $[-5, 5]$.




**Propriété**

Variations de $f : x \mapsto ax + b$ Supposons que $a > 0$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ alors

$$f(x) < f(y).$$

On dit que $f$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

**Remarque**

On peut donner le **tableau de variation** qui résume les variations de la fonction étudiée.

| $x$ | $-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

**Propriété**

Variations de $f : x \mapsto ax + b$ Supposons que $a < 0$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ alors

$$f(x) > f(y).$$

On dit que $f$ est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$.

**Remarque**

Cette fois ci, le **tableau de variation** est différent.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ |

**Remarque**

Soient $f : x \mapsto ax + b$, une fonction affine, et $k \in \mathbb{R}$, un réel.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = k$ revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation de degré 1 :

$$ax + b = k.$$

  Ainsi, si $a \neq 0$, l'unique solution réelle de $f(x) = k$ est $\dfrac{k-b}{a}$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < k$ revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation de degré 1 :

$$ax + b < k.$$

  On peut utiliser le tableau de signes de $x \mapsto ax + b - k$ ou résoudre algébriquement l'inéquation en faisant attention au cas $a < 0$.
  Si $a > 0$, l'inéquation admet $\left]-\infty; \dfrac{k-b}{a}\right[$ comme ensemble des solutions.
  Si $a < 0$, l'inéquation admet $\left]\dfrac{k-b}{a}; +\infty\right[$ comme ensemble des solutions.

## II - Fonction carré

**Définition**

La **fonction carré** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

**Exemple**

On peut donner un tableau de valeurs pour la fonction carré.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\dfrac{1}{2}$ | $0$ | $\dfrac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | $9$ | $4$ | $1$ | $\dfrac{1}{4}$ | $0$ | $\dfrac{1}{4}$ | $1$ | $4$ | $9$ |

Cela va nous permettre d'énoncer deux propriétés fondamentales de la fonction carré.

**Propriétés : Parité et positivité**

- Pour tout réel $x$, $(-x)^2 = x^2$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$.
  On dit que la fonction carré est **paire**.
- Pour tout réel $x$, $x^2 \geqslant 0$, soit $f(x) \geqslant 0$.
  On dit que la fonction carré est **positive** sur $\mathbb{R}$.

**Définition**

La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une **parabole**.


**Remarques**

- La courbe représentative est toujours située au dessus de l'axe des abscisses (positivité de $f$).
- La courbe représentative admet un axe de symétrie : l'axe des ordonnées (parité de $f$).

**Propriétés : Variations de la fonction carré**

- La fonction carré est **croissante** sur $[0;+\infty[$ :
  pour tout $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $x^2 \leqslant y^2$.
- La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty;0]$ :
  pour tout $x \leqslant y \leqslant 0$, on a $y^2 \leqslant x^2$.

*Démonstration.* • Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. Montrons que $x^2 - y^2 \leqslant 0$.

Par la troisième identité remarquable,
$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$
On étudie le signe de ces deux quantités : $x + y \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ (puisque par hypothèse $0 \leqslant x \leqslant y$).
La règle du signe implique que $x^2 - y^2 \leqslant 0$.

- La preuve est similaire.

□

### Remarque

On résume le résultat précédent dans un tableau de variation.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

### Exercice

Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres puis utiliser la parabole de la fonction carré dans un repère pour visualiser la comparaison.

**1)** $3^2$ et $4^2$

**2)** $1{,}5^2$ et $(-0{,}5)^2$

**3)** $1{,}7^2$ et $1{,}5^2$

**4)** $(-3{,}7)^2$ et $(-4{,}2)^2$

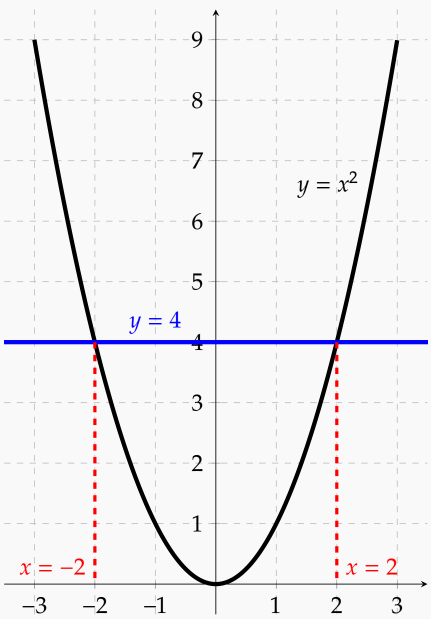
### Remarque

On va souvent avoir besoin de résoudre des équations ou des inéquations faisant intervenir l'expression de la fonction carré. On peut utiliser la représentation graphique (la parabole) afin de les résoudre. Donnons quelques exemples.

- Trouvons les solutions réelles de l'équation $6x^2 = 24$.
  On commence par isoler le terme $x^2$ :

$$\begin{aligned} & 6x^2 = 24 \\ \iff & x^2 = \frac{24}{6} \\ \iff & x^2 = 4 \end{aligned}$$

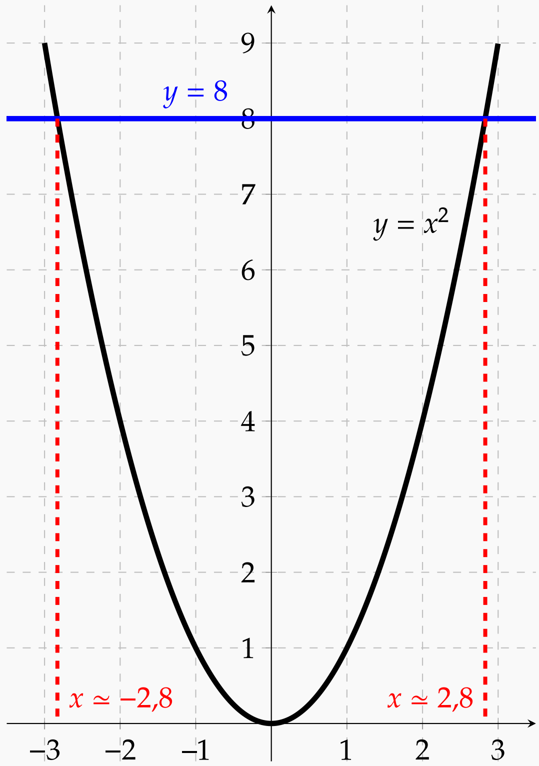
  Regardons, graphiquement, quels $x$ ont pour image 4 par la fonction carré.




  Donc l'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions réelles qui sont $-2$ et $2$ et ce sont les mêmes solutions pour $6x^2 = 24$.

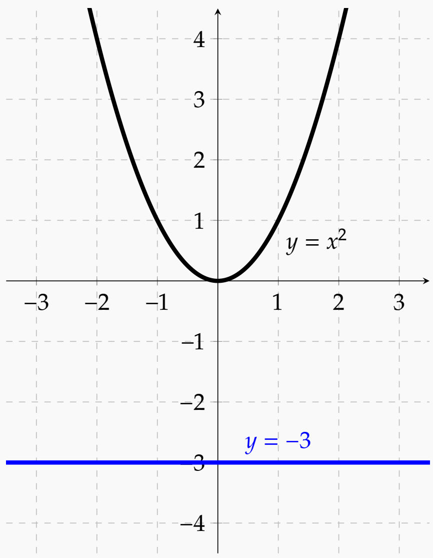
- Trouvons les solutions réelles de l'inéquation $x^2 < 8$.

  Regardons, graphiquement, quels $x$ ont pour image 8 par la fonction carré.




  Ainsi, les solutions réelles de l'inéquation $x^2 < 8$ sont comprises strictement entre les deux abscisses obtenues (qui correspondent à $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$). On peut lire graphiquement une valeur approchée de $\sqrt{8}$ qui est environ de 2,8.

- Trouvons graphiquement les solutions réelles de l'équation $x^2 = -3$.




  Les deux courbes ne s'intersectent pas : il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 = -3$. C'était attendu puisqu'un carré est toujours positif. D'où, $\mathscr{S} = \varnothing$.

# III - Fonction cube

**Définition**

La **fonction cube** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

**Exemple**

On va aussi donner un tableau de valeurs pour la fonction cube.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | $-27$ | $-8$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $1$ | $8$ | $27$ |

Cela va nous permettre d'énoncer deux propriétés fondamentales de la fonction carré.

**Propriété : Imparité**

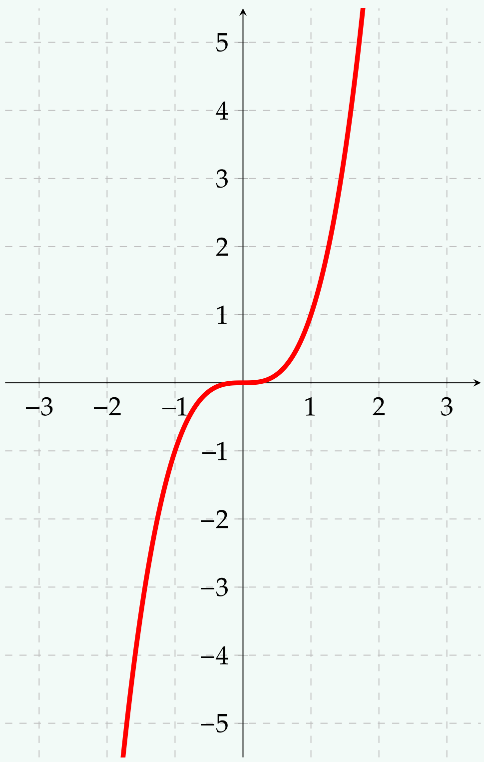
Pour tout réel $x$, $(-x)^3 = -x^3$, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$.
On dit que la fonction cube est **impaire**.

**Remarque**

La fonction cube n'est pas positive !

**Définition**

La courbe représentative de la fonction cube s'appelle une **cubique**.



**Remarque**

La courbe représentative admet un centre de symétrie : l'origine du repère (imparité de $f$).

**Propriété : Variations de la fonction cube**

La fonction cube est **croissante** sur $]-\infty;+\infty[$.
Pour tout $x \leqslant y$, on a $x^3 \leqslant y^3$.

*Démonstration.* Soient $x \leqslant y$. Montrons que $x^3 - y^3 \leqslant 0$.
On peut remarquer, en développant le membre de droite par exemple, que

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+yx+y^2).$$

On étudie le signe de ces deux quantités : $x-y$ qui est toujours négatif par hypothèse et $x^2+yx+y^2$.
On peut minorer $x^2+yx+y^2$ par $x^2+x\times x+y^2 = 2x^2+y^2$ qui est positif.
Ainsi,

$$x^2+yx+y^2 \geqslant 2x^2+y^2 \geqslant 0.$$

Finalement, le produit $(x-y)(x^2+yx+y^2)$ est bien négatif comme voulu. □

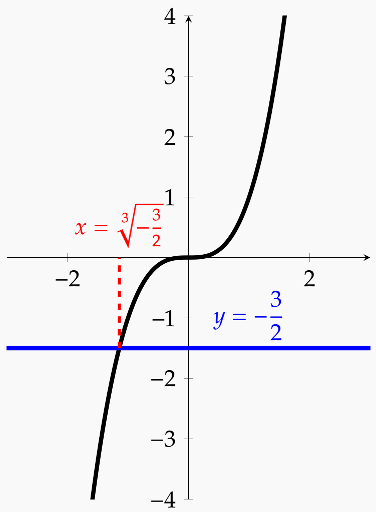
**Remarques**

- Le tableau de variation de la fonction cube est simple.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $x^3$ | $\nearrow$ |

- Tout comme pour la fonction carré, on peut désormais, à partir de la courbe de la fonction cube, résoudre graphiquement des équations du type $x^3 = k$ ou des inéquations $x^3 < k$.

  Comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les équations $x^3 = k$ possèdent une unique solution, qu'on appelle **racine cubique** de $k$ (notée $\sqrt[3]{k}$).



**Théorème : Positions relatives des courbes de référence sur $[0;+\infty[$**

On note $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

- Sur $[0;1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.
  C'est-à-dire, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
- Sur $[1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même en dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.
  C'est-à-dire, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

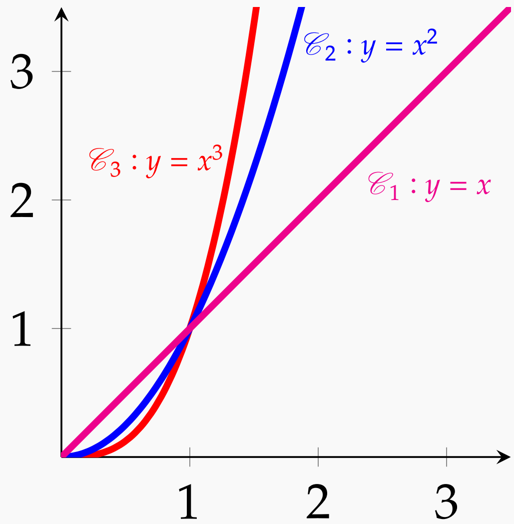
*Démonstration.*

- Soit $x \in [0;1]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant 1$.
  Nous pouvons multiplier par $x$ (positif) les deux membres de l'inéquation sans en changer le sens.
  Ainsi, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et on peut même préciser que $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$.
  En multipliant à nouveau par $x$, on établit :
  $$0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x.$$
- Soit $x \geqslant 1$. Comme dans le cas précédent, nous pouvons multiplier par $x$ les deux membres de l'inéquation et $x^2 \geqslant x$.
  En multipliant une nouvelle fois par $x$, nous obtenons $x^3 \geqslant x^2$.
  Combinons toutes les inégalités et nous avons
  $$1 \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3.$$

□

**Remarque**

On visualise très bien le résultat précédent sur le graphique suivant. Notons que les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ appartiennent aux trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.




**Exemples**

- On peut comparer 0,5, $0{,}5^2$ et $0{,}5^3$. $0{,}5 \in [0;1]$ donc
  $$0{,}5 \geqslant 0{,}5^2 \geqslant 0{,}5^3.$$
- De même, $1{,}5 \geqslant 1$ donc
  $$1{,}5^3 \geqslant 1{,}5^2 \geqslant 1{,}5.$$

**Exercice**

Comparer 0,8, $(-0{,}8)^3$, $-0{,}8$, $0{,}8^2$ et $0{,}8^3$. Faites de même en remplaçant 0,8 par $-2$.

## IV - Fonction inverse

**Définition**

La **fonction inverse** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**Remarque**

Notons bien que la fonction **n'est pas définie** en 0.

**Exemple**

On donne un tableau de valeurs pour la fonction inverse.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{10}$ | 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$ | $-4$ | $-10$ | Err. | 10 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ |

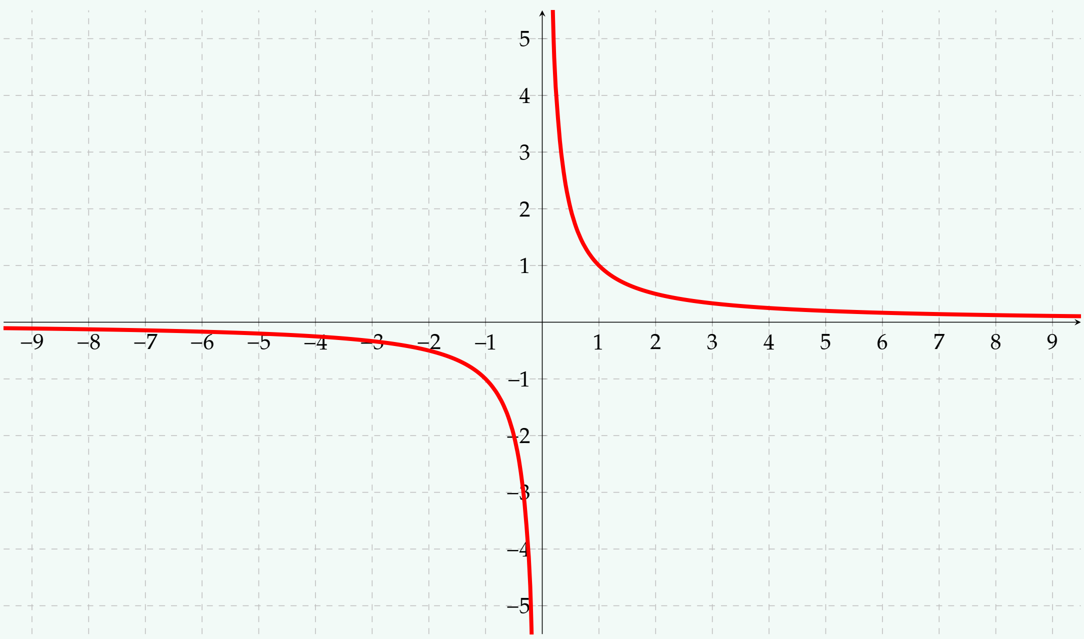
**Propriété : Imparité**

La fonction inverse est **impaire**.

*Démonstration.* En effet, pour tout $x$ réel, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ donc $f(-x) = -f(x)$. □

**Définition**

La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.



## Propriétés : Variations de la fonction inverse

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty;0[$.

  Pour tout $x \leqslant y < 0$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]0;+\infty[$.

  Pour tout $0 < x \leqslant y$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

### Remarque

Attention, si $x \leqslant y$ avec $x$ **strictement négatif** et $y$ **strictement positif**, alors

$$\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{x}.$$

*Démonstration.* 

- Soient $x \leqslant y < 0$. On divise la double inégalité par $xy$ qui est strictement positif (produit de deux strictement négatifs) et le sens des inégalités ne change donc pas.

$$\begin{aligned} & \frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy} < \frac{0}{xy} \\ \iff & \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

- Soient $0 < x \leqslant y$. On divise encore la double inégalité par $xy$ qui est strictement positif (produit de deux strictement positifs).

$$\begin{aligned} & \frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy} \\ \iff & 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

### Remarque

Le tableau de variations de la fonction inverse est le suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x}$ | | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | |

### Exercice

À l'aide du résultat sur les variations de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants.

- $x \in [5;20]$
- $x \in [1\,000;2\,000]$
- $x \in [10^6;10^{15}]$
- $x \in [-4;-1]$
- $x \in [-5\,000;-3\,000]$
- $x \in \left[-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{2}\right]$

**Remarques**

On résout quelques inéquations du type $\dfrac{1}{x} < k$ à partir de la représentation graphique de la fonction inverse.

- Commençons par $\dfrac{1}{x} < -2$. C'est une inéquation que l'on peut résoudre algébriquement mais en distinguant des cas.

  **Si $x$ est strictement positif** alors multiplier par $x$ ne change pas le sens des inégalités mais diviser par $-2$ si.

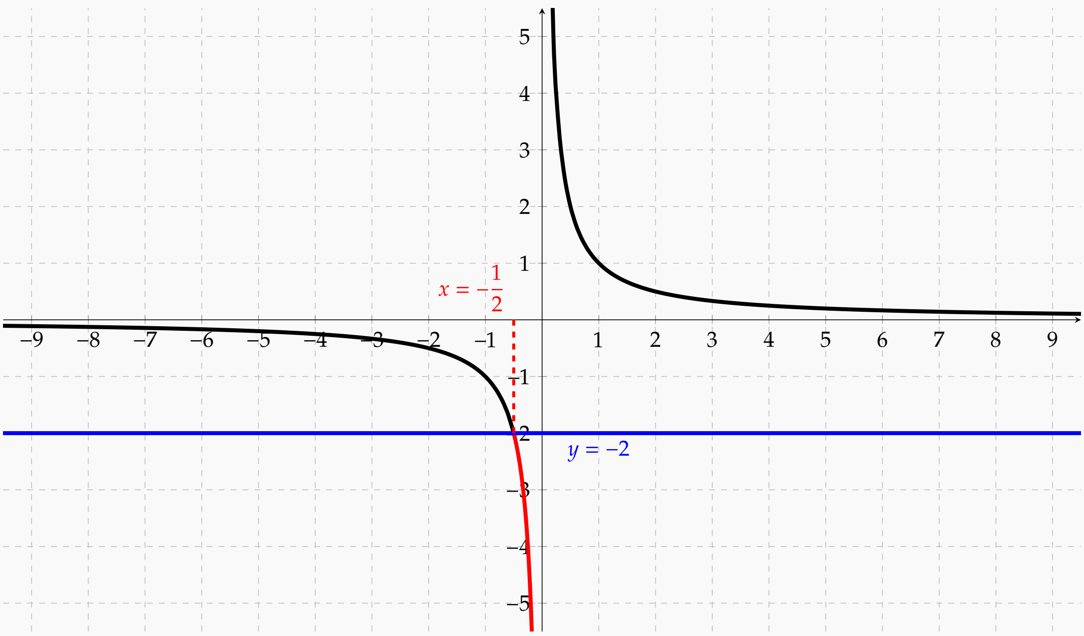
  $$\frac{1}{x} < -2 \iff 1 < -2x \iff -\frac{1}{2} > x$$

  Aucune de ces potentielles solutions ne convient car $\mathbb{R}_+ \bigcap \left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[ = \varnothing$.

  **Si $x$ est strictement négatif** alors multiplier par $x$ et diviser par $-2$ change le sens des inégalités.

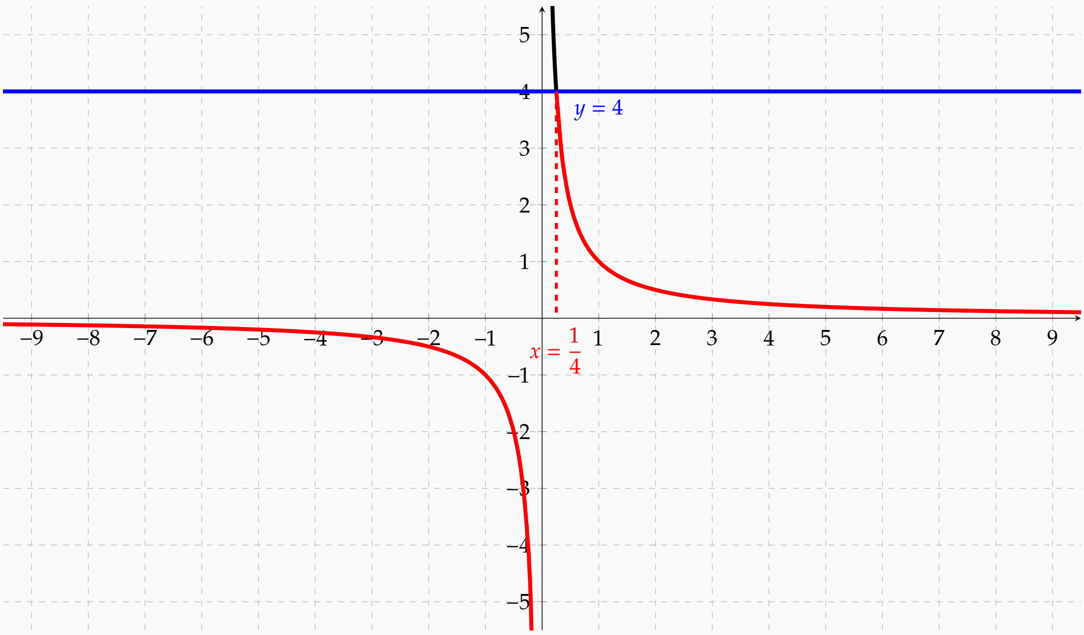
  $$\frac{1}{x} < -2 \iff 1 > -2x \iff -\frac{1}{2} < x$$

  Donc les solutions forment l'ensemble $\mathbb{R}_- \bigcap \left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[ = \left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[$.

  La résolution graphique est plus simple. Le morceau rouge de la courbe correspond aux solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < -2$. On lit les $x$ associés, ils sont dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[$.

- Résolvons graphiquement $\dfrac{1}{x} \leqslant 4$. On note encore en rouge les points qui correspondent aux solutions.




On voit qu'il y a deux intervalles solutions : $]-\infty;0[$ et $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$. Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de $\frac{1}{x} \leqslant 4$ est $]-\infty;0[\cup\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$

## V - Fonction racine carrée

**Définition**

La **fonction racine** est la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

**Exemple**

Voici un tableau de valeurs pour la fonction racine.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{x}$ | Err. | Err. | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}71$ | $1$ | $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ | $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$ | $2$ |

**Propriété : Positivité**

La fonction racine carrée est **positive**.

*Démonstration.* Par définition de la racine carrée : si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** $y$ tel que $y^2 = a$. □

**Remarque**

Il est important de noter que la fonction racine carrée n'est pas définie sur $]-\infty;0[$.

## Définition

La courbe représentative de la fonction racine carrée s'appelle une **demi-parabole**.

## Propriété : Variations de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0; +\infty[$.
Pour tout $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

*Démonstration.* Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. **Montrons par l'absurde** que $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Dans le cas où $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ est faux, c'est-à-dire $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, nous pouvons utiliser la croissance de la fonction carré pour établir $(\sqrt{x})^2 > (\sqrt{y})^2$. Ainsi, $x > y$, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Notre raisonnement est impossible et donc nous avons montré que $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ par l'absurde. □

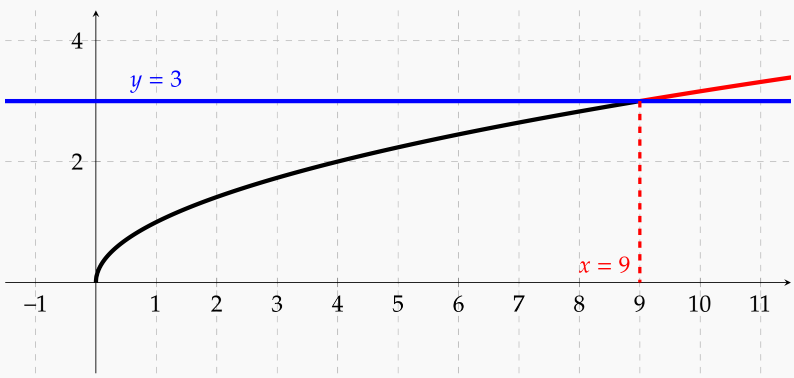
## Remarques

- Le tableau de variation de la fonction carré est trivial.

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\sqrt{x}$ | $\nearrow$ |

- Les résolutions graphiquement d'équations du type $\sqrt{x} = k$ ou des inéquations $\sqrt{x} < k$ se font de la même manière que pour les autres fonctions de référence.

  Résolvons $\sqrt{x} > 3$ dans $\mathbb{R}$. Tout d'abord, l'équation n'est pas définie sur $R_{-}$.




  Les solutions réelles de l'inéquation $\sqrt{x} > 3$ sont $]9; +\infty[$.