4

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Résumé

Seconde croissance étudiée cette année : la croissance exponentielle dont le vocabulaire est utilisé régulièrement dans le langage commun.

1 Suites géométriques

Définition

Soient $q \neq 0$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

(u_n) est appelée **suite géométrique** de **raison** q.

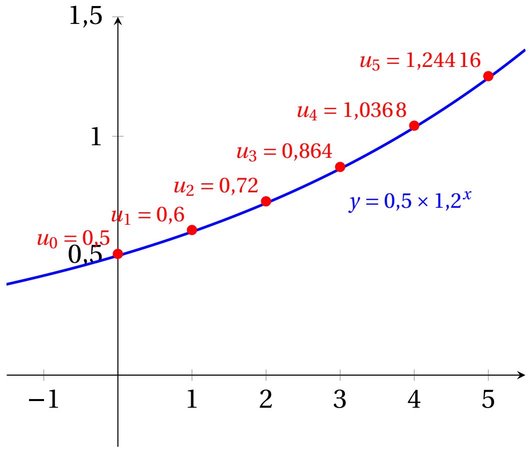
Exemple Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier $u_0 = 1{,}3$. Alors, $u_1 = 2 \times u_0 = 3 \times 1{,}3 = 2{,}6$. De même, $u_2 = 2 \times u_1 = 5{,}2$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 10{,}4$, $u_4 = 20{,}8$, $u_5 = 41{,}6$, …

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple Représentons la suite géométrique (u_n) de raison 1,2 et de premier terme 0,5.



Théorème | Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 **strictement positif**.

- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $q > 1$.
- (u_n) est constante si, et seulement si, $q = 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $0 < q < 1$.

Exemples

- Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = 3^n$. C'est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1 donc elle est strictement croissante.
- Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{10} v_n \end{cases}$. (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{10}$ et de premier terme 2. Elle est donc strictement décroissante.

2 Fonctions exponentielles de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif. Une fonction f définie pour tout réel positif x par $f(x) = a^x$ est une **fonction exponentielle** de base a.

Théorème | Variations d'une fonction exponentielle

Une fonction exponentielle f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ est :

- strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $a > 1$;
- constante sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $a = 1$;
- strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $0 < a < 1$.

Remarque Les propriétés de variations entre suites géométriques et fonctions exponentielles sont semblables. Toutes les propriétés des suites peuvent être déduites de celles des fonctions exponentielles.

Exemples
- $f(x) = 2^x$ est l'expression d'une fonction exponentielle de base 2.
- $f(x) = 0{,}3^x$ est l'expression d'une fonction exponentielle de base 0,3.

Propriétés | Calculs exponentiels

Pour tous réels x et y et pour tout réels strictement positifs a et b on a :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^x \times b^x = (a \times b)^x$

Propriété

Si une grandeur subit une **évolution** de taux t, alors elle atteint la même valeur en subissant n **évolutions successives** de même taux $(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$ où n est un entier naturel non nul.

Définition

Le nombre $(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$ est appelé **taux moyen** des n évolutions successives de taux global t.

Exemple D'après l'association *60 Millions de consommateurs*, le prix des pâtes a augmenté d'environ 11,4% entre février 2021 et février 2022. Ainsi, l'évolution a suivi un coefficient multiplicateur C_M de $1 + 0{,}114 = 1{,}114$.
Finalement, le coefficient multiplicateur moyen est $C_M^{\frac{1}{12}}$ et le taux moyen est :

$$t_{moyen} = (1 + 0{,}114)^{\frac{1}{12}} - 1.$$