3

Suites numériques

Résumé

Fondamentales en analyse, les suites, dont on ne traite ici que le cas des suites numériques, permettent de modéliser des phénomènes d'évolutions dans le temps discrets comme par exemple, le nombre de personne contaminées par une maladie jour après jour. Le vocabulaire utilisé est très proche de celui des fonctions numériques vu en seconde.

1 Généralités

Définition

Une **suite numérique** est une liste (infinie) de nombres, appelés **termes**, qui sont ordonnés et numérotés.
Le premier terme d'une suite u se note u_1, le suivant u_2, ... et plus généralement, le terme de rang n , appelé aussi **terme d'indice** n, se note u_n.
L'ensemble de tous ces termes, qui constitue la suite, est noté u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus souvent (u_n).

Remarques

- Une suite est en fait une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : à chaque entier n elle fait correspondre une et une seule image u_n
- Comme l'ensemble $\mathbb{N}$ a pour plus petit élément 0, il est très courant de noter u_0 le premier terme de la suite. En fonction des situations, on choisira de démarrer à u_1 ou u_0 (ou même encore d'autres indices) suivant ce qui sera le plus naturel.

Il existe plusieurs modes de génération d'une suite :

- Avec une formule de *récurrence* : Les termes sont définis *de proche en proche*. Une formule de récurrence explique comment passer d'un terme au suivant. C'est en général une relation entre deux termes consécutifs u_n et u_{n+1}. Dans ce cas, il faut également préciser la valeur et l'indice du premier terme de la suite. Pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence, il faut *a priori* d'abord calculer tous les termes précédents.
- Avec une formule *explicite* : Les termes ne dépendent que de leur rang n. On peut calculer n'importe quel terme directement. On se rapproche davantage de la notion de fonction qu'on a l'habitude d'utiliser. u_n est défini à partir d'une formule dépendant de n.

Méthode

Pour bien comprendre et étudier une suite, il est impératif de savoir avant tout si la suite est une suite **récurrente** ou une suite **explicite**. Les techniques d'étude ne seront pas les mêmes dans les deux cas.

Exemples

- La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est une suite **récurrente**.

  Pour déterminer un terme de la suite, on prend le précédent et on le multiplie par 2 puis on soustrait 3 au résultat, et ainsi de suite en démarrant avec le nombre 5.

  $u_0 = 5$ d'après l'énoncé.

  $u_1 = 2u_0 - 3 = 2\times 5 - 3 = 7$ et $u_2 = 2\times 7 - 3 = 11$ et $u_3 = 2\times 11 - 3 = 19$ ...

- La suite (v_n) définie par $v_n = 2^n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite **explicite**.

  Pour calculer le n-ième terme de cette suite, on élève 2 à la puissance n puis on soustrait 5. Il n'est pas nécessaire de connaître le terme précédent pour le calculer, seul son **rang** est nécessaire.

  $v_0 = 2^0 - 5 = 1 - 5 = -4$ et $v_1 = 2^1 - 5 = 2 - 5 = -3$ et $v_7 = 2^7 - 5 = 128 - 5 = 123$ ...

2 Représentation graphique

2.1 Cas général

Méthode

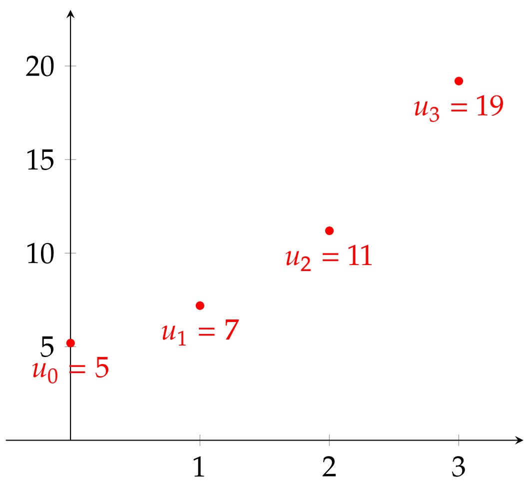
Pour représenter graphiquement une suite numérique (u_n), on dessine le **nuage de points** de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ pour n entier naturel. On trouve donc en **abscisse** les **rangs** n (entiers positifs) et en **ordonnée** les **termes** u_n.

Remarques

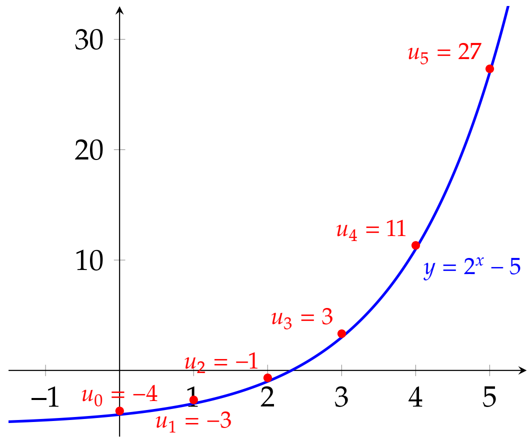
- **Ces points ne doivent pas être reliés**, contrairement à ce que l'on fait habituellement pour les fonctions. En effet, une fonction est définie sur un intervalle : entre deux valeurs de cet intervalle, on peut toujours en trouver une troisième. Par contre, entre deux nombres entiers consécutifs, il n'y a rien.
- Cette technique ne diffère pas vraiment de la technique habituelle pour représenter les fonctions : si la suite (u_n) est définie par une formule explicite du type $u_n = f(n)$, on peut tracer la courbe de la fonction f, puis y matérialiser les points d'abscisse entière.

Exemples

- Pour (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$, d'après les calculs précédents, on a la représentation :



- Pour (v_n) définie par $v_n = 2^n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :



2.2 Cas d'une suite récurrente

Dans le cas d'une suite récurrente, on utilise souvent une autre technique, qui a l'avantage de ne pas nécessiter le calcul des termes de la suite, et qui permet de visualiser rapidement certaines propriétés de la suite.

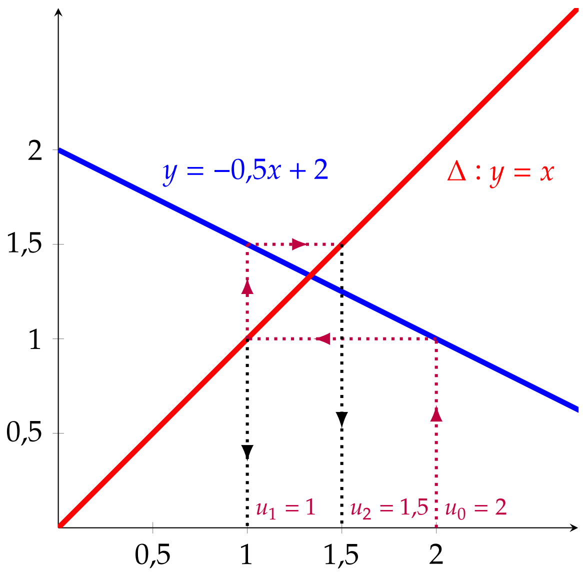
Méthode

Si la suite récurrente est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut la représenter sur un axe gradué, en général celui des abscisses :

- On cherche l'expression de la fonction f associée.
- On la représente dans un repère et on trace également la droite Δ d'équation $y = x$.
- On place le premier terme au niveau de sa valeur sur l'axe des abscisses.
- On cherche son image par la fonction f sur l'axe des ordonnées : c'est u_1.
- On ramène u_1 sur l'axe des abscisses grâce à la droite Δ.
- Et on recommence... on trace alors une « toile » en « escalier » ou en « escargot » qui permet de *conjecturer* beaucoup de choses concernant la suite (sens de variation, existence d'une valeur limite).

Exemple Représentons graphiquement la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -0,5u_n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

La fonction associée à cette suite récurrente est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5x + 2$.



3 Sens de variation

Définitions

Une suite (u_n) est dite :

- **croissante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **décroissante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **constante** (à partir de n_0) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout n ($\geqslant n_0$)
- **monotone** si elle ne change pas de sens de variation

Remarque On définit de la même façon une suite strictement croissante ou strictement décroissante, il suffit de changer l'inégalité large par une inégalité stricte.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite :

- on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ entre deux termes consécutifs ;
- on étudie son signe ;
- si la différence est toujours **positive**, alors la suite est **croissante** et si la différence est toujours **négative**, alors la suite est **décroissante**.

Exemple Étudions les variations de (v_n) vue plus haut et qui semble croissante, même strictement croissante, d'après sa représentation graphique.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \left[2^{n+1} - 5\right] - \left[2^n - 5\right] = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2 - 2^n \times 1 = 2^n(2-1) = 2^n > 0$$

La quantité est strictement positive, et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) est une suite strictement croissante.

Remarques Dans certains cas, on peut également utiliser d'autres méthodes :

- Si la suite est **explicite** du type $u_n = f(u_n)$, on peut étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
- Si la suite est une suite de termes **strictement positifs**, on peut aussi calculer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.