1

Polynômes du second degré

Résumé

Après avoir étudié les fonctions affines, la fonction carré, la fonction inverse et la fonction racine carrée, nous allons élargir le catalogue de fonctions usuelles avec les fonctions polynomiales du second degré. Une application du chapitre sera de pouvoir enfin résoudre certaines équations de degré 2 qui ne peuvent pas être factorisées facilement.

1 Différentes formes d'écriture

1.1 Forme développée réduite

Définition

On appelle **polynôme du second degré** ou **trinôme** une expression de la forme

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ des réels fixés tels que } a \neq 0$$

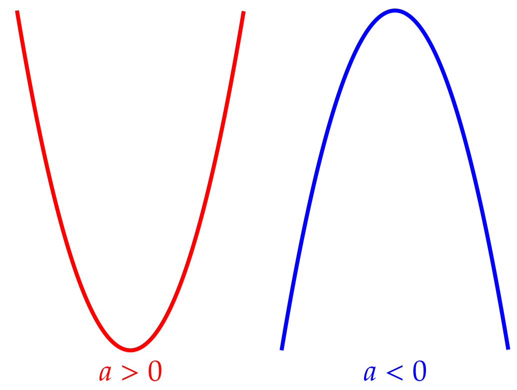
ou toute autre expression qui peut se mettre sous cette forme, qu'on appelle **forme développée réduite**.
Les nombres a, b, c sont les **coefficients** du polynôme.

Remarque *Polynôme* signifie *plusieurs monômes*. Un monôme désigne une expression de la forme ax^n, où $a \in \mathbb{R}$ est le **coefficient** du monôme, et $n \in \mathbb{N}$ est son **degré**.

Exemples $f(x) = 3x^2 - x + 2$ ou $f(x) = x^2$ sont des polynômes du second degré.

Remarques

- On va souvent considérer des fonctions dont l'expression est un polynôme : qu'on appelle **fonctions polynomiales**. On veillera à ne pas confondre la fonction avec son expression.
- La courbe représentative d'une fonction *polynomiale* est toujours une **parabole**. Elle est « ouverte vers le haut » si a est positif, elle est « ouverte vers le bas » si a est négatif.



1.2 Forme factorisée

Définition

Dans certains cas, un polynôme du second degré *peut* aussi s'écrire sous la forme

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

où a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme.
Cette écriture s'appelle la **forme factorisée** du polynôme.

Propriété

Les **racines** du polynôme sont les seules valeurs qui annulent le polynôme.
Ce sont les abscisses des **points d'intersection** de la parabole avec l'axe des abscisses.

Démonstration. [Démonstration admise] □

Exemples

- Soit $f(x) = 5(x - 6)(x + 1)$. Alors, 6 et -1 sont les racines de $f(x)$, ce qui est cohérent avec la propriété précédente car les solutions réelles de l'équation produit $5(x - 6)(x + 1)$ sont 6 et -1.

- Soit $f(x) = x^2 - 16$. Les racines du polynôme sont, cette fois, 4 et -4 car $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4)(x-4)$.

1.3 Forme canonique

Définition

La **forme canonique** d'un tel polynôme est celle qui s'écrit en utilisant une seule fois la lettre x, et qui permet de trouver facilement le **programme de calcul** de la fonction.
Elle est toujours de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Exemple Si $f(x) = 4(x+1)^2 - 3$, le programme de calcul de l'image de x par la fonction d'expression $f(x)$ est :

- Ajouter 1
- Élever au carré
- Multiplier par 4
- Soustraire 3.

Propriété

Dans la forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, a est le coefficient de plus haut degré (le même que celui de la forme développée), et α et β sont les **coordonnées du sommet** de la parabole qui représente f.

Démonstration.
- Le point $S(\alpha\,;\beta)$ est bien un point de la parabole car $f(\alpha) = a \times 0 + \beta = \beta$.
- Comme $(x-\alpha)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

si $a > 0$	si $a < 0$
$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \geqslant 0$	$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$	$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leqslant \beta$
$\Leftrightarrow f(x) \geqslant \beta$	$\Leftrightarrow f(x) \leqslant \beta$
β est le minimum de f	β est le maximum de f

□

Propriété

Une parabole est symétrique par rapport à la droite verticale passant par son sommet.

Démonstration. Si on reprend les notations de la propriété précédente, la droite verticale en question est la droite d d'équation $x = \alpha$. La parabole est symétrique par rapport à d si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\alpha + t) = f(\alpha - t)$.
C'est le cas puisque si $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\alpha+t) = a(\alpha+t-\alpha)^2 + \beta = at^2 + \beta = a(-t)^2 + \beta = a(\alpha - t - \alpha)^2 = f(\alpha - t).$$

□

2 Discriminant et racines

2.1 Mise sous forme canonique

Propriété

Dans la forme canonique, α et β se déterminent grâce aux formules suivantes :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration. On a

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

On retrouve bien la formule donnée pour α et on a vu plus haut déjà que $f(\alpha) = \beta$. □

Algorithmique & Programmation

En Python, on peut créer une fonction permettant de calculer les valeurs de α et de β à partir des coordonnées du trinôme :

```python
def formecanonique(a,b,c):
    alpha=-b/(2*a)
    beta=a*alpha**2+b*alpha+c
    return alpha,beta
```

2.2 Discriminant

Définition

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.
On appelle **discriminant** et on note Δ le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Propriété

Le polynôme ne peut être factorisé que si Δ est positif.

Démonstration. Dans la forme canonique, avec les formules ci-dessus, on a :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Lorsque Δ est positif, on voit apparaître dans les crochets une différence de deux carrés, que l'on sait factoriser à l'aide de l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$;
- Quand Δ est strictement négatif, on y retrouve une somme de deux nombres positifs.

□

2.3 Calcul des racines

Théorème

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme a **deux racines réelles** x_1 **et** x_2 que l'on calcule grâce aux formules

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme a **une seule racine**, appelée **racine double**. Elle est égale à $\alpha = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'a **pas de racine réelle**. Il ne se factorise pas. La forme canonique est également la forme factorisée.

Démonstration. On a $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Il suffit de résoudre l'équation produit $f(x) = 0$ pour trouver les racines de $f(x)$. □

Exemples

- Pour $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$, $\Delta = \frac{(-3)^2 - 4 \times 5 \times 4}{2 \times 5} = \frac{9 - 80}{10} = \frac{-71}{10} < 0$ donc le polynôme n'admet pas de racine réelle.
- Pour $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $\Delta = \frac{2^2 - 4 \times 2 \times -1}{2 \times 2} = \frac{4 + 8}{4} = 3 > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-3 - \sqrt{3}}{4}$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 2} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{4}$.

2.4 Résolution d'équations de degré 2

Remarque Jusqu'à maintenant, pour résoudre une équation de degré 2, le seul outil dont on disposait était la « règle du produit nul » : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.
Nous avons désormais la possibilité d'utiliser les formules discriminant/racines au lieu de factoriser en équation produit nul, **à condition** tout de même d'avoir une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$.

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré, on peut :

- développer ;
- tout passer dans le même membre pour avoir ... $= 0$;
- calculer Δ et les éventuelles racines ;
- conclure en donnant l'ensemble des solutions (suivant les cas, $\varnothing$, $\{\alpha\}$ ou $\{x_1 ; x_2\}$).

2.5 Somme et produit des racines

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ayant deux racines x_1 et x_2. Alors :

- la somme des racines est égale à $\dfrac{-b}{a}$;
- le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}$.

Démonstration. Il suffit de calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 avec les formules des racines. □

Remarques

- On a donc $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a} = \alpha$, autrement dit la moyenne des racines est égale à α.

  On retrouve ici l'idée de symétrie de la parabole, par rapport à la verticale passant par son sommet. C'est une façon de déterminer α (et donc la forme canonique) directement à partir de la forme factorisée, sans passer par l'étape développée.

- Ces propriétés sont intéressantes lorsque l'une des deux racines est une *racine évidente*, c'est-à-dire une racine que l'on peut *voir* (souvent un petit nombre entier). On utilise alors la formule de la somme ou du produit pour déterminer la deuxième racine sans avoir à calculer Δ (mais dans tous les cas, on peut aussi déterminer les racines avec la méthode habituelle).