

# 3

## CALCUL LITTÉRAL



Le calcul littéral a évolué à travers l'histoire, mais son développement notable remonte aux mathématiciens babyloniens et grecs. Cependant, c'est au Moyen Âge que les algébristes arabes ont posé les bases modernes du calcul littéral. Il permet de travailler avec des nombres généraux et est essentiel en mathématiques et sciences.

### 1 Rappels

#### 1.1 Développer

##### Définition

**Développer** une expression, c'est transformer un produit en une somme.

##### Propriété | Distributivité

Soient  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ , on développe de la façon suivante :

$$\blacktriangleright a(b + c) = ab + ac$$

$$\blacktriangleright (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**Exemple**  $(3 + 8)(1 + 10) = 3 \times 1 + 3 \times 10 + 8 \times 1 + 8 \times 10 = 3 + 30 + 8 + 80 = 121$

**Remarque** On a aussi, pour  $e \in \mathbf{R}$  :

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + bc + bd + ae + be$$

#### Exercice

Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Développer les expressions suivantes :

$$\blacktriangleright 3(x + 2)$$

$$\blacktriangleright (12x + 2)(x + 5x)$$

$$\blacktriangleright (4x + 10)(7x + 2)$$

$$\blacktriangleright (4 + x + 2x^2)(x + 3)$$

#### 1.2 Factoriser

##### Définition

**Factoriser** une expression, c'est transformer une somme en un produit.

##### Propriété | Factorisation

Soient  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , on factorise de la façon suivante :

$$ab + ac = a(b + c)$$

**Exemple**  $21 + 30 + 3 = 3 \times 7 + 3 \times 10 + 3 \times 1 = 3(7 + 10 + 1) = 3 \times 18 = 54$

**Remarque** On a aussi, pour  $d \in \mathbf{R}$  :

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

#### Exercice

Soient  $x, y \in \mathbf{R}$ . Factoriser

$$\blacktriangleright 2x + 2$$

$$\blacktriangleright 14x^2 + 7x$$

$$\blacktriangleright ab + ac + ad + ae + af \text{ où } a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}.$$

## 2 Identités remarquables

### Propriété | 1<sup>ère</sup> identité remarquable

Soient  $a \in \mathbf{R}$  et  $b \in \mathbf{R}$ , alors :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

*Démonstration.* On développe  $(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b)$ .

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

### Propriété | 2<sup>de</sup> identité remarquable

Soient  $a \in \mathbf{R}$  et  $b \in \mathbf{R}$ , alors

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

*Démonstration.* Similaire à la démonstration précédente.

□

### Propriété | 3<sup>e</sup> identité remarquable

Soient  $a \in \mathbf{R}$  et  $b \in \mathbf{R}$ , alors

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

*Démonstration.* On part du membre de droite et on développe.

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

## 3 Équations

### 3.1 Rappels

#### Définition

Une **équation d'inconnue**  $x$  est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu  $x$ .

Résoudre dans un ensemble  $E$  une telle équation, c'est déterminer toutes les valeurs de  $x$  appartenant à  $E$  qui rendent l'égalité vraie.

Ces valeurs sont dites les **solutions** dans  $E$  de l'équation.

**Remarque** Des équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont exactement les mêmes solutions. On utilisera le symbole  $\Leftrightarrow$  pour le signaler.

#### Propriétés | Manipulations algébriques

Les opérations suivantes transforment une équation en une équation équivalente :

- ▶ Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres de l'équation.
- ▶ Multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un nombre **non-nul**.
- ▶ Développer, factoriser ou réduire l'un des deux membres

### 3.2 Équation de degré 1

#### Définition

On appelle **équation de degré 1** une équation de la forme :

$$ax + b = cx + d$$

où  $a, b, c, d \in \mathbf{R}$  et  $a - c \neq 0$ .

**Remarque** On peut réécrire l'équation précédente sous la forme équivalente :

$$(a - c)x + (b - d) = 0$$

### Théorème | Solution

Soient  $a \in \mathbf{R}^*$  et  $b \in \mathbf{R}$ , l'équation  $ax + b = 0$  admet  $\frac{-b}{a}$  comme unique solution.

**Exemple** Considérons l'équation de degré 1, avec  $x \in \mathbf{R}$

$$4x - 10 = 2$$

Alors on peut la résoudre de la façon suivante :

$$\begin{aligned}4x - 10 &= 2 \\ \Leftrightarrow 4x - 10 + 10 &= 2 + 10 \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{4} &= \frac{12}{4} \\ \Leftrightarrow x &= 3\end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions dans  $\mathbf{R}$  est  $\mathcal{S} = \{3\}$ .

### 3.3 Équation de degré 2

#### Définition

On appelle **équation du second degré** une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où  $a, b, c \in \mathbf{R}$  et  $a \neq 0$ .

### Théorème | Solutions

Cette équation admet 2, 1 ou aucune solution(s) suivant les valeurs de  $a, b$  et  $c$ .

*Démonstration.* Admise.  $\square$

**Remarque** Si  $b = 0$ , l'équation est équivalente à une équation de la forme  $x^2 = d$  avec  $d \in \mathbf{R}$ .

**Exemple** Regardons l'équation :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

On peut vérifier que 1 et 2 sont solutions de cette équation.

### 3.4 Règles du produit/quotient nul

#### Théorème | Règle du produit nul

Soient  $A(x)$  et  $B(x)$  deux expressions algébriques.

Alors :

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

**Exemple** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. L'équation  $(x - a)(x - b) = 0$  admet  $a$  et  $b$  comme solutions, par la règle du produit nul.

#### Exercice

Résoudre chaque équation dans  $\mathbf{R}$  en se ramenant à une équation de degré 1 ou de type "produit nul".

►  $(2x - 1)(x + 3) - (2x - 1)(3x - 1) = 0$

►  $(x - 2)(x + 3) = (x - 5)(x + 1)$

►  $5x^2 = 3x$

►  $(x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$

#### Théorème | Règle du quotient nul

Soient  $A(x)$  et  $B(x)$  deux expressions algébriques.

Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$$

**Remarque** Les solutions de  $B(x) = 0$  sont des **valeurs interdites** de l'équation  $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ .

**Exemple** On considère l'équation suivante :

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = 0$$

Elle est équivalente par la règle du quotient nul à :  $x + 3 \neq 0$  et  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .

### 3.5 Règle des produits en croix

#### Propriété | Produit en croix

Soient  $a \in \mathbf{R}$ ,  $b \in \mathbf{R}^*$  et  $c \in \mathbf{R}$ . Alors l'équation  $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$  est équivalente à  $ax = bc$  dans  $\mathbf{R}^*$ .

*Démonstration.* On multiplie notre équation par  $bx$  (non nul si  $x \in \mathbf{R}^*$ ) pour obtenir l'équation équivalente attendue.  $\square$

**Exemple** On a équivalence des équations  $2 = \frac{1}{x}$  et  $x = \frac{1}{2}$  dans  $\mathbf{R}^*$ .

**Remarque** On peut généraliser la règle du produit en croix à des équations appelées **équations quotients**. C'est ce que nous voyons dans le résultat suivant.

#### Théorème | Équations quotients

Soient  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  et  $D(x)$  des expressions algébriques.

Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$$

**Exemples**  $\blacktriangleright \frac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow -3x+1 = x-5$   
et donc  $\frac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .

$\blacktriangleright \frac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow 3-x = 2(x+7)$  et donc  $\frac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow -11 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{-11}{3}$ .

### Exercice

1. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations de degré 1 suivantes.

a)  $\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = \sqrt{8}x$

c)  $-10^5x + 10^3 = 10^4$

b)  $5x + 3 = 5x - 3$

2. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations produits suivantes.

a)  $(x+1)(x-2) = 0$

c)  $(2-7x)(9x+4) = 0$

b)  $x(8x-2) = 0$

d)  $x(6x-4)(3x+1) = 0$

3. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations quotients suivantes.

a)  $\frac{2x-1}{x} = 0$

c)  $\frac{x+7}{(2x-1)(x-\frac{1}{3})} = 0$

b)  $\frac{(-4x+3)(x-1)}{5x-5} = 0$

4. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations de degré 2 suivantes.

a)  $9 - x^2 = 0$

b)  $x^2 + 2x + 1 = 0$

c)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$

5. Résoudre dans  $\mathbf{R}$  les équations suivantes.

a)  $(x+1)(x-2) = (x-2)(4x-7)$

b)  $\frac{7x+21}{6+x} = \frac{x+3}{6+x}$

c)  $\frac{x}{x+1} = -1$