

5

DÉRIVATION

Résumé

Pan incontournable de l'analyse, la dérivation est un domaine des mathématiques aux applications diverses. La principale application que l'on abordera ici est l'étude des variations d'une fonction dérivable.

Attention

Dans toute la suite, I désignera un intervalle ouvert et f une fonction définie sur I .

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

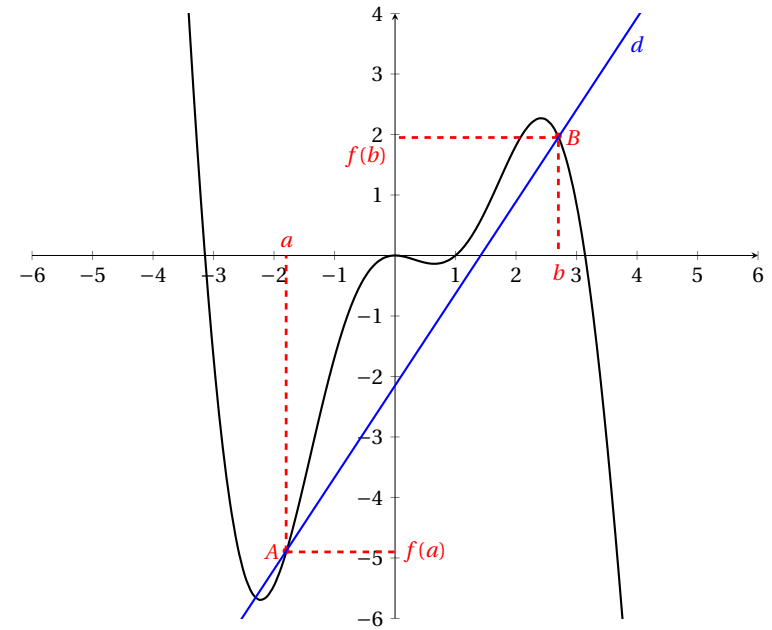
1.1 Taux d'accroissement

Définition

Soient $a \in I$ et $b \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et b le nombre suivant :

$$\tau_{f,a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Remarque $\tau_{f,a,b}$ représente graphiquement le **coefficient directeur** (ou la pente) de la droite d passant les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$.



Exemples ► Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 + 5$.

Le taux d'accroissement de f entre 2 et 3 est :

$$\tau_{f,2,3} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{(5 \times 3^2 + 5) - (5 \times 2^2 + 5)}{1} = 5 \times (9 - 4) = 25.$$

► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{3}{x}$.

Le taux d'accroissement de f entre 1 et 4 est :

$$\tau_{f,1,4} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{1}}{3} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

1.2 Nombre dérivé

Définition

Soit $a \in I$ un nombre **fixé**.

Considérons, pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement $\tau(h)$ de f entre a et $a + h$:

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si, quand h prend des valeurs infiniment proches de 0 ($h \rightarrow 0$), $\tau(h)$ se stabilise autour d'une valeur limite, alors on dira que f est **dérivable en a** . La valeur limite est appelée **nombre dérivé** de f en a , notée $f'(a)$.

On notera à l'avenir :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(a).$$

Remarque Graphiquement, le nombre dérivé correspond au *taux d'accroissement instantané* autour de a . Il donne une tendance locale des variations de f .

Exemples ►

► Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$. Montrons que f est **dérivable en 3**.

Soit $h \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \frac{(2 \times (3+h)^2 - 7 \times (3+h) + 1) - (2 \times 3^2 - 7 \times 3 + 1)}{h} \end{aligned}$$

On développe et on réduit au numérateur, puis on simplifie par h qui est non nul.

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{2h^2 + 5h}{h} \\ &= 2h + 5 \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, alors les valeurs de $2h + 5$ tendent vers 5.

Ainsi, f est dérivable en 3. De plus, $f'(3) = 5$ car $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 5$.

► Soit f définie sur $[6; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-6}$. f n'est **pas dérivable** en 6.

En effet, si $h \neq 0$ et $\tau(h) = \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$, alors :

$$\begin{aligned} \tau(h) &= \frac{\sqrt{(6+h)-6} - \sqrt{6-6}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned}$$

$\tau(h)$ n'admet pas de valeur limite si $h \rightarrow 0$. Les valeurs sont de plus en plus grandes et sans plafond, on notera $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = +\infty$.

1.3 Fonction dérivée et dérivées usuelles

Définition

Soit I' l'ensemble sur lequel f est dérivable, c'est-à-dire tel que pour tout $a \in I'$, f est dérivable en a .

On construit la **fonction dérivée** de f , notée f' , comme la fonction définie sur I' telle que l'image de $x \in I'$ est le nombre dérivé $f'(x)$.

Remarque On souhaiterait déterminer de manière générale tous les nombres dérivés de f . Nous allons le faire pour les fonctions usuelles, c'est-à-dire, celles que l'on utilise très souvent.

Théorème | Fonctions constantes

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = c$ avec c une constante réelle.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Théorème | Fonctions affines

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

Théorème | Fonction carré

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

Théorème | Fonction cube

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

Théorème | Fonction monôme

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$, n étant un nombre entier naturel non nul.
 f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Théorème | Fonction racine carrée

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Théorème | Fonction inverse

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$.
 f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Théorème | Fonctions inverses

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x^n}$, n étant un entier naturel non nul.
 f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.

2.1 Somme

Propriété

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I .
La fonction $f + g$ définie sur I par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

On notera généralement $(f + g)' = f' + g'$.

Exemples On peut calculer des dérivées de fonctions composées à partir des fonctions usuelles.

► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

► Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 5x - 8 + \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}.$$

2.2 Produit

Propriété | Produit par un scalaire

Soient f une fonction définie et dérivable sur I , et $k \in \mathbb{R}$ une constante réelle.
La fonction kf définie sur I par $(kf)(x) = k \times f(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(kf)'(x) = k \times f'(x).$$

On notera généralement $(kf)' = kf'$.

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + x - 10$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 7 \times 3x^2 - 2 \times 2x + 1.$$

2 Opérations sur les dérivées

Théorème | Produit de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I .

La fonction fg définie sur I par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

On notera généralement $(fg)' = f'g + g'f$.

Exemples ► Soit f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = (10 + 5x) \times \frac{1}{x}$.

$f(x)$ est sous la forme $f(x) = u(x)v(x)$.

$$u(x) = 10 + 5x \text{ et } u'(x) = 5.$$

$$v(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = 5 \times \frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times (10 + 5x)$$

$$\text{C'est-à-dire, } f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{10}{x^2} - \frac{5x}{x^2} = -\frac{10}{x^2}.$$

► Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{x}\right)$.

$f(x)$ est sous la forme $f(x) = u(x)v(x)$.

$$u(x) = \sqrt{x} \text{ et } u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$v(x) = 1 + \frac{3}{x} \text{ et } v'(x) = -\frac{3}{x^2}.$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(1 + \frac{3}{x}\right) + \left(-\frac{3}{x^2}\right) \times \sqrt{x}$$

$$\text{C'est-à-dire, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} - \frac{3}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}.$$

2.3 Quotient

Théorème | Quotient de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . Supposons que pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

La fonction $\frac{f}{g}$ définie sur I par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

On notera généralement $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Exemple Soit f définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{3x+2}{7x-1} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 7$.

f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; +\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{1}{7}\right[\cup \left]\frac{1}{7}; +\infty\right[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = \frac{3 \times (7x-1) - 7 \times (3x+2)}{(7x-1)^2}$$

On développe et réduit le numérateur : $f'(x) = -\frac{17}{(7x-1)^2}$.

2.4 Composition

Théorème | Composée affine

Soient a, b deux réels et f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ pour tout x tel que $ax+b \in I$ est dérivable en de tels x et :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Exemple Soit f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x-8}$. f est dérivable sur $]2; +\infty[$ et pour tout $x \in]2; +\infty[$, $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-8}} = \frac{2}{\sqrt{4x-8}}$.

3 Applications

3.1 Étude des variations d'une fonction

Propriétés | Lien dérivée/variations

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I .

- $f' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I .
- $f' = 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est constante sur I .
- $f' \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I .

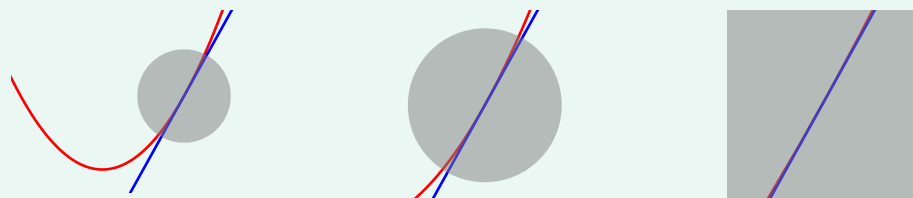
Remarque Désormais, nous allons pouvoir construire des **tableaux de variations** à partir d'**études du signe de la dérivée**.

3.2 Tangente à une courbe

Définition

Si la courbe \mathcal{C}_f d'une fonction f est bien "lisse" au voisinage d'un point $A(a; f(a))$, on appelle **tangente** à \mathcal{C}_f en A la droite qui épouse localement la direction de cette courbe.

Autrement dit, en se rapprochant du point A , la courbe va finir par se confondre avec sa tangente en ce point.



Propriété | Équation de la tangente

Si f est dérivable en a , alors $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de $T_a(f)$, la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Cette tangente admet pour **équation** :

$$T_a(f) : y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Exemple Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{x}\right)$. Déterminons l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.

On a vu plus haut que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

Ainsi, $f(1) = \sqrt{1} \left(1 + \frac{3}{1}\right) = 4$ et $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{3}{2 \times 1 \sqrt{1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

De plus, $f'(1) \times (x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 4 = -x + 5$. On peut donc donner l'équation attendue.

$$T_1(f) : y = -x + 5$$

