2

Limites de suites

Résumé

Nous allons étudier le comportement asymptotique des suites réelles. C'est-à-dire, nous souhaitons donner une idée de comment vont être les termes de la suite pour des rangs de plus en plus grands jusqu'à potentiellement *l'infini*.

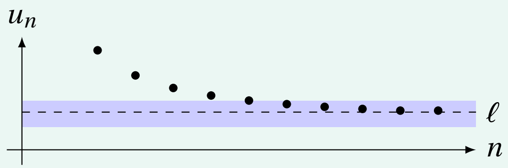
1 Convergence d'une suite

1.1 Suites convergentes

Définition 1

Une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. ℓ est appelée **limite** de la suite (u_n).
On utilisera les notations :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

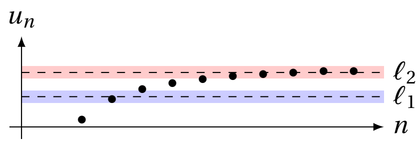


Exemple 2 Une suite constante égale à ℓ converge vers ℓ.

Théorème 3

Si (u_n) converge vers un réel, cette limite est unique.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il y ait deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Ainsi, la différence absolue $|\ell_2 - \ell_1|$ est strictement positive. On l'appelle ϵ.
Les intervalles $I_1 = \left]\ell_1 - \frac{\epsilon}{4}; \ell_1 + \frac{\epsilon}{4}\right[$ et $I_2 = \left]\ell_2 - \frac{\epsilon}{4}; \ell_2 + \frac{\epsilon}{4}\right[$ contiennent chacun tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0 (on peut prendre le même rang pour ℓ_1 et ℓ_2 sans perdre de généralité).



Cependant, c'est impossible puisque les intervalles sont disjoints par contruction et les termes de rang supérieurs à n_0 seront soit strictement dans I_1 soit strictement dans I_2. □

1.2 Suites divergentes

Définition 4

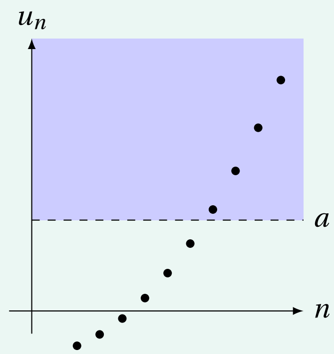
Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Exemple 5 La suite de terme général $(-1)^n$ ne converge pas car elle alterne indéfiniment entre 1 et -1. Elle est donc divergente.

Définition 6

Une suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On utilisera les notations :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty.$$



Exemple 7 Toute suite arithmétique de raison $r > 0$ tend vers $+\infty$.

Remarques 8 ► On peut définir de même une suite qui **tend vers** $-\infty$ avec des intervalles $]-\infty\,;a[$.

► Toute suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

1.3 Convergences usuelles

Propriété 9

Les suites de termes général n, n^2, $\sqrt{n}$ et, dans le cas général, n^α avec $\alpha > 0$ sont **divergentes** de limite $+\infty$.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) de terme général n^α.
On considère I un intervalle $]a\,;+\infty[$ avec $a > 0$. Cherchons un rang n_0 tel que tous les termes de la suites soient dans I à partir de n_0.
Posons n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $a^{\frac{1}{\alpha}}$.
Par stricte croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbf{R}_+$ (car $\alpha > 0$), on a que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad n^\alpha \geqslant n_0^\alpha > \left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = a$$

C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0} > a$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □

Propriété 10

Les suites de termes général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et, dans le cas général, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ sont **convergentes** de limite 0.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.
On considère I un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a > 0$. Cherchons un rang n_0 tel que tous les termes de la suites soient dans I à partir de n_0.
Posons n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{\alpha}}}$.
Par stricte décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbf{R}_+$ (car $\alpha > 0$), on a que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 < \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n_0^\alpha} < \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = a$$

C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, 0 < u_n \leqslant u_{n_0} < a$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □

Algorithmique & Programmation 11 | Algorithme de seuil

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2n^3 - 7$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ mais on souhaite obtenir le premier rang n à partir duquel la suite reste dans un intervalle $]a\,;+\infty[$ pour tout $a \in \mathbf{R}$.
C'est possible avec la fonction Python suivante.

```python
def seuil(a):
    u=-7
    n=0
    while u<=a:
        n=n+1
        u=2*n**3-7
    return n
```

Le code `seuil(1000)` permet de savoir que pour $a = 1000$ alors $n = 8$.

2 Opérations sur les limites

On considère dans cette section deux suites (u_n) et (v_n).

Théorème 12 | Limite d'une somme

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemples 13 ► $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + n = +\infty$.

► $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} - 3n = -\infty$.

Remarque 14 Le dernier cas indiqué dans le tableau est appelé une **forme indéterminée.** Cela veut dire qu'on ne peut pas directement déterminer la limite de la somme et qu'il va falloir l'étudier plus en détail.

Théorème 15 | Limite d'un produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Remarque 16 Dans le cas d'un produit "entre infinis", la règle des signes s'applique aussi.

Exemples 17

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 7-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=7$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(7-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1\times7=7.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-n^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-\sqrt{n}n^3=-\infty$.

Théorème 18 | Limite d'un quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	?	?

Si $v_n>0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$

Si $v_n<0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 19 $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{7}{n}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\frac{7}{n}}{n^4}=0.$

3 Comparaisons et limites

Théorème 20 | Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Démonstration. Prouvons le premier point. La preuve sera similaire pour le second.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et notons n_1 le rang évoqué dans l'énoncé.
Soit $I=]a;+\infty[$ avec $a\in\mathbf{R}$.
Montrons qu'il existe un rang tel qu'après, tous les termes de la suite (v_n) soient dans I.
Par hypothèse sur (u_n), il existe un rang n_2 tel que :

$$\forall n\geqslant n_2, u_n>a.$$

En considérant n_0, le maximum entre n_1 et n_2, on a bien :

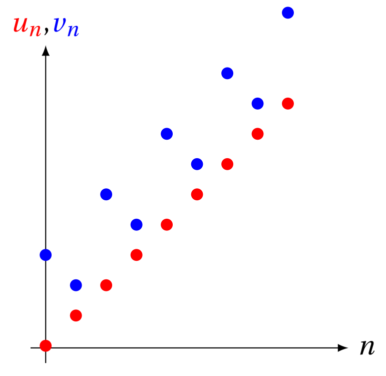
$$\forall n\geqslant n_0, v_n\geqslant u_n>a.$$

□

Exemple 21 Soit u_n de terme général n et v_n de terme général $n+2+(-1)^n$.
On a :

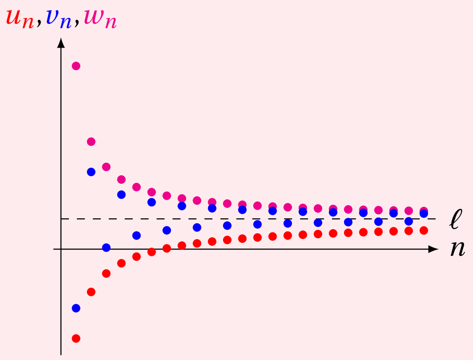
$$\forall n\geqslant0, u_n\leqslant v_n \text{ car } \forall n\in\mathbf{N}, 2+(-1)^n\geqslant1.$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2+(-1)^n=+\infty$.



Théorème 22 | Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ alors (v_n) converge aussi vers ℓ.



Démonstration. Appelons n_1 le rang évoqué en énoncé.
Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ. Montrons qu'il contient (v_n) à partir d'un certain rang n_0.
(u_n) est contenue dans I à partir d'un rang n_u et (w_n) à partir de n_w par définition de la convergence vers ℓ.
En posant n_0 le maximum entre n_1, n_u et n_w, on a bien que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad a < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < b.$$

□

Corollaire 23 | Comportement asymptotique des suites géométriques

Soit $q \in \mathbf{R}$.

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

Démonstration. On admet pour le moment que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x > 0, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

- Si $q > 1$, en posant $q = 1 + x$, on a que $\forall n \in \mathbf{N}, q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Ainsi, par le théorème de comparaison, comme $1 + nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $q = 1$ ou $q = 0$, on est face à suite de termes constants.
- Si $0 < q < 1$, on peut se ramener au premier cas en posant $a = \frac{1}{q}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, q^n = \dfrac{1}{a^n}$ et comme $a > 1$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\dfrac{1}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $-1 < q < 0$, alors on applique le théorème des gendarmes à $-(-q)^n \leqslant q^n \leqslant (-q)^n$ où $0 < -q < 1$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-q)^n = 0$ et donc $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} q^n \leqslant 0$.

□

Remarque 24 On connaît désormais les limites de toutes les suites géométriques en raisonnant sur le premier terme et la raison q.

Définitions 25

Soit (u_n) une suite.

- Si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant M$ pour $M \in \mathbf{R}$, alors (u_n) est **majorée** par M et M est un majorant de (u_n).
- Si $\forall n \in \mathbf{N}, m \leqslant u_n$ pour $m \in \mathbf{R}$, alors (u_n) est **minorée** par m et m est un minorant de (u_n).
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemples 26

- Les suites de terme généraux $(-1)^n$ ou $sin(n)$ sont bornées : majorées par 1 et minorées par -1.
- La suite de terme général $2 + \sqrt{n}$ est minorée par 2.
- Une suite strictement décroissante est majorée par son premier terme.

Théorème 27 | Convergence monotone

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration. Admise. □

Corollaire 28

- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Prouvons le premier point.
Soient (u_n) une suite croissante non majorée et $I =]a;+\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$. Montrons que I contient (u_n) à partir d'un certain rang.
Par non majoration, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > a$. (u_n) étant croissante sur $\mathbf{N}$, on a nécessairement que $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u_{n_0} > a$. C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □

