Chapitre 10

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

I - Parité

Définitions : Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = f(x)$ alors f est **paire**.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = -f(x)$ alors f est **impaire**.

Exemples

Nous avons déjà vu que la fonction carré est paire et que la fonction cube est impaire.

Remarques

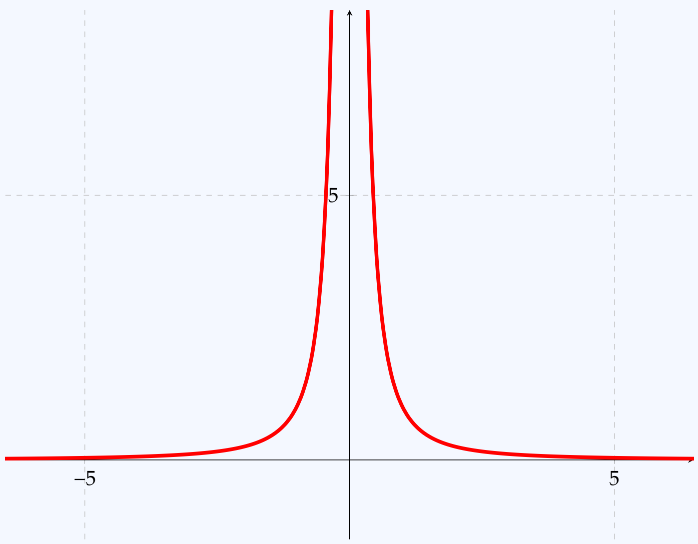
- Notons bien que l'ensemble de définition d'une fonction à parité doit être **symétrique** par rapport à 0 !
- Si une fonction est **paire** alors sa courbe représentative dans un **repère orthogonal** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Si une fonction est **impaire**, il y a une **symétrie centrale par rapport au point** $(0;0)$.
- Une fonction peut être ni paire ni impaire. C'est le cas de la fonction racine carrée.

Exemples

- Soit f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

  Soit $x \in \mathscr{D}$. Tout d'abord, $-x \in \mathscr{D}$ car $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0.

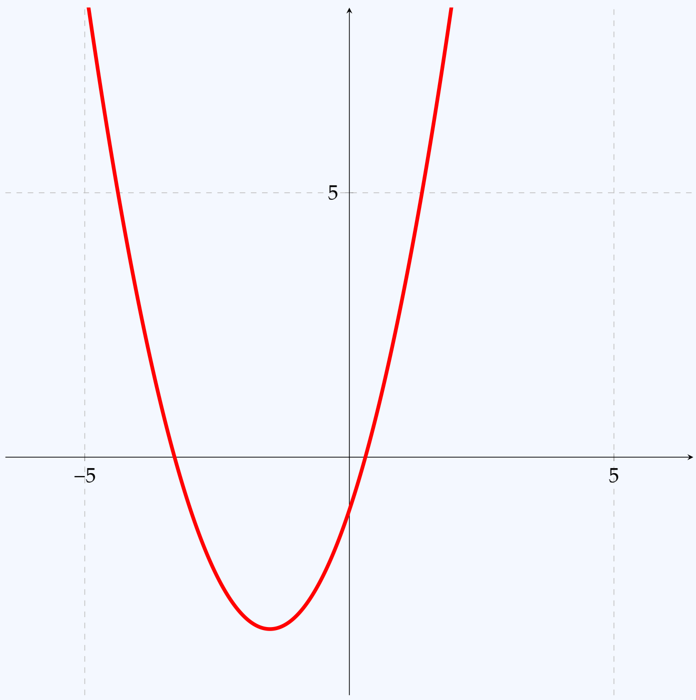
  Enfin, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$. Ainsi, f est **paire** comme on peut le voir ci-dessous.



- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

  Si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) - 1 = x^2 - 3x - 1$.

Pour $x = 2$, $f(-2) = 2^2 - 3 \times 2 - 1 = -3$ mais $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$. Ainsi, $f(-2) \neq f(2) \neq -f(2)$ et f est ni paire ni impaire. On donne sa représentation graphique :



Exercice

Pour chaque fonction f définie par son expression, déterminer $f(-x)$ puis en déduire la parité de la fonction f.

1) $f(x) = 3x^2 - 10$ sur $\mathbb{R}$

2) $f(x) = x^3 - 2x + 7$ sur $\mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$

4) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ sur $[-1\,;1]$

II - Variations

Définitions : Fonction croissante, fonction strictement croissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est croissante sur** I si :
  pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f **est strictement croissante sur** I si :
  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) < f(y)$.

Exemple

La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Définitions : Fonction décroissante, fonction strictement décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est décroissante sur** I si :

pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \geqslant f(y)$.

- On dit que f **est strictement décroissante sur** I si :

  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) > f(y)$.

Exemple

La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x - 2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Une fonction constante sur I est à la fois croissante et décroissante sur I (pas strictement).

Définitions : Fonction monotone, fonction strictement monotone

Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.
Une fonction est **strictement monotone** sur un intervalle I si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I.

Remarque

On résume usuellement les variations d'une fonction dans un tableau de variations.
La tableau de la fonction carré a déjà été vu (strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Les tableaux rappellent aussi quand la fonction n'est pas définie, comme en 0 pour la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

III - Extremums d'une fonction sur un intervalle

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $m \in \mathbb{R}$.

Définition : Maximum

m est le **maximum de** f **sur** I si m est le plus petit des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le maximum m est **atteint en** a.

Exemple

Le maximum de la fonction cube sur l'intervalle $[-2\,;2]$ est 8. En effet, la fonction cube est strictement croissante sur cet intervalle donc le maximum sera l'image du plus grand élément de $[-2\,;2]$.

Remarque

La fonction carré n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$ mais en admet sur des intervalles comme $[-1\,;1]$ ou $[5\,;16]$.

Définition : Minimum

m est le **minimum de f sur I** si m est le plus grand des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le minimum m est **atteint en a**.

Exemple

0 est le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$. En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.

Définition : Extremum

On appelle un **extremum** de f sur I le maximum sur I ou le minimum sur I.

Remarque

On peut visualiser et noter les extremums sur des tableaux de variations. On suppose $I = [A\,;B]$ et qu'on a les tableaux suivants.

x	A		a		B
f	$f(A)$	$\nearrow$	$m = f(a)$	$\searrow$	$f(B)$

Ici, m est le maximum de f sur $[A\,;B]$. On dit qu'il est atteint en a.

x	A		a		B
f	$f(A)$	$\searrow$	$m = f(a)$	$\nearrow$	$f(B)$

Cette fois, m est le minimum de f sur $[A\,;B]$. Il est aussi atteint en a.