

# 1

## CALCUL NUMÉRIQUE



Le développement du calcul numérique, incluant les fractions, les puissances et les racines carrées, remonte à des civilisations anciennes comme les Égyptiens et les Babyloniens. Au fil des siècles, des mathématiciens tels qu'Euclide et Al-Khwarizmi ont contribué à ces concepts. Leurs utilisations sont omniprésentes, des calculs simples de la vie quotidienne aux avancées scientifiques et technologiques contemporaines.

### 1 Fractions

#### Propriété | Simplification

Soient  $a$  un nombre quelconque et  $b$  et  $k$  deux nombres non nuls.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

**Exemple** Simplifions  $\frac{30}{42}$ .

$$\begin{aligned} \frac{30}{42} &= \frac{2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 7} \\ &= \boxed{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

**Remarque** Une fraction qui ne peut plus être simplifiée est dite **irréductible**.

### Exercice

1. Simplifier les fractions suivantes.

►  $\frac{14}{26}$

►  $\frac{33}{51}$

►  $\frac{85}{25}$

►  $\frac{-105}{140}$

2. Écrire chaque expression sous forme d'une fraction irréductible.

►  $\frac{4}{77} \times \frac{21}{6}$

►  $\frac{25}{4} \times \frac{6}{55}$

►  $\frac{26}{121} \times \frac{77}{65}$

#### Propriétés | Somme et différence

Soient  $a$  et  $c$  deux nombres quelconques et  $b \neq 0$ .

►  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

►  $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

**Exemple** Calculons  $\frac{11}{30} + \frac{1}{6} - \frac{4}{5}$  et donnons sa forme irréductible. On réduit au même dénominateur.

$$\begin{aligned} &= \frac{11}{30} + \frac{1 \times 5}{6 \times 5} - \frac{4 \times 6}{5 \times 6} \\ &= \frac{11}{30} + \frac{5}{30} - \frac{24}{30} \end{aligned}$$

On calcule la somme algébrique des numérateurs.

$$\begin{aligned} &= \frac{11 + 5 - 24}{30} \\ &= -\frac{8}{30} \end{aligned}$$

On simplifie.

$$\begin{aligned} &= \frac{-4 \times \cancel{2}}{15 \times \cancel{2}} \\ &= \boxed{-\frac{4}{15}} \end{aligned}$$

### Propriété | Produit

Soient  $a$  et  $c$  deux nombres quelconques et  $b$  et  $d$  non nuls.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

**Exemple** Calculons  $\frac{3}{14} \times \frac{22}{15}$ .

$$\frac{3}{14} \times \frac{22}{15} = \frac{3 \times 22}{14 \times 15} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 11}{\cancel{2} \times 7 \times \cancel{3} \times 5} = \boxed{\frac{11}{35}}$$

### Définition | Inverse

L'**inverse** d'une fraction  $\frac{a}{b}$  est la fraction  $\frac{b}{a}$ .

### Propriété | Quotient

Soient  $a$  un nombre quelconque et  $b, c$  et  $d$  non nuls.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

**Remarque** Diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

**Exemples**  $\rightarrow \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$   $\rightarrow \frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{4 \times 7}{3 \times 3 \times 4} = \frac{7}{9}$

### Exercice

1. Simplifier.

a)  $\frac{8}{14} \div \frac{22}{49}$   
b)  $\frac{18}{7} \div \frac{6}{10}$

c)  $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{21}{20}}$

2. Donner sous forme irréductible.

a)  $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{21}{8}$

b)  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

c)  $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$

d)  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} - \frac{2}{5}$

e)  $\frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{7}{6} - 2}$

## 2 Racine carrée

### Définition | Racine carrée

Soit  $a$  un nombre positif.

La **racine carrée** de  $a$ , notée  $\sqrt{a}$ , est l'unique nombre **positif** dont le carré est égal à  $a$ .

### Propriété | Positivité

Ainsi,  $\sqrt{a} \geq 0$  et  $(\sqrt{a})^2 = a$ .

**Exemples**  $\rightarrow \sqrt{1} = 1$

$\rightarrow \sqrt{0} = 0$

$\rightarrow \sqrt{2,25} = 1,5$

$\rightarrow \sqrt{9} = 3$ .

**Exemples**  $\rightarrow \sqrt{1,3^2} = 1,3$

$\rightarrow \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

$\rightarrow \sqrt{-3,6^2} = 3,6$

### Propriétés | Opérations

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si  $b \neq 0$ ,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**Démonstration.** Pour le premier point, on sait que  $(\sqrt{ab})^2 = ab$  et

$$\begin{aligned}(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \\&= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} \\&= (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 \\&= a \times b \\&= ab\end{aligned}$$

Les deux nombres  $\sqrt{ab}$  et  $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$  ont le même carré et sont positifs, donc ils sont égaux. Le second point est démontré de la même manière.  $\square$

**Exemples** ▶  $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \times 100} = \sqrt{36} \times \sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$

▶  $\frac{\sqrt{0,44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{0,44}{11}} = \sqrt{0,04} = 0,2$

### Exercice

1. Écrire  $2\sqrt{3}$  et  $\frac{\sqrt{50}}{5}$  sous la forme  $\sqrt{a}$  où  $a$  est un entier naturel.

*C'est ce qu'on appelle simplifier.*

2. Simplifier les expressions suivantes.

a)  $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

c)  $(3 - \sqrt{5})^2$

e)  $\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}$

b)  $\sqrt{75}$

d)  $\sqrt{\frac{8}{9}}$

3. Calculer la somme  $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$ .

4. Montrer que  $\sqrt{288} + \sqrt{720} = 12(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

## 3 Puissances

### Définition | Puissance entière

Soient  $a$  un nombre réel et  $n$  un nombre entier naturel.

Pour  $n \geq 2$ ,  $a^n = a \times a \cdots \times a$  ( $n$  fois).

De plus, on a, par convention,  $a^1 = a$  et  $a^0 = 1$ .

**Exemples** ▶  $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$

▶  $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

▶  $(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2\,401$

### Définition | Puissance entière relative

Soient  $a$  un nombre réel non nul et  $n$  un nombre entier naturel non nul.

On note  $a^{-n}$  l'inverse de  $a^n$  :  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

**Exemples** ▶  $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$

▶  $2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1\,024}$

▶  $(\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4}$

### Propriétés | Bases égales

Soient  $a$  un nombre non nul et  $n, m$  deux nombres entiers.

▶  $a^n \times a^m = a^{n+m}$

▶  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

▶  $(a^n)^m = a^{n \times m}$

**Exemples** ▶  $5,2^3 \times 5,2^{-2} = 5,2^{3-2} = 5,2^1 = 5,2$

▶  $\frac{(-8)^7}{(-8)^9} = (-8)^{7-9} = (-8)^{-2} = \frac{1}{64}$

▶  $(\sqrt{2}^3)^2 = (\sqrt{2}^{3 \times 2}) = \sqrt{2}^6 = 8$

**Remarque** Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de puissances. Par exemple,  $10^2 + 10^3 \neq 10^5$ .

## Propriétés | Exposants égaux

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels non nuls et  $n$  un entier relatif.  
Alors,

$$\blacktriangleright a^n \times b^n = (ab)^n \qquad \blacktriangleright \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

**Exemples**  $\blacktriangleright 0,2^7 \times 10^7 = (0,2 \times 10)^7 = 2^7 = 128$

$$\blacktriangleright \frac{11,1^{-3}}{1,11^{-3}} = \left(\frac{11,1}{1,11}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0,001$$

### Exercice

1. Écrire les quatre nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10 :

a)  $10^5 \times 10^3$       b)  $(10^5)^3$       c)  $\frac{10^5}{10^3}$       d)  $\frac{10^5}{10^{-3}}$ .

2. L'affirmation " $(7^{n+1})^2 \times 7^{-2n}$  a toujours la même valeur, quel que soit  $n$ , entier relatif." est-elle vraie ?

3. " $10^6 + 10^3$  est toujours une puissance de 10". Vrai ou faux ?

### Exercice

Simplifier les expressions suivantes et écrire le résultat sous forme d'un produit de puissances.

1.  $\frac{3^{-10} \times 9^2}{3^5}$       3.  $12^2 \times 9^7 \times 18^{-5}$

2.  $22^6 \times \frac{33^3}{8 \times 6^3}$       4.  $15^3 \times \frac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$

### Exercice

On considère les deux nombres suivants :  $A = 4^3 \times 9^{-2}$  et  $B = 6^3 \times 18^{-2}$ .

1. Écrire  $A$  et  $B$  sous la forme  $2^n \times 3^p$  où  $n$  et  $p$  sont des nombres entiers relatifs.

2. En déduire l'écriture sous la même forme de  $AB$  et  $\frac{A}{B}$ .