1

Compléments sur les suites

Résumé

Nous poussons plus loin ici l'étude des suites numériques. Les suites arithmético-géométriques captivent l'attention des mathématiciens et des chercheurs car elles combinent des modèles de croissance linéaire et exponentielle, elles sont donc très intéressantes. Enfin, la notion de limite est établie

1 Suites arithmético-géométriques

Définition

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

(u_n) est appelée **suite arithmético-géométrique** de paramètres a et b.

Remarques

- Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers des suites arithmético-géométriques (pour, respectivement, $a = 1$ et $b = 0$).
- La relation de récurrence est affine mais nous allons voir que ce n'est pas le cas de la forme explicite.

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et b et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. Admise pour le moment. □

Exercice

Déterminer, dans chacun des cas, la forme générale des suites définies sur $\mathbf{N}$ par :

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = 6u_n + 5, \quad u_0 = 0$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = -5u_n + 12, \quad u_1 = 1$
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n - 10, \quad u_2 = 2.$

Propriété | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et b et de premier terme u_0.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}$$

Démonstration. Admise. □

Exercice

Soit u une suite arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et $b \in \mathbf{R}$.

1. Calculer S_{12} pour $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ et $u_0 = 1$.
2. Déterminer, pour tout $m > n$, $\sum_{k=n}^{m} u_k$ pour a et b quelconques.

Exercice | Problème

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n est le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2023 + n)$. En 2023, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :
$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3.$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$.

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2028. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

4. **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times 0{,}95^n.$$

b) En déduire la monotonie de la suite.

5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10% le nombre d'arbres de la forêt en 2023.

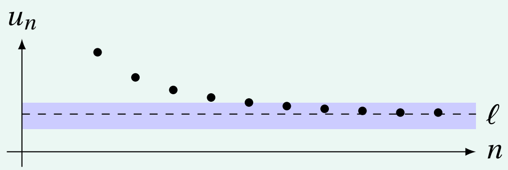
2 Convergence d'une suite

2.1 Suites convergentes

Définition

Une suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. ℓ est appelée **limite** de la suite (u_n).
On utilisera les notations :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

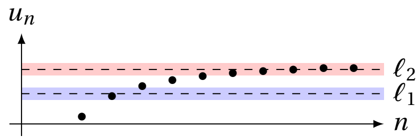


Exemple Une suite constante égale à ℓ converge vers ℓ.

Théorème

Si (u_n) converge vers un réel, cette limite est unique.

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il y ait deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes. Ainsi, la différence absolue $|\ell_2 - \ell_1|$ est strictement positive. On l'appelle ϵ.
Les intervalles $I_1 = \left]\ell_1 - \frac{\epsilon}{4} ; \ell_1 + \frac{\epsilon}{4}\right[$ et $I_2 = \left]\ell_2 - \frac{\epsilon}{4} ; \ell_2 + \frac{\epsilon}{4}\right[$ contiennent chacun tous les termes de la suite à partir d'un rang n_0 (on peut prendre le même rang pour ℓ_1 et ℓ_2 sans perdre de généralité).



Cependant, c'est impossible puisque les intervalles sont disjoints par contruction et les termes de rang supérieurs à n_0 seront soit strictement dans I_1 soit strictement dans I_2. □

2.2 Suites divergentes

Définition

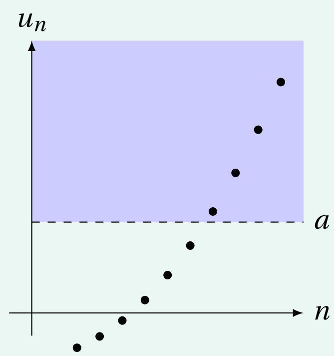
Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas.

Exemple La suite de terme général $(-1)^n$ ne converge pas car elle alterne indéfiniment entre 1 et -1. Elle est donc divergente.

Définition

Une suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle $]a ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On utilisera les notations :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.$$



Exemple Toute suite arithmétique de raison $r > 0$ tend vers $+\infty$.

Remarques
- On peut définir de même une suite qui **tend vers** $-\infty$ avec des intervalles $]-\infty\,;a[$.
- Toute suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

2.3 Convergences usuelles

Propriété

Les suites de termes général n, n^2, $\sqrt{n}$ et, dans le cas général, n^α avec $\alpha > 0$ sont **divergentes** de limite $+\infty$.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) de terme général n^α.
On considère I un intervalle $]a\,;+\infty[$ avec $a > 0$. Cherchons un rang n_0 tel que tous les termes de la suites soient dans I à partir de n_0.
Posons n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $a^{\frac{1}{\alpha}}$.
Par stricte croissance de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbf{R}_+$ (car $\alpha > 0$), on a que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad n^\alpha \geqslant n_0^\alpha > \left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = a$$

C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0} > a$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □

Propriété

Les suites de termes général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et, dans le cas général, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ sont **convergentes** de limite 0.

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ et (u_n) de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.
On considère I un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a > 0$. Cherchons un rang n_0 tel que tous les termes de la suites soient dans I à partir de n_0.
Posons n_0 le plus petit entier strictement supérieur à $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{\alpha}}}$.
Par stricte décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbf{R}_+$ (car $\alpha > 0$), on a que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 < \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n_0^\alpha} < \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = a$$

C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, 0 < u_n \leqslant u_{n_0} < a$ donc $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □

Algorithmique & Programmation | Algorithme de seuil

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2n^3 - 7$.
On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ mais on souhaite obtenir le premier rang n à partir duquel la suite reste dans un intervalle $]a\,;+\infty[$ pour tout $a \in \mathbf{R}$.
C'est possible avec la fonction Python suivante.

```python
def seuil(a):
    u=-7
    n=0
    while u<=a:
        n=n+1
        u=2*n**3-7
    return n
```

Le code `seuil(1000)` permet de savoir que pour $a = 1000$ alors $n = 8$.

3 Opérations sur les limites

On considère dans cette section deux suites (u_n) et (v_n).

Théorème | Limite d'une somme

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemples
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\sqrt{n} - 3n = -\infty$.

Remarque Le dernier cas indiqué dans le tableau est appelé une **forme indéterminée**. Cela veut dire qu'on ne peut pas directement déterminer la limite de la somme et qu'il va falloir l'étudier plus en détail.

Théorème | Limite d'un produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Remarque Dans le cas d'un produit "entre infinis", la règle des signes s'applique aussi.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 7-\dfrac{1}{\sqrt{n}}=7$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(7-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1\times 7=7.$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}-n^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}-\sqrt{n}n^3=-\infty$.

Théorème | Limite d'un quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	?	?

Si $v_n>0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$

Si $v_n<0$ pour tout $n\in\mathbf{N}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{7}{n}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\frac{7}{n}}{n^4}=0$.

4 Comparaisons et limites

Théorème | Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Démonstration. Prouvons le premier point. La preuve sera similaire pour le second.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et notons n_1 le rang évoqué dans l'énoncé.
Soit $I=]a;+\infty[$ avec $a\in\mathbf{R}$.
Montrons qu'il existe un rang tel qu'après, tous les termes de la suite (v_n) soient dans I.
Par hypothèse sur (u_n), il existe un rang n_2 tel que :

$$\forall n\geqslant n_2, u_n>a.$$

En considérant n_0, le maximum entre n_1 et n_2, on a bien :

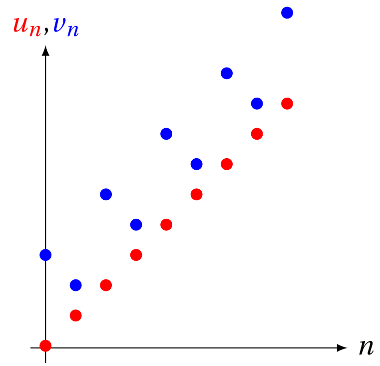
$$\forall n\geqslant n_0, v_n\geqslant u_n>a.$$

□

Exemple Soit u_n de terme général n et v_n de terme général $n+2+(-1)^n$.
On a :

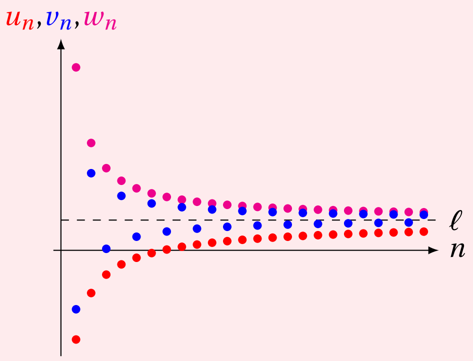
$$\forall n\geqslant 0, u_n\leqslant v_n \text{ car } \forall n\in\mathbf{N}, 2+(-1)^n\geqslant 1.$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2+(-1)^n=+\infty$.



Théorème | Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel ℓ alors (v_n) converge aussi vers ℓ.



Démonstration. Appelons n_1 le rang évoqué en énoncé.
Soit $I =]a; b[$ un intervalle ouvert contenant ℓ. Montrons qu'il contient (v_n) à partir d'un certain rang n_0.
(u_n) est contenue dans I à partir d'un rang n_u et (w_n) à partir de n_w par définition de la convergence vers ℓ.
En posant n_0 le maximum entre n_1, n_u et n_w, on a bien que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad a < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < b.$$

□

Corollaire | Comportement asymptotique des suites géométriques

Soit $q \in \mathbf{R}$.

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

Démonstration. On admet pour le moment que $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x > 0, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

- Si $q > 1$, en posant $q = 1 + x$, on a que $\forall n \in \mathbf{N}, q^n = (1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Ainsi, par le théorème de comparaison, comme $1 + nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $q = 1$ ou $q = 0$, on est face à suite de termes constants.
- Si $0 < q < 1$, on peut se ramener au premier cas en posant $a = \frac{1}{q}$. Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}, q^n = \dfrac{1}{a^n}$ et comme $a > 1$, alors $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $\dfrac{1}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $-1 < q < 0$, alors on applique le théorème des gendarmes à $-(-q)^n \leqslant q^n \leqslant (-q)^n$ où $0 < -q < 1$.
  Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-q)^n = 0$ et donc $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} q^n \leqslant 0$.

□

Remarque On connaît désormais les limites de toutes les suites géométriques en raisonnant sur le premier terme et la raison q.

Définitions

Soit (u_n) une suite.

- Si $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant M$ pour $M \in \mathbf{R}$, alors (u_n) est **majorée** par M et M est un majorant de (u_n).
- Si $\forall n \in \mathbf{N}, m \leqslant u_n$ pour $m \in \mathbf{R}$, alors (u_n) est **minorée** par m et m est un minorant de (u_n).
- (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Exemples

- Les suites de terme généraux $(-1)^n$ ou $\sin(n)$ sont bornées : majorées par 1 et minorées par -1.
- La suite de terme général $2 + \sqrt{n}$ est minorée par 2.
- Une suite strictement décroissante est majorée par son premier terme.

Théorème | Convergence monotone

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration. Admise. □

Corollaire

- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. Prouvons le premier point.
Soient (u_n) une suite croissante non majorée et $I =]a\,;+\infty[$ où $a \in \mathbf{R}$. Montrons que I contient (u_n) à partir d'un certain rang.
Par non majoration, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > a$. (u_n) étant croissante sur $\mathbf{N}$, on a nécessairement que $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant u_{n_0} > a$. C'est-à-dire, $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$. □