3

VECTEURS DU PLAN

Résumé

Nous allons découvrir les vecteurs dans un cadre simple : le plan. Trouvant ses origines en physique pour représenter des déplacements ou des forces, tout bon physicien ou ingénieur manipule des vecteurs quotidiennement. Les applications proposées ici sont des critères de colinéarité de points ou des calculs de coordonnées de points particuliers.

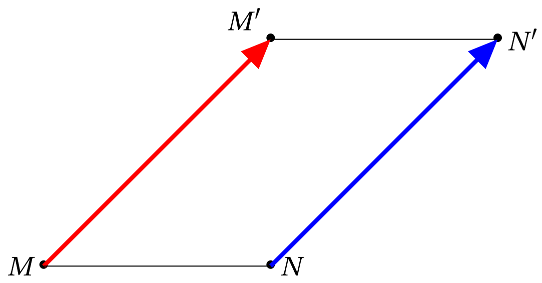
1 Notion de vecteurs

1.1 Translations et vecteurs

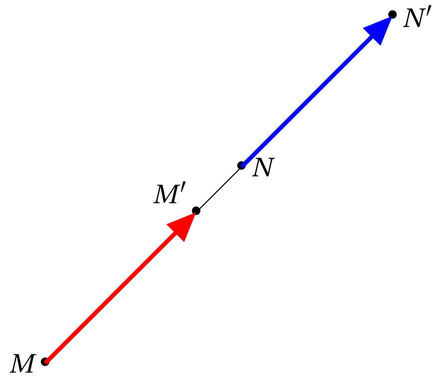
Définition | Translation

Soient M et M' deux points du plan.
Pour tout point N du plan, on construit l'unique point N' tel que $MM'N'N$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati). On dit alors que le point N' est l'image du point N par la translation qui transforme M en M'. Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.

Exemples ▶ On observe une première translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en dessous. On note $\overrightarrow{MM'}$ à l'aide d'une flèche qui part de M et va en M'.



▶ Dans le cas particulier où M, M' et N sont alignés, nous avons la configuration suivante, où la parallélogramme est plat.



Remarque Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ matérialise le **déplacement rectiligne** de M vers M' caractérisé par une **direction**, celle de (MM'), un **sens**, celui de M vers M', et sa **norme** $\|\vec{u}\|$, la longueur MM'.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Définition

Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme aussi N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux et on le note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

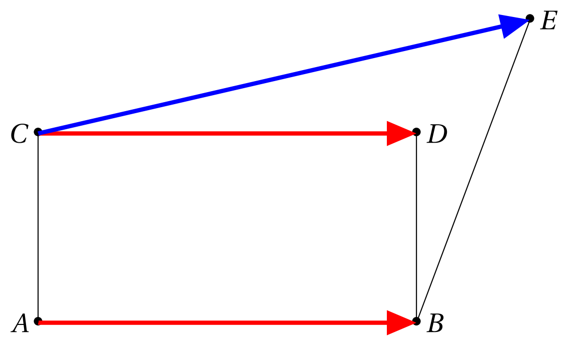
Remarque Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ alors $AB = CD$.

Propriété

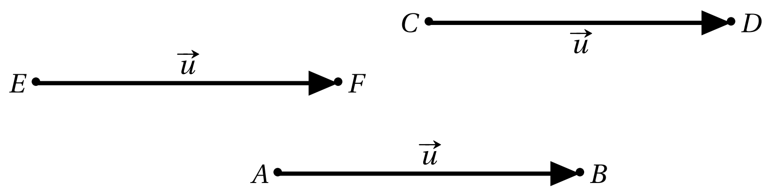
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si, et seulement si, le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Démonstration. C'est immédiat par définition d'un vecteur et propriétés d'un parallélogramme. □

Exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne le sont pas.



Remarque On considère la situation suivante.



Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$, comme, entre autres, $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$. On peut le noter $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Définition | Vecteur nul

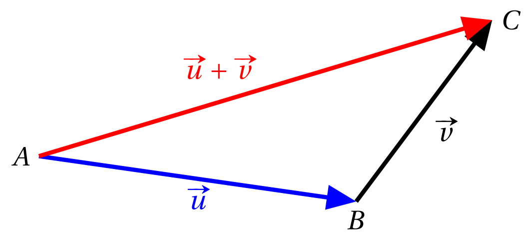
La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

1.3 Somme de vecteurs

Définition | Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple Voici une illustration de la somme de deux vecteurs.



Théorème | Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

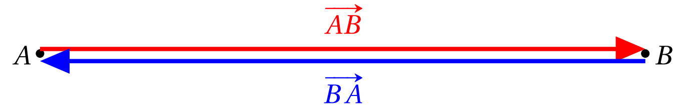
Démonstration. Découle de la définition de la somme de deux vecteurs. □

Définition | Opposé

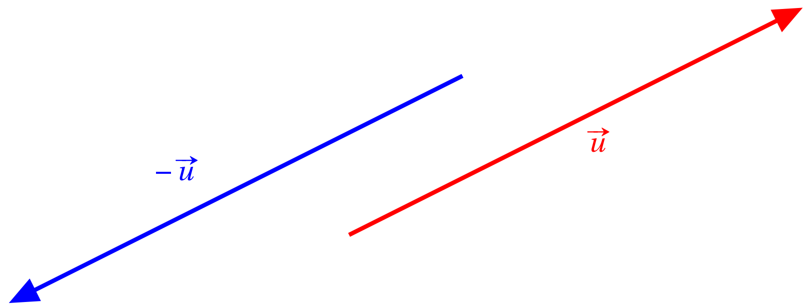
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.

Exemples

- On visualise l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.



- On peut aussi représenter l'opposé d'un vecteur $\vec{u}$.



Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Démonstration. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ Ainsi, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. □

1.4 Produit par un réel

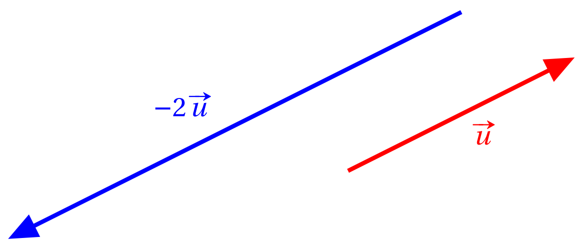
Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul et $k \in \mathbb{R}^*$. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

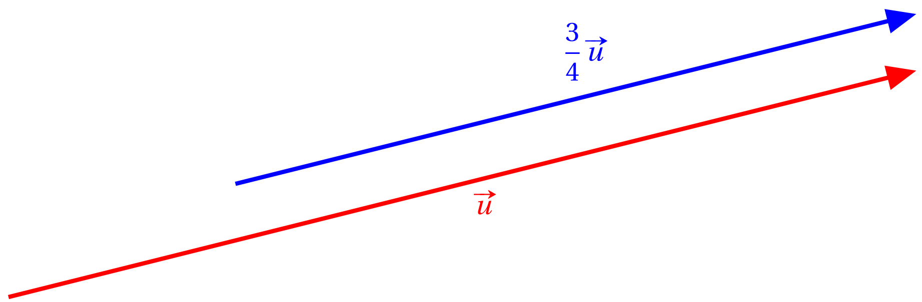
- la même direction que $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$
- pour norme $k\|\vec{u}\|$ si $k > 0$, $-k\|\vec{u}\|$ si $k < 0$

Exemples

- $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$



- $\left\|\frac{3}{4}\vec{u}\right\| = \frac{3}{4}\|\vec{u}\|$



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k, k' des réels.

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

2 Vecteurs et coordonnées

2.1 Coordonnées d'un vecteurs

Définitions | Repère et base orthonormée

Soient O un point et deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormée** du plan et que $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est un **repère orthonormé** du plan.

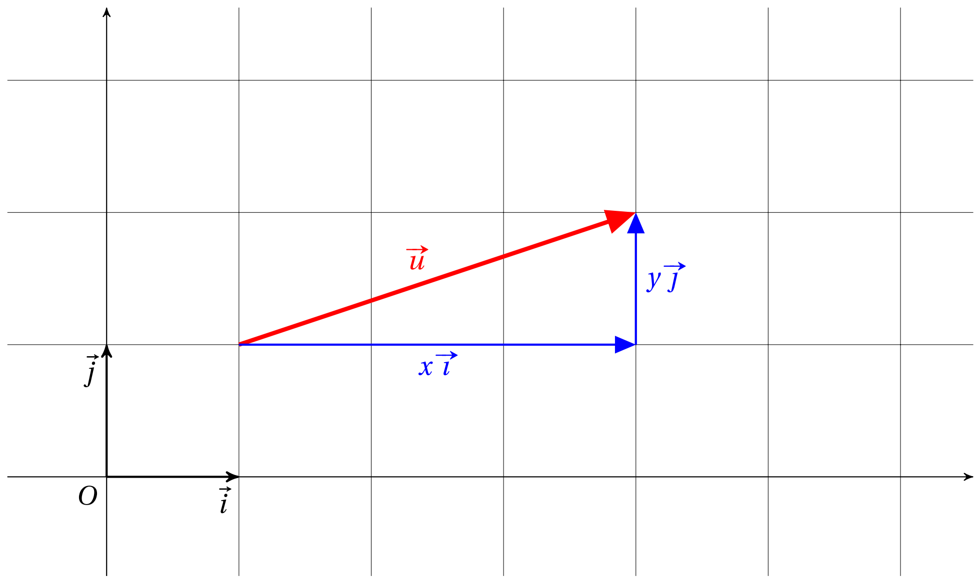
Propriété | Décomposition dans une base orthonormée

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe x et y deux réels, uniques, tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Démonstration. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées $(x; y)$ de M dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ sont uniques et $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. □

Remarque On donne souvent les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en écrivant $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple Regardons $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exercice

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Représenter les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

2. Soit le point $A(1;1)$. Placer B tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Remarque Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées dans une même base orthonormée sont égales.

2.2 Opérations sur les vecteurs

Propriété | Somme

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Alors, $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Démonstration. On décompose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

et

$$\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$$

Ainsi, $\vec{u}+\vec{v} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath} = (x+x')\vec{\imath}+(y+y')\vec{\jmath}$. □

Propriété | Produit par un réel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur dans le repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et k un réel.

Alors, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Démonstration. Comme pour la démonstration précédente, $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ donc $k\vec{u} = kx\vec{\imath} + ky\vec{\jmath}$. □

2.3 Conséquences

Théorème

Soient $A(x_A; y_B)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Démonstration. Remarquons d'abord que O a pour coordonnées $(0;0)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Ensuite, regardons $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\overrightarrow{OA}$ se décompose en

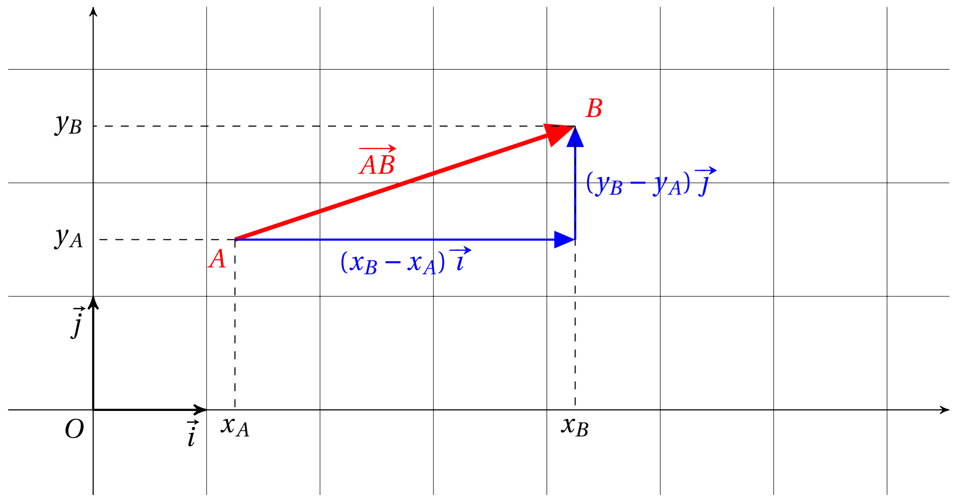
$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath}$$

et de même,

$$\overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath}.$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.
Donc, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Finalement, le calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se fait grâce aux propriétés sur les coordonnées vues précédemment. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. □

Exemples ▶ On visualise le résultat précédent sur le repère suivant :



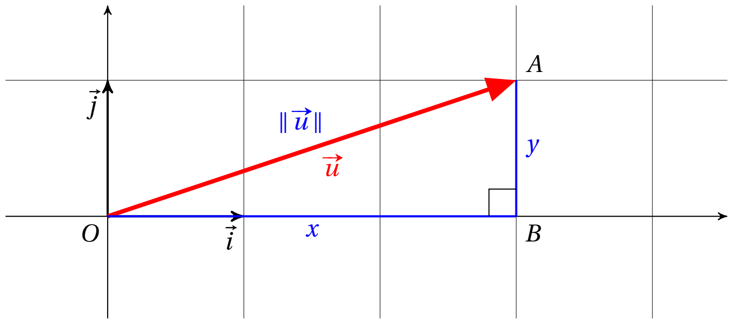
▶ Soient $A(1;4)$ et $B(8;-1)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}8-1\\(-1)-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$.

Théorème | Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Démonstration. On appelle A le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et B le point tel que $x\vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$. Le triangle OBA ainsi formé est un triangle en B tel que $OA = \|\vec{u}\|$, $OB = x$ et $BA = y$.



Par le théorème de Pythagore, nous avons :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$$

et donc,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

car $\|\vec{u}\| \geqslant 0$. □

Exemple Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}$, alors la norme de $\overrightarrow{AB}$ est égale à $\sqrt{7^2+(-5)^2} = \sqrt{74}$.

Corollaire | Distance entre deux points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On peut donc utiliser le théorème précédent pour obtenir $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$. □

Exemple Soient $A(10;2)$ et $B(-2;4)$.

$$AB = \sqrt{((-2)-10)^2+(4-2)^2} = \sqrt{(-12)^2+2^2} = \sqrt{148}$$

3 Colinéarité et alignement

3.1 Colinéarité

Définition

Vecteurs colinéaires Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Les deux vecteurs ont donc la **même direction**.

Remarque $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. On a alors $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple $\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors que $\begin{pmatrix}-15\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Théorème | Critère de colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration. C'est direct si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul. Dans la suite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront non nuls.
Supposons d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = kx'$ et $y = ky'$ et donc $xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$.
Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$. $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
Traitons le premier cas, le second se fera de la même manière. $xy' - yx' = 0$ implique que $y' = \frac{yx'}{x}$ donc $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\\frac{yx'}{x}\end{pmatrix} = \frac{x'}{x}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. □

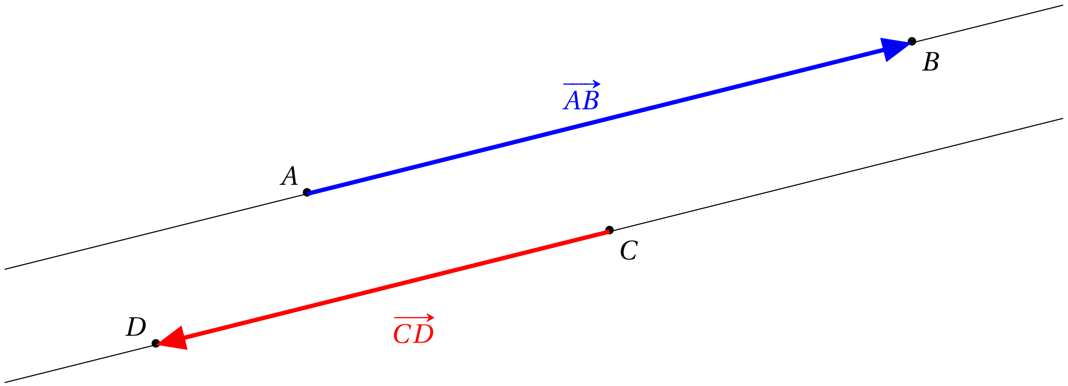
3.2 Alignement

Théorème | Droites parallèles

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation de l'égalité de vecteurs avec un parallélogramme. □

Exemple Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

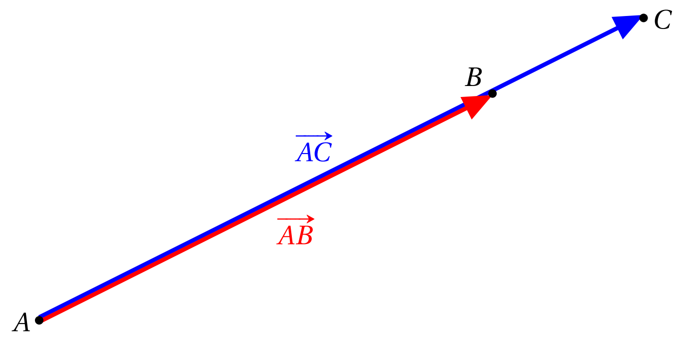


Théorème | Points alignés

Trois points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. A, B et C sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles. On peut utiliser le résultat précédent pour terminer la démonstration de ce théorème. □

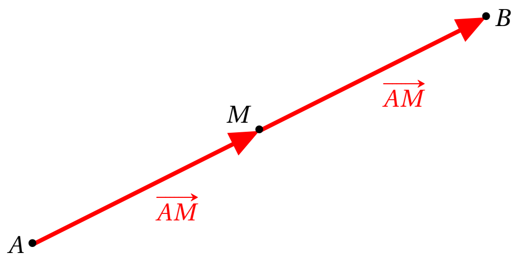
Exemple A, B et C sont alignés.



Propriété | Milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors le milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration. Notons M le milieu de $[A, B]$. Partant de A, l'image de la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est M. Rappelons que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix}$.



Enfin, les coordonnées de M sont donc $\left(x_A + \dfrac{x_B - x_A}{2}; y_A + \dfrac{y_B - y_A}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$. □