

# VARIABLES ALÉATOIRES

## Résumé

Dans ce chapitre, nous améliorons notre formalisme pour décrire des événements probabilistes à l'aide des variables aléatoires et nous introduisons, l'espérance, l'un des outils les plus importants de toute la théorie des probabilités.

On se restreint à des expériences aléatoires sur un univers  $\Omega$  **fini**.

## 1 Notions de variables aléatoires

### 1.1 Variable aléatoire réelle

#### Définition

Une **variable aléatoire réelle**  $X$  est une **fonction** définie sur  $\Omega$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , de telle sorte que tout élément de  $\Omega$  est associé à un unique nombre réel.

**Exemples** ▶ On lance une pièce de monnaie (équilibrée ou non) 10 fois à la suite et on note  $X$  le nombre de piles.  $X$  est une variable aléatoire réelle.

▶ Un professeur tire au sort un élève dans une classe de 32 élèves où chaque élève dispose de son propre numéro compris entre 1 et 32.

On note  $X$  le numéro de l'élève tiré au sort : c'est une variable aléatoire réelle.

**Remarques** ▶ Pour une même expérience aléatoire, on peut définir différentes variables aléatoires. On aurait pu définir  $Y$  le nombre de faces dans le premier exemple donné précédemment. Ainsi, on aurait eu  $X + Y = 10$ .

▶ On peut définir des événements à partir d'une variable aléatoire  $X$  comme  $\{X = a\}$  correspondant aux issues telles que  $X$  prenne la valeur  $a$  ou  $\{X > a\}$  correspondant aux issues telles que  $X$  prenne des valeurs strictement supérieures à  $a$ .

▶ La probabilité de ces événements sera notée  $\mathbb{P}(X = a)$  et  $\mathbb{P}(X > a)$ .

## 1.2 Loi de probabilité

### Définition

Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire  $X$ , c'est donner la probabilités de tous les événements  $\{X = a\}$  définis par  $X$ .

On la présente usuellement sous forme de tableau où  $x_i$  sont les valeurs prises par  $X$  et  $p_i$  les probabilités  $\mathbb{P}(X = x_i)$ .

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$p_i$	$\mathbb{P}(X = x_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2)$	$\dots$	$\mathbb{P}(X = x_n)$

**Exemple** Une station de lavage automobile a constaté que, parmi ses clients :

- ▶ 90% lavent la carrosserie de leur voiture ;
- ▶ 30% nettoient l'intérieur de leur voiture ;
- ▶ 20 en % lavent la carrosserie et nettoient l'intérieur de leur voiture.

Le coût du lavage de la carrosserie est de 5€, celui du nettoyage de l'intérieur est de 2€.

On note  $X$  la variable aléatoire modélisant la dépense, en euro, d'un client de la station choisi au hasard.

$x_i$	2	5	7
$p_i$	$\mathbb{P}(X = 2)$	$\mathbb{P}(X = 5)$	$\mathbb{P}(X = 7)$

On sait déjà que  $\mathbb{P}(X = 7) = 0,2$ . De plus, il y a 10 % des clients qui nettoient l'intérieur sans laver la carrosserie, c'est-à-dire,  $\mathbb{P}(X = 2) = 0,1$ . Enfin, 70 % des clients lavent la carrosserie sans nettoyer l'intérieur donc  $\mathbb{P}(X = 5) = 0,7$ .

$x_i$	2	5	7
$p_i$	0,1	0,7	0,2

### Propriété

La somme des probabilités  $p_i$  est égale à 1.

Autrement dit,  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) = 1$

**Démonstration.** Les événements  $\{X = x_i\}$  pour  $1 \leq i \leq n$  forment une partition de l'univers.  $\square$

**Exemple** On vérifie bien dans l'exemple de la laverie que  $0,1 + 0,7 + 0,2 = 1$ .

## 2 Espérance, variance et écart-type

### Définition | Espérance

L'**espérance** de la variable aléatoire  $X$  est le nombre réel  $\mathbb{E}[X]$  défini par :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = x_i) \times x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

**Remarque**  $\mathbb{E}[X]$  peut être vu comme une « **moyenne probabiliste** ». En effet, on peut définir la moyenne d'une série statistique par la formule  $\bar{x} = \sum_{i=0}^n f_i x_i$  où les  $f_i$  sont les fréquences.

### Définitions | Variance et écart-type

La **variance** de la variable aléatoire  $X$  est le réel **positif**  $\text{Var}(X)$  défini par :

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=0}^n p_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 = p_1 (x_1 - \mathbb{E}[X])^2 + \dots + p_n (x_n - \mathbb{E}[X])^2.$$

L'**écart-type** de  $X$ ,  $\sigma(X)$  est la racine carrée de la variance de  $X$ , c'est-à-dire :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

**Remarque** Ici, le parallèle avec les statistiques est plus évident. Les deux indicateurs variance et écart-type mesurent la **dispersion** autour de l'espérance.

**Exemple** Revenons à l'exemple de la laverie et calculons  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\text{Var}(X)$  et  $\sigma(X)$  à partir de la loi de probabilité.

$x_i$	2	5	7
$p_i$	0,1	0,7	0,2

On a :

$$\mathbb{E}[X] = 0,1 \times 2 + 0,7 \times 5 + 0,2 \times 7 = 5,1.$$

Ainsi, les clients dépensent en moyenne 5€10.

Enfin,

$$\text{Var}(X) = 0,1 \times (2 - 5,1)^2 + 0,7 \times (5 - 5,1)^2 + 0,2 \times (7 - 5,1)^2 = 1,69$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1,69} = 1,3.$$

On a une dispersion moyenne de 1€ autour de l'espérance.

**Remarque** Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On peut définir  $Y = aX + b$  comme étant la variable aléatoire vérifiant la loi de probabilité suivante.

$y_i$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$	$\dots$	$ax_n + b$
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

### Théorème | Linéarité de l'espérance

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On a :

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

et

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

**Exemple** Une station de lavage concurrente propose une tarification à moitié prix (lavage à 2€50 et nettoyage à 1€) mais demande 2€ pour entrer dans la station. On considère que les habitudes des clients sont les mêmes que pour la station précédente.

On note  $Y$  la variable aléatoire modélisant la dépense d'un client tiré au sort dans cette deuxième station de lavage.

Ainsi,  $Y = \frac{1}{2}X + 2$  de loi de probabilité suivante.

$y_i$	3	4,5	6,5
$p_i$	0,1	0,7	0,2

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X] + 2 = \frac{1}{2} \times 5,1 + 2 = 4,55$$

Les clients dépensent donc en moyenne moins dans cette deuxième station.

Enfin,  $\text{Var}(Y) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{Var}(X) = \frac{1}{4} \times 1,69 = 0,4225$  donc  $\sigma(Y) = \sqrt{0,4225} = 0,65$ .

La dispersion est plus faible que pour la première station.