3

Calcul littéral

Le calcul littéral a évolué à travers l'histoire, mais son développement notable remonte aux mathématiciens babyloniens et grecs. Cependant, c'est au Moyen Âge que les algébristes arabes ont posé les bases modernes du calcul littéral. Il permet de travailler avec des nombres généraux et est essentiel en mathématiques et sciences.

1 Rappels

1.1 Développer

Définition

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme.

Propriété | Distributivité

Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, on développe de la façon suivante :

- $a(b+c) = ab + ac$
- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple $(3+8)(1+10) = 3\times1 + 3\times10 + 8\times1 + 8\times10 = 3+30+8+80 = 121$

Remarque On a aussi, pour $e \in \mathbf{R}$:

$$(a+b)(c+d+e) = ac + ad + bc + bd + ae + be$$

Exercice

Soit $x \in \mathbf{R}$. Développer.

- $3(x+2)$
- $(12x+2)(x+5x)$
- $(4x+10)(7x+2)$
- $(4+x+2x^2)(x+3)$

1.2 Factoriser

Définition

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en un produit.

Propriété | Factorisation

Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$, on factorise de la façon suivante :

$$ab + ac = a(b+c)$$

Exemple $21+30+3 = 3\times7 + 3\times10 + 3\times1 = 3(7+10+1) = 3\times18 = 54$

Remarque On a aussi, pour $d \in \mathbf{R}$:

$$ab + ac + ad = a(b+c+d)$$

Exercice

Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Factoriser.

- $2x+2$
- $14x^2+7x$
- $ab+ac+ad+ae+af$ où $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$.

2 Identités remarquables

Propriété | $1^{\text{ère}}$ identité remarquable

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$, alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration. On développe $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Propriété | 2^{nde} identité remarquable

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$, alors

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration. Similaire à la démonstration précédente. □

Propriété | 3^{e} identité remarquable

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}$, alors

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Démonstration. On part du membre de droite et on développe.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

3 Équations

3.1 Rappels

Définition

Une **équation d'inconnue** x est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu x.

Résoudre dans un ensemble E une telle équation, c'est déterminer toutes les valeurs de x appartenant à E qui rendent l'égalité vraie.

Ces valeurs sont dites les **solutions** dans E de l'équation.

Remarque Des équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont exactement les mêmes solutions. On utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ pour le signaler.

Propriétés | Manipulations algébriques

Les opération suivantes transforment une équation en une équation équivalente :

- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres de l'équation.
- Multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un nombre **non-nul**.
- Développer, factoriser ou réduire l'un des deux membres

3.2 Équation de degré 1

Définition

On appelle **équation de degré 1** une équation de la forme :

$$ax + b = cx + d$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $a - c \neq 0$.

Remarque On peut réécrire l'équation précédente sous la forme équivalente :

$$(a-c)x + (b-d) = 0$$

Théorème | Solution

Soient $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$, l'équation $ax+b=0$ admet $\frac{-b}{a}$ comme unique solution.

Exemple Considérons l'équation de degré 1, avec $x \in \mathbf{R}$

$$4x-10=2$$

Alors on peut la résoudre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & 4x-10=2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x-10+\mathbf{10}=2+\mathbf{10} \\ \Leftrightarrow\ & 4x=12 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{4x}{\mathbf{4}}=\frac{12}{\mathbf{4}} \\ \Leftrightarrow\ & x=3 \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions dans $\mathbf{R}$ est $\mathscr{S}=\{3\}$.

3.3 Équation de degré 2

Définition

On appelle **équation du second degré** une équation de la forme :

$$ax^2+bx+c=0$$

où $a,b,c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$.

Théorème | Solutions

Cette équation admet 2, 1 ou aucune solution(s) suivant les valeurs de a, b et c.

Démonstration. Admise. □

Remarque Si $b=0$, l'équation est équivalente à une équation de la forme $x^2=d$ avec $d \in \mathbf{R}$.

Exemple Regardons l'équation :

$$x^2+3x+2=0$$

On peut vérifier que 1 et 2 sont solutions de cette équation.

3.4 Règles du produit/quotient nul

Théorème | Règle du produit nul

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.
Alors :

$$A(x)\times B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \text{ ou } B(x)=0$$

Exemple Soient a et b deux réels. L'équation $(x-a)(x-b)=0$ admet a et b comme solutions, par la règle du produit nul.

Exercice

Résoudre chaque équation dans $\mathbf{R}$ en se ramenant à une équation de degré 1 ou de type “produit nul”.

- $(2x-1)(x+3)-(2x-1)(3x-1)=0$
- $(x-2)(x+3)=(x-5)(x+1)$
- $5x^2=3x$
- $(x-1)^2-(x-2)^2=0$

Théorème | Règle du quotient nul

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.
Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow A(x)=0$$

Remarque Les solutions de $B(x)=0$ sont des **valeurs interdites** de l'équation $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.

Exemple On considère l'équation suivante :

$$\frac{x^2+3x+2}{x+3}=0$$

Elle est équivalente par la règle du quotient nul à : $x+3\neq 0$ et $x^2+3x+2=0$.

3.5 Règle des produits en croix

Propriété | Produit en croix

Soient $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ et $c \in \mathbf{R}$. Alors l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ est équivalente à $ax = bc$ dans $\mathbf{R}^*$.

Démonstration. On multiplie notre équation par bx (non nul si $x \in \mathbf{R}^*$) pour obtenir l'équation équivalente attendue. □

Exemple On a équivalence des équations $2 = \frac{1}{x}$ et $x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbf{R}^*$.

Remarque On peut généraliser la règle du produit en croix à des équations appelées **équations quotients**. C'est ce que nous voyons dans le résultat suivant.

Théorème | Équations quotients

Soient $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$ des expressions algébriques.
Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$$

Exemples

- $\frac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow -3x+1 = x-5$ et donc $\frac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
- $\frac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow 3-x = 2(x+7)$ et donc $\frac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow -11 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{-11}{3}$.

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations de degré 1 suivantes.
   a) $\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = \sqrt{8}x$
   b) $5x+3 = 5x-3$
   c) $-10^5x + 10^3 = 10^4$
2. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations produits suivantes.
   a) $(x+1)(x-2) = 0$
   b) $x(8x-2) = 0$
   c) $(2-7x)(9x+4) = 0$
   d) $x(6x-4)(3x+1) = 0$
3. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations quotients suivantes.
   a) $\frac{2x-1}{x} = 0$
   b) $\frac{(-4x+3)(x-1)}{5x-5} = 0$
   c) $\frac{x+7}{(2x-1)(x-\frac{1}{3})} = 0$
4. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations de degré 2 suivantes.
   a) $9 - x^2 = 0$
   b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
   c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
5. Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations suivantes.
   a) $(x+1)(x-2) = (x-2)(4x-7)$
   b) $\frac{7x+21}{6+x} = \frac{x+3}{6+x}$
   c) $\frac{x}{x+1} = -1$