

Exercices

DÉRIVATION ET ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercice 1

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 4x - 5$. f' est la fonction dérivée de f sur \mathbb{R} .

- Déterminer l'expression de f' .
- Étudier le signe de f' puis en déduire les variations de f .
- En déduire les potentiels extremums locaux. Sont-ils globaux?

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 2x + 4$.

2.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-9	$+\infty$

3. $f(x)$ est un extremum local $\Rightarrow f'(x) = 0$.

Ainsi, le seul candidat ici est $f(-2)$ qui est un minimum global à partir du tableau de variations.

Exercice 2

Étudier les variations des fonctions suivantes. En déduire les potentiels extremums locaux et indiquer lesquels sont globaux.

- f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (-3x + 2)^3$.
- g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = -\frac{2}{x}$.
- h définie sur $[2; +\infty]$ par $h(x) = -\sqrt{2x - 4}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -3 \times 3(-3x + 2)^2 = -9(-3x + 2)^2$.

On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-9(-3x + 2)^2$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ donc $f\left(\frac{2}{3}\right)$ pourrait être un extremum local mais on voit sur le tableau de variations qu'il n'en est pas un.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g'(x) = \frac{2}{x^2}$.

On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Il n'y a aucun extremum local car la dérivée est strictement positive.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $h'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{2x-4}} = -\frac{1}{\sqrt{2x-4}}$.

On peut ainsi donner le tableau de variations.

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	0	$-\infty$

$h(2)$ est un maximum global.

Exercice 3

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Donner l'équation réduite de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 3.

Correction

1. f est définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ car 1 est valeur interdite.
2. On dérive un quotient. Soit $x \in I$.

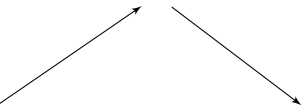
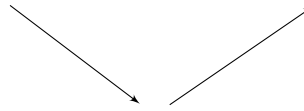
$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \times (x^2 + 3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

Si on développe $(x-1)(x+3)$, alors $\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = f'(x)$.

3. Étudions d'abord le signe de la dérivée f' .

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(x+1)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

On peut maintenant donner les variations de f .

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$									

4. Une équation de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 3 est donnée par :

$$T_3(f) : y = f'(3)(x-3) + f(3).$$

On a $f'(3) = \frac{(3-1)(3+3)}{(3+1)^2} = \frac{2 \times 6}{16} = \frac{2}{3}$ et $f(3) = \frac{3^2 + 3}{3+1} = 4$.

Ainsi, $T_3(f) : y = \frac{2}{3}(x-3) + 4 = \frac{2}{3}x + 2$.

Exercice 4

Soit f_m définie sur \mathbb{R} par $f_m(x) = mx^4 + x^2 - m$ où $m \in \mathbb{R}^*$. \mathcal{C}_m est la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que les deux courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_{-1} ont deux points d'intersection A et B dont on précisera les coordonnées.

On notera A le point dont l'abscisse est positive.

2. Vérifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, \mathcal{C}_m passe par les deux points A et B .
3. Calculer m pour que la droite (OA) soit tangente à \mathcal{C}_m en A .
4. Dans quel ensemble doit se trouver m pour que la fonction f_m admette un seul extremum ?
5. Deux courbes sont dites tangentes en un point M lorsque le point M appartient aux deux courbes et les deux courbes admettent en M une tangente commune.

Déterminer m pour que \mathcal{C}_m soit tangente en A à la parabole \mathcal{P} d'équation $y = -x^2 + 6x - 4$.

Correction

1. Chercher les points d'intersection de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_{-1} revient à résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^4 + x^2 - 1 \\ y = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases}.$$

En additionnant les deux équations, on a : $2y = 2x^2 \Leftrightarrow y = x^2$. En remplaçant dans la seconde ligne, on a :

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -x^4 + x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, les coordonnées des solutions sont $A(1; 1)$ et $B(-1; 1)$.

2. Soit $m \in \mathbb{R}^*$.

Vérifions que $A \in \mathcal{C}_m$, c'est-à-dire, $f_m(1) = 1$.

$$f_m(1) = m \times 1^4 + 1^2 - m = m + 1 - m = 1$$

Vérifions que $B \in \mathcal{C}_m$, c'est-à-dire, $f_m(-1) = 1$.

$$f_m(1) = m \times (-1)^4 + (-1)^2 - m = m + 1 - m = 1$$

3. Déterminons d'abord l'équation réduite de (OA) .

Le coefficient directeur est égal à $\frac{1-0}{1-0} = 1$ et l'ordonnée à l'origine nulle car $O(0; 0)$.

Donc $(OA) : y = x$.

Déterminons maintenant l'équation de la tangente T de \mathcal{C}_m en A .

$$T : y = f'_m(1)(x - 1) + f_m(1)$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_m(x) = 4mx^3 + 2x$ donc $f'_m(1) = 4m + 2$.

$$T : y = (4m + 2)(x - 1) + 1 = (4m + 2)x + (1 - 4m - 2) = (4m + 2)x - 1 - 4m$$

Pour que T et (OA) aient la même équation réduite, cherchons m tel que $4m + 2 = 1$.

$$4m + 2 = 1$$

$$4m = -1$$

$$m = -\frac{1}{4}$$

Pour $m = -\frac{1}{4}$, on a bien $T : y = x$.

4. Si $f_m(x)$ est un extremum local alors $f'_m(x) = 0$. Cherchons les potentiels extremums locaux pour f_m :

$$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4mx^2 + 2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2m} \text{ ou } x = 0.$$

1^{er} cas : $m > 0$

Il n'y a qu'un seul extremum local potentiel : $f(0) = -m$ et la dérivée ne change de signe qu'en 0 en étant strictement positive pour $x > 0$. Construisons un tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$-m$	$+\infty$

$-m$ est l'unique extremum : le minimum global de f_m .

2nd cas : $m < 0$

$f'_m(x)$ possède trois racines : $-\sqrt{-\frac{1}{2m}}$, 0 et $\sqrt{-\frac{1}{2m}}$.

On a d'abord, $f_m\left(-\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right) = f_m\left(\sqrt{-\frac{1}{2m}}\right) = m\frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2m} - m = -\frac{1}{4m} - m$

Construisons un tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\sqrt{-\frac{1}{2m}}$	0	$\sqrt{-\frac{1}{2m}}$	$+\infty$
$4mx^2 + 2$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	0	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{4m} - m$	$-m$	$-\frac{1}{4m} - m$	$-\infty$

Il y a deux extremums locaux : $-\frac{1}{4m} - m$ atteint deux fois en un maximum global, et $-m$ un minimum local mais pas global.

Pour conclure, m doit appartenir à $]-\infty; 0[$ pour que f_m n'admette qu'un seul extremum.

5. Déterminons l'équation de la tangente T' de \mathcal{P} en A .

On définit g telle que $\mathcal{P} : y = g(x) = -x^2 + 6x - 4$. g est dérivable sur \mathbb{R} et pour x réel, $g'(x) = -2x + 6$.

Finalement, $T' : y = g'(1)(x - 1) + g(1) = 4(x - 1) + 1 = 4x - 3$.

$T : y = (4m + 2)x - 1 - 4m$ et $T' : y = 4x - 3$ ont la même équation réduite si, et seulement si, $m = \frac{1}{2}$.