

## 2

# LIMITES DE SUITES

### Résumé

Nous allons étudier le comportement asymptotique des suites réelles. C'est-à-dire, nous souhaitons donner une idée de comment vont être les termes de la suite pour des rangs de plus en plus grands jusqu'à potentiellement *l'infini*.

## 1 Convergence d'une suite

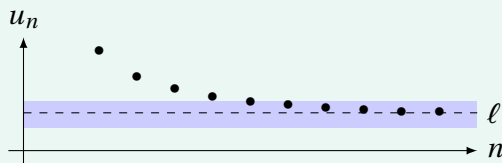
### 1.1 Suites convergentes

#### Définition 1

Une suite  $(u_n)$  **converge** vers un réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.  $\ell$  est appelée **limite** de la suite  $(u_n)$ .

On utilisera les notations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

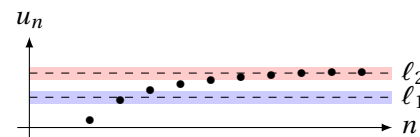


**Exemple 2** Une suite constante égale à  $\ell$  converge vers  $\ell$ .

#### Théorème 3

Si  $(u_n)$  converge vers un réel, cette limite est unique.

**Démonstration.** Supposons, par l'absurde, qu'il y ait deux limites  $\ell_1$  et  $\ell_2$  distinctes. Ainsi, la différence absolue  $|\ell_2 - \ell_1|$  est strictement positive. On l'appelle  $\epsilon$ . Les intervalles  $I_1 = ]\ell_1 - \frac{\epsilon}{4}; \ell_1 + \frac{\epsilon}{4}[$  et  $I_2 = ]\ell_2 - \frac{\epsilon}{4}; \ell_2 + \frac{\epsilon}{4}[$  contiennent chacun tous les termes de la suite à partir d'un rang  $n_0$  (on peut prendre le même rang pour  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sans perdre de généralité).



Cependant, c'est impossible puisque les intervalles sont disjoints par construction et les termes de rang supérieurs à  $n_0$  seront soit strictement dans  $I_1$  soit strictement dans  $I_2$ .  $\square$

### 1.2 Suites divergentes

#### Définition 4

Une suite est dite **divergente** si elle ne converge pas.

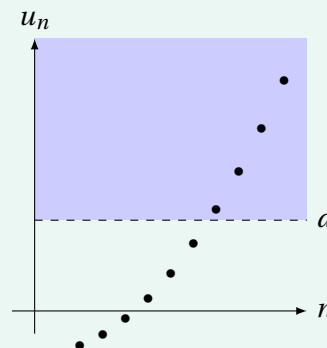
**Exemple 5** La suite de terme général  $(-1)^n$  ne converge pas car elle alterne indéfiniment entre 1 et  $-1$ . Elle est donc divergente.

#### Définition 6

Une suite  $(u_n)$  **tend vers**  $+\infty$  si tout intervalle  $]a; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On utilisera les notations :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty.$$



**Exemple 7** Toute suite arithmétique de raison  $r > 0$  tend vers  $+\infty$ .

**Remarques 8** ► On peut définir de même une suite qui **tend vers**  $-\infty$  avec des intervalles  $]-\infty; a[$ .

► Toute suite qui tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  est divergente.

### 1.3 Convergences usuelles

#### Propriété 9

Les suites de termes général  $n$ ,  $n^2$ ,  $\sqrt{n}$  et, dans le cas général,  $n^\alpha$  avec  $\alpha > 0$  sont **divergentes** de limite  $+\infty$ .

*Démonstration.* Soient  $\alpha > 0$  et  $(u_n)$  de terme général  $n^\alpha$ .

On considère  $I$  un intervalle  $]a; +\infty[$  avec  $a > 0$ . Cherchons un rang  $n_0$  tel que tous les termes de la suites soient dans  $I$  à partir de  $n_0$ .

Posons  $n_0$  le plus petit entier strictement supérieur à  $a^{\frac{1}{\alpha}}$ .

Par stricte croissance de  $x \mapsto x^\alpha$  sur  $\mathbf{R}_+$  (car  $\alpha > 0$ ), on a que :

$$\forall n \geq n_0, \quad n^\alpha \geq n_0^\alpha > \left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = a$$

C'est-à-dire,  $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n_0} > a$  donc  $\forall n \geq n_0, u_n \in I$ . □

#### Propriété 10

Les suites de termes général  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  et, dans le cas général,  $\frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha > 0$  sont **convergentes** de limite 0.

*Démonstration.* Soient  $\alpha > 0$  et  $(u_n)$  de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ .

On considère  $I$  un intervalle  $]-a; a[$  avec  $a > 0$ . Cherchons un rang  $n_0$  tel que tous les termes de la suites soient dans  $I$  à partir de  $n_0$ .

Posons  $n_0$  le plus petit entier strictement supérieur à  $\frac{1}{a^\alpha}$ .

Par stricte décroissance de  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  sur  $\mathbf{R}_+$  (car  $\alpha > 0$ ), on a que :

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n_0^\alpha} < \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = a$$

C'est-à-dire,  $\forall n \geq n_0, 0 < u_n \leq u_{n_0} < a$  donc  $\forall n \geq n_0, u_n \in I$ . □

## Algorithmique & Programmation 11 | Algorithme de seuil

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 2n^3 - 7$ .

On admet que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  mais on souhaite obtenir le premier rang  $n$  à partir duquel la suite reste dans un intervalle  $]a; +\infty[$  pour tout  $a \in \mathbf{R}$ .

C'est possible avec la fonction Python suivante.

```
1 def seuil(a):
2     u=-7
3     n=0
4     while u<=a:
5         n=n+1
6         u=2*n**3-7
7     return n
```

Le code `seuil(1000)` permet de savoir que pour  $a = 1000$  alors  $n = 8$ .

## 2 Opérations sur les limites

On considère dans cette section deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

### Théorème 12 | Limite d'une somme

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

**Exemples 13** ►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + n = +\infty$ .

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3n = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} - 3n = -\infty$ .

**Remarque 14** Le dernier cas indiqué dans le tableau est appelé une **forme indéterminée**. Cela veut dire qu'on ne peut pas directement déterminer la limite de la somme et qu'il va falloir l'étudier plus en détail.

### Théorème 15 | Limite d'un produit

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

**Remarque 16** Dans le cas d'un produit "entre infinis", la règle des signes s'applique aussi.

**Exemples 17** ►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 7$  donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(7 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \times 7 = 7.$$

►  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n}n^3 = -\infty$ .

### Théorème 18 | Limite d'un quotient

Soient  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell$	$\ell$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	?	?

Si  $v_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$+\infty$	$-\infty$

Si  $v_n < 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	0	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$-\infty$	$+\infty$

**Exemple 19**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{7}{n} = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{7}{n}}{n^4} = 0$ .

### 3 Comparaisons et limites

#### Théorème 20 | Théorème de comparaison

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$ .

► Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

► Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Démonstration.* Prouvons le premier point. La preuve sera similaire pour le second.

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  et notons  $n_1$  le rang évoqué dans l'énoncé.

Soit  $I = ]a; +\infty[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

Montrons qu'il existe un rang tel qu'après, tous les termes de la suite  $(v_n)$  soient dans  $I$ .

Par hypothèse sur  $(u_n)$ , il existe un rang  $n_2$  tel que :

$$\forall n \geq n_2, u_n > a.$$

En considérant  $n_0$ , le maximum entre  $n_1$  et  $n_2$ , on a bien :

$$\forall n \geq n_0, v_n \geq u_n > a.$$

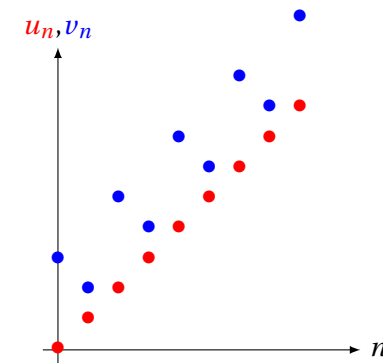
□

**Exemple 21** Soit  $u_n$  de terme général  $n$  et  $v_n$  de terme général  $n + 2 + (-1)^n$ .

On a :

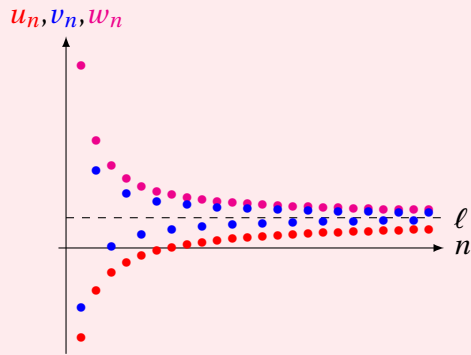
$$\forall n \geq 0, u_n \leq v_n \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, 2 + (-1)^n \geq 1.$$

Ainsi, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 2 + (-1)^n = +\infty$ .



## Théorème 22 | Théorème des gendarmes

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  des suites réelles telles que, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .  
Si  $(u_n)$  et  $(w_n)$  convergent vers le même réel  $\ell$  alors  $(v_n)$  converge aussi vers  $\ell$ .



*Démonstration.* Appelons  $n_1$  le rang évoqué en énoncé.

Soit  $I = ]a; b[$  un intervalle ouvert contenant  $\ell$ . Montrons qu'il contient  $(v_n)$  à partir d'un certain rang  $n_0$ .

$(u_n)$  est contenue dans  $I$  à partir d'un rang  $n_u$  et  $(w_n)$  à partir de  $n_w$  par définition de la convergence vers  $\ell$ .

En posant  $n_0$  le maximum entre  $n_1$ ,  $n_u$  et  $n_w$ , on a bien que :

$$\forall n \geq n_0, \quad a < u_n \leq v_n \leq w_n < b.$$

□

## Corollaire 23 | Comportement asymptotique des suites géométriques

Soit  $q \in \mathbb{R}$ .

	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$		0	1	$+\infty$

*Démonstration.* On admet pour le moment que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, (1+x)^n \geq 1+nx$ .

- Si  $q > 1$ , en posant  $q = 1+x$ , on a que  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$ . Ainsi, par le théorème de comparaison, comme  $1+nx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  alors  $q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- Si  $q = 1$  ou  $q = 0$ , on est face à suite de termes constants.

- Si  $0 < q < 1$ , on peut se ramener au premier cas en posant  $a = \frac{1}{q}$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = \frac{1}{a^n}$  et comme  $a > 1$ , alors  $a^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  et donc  $\frac{1}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Si  $-1 < q < 0$ , alors on applique le théorème des gendarmes à  $-(-q)^n \leq q^n \leq (-q)^n$  où  $0 < -q < 1$ .  
Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-q)^n = 0$  et donc  $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \leq 0$ .

□

**Remarque 24** On connaît désormais les limites de toutes les suites géométriques en raisonnant sur le premier terme et la raison  $q$ .

## Définitions 25

Soit  $(u_n)$  une suite.

- Si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$  pour  $M \in \mathbb{R}$ , alors  $(u_n)$  est **majorée** par  $M$  et  $M$  est un majorant de  $(u_n)$ .
- Si  $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$  pour  $m \in \mathbb{R}$ , alors  $(u_n)$  est **minorée** par  $m$  et  $m$  est un minorant de  $(u_n)$ .
- $(u_n)$  est **bornée** si elle est majorée et minorée.

**Exemples 26** ► Les suites de terme généraux  $(-1)^n$  ou  $\sin(n)$  sont bornées : majorées par 1 et minorées par -1.

- La suite de terme général  $2 + \sqrt{n}$  est minorée par 2.
- Une suite strictement décroissante est majorée par son premier terme.

## Théorème 27 | Convergence monotone

- Une suite croissante et majorée est convergente.
- Une suite décroissante et minorée est convergente.

*Démonstration.* Admise.

□

## Corollaire 28

- Une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Une suite décroissante non minorée tend vers  $-\infty$ .

*Démonstration.* Prouvons le premier point.

Soient  $(u_n)$  une suite croissante non majorée et  $I = ]a; +\infty[$  où  $a \in \mathbf{R}$ . Montrons que  $I$  contient  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.

Par non majoration, il existe un rang  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > a$ .  $(u_n)$  étant croissante sur  $\mathbf{N}$ , on a nécessairement que  $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0} > a$ . C'est-à-dire,  $\forall n \geq n_0, u_n \in I$ .  $\square$