

TEST 2

Calculatrice interdite

Mercredi 24 janvier 2024

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $z_1 = (7 + i)(2 - 3i)$

$$\begin{aligned} z_1 &= (7 + i)(2 - 3i) \\ &= 14 - 21i + 2i - 3i^2 \\ &= 14 + 3 - 19i \\ &= 17 - 19i \end{aligned}$$

2. $z_2 = \frac{-5 - i}{4 - 5i}$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-5 - i}{4 - 5i} \\ &= \frac{-5 - i}{4 - 5i} \times \frac{4 + 5i}{4 + 5i} \\ &= \frac{(-5 - i)(4 + 5i)}{4^2 + 5^2} \\ &= \frac{-20 - 25i - 4i - 5i^2}{16 + 25} \\ &= \frac{-15 - 29i}{41} \end{aligned}$$

3. $z_3 = \frac{(4 + 2i)(-1 - i)}{3 + i}$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{(4 + 2i)(-1 - i)}{3 + i} \\ &= \frac{(4 + 2i)(-1 - i)(3 - i)}{3^2 + 1^2} \\ &= \frac{(-2 - 6i)(3 - i)}{10} \\ &= \frac{-12 - 16i}{10} \end{aligned}$$

EXERCICE 2 (3 POINTS)

On considère les nombres complexes suivants.

$$A = 4e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{4i\pi}{6}}$$

$$B = \frac{\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^2}{e^{\frac{i\pi}{4}} \times 2e^{-\frac{i\pi}{2}}}$$

1. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes A et B .

$$A = 4e^{\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{4i\pi}{6}} = 4 \times 2 \times e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{4i\pi}{6}} = 8e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

$$B = \frac{\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^2}{e^{\frac{i\pi}{4}} \times 2e^{-\frac{i\pi}{2}}} = \frac{e^{\frac{6i\pi}{8}}}{2e^{\frac{i\pi}{4} - \frac{2i\pi}{4}}} = \frac{e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{4i\pi}{4}} = \frac{1}{2}e^{i\pi}$$

2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes A et B .

$$\cos\left(\frac{5i\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{i\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{5i\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{i\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, } A = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

$$\text{Par contre, } B = -\frac{1}{2} + 0i \text{ car } e^{i\pi} = -1.$$

EXERCICE 3 (4 POINTS)

Déterminer la forme trigonométrique puis exponentielle des complexes suivants.

1. $z_1 = -6 - 6i$

$$|z_1| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{2 \times 36} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Ainsi, } z_1 = -6 - 6i = 6\sqrt{2}\left(-\frac{6}{6\sqrt{2}} - \frac{6}{6\sqrt{2}}i\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{Donc, } z_1 = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 6\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

2. $z_2 = -3\sqrt{3} + 3i$

$$|z_2| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 9} = 6$$

$$\text{Ainsi, } z_2 = -3\sqrt{3} + 3i = 6\left(\frac{-3\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6}i\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$$

$$\text{Donc, } z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 6e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$