

# 6

## LOGARITHME NÉPÉRIEN

### Résumé

La dualité entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien est centrale dans la résolution de nombreux problèmes comme la modélisation des populations, et pour des calculs financiers.

### 1 Fonctions logarithmes

#### Définition | Logarithmes de base $a$

Soit  $a > 0$ .

La fonction  $f_a$  exponentielle de base  $a$  admet une fonction réciproque : la fonction **logarithme**  $\log_a$  de **base**  $a$ .

$$\forall x \in \mathbf{R}, \log_a(a^x) = x$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, a^{\log_a(x)} = x$$

**Remarque** Toute fonction logarithme est définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  mais les fonctions exponentielles sont, elles, définies sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

**Exemple** L'exemple le plus classique de logarithme est  $\log_{10}$ .

$$\blacktriangleright \log_{10}(10000) = 5 \text{ car } 10000 = 10^5.$$

$$\blacktriangleright \log_{10}(0,1) = -1 \text{ car } 0,1 = 10^{-1}.$$

$$\blacktriangleright 10^{\log_{10}(4,2)} = 4,2$$

#### Exercice

Calculer  $\log_{10}(100)$  et  $\log_{10}(0,000001)$ .

### Propriétés

Soit  $a > 0$ .

$$\blacktriangleright \log_a(1) = 0$$

$$\blacktriangleright \log_a(a) = 1$$

$$\blacktriangleright \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\blacktriangleright \forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\blacktriangleright \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \log_a(x^y) = y \log_a(x)$$

*Démonstration.* On dispose des propriétés de la fonction exponentielle de base  $a$  et on utilise la réciprocity entre exponentielle et logarithme.  $\square$

**Exemples** On peut calculer des logarithmes plus facilement en se ramenant à des valeurs connues.

$$\blacktriangleright \log_{10}(20) = \log_{10}(2 \times 10) = \log_{10}(2) + \log_{10}(10) = \log_{10}(2) + 1 \approx 0,3 + 1 \approx 1,3$$

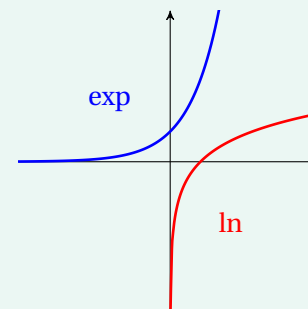
$$\blacktriangleright \log_{10}(\sqrt{10}) = \log_{10}\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \log_{10}(10) = \frac{1}{2}.$$

### 2 Logarithme népérien

#### Définition | Fonction $\ln$

On appelle **logarithme népérien**, notée  $\ln$ , la fonction logarithme de base  $e$  définie sur  $]0; +\infty[$ .

Sa courbe représentative est la symétrie de celle de  $\exp$  selon l'axe  $y = x$ .



### Propriétés

On a les propriétés suivantes;

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \ln(x^y) = y \ln(x)$

### Théorème | Dérivabilité

$\ln$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  (donc continue) et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

### Corollaire | Variations de $\ln$

$\ln$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

*Démonstration.* Sur  $]0; +\infty[$ , la fonction inverse est strictement positive. □

### Exercice

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1.  $e^{2x} - 7 \geq 3$
2.  $3\ln(x) + 1 = 13$
3.  $\ln(-4x + 2) > 0$

### Corollaire | Composée

Pour toute fonction  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$ , on a :

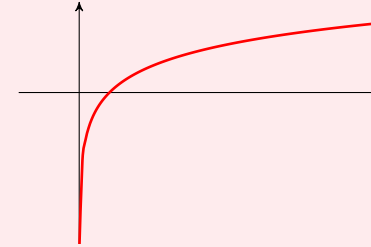
- $\ln(u)$  est dérivable sur  $I$ ;
- $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ .

## 3 Analyse asymptotique

### Propriétés | Limites en $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



*Démonstration.* ► Soit  $A \in \mathbf{R}$ . Si  $0 < x < e^A$  alors,  $\ln(x) < \ln(e^A) = A$  par stricte croissance de  $\ln$ .

► Soit  $A \in \mathbf{R}$ . Si  $x > e^A$  alors,  $\ln(x) > \ln(e^A) = A$  par stricte croissance de  $\ln$ . □

### Exercice

Déterminer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-3x)$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 7x)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2 + 1)$

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x)^2$

### Théorème | Croissances comparées

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$