

# 4

## SECOND DEGRÉ, ÉTUDE DU SIGNE

### Résumé

Précédemment, nous avons étudié algébriquement les polynômes du second degré et particulièrement leur factorisation à partir de la recherche de racines. Nous nous intéressons ici au signe de ces expressions ainsi qu'à la résolution d'inéquations de degré 2 qui nous sont facilement accessibles maintenant.

### 1 Signe d'une fonction du second degré

#### Théorème

Un polynôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) est du signe de  $a$ , sauf entre les racines quand elles existent.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction du second degré, définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ . On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**1<sup>er</sup> cas  $\Delta < 0$ :** On sait que le polynôme possède deux racines  $x_1$  et  $x_2$  et qu'on peut le factoriser sous la forme  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$a$	signe de $a$				
$x - x_1$	-	0	+		
$x - x_2$		-	0	+	
$f(x)$	signe de $a$	0	signe de $-a$	0	signe de $a$

**2<sup>e</sup> cas  $\Delta = 0$ :**  $f$  possède une unique racine  $\alpha$  donc on peut factoriser sous la forme  $f(x) = a(x - \alpha)^2$ . Le signe de  $f$  peut alors aussi être déterminé grâce à la règle des signes.

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$a$	signe de $a$		
$x - \alpha$	-	0	+
$x - \alpha$	-	0	+
produit $f(x)$	signe de $a$	0	signe de $a$

**3<sup>e</sup> cas  $\Delta > 0$ :** Pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La courbe de la fonction ne coupe jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe, celui de  $a$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de $a$	



**Remarque** En pratique, il suffit de connaître les éventuelles racines du polynôme et de regarder le signe de  $a$  pour visualiser la parabole et donc obtenir le tableau de signes. En effet, si  $a$  est strictement positif, la parabole est ouverte (fermée sinon).

### 2 Résolution d'inéquations du second degré

On souhaite des inéquations du type  $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ ,  $ax^2 + bx + c > 0$  ou  $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ .

#### Méthode

Pour résoudre des inéquations de ce type, il suffit de construire le tableau de signes sur  $\mathbf{R}$  de l'expression  $ax^2 + bx + c$ . Faisons le pour  $-2x^2 + 4x + 60$  et  $-2x^2 + 4x + 6 < 0$ .

**Calcul du discriminant :**  $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64$

Le discriminant est strictement positif donc il y a deux racines distinctes qui sont  $-1$  et  $3$ .

Le tableau de signes est immédiat car  $a = -2 < 0$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x + 6$	—	0	+	0

On peut conclure :

$$-2x^2 + 4x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$$

et

$$-2x^2 + 4x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[.$$

### 3 Position relative de deux courbes

#### Définition

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ , les courbes respectives de  $f$  et  $g$ , c'est dire laquelle est graphiquement au dessus de l'autre sur  $I$ .

#### Propriété

$\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq g(x)$ .

**Remarque** Pour comparer les deux courbes, il suffit d'étudier le signe de  $f - g$ .

**Exemple** Soient  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = -2x^2 + 12x - 8$  et  $g(x) = 8x - 14$ .

Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) - g(x) = (-2x^2 + 12x - 8) - (8x - 14) = -2x^2 + 4x + 6$ .

À l'aide du tableau de signes établi précédemment, on va pouvoir conclure.

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x + 6$	—	0	+	0

Sur  $[-1; 3]$ ,  $\mathcal{C}_f$  est au dessus de  $\mathcal{C}_g$  mais sur  $]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$ , c'est l'inverse :  $\mathcal{C}_g$  est au dessus de  $\mathcal{C}_f$ .

Nous le vérifions graphiquement pour terminer.

