CHAPITRE 3

VECTEURS DU PLAN

I - Notion de vecteurs

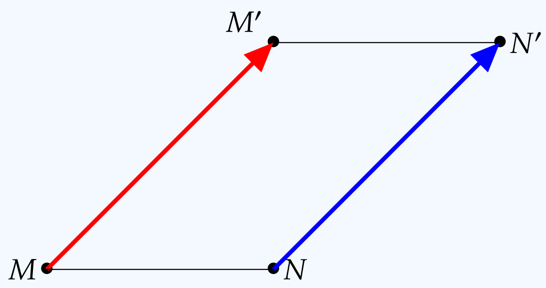
A) Translations et vecteurs

Définition : Translation

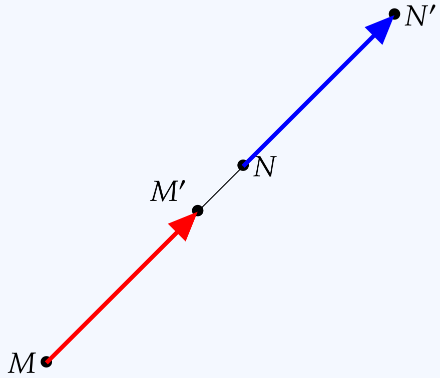
Soient M et M' deux points du plan.
Pour tout point N du plan, on construit l'unique point N' tel que $MM'N'N$ soit un parallélogramme (éventuellement aplati). On dit alors que le point N' est l'image du point N par la translation qui transforme M en M'. Cette translation est aussi appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.

Exemples

- On observe une première translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en dessous. On note $\overrightarrow{MM'}$ à l'aide d'une flèche qui part de M et va en M'.



- Dans le cas particulier où M, M' et N sont alignés, nous avons la configuration suivante, où la parallélogramme est plat.



Remarque

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ matérialise le **déplacement rectiligne** de M vers M' caractérisé par une **direction**, celle de (MM'), un **sens**, celui de M vers M', et sa **norme** $\|\vec{u}\|$, la longueur MM'.

B) Égalité de deux vecteurs

Définition

Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme aussi N en N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux et on le note $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

Remarque

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ alors $AB = CD$.

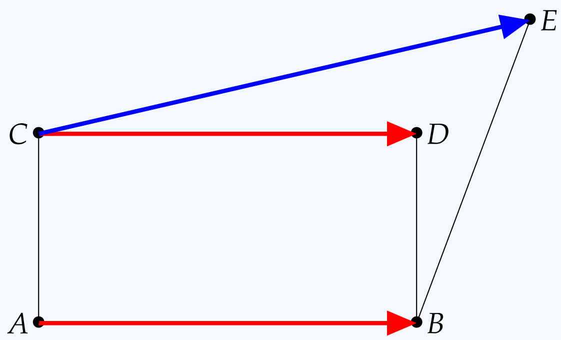
Propriété

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si, et seulement si, le quadrilatère $MM'N'N$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Démonstration. C'est immédiat par définition d'un vecteur et propriétés d'un parallélogramme. □

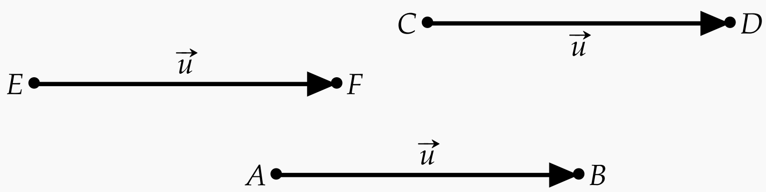
Exemple

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne le sont pas.



Remarque

On considère la situation suivante.



Il y a une infinité de vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$, comme, entre autres, $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$. On peut le noter $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.

Définition : Vecteur nul

La translation qui transforme le point M en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$. Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

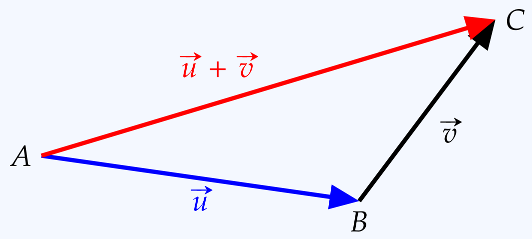
C) Somme de vecteurs

Définition : Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation qui résulte de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ puis de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Exemple

Voici une illustration de la somme de deux vecteurs.



Théorème : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

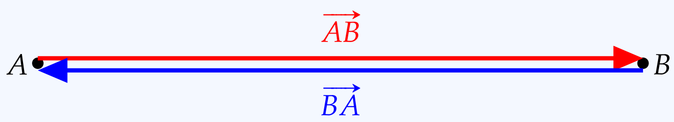
Démonstration. Découle de la définition de la somme de deux vecteurs. □

Définition : Opposé

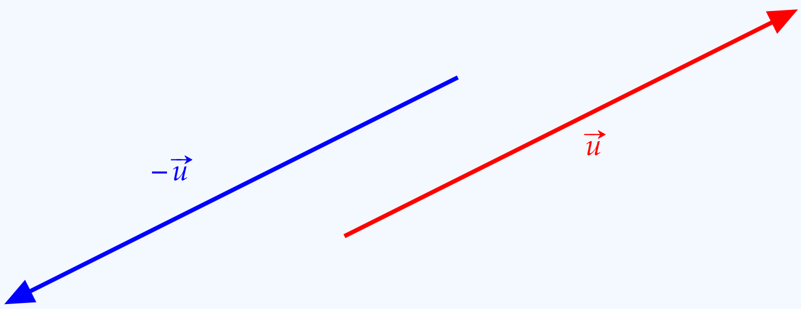
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on le note aussi $-\overrightarrow{AB}$.

Exemples

- On visualise l'opposé de $\overrightarrow{AB}$.



- On peut aussi représenter l'opposé d'un vecteur $\vec{u}$.



Propriété

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Alors $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Démonstration. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ Ainsi, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. □

D) Produit par un réel

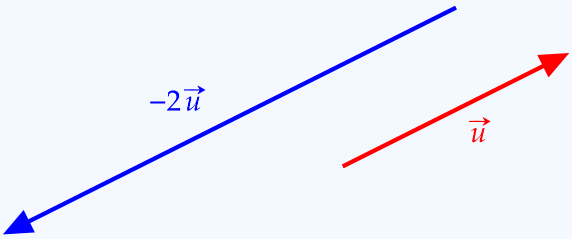
Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul et $k \in \mathbb{R}^*$. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

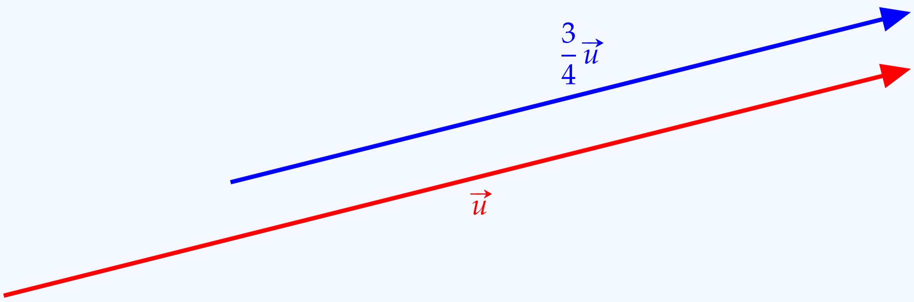
- la même direction que $\vec{u}$
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$
- pour norme $k\|\vec{u}\|$ si $k > 0$, $-k\|\vec{u}\|$ si $k < 0$

Exemples

- $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$



- $\left\|\frac{3}{4}\vec{u}\right\| = \frac{3}{4}\|\vec{u}\|$



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k, k' des réels.

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

II - Vecteurs et coordonnées

A) Coordonnées d'un vecteur

Définitions : Repère et base orthonormée

Soient O un point et deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dont les directions sont perpendiculaires et dont les normes sont égales à 1.
On dit que $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormée** du plan et que $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est un **repère orthonormé** du plan.

Propriété : Décomposition dans une base orthonormée

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe x et y deux réels, uniques, tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

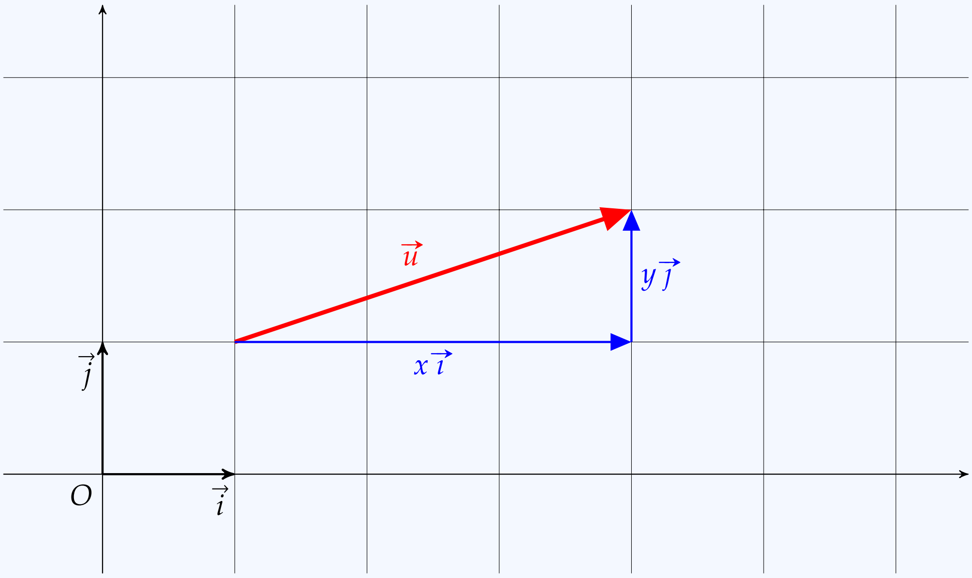
Démonstration. Soit $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées $(x;y)$ de M dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ sont uniques et $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. □

Remarque

On donne souvent les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en écrivant $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Exemple

Regardons $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.



Exercice

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Représenter les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

2) Soit le point $A(1;1)$. Placer B tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Remarque

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées dans une même base orthonormée sont égales.

B) Opérations sur les vecteurs

Propriété : Somme

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

Alors, $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Démonstration. On décompose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$$\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$$

et

$$\vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$$

Ainsi, $\vec{u}+\vec{v}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}=(x+x')\vec{\imath}+(y+y')\vec{\jmath}$. □

Propriété : Produit par un réel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et k un réel.

Alors, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

Démonstration. Comme pour la démonstration précédente, $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ donc $k\vec{u}=kx\vec{\imath}+ky\vec{\jmath}$. □

C) Conséquences

Théorème

Soient $A(x_A;y_B)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Démonstration. Remarquons d'abord que O a pour coordonnées $(0;0)$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Ensuite, regardons $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. Dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\overrightarrow{OA}$ se décompose en

$$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}$$

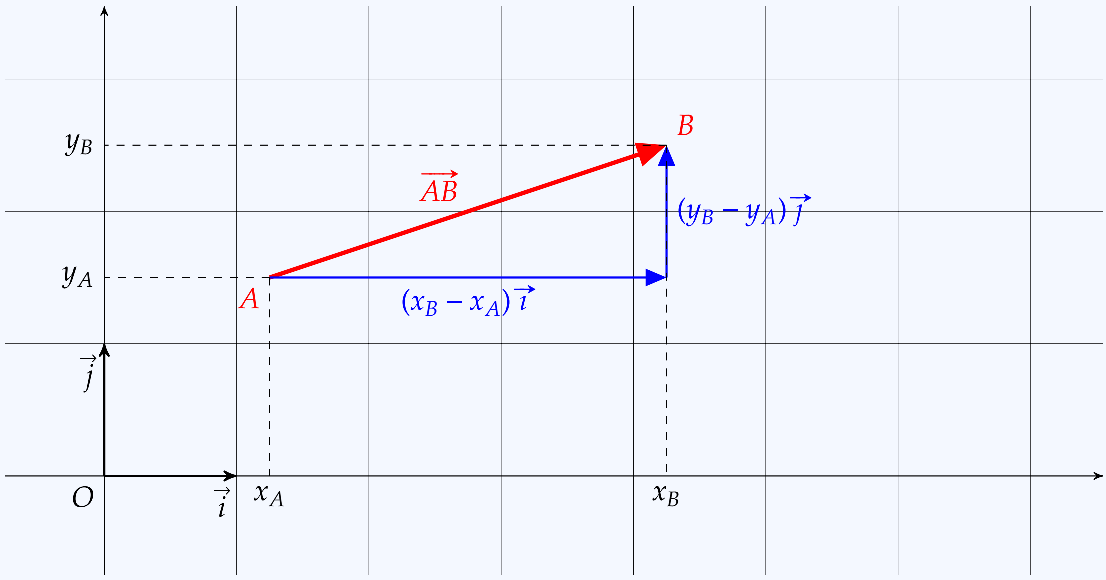
et de même,

$$\overrightarrow{OB}=x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}.$$

Ainsi, nous avons $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}x_B\\y_B\end{pmatrix}$.
Donc, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Finalement, le calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ se fait grâce aux propriétés sur les coordonnées vues précédemment.
$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. □

Exemples

- On visualise le résultat précédent sur le repère suivant :



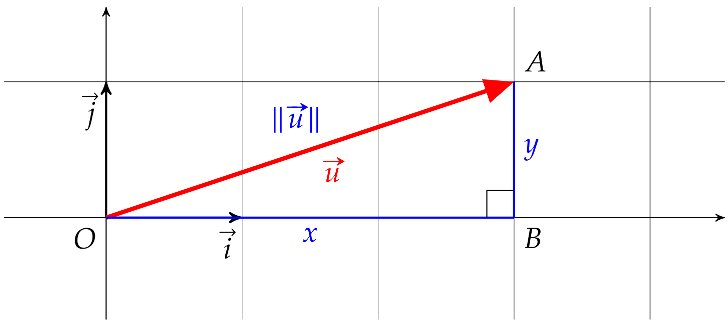
- Soient $A(1;4)$ et $B(8;-1)$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8-1 \\ (-1)-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Théorème : Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration. On appelle A le point du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et B le point tel que $x\vec{i} = \overrightarrow{OB}$. Le triangle OBA ainsi formé est un triangle en B tel que $OA = \|\vec{u}\|$, $OB = x$ et $BA = y$.



Par le théorème de Pythagore, nous avons :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

et donc,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

car $\|\vec{u}\| \geqslant 0$. □

Exemple

Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, alors la norme de $\overrightarrow{AB}$ est égale à $\sqrt{7^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$.

Corollaire : Distance entre deux points

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors la distance AB est égale à $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Démonstration. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On peut donc utiliser le théorème précédent pour obtenir $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. □

Exemple

Soient $A(10; 2)$ et $B(-2; 4)$.

$$AB = \sqrt{((-2) - 10)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(-12)^2 + 2^2} = \sqrt{148}$$

III - Colinéarité et alignement

A) Colinéarité

Définition

Vecteurs colinéaires Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Les deux vecteurs ont donc la **même direction**.

Remarque

$\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont **proportionnelles**, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. On a alors $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exemple

$\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors que $\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Théorème : Critère de colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Démonstration. C'est direct si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul. Dans la suite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ seront non nuls.
Supposons d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = kx'$ et $y = ky'$ et donc $xy' - yx' = kx'y' - ky'x' = 0$.
Réciproquement, supposons que $xy' - yx' = 0$. $\vec{u} \neq \vec{0}$ donc $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

Traitons le premier cas, le second se fera de la même manière. $xy' - yx' = 0$ implique que $y' = \dfrac{yx'}{x}$ donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \dfrac{yx'}{x} \end{pmatrix} = \dfrac{x'}{x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. □

B) Alignement

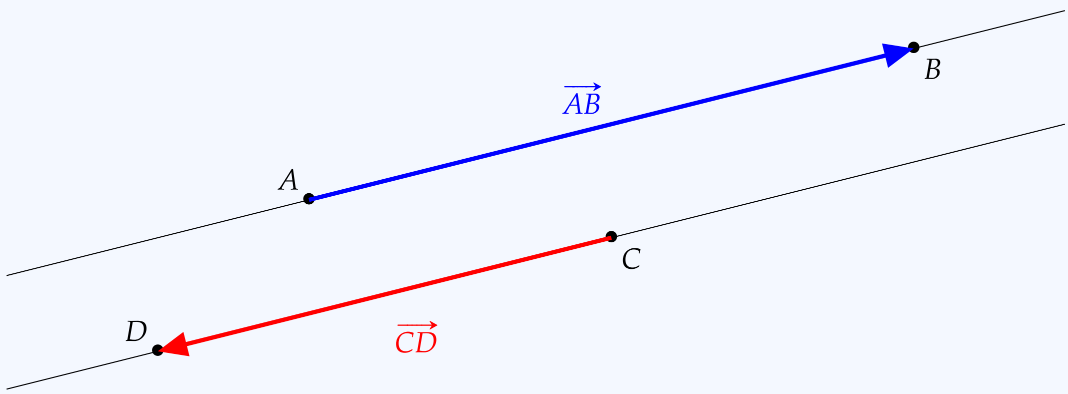
Théorème : Droites parallèles

Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. C'est une conséquence de la caractérisation de l'égalité de vecteurs avec un parallélogramme. □

Exemple

Les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.



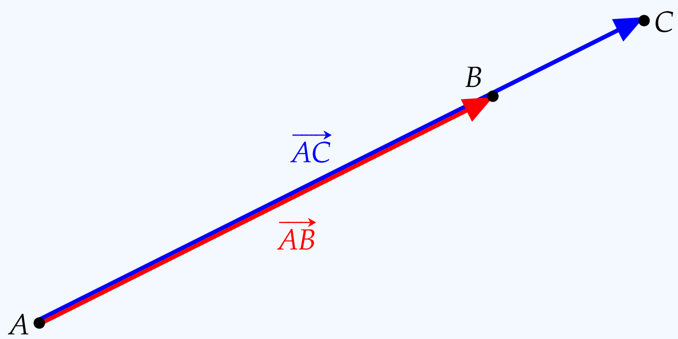
Théorème : Points alignés

Trois points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Démonstration. A, B et C sont alignés si et seulement si (AB) et (AC) sont parallèles. On peut utiliser le résultat précédent pour terminer la démonstration de ce théorème. □

Exemple

A, B et C sont alignés.

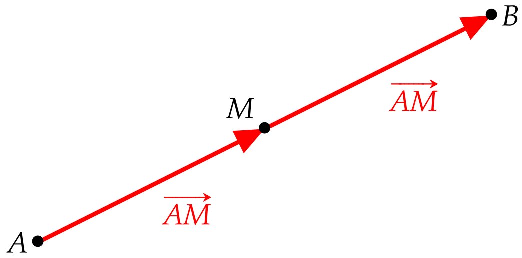


Propriété : Milieu d'un segment

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Alors le milieu du segment $[A, B]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration. Notons M le milieu de $[A,B]$. Partant de A, l'image de la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ est M.

Rappelons que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_B - x_A}{2} \\ \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{pmatrix}$.



Enfin, les coordonnées de M sont donc $\left(x_A + \dfrac{x_B - x_A}{2}; y_A + \dfrac{y_B - y_A}{2}\right) = \left(\dfrac{x_B + x_A}{2}; \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$. □