Chapitre 2

CALCUL LITTÉRAL

I - Rappels

A) Développer

Définition

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme.

Propriété : Distributivité

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on développe de la façon suivante :

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple

$(3 + 8)(1 + 10) = 3 \times 1 + 3 \times 10 + 8 \times 1 + 8 \times 10 = 3 + 30 + 8 + 80 = 121$

Remarque

On a aussi, pour $e \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)(c + d + e) = ac + ad + bc + bd + ae + be$$

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes :

- $3(x + 2)$
- $(4x + 10)(7x + 2)$
- $(12x + 2)(x + 5x)$
- $(4 + x + 2x^2)(x + 3)$

B) Factoriser

Définition

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en un produit.

Propriété : Factorisation

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on factorise de la façon suivante :

$$ab + ac = a(b + c)$$

Exemple

$21 + 30 + 3 = 3 \times 7 + 3 \times 10 + 3 \times 1 = 3(7 + 10 + 1) = 3 \times 18 = 54$

Remarque

On a aussi, pour $d \in \mathbb{R}$:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d)$$

Exercice

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Factoriser

- $2x + 2$
- $14x^2 + 7x$
- $ab + ac + ad + ae + af$ où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

II - Identités remarquables

Propriété : 1ère identité remarquable

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration. On développe $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$.

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

Propriété : 2nde identité remarquable

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration. Similaire à la démonstration précédente. □

Propriété : 3e identité remarquable

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Démonstration. On part du membre de droite et on développe.

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

□

III - Équations

A) Rappels

Définition

Une **équation d'inconnue** x est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu x.
Résoudre dans un ensemble E une telle équation, c'est déterminer toutes les valeurs de x appartenant à E qui rendent l'égalité vraie.
Ces valeurs sont dites les **solutions** dans E de l'équation.

Remarque

Des équations sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont exactement les mêmes solutions. On utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ pour le signaler.

Propriétés : Manipulations algébriques

Les opération suivantes transforment une équation en une équation équivalente :

- Ajouter (ou soustraire) un même nombre aux deux membres de l'équation.
- Multiplier (ou diviser) les deux membres de l'équation par un nombre **non-nul**.
- Développer, factoriser ou réduire l'un des deux membres

Remarque

On veillera toujours à vérifier que les équations en jeu sont bien définies et écarter les valeurs dites **interdites**.

B) Équation de degré 1

Définition

On appelle **équation de degré 1** une équation de la forme :

$$ax + b = cx + d$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a - c \neq 0$.

Propriété

On peut réécrire l'équation précédente sous la forme équivalente :

$$(a - c)x + (b - d) = 0$$

Théorème : Solution

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $ax + b = 0$ admet $\dfrac{-b}{a}$ comme unique solution.

Exemple

Considérons l'équation de degré 1, avec $x \in \mathbb{R}$

$$4x - 10 = 2$$

Alors on peut la résoudre de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 4x - 10 &= 2 \\ \Leftrightarrow 4x - 10 + \mathbf{10} &= 2 + \mathbf{10} \\ \Leftrightarrow 4x &= 12 \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{\mathbf{4}} &= \frac{12}{\mathbf{4}} \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ est $S = \{3\}$.

C) Équation de degré 2

Définition

On appelle **équation du second degré** une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Théorème : Solutions

Cette équation admet 2, 1 ou aucune solution(s) suivant les valeurs de a, b et c.

Démonstration admise. □

Remarque

Si $b = 0$, l'équation est équivalente à une équation de la forme $x^2 = d$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Exemple

Regardons l'équation :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

On peut vérifier que 1 et 2 sont solutions de cette équation.

D) Règles du produit/quotient nul

Théorème : Règle du produit nul

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.
Alors :

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0$$

Exemple

Soient a et b deux réels. L'équation $(x-a)(x-b) = 0$ admet a et b comme solutions, par la règle du produit nul.

Exercice

Résoudre chaque équation dans $\mathbb{R}$ en se ramenant à une équation de degré 1 ou de type “produit nul”.

- $(2x-1)(x+3) - (2x-1)(3x-1) = 0$
- $(x-2)(x+3) = (x-5)(x+1)$
- $5x^2 = 3x$
- $(x-1)^2 - (x-2)^2 = 0$

Théorème : Règle du quotient nul

Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.
Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$$

Remarque

Les solutions de $B(x) = 0$ sont des **valeurs interdites** de l'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Exemple

On considère l'équation suivante :

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = 0$$

Elle est équivalente par la règle du quotient nul à : $x + 3 \neq 0$ et $x^2 + 3x + 2 = 0$.

E) Règle des produits en croix

Propriété : Produit en croix

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$ est équivalente à $ax = bc$ dans $\mathbb{R}^*$.

Démonstration. On multiplie notre équation par bx (non nul si $x \in \mathbb{R}^*$) pour obtenir l'équation équivalente attendue. □

Exemple

On a équivalence des équations $2 = \dfrac{1}{x}$ et $x = \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}^*$.

Remarque

On peut généraliser la règle du produit en croix à des équations appelées **équations quotients**. C'est ce que nous voyons dans le résultat suivant.

Théorème : Équations quotients

Soient $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ et $D(x)$ des expressions algébriques.
Alors :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow A(x)D(x) = B(x)C(x)$$

Exemples

- $\dfrac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow -3x + 1 = x - 5$ et donc $\dfrac{-3x+1}{x-5} = 1 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.
- $\dfrac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow 3 - x = 2(x+7)$ et donc $\dfrac{3-x}{x+7} = 2 \Leftrightarrow -11 = 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{-11}{3}$.