

9

INTÉGRATION

Résumé

La théorie de l'intégration est riche. Elle est tellement riche que ses applications se retrouvent dans presque tous les pans de l'analyse : calcul d'aires, détermination de primitives, probabilité, transformations de Fourier et Laplace...

1 Intégration géométrique

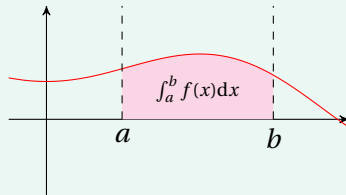
Attention

Dans toute la section, f désignera une fonction **continue** définie sur un intervalle **compact** de \mathbf{R} , c'est-à-dire, une fonction suffisamment régulière définie sur un $[a; b]$ où $a < b$ sont des réels.

Définition | Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle

Supposons que f est **positive**.

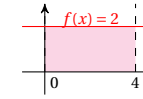
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel **positif** correspondant à l'**aire sous la courbe** de f entre $x = a$ et $x = b$.



On la note :

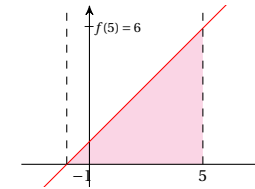
$$\int_a^b f(x)dx.$$

Exemples ► On peut calculer $\int_0^4 2dx$ qui est l'aire sous la courbe de la fonction constante égale à 2 entre $x = 0$ et $x = 4$.



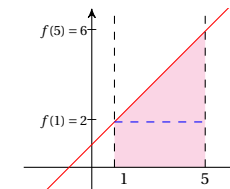
Elle correspond à l'aire d'un rectangle de longueur $4 = 4 - 0$ et de largeur 2, c'est-à-dire, $\int_0^4 2dx = 8$.

► Pour $\int_{-1}^5 (x+1)dx$, nous avons à faire à l'aide d'un triangle de base $6 = 5 - (-1)$ et de hauteur 6.



On obtient donc $\int_{-1}^5 (x+1)dx = \frac{6 \times 6}{2} = 18$.

► Pour $\int_1^5 (x+1)dx$, cette fois ci, c'est un trapèze qui nous intéresse. On peut calculer son aire en considérant le rectangle et le triangle mis en évidence.

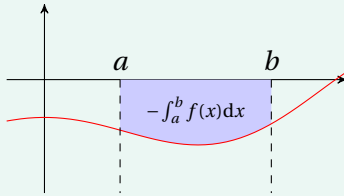


$$\int_1^5 (x+1)dx = 4 \times 2 + \frac{4 \times 4}{2} = 8 + 8 = 16$$

Définition | Intégrale d'une fonction négative sur un intervalle

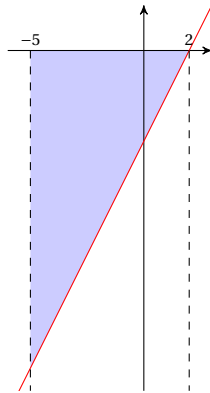
Supposons que f est **négative**.

L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel **négatif** correspondant à l'**aire algébrique sous la courbe** de f entre $x = a$ et $x = b$.



Cette aire est l'opposée de l'**aire absolue** obtenue par un calcul d'aire classique et représentée au dessus.

Exemple $\int_{-5}^2 (2x - 4) dx = -49$ car l'aire absolue sous la courbe est celle d'un triangle de base 7 et de hauteur $(2 \times 2 - 4) - (2 \times (-5) - 4) = 14$ donc d'aire $\frac{7 \times 14}{2} = 49$ mais le triangle est sous l'axe des abscisses : la fonction est négative sur $[-5; 2]$.



Propriétés

► Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^x f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

► Anti-symétrie : $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

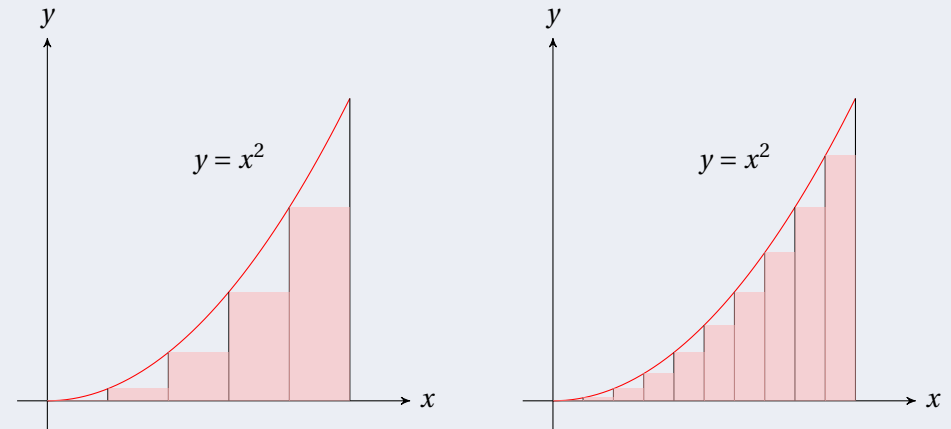
► Comparaison :

Si $g \geq f$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Remarque La relation de Chasles nous permet donc de gérer le cas des fonctions de signe quelconque. Il suffit de découper le domaine de définition de f selon qu'elle soit positive ou négative est de sommer les aires algébriques associées.

🔧 Méthode | Approche de l'intégrale par la méthode des rectangles

On peut approcher l'intégrale d'une fonction f en utilisant l'aire de rectangles sous la courbe de f . Ci-contre, la courbe de la fonction carré sur $[0; 1]$.



En augmentant le nombre de rectangles, on approche de la valeur de l'aire.

Exercice

Déterminer les intégrales suivantes en se ramenant à des calculs d'aires relatives.

1. $\int_0^{10} 2x - 4 dx$

3. $\int_{-3}^3 x^3 dx$

2. $\int_{-1}^1 x dx$

4. $\int_4^7 3x + 1 dx$

Propriété | Linéarité

Soient f et g définies sur $[a; b]$ ainsi que k un réel.

$$\blacktriangleright \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

$$\blacktriangleright k \times \int_a^b f(x)dx = \int_a^b kf(x)dx$$

2 Primitives

Définition | Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive** de f toute fonction F définie et dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Remarques \blacktriangleright Si une telle primitive existe alors il en existe une **infinité** car G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$ où $c \in \mathbf{R}$ est encore une primitive de f .

\blacktriangleright Une primitive d'une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple Soit f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = 3x^2 - 4x$

La fonction F définie sur \mathbf{R} par $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$ est une primitive de f car F est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F'(x) = 3x^2 - 4x = f(x)$.

Propriétés | Récapitulatif des primitives usuelles

Dans le tableau suivant, F est une primitive de f et C une constante réelle.

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \geq 0)$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \quad (n \geq 2, x \neq 0)$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$

Exercice

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants, f étant définie sur I .

1. $f(x) = -2x^3 + 3$ et $I = \mathbf{R}$

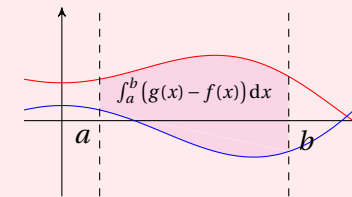
2. $f(x) = e^{8x}$ et $I = \mathbf{R}$

3 Intégration plus avancée

Propriété | Aire entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions définies sur le même intervalle $[a; b]$ telles que $g \geq f$.

L'aire absolue entre les courbes de f et g ainsi que $x = a$ et $x = b$ correspond à l'intégrale $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$.



Définition | Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** de f entre a et b le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Remarque C'est une extension de la moyenne algébrique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ pour une série x_1, \dots, x_n .

Théorème | Existence d'une primitive

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une unique primitive s'annulant en $a \in I$. On la note F_a et on a :

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Théorème | Calcul primitif

Soit F une primitive de f sur $[a; b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Démonstration. F et F_a diffèrent d'une constante $c : F = F_a + c$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F_a(b) + c - F_a(a) - c \\ &= \int_a^b f(t) dt + c - \int_a^a f(t) dt - c \\ &= \int_a^b f(t) dt \end{aligned} \quad \square$$

Remarque Il est désormais extrêmement facile de calculer une intégrale pour des fonctions usuelles.

Exemples ▶ $\int_2^7 x + 4 dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^7 = \left(\frac{7^2}{2} + 4 \times 7 \right) - \left(\frac{2^2}{2} + 4 \times 2 \right) = 42,5.$

▶ $\int_{-1}^3 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}^3 = \left(\frac{e^{2 \times 3}}{2} \right) - \left(\frac{e^{2 \times (-1)}}{2} \right) = \frac{e^6}{2} - \frac{e^{-2}}{2}.$

Théorème | Intégration par parties

Soient f continue sur un intervalle I de primitive F , g dérivable sur I et $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx$$

Démonstration. Fg est une primitive de $F'g + Fg' = fg + Fg'$. Ainsi :

$$\int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b F(x)g'(x) dx = \int_a^b (f(x)g(x) + F(x)g'(x)) dx = [F(x)g(x)]_a^b$$

□