10

FONCTION EXPONENTIELLE

Résumé

De manière inédite, mais finalement classique en analyse, nous allons introduire une fonction vérifiant des propriétés analytiques et nous en déduirons ses propriétés algébriques. Cette fonction incontournable est la fonction exponentielle.

1 Introduction et premières propriétés

Théorème | Existence et unicité de la fonction exp

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant l'équation, dite différentielle, suivante.

$$f' = f \tag{E}$$

Si, de plus, $f(0) = 1$ alors f **existe** et est **unique**. On la note exp : la **fonction exponentielle**.

Démonstration. Admise. □

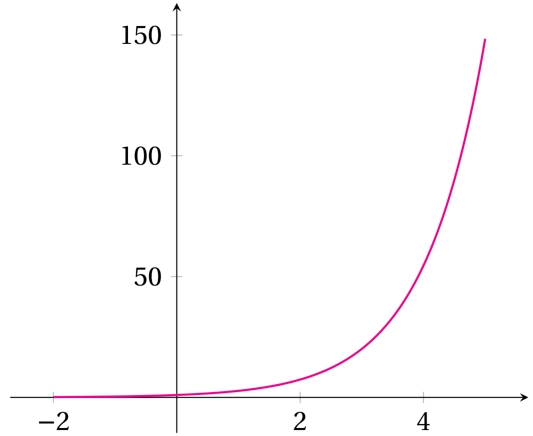
Propriétés

Par définition, on a :

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp' = \exp$.

Remarques

- Nous pouvons construire d'autres fonctions égales à leur dérivée. Toutes les fonctions $k \times \exp$ ($k \in \mathbf{R}$) sont dérivables sur $\mathbf{R}$ de dérivée $k \times \exp$.
- On donne à titre indicatif la courbe représentative de exp. Nous donnerons plus tard le signe et les variations de la fonction. Remarquons tout de même à quelle point les images de exp sont de plus en plus grandes.



Propriétés

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- $\exp(x)\exp(-x) = 1$
- $\exp(x) \neq 0$

Démonstration.
- Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \exp(x)\exp(-x)$.
  h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, comme $\exp' = \exp$, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \exp'(x)\exp(-x) + (-\exp'(-x))\exp(x) \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Ainsi, $h' = 0$ sur $\mathbf{R}$ ce qui veut dire que h est constante (égale à $h(0) = 1$ en particulier).
- C'est direct d'après le point précédent.

□

Remarque

$$\exp(x)\exp(-x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

2 Opérations exponentielles

Propriété | Exponentielle d'une somme

Soient x et y deux réels.

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Démonstration. Soit y réel fixé.
Construisons g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.
g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x)\exp(x+y)}{\exp(x)^2} \\ &= \frac{0}{\exp(x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

g est constante égale à $g(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$.
C'est-à-dire, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. □

Remarque L'exponentielle transforme une somme en produit, ce sera très pratique à l'avenir.

Propriété | Exponentielle d'un produit

Soient x et y deux réels.

$$\exp(xy) = \left(\exp(x)\right)^y$$

Démonstration. Admise. □

Définition | Nombre d'Euler

Notons e le nombre $\exp(1)$ appelé **nombre d'Euler**.

Remarque $e \simeq 2{,}718$ est, tout comme π, un nombre irrationnel.

Théorème | Notation exponentielle

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\exp(x) = e^x.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\exp(x) = \exp(1 \times x) = \exp(1)^x = e^x$ □

Remarque Toutes les propriétés précédemment vues sont cohérentes si on note une exponentielle comme une puissance.
On a ainsi, pour $x, y \in \mathbf{R}$:

- $e^0 = 1$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^{x+y} = e^x e^y$
- $e^{xy} = (e^x)^y$

Exercice

Simplifier les expressions suivantes.

- $e^5 e^7$
- $\dfrac{e^4}{e^x e^4}$
- $1 - \dfrac{2e^{20}}{\left(e^2\right)^2 e^5}$
- $e^2 e^{-3}$
- $e^{x^2-2} e^{2-x^2}$

3 Étude de la fonction exp

Propriété | Positivité stricte

La fonction exponentielle est **strictement positive**.
C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\exp(x) > 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$. $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$ □

Corollaire | Stricte croissance

La fonction exponentielle est **strictement croissante**.
C'est-à-dire, pour tout $x, y \in \mathbf{R}$:

$$x < y \Leftrightarrow \exp(x) < \exp(y).$$

Démonstration. La dérivée de exp est strictement positive. □