

On donne la règle du **quotient nul** : un quotient de deux nombres réels est nul si, et seulement si, son numérateur est nul et son dénominateur est non-nul.

Autrement dit, on a l'équivalence :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \\ \Leftrightarrow A(x) = 0 \text{ et } B(x) \neq 0$$

Les solutions de $B(x)$ sont appelées **valeurs interdites** de l'équation quotient $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Voici une résolution dans \mathbb{R} de l'équation $\frac{5x-5}{x+1} = 0$.

On note d'abord que -1 est une valeur interdite car $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$$\frac{5x-5}{x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow 5x-5=0 \text{ et } x+1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow 5x=5 \text{ et } x \neq -1 \\ \Leftrightarrow x=1 \text{ et } x \neq -1$$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{1\}$.

Exercice 1

Résoudre dans \mathbb{R} les équations quotients suivantes.

1. $\frac{5x-2}{x+7} = 0$
2. $\frac{-7x+21}{2x+1} = 0$
3. $\frac{x-5}{x} = 0$
4. $\frac{(2x-4)(3x-9)}{4x-1} = 0$
5. $\frac{14x+2}{-7x-1} = 0$

Correction

1.

$$\frac{5x-2}{x+7} = 0 \\ \Leftrightarrow 5x-2=0 \text{ et } x+7 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \text{ et } x \neq -7$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{-7x+21}{2x+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow -7x+21 &= 0 \text{ et } 2x+1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \text{ et } x \neq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{x-5}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow x-5 &= 0 \text{ et } x \neq 0 \\ \Leftrightarrow x &= 5 \text{ et } x \neq 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{5\}$$

4.

$$\begin{aligned} \frac{(2x-4)(3x-9)}{4x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-4)(3x-9) &= 0 \text{ et } 4x-1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow 2x-4 = 0 \text{ ou } 3x-9 &= 0 \quad \text{et } x \neq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \quad \text{et } x &\neq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{2; 3\}$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{14x+2}{-7x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 14x+2 &= 0 \text{ et } -7x-1 \neq 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{7} \text{ et } x \neq -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$