8

Inégalités et inéquations

Résumé

Ce chapitre est la suite logique du chapitre sur le calcul littéral : après avoir étudié l'égalité, étudions l'inégalité.

1 Propriétés des inégalités

Définitions

Soient a et b deux réels.

- On note $a < b$ ou $b > a$ pour dire que a est **strictement inférieur** à b et que b est **strictement supérieur** à a.
- On note $a \leqslant b$ ou $b \geqslant a$ pour dire que a est **inférieur ou égal** à b et que b est **supérieur ou égal** à a.

Propriété | Ordre dans $\mathbb{R}$

Si a, b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Propriétés | Somme

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

- $a < x \Leftrightarrow a + b < x + b$
- $a < x \Leftrightarrow a - b < x - b$
- Si $a < x$ et $b < y$, alors $a + b < x + y$.

Remarque Ces propriétés sont analogues à celles connues pour les égalités.

Propriétés | Produit

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

- Si $b > 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba < bx$
- Si $b < 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba > bx$

Attention

Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par un nombre strictement négatif, le sens de l'inégalité est inversé !

Remarque On a plusieurs conséquences du résultat précédent.

- $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a^n \leqslant b^n$.

Exercice

1. Comparer $2^{10\,000}$ et $3^{1\,000}$
2. Démontrer que pour tout p positif, on a :

$$\sqrt{p} \leqslant \frac{p+1}{2}.$$

2 Valeur absolue

Définition | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ la **valeur absolue** de x comme suit :

- Si $x > 0$, alors $|x| = x$
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$

Exemples

- $|5| = 5$
- $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$

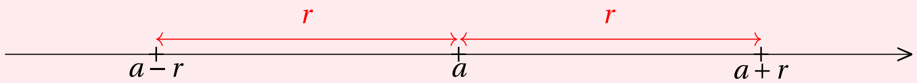
Remarques

- Une valeur absolue est toujours positive.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a-r \leqslant x \leqslant a+r \Leftrightarrow x \in [a-r, a+r]$$



Exercice

Représenter les inégalités suivantes sur un axe gradué et donner l'ensemble solution sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

1. $|x-2| < 5$

2. $|x+1| < 4$

3. $|x-1{,}5| \leqslant 0{,}5$

4. $|x+3| \geqslant 1$

5. $||x-8|+4| \leqslant 6$

6. $||x-4|-5| \leqslant 2$

3 Encadrements de réels et arrondis

Propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$.
  Cet encadrement est **l'encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.
- **L'arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ ou $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Exemple On a :

$$\frac{16812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \frac{16813}{10^3}$$

donc l'**encadrement** de 16,8127 à 10^{-3} près est $16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ et l'**arrondi** de 16,8127 à 10^{-3} près est 16,813.

4 Inéquations

Définition | Inéquations

Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses **solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples

- $$\begin{aligned} & 3x+2 > 7 \\ \Leftrightarrow & 3x+2\mathbf{-2} > 7\mathbf{-2} \\ \Leftrightarrow & 3x > 5 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x}{\mathbf{3}} > \frac{5}{\mathbf{3}} \\ \Leftrightarrow & x > \frac{5}{3} \end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions de $3x+2>7$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.

- $$\begin{aligned} & -x+9 \geqslant -2 \\ \Leftrightarrow & -x+9\mathbf{-9} \geqslant -2\mathbf{-9} \\ \Leftrightarrow & -x \geqslant -11 \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{-1}) \times (-x) \leqslant (\mathbf{-1}) \times (-11) \end{aligned}$$

  Notons bien que l'inégalité **a changé de sens** puisque nous avons multiplié par un nombre **négatif**.

  Finalement, $-x+9 \geqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant 11$.

  L'ensemble des solutions de $-x+9 \geqslant -2$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} =]-\infty; 11[$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes.

1. $4x-7<0$
2. $x \leqslant 10$
3. $5x-8>-3+8$
4. $11 \geqslant 4-2{,}5x$

5 Inéquations produits

Propriété | Signe d'un produit

On donne la règle des signes d'un produit $A(x) \times B(x)$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Signe de A	$+$	$+$	$-$	$-$
Signe de B	$+$	$-$	$+$	$-$
Signe de $A \times B$	$+$	$-$	$-$	$+$

Exemple La règle des signes d'un produit nous permet de résoudre certaines inéquations dites produits.

Résolvons, par exemple, l'inéquation produit $(2x+4)(x-1)<0$.

Nous construisons dans un premier temps le tableau de signe de toutes les expressions en jeu, y compris le produit à partir des lignes précédentes.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il ne reste qu'à lire dans quels ensembles l'expression $(2x+4)(x-1)$ est strictement négative.

$$(2x+4)(x-1)<0 \Leftrightarrow x \in]-2\,;1[$$

Remarque Le tableau de signe précédent nous permet même de résoudre trois autres inéquations produits : $(2x+4)(x-1)>0$, $(2x+4)(x-1) \leqslant 0$ et $(2x+4)(x-1) \geqslant 0$. Ainsi,

$$(2x+4)(x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-2] \cup [1\,;+\infty[.$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les inéquations suivantes.

1. $(2-x)(x+7)<0$
2. $(2x+4)(1-5x) \geqslant 0$
3. $(2+x)(8x-2)<(2+x)(x+1)$
4. $(9x-4)(5x+2)(-3-6x)>0$
5. $16x^2-16x+4 \leqslant 0$

6 Inéquations quotients

Propriété | Signe d'un quotient

On donne la règle des signes d'un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Signe de A	$+$	$+$	$-$	$-$
Signe de B $(B \neq 0)$	$+$	$-$	$+$	$-$
Signe de $\dfrac{A}{B}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Remarque Dans le cas général, il faut exclure les **valeurs interdites** : les x tels que $B(x)=0$.

Exemple Résolvons $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$ et $\dfrac{5x+40}{-3x+1} < 0$.
Nous avons besoin, à nouveau, d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		-8		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$5x+40$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{5x+40}{-3x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On peut enfin résoudre $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$. L'ensemble des solutions réelles de $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$ est $\left[-8\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

Pour $\dfrac{5x+40}{-3x+1} < 0$, on consulte encore le tableau de signes et l'ensemble des solutions réelles est $]-\infty\,;-8[\cup\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Remarque La double barre dans le tableau de signes signifie que la valeur est **interdite**. Elle est donc à **exclure** des solutions comme pour la résolution d'équations quotients.

Exercice

Résoudre dans $\mathbf{R}$ les équations quotients suivantes.

1. $\dfrac{2x+4}{3-7x} > 0$

2. $\dfrac{(3-x)(5x+3)}{2x-1} \geqslant 0$

3. $\dfrac{6x+2}{2x} < 0$

4. $\dfrac{x^2+2x+1}{2x-7} \leqslant 0$

5. $\dfrac{11x+12}{81x^2-64} < 0$

6. $\dfrac{1}{6-x} > 5$