DEVOIR SURVEILLÉ 7

Calculatrice autorisée

Lundi 19 mai 2025

EXERCICE 1 (4 POINTS)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel non nul et $0 \leqslant k \leqslant n$.

1. Si $X \sim \mathscr{B}(n;p)$, donner une expression de $\mathbb{P}(X=k)$ en fonction de n, p et k.

2. Donner une expression de $\binom{n}{k}$ en fonction $n!$ et $k!$.

CORRECTION

Voir cours.

EXERCICE 2 (12 POINTS)

Une entreprise fabrique chaque jour 100 000 briques de plastique pour des jeux de construction.

Chaque brique présente un défaut, indépendamment des autres, avec la probabilité 0,0007. Si la brique est repérée comme étant défectueuse, elle est refondue. Une vérification coûte 10 centimes et une refonte coûte 1 euro.

1. Soit D la variable aléatoire qui donne le nombre de briques défectueuses.

a. Déterminer la loi de D et calculer son espérance mathématique.

b. À l'aide de la calculatrice, donner la probabilité que moins de 5% des briques soient défectueuses.

c. Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier.

2. À la suite d'un audit, on met en place une nouvelle procédure :

- on groupe les briques par lots de vingt ;
- on vérifie chaque lot pour un coût de 25 centimes par lot ;
- si au moins une des briques d'un lot est défectueuse, ce lot est refondu pour un coût de 10 euros par lot.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lots refondus.

a. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0{,}0139$.

b. Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier de ce nouveau dispositif. Calculer l'économie moyenne espérée par jour.

CORRECTION

1. **a.** $D \sim \mathscr{B}(100\,000; 0{,}007)$ donc $\mathbb{E}[D] = 100\,000 \times 0{,}0007 = 700$.

b. 5% de 100 000 représente 5 000 donc on cherche $\mathbb{P}(D \leqslant 5000)$. D'après la calculatrice, $\mathbb{P}(D \leqslant 5000) \approx 1$.

c. La coût journalier C en euros est la variable aléatoire :

$$C = 0{,}1 \times 100\,000 + 1 \times D = 10\,000 + D.$$

Donc $\mathbb{E}[C] = 10\,000 + \mathbb{E}[D] = 10\,700$.

2. **a.** X est clairement une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ car chaque lot peut être non conforme et de manière indépendante suivant la même probabilité p. Il y a $n = \dfrac{100\,000}{20} = 5\,000$ lots.

Pour déterminer p, considérons un lot de 20 briques. Le lot n'est pas conforme si au moins une brique est défectueuse avec une probabilité p. Calculons d'abord $1-p$ la probabilité qu'aucune brique ne soit défectueuse.

$$1 - p = (1 - 0{,}0007)^{20}$$

donc :

$$p = 1 - (1 - 0{,}0007)^{20} \approx 0{,}0139.$$

b.

$$C = 0{,}25 \times 5\,000 + 10X$$

Ainsi, $\mathbb{E}[C] = 0{,}25 \times 5\,000 + 10 \times \mathbb{E}[X] \approx 0{,}25 \times 5\,000 + 10 \times 5\,000 \times 0{,}0139 \approx 1\,945$.
L'économie moyenne espérée sera de $\mathbb{E}[D] - \mathbb{E}[C] = 8\,755$ euros.

EXERCICE 3 (4 POINTS)

On considère l'équation $x^2 + bx + c = 0$ où le couple $(b; c)$ est obtenu de la manière suivante : b est le résultat du premier jet d'un dé équilibré tétraédrique dont les faces portent les numéros 2, 3, 4, 5; c est le résultat du second jet du même dé.
Chaque couple a la même probabilité d'apparition.

1. Soit B la variable aléatoire qui prend les valeurs obtenues lors du premier lancer. Déterminer la loi de B.
2. Soit D la variable aléatoire qui prend la valeur $b^2 - 4c$. D suit-elle une loi uniforme?
3. Soit S la variable aléatoire qui vaut 0 quand l'équation n'admet pas de solution et 1 sinon. Déterminer la loi de S.

CORRECTION

1. $B \sim \mathscr{U}(\llbracket 2\,;5 \rrbracket)$.
2. Déterminons les valeurs possibles pour D.

b \ c	2	3	4	5
2	-4	-8	-12	-16
3	1	-3	-7	-11
4	8	4	0	-4
5	17	13	9	5

   D n'est pas uniforme : 1 et -4 n'ont pas le même probabilité.

3. $S = 0$ si $D < 0$ ce qui arrive dans 8 issues sur 16. $S = 1$ dans le cas restant car $D \geqslant 0$ pour 8 issues aussi.
   S s'avère être une loi de Bernoulli de paramètre 0,5.