Arithmétique

Résumé

D'abord d'intérêt ludique pour les mathématiciens, l'arithmétique a su prendre une importance cruciale dans nos vies avec l'arrivée des ordinateurs et de la cryptologie où l'arithmétique y est centrale. Tour d'horizon de choses connues et de quelques propriétés plus avancées.

Multiples et diviseurs

Définitions

Soient $n, k \in \mathbb{Z}$ tel qu'il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que n = kk'. On dit que :

- \blacktriangleright k est un **diviseur** de n.
- \blacktriangleright *n* est un **multiple** de k.

Exemple On a $42 = 6 \times 7$ donc 42 est un multiple de 6 et 6 est un diviseur de 42. On dit aussi que 42 est divisible par 6 ou que 6 divise 42.

L'ensemble des diviseurs de 42 est {42,21,7,6,3,2,1,-1,-2,-3,-6,-7,-21,-42}.

Tout nombre entier relatif non nul n est toujours divisible, au moins, par 1 et lui-même et admet une infinité de multiples : n, 2n, 3n, -n, -2n, etc.

Propriété | Somme, différence et produit

Soient $a, n, m \in \mathbb{Z}$. Si les entiers n et m sont deux multiples de a, alors la somme m + n, la différence n - m et le produit nm sont aussi des multiples de a.

Définition | Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier naturel différent de 1 dont les seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

▶ Donnons quelques nombres premiers : **Exemples**

2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.

▶ 15 n'est pas premier car $15 = 3 \times 5$.

2 Parité

Définitions

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- ▶ Si *n* est divisible par 2, on dit que *n* est **pair**. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que n = 2k.
- ▶ Sinon, *n* est dit **impair**. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que n = 2k + 1.

Propriétés | Somme d'entiers

- ▶ La somme de deux entiers pairs est un nombre pair.
- ▶ La somme de deux entiers **impairs** est un nombre **pair**.
- ▶ La somme d'un entier pair et d'un entier impair est un nombre impair.

Propriété | Parité d'un carré

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- \triangleright Si *n* est pair, alors n^2 est pair.
- ▶ Si n est impair, alors n^2 est impair.

Démonstration. Soit n un entier relatif.

- ▶ Si *n* est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que n = 2k. Dans cas, $n^2 = (2k)^2 = (2k) \times (2k) = 2 \times (2k^2)$ et 2 divise n^2 .
- ▶ Si *n* est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que n = 2k + 1. Dans cas, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \times (2k) \times 1 + 1^2 = 2 \times 2k^2 + 2 \times 2k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.

Remarque Notons que nous avons les réciproques de ces deux propositions. Pour la première, n est pair si, et seulement si, n^2 est pair. En effet, si n^2 est pair alors n ne peut pas être impair sinon p^2 est aussi impair (au lieu d'être pair).

Théorème $\mid \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$

 $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est-à-dire, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration. Supposons, **par l'absurde**, que $\sqrt{2}$ est rationnel. Montrons qu'on arrive à quelque chose d'impossible : une **absurdité**. Ainsi, notre hypothèse sera fausse et on aura montré que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et la fraction est irréductible. On peut ainsi

calculer le carré de cette quantité, à savoir $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ et donc $p^2 = 2q^2$ est pair.

Par la propriété de parité d'un carré, p^2 est pair donc p est pair.

On peut écrire p = 2p' où $p' \in \mathbb{Z}$ et donc $2 = \frac{4p'^2}{q^2}$, ce qui implique que $q^2 = 2p'^2$. q^2 est pair donc q est aussi pair.

Nous venons de montrer que 2 divise p et q donc la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible. C'est impossible puisque nous avons supposé le contraire.

Nous obtenons une **absurdité** et donc l'hypothèse sur $\sqrt{2}$ est fausse. Nous avons démontré **par** l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.