

4

Inégalités et inéquations

Résumé

Ce chapitre est la suite logique du chapitre 2 sur le calcul littéral : après avoir étudié l'égalité, étudions l'inégalité.

1 Propriétés des inégalités

Propriété | Ordre dans \mathbb{R}

Si a, b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Propriétés | Somme

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\triangleright a < x \Leftrightarrow a + b < x + b \qquad \triangleright a < x \Leftrightarrow a - b < x - b$$

$$\triangleright \text{Si } a < x \text{ et } b < y, \text{ alors } a + b < x + y.$$

Propriétés | Produit

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\triangleright \text{Si } b > 0, \text{ alors } a < x \Leftrightarrow ba < bx \qquad \triangleright \text{Si } b < 0, \text{ alors } a < x \Leftrightarrow ba > bx$$

Remarque On a plusieurs conséquences du résultat précédent.

$$\triangleright 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\triangleright \text{Si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ alors } a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n.$$

2 Valeur absolue

Définition | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ la **valeur absolue** de x comme suit :

$$\triangleright \text{Si } x > 0, \text{ alors } |x| = x$$

$$\triangleright \text{Si } x < 0, \text{ alors } |x| = -x$$

Exemples $\triangleright |5| = 5$

$$\triangleright |-2,5| = -(-2,5) = 2,5$$

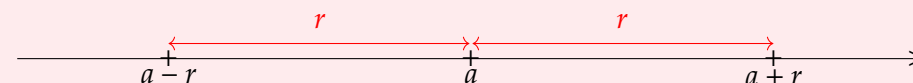
Remarques \triangleright Une valeur absolue est toujours positive.

$$\triangleright \text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ alors } \sqrt{x^2} = |x|$$

Propriété

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$$



3 Inéquations

Définition | Inéquations

Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.

Résoudre dans \mathbb{R} une inéquation d'inconnue x , c'est trouver l'ensemble de ses **solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples $\triangleright 3x + 2 > 7 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 > 7 - 2 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

L'ensemble des solutions de $3x + 2 > 7$ dans \mathbb{R} est $\mathcal{S} = \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$.

$$\triangleright -x + 9 \geq -2 \Leftrightarrow -x + 9 - 9 \geq -2 - 9 \Leftrightarrow -x \geq -11 \Leftrightarrow (-1) \times (-x) \leq (-1) \times (-11)$$

Notons bien que l'inégalité a **changé de sens** puisque nous avons multiplié par un nombre **néglatif**.

Finalement, $-x + 9 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 11$.

L'ensemble des solutions de $-x + 9 \geq -2$ dans \mathbb{R} est $\mathcal{S} =]-\infty; 11[$.

4 Encadrements de réels et arrondis

Propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

- L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ ou $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Exemple On a :

$$\frac{16\,812}{10^3} \leq 16,812\,7 < \frac{16\,813}{10^3}$$

donc l'**encadrement** de 16,812 7 à 10^{-3} près est $16,812 \leq 16,812\,7 < 16,813$ et l'**arrondi** de 16,812 7 à 10^{-3} près est 16,813.