11

CALCUL VECTORIEL

Résumé

Il a été vu en secondes diverses opérations entre vecteurs du plan : la somme et le produit par un scalaire. Nous aimerions naturellement pouvoir définir un produit entre deux vecteurs et en tirer des applications en géométrie.

Attention

Dans toute la suite, nous nous placerons dans un repère orthonormé du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1 Produit scalaire dans le plan

Définition | Produit scalaire

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.
On définit $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

Exemple Le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ est :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times 3 + (-1)\times 5 = 12 - 5 = 7.$$

Remarque On note aussi parfois le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$.

Propriétés

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On a :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ est la norme de $\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\vec{0} = 0$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{v}$.

Démonstration. C'est direct par définition du produit scalaire. □

Propriété | Bilinéarité du produit scalaire

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vecteurs du plans, λ et μ réels, on a :

$$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) + \mu(\vec{u}\cdot\vec{w})$$

et

$$(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{w}) + \mu(\vec{v}\cdot\vec{w}).$$

Démonstration. Claire en écrivant les coordonnées de tous les vecteurs en jeu. □

Exemples Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plans.

- On a $\vec{u}\cdot(2\vec{v}-\vec{w}) = 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\vec{w})$.
- On a aussi :

$$\begin{aligned}(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(3\vec{v}-2\vec{u}) &= 3(\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{v} - 2(\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{u}\\ &= 3\vec{u}\cdot\vec{v} + 6\vec{v}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{u} - 4\vec{v}\cdot\vec{u}\\ &= -2\|\vec{u}\|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} + 6\|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

Théorème | Développement de la norme

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

et

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

Démonstration. ▷

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

Ainsi, on a la première égalité en isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

▷

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

De même, on a la seconde égalité en isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

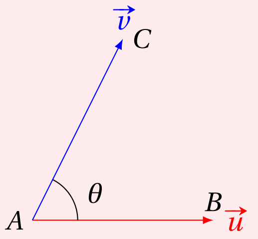
□

2 Produit scalaire et géométrie

Propriété | Définition géométrique du produit scalaire

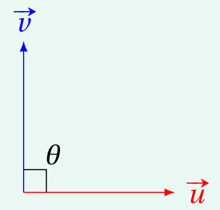
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Pour A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on note θ l'angle non orienté $\widehat{BAC}$ et on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}\\ \vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta\end{aligned}$$



Définition | Orthogonalité

En reprenant les notations précédentes, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\theta = \frac{\pi}{2}$.
On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Théorème | Critère d'orthogonalité

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Démonstration. Comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = 0$. □

Remarque L'orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est caractérisée par :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0.$$

Corollaire

Pour tout $\vec{u}$ vecteur du plan, $\vec{u} \perp \vec{0}$.

Exemples

- $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux car $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times4+4\times(-2) = 0$.
- $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ ne sont pas orthogonaux car $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times5+(-1)\times5 = 10 \neq 0$.

3 Applications

3.1 Théorème d'Al-Kashi

Théorème | Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

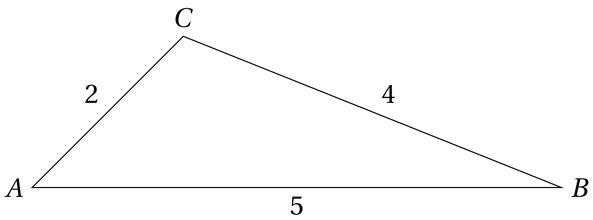
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$

Démonstration. Par Chasles,

$$\begin{aligned}
BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2 &= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\\
&= \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\\
&= BA^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AC^2\\
&= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}.
\end{aligned}$$

□

Exemples ► On peut déterminer un angle dans un triangle connaissant ses trois longueurs.



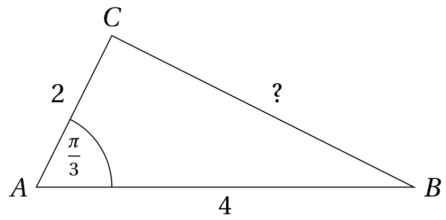
Ici, cherchons l'angle $\widehat{ACB}$.

Par le théorème d'Al-Kashi, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\widehat{ACB}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{ACB} &= \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{-2AC \times BC}\\
&= \frac{5^2 - 2^2 - 4^2}{-2 \times 2 \times 4}\\
&= \frac{5}{-16}.
\end{aligned}$$

On peut avoir une valeur approchée de $\widehat{ACB}$ puisque $\widehat{ACB} = \arccos\frac{5}{16} \simeq -1{,}88$ rad.

► On peut aussi déterminer une longueur connaissant les deux autres ainsi qu'un des angles.



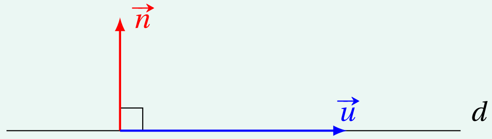
$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}\\
&= 4^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 4\cos\frac{\pi}{3}\\
&= 16 + 4 - 16 \times \frac{1}{2}\\
&= 12
\end{aligned}$$

Nous avons $BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

3.2 Équations de droites

Définition | Vecteur normal

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul du plan orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ directeur d'une droite d.
$\vec{n}$ est dit **vecteur normal** à d.



Propriété | Équation cartésienne d'une droite

Soit d une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d.

Démonstration. $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = a\times(-b)+b\times a = 0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n}$$

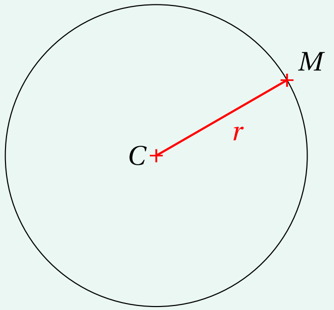
□

3.3 Équations de cercles

Définition | Cercle

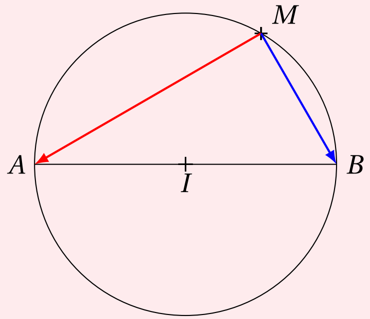
On appelle **cercle** de **centre** $C(a;b)$ de **rayon** $r>0$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$



Propriété | Caractérisation d'un cercle

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$.



Démonstration. Sans perdre de généralités, plaçons nous dans un repère orthonormé de centre I et de premier vecteur $\overrightarrow{IB}$ non nul. Dans ce repère, $A(-1;0)$, $I(0;0)$ et $B(1;0)$.
Soit $M(x;y)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= (-1-x)(1-x)+(-y)(-y)\\ &= x^2-1^2+y^2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow x^2-1^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=1^2.$$

□

Remarque On peut déterminer l'équation cartésienne d'un cercle à l'aide de la propriété précédente.
Si le diamètre du cercle est $[AB]$ avec $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors l'équation cartésienne de cercle est donnée par :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0.$$