CHAPITRE 1

ENSEMBLES DE NOMBRES

I - Quelques ensembles de nombres

A) Nombres entiers naturels

Définition : Entier naturel

On appelle **nombre entier naturel** un nombre entier positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Exemples

4 et 287 sont des entiers naturels alors que -1 et $0{,}5$ ne sont pas des entiers naturels.

Définition : Entier naturel non nul

On définit et on note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des **nombres entiers naturels non nuls**.
Il s'agit donc de l'ensemble des nombres naturels **strictement** positifs et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Remarque

Pour noter que a est un entier naturel, on écrira $a \in \mathbb{N}$ et s'il est non nul, $a \in \mathbb{N}^*$.

B) Nombres entiers relatifs

Définition : Entier relatif

On appelle **nombre entier relatif** un nombre entier positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z} = \{... , -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Exemples

4, 287, 0 et -1 sont des entiers relatifs alors que $0{,}5$ n'en est pas un.

Remarques

- Pour noter que a est un entier relatif, on écrira $a \in \mathbb{Z}$.
- Les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.

C) Nombres rationnels

Définition : Rationnel

On appelle **nombre rationnel** un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

$\frac{1}{3}$, $\frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{2{,}5}{0{,}7} = \frac{25}{7}$ sont rationnels.

Remarque

Les nombres entiers relatifs sont des nombres rationnels.

D) Nombres décimaux

Définition : Décimal

Un **nombre décimal** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples

- 0,5 est un nombre décimal car $0{,}5 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$.
- $-\dfrac{3}{25}$ est décimal car $-\dfrac{3}{25} = \dfrac{-12}{100} = \dfrac{-12}{10^2}$.

Remarque

Les nombres entiers relatifs sont des décimaux.
En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{a}{10^0}$.

Théorème : $\mathbb{Q} \neq \mathbb{D}$

$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\dfrac{1}{3}$ est décimal.
Dans ce cas, $\dfrac{1}{3}$ s'écrirait sous la forme $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on aurait $3a = 10^n$, c'est à dire que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde car 3 ne divise aucune puissance de 10. En effet, il existe un critère de divisibilité par 3 qui dit qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Finalement, notre hypothèse était fausse et nous venons de prouver que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. $\square$

Propriété : Développement décimal

Un nombre décimal admet un développement décimal avec un nombre fini de chiffres.

Exemples

- $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $-\dfrac{3}{25} = -0{,}12$
- $\dfrac{217}{125} = 1{,}736$

E) Nombres réels

Définition : Réel

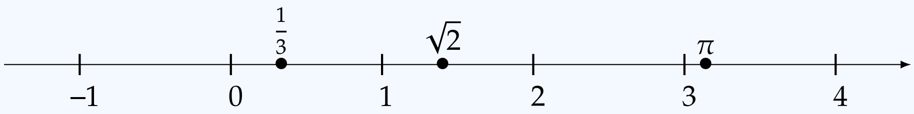
Un nombre est dit **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée (ou numérique).
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque

On peut aussi définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec une partie entière et un nombre de décimal fini ou infini.

Exemples

$\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels.



II - Ensembles et inclusions

A) Notations ensemblistes

Nous avons déjà utilisé plusieurs notations depuis le début, nous allons tout préciser. Soient E et F deux ensembles de nombres. Voici une correspondance de notations :

x appartient à E : $x \in E$

x n'appartient pas à E : $x \notin E$

Ensemble E privé de 0 : E^*

E est inclus dans F : $E \subset F$

L'ensemble F est composé uniquement des éléments $a_1, \ldots, a_n$: $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$

B) Classification des nombres

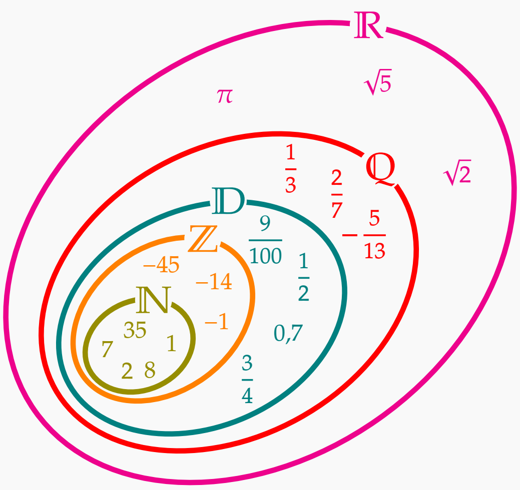
Théorème : Classification

On a la chaîne d'inclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque

On peut résumer le résultat précédent à l'aide du diagramme suivant :



Exercice

Compléter le tableau suivant avec $\in$ ou $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-2					
$\frac{2}{3}$					
$\sqrt{2}$					
$\frac{1}{4}$					
π					

III - Intervalles de $\mathbb{R}$

A) Définition

Définition : Intervalle

Soient a et b deux réels ($a \leqslant b$).
L'ensemble de tous les réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé un **intervalle**, que l'on note $[a;b]$.

Exemple

$3 \in [1;5]$, $6 \notin [1;5]$ et $5 \in [1;5]$.

Remarque

On peut définir d'autres intervalles en fonction des inégalités choisies :

$a < x \leqslant b$ **définit l'intervalle :** $]a;b]$

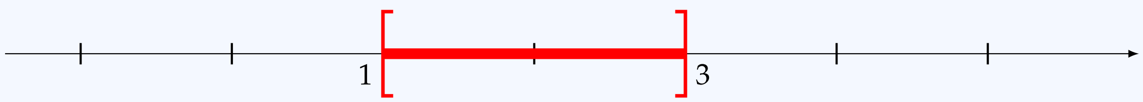
$a \leqslant x < b$ **définit l'intervalle :** $[a;b[$

$a < x < b$ **définit l'intervalle :** $]a;b[$

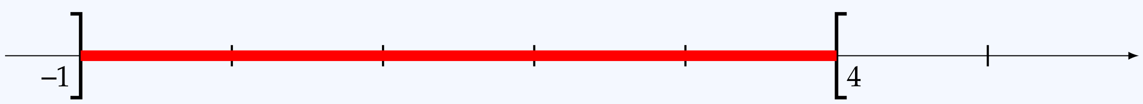
Exemples

Donnons la représentation graphique de plusieurs intervalles.

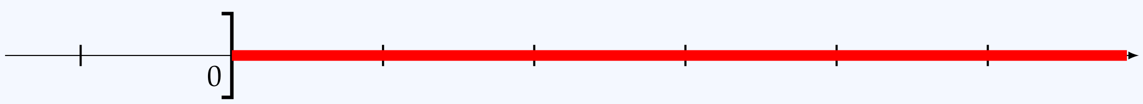
- $[1;3]$



- $]-1;4[$



- $]0;+\infty[$



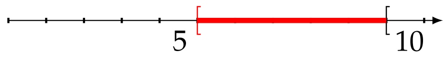
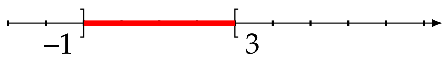
Remarque

On notera très souvent :

- $[0;+\infty[=\mathbb{R}_+$
- $]0;+\infty[=\mathbb{R}_+^*$
- $]-\infty;0]=\mathbb{R}_-$
- $]-\infty;0[=\mathbb{R}_-^*$

Exercice

Compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$x<\pi$	$]-\infty;\pi[$	
$5\leqslant x<10$		
		
$\sqrt{2}\geqslant x$		
	$]-\infty;+\infty[$	

Exercice

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

- -1 $\quad[-4;1]$
- $\dfrac{1}{3}$ $\quad[-4;1]$
- $-4,1$ $\quad[-4;1]$
- $\sqrt{3}$ $\quad[-4;1]$

B) Union et intersection d'intervalles

Définition : Union

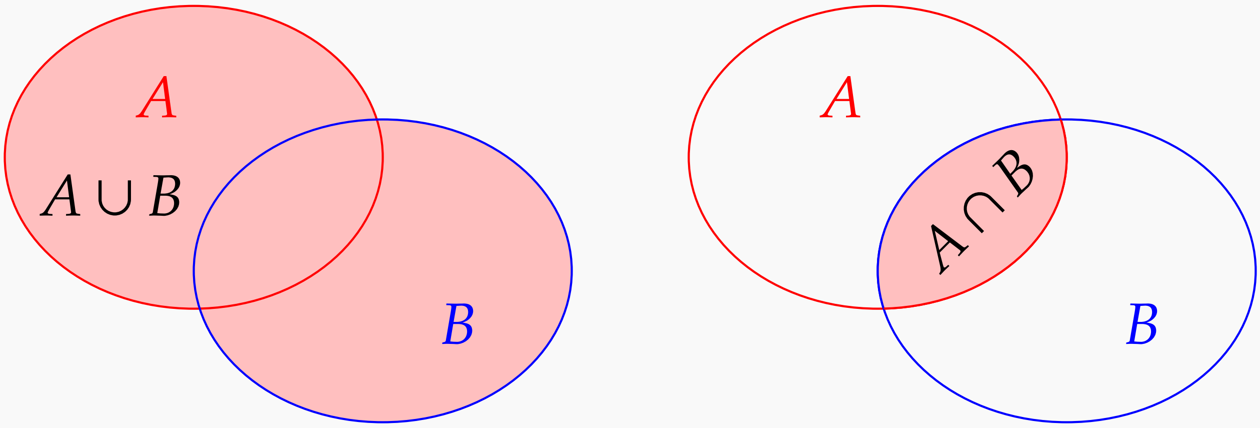
Soient A et B deux ensembles. On appelle **union** de A et B, notée $A\cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B.

Définition : Intersection

Soient A et B deux ensembles. On appelle **intersection** de A et B, notée $A\cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

Remarque

On visualise ces différents ensembles sur le diagramme suivant :



Exercice

Calculer l'union et l'intersection des intervalles I et J. Faire un diagramme.

- $I =]1\,;4[$ et $J = [3\,;5[$
- $I =]-1\,;0]$ et $J = [0\,;1]$
- $I = [1\,;+\infty[$ et $J =]-\infty\,;2]$
- $I = [-1\,;0]$ et $J = [1\,;2]$