Romain Cessac - Diamond Smith - Adrien Tendani
Master 1 Mathématiques Fondamentales
27 Mai 2019

Introduction à l'analyse microlocale

Institut de Mathématiques de Bordeaux
université de BORDEAUX

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un des intérêts de la transformée de Fourier est la résolution de certaines EDP. Par exemple, si $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha D^\alpha$ est un opérateur différentiel à coefficients constants, alors pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$P(D)u = \mathcal{F}^{-1}(P(i\xi)\widehat{u})$$

En d'autres termes, P(D) peut être représenté par une fonction polynomiale en ξ. L'idée de départ des opérateurs pseudo-différentiels est de généraliser cette formule dans un cadre englobant certains opérateurs différentiels à coefficients variables.
Ainsi, à une fonction $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ suffisamment régulière, qu'on appelle symbole, on associe un opérateur Op(a), donné par la formule :

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\, Op(a)(u)(x) = \mathcal{F}^{-1}(a(x,\cdot)\widehat{u})(x)$$

Un fait non-trivial est que la composée d'opérateurs pseudo-différentiels et l'adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel sont encore des opérateurs pseudo-différentiels.

On peut mettre en place un calcul symbolique. Par exemple, la composée de deux opérateurs pseudo-différentiels est l'opérateur défini par le produit des symboles, à opérateur plus régulier près.

Au delà de son utilité formelle, un tel procédé permet d'obtenir des informations sur l'opérateur Op(a) à partir d'informations sur son symbole a. En témoignent, l'inégalité de Gårding (qui relie la positivité du symbole et de son opérateur), l'action des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Sobolev ou encore l'inversion de certains opérateurs dits elliptiques.

Un autre aspect de l'analyse microlocale, liée aux opérateurs pseudo-différentiels, est l'étude des singularités de certaines fonctions. C'est ici qu'intervient le concept de front d'onde qui permet d'étudier les singularités d'une fonction en variable de Fourier et en variable d'espace. Un des résultats remarquables de cette théorie est le théorème de Hörmander pour une solution d'une certaine EDP hyperbolique :

$$\partial_t u + Op(a)u = f$$

Nous nous sommes basés majoritairement sur deux ressources, le polycopié de Thomas Alazard *Analyse et équations aux dérivées partielles* et le livre *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser* de Serge Alinhac et Patrick Gérard.

CHAPITRE

1

CALCUL SYMBOLIQUE

1.1 Symboles

Notation 1.1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$. On note C_b^∞ l'ensemble des fonction C^∞ sur Ω qui sont bornées ainsi que toutes leurs dérivées.*
On rappelle aussi qu'un multi-indice de taille d est un vecteur α de $\mathbb{N}^d$ tel que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$. On donne ainsi un sens à $\partial^\alpha f$, pour f une fonction réelle à d variables admettant suffisamment de dérivées partielles, avec :

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f$$

On note enfin $|\alpha| = \sum_{i=1}^d |\alpha_i|$.

Définition 1.1.2. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [0,1]$. La* ***classe des symboles***[1] ***d'ordre m****, notée $S^m_{\rho,0}(\mathbb{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ à valeurs complexes telles que, pour tous multi-indices α et β dans $\mathbb{N}^d$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ telle que :*

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta|}.$$

Notation 1.1.3. *Dans toute la suite, on utilisera les notations suivantes :*

$$S^m_{1,0}(\mathbb{R}^d) = S^m(\mathbb{R}^d),\ S^0_{0,0}(\mathbb{R}^d) = C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d}),\ S^\infty = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m,\ S^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m$$

Proposition 1.1.4. *Si $a \in S^m$, $b \in S^{m'}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$ alors :*

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|},$$

1. Pour la définition de la classe générale de symboles voir "Partial Differential Equations" de Michael Taylor

et
$$ab \in S^{m+m'}.$$
De plus, $S^0 \subset C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$.

Démonstration. Soient $a \in S^m$, $b \in S^{m'}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$. Prenons $p,q \in \mathbb{N}^d$,
$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d},\ |\partial_x^{\alpha+p}\partial_\xi^{\beta+q} a(x,\xi)| \le C_{\alpha+p,\beta+q}(1+|\xi|)^{m-|\beta+q|} = C(1+|\xi|)^{m-|\beta|+|q|}$$
Donc $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}$.

Ensuite, pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$, par Leibniz :
$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (ab)(x,\xi) = \sum_{p+p'=\alpha, q+q'=\beta} c_{p,p',q,q'}(\partial_x^p \partial_\xi^q a(x,\xi))(\partial_x^{p'} \partial_\xi^{q'} b(x,\xi))$$
où $c_{p,p',q,q'}$ est une constante qui dépend de p,p',q et q'.
Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (ab)(x,\xi)| &\le \sum_{p+p=\alpha, q+q'=\beta} c_{p,p',q,q'}|\partial_x^p \partial_\xi^q a(x,\xi)||\partial_x^{p'} \partial_\xi^{q'} b(x,\xi)| \\ &\le \sum_{p+p=\alpha, q+q'=\beta} c_{p,p',q,q'} C_{a,p,q}(1+|\xi|)^{m-|q|} C_{b,p',q'}(1+|\xi|)^{m'-|q'|} \\ &\le C(1+|\xi|)^{m+m'-|q|-|q'|} = C(1+|\xi|)^{m+m'-|\beta|}\end{aligned}$$
où C $>$ 0 est indépendant de x et ξ. Donc, $ab \in S^{m+m'}$.

Pour terminer la démonstration de cette proposition, si $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ alors a est C^∞ et
$$\exists C \in \mathbb{R}^*,\ \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\ |a(x,\xi)| = |\partial_x^0 \partial_\xi^0 a(x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^0 = C.$$
Donc a est bornée et ses dérivées partielles aussi car
$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\beta|} \le C_{\alpha,\beta}$$
En effet, $1+|\xi| \ge 1$ et $-|\beta| \le 0$. □

Exemple 1.1.5. *Si p est une fonction de x uniquement et $p \in C_b^\infty$ alors $p \in S^0(\mathbb{R}^d)$.*
En effet, pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$, $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| = 0$
Si $\beta = 0$, $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| = |\partial_x^\alpha p(x,\xi)| \le C$ car $p \in C_b^\infty$.

Exemple 1.1.6. *Si p est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ à support compact alors $p \in S^{-\infty}$.*
En effet, soient $m \in \mathbb{R}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2d}, (x,\xi) \in supp(p)$.
Alors, $(x,\xi) \mapsto |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-m+|\beta|}$ est une fonction continue sur un compact. Elle admet un maximum $C > 0$ et donc :
$$\forall (x,\xi) \in supp(p), |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \le C(1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$
En dehors du support, l'inégalité est triviale.
On a bien que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $p \in S^m$.

Exemple 1.1.7. *La fonction* $|\xi|$ *n'est pas dans* $S^1(\mathbb{R}^d)$ *car il n'est pas régulier en* 0.

Définition 1.1.8. *On définit sur* $S^m(\mathbb{R}^d)$ *une famille séparante de semi-normes données pour tout* $a \in S^m(\mathbb{R}^d)$ *par les formules :*

$$p^m_{\alpha,\beta}(a) := \underset{(x,\xi)\in\mathbb{R}^d}{sup}\{(1+\|\xi\|)^{-(m-|\beta|)}|\partial^\alpha_x\partial^\beta_\xi a(x,\xi)|\}$$

avec $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$.

Remarque 1.1.9. $S^m(\mathbb{R}^d)$ *muni de la topologie induite par les* $p^m_{\alpha,\beta}$ *est un espace métrisable (la famille étant séparante car* $p^m_{0,0}(a) = 0$ *si et seulement si* $a = 0$*).*
On peut même montrer que $S^m(\mathbb{R}^d)$ *est un espace de Fréchet.*

Lemme 1.1.10. *Soit* $a \in S^0$ *et* $F \in C^\infty(\mathbb{C}^k)$*, alors* $F(a) \in S^0$.

Lemme 1.1.11. *Soit* $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$*. On définit* $a_\varepsilon(x,\xi) := a(x,\varepsilon\xi)$*. Alors* $(a_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ *est bornée dans* $S^0(\mathbb{R}^d)$ *et* a_ε *converge vers* a_0 *lorsque* ε *tend vers* 0 *dans* $S^m(\mathbb{R}^d)$ *pour tout* $m > 0$.

Démonstration. En appendice. □

1.2 Action sur l'espace de Schwartz

Définition 1.2.1. *Soit* $m \in \mathbb{R}$ *et* $\rho \in [0,1]$*. Pour tout* $a \in S^m_{\rho,0}$*,* $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *et* $x \in \mathbb{R}^d$*, la fonction* $\xi \mapsto a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)$ *est dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_\xi)$*.*
On définit ***l'opérateur pseudo-différentiel associé au symbole a*** *:*

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ Op(a)(u)(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi,$$

$\widehat{u}$ *étant la transformée de Fourier de* u *définie par :*

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$$

Théorème 1.2.2. *Soit* $m \in \mathbb{R}$ *et* $\rho \in [0,1]$*. Si* $a \in S^m_{\rho,0}(\mathbb{R}^d)$*,* $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*, alors* $Op(a)u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*.*
De plus, $Op(a)$ *est continu de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$*.*

Démonstration. Notons $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$.
Tout d'abord, a est C^∞ sur $\mathbb{R}^{2d}$, bornée ainsi que toutes ses dérivées par des puissances de $\langle\xi\rangle$.
Enfin, $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ donc on peut appliquer les théorèmes de continuité sous intégrale pour obtenir que Op(a)u est $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Notons maintenant $\mathcal{N}_p(u) = \sum_{|\alpha|\leq p,|\beta|\leq p}\|x^\alpha\partial^\beta_x u\|_\infty, p \in \mathbb{N}, u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ les semi-normes sur l'espace de Schwartz.

$$|Op(a)u(x)| \le (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \|\langle\xi\rangle^{-m} a\|_{L^\infty} \|\langle\xi\rangle^{m+2d}\widehat{u}\|_\infty \langle\xi\rangle^{-2d}\, d\xi \le Cp^m_{0,0}(a)\mathcal{N}_{m+2d}(\widehat{u})$$

$$\Rightarrow \|Op(a)u\|_\infty \le C'\mathcal{N}_{m+2d}(\widehat{u})$$

La continuité de la transformée de Fourier permet de majorer :

$$\mathcal{N}_{m+2d}(\widehat{u}) \le C_{m+2d}\mathcal{N}_{m+3d+1}(u)$$

Ainsi, on peut estimer $\mathcal{N}_0(Op(a)(u))$ par la semi-norme $\mathcal{N}_{m+2d}(\widehat{u})$. Il reste à vérifier toutes les autres semi-normes de Op(a)u dans $\mathscr{S}$. Pour cela, montrons que :

$$\partial_{x_j} Op(a)u = Op(a)(\partial_{x_j} u) + Op(\partial_{x_j} a)u$$
$$x_j Op(a)u = Op(a)(x_j u) + iOp(\partial_{\xi_j} a)u$$

D'une part, pour la première égalité, on utilise le théorème de dérivation sous intégrale par rapport à x_j :

$$(2\pi)^d \partial_{x_j} Op(a)u = \int_{\mathbb{R}^d} i\xi_j e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\partial_{x_j} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi$$

et

$$i\xi_j\widehat{u}(\xi) = \widehat{\partial_{x_j} u}(\xi)$$

Pour la seconde, une intégration par parties sur ξ_j donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} x_j e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi = -i\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} ie^{ix\cdot\xi}\partial_{\xi_j} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} ie^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\partial_{\xi_j}\widehat{u}(\xi)\, d\xi$$

$$= i\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\partial_{\xi_j} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{x_j u}(\xi)\, d\xi$$

On peut maintenant se ramener à la première norme étudiée pour obtenir que Op(a)u est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On obtient aussi par ce qui précède que Op(a) est un opérateur borné sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Notation 1.2.3. *On notera Ψ^m l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de symbole appartenant à S^m.*

1.3 Approximation de symboles

Notation 1.3.1. *On note $B(r)$ la boule de rayon r centrée en 0.*

Notation 1.3.2. *Soit $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels qui tend vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$. Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tel que $a_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^d)$. On note*

$$a \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$$

si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a - \sum_{j=0}^{k} a_j \in S^{m_{k+1}}(\mathbb{R}^d)$$

Proposition 1.3.3. *Soit $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels qui tend vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$ et $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tel que $a_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe $a \in S^{m_0}(\mathbb{R}^d)$ tel que $a \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$.*

Démonstration. Soient $M,R > 0$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall \xi \in B(M),\ \chi(\xi) = 1 \qquad et \qquad supp(\chi) \subset B(R).$$

On commence par un lemme :

Lemme 1.3.4. *Il existe une suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0 telle que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$ et $j \geq max(|\alpha|,|\beta|)$*

$$\forall (\xi,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,\ \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j(x,\xi)| \leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|},$$

avec $b_j := (1-\chi_j)a_j$ et χ_j définit par la formule $\chi_j(\xi) := \chi(\varepsilon_j \xi)$.

Démonstration. (Lemme) On commence par prendre une suite (ε_j) décroissante de réels strictement positifs et qui converge vers 0. On suppose de plus que cette suite est majorée par R. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$. On a par la formule de Leibniz

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j(x,\xi) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} [\partial_\xi^\gamma(1-\chi_j(\xi))][\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_j(x,\xi)].$$

Donc

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_j(x,\xi)| \leq \sum_{0\neq\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial_\xi^\gamma(1-\chi_j(\xi))\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_j(x,\xi)| + |(1-\chi_j(\xi)\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-\gamma} a_j(x,\xi)|$$

<u>1^{er} *cas* : $\gamma \neq 0$</u> : Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\gamma(1-\chi_j(\xi))| &= \varepsilon_j^{|\gamma|} |(\partial_\xi^\gamma \chi)(\varepsilon_j \xi)| \\ &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|} \mathbf{1}_{B(R/\varepsilon_j)}(\xi) \|\partial^\gamma \chi\|_\infty. \end{aligned}$$

Or le support de χ_j est inclus dans la boule $B(R/\varepsilon_j)$. De plus,

$$|\xi| \leq R/\varepsilon_j \Longrightarrow 1 \geq \frac{1+|\xi|}{1+R/\varepsilon_j}$$

Donc, $\mathbf{1}_{B(R/\varepsilon_j)} \geq \frac{1+|\xi|}{1+R/\varepsilon_j}$.
Puisque $1-|\gamma| \leq 0$, on en déduit,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{B(R/\varepsilon_j)} &\leq \left(\frac{1+|\xi|}{1+R/\varepsilon_j}\right)^{1-|\gamma|} \\
&\leq \left(\frac{1+|\xi|}{2R/\varepsilon_j}\right)^{1-|\gamma|} \quad car \quad \frac{R}{\varepsilon_j} \geq 1
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
|\partial_\xi^\gamma(1-\chi_j(\xi)| &\leq \varepsilon_j^{|\gamma|}\varepsilon_j^{1-|\gamma|}(2R)^{|\gamma|-1}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty(1+|\xi|)^{1-|\gamma|} \\
&= \varepsilon_j(2R)^{|\gamma|-1}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty(1+|\xi|)^{1-|\gamma|}
\end{aligned}
$$

On déduit de l'estimation précédente et de la décroissance de a_j, qu'il existe $C^j_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$
\sum_{0\neq\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}|\partial_\xi^\gamma(1-\chi_j(\xi))\partial_x^\alpha\partial_\xi^{\beta-\gamma}a_j(x,\xi)| \leq \varepsilon_j C^j_{\alpha,\beta}\sum_{0\neq\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}(2R)^{|\gamma|-1}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|} \tag{1.1}
$$

On a utilisé que puisque $\gamma \leq \beta$, on a $|\beta-\gamma| \geq |\beta|-|\gamma|$ et donc $(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta-\gamma|-|\gamma|} \leq (1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}$
<u>2^e *cas* : $\gamma = 0$</u> : Le support de $1-\chi_j$ est contenu dans $\mathbb{R}^d\backslash B(M/\varepsilon_j)$, on a donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
|1-\chi_j(\xi)| &= |1-\chi_j(\xi)|\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d\backslash B(M/\varepsilon_j)}(\xi) \\
&\leq (1+\|\chi\|_\infty)\left(1+\frac{M}{\varepsilon_j}\right)^{-1}(1+|\xi|) \\
&\leq (1+\|\chi\|_\infty)\frac{\varepsilon_j}{M}(1+|\xi|)
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $x,\xi \in \mathbb{R}^d$

$$
|(1-\chi_j(\xi))\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a_j(x,\xi)| \leq (1+\|\chi\|_\infty)\frac{\varepsilon_j}{M}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|} \tag{1.2}
$$

où $A^j_{\alpha,\beta} > 0$ est une constante qui vient de la décroissance du symbole a_j. Enfin, en combinant (1.1) et (1.2) on obtient l'existence d'une constante $D^j_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$
|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b_j(x,\xi)| \leq D^j_{\alpha,\beta}\epsilon_j(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|}
$$

Étant donné $j \in \mathbb{N}$, on choisit ϵ_j tel que $\epsilon_j \leq \frac{1}{2^j}\frac{R}{D_j}$ avec $D_j := max\left\{D^j_{\alpha,\beta}; |\alpha| \leq j, |\beta| \leq j\right\}$. □

On reprend les notations du lemme précédent. On pose alors $a := \sum_{j\geq 0} b_j$ et on a par celui-ci que, pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$ la série $\sum_{j\geq 0}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b_j$ converge uniformément sur tout compact. Donc $a \in C^\infty$ (car la série $\sum_{j\geq 0} 2^j$ converge). Nous avons aussi que $b_j \in S^{m_j}$.

Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$ et k $\in \mathbb{N}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |\alpha|, N \geq |\beta|$ et $N > k$. On a $m_{N+1} \leq m_{k+1}$ car la suite (m_j) est strictement décroissante et pour tout $j > N$, on a

$$
\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta b_j(x,\xi)| &\leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_j-|\beta|} \\
&\leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{1+m_N-|\beta|} \\
&\leq \frac{1}{2^j}(1+|\xi|)^{m_{k+1}-|\beta|}
\end{aligned}
$$

Donc

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a(x,\xi) - \sum_{j<N} b_j(x,\xi))| \leq \frac{1}{2^N}(1+|\xi|)^{m_{k+1}-|\beta|}$$

De plus, pour $k+1 \leq j < N$, $b_j \in S^{m_j} \subset S^{m_{k+1}}$ et $\sum_{j\leq k} a_j - b_j \in C_c^\infty \subset S^{m_{k+1}}$.
Par la formule :

$$a - \sum_{j\leq k} b_j = a - \sum_{j<N} b_j + \sum_{k+1\leq j<N} b_j - \sum_{j\leq k}(a_j - b_j)$$

on obtient bien

$$a - \sum_{j\leq k} a_j \in S^{m_{k+1}}.$$

□

1.4 Adjoint et composition

Soit $m,m' \in \mathbb{R}$, $a \in S^m$, $b \in S^{m'}$ et u une fonction dans la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

Les questions qui vont nous intéresser dans ce chapitre concernent les opérateurs $Op(a) \circ Op(b)$ et $Op(a)^*$. Nous allons voir que ce sont aussi des opérateurs pseudo-différentiels et que l'on peut calculer leurs symboles associés.

Proposition 1.4.1. *Soit $a = a(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. Alors*

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

définit un symbole dans $S^{-\infty}$ et

$$\forall u,v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), \quad (Op(a)u,v) = (u,Op(a^*)v).$$

(u,v) étant le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et $a = a(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$.

Déterminons le noyau de l'opérateur pseudo-différentiel $Op(a)$:

$$\begin{aligned}
Op(a) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a(x,\xi)\Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.\xi}u(y)\mathrm{d}y\Big) \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)\mathrm{d}\xi\Big)u(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons $Op(a)u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y$.
$K(x,y) = (2\pi)^{-d} \int e^{i(x-y).\xi} a(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ étant le noyau de $Op(a)$. Il convient de remarquer que K peut se réécrire, via la transformée de Fourier, sous la forme :

$$K(x,y) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}_\xi(a(x,.))(y-x)$$

où $\mathcal{F}_\xi(a(x,.))(\eta) = \int e^{-i\xi.\eta} a(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ est la transformée de Fourier de a par rapport à la seconde variable. On en déduit de $K \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$.

Maintenant, si v est aussi dans $\mathscr{S}$ alors

$$(Op(a)u,v) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y \right) \overline{v(x)}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} u(y) \overline{\left(\int \overline{K(x,y)} v(x)\mathrm{d}x \right)} \mathrm{d}y$$

donc $(Op(a)u,v) = (u,(Op(a))^* v)$ avec

$$(Op(a))^* v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K^*(x,y)v(y)\mathrm{d}y$$

et

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).\theta} \overline{a(y,\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

On cherche a^* tel que

$$K^*(x,y) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}_\xi(a^*(x,.))(y-x) = (2\pi)^{-d} \Big[\tau_{-x} \circ \mathcal{F}_\xi(a^*(x,.)) \Big](y)$$

où $\tau_{-x} f(y) = f(y-x)$. C'est à dire tel que,

$$\mathcal{F}_y^{-1}(K^*(x,.))(\xi) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F}_y^{-1} \left(\Big[\tau_{-x} \circ \mathcal{F}_\xi(a^*(x,.)) \Big](y) \right)(\xi) = (2\pi)^{-d} e^{ix.\xi} a^*(x,\xi).$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_y^{-1}(K^*(x,.))(\xi) &= \mathcal{F}_y^{-1}(\overline{K(.,x)})(\xi) \\
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K(y,x)} e^{iy.\xi}\mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{a(y,\theta)} e^{i(x-y).\theta}\mathrm{d}\theta e^{iy.\xi}\mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{a(x-z,\theta)} e^{iz.\theta}\mathrm{d}\theta e^{-i(z-x).\xi}\mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^{-2d} e^{ix.\xi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{a(x-z,\theta)} e^{iz.\theta}\mathrm{d}\theta e^{-iz.\xi}\mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^{-2d} e^{ix.\xi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{a(x-z,\theta)} e^{-iz(\xi-\theta)}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= (2\pi)^{-2d} e^{ix.\xi} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{a(x-z,\xi-\eta)} e^{-iz\eta}\mathrm{d}z\mathrm{d}\eta
\end{aligned}$$

d'où

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.\eta} \overline{a}(x-y,\xi-\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

□

Proposition 1.4.2. *Soit a_1 et a_2 dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ et notons $A_1 = Op(a_1)$ et $A_2 = Op(a_2)$. Alors*

$$Op(a_1) \circ Op(a_2) = Op(b)$$

avec

$$b(x,\eta) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(x-y)\cdot(\xi-\eta)} a_1(x,\xi) a_2(y,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y$$

Démonstration. Soit $A_1 = Op(a_1)$ et $A_2 = Op(a_2)$.

On a

$$\begin{aligned} A_1 A_2 u(x) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a_1(x,\xi) \widehat{A_2 u}(\xi) \mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a_1(x,\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.\xi} A_2 u(y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a_1(x,\xi) \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.(\xi-\eta)} a_2(y,\eta) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-2d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iy.\eta + i\xi.(x-y)} a_1(x,\xi) a_2(y,\eta) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y \mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\eta} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).(\xi-\eta)} a_1(x,\xi) a_2(y,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y \right) \hat{u}(\eta) \mathrm{d}\eta$$

Donc $A_1 A_2 = Op(b)$ avec

$$b(x,\eta) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).(\xi-\eta)} a_1(x,\xi) a_2(y,\eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y$$

□

1.5 Théorèmes fondamentaux du calcul symbolique

Dans le cas des opérateurs pseudo-différentiels, les opérations de composition et d'adjonction, à priori compliquées dans le cas général, donnent encore des opérateurs pseudo-différentiels. De plus, ces opérations peuvent se traduire par des opérations simples sur les symboles. Plus précisément, la composée de deux opérateurs pseudo-différentiels $Op(a) \circ Op(b)$ est, modulo un opérateur plus régulier, l'opérateur Op(ab). De même, l'adjoint d'un opérateur pseudo-différentiel $Op(a)^*$ est donné, modulo un opérateur plus régulier, par l'opérateur de symbole $\overline{a}$.

Le **calcul symbolique pseudo-différentiel** est le procédé qui permet de manipuler des opérateurs en travaillant au niveau des symboles.

Nous allons donner un peu plus de détail sur ces symboles créés par adjonction ou composition mais pour ce faire, nous avons besoin de parler d'**intégrales oscillantes**.

Notons que dans cette section, nous avons travaillé principalement à partir du cours de Thomas Alazard.

1.5.1 Intégrales oscillantes

Le but de cette section est de donner un sens à des intégrales de la forme

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x)} a(x) dx$$

où φ est une fonction qui varie rapidement à l'infini(appelée "phase") et a une fonction régulière à croissance polynomiale (appelé "amplitude"). Ces intégrales interviennent de manière cruciale dans la preuve du théorème du calcul symbolique, car les symboles a^* et $a\#b$ des opérateurs $Op(a)^*$ et $Op(a) \circ Op(b)$ respectivement s'expriment sous la forme de telles intégrales.
Vérifions le sur des symboles à support compact où toutes les intégrales qui interviennent sont définies au sens usuel.

Commençons par définir les classes des amplitudes qui interviendront dans le calcul symbolique.

Définition 1.5.1. *Soient $\rho \in]-\infty,1]$ et $m \in \mathbb{R}$. On appelle amplitude de degré m et de type ρ toute fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ vérifiant*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_\alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \ |\partial^\alpha a(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^{m-\rho|\alpha|}.$$

On note $A^m_\rho(\mathbb{R}^d)$ la classe des amplitudes de degré m et de type ρ.

On pose

$$A^{+\infty}_\rho := \bigcup_{m\in\mathbb{R}} A^m_\rho$$

Commentaire 1.5.2. *Une autre approche du calcul pseudo-différentiel, plus générale[2], consiste à partir d'intégrales de la forme $I(a,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x,\xi)} a(x,\xi) d\xi$ où φ est une "phase" (fonction lisse positivement homogène de degré 1 en ξ, de partie imaginaire positive et sans point critique) et a un symbole.*
On définit alors l'opérateur intégral de Fourier $A : D(\mathbb{R}^d) \to D(\mathbb{R}^d)$ de symbole a et de phase φ donné par la formule :

$$\langle Au,v\rangle := \langle I(a,\varphi), u \otimes v\rangle.$$

Définition 1.5.3. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\rho \in]-\infty,1]$. On définit une famille $(N^m_{\rho,k})_{k\in\mathbb{N}}$ de semi-normes données pour tout $k \in \mathbb{N}$ par*

$$\forall a \in A^m_\rho,\quad N^m_{\rho,k}(a) := \underset{|\alpha|\leq k}{sup}\ \underset{x\in\mathbb{R}^d}{sup}\{(1+|x|)^{-m+\rho|\alpha|}|\partial^\alpha a(x)|\}.$$

On montre que chaque A^m_ρ munie de sa famille de semi-normes définie au dessus, est un espace de Fréchet.
On peut définir les intégrale oscillantes, même lorsque l'amplitude n'est pas intégrable au sens du théorème suivant :

Théorème 1.5.4. *Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{0\},\mathbb{R})$, homogène de degré $\mu > 0$. Si $m \in]-\infty,-d]$ et $a \in A^m_\rho(\mathbb{R}^d)$, alors l'intégrale*

$$I_\varphi(a) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x)} a(x) dx$$

est bien définie.

2. Voir Hörmander sur ce sujet

Supposons que $\nabla\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$. Si $\mu > 1-\rho$, alors $I_\varphi : a \mapsto I_\varphi(a)$ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue sur $A_\rho^{+\infty}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.5.5. *La condition $\mu > 1_\rho$ permet d'assurer que le terme oscillant $e^{i\varphi}$ n'est pas dans le même espace d'amplitude A_ρ^∞ que a.*

L'unicité du prolongement est une conséquence de lemme suivant :

Lemme 1.5.6. *Soit $\chi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ valant 1 sur un voisinage de 0. Soit $a \in A_\rho^m(\mathbb{R}^d)$. On définit pour tout $\varepsilon \geq 0$, $a_\varepsilon : x \mapsto \chi(\varepsilon x)a(x)$.*
Alors $a_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varepsilon \geq 0$ et (a_ϵ) converge vers a dans $A_\rho^{m'}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $m' > m$.

Il donne aussi une méthode pratique pour le calcul des intégrales oscillantes. Étant donnée une amplitude a avec les notations du lemme précédent, on a par continuité de I_φ

$$I_\varphi(a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\varphi(x)} a_\varepsilon(x)dx.$$

Ce type de formule permet d'étendre aux intégrales oscillantes certaines règles du calcul intégral usuel comme le théorème de Fubini, l'intégration par parties, le changement de variable homogène et dérivation sous le signe somme.

Lemme 1.5.7 (Lemme de la phase non stationnaire)**.** *Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles tel que*

$$\underset{x\in K}{inf}\{|\nabla\varphi(x)|\} > 0$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \leq 0$, il existe une constante $C_k > 0$

$$|\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda\varphi(x)} f(x)dx| \leq C_k \lambda^{-k} \underset{|\alpha|\leq k}{sup}\{\|\partial^\alpha f\|_{L^1}\}.$$

Lemme 1.5.8 (Lemme de Peetre)**.** *Pour tout $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2d}, m \in \mathbb{R}$.*

$$(1+ \mid \xi-\eta \mid)^m \leq (1+ \mid \eta \mid)^{|m|}(1+ \mid \xi \mid)^m.$$

Démonstration. Dans le cas où $m \geq 0$ on a $1+ \mid \xi-\eta \mid\leq 1+ \mid \xi \mid + \mid \eta \mid\leq (1+ \mid \xi \mid)(1+ \mid \eta \mid)$, et lorsque $m < 0$ on obtient le résultat voulu en intervertissant les rôles de ξ et $\xi-\eta$, m et $-m$. □

1.5.2 Adjoint

Proposition 1.5.9. *Soit $m \in \mathbb{R}$. Si $a \in S^m(\mathbb{R}^d)$ alors l'intégrale oscillante*

$$a^*(x,\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy.\eta}\overline{a}(x-y,\xi-\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

définit un symbole a^* qui appartient à $S^m(\mathbb{R}^d)$ et vérifie la formule asymptotique :

$$a^*(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a}(x,\xi).$$

Démonstration. Posons $\phi(y,\eta) = -y.\eta$ et à (x,ξ) fixé on pose $b_{x,\xi}(y,\eta) = \overline{a}(x-y,\xi-\eta)$. Pour estimer $b_{x,\xi}$ nous allons utiliser le lemme précédent :

Ainsi comme $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mid \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(x-y,\xi-\eta) \mid &\leq C_{\alpha,\beta}(1+ \mid \xi-\eta \mid)^{m-|\beta|} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}(1+ \mid \xi-\eta \mid)^{m} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}(1+ \mid \eta \mid)^{|m|}(1+ \mid \xi \mid)^{m} \\
&\leq C_{\alpha,\beta}(1+ \mid \eta \mid + \mid y \mid)^{|m|}(1+ \mid \xi \mid)^{m}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^n, \mid \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta a(x-y,\xi-\eta) \mid \leq C(1+ \mid \eta \mid + \mid y \mid)^{|m|}$$

Ainsi on en déduit que

$$b_{x,\xi} \in A^{|m|}(\mathbb{R}^{2d})$$

Par le théorème 1.5.4, l'intégrale oscillante a^* est bien définie et de plus

$$N^{|m|}_{0,|m|+2d+1}(b_{x,\xi}) = \sup_{|\alpha|+|\beta|\leq |m|+2d+1} \ \sup_{(y,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}} \{(1+|y|+|\eta|)^{-|m|}|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta b_{x,\xi}(y,\eta)|\}.$$

Et donc, d'après l'estimation précédente et le théorème 1.5.4, on a :

$$\begin{aligned}
|a^*(x,\xi)| &\leq C_{\phi,|m|} N^{|m|}_{0,|m|+2d+1}(b_{x,\xi}) \\
&\leq C_{\phi,|m|} C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^m \\
&\leq C(1+|\xi|)^m
\end{aligned}$$

Donc $(1+|\xi|)^{-m}a^*$ est bornée.
Il nous reste maintenant à estimer les dérivées, en utilisant l'identité : $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta(a^*) = \left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta(a)\right)^*$.
Et ainsi par le même procédé et en remplaçant $a \in S^m(\mathbb{R}^n)$ par $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a \in S^{m-|\beta|}(\mathbb{R}^n)$.

on obtient

$$(1+|\xi|)^{-(m-|\beta|)}\left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\right)^*$$

bornée pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2n}$. d'où $a^* \in S^m(\mathbb{R}^d)$.

Pour le développement asymptotique, on utilise la formule de Taylor , d'où :

$$\overline{a}(x-y,\xi-\eta) = \sum_{|\alpha+\beta|<2k} \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}\frac{(-\eta)^\beta}{\beta!}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x,\xi) + r_k(x,\xi,y,\eta)$$

avec

$$r_k(x,\xi,y,\eta) = \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k\frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}\frac{(-\eta)^\beta}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta)$$

et

$$r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta) = \int_0^1 (1-t)^{2k-1}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)\mathrm{d}t.$$

Or d'après le lemme suivant :

Lemme 1.5.10. *Posons $\phi(y,\eta) = -y.\eta$ et à (x,ξ) fixé, on pose $a_{x,\xi}(y,\eta) = \frac{(y)^\alpha}{\alpha!}\frac{(\eta)^\beta}{\beta!}$. Alors pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2d}$, on a l'intégrale oscillante :*

$$(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\phi(y,\eta)}a_{x,\xi}(y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \begin{cases} 0 \ si\ \alpha \neq \beta \\ \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \ si\ \alpha = \beta \end{cases}.$$

On en déduit :

$$a^*(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \overline{a}(x,\xi) + R_k(x,\xi)$$

avec

$$R_k(x,\xi) = \int e^{iy\cdot\eta} r_k(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

Ainsi , il ne reste plus qu'à démontrer que $R_k(x,\xi) \in S^{m-k}$.

Pour cela, on a d'une part que :

$$\begin{aligned} R_k(x,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{iy\cdot\eta} r_k(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{iy\cdot\eta} \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k\frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}\frac{(-\eta)^\beta}{\beta!} r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta \\ &= \sum_{|\alpha+\beta|=2k} 2k\frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{\alpha!\beta!}\int e^{iy\cdot\eta}y^\alpha\eta^\beta r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta \end{aligned}$$

Posons

$$A(x,\xi,y,\eta) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{iy\cdot\eta}y^\alpha\eta^\beta r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

Ainsi, on remarque qu'avec une intégration par parties en η puis en y on obtient :

$$A(x,\xi,y,\eta) = \sum_\gamma C\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{iy\cdot\eta}B(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

avec

$$\begin{aligned} B(x,\xi,y,\eta) &= \partial_y^{\beta-\gamma}\partial_\eta^{\alpha-\gamma} r_{\alpha\beta}(x,\xi,y,\eta) \\ &= C'\int_0^1 (1-t)^{2k-1}t^{2k-2|\gamma|}\partial_x^{\alpha+\beta-\gamma}\partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma}\overline{a}(x-ty,\xi-t\eta)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or comme $\gamma \leq \alpha$ et $\gamma \leq \beta$, on a $|\gamma| \leq k$ et $|\alpha + \beta - \gamma| \geq k$

d'où $\partial_x^{\alpha+\beta-\gamma}\partial_\xi^{\alpha+\beta-\gamma}\overline{a} \in S^{m-k}$. Alors,

$$R_k(x,\xi) = \int e^{iy.\eta} r_k(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta = \int e^{iy.\eta} s_k(x,\xi,y,\eta)\mathrm{d}y\mathrm{d}\eta$$

où $s_k \in A^{|m-k|}$.

De plus on a que :

$$N^{|m-k|}_{0,|m-k|+2d+1}(s_k) = \underset{|\alpha|+|\beta|\leq |m-k|+2d+1}{sup} \ \underset{(y,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}}{sup} \{(1+|y|+|\eta|)^{-|m-k|}|\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta s_k(y,\eta)|\}.$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}|R_k(x,\xi)| &\leq C_{\phi,|m-k|} N^{|m-k|}_{0,|m-k|+2d+1}(s_k)\\ &\leq C_{\phi,|m-k|} C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-k}\\ &\leq C(1+|\xi|)^{m-k}\end{aligned}$$

Et on majore de même $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta R_k(x,\xi)$ en remplaçant a par $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a$.

□

1.5.3 Composition

Proposition 1.5.11. *Soit $(m_1,m_2) \in \mathbb{R}^{2d}$. Si $a_1 \in S^{m_1}(\mathbb{R}^d)$ et $a_2 \in S^{m_2}(\mathbb{R}^d)$, alors $Op(a_1) \circ Op(a_2) = Op(b)$, où $b = a_1\#a_2 \in S^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^d)$ est donné par l'intégrale oscillante :*

$$b(x,\eta) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y).(\xi-\eta)} a_1(x,\xi)a_2(y,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y$$

De plus, on a :

$$b(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_1(x,\xi)\partial_x^\alpha a_2(x,\xi)$$

Démonstration. Très ressemblante à celle concernant l'adjoint, elle ne sera pas traitée. □

Proposition 1.5.12. *Soit $a \in S^m$, $b \in S^{m'}$. Alors, $[Op(a),Op(b)]$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole c vérifiant :*

$$c \equiv \frac{1}{i}\{a,b\} \ mod \ S^{m+m'-2}$$

Démonstration.

$$c = a\#b - b\#a = ab - \frac{1}{i}\sum_{j=1}^d \partial_{\xi_j}a\partial_{x_j}b - ba + \frac{1}{i}\sum_{j=1}^d \partial_{\xi_j}b\partial_{x_j}a + S^{m+m'-2}$$

□

CHAPITRE

2

APPLICATIONS

2.1 Action sur l'espace des fonctions de carré intégrable

Théorème 2.1.1 (Calderon-Vaillancourt). *Si $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$, alors $Op(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

On donne une preuve du théorème de Calderon-Vaillancourt qui utilise le calcul symbolique.

Démonstration. On commence par un lemme sur les opérateurs à noyau continu.

Lemme 2.1.2 (Lemme de Schur). *Soit $K \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. S'il existe $C > 0$ tel que*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|dx \leq C \quad et \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|dy \leq C,$$

alors l'opérateur

$$P : u \in C_c(\mathbb{R}^d) \longmapsto Pu := \int_{\mathbb{R}^d} K(.,y)u(y)dy$$

se prolonge de manière unique en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, encore noté P, et qui vérifie

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|Pu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}.$$

Démonstration du lemme. Pour tout $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |Pu(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)||u(y)|dy \leq C\|u\|_\infty,$$

ce qui montre que Pu est bien défini (i.e. l'intégrale est convergente quelque soit $x \in \mathbb{R}^d$). De plus,

$$\begin{aligned}
|Pu(x)|^2 &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^d} (\sqrt{|K(x,y)|})(\sqrt{|K(x,y)|}|u(y)|)dy\right]^2 \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|dy \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)||u(y)|^2 dy, \quad \textit{par Cauchy} - \textit{Schwarz} \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)||u(y)|^2 dy.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Pu\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |Pu(x)|^2 dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)||u(y)|^2 dy dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |K(x,y)|dx|u(y)|^2 dy, \quad \textit{par Fubini} \\
&\leq C^2 \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

D'où $\|Pu\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$. On a donc que P est continu de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc P se prolonge par densité (de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$) de manière unique en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (que l'on note P aussi) et par continuité de la norme L^2, la majoration ci-dessus est encore vraie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Soit $a \in S^{-(d+1)}(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que $Op(a)$ se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Soit $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}
Op(a)u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix.\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix.\xi} a(x,\xi) \int e^{-iy.\xi} u(y)dy\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \int e^{-i(y-x).\xi} a(x,\xi)u(y)d\xi\, dy.
\end{aligned}$$

Puisque $a \in S^{-(d+1)}(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante $C_0 > 0$ tel que

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |a(x,\xi)| \leq C_0(1 + \|\xi\|)^{-(d+1)}.$$

Donc pour tout $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $x,y \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale

$$K(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(y-x).\xi} a(x,\xi)d\xi$$

est bien définie et convergente. De plus, pour tout $x,y \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\begin{aligned}(1+\sum_{k=1}^{d}(y_k-x_k)^{d+1})K(x,y) &= K(x,y)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{k=1}^{d}\mathcal{F}_\xi((y_k-x_k)a(x,.))(y-x)\\ &= K(x,y)+\frac{i^{d+1}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\sum_{k=1}^{d}\mathcal{F}_\xi(\partial_{\xi_k}^{d+1}a(x,.))(y-x)\\ &= K(x,y)+\frac{i^{d+1}}{(2\pi)^{d}}\sum_{k=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_{\xi_k}^{d+1}a(x,\xi)e^{-i(y-x).\xi}d\xi.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}(1+\sum_{k=1}^{d}|y_k-x_k|^{d+1})|K(x,y)| &\leq |K(x,y)|+\sum_{k=1}^{d}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{\xi_k}^{d+1}a(x,\xi)|d\xi\\ &\leq |K(x,y)|+\frac{C_d}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|)^{-2(d+1)}d\xi,\end{aligned}$$

où la constante $C_d>0$ provient du fait que $a\in S^{-(d+1)}(\mathbb{R}^d)$. Or toutes les normes de $\mathbb{R}^d$ étant équivalentes, il existe une constante $A>0$ telle que

$$\|x-y\|^{d+1}\leq A\sum_{k=1}^{d}|y_k-x_k|^{d+1}$$

et donc

$$(1+\|x-y\|^{d+1})|K(x,y)|\leq\frac{C_0}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|)^{-(d+1)}d\xi+\frac{AC_d}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|)^{-2(d+1)}d\xi=:C<+\infty$$

Donc la fonction $(x,y)\mapsto(1+\|x-y\|^{d+1})K(x,y)$ est bornée (par $C>0$). D'après le lemme de Schur, $Op(a)$ se prolonge en un opérateur continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Montrons par récurrence que pour tout $k\in\{0,...,d\}$,si $a\in S^{k-(d+1)}$, alors $Op(a)$ se prolonge en un opérateur continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On viens de le montrer pour $k=0$. Supposons que le théorème soit vrai pour un symbole d'ordre $k-1-(d+1)$. Soit $a\in S^{k-(d+1)}$ avec $k\in\{0,...,d\}$. Alors $a\sharp a^*$ est un symbole d'ordre $2k-2(d+1)\leq k-1-(d+1)$. Donc

$$\|Op(a)Op(a)^*\|_{L^2\to L^2}=\|Op(a)\|_{L^2\to L^2}^2$$

est fini, on en déduit le théorème pour $Op(a)$. Soit $a\in S^0$ un symbole non nul. Posons $M:=2\|a\|_\infty^2$. Alors $c:=(M-|a|^2)^{1/2}$ est un symbole d'ordre 0.De plus $c^*\sharp c$ est égale à $|c|^2=M-|a|^2$ plus un symbole de S^{-1} et $|a|^2$ est égale à $a^*\sharp a$ plus un symbole d'ordre -1, on en déduit qu'il existe $R\in\Psi^{-1}$ tel que

$$Op(c)^*Op(c)=MId-Op(a)^*Op(a)+R.$$

Finalement, pour tout $u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\|Op(a)u\|_{L^2}^2=(Op(a)^*Op(a)u,u)_{L^2}=-\|Op(a)u\|_{L^2}^2+M\|u\|_{L^2}^2+(u,Ru)_{L^2}\leq(M+\|R\|_{L^2\to L^2})\|u\|_{L^2}^2<\infty.$$

Donc $Op(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

2.2 Inégalité de Gårding

Sur un espace de Hilbert complexe H, un opérateur non-borné $(A, D(A))$ sur H, est dit positif si,

$$\forall u \in D(A), Re(Au,u)_H \geq 0$$

Dans le cas d'un multiplicateur de Fourier, la positivité du symbole implique celle de son opérateur associé, au sens du produit scalaire .
Dans un cas plus général, c'est à dire d'un opérateur à coefficients variables, on peut encore relier la positivité du symbole avec celle de son opérateur à l'aide des inégalités de Gårding, avec une erreur.

Lemme 2.2.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m(\mathbb{R}^d)$, alors $Op(a)$ applique de H^s dans H^{s-m} pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. On considère l'opérateur pseudo-différentiel $(1-\Delta)^{\frac{\mu}{2}}$, $\mu \in \mathbb{R}$, de symbole $(1+|\xi|^2)^{\frac{\mu}{2}}$. C'est un isomorphisme de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^s)$.
Ensuite, on montre que l'opérateur $A_{s,m} = (1-\Delta)^{\frac{s-m}{2}} \circ Op(a) \circ (1-\Delta)^{\frac{-s}{2}}$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^s)$ dans $L^2(\mathbb{R}^s)$. □

Théorème 2.2.2 (Inégalité de Gårding "forte"). *Soit $a \in S^{2m+1}$, $m \in \mathbb{R}$, tel que $Re(a) \geq 0$. Alors :*

$$\exists C > 0, \forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), Re(Op(a)u,u)_{L^2} \geq -C\|u\|^2_{H^m}$$

Cette inégalité est aussi appelée "inégalité de Gårding avec gain d'une dérivée"

Théorème 2.2.3 (Inégalité de Gårding "faible"). *Soit $a \in S^{2m}$, $m \in \mathbb{R}$, tel que pour $|\xi| \geq R$ et $c > 0$,*

$$Re(a(x,\xi)) \geq c(1+|\xi|^2)^m.$$

Alors, pour tout N, il existe une constante C_N telle que :

$$\forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d), Re(Op(a)u,u)_{L^2} + C_N\|u\|^2_{-N} \geq \frac{c}{2}\|u\|^2_{H^m}$$

Démonstration. [1] Tout d'abord, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $Re(Op(a)u,u) = (\frac{Op(a)+Op(a^*)}{2}u, u)$. Le théorème du calcul symbolique sur l'adjoint nous permet d'écrire que $a^* - \overline{a} \in S^{2m-1}$, et on a $b := \frac{a+a^*}{2} = Re(a) + d$ avec $d \in S^{2m-1}$.

Posons $e = b - \frac{3}{4}c(1+|\xi|^2)^m \in S^{2m}$. On a pour $|\xi|$ assez grand :

$$Re(e) \geq \frac{c}{4}(1+|\xi|^2)^m(1 - \frac{4|d|}{c(1+|\xi|^2)^m}) \geq \frac{c}{8}(1+|\xi|^2)^m$$

$(1+|\xi|^2)^{-m}e$ est un symbole d'ordre zéro, donc la partie réel est plus grande que $\frac{c}{8}$ pour $|\xi|$ grand. On prend $F \in C^\infty(\mathbb{C})$ qui coincide avec une détermination de la racine carré sur $\{z \in \mathbb{C} | Re(z) \geq \frac{c}{8}\}$.

1. Preuve adaptée de celle proposée par Alinhac et Gérard dans *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*

On peut maintenant définir $f := F(\langle\xi\rangle^{-2m})e\langle\xi\rangle^m(1-\chi(\xi))$ dans S^m avec χ lisse à support compact égale à 1 près de 0.

On a : $f^*\#f = e + g,\ g \in S^{2m-1}$
Ainsi,

$$(Op(b)u,u) \geq \frac{3}{4}c\|u\|_m^2 - (Op(g)u,u)$$

Nous pouvons écrire,

$$(Op(g)u,u) = (Op((1+\xi^2)^{-\frac{m}{2}})Op(g)u, Op((1+\xi^2)^{+\frac{m}{2}})u)$$

$Op((1+\xi^2)^{-\frac{m}{2}})Op(g)$ est d'ordre $-2(\frac{m}{2})+(2m-1) = m-1$ et $Op((1+\xi^2)^{+\frac{m}{2}})$ est d'ordre $2(\frac{m}{2}) = m$.

Donc par Cauchy-Schwarz et le lemme 2.3,

$$(Op(b)u,u) \geq \frac{3}{4}c\|u\|_m^2 - cte\|u\|_m\|u\|_{m-1}$$

Et, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout N,

$$\|u\|_{m-1} \leq \varepsilon\|u\|_m + C_{\varepsilon,N}\|u\|_{-N}$$

car

$$(1+|\xi|^2)^{m-1} \leq \varepsilon^2(1+|\xi|^2)^m + C_{\varepsilon,N}^2(1+|\xi|^2)^{-N}$$

L'inégalité $2\alpha\beta \leq \lambda\alpha^2 + \frac{1}{\lambda}\beta^2$ nous donne directement

$$Re(Op(a)u,u) = (Op(b)u,u) \geq \frac{c}{2}\|u\|_{H^m}^2 - C_N\|u\|_{-N}^2$$

□

2.3 Opérateurs elliptiques

Définition 2.3.1. *Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que $a \in S^m$ est un* ***symbole elliptique*** *s'il existe des constantes $C,R > 0$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in (\mathbb{R}^d \backslash B(R)), \quad |a(x,\xi)| \geq C\langle\xi\rangle^m \tag{2.1}$$

La condition (2.1) sur le symbole a s'appelle condition d'ellipticité. La classe des symboles elliptiques a de particulier que les opérateurs associés sont inversibles modulo $\Psi^{-\infty}$. Nous allons démontrer ce résultat, qui est une application du calcul symbolique.

Théorème 2.3.2. *Soient $m \in \mathbb{R}$ et $a \in S^m$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *a est un symbole elliptique*
2. *Il existe $b,b' \in S^{-m}$ tels que*

$$Op(a)Op(b) - Id \in \Psi^{-\infty} \quad \text{et} \quad Op(b')Op(a) - Id \in \Psi^{-\infty}.$$

|

Remarque 2.3.3. *Observons que si $Op(b)$ est un inverse à droite modulo $\Psi^{-\infty}$ et $Op(b')$ un inverse à gauche, alors $Op(b) - Op(b') \in \Psi^{-\infty}$. En effet, pour commencer*

$$Op(b')[Op(a)Op(b) - Id] \in \Psi^{-\infty}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} Op(b')[Op(a)Op(b) - Id] &= [Op(b')Op(a)]Op(b) - Op(b') \\ &= [Id + R]Op(b) - Op(b') \quad \text{avec } R \in \Psi^{-\infty} \\ &= Op(b) - Op(b') + S \quad \text{avec } S = ROp(b) \in \Psi^{-\infty}. \end{aligned}$$

Finalement $Op(b) - Op(b') \in \Psi^{-\infty}$.

Démonstration. $\underline{2) \Rightarrow 1)}$. Il suffit de considérer l'inverse à droite. Soit $b \in S^{-m}$ tel que

$$T := Op(a)Op(b) - Id \in \Psi^{-\infty}$$

Alors on a

$$T = Op(ab) + S - Id, \quad \text{avec } S \in \Psi^{-1}.$$

Donc $Op(ab - 1) = T - S \in \Psi^{-1}$ ou encore $ab - 1 \in S^{-1}$. Il existe donc $D > 0$ tel que

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \ |a(x,\xi)b(x,\xi) - 1| \le D\langle\xi\rangle^{-1}.$$

Or $\underset{|\xi|\to\infty}{lim} \langle\xi\rangle^{-1} = 0$. Il existe donc $R > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in (\mathbb{R}^d \backslash B(R)), \quad |a(x,\xi)b(x,\xi)| - 1| \le \frac{1}{2}$$

On prend donc $x \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash B(R)$. Ainsi, $|a(x,\xi)b(x,\xi)| \ge \frac{1}{2}$. Or $b \in S^{-m}$, donc il existe $B > 0$, qui ne dépend ni de x, ni de ξ, tel que :

$$\frac{1}{2} \le |a(x,\xi)b(x,\xi)| \le B\langle\xi\rangle^{-m}|a(x,\xi)|.$$

Enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \xi \in (\mathbb{R}^d \backslash B(R)), \quad |a(x,\xi)| \ge \frac{1}{2B}\langle\xi\rangle^{m}.$$

a est elliptique.

$\underline{2) \Leftarrow 1)}$. Réciproquement, supposons que $a \in S^m$ soit elliptique. Soit $R,C > 0$ comme dans (2.1). Sur $\mathbb{C}$ on a une fonction C^∞ holomorphe F telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash D(0,C), \ \ F(z) = \frac{1}{z}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\tilde{b}(x,\xi) := \langle\xi\rangle^{-m} F(a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{-m}).$$

Le symbole $\tilde{b} \in S^{-m}$ (par un lemme donné dans la section Symboles). On a de plus, pour tout $|\xi| \geq R$, $a(x,\xi)\tilde{b}(x,\xi) = 1$, ce qui signifie que le symbole $a\tilde{b} - 1$ est à support compact dans $B(R)$. Donc $s := a\tilde{b} - 1 \in S^{-\infty}$. En appliquant le théorème de composition des symboles, il vient

$$Id + Op(s) = Op(a\tilde{b}) = Op(a)Op(\tilde{b}) + Q \quad \text{avec} \;\; Q \in \Psi^{-1}.$$

Donc $T := Id - Op(a)Op(\tilde{b}) \in \Psi^{-1}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on note t_k le symbole de T^k (On a donc $t_0 = 1$). Soit $g \sim \sum_{k\geq 0} t_k$.
Posons $b := \tilde{b}\#g \in S^{-m}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} Op(a)Op(b) - Id &= Op(a)Op(\tilde{b})[Id + T + ... + T^k + U_k] - Id \quad \text{avec} \;\; U_k \in \Psi^{-(k+1)} \\ &= (Id - T)(Id + T + ... + T^k + U_k) - Id \\ &= -T^{k+1} + U_k - TU_k \in \Psi^{-(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc $Op(a)Op(b) - Id \in \Psi^{-\infty}$.
On construit de la même manière un inverse à gauche. □

2.4 Fronts d'ondes et propagation des singularités

2.4.1 Front d'onde

Définition 2.4.1. *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. On dit que u est* ***microlocalement de classe*** C^∞ *en $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ s'il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^d$ contenant x_0 et un cône ouvert Γ de $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ contenant ξ_0 tels que l'on ait :*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\omega),\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists C_N > 0),\ \forall \xi \in \Gamma,\ \ |\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} \tag{2.2}$$

On appelle ***front d'onde*** *de u l'ensemble noté $WF(u)$ des points de $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ où u n'est pas microlocalement de classe C^∞.*

La condition (2.2) impose en fait que la transformée de Fourier de φu est à décroissance rapide dans toutes les directions contenues dans Γ (i.e $\mathbb{S}_{d-1} \bigcap \Gamma$).

Définition 2.4.2. *On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ est* ***conique*** *si pour tout $t > 0$, on a*

$$(x,\xi) \in A \Longleftrightarrow (x,t\xi) \in A.$$

Remarque 2.4.3. *$WF(u)$ est un sous-ensemble fermé et conique de $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$.*

Exemple 2.4.4. *On note δ la masse de Dirac centré en 0. Alors $WF(\delta) = \{0\} \times (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$.*
En effet, soit $x_0 \in (\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert ne contenant pas 0 et qui contient x_0. Alors pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$, $\varphi\delta = \varphi(0) = 0$.
Donc δ est microlocalement de classe C^∞ en (x_0,ξ_0) pour tout $\xi_0 \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. D'autre part, si $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ est tel que $\varphi(0) \neq 0$, alors $\widehat{\varphi\delta} = \varphi(0)$ n'est à décroissance rapide dans aucune direction.

Définition 2.4.5. *Soit u une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$. On dit que u est de classe C^∞ voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^d$, si il existe un voisinage ouvert ω de x_0 tel que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ on a $\varphi u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.*
On appelle ***support singulier*** *de u, et on note supp sing(u), l'ensemble de point au voisinage des quels u n'est pas de classe C^∞.*

On va maintenant établir que la notion de front d'onde précise celle de support singulier.

Proposition 2.4.6. *Soit u une distribution tempérée. La projection sur $\mathbb{R}^d$ de $WF(u)$ est supp sing(u).*

2.4.2 Propagation des singularités

Le premier résultat dit que les singularités d'une solution d'un "bon" opérateur différentiel sont contenues dans la variété caractéristique.

Théorème 2.4.7 (Sota-Hörmander)**.** *Si P est un opérateur différentiel à coefficients $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors on a :*

$$P(u) = 0 \Longrightarrow WF(u) \subset Car(P).$$

Définition 2.4.8. *Soit $b \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on pose*

$$H_b(x,\xi) := ({}^t\nabla_\xi b(x,\xi), -{}^t\nabla_x b(x,\xi)^t).$$

*On appelle H_b le **champ hamiltonien** de b. Les courbes intégrales de H_b sont appelées des **bicaractéristiques**.*

Si $b \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, alors pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ le système

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{\partial b}{\partial \xi}(x(t),\xi(t)), & x(0) = x \\ \xi'(t) = \frac{\partial b}{\partial x}(x(t),\xi(t)), & \xi(0) = \xi \end{cases}$$

admet une unique solution maximale $t \mapsto \Phi^t_{H_b}(x,\xi) := (x(t),y(t))$. On dit que l'application $(x,\xi) \mapsto \Phi^t_{H_b}(x,\xi)$ est le flot hamiltonien de b.

Proposition 2.4.9. *Soit $b \in S^1(\mathbb{R}^d)$ un symbole à valeurs réelles. Alors le flot $\Phi^t_{H_b}$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, si $p \in S^0(\mathbb{R}^d)$, alors $p(\Phi^t_{H_b})$ est un symbole qui appartient à $S^0(\mathbb{R}^d)$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$.*

Théorème 2.4.10. *Soit $a \in S^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $a = a^0 + a^1$, avec $a^0 \in S^0(\mathbb{R}^d)$ et a^1 un symbole à valeurs imaginaires pures. Soient $T > 0$, $d \geq 1$ et $s \in \mathbb{R}$. Pour tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, il existe une unique solution $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$ de*

$$\begin{cases} \partial_t u + Op(a)u = f \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

.

Démonstration. On commence par montrer l'estimation d'énergie suivante :

Lemme 2.4.11. *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Il existe une constante $C = C_{s,T}$ telle que pour tout $u \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T], H^{s-1}(\mathbb{R}^d))$, tout $f \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, tout $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et tout*

$t \in [0,T]$, si u est solution de (2.3) , alors

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq e^{Ct}\|u_0\|_{H^s} + 2\int_0^t e^{C(t-t')}\|f(t')\|_{H^s}.$$

□

Soit $a \in S^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $a = a^0 + a^1$, avec $a^0 \in S^0(\mathbb{R}^d)$ et a^1 un symbole à valeurs imaginaires pures et homogène d'ordre 1 en ξ. Soit $S(t,s) : L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto L^2(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur solution qui à une fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ associe la valeur au temps t de l'unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u + Op(a)u = f \\ u(s) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

On note H le champ hamiltonien associé au symbole a^1 et Φ_H^t le flot associé au temps $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.4.12 (Egorov)**.** *Soit $P_0 = Op(p_0) \in \Psi^0(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $t \in R$,il existe un symbole $q_t \in S^0(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$*

$$S(t,0)P_0S(0,t)u_0 - Op(q_t)u_0 \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^d).$$

De plus, $q_t - p_0(\Phi_H^{-t}) \in S^{-1}(\mathbb{R}^d)$.

Voici le théorème principal de ce chapitre, le **théorème de propagation des singularités de Hörmander**.

Théorème 2.4.13. *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si $u \in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^d))$ est solution de (2.3), alors pour tout $t \in [0,T]$*

$$WF(u(t)) = \Phi_H^t(WF(u_0)).$$

APPENDICE

Lemme 2.4.14. *Soit $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$. On définit $a_\varepsilon(x,\xi) := a(x,\varepsilon\xi)$. Alors $(a_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ est bornée dans $S^0(\mathbb{R}^d)$ et a_ϵ converge vers a_0 lorsque ε tend vers 0 dans $S^m(\mathbb{R}^d)$ pour tout $m > 0$.*

Démonstration. On commence par montrer que la famille est bornée (Etape 1), puis on montre la convergence (Etape 2).
Etape 1 :$(a_\varepsilon)_{0\leq\varepsilon\leq 1}$ est bornée dans $S^0(\mathbb{R}^d)$
Soit $\varepsilon = 0$. Si $\beta \neq 0$ alors $\partial_x^\alpha \partial_{xi}^\beta a_0(x,\xi) = 0$, quelque soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Soit maintenant $\beta = 0$. Puisque $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \quad |\partial_x^\alpha a_0(x,\xi)| \leq C.$$

Maintenant, supposons que $\varepsilon \in]0,1]$. Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$. On a alors

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)| = \varepsilon^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\varepsilon\xi)|$$

Comme $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\varepsilon\xi)| \leq C(1 + \varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|}.$$

Or,

$$\varepsilon^{|\beta|}(1 + \varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|} = (\frac{1}{\varepsilon} + \|\xi\|)^{-|\beta|} \leq (1 + \|\xi\|)^{-|\beta|} \quad car \;\; 0 < \varepsilon \leq 1. \tag{2.5}$$

Donc

$$(1 + \|\xi\|)^{-|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi)| \leq C$$

et de plus, on observe que cette majoration est indépendante de $\varepsilon \in]0,1]$.
On en déduit donc que

$$(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d)(\exists D_{\alpha,\beta} > 0) \mid \quad p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon) \leq D_{\alpha,\beta} \quad (\forall 1 \geq \varepsilon \geq 0).$$

Etape 2 : a_ε converge vers a dans S^m lorsque ε tend vers 0 pour $m > 0$
On commence par considérer le cas $m \in]0,1]$. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On va montrer que pour tout $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $C > 0$ tel que

$$p^m_{\alpha,\beta}(a_\epsilon - a_0) \leq C\varepsilon^m.$$

Dans le cas où $\beta = 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors

$$\partial_x^\alpha (a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi)) = \varepsilon\xi \int_0^1 \nabla_\xi \partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)dt.$$

Comme $a \in S^0$, il existe $C > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha (a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi))| \leq \varepsilon\|\xi\| \int_0^1 \sum_{i=1}^d |\partial_{\xi_i}\partial_x^\alpha a(x,t\varepsilon\xi)|dt \leq C\varepsilon\|\xi\| \int_0^1 (1 + t\varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|}dt$$

$$= C\int_0^{\varepsilon\|\xi\|} \frac{1}{1+s}ds = Cln(1 + \varepsilon\|\xi\|).$$

Or, pour tout $m > 0$, $\lim_{\|\xi\|\to\infty} \frac{ln(1+\varepsilon\|\xi\|)}{\|\xi\|^m} = 0$. Par continuité de la fonction $x \in \mathbb{R}_{>0} \mapsto \frac{ln(1+\varepsilon\|\xi\|)}{x^m}$, on en déduit qu'il existe une constante $C_m > 0$ tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ ln(1 + \varepsilon\|\xi\|) \leq C_m \varepsilon^m \|\xi\|^m.$$

Donc

$$|\partial_x^\alpha (a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi))| \leq CC_m\varepsilon^m\|\xi\|^m \leq CC_m\varepsilon^m(1 + \|\xi\|)^m$$

et ainsi

$$p^m_{\alpha,o}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,0}\varepsilon^m$$

avec $C_{\alpha,0} := CC_m$.
Supposons désormais que $\beta \neq 0$. On a alors :

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta ((a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi)) = \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\varepsilon(x,\xi) = \varepsilon^{|\beta|}\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\varepsilon\xi).$$

Puisque $a \in S^0(\mathbb{R}^d)$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a_\varepsilon(x,\xi) - a_0(x,\xi))| \leq C_{\alpha,\beta}\varepsilon^{|\beta|}(1 + \varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|}.$$

Or, $|\beta| \geq 1 \geq 0$ donc $m - |\beta| \leq 0$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} \varepsilon^{|\beta|}(1 + \varepsilon\|\xi\|)^{-|\beta|} &\leq \varepsilon^{|\beta|}(1 + \varepsilon\|\xi\|)^{m-|\beta|} && (2.6)\\ &= \varepsilon^m(\frac{1}{\varepsilon} + \|\xi\|)^{m-|\beta|} && (2.7)\\ &\leq \varepsilon^m(1 + \|\xi\|)^{m-|\beta|}. && (2.8) \end{aligned}$$

On en déduit

$$p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta}\varepsilon^m.$$

Revenons au cas général $m \in \mathbb{R}_{>0}$. Le cas $m \in]0,1]$ ayant été traité, supposons maintenant que $m > 1$. Dans ce cas, si $\lfloor m \rfloor$ désigne la partie entière de m, alors $m - \lfloor m \rfloor \in]0,1]$. De plus, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, (1 + \|\xi\|)^{-(m-|\beta|)} \leq (1 + \|\xi\|)^{-(m-\lfloor m \rfloor-|\beta|)}.$$

Donc

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d, p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq p^{m-\lfloor m \rfloor}_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0).$$

Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$. Alors il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

$$p^m_{\alpha,\beta}(a_\varepsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta}\varepsilon^{m-\lfloor m \rfloor}.$$

On en déduit que pour tout $m > 0$, il existe $\mu_m > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in]0,1], \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^d, \exists C_{\alpha,\beta,m} > 0,\ \ p^m_{\alpha,\beta}(a_\epsilon - a_0) \leq C_{\alpha,\beta,m}\varepsilon^{\mu_m}.$$

Le lemme est démontré. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alazard, T. *Analyse et Equations aux dérivées partielles*, ENS Paris-Saclay, 2017.

[2] Alinhac S. , Gérard P. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, EDP Sciences, 1991.

[3] Taylor M. *Partial Differential Equations*, Springer, 1996.

[4] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer, 1983

[5] Folland, G.B. *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, 1995.