1

CALCUL NUMÉRIQUE

Le développement du calcul numérique, incluant les fractions, les puissances et les racines carrées, remonte à des civilisations anciennes comme les Égyptiens et les Babyloniens. Au fil des siècles, des mathématiciens tels qu'Euclide et Al-Khwarizmi ont contribué à ces concepts. Leurs utilisations sont omniprésentes, des calculs simples de la vie quotidienne aux avancées scientifiques et technologiques contemporaines.

1 Fractions

Propriété | Simplification

Soient a un nombre quelconque et b et k deux nombres non nuls.

$$\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a}{b}$$

Exemple Simplifions $\frac{30}{42}$.

$$\begin{aligned}\frac{30}{42}&=\frac{2\times3\times5}{2\times3\times7}\\&=\frac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times7}\\&=\boxed{\frac{5}{7}}\end{aligned}$$

Remarque Une fraction qui ne peut plus être simplifiée est dite **irréductible**.

Exercice

1. Simplifier les fractions suivantes.
   - $\frac{14}{26}$
   - $\frac{33}{51}$
   - $\frac{85}{25}$
   - $\frac{-105}{140}$
2. Écrire chaque expression sous forme d'une fraction irréductible.
   - $\frac{4}{77}\times\frac{21}{6}$
   - $\frac{25}{4}\times\frac{6}{55}$
   - $\frac{26}{121}\times\frac{77}{65}$

Propriétés | Somme et différence

Soient a et c deux nombres quelconques et $b\neq0$.

- $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$

Exemple Calculons $\frac{11}{30}+\frac{1}{6}-\frac{4}{5}$ et donnons sa forme irréductible.

On réduit au même dénominateur.

$$\begin{aligned}&=\frac{11}{30}+\frac{1\times\mathbf{5}}{6\times\mathbf{5}}-\frac{4\times\mathbf{6}}{5\times\mathbf{6}}\\&=\frac{11}{30}+\frac{5}{30}-\frac{24}{30}\end{aligned}$$

On calcule la somme algébrique des numérateurs.

$$\begin{aligned}&=\frac{11+5-24}{30}\\&=-\frac{8}{30}\end{aligned}$$

On simplifie.

$$\begin{aligned}&=\frac{-4\times\cancel{2}}{15\times\cancel{2}}\\&=\boxed{-\frac{4}{15}}\end{aligned}$$

Propriété | Produit

Soient a et c deux nombres quelconques et b et d non nuls.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemple Calculons $\frac{3}{14} \times \frac{22}{15}$.

$$\frac{3}{14} \times \frac{22}{15} = \frac{3 \times 22}{14 \times 15} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 11}{\cancel{2} \times 7 \times \cancel{3} \times 5} = \boxed{\frac{11}{35}}$$

Définition | Inverse

L'**inverse** d'une fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

Propriété | Quotient

Soient a un nombre quelconque et b, c et d non nuls.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Remarque Diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

Exemples
- $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{12}{7}} = \frac{4}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{4 \times 7}{3 \times 3 \times 4} = \frac{7}{9}$

Exercice

1. Simplifier.

a) $\frac{8}{14} \div \frac{22}{49}$

b) $\frac{18}{7} \div \frac{6}{10}$

c) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{21}{20}}$

2. Donner sous forme irréductible.

a) $\frac{3}{7} - \frac{2}{7} \times \frac{21}{8}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right)$

c) $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$

d) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} - \frac{2}{5}$

e) $\frac{\frac{4}{3} - 1}{\frac{7}{6} - 2}$

2 Racine carrée

Définition | Racine carée

Soit a un nombre positif.
La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre **positif** dont le carré est égal à a.

Exemples
- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$
- $\sqrt{9} = 3$.

Propriété | Positivité

Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples
- $\sqrt{1{,}3^2} = 1{,}3$
- $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$
- $\sqrt{(-3{,}6)^2} = 3{,}6$

Propriétés | Opérations

Soient a et b deux réels positifs.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. Pour le premier point, on sait que $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ et

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\times\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)\\ &= \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{b}\\ &= \left(\sqrt{a}\right)^2\times\left(\sqrt{b}\right)^2\\ &= a\times b\\ &= ab\end{aligned}$$

Les deux nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ ont le même carré et sont positifs, donc ils sont égaux.
Le second point est démontré de la même manière. □

Exemples ▶ $\sqrt{3600} = \sqrt{36\times 100} = \sqrt{36}\times\sqrt{100} = 6\times 10 = 60$

▶ $\dfrac{\sqrt{0{,}44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\dfrac{0{,}44}{11}} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

Exercice

1. Écrire $2\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{50}}{5}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.
   C'est ce qu'on appelle simplifier.
2. Simplifier les expressions suivantes.
   - **a)** $3\sqrt{7}+2\sqrt{7}$
   - **b)** $\sqrt{75}$
   - **c)** $\left(3-\sqrt{5}\right)^2$
   - **d)** $\sqrt{\dfrac{8}{9}}$
   - **e)** $\dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{25}}$
3. Calculer la somme $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}$.
4. Montrer que $\sqrt{288}+\sqrt{720} = 12\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

3 Puissances

Définition | Puissance entière

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel.
Pour $n \geqslant 2$, $a^n = a\times a\cdots\times a$ (n fois).
De plus, on a, par convention, $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.

Exemples ▶ $10^3 = 10\times 10\times 10 = 1\,000$

▶ $2^5 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 32$

▶ $(-7)^4 = (-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = 2\,401$

Définition | Puissance entière relative

Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel non nul.
On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemples ▶ $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}000\,1$

▶ $2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$

▶ $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \dfrac{1}{4}$

Propriétés | Bases égales

Soient a un nombre non nul et n, m deux nombres entiers.

▶ $a^n\times a^m = a^{n+m}$ ▶ $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ▶ $(a^n)^m = a^{n\times m}$

Exemples ▶ $5{,}2^3\times 5{,}2^{-2} = 5{,}2^{3-2} = 5{,}2^1 = 5{,}2$

▶ $\dfrac{(-8)^7}{(-8)^9} = (-8)^{7-9} = (-8)^{-2} = \dfrac{1}{64}$

▶ $\left(\sqrt{2}^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}^{3\times 2}\right) = \sqrt{2}^6 = 8$

Remarque Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de puissances.
Par exemple, $10^2+10^3 \neq 10^5$.

Propriétés | Exposants égaux

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un entier relatif.
Alors,

- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples

- $0{,}2^7 \times 10^7 = (0{,}2 \times 10)^7 = 2^7 = 128$
- $\dfrac{11{,}1^{-3}}{1{,}11^{-3}} = \left(\dfrac{11{,}1}{1{,}11}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$

Exercice

1. Écrire les quatre nombres suivants sous la forme d'une puissance de 10 :

   a) $10^5 \times 10^3$ b) $\left(10^5\right)^3$ c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ d) $\dfrac{10^5}{10^{-3}}$.

2. L'affirmation "$\left(7^{n+1}\right)^2 \times 7^{-2n}$ a toujours la même valeur, quel que soit n, entier relatif. " est-elle vraie ?
3. "$10^6 + 10^3$ est toujours une puissance de 10". Vrai ou faux ?

Exercice

Simplifier les expressions suivantes et écrire le résultat sous forme d'un produit de puissances.

1. $\dfrac{3^{-10} \times 9^2}{3^5}$
2. $22^6 \times \dfrac{33^3}{8 \times 6^3}$
3. $12^2 \times 9^7 \times 18^{-5}$
4. $15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$

Exercice

On considère les deux nombre suivants : $A = 4^3 \times 9^{-2}$ et $B = 6^3 \times 18^{-2}$.

1. Écrire A et B sous la forme $2^n \times 3^p$ où n et p sont des nombres entiers relatifs.
2. En déduire l'écriture sous la même forme de AB et $\dfrac{A}{B}$.