6

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Résumé

La dualité entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien est centrale dans la résolution de nombreux problèmes comme la modélisation des populations, et pour des calculs financiers.

1 Fonctions logarithmes

Définition | Logarithmes de base a

Soit $a > 0$.
La fonction f_a exponentielle de base a admet une fonction réciproque : la fonction **logarithme** $\log_a$ de **base** a.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+^*, a^{\log_a(x)} = x$$

Remarque Toute fonction logarithme est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ mais les fonctions exponentielles sont, elles, définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

Exemple L'exemple le plus classique de logarithme est $\log_{10}$.

- $\log_{10}(10\,000) = 4$ car $10\,000 = 10^4$.
- $\log_{10}(0{,}1) = -1$ car $0{,}1 = 10^{-1}$.
- $10^{\log_{10}(4{,}2)} = 4{,}2$

Exercice

Calculer $\log_{10}(100)$ et $\log_{10}(0{,}000\,001)$.

Propriétés

Soit $a > 0$.

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \log_a(x^y) = y\log_a(x)$

Démonstration. On dispose des propriétés de la fonction exponentielle de base a et on utilise la réciprocité entre exponentielle et logarithme. □

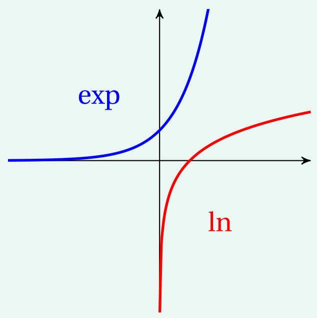
Exemples On peut calculer des logarithmes plus facilement en se ramenant à des valeurs connues.

- $\log_{10}(20) = \log_{10}(2 \times 10) = \log_{10}(2) + \log_{10}(10) = \log_{10}(2) + 1 \approx 0{,}3 + 1 \approx 1{,}3$
- $\log_{10}(\sqrt{10}) = \log_{10}\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log_{10}(10) = \frac{1}{2}$.

2 Logarithme népérien

Définition | Fonction ln

On appelle **logarithme népérien**, notée ln, la fonction logarithme de base e définie sur $]0;+\infty[$.
Sa courbe représentative est la symétrie de celle de exp selon l'axe $y = x$.



$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \ln(e^x) = x$$
$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad e^{\ln(x)} = x$$

Propriétés

On a les propriétés suivantes ;

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}_+^*, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \forall y \in \mathbf{R}, \ln\left(x^y\right) = y\ln(x)$

Théorème | Dérivabilité

ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ (donc continue) et :

$$\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Corollaire | Variations de ln

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration. Sur $]0;+\infty[$, la fonction inverse est strictement positive. □

Exercice

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\mathrm{e}^{2x} - 7 \geqslant 3$ **2.** $3\ln(x) + 1 = 13$ **3.** $\ln(-4x+2) > 0$

Corollaire | Composée

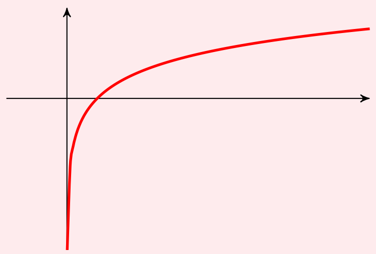
Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, on a :

- $\ln(u)$ est dérivable sur I ;
- $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

3 Analyse asymptotique

Propriétés | Limites en $\pm\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$



Démonstration.

- Soit $A \in \mathbf{R}$. Si $0 < x < \mathrm{e}^A$ alors, $\ln(x) < \ln\left(\mathrm{e}^A\right) = A$ par stricte croissance de ln.
- Soit $A \in \mathbf{R}$. Si $x > \mathrm{e}^A$ alors, $\ln(x) > \ln\left(\mathrm{e}^A\right) = A$ par stricte croissance de ln.

□

Exercice

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0^-} \ln(-3x)$

2. $\lim_{x\to 0} \ln(x^2+1)$

3. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2 - 7x)$

4. $\lim_{x\to-\infty} \ln(-x)^2$

Théorème | Croissances comparées

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0$$