4

INFÉRENCE BAYÉSIENNE

Résumé

Le raisonnement bayésien est à la base de nombreux algorithmes de décision et se retrouve dans de nombreux domaines pratiques : sport, médecine, justice, etc. où l'on doit raisonner à partir de probabilités et d'informations incomplètes. Il s'agit ici de décrire et mettre en œuvre les principes du calcul utilisant des probabilités conditionnelles et notamment la formule de Bayes pour l'inversion des conditionnements.

1 Probabilités conditionnelles et totales

Définition

La **probabilité conditionnelle** que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement A est réalisé se note $\mathbb{P}_A(B)$.
Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

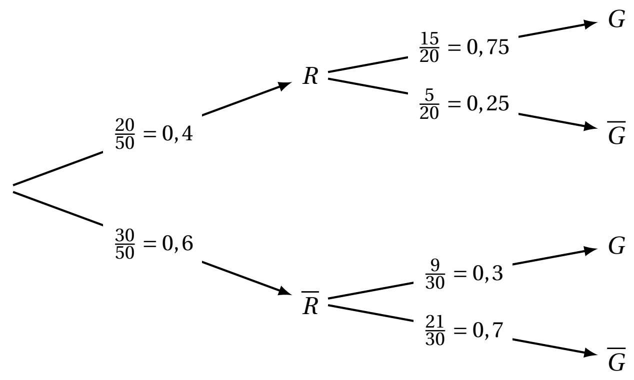
Propriétés

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a :

- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$
- $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$.

Exemple - Tirage dans un urne Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions "Gagné" ou "Perdu". 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.

On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'événement "La boule tirée est rouge" et G "La boule tirée est gagnante".
On peut schématiser cette expérience par l'arbre pondéré :



La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = \mathbb{P}(R \cap G)$.
Sur l'arbre, on retrouve bien $0,4 \times 0,75 = 0,3$.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est $\frac{15+9}{50} = 0,48$.
Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité $0,3$ et le chemin $\overline{R} \cap G$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$.
On retrouve aussi :

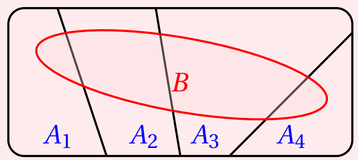
$$\mathbb{P}(R \cap G) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48 = \mathbb{P}(G)$$

.

Théorème | Formule des probabilités totales

Pour une partition de l'univers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et pour tout événement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$

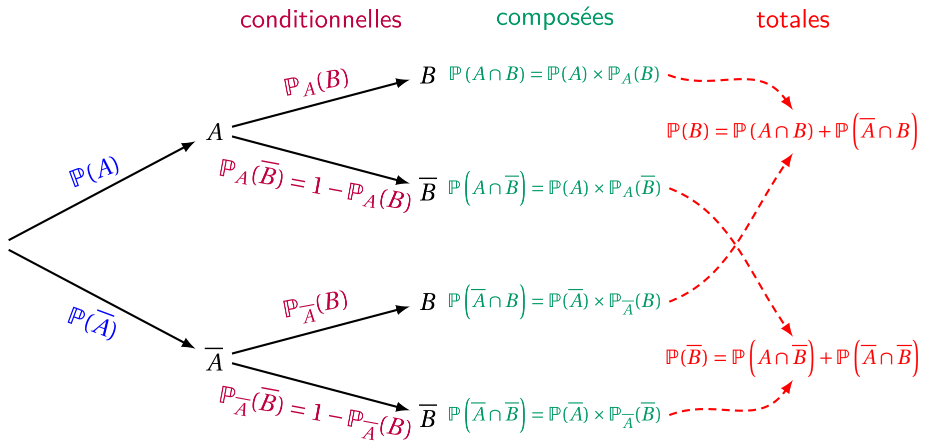


En particulier, pour tout événements A et B :

$$\mathbb{P}(B) = P(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$$

Remarque Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :

- des conditionnelles ;
- les composées ;
- les totales.



2 Indépendance

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.
On dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Propriété

On a de façon équivalente :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

Exemple On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle C l'événement "Obtenir un cœur" et D "Obtenir une dame". $C \cap D$ est alors "Obtenir la dame de cœur".

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{32}$ et $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$ donc C et D sont indépendants.

  On a aussi $\mathbb{P}_C(D) = \mathbb{P}(D)$, c'est-à-dire que la probabilité d'obtenir une dame parmi les cœurs est la même que celle d'obtenir une dame parmi toutes les cartes : $\frac{1}{8}$.

Maintenant, si on rajoute deux jokers dans le jeu :

- $\mathbb{P}(C) = \frac{8}{34}$ et $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et $\mathbb{P}(C \cap D) = \frac{1}{34}$ et $\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D) = \frac{8 \times 4}{34 \times 34} \neq \mathbb{P}(C \cap D)$ donc C et D pas indépendants.

  De même, $\mathbb{P}_C(D) = \frac{1}{8}$ mais $\mathbb{P}(D) = \frac{4}{34}$ et ces probabilités ne sont plus égales.

3 Renversement du conditionnement

Théorème | Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration. Provient de la formule $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$. □

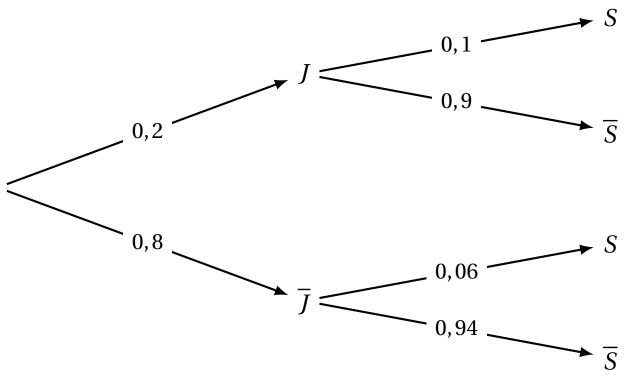
Corollaire | Conséquence sur une partition

Pour une partition de l'univers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et pour tout événement B de probabilité non nulle, on a :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad \mathbb{P}_{A_i}(B) &= \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_B(A_i)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)} \end{aligned}$$

Démonstration. Conséquence de la formule des probabilités totales et de la formule de Bayes. □

Exemple 20% des assurés d'une compagnie d'assurance sont des jeunes conducteurs (J), les autres étant des conducteurs expérimentés. Une étude statistique indique que la probabilité qu'un assuré jeune conducteur ait un sinistre responsable (S) au cours de l'année est de $0,1$ contre $0,06$ pour les assurés expérimentés.



La probabilité qu'un assuré ayant eu un sinistre au cours de l'année soit un jeune conducteur est :

$$\mathbb{P}_S(J) = \frac{\mathbb{P}\,(J \cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(J) \times \mathbb{P}_J(S)}{\mathbb{P}(S)}.$$

Or, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S) &= \mathbb{P}(J \cap S) + \mathbb{P}(\overline{J} \cap S) \\ &= \mathbb{P}(J) \times \mathbb{P}_J(S) + \mathbb{P}(\overline{J}) \times \mathbb{P}_{\overline{J}}(S). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_S(J) &= \frac{\mathbb{P}(J) \times \mathbb{P}_J(S)}{\mathbb{P}(J) \times \mathbb{P}_J(S) + \mathbb{P}(\overline{J}) \times \mathbb{P}_{\overline{J}}(S)} && (1) \\ &= \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,06} && (2) \\ &\approx 0,29. && (3) \end{aligned}$$

