

8

INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

Résumé

Ce chapitre est la suite logique du chapitre sur le calcul littéral : après avoir étudié l'égalité, étudions l'inégalité.

1 Propriétés des inégalités

Propriété | Ordre dans \mathbb{R}

Si a, b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Propriétés | Somme

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

$$\triangleright a < x \Leftrightarrow a + b < x + b \quad \triangleright a < x \Leftrightarrow a - b < x - b$$

$$\triangleright \text{Si } a < x \text{ et } b < y, \text{ alors } a + b < x + y.$$

Remarque Ces propriétés sont analogues à celles connues pour les égalités.

Propriétés | Produit

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\triangleright \text{Si } b > 0, \text{ alors } a < x \Leftrightarrow ba < bx \quad \triangleright \text{Si } b < 0, \text{ alors } a < x \Leftrightarrow ba > bx$$

⚠ Attention

Quand on multiplie (ou divise) une inégalité par un nombre négatif, le sens de l'inégalité est inversé!

Remarque On a plusieurs conséquences du résultat précédent.

$$\triangleright 0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$\triangleright \text{Si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } a, b \in \mathbb{R}_+, \text{ alors } a \leq b \Leftrightarrow a^n \leq b^n.$$

Exercice

$$1. \text{ Comparer } 2^{10000} \text{ et } 3^{1000}$$

$$2. \text{ Démontrer que pour tout } p \text{ positif, on a :}$$

$$\sqrt{p} \leq \frac{p+1}{2}.$$

2 Valeur absolue

Définition | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ la **valeur absolue** de x comme suit :

$$\triangleright \text{Si } x > 0, \text{ alors } |x| = x$$

$$\triangleright \text{Si } x < 0, \text{ alors } |x| = -x$$

$$\textbf{Exemples} \quad \triangleright |5| = 5$$

$$\triangleright |-2,5| = -(-2,5) = 2,5$$

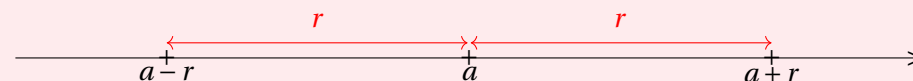
Remarques \triangleright Une valeur absolue est toujours positive.

$$\triangleright \text{Soit } x \in \mathbb{R}, \text{ alors } \sqrt{x^2} = |x|$$

Propriété

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$$



Exercice

Représenter les inégalités suivantes sur un axe gradué et donner l'ensemble solution sous forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles :

- | | | |
|------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1. $ x - 2 < 5$ | 3. $ x - 1,5 \leq 0,5$ | 5. $ x - 8 + 4 \leq 6$ |
| 2. $ x + 1 < 4$ | 4. $ x + 3 \geq 1$ | 6. $ x - 4 - 5 \leq 2$ |

3 Encadrements de réels et arrondis

Propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$.

Cet encadrement est l'**encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

- L'**arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\frac{a}{10^n}$ ou $\frac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x .

Exemple On a :

$$\frac{16812}{10^3} \leq 16,8127 < \frac{16813}{10^3}$$

donc l'**encadrement** de 16,8127 à 10^{-3} près est $16,812 \leq 16,8127 < 16,813$ et l'**arrondi** de 16,8127 à 10^{-3} près est 16,813.

4 Inéquations

Définition | Inéquations

Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.

Résoudre dans \mathbb{R} une inéquation d'inconnue x , c'est trouver l'ensemble de ses **solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples ►

$$3x + 2 > 7$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2 - 2 > 7 - 2$$

$$\Leftrightarrow 3x > 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} > \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$$

L'ensemble des solutions de $3x + 2 > 7$ dans \mathbb{R} est $\mathcal{S} = \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$.

►

$$-x + 9 \geq -2$$

$$\Leftrightarrow -x + 9 - 9 \geq -2 - 9$$

$$\Leftrightarrow -x \geq -11$$

$$\Leftrightarrow (-1) \times (-x) \leq (-1) \times (-11)$$

Notons bien que l'inégalité **a changé de sens** puisque nous avons multiplié par un nombre **négatif**.

Finalement, $-x + 9 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq 11$.

L'ensemble des solutions de $-x + 9 \geq -2$ dans \mathbb{R} est $\mathcal{S} =]-\infty; 11[$.

Exercice

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| 1. $4x - 7 < 0$ | 3. $5x - 8 > -3 + 8$ |
| 2. $x \leq 10$ | 4. $11 \geq 4 - 2,5x$ |

5 Inéquations produits

Propriété | Signe d'un produit

On donne la règle des signes d'un produit $A(x) \times B(x)$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Signe de A	+	+	-	-
Signe de B	+	-	+	-
Signe de $A \times B$	+	-	-	+

Exemple La règle des signes d'un produit nous permet de résoudre certaines inéquations dites produits.

Résolvons, par exemple, l'inéquation produit $(2x + 4)(x - 1) < 0$.

Nous construisons dans un premier temps le tableau de signe de toutes les expressions en jeu, y compris le produit à partir des lignes précédentes.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$2x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$(2x + 4)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il ne reste qu'à lire dans quels ensembles l'expression $(2x + 4)(x - 1)$ est strictement négative.

$$(2x + 4)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2; 1[$$

Remarque Le tableau de signe précédent nous permet même de résoudre trois autres inéquations produits : $(2x + 4)(x - 1) > 0$, $(2x + 4)(x - 1) \leq 0$ et $(2x + 4)(x - 1) \geq 0$. Ainsi,

$$(2x + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[.$$

Exercice

Résoudre dans \mathbf{R} les inéquations suivantes.

- $(2 - x)(x + 7) < 0$
- $(2x + 4)(1 - 5x) \geq 0$
- $(2 + x)(8x - 2) < (2 + x)(x + 1)$
- $(9x - 4)(5x + 2)(-3 - 6x) > 0$
- $16x^2 - 16x + 4 \leq 0$

6 Inéquations quotients

Propriété | Signe d'un quotient

On donne la règle des signes d'un quotient $\frac{A(x)}{B(x)}$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Signe de A	+	+	-	-
Signe de B ($B \neq 0$)	+	-	+	-
Signe de $\frac{A}{B}$	+	-	-	+

Remarque Dans le cas général, il faut exclure les **valeurs interdites** : les x tels que $B(x) = 0$.

Exemple Résolvons $\frac{5x+40}{-3x+1} \geq 0$ et $\frac{5x+40}{-3x+1} < 0$.

Nous avons besoin, à nouveau, d'un tableau de signes.

x	$-\infty$	-8	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$5x+40$	$-$	0	$+$	$+$
$-3x+1$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{5x+40}{-3x+1}$	$-$	0	$+$	$-$

On peut enfin résoudre $\frac{5x+40}{-3x+1} \geq 0$. L'ensemble des solutions réelles de $\frac{5x+40}{-3x+1} \geq 0$ est $\left[-8; \frac{1}{3}\right]$.

Pour $\frac{5x+40}{-3x+1} < 0$, on consulte encore le tableau de signes et l'ensemble des solutions réelles est $] -\infty; -8[\cup \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$.

Remarque La double barre dans le tableau de signes signifie que la valeur est **interdite**. Elle est donc à **exclure** des solutions comme pour la résolution d'équations quotients.

Exercice

Résoudre dans \mathbf{R} les équations quotients suivantes.

1. $\frac{2x+4}{3-7x} > 0$

2. $\frac{(3-x)(5x+3)}{2x-1} \geq 0$

3. $\frac{6x+2}{2x} < 0$

4. $\frac{x^2+2x+1}{2x-7} \leq 0$

5. $\frac{11x+12}{81x^2-64} < 0$

6. $\frac{1}{6-x} > 5$