

5

Second degré, étude du signe

Résumé

Précédemment, nous avons étudié algébriquement les polynômes du second degré et particulièrement leur factorisation à partir de la recherche de racines. Nous nous intéressons ici au signe de ces expressions ainsi qu'à la résolution d'inéquations de degré 2 qui nous sont facilement accessibles maintenant.

1 Signe d'une fonction du second degré

Théorème

Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est du signe de a , sauf entre les racines quand elles existent.

Démonstration. Soit f une fonction du second degré, définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

1^{er} cas $\Delta < 0$: On sait que le polynôme possède deux racines x_1 et x_2 et qu'on peut le factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	signe de a			
$x - x_1$	$-$	0	$+$	
$x - x_2$		$-$	0	$+$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0 signe de a

2^e cas $\Delta = 0$: f possède une unique racine α donc on peut factoriser sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2$. Le signe de f peut alors aussi être déterminé grâce à la règle des signes.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
a	signe de a		
$x - \alpha$	—	0	+
$x - \alpha$	—	0	+
produit $f(x)$	signe de a	0	signe de a

3^e cas $\Delta < 0$: Pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La courbe de la fonction ne coupe jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe, celui de a .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Remarque En pratique, il suffit de connaître les éventuelles racines du polynôme et de regarder le signe de a pour visualiser la parabole et donc obtenir le tableau de signes. En effet, si a est strictement positif, la parabole est ouverte (fermée sinon).

2 Résolution d'inéquations du second degré

On souhaite des inéquations du type $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Méthode

Pour résoudre des inéquations de ce type, il suffit de construire le tableau de signes sur \mathbb{R} de l'expression $ax^2 + bx + c$. Faisons le pour $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$ et $-2x^2 + 4x + 6 < 0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64$

Le discriminant est strictement positif donc il y a deux racines distinctes qui sont -1 et 3 .

Le tableau de signes est immédiat car $a = -7 < 0$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-2x^2+4x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

On peut conclure :

$$-2x^2 + 4x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 3]$$

et

$$-2x^2 + 4x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

3 Position relative de deux courbes

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I .

Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , les courbes respectives de f et g , c'est dire laquelle est graphiquement au dessus de l'autre sur I .

Propriété

\mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$.

Remarque Pour comparer les deux courbes, il suffit d'étudier le signe de $f - g$.

Exemple Soient f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x^2 + 12x - 8$ et $g(x) = 8x - 14$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (-2x^2 + 12x - 8) - (8x - 14) = -2x^2 + 4x + 6$.

À l'aide du tableau de signes établi précédemment, on va pouvoir conclure.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$-2x^2+4x+6$	$-$	0	$+$	0	$-$

Sur $[-1; 3]$, \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g mais sur $]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$, c'est l'inverse : \mathcal{C}_g est au dessus de \mathcal{C}_f .

Nous le vérifions graphiquement pour terminer.

