7

Fonctions affines

Résumé

Vues plus ou moins rapidement en troisième, les fonctions affines sont les fonctions les plus simples à étudier. Leurs courbes représentatives sont simples : des droites ; mais pourtant les applications de propriétés des fonctions affines sont diverses : résolutions rapides d'inéquations produits ou quotients, étude du signe de fonctions plus avancées ou résolutions d'équations dans le plan.

1 Notion de fonction

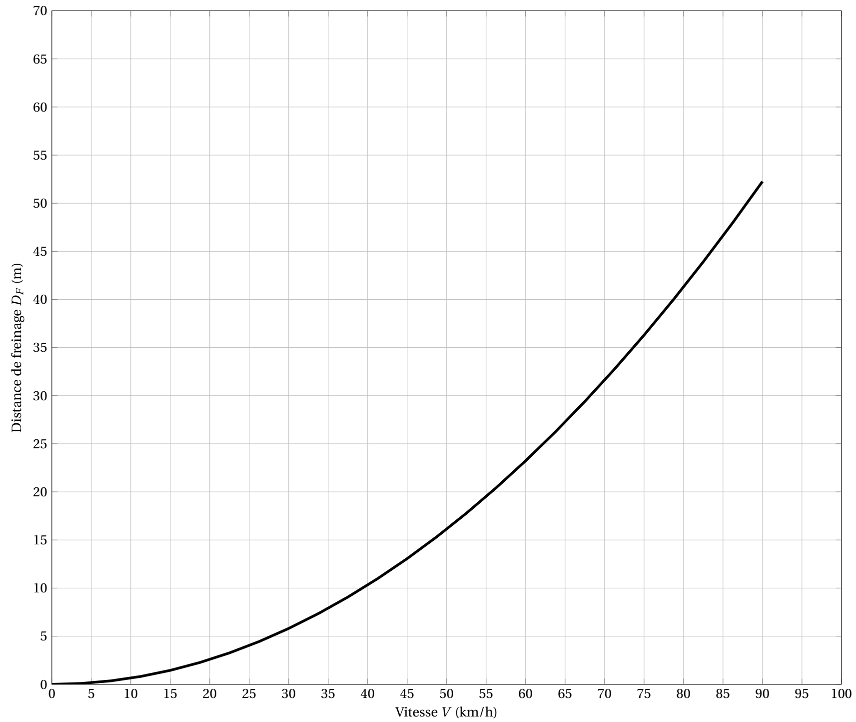
Deux grandeurs peuvent varier tout en étant liées (distance et vitesse, température et temps, aire et longueur,...). Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique. Dans certains cas, on peut modéliser ce lien par une fonction.

Définitions | Rappels

- On définit une fonction numérique f sur un ensemble de nombres $\mathscr{D}$ en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un **unique** nombre y.
- On dit f est une **fonction** de la **variable** x et on note souvent : $f : x \mapsto y$
- y est appelé l'**image** de x par f et x est l'**antécédent** de y par f.
- $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de f.

Exemple Dans l'activité d'introduction, nous avons défini la fonction distance de freinage f. Sa courbe représentative est donnée ci-contre sur l'intervalle $[0;90]$.

$$f : V \mapsto \frac{V^2}{155}$$



L'image de 50 par f est : $f(50) = \dfrac{50^2}{155} = 16{,}13$. Un antécédent de 16,3 par f est 50.

On dira que la fonction f est croissante sur $[0;90]$ (lorsque la vitesse du véhicule augmente entre 0 et 90 km/h, la distance de freinage augmente).
On peut aussi donner un tableau de valeurs (arrondies au dixième) :

V	0	30	80	90
$f(V)$	0	5,8	42,3	52,3

2 Fonctions affines

Il existe des fonctions représentées par des droites (la fonction distance de réaction) et des fonctions qui ne sont pas représentées par des droites (la fonction distance de freinage).

Définition | Fonctions affines

Les fonctions représentées par des droites sont appelées les fonctions affines. Ce sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ dont lexpression est de la forme $f(x) = ax+b$ avec a et b deux nombres réels.

Exemple La fonction distance de réaction est affine car elle est sous la forme $f(x) = ax+b$ avec $a = \dfrac{1}{3{,}6}$ et $b = 0$.

Exercice

Parmi les fonctions suivantes, dire celles qui sont affines et donner alors a et b.

1. $g : x \mapsto 3x-2$ **2.** $h : x \mapsto 3x^2-2$ **3.** $f : x \mapsto \dfrac{1-2x}{3}$

Remarques

- Si $a = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = b$. La fonction est **constante**.
- Si $b = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = ax$. La fonction est **linéaire**. Les fonctions linéaires sont les seules fonctions dont le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité.

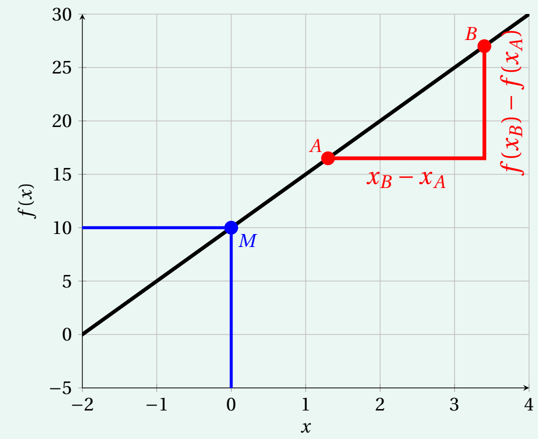
Propriétés

- Dans un repère du plan, la fonction affine définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = ax+b$ est représentée par une droite d.
- d passe par le point $M(0, b)$.
- Pour deux points distincts A et B de d, on a :

$$a = \frac{f(x_B)-f(x_A)}{x_B-x_A} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Définitions

Si $f(x) = ax+b$, alors a est le **coefficient directeur** de la droite représentative de f (aussi appelé **pente**), et b est l'**ordonnée à l'origine**.



Exemple On peut déterminer la pente a et l'ordonnée à l'origine b d'une fonction affine à l'aide de quelques valeurs seulement.

Soit f une fonction affine telle que $f(-1) = -4$ et $f(3) = 8$. f peut s'écrire sous la forme $f : x \mapsto ax+b$. On cherche d'abord a.

$$a = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{8-(-4)}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Pour calculer b, on remplace a par sa valeur dans l'égalité $f(3) = 8$:

$$f(3) = 8 \Longleftrightarrow 3\times3+b = 8 \Longleftrightarrow b = 8-9 = -1$$

Ainsi, $f : x \mapsto 3x-1$.

3 Signe et variation d'une fonction affine

Propriété | Variations d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f : x \mapsto ax+b$.

- Si $a>0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a=0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a<0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples $f : x \mapsto 10x-2$ est croissante sur $\mathbb{R}$ mais $g : x \mapsto -x+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple Donnons le **tableau de variations** de $f : x \mapsto -2x+3$ sur $[-5;5]$.

x	-5		5
$f(x)$	13	$\searrow$	-7

Définitions | Positivité et négativité

On dit qu'une fonction f est **positive** sur un ensemble $\mathscr{D}$ si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant 0$ et que f est **négative** sur $\mathscr{D}$ si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant 0$.

Remarque Étudier le signe d'une fonction revient à déterminer sur quels ensembles elle est positive ou ceux sur lesquels elle est négative. Nous résumons usuellement cette étude dans un **tableau de signes**.

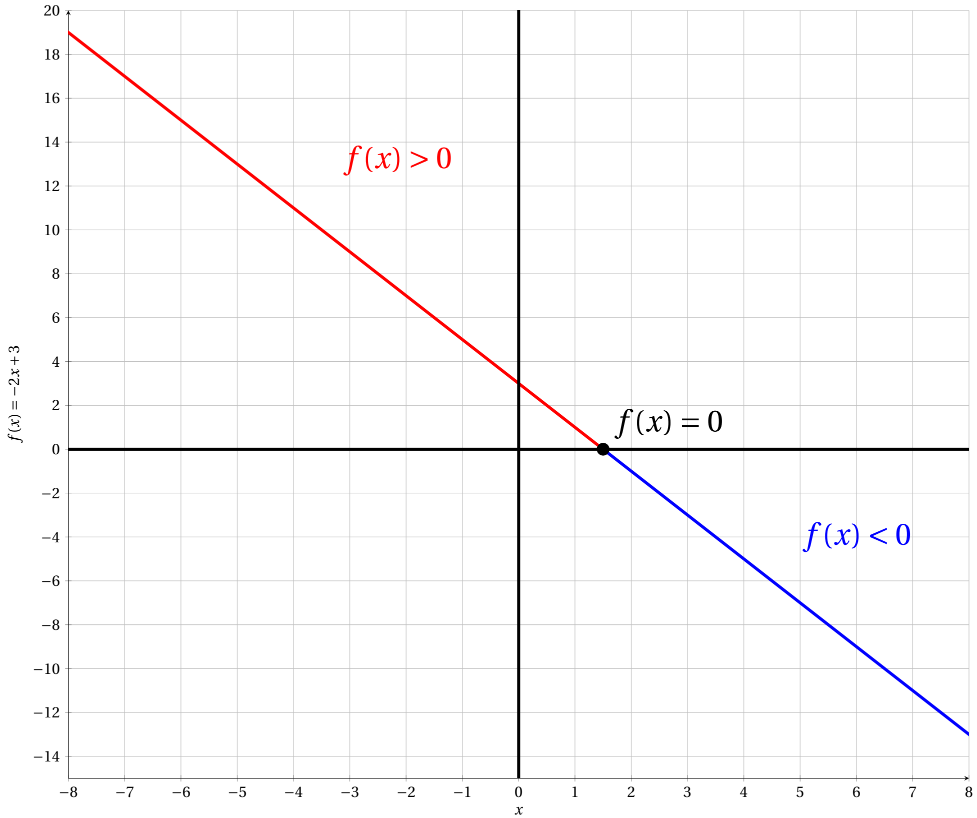
Exemple Donnons le **tableau de signes** de $f : x \mapsto -2x+3$ sur $\mathbb{R}$. Nous savons déjà qu'elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $-2<0$ et nous avons vu son tableau de variations sur $[-5;5]$. Nous avons besoin de savoir quand est-ce que f s'annule. Il faut donc résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.

$$f(x)=0 \iff -2x+3=0 \iff x=\frac{3}{2}$$

f ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, en $\frac{3}{2}$, donc elle est de signe constant sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ (celui de $f(-5)=13$) et sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ (celui de $f(5)=-7$).

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

C'est cohérent avec la représentation graphique de f.



Théorème | Signe d'une fonction affine

Le signe de $f : x \mapsto ax+b$ ($a \neq 0$) dépend du signe de a et change en $-\dfrac{b}{a}$, unique solution de $ax+b=0$. Donnons les tableaux de signes associés :

- Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Démonstration. Faisons la preuve pour $a>0$. Elle est similaire pour $a<0$.

$$\begin{aligned} f(x)>0 &\iff ax+b>0 \\ &\iff ax>-b \\ &\iff x>-\frac{b}{a} \\ &\iff x \in \left]-\frac{b}{a};+\infty\right[\end{aligned}$$

On a ainsi que f est strictement positive sur $\left]-\dfrac{b}{a};+\infty\right[$ et strictement négative sur $\left]-\infty;-\dfrac{b}{a}\right[$ □

Exercice

Construire les tableaux de signes des fonctions affines suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 20x-7$ **2.** $f_2 : x \mapsto \dfrac{x+8}{3}$ **3.** $f_3 : x \mapsto \sqrt{2}x-\pi$

4 Inéquations produits

Propriété | Signe d'un produit

On donne la règle des signes d'un produit $A(x) \times B(x)$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.

Signe de A	$+$	$+$	$-$	$-$
Signe de B	$+$	$-$	$+$	$-$
Signe de $A \times B$	$+$	$-$	$-$	$+$

Exemple La règle des signes d'un produit nous permet de résoudre certaines inéquations dites produits.
Résolvons, par exemple, l'inéquation produit $(2x+4)(x-1)<0$.
Nous construisons dans un premier temps le tableau de signes de toutes les expressions en jeu.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il ne reste qu'à lire dans quels ensembles l'expression $(2x+4)(x-1)$ est strictement négative (symbolisé par le symbole $-$).

$$(2x+4)(x-1)<0 \iff x \in]-2;1[$$

Le tableau de signes précédent nous permet même de résoudre trois autres inéquations produits : $(2x+4)(x-1)>0$, $(2x+4)(x-1) \leqslant 0$ et $(2x+4)(x-1) \geqslant 0$.
Pour $(2x+4)(x-1) \geqslant 0$, les symboles qui nous intéressent sont $+$ et 0. Ainsi,

$$(2x+4)(x-1) \geqslant 0 \iff x \in]-\infty;-2] \cup [1;+\infty[.$$

5 Inéquations quotients

Propriété | Signe d'un quotient

On donne la règle des signes d'un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ avec $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques. Il faudra faire attention aux **valeurs interdites** (x tels que $B(x)=0$).

Signe de A	$+$	$+$	$-$	$-$
Signe de B ($B \neq 0$)	$+$	$-$	$+$	$-$
Signe de $\dfrac{A}{B}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Exemple Nous pouvons maintenant résoudre certaines inéquations quotients.
Occupons-nous de $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$ et $\dfrac{5x+40}{-3x+1} < 0$.
Nous avons besoin, à nouveau, d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		-8		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$5x+40$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{5x+40}{-3x+1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

On peut enfin résoudre $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$. L'ensemble des solutions réelles de $\dfrac{5x+40}{-3x+1} \geqslant 0$ est $\left[-8;\dfrac{1}{3}\right[$.
Pour $\dfrac{5x+40}{-3x+1} < 0$, on consulte encore le tableau de signes et l'ensemble des solutions réelles est $\left]-\infty;-8\right[\cup \left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

Remarque La double barre dans le tableau de signes signifie que la valeur est **interdite**. Elle est donc à **exclure** des solutions comme pour la résolution d'équations quotients.