CORRIGÉ DU DEUXIÈME DEVOIR COMMUN

EXERCICE 1

1. **a.** Le coût de fabrication de 25 m^3 de ce produit est égal à $C(25)$ euros.

$$\begin{aligned} C(25) &= 2 \times 25^2 + 10 \times 25 + 800 \\ &= 2300 \end{aligned}$$

b. En ramenant le coût à l'unité, le m^3 revient à $\dfrac{2300}{25} = 92$ euros.

2. Soit $x \in [1;30]$.

$$\begin{aligned} C'_M(x) &= 2 + 0 - \frac{800}{x^2} \\ &= \frac{2x^2}{x^2} - \frac{800}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 - 800}{x^2} \end{aligned}$$

3. Factorisons, pour commencer, le polynôme $2x^2 - 800$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 800 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 400 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 20 \text{ ou } x = -20 \end{aligned}$$

Les racines de $2x^2 - 800$ sont 20 et -20 et son coefficient dominant est 2.
C'est-à-dire, $2x^2 - 800 = 2(x - 20)(x + 20)$ et on a son tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-20		20		$+\infty$
$2x^2 - 800$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut désormais construire le tableau de signes et de variations de C'_M sur $[1;30]$.

x	1		20		30
$2x^2 - 800$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

4. La quantité à fabriquée pour minimiser le coût moyen est, d'après le tableau de variations de C_M, $20m^3$, pour un coût moyen de $C_M(20) = 90$ euros.

EXERCICE 2

1. Soit $x \neq 1$. On dérive un quotient et ainsi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-2x+2)(x-1)-1(-x^2+2x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2+2x+2x-2+x^2-2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

2. Cherchons les racines de $-x^2+2x-2$ pour connaître son signe.

Son discriminant Δ est égal à $2^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = -4$ donc pas de racines !

On peut conclure en donnant tableau de signes et de variations.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x^2+2x-2$		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3. (T_2) a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. Après application numérique, $f(2) = 0$ et $f'(2) = -2$.

Ainsi, $(T_2) : y = -2x + 4$.

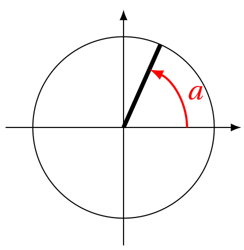
4. (T_0) admet comme coefficient directeur $f'(0)$. Après calcul, $f'(0) = -2$.

(T_0) et (T_2) ont le même coefficient directeur donc sont parallèles.

EXERCICE 3

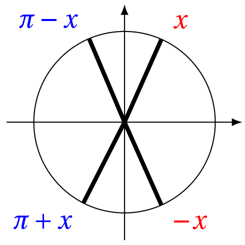
1. Seules les réponses correctes seront indiquées.

a. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\cos(a) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, alors :



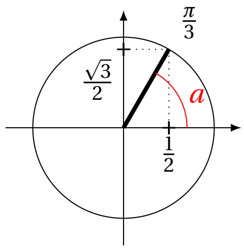
- $\cos(-a) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$
- $\cos(\pi - a) = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. La somme $\sin(-x) - \sin(\pi - x) + \sin(x) + \sin(x + \pi)$ est égale à :



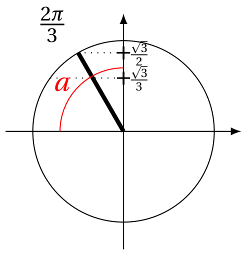
- $\sin(-x) - \sin(\pi - x) + \sin(x) + \sin(x+\pi)$
  $= -\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) - \sin(x)$
  $= -2\sin(x)$

c. Soit $a \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, alors:



- $\cos(a) \geq \frac{1}{2}$
- $\sin(a) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(-a) \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Soit $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ tel que $\sin(a) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, alors:

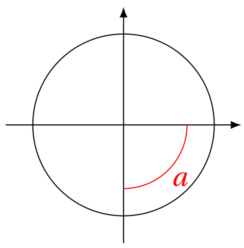


- $\cos(a) < 0$

e. Les nombres réels $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{23\pi}{6}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

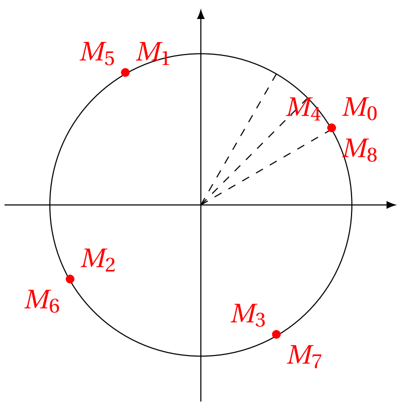
- C'est faux. $\dfrac{23\pi}{6} = \dfrac{24\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = 4\pi - \dfrac{\pi}{6}$.

f. Si $\cos(x) > 0$ et si $\sin(x) < 0$ alors x peut appartenir à l'intervalle :



- $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ et plus précisément, $\left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ convient aussi.

2. **a.** Appelons M_k le point associé au réel $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.



b. Il est possible de placer seulement quatre points distincts, y compris si on considère $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4

1. Par la relation de récurrence définissant (a_n), on a :

$$a_1 = a_{0+1} = \frac{2a_0 + b_0}{3} = \frac{2 \times 2 + 10}{3} = \frac{14}{3}.$$

De même,

$$b_1 = b_{0+1} = \frac{a_0 + 3b_0}{4} = \frac{2 + 3 \times 10}{4} = \frac{32}{4} = 8.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - a_{n+1} &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{3a_n + 9b_n}{12} - \frac{8a_n + 4b_n}{12} \\ &= \frac{5b_n - 5a_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(b_n - a_n) \end{aligned}$$

3. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (b_{n+1} - a_{n+1}) - (b_n - a_n) \\ &= \frac{5}{12}(b_n - a_n) - (b_n - a_n) \text{ d'après la question 2} \\ &= \left(\frac{5}{12} - 1\right)(b_n - a_n) \\ &= -\frac{7}{12}(b_n - a_n) \end{aligned}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= -\frac{7}{12}(b_n - a_n) \\ &= -\frac{7}{12} w_n \end{aligned}$$

Ainsi, $w_{n+1} = w_n - \frac{7}{12} w_n = \frac{5}{12} w_n$.

c. La suite (w_n) vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 3. b., la relation de récurrence $w_{n+1} = \frac{5}{12} w_n$.
C'est la définition d'une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$.
Enfin, son premier terme est $w_0 = b_0 - a_0 = 10 - 2 = 8$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = w_0 q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n$, d'après la question précédente, est un produit de $n+1$ termes strictement positifs donc $w_n > 0$.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & w_n > 0 \\ \Leftrightarrow & b_n - a_n > 0 \\ \Leftrightarrow & b_n > a_n \end{aligned}$$

En particulier, on a bien $a_n \leq b_n$.

4. **a.**

- (a_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n \\ &= \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} \\ &= \frac{b_n - a_n}{3} \\ &\geq 0 \text{ d'après la question 3. f.} \end{aligned}$$

- (b_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n \leq 0$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n \\ &= \frac{a_n + 3b_n - 4b_n}{4} \\ &= \frac{a_n - b_n}{4} \\ &\leq 0 \text{ d'après la question 3. f.} \end{aligned}$$

b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par décroissance $b_n \leq b_0$ et par croissance $a_n \geq a_0$, c'est-à-dire, $b_n \leq 10$ et $a_n \geq 2$.
La question 4. f. nous dit de plus que $a_n \leq b_n$.
Ainsi,

- $b_n \geq a_n \geq 2$ donc $b_n \geq 2$;
- $a_n \leq b_n \leq 10$ donc $a_n \leq 10$.

c. En rentrant les suites dans la calculatrice, on peut afficher des tableaux de valeurs pour (a_n) et (b_n) et il semble que, à 10^{-4} près :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \simeq 6,5714$$
$$\lim_{n \to +\infty} b_n \simeq 6,5714.$$