1

Suites arithmétiques

Résumé

Nous étudions un objet mathématique au fonctionnement très intuitif : la suite numérique, c'est-à-dire une suite de nombres. Nous nous restreindrons d'abord au cas arithmétique, plus simple, pour donner des premières propriétés et étudier différentes représentations.

1 Généralités

Définition 1

Une **suite numérique** est une liste (infinie) de nombres, appelés **termes**, qui sont ordonnés et numérotés.
Le premier terme d'une suite u se note u_0, le suivant u_1, ... et plus généralement, le terme de rang n , appelé aussi **terme d'indice** n, se note u_n.
L'ensemble de tous ces termes, qui constitue la suite, est noté u, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou plus souvent (u_n).

Exemple 2 On peut définir une suite explicitement comme la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^4 - \dfrac{2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Dans ce cas, le premier terme u_0 est égal à $3 \times 0^4 - \dfrac{2}{0+1}$, c'est-à-dire, $u_0 = -2$.
De même :

$$u_1 = 3 \times 1^4 - \frac{2}{1+1} = 3 - \frac{2}{2} = 2. \tag{1}$$

2 Relation de récurrence

Définition 3

Une **suite arithmétique** est une suite telle qu'il existe un nombre r, appelé **raison** qui vérifie :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 4 On appelle cette relation une **relation de récurrence** et elle permet de déterminer tous les termes de la suite à partir d'un seul.

Exemples 5

- Les deux suites suivantes sont arithmétiques, respectivement de raison de 2,3 et -1 :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = u_n + 2{,}3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier $u_0 = -5$.

  Alors, $u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$. De même, $u_2 = u_1 + 3 = 1$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 4$, $u_4 = 7$, $u_5 = 10$, ...

Attention

Si on veut prouver qu'une suite numérique est arithmétique, il faut veiller à démontrer la relation de récurrence pour **tous** les indices de la suite ! Le calcul des premiers termes ne peut suffire.

3 Forme explicite et représentation graphique

Propriété 6

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0$$

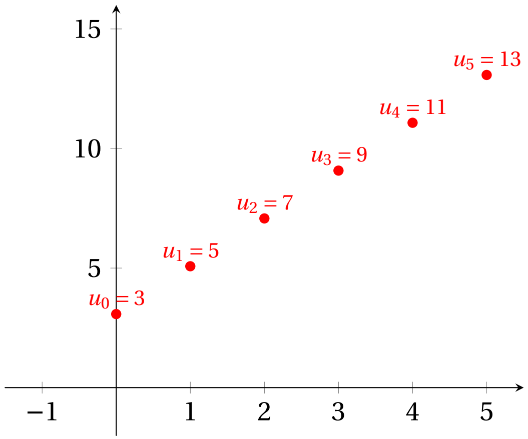
Attention

Cette écriture est, et doit être, valable pour **tous les termes** de la suite.

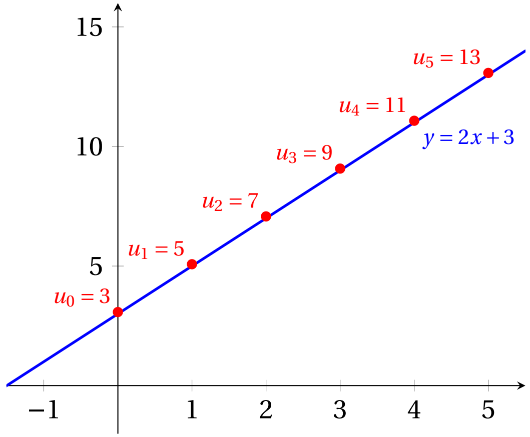
Remarques 7 ▶ C'est une écriture explicite de cette suite arithmétique. Elle permet de déterminer très facilement tous les termes de la suite.

▶ On peut avoir envie de représenter graphiquement une suite numérique de la même manière que l'on trace les courbes représentatives de fonctions. Cette fois-ci, pas de courbe mais un nuage de points puisque nous indexons sur des entiers naturels. Le nuage de points est constitué de l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

Exemple 8 Représentons la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme 3.



La forme explicite de (u_n) est : $u_n = 2n+3$ si $n \in \mathbf{N}$. Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de (u_n) et de la fonction affine f d'expression $f(x) = 2x+3$ si $x \in \mathbf{R}$ coïncident sur $\mathbf{N}$.



Définitions 9

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

▶ (u_n) est **strictement croissante** si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p < u_q$.

▶ (u_n) est **constante** si $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

▶ (u_n) est **strictement décroissante** si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p > u_q$.

Théorème 10 | Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

▶ (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.

▶ (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.

▶ (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

Démonstration. Donnons le premier cas : les autres sont similaires.
(u_n) est strictement croissante si pour tout $0 \leqslant p < q$, on a $u_p < u_q$.
Prenons deux entiers naturels quelconques p et q tels que $p < q$. Ainsi, on a :

$$u_p = rp + u_0 \qquad \text{et} \qquad u_q = rq + u_0$$

d'où, en soustrayant les deux équations membre à membre, de manière équivalente :

$$u_p - u_q = r(p-q)$$

$p - q < 0$ et donc $r > 0 \Leftrightarrow u_p - u_q < 0 \Leftrightarrow u_p < u_q$. □