Devoir surveillé n°1

Exercice 1 | 2 points

1. Donner l'expression générale de la forme canonique d'un polynôme du second degré.
2. Soient $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$. Donner les relations coefficients/racines (somme et produits des racines en fonction des coefficients de f).

Correction

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
2. En notant x_1 et x_2 les racines de f (éventuellement confondues), on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Exercice 2 | 4 points

1. Écrire sous forme canonique les polynômes du second degré suivants :

   a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ **b)** $g(x) = x^2 + 8x - 4$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, à partir de la question précédente, les équations $f(x) = -4$ et $g(x) = -4$.

Correction

1. **a)** $f(x) = (x-3)^2 - 4$
   b) $g(x) = (x+4)^2 - 20$
2.

$$\begin{aligned} & f(x) = -4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)^2 - 4 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g(x) = -4 \\ \Leftrightarrow\ & (x+4)^2 - 20 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & (x+4)^2 = 16 \\ \Leftrightarrow\ & x + 4 = 4 \text{ ou } x + 4 = -4 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ ou } x = -8 \end{aligned}$$

Exercice 3 | 4 points

Déterminer sous forme factorisée et développée réduite la fonction polynôme du second degré f vérifiant les conditions suivantes.

1. Ses racines sont -2 et 5, $f(-1) = -36$.

2. Ses racines sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, $f(0) = 2$.

Correction

Pour les deux questions, f est de la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $a \neq 0$ et x_1, x_2 sont les racines de f.

1. $f(x) = a(x+2)(x-5)$ mais comme $f(-1) = 36$, alors $a(-1+2)(-1-5) = 36$.
On a donc $a = -6$ et $f(x) = -6(x+2)(x-5) = -6x^2 + 18x + 60$.

2. $f(x) = a(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ mais comme $f(0) = 2$, alors $-a\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$.
On a donc $a = -1$ et $f(x) = -(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = -x^2 + 2$.

Exercice 4 | 10 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $10x^2 - 17x + 3 = 0$

2. $2x^2 - 3x + 10 = 0$

3. $x^2 - x - 9 = x + 2$

4. $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

5. $2x^4 + 7x^2 = 15$

6. $x^8 - 2x^4 + 1 = 0$

Correction

1. On calcule pour commencer le discriminant Δ de f avec $f(x) = 10x^2 - 17x + 3$. Les racines réelles de f seront les solutions réelles de $10x^2 - 17x + 3 = 0$.

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \times 10 \times 3 = 289 - 120 = 169$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-(-17) + \sqrt{24}}{2 \times 10} = \frac{17+13}{20} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-(-17) - \sqrt{24}}{2 \times 10} = \frac{17-13}{20} = \frac{1}{5}$$

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 10$ et son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 10 = -71$
$\Delta < 0$ donc il n'y aucune solution réelle à $2x^2 - 3x + 10 = 0$.

3. $x^2 - x - 9 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0$ donc on pose $f(x) = x^2 - 2x - 11$.
$\Delta = 48 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{48}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$ et $x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$.

4. $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ est une équation bicarrée. Posons $X = x^2$, $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$ se réécrit en $4X^2 - 13X + 3 = 0$ qu'on peut résoudre.
Soit $f(X) = 4X^2 - 13X + 3$.
On détermine ses racines réelles grâce au discriminant et on trouve deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1}{4}$ et $X_2 = 3$.
Ainsi, il y a quatre solutions réelles à $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$: les solutions réelles des équations $x^2 = \dfrac{1}{4}$ et $x^2 = 3$.
C'est-à-dire,

$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}.$$

5. $2x^4 + 7x^2 = 15 \Leftrightarrow 2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$ est une équation bicarrée qu'on résout de la même manière que la précédente.
$2X^2 + 7X - 15 = 0$ admet pour solutions réelles $\dfrac{3}{2}$ et -5.

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$$

6. Pour $x^8 - 2x^4 + 1 = 0$, on va faire deux changements de variables. Posons $X = x^2$.
Ainsi, nous devons résoudre $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ qui est une équation bicarrée. Posons maintenant, $Y = X^2$.
$X^4 - 2X^2 + 1 = 0$ se réécrit en $Y^2 - 2Y + 1 = 0$ qui a pour unique solution 1. Donc, $X = -1$ ou $X = 1$. Enfin, on obtient $x = 1$ ou $x = -1$ comme seules solutions réelles de $x^8 - 2x^4 + 1 = 0$.

$$\mathscr{S} = \{-1;1\}$$