1

ENSEMBLES DE NOMBRES

Résumé

Nous allons découvrir tout un tas de notations de nombres familiers et moins familiers qui nous seront indispensables tout au long de l'année. Il est important de savoir de quel type de nombre nous parlons si nous avons un nombre inconnu x ou y. C'est notamment lors de la résolution d'équations que cette subtilité est fondamentale...

1 Quelques ensembles de nombres

1.1 Nombres entiers naturels

Définition | Entier naturel

On appelle **nombre entier naturel** un nombre entier positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;\ldots\}.$$

Exemples 4 et 287 sont des entiers naturels alors que -1 et 0,5 ne sont pas des entiers naturels.

Définition | Entier naturel non nul

On définit et on note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des **nombres entiers naturels non nuls**.
Il s'agit donc de l'ensemble des nombres naturels **strictement** positifs et

$$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;4;\ldots\}.$$

Remarque Pour noter que a est un entier naturel, on écrira $a \in \mathbb{N}$ et s'il est non nul, $a \in \mathbb{N}^*$.

1.2 Nombres entiers relatifs

Définition | Entier relatif

On appelle **nombre entier relatif** un nombre entier positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté

$$\mathbb{Z} = \{\ldots;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;\ldots\}.$$

Exemples 4, 287, 0 et -1 sont des entiers relatifs alors que 0,5 n'en est pas un.

Remarques
- Pour noter que a est un entier relatif, on écrira $a \in \mathbb{Z}$.
- Les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.

1.3 Nombres rationnels

Définition | Rationnel

On appelle **nombre rationnel** un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples $\frac{1}{3}$, $\frac{14}{-21} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{2{,}5}{0{,}7} = \frac{25}{7}$ sont rationnels.

Remarque Les nombres entiers relatifs sont des nombres rationnels.

1.4 Nombres décimaux

Définition | Décimal

Un **nombre décimal** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples
- 0,5 est un nombre décimal car $0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.
- $-\frac{3}{25}$ est décimal car $-\frac{3}{25} = \frac{-12}{100} = \frac{-12}{10^2}$.

Remarque Les nombres entiers relatifs sont des décimaux. En effet, si $a \in \mathbb{Z}$, alors $a = \frac{a}{10^0}$ qui est bien de la forme demandée.

Théorème | $\mathbb{Q} \neq \mathbb{D}$

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Dans ce cas, $\frac{1}{3}$ s'écrirait sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on aurait $3a = 10^n$, c'est à dire que 10^n est un multiple de 3, ce qui est absurde car 3 ne divise aucune puissance de 10. En effet, il existe un critère de divisibilité par 3 qui dit qu'un nombre entier est divisible par 3 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Finalement, notre hypothèse était fausse et nous venons de prouver que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. □

Propriété | Développement décimal

Un nombre décimal admet un développement décimal avec un nombre fini de chiffres.

Exemples
- $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- $-\frac{3}{25} = -0{,}12$
- $\frac{217}{125} = 1{,}736$

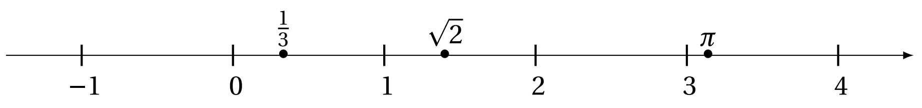
1.5 Nombres réels

Définition | Réel

Un nombre est dit **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée (ou numérique).
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Remarque On peut aussi définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des nombres qui s'écrivent avec une partie entière et un nombre de décimal fini ou infini.

Exemples $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ et π sont des nombres réels.



2 Ensembles et inclusions

2.1 Notations ensemblistes

Nous avons déjà utilisé plusieurs notations depuis le début, nous allons tout préciser. Soient E et F deux ensembles de nombres. Voici une correspondance de notations :

x appartient à E : $x \in E$

x n'appartient pas à E : $x \notin E$

Ensemble E privé de 0 : E^*

E est inclus dans F : $E \subset F$

L'ensemble F est composé uniquement des éléments $a_1, \dots, a_n$: $F = \{a_1, \dots, a_n\}$

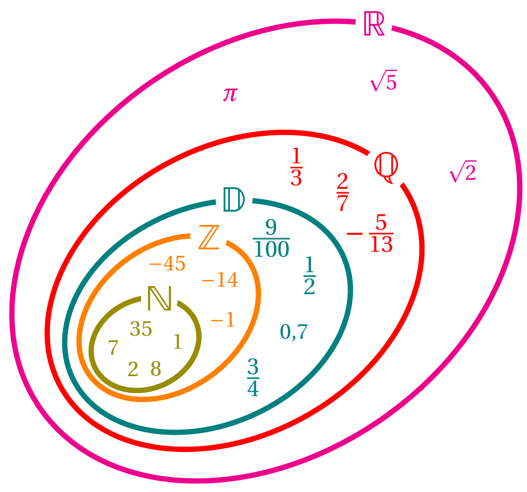
2.2 Classification des nombres

Théorème | Classification

On a la *chaîne d'inclusion* suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque On peut résumer le résultat précédent à l'aide du diagramme suivant :



Exercice

Compléter le tableau suivant avec $\in$ ou $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-2					
$\frac{2}{3}$					
$\sqrt{2}$					
$\frac{1}{4}$					
π					

3 Intervalles de $\mathbb{R}$

3.1 Définition

Définition | Intervalle

Soient a et b deux réels ($a \leqslant b$).
L'ensemble de tous les réels x tels que $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé un **intervalle**, que l'on note $[a;b]$.

Exemples $3 \in [1;5]$, $6 \notin [1;5]$ et $5 \in [1;5]$.

Remarque On peut définir d'autres intervalles en fonction des inégalités choisies :

$a < x \leqslant b$ **définit l'intervalle :** $]a;b]$

$a \leqslant x < b$ **définit l'intervalle :** $[a;b[$

$a < x < b$ **définit l'intervalle :** $]a;b[$

Exemples Donnons la représentation graphique de plusieurs intervalles.

- $[1;3]$

- $]-1;4[$

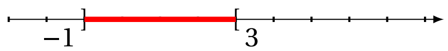
- $]0;+\infty[$

Remarque On notera très souvent :

- $[0;+\infty[=\mathbb{R}_+$
- $]0;+\infty[=\mathbb{R}_+^*$
- $]-\infty;0]=\mathbb{R}_-$
- $]-\infty;0[=\mathbb{R}_-^*$

Exercice

Compléter le tableau suivant :

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$x < \pi$	$]-\infty;\pi[$	
$5 \leqslant x < 10$		
		
$\sqrt{2} \geqslant x$		
	$]-\infty;+\infty[$	

Exercice

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

- $-1 \quad [-4;1]$
- $\frac{1}{3} \quad [-4;1]$
- $-4,1 \quad [-4;1]$
- $\sqrt{3} \quad [-4;1]$

3.2 Union et intersection d'intervalles

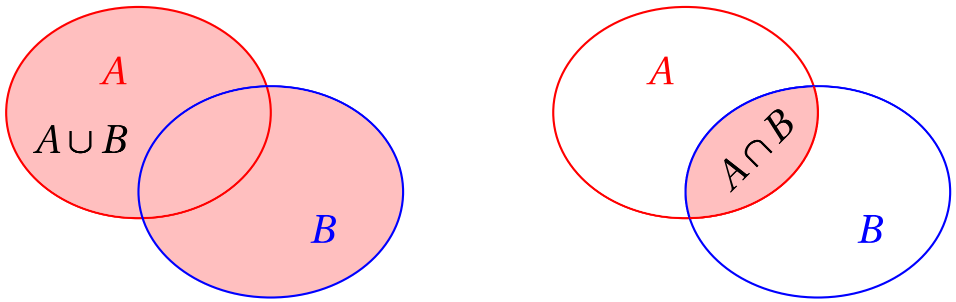
Définition | Union

Soient A et B deux ensembles. On appelle **union** de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A soit à B.

Définition | Intersection

Soient A et B deux ensembles. On appelle **intersection** de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

Remarque On visualise ces différents ensembles sur le diagramme suivant :



Exercice

Calculer l'union et l'intersection des intervalles I et J. Faire un diagramme.

- $I =]1;4[$ et $J = [3;5[$
- $I =]-1;0]$ et $J = [0;1]$
- $I = [1;+\infty[$ et $J =]-\infty;2]$
- $I = [-1;0]$ et $J = [1;2]$