DEVOIR SURVEILLÉ 5

Calculatrice autorisée

Vendredi 9 février 2024

EXERCICE 1 (10 POINTS)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie C

1. **a.** Résoudre $11 - \mathrm{e}^{2x+1} = 4$ dans $\mathbf{R}$.

b. Résoudre $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$ dans $\mathbf{R}$ puis dans $\mathbf{N}$.

2. Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

b. En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Correction

Partie A

1. La fonction est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x-3$, toutes deux strictement croissantes sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc strictement croissante sur cet intervalle.
2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.
   Calculons $u(2) = \ln(2) - 1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.
   D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.
   Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.
   Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.
   0 possède ainsi un antécédent par u dans l'intervalle $[2\,;\,3]$. Comme u est strictement monotone sur $]0\,;\,+\infty[$, cet antécédent α est unique sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Compte-tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$. Par opérations sur les limites, on en déduit que :
   $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
2. **a.** f est dérivable sur $]0;\,+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;\,+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.\ \text{En réduisant au dénominateur } x^2 : \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2+x-1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x)+x-3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

   b. Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u. On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty]$.

Partie C

1. Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y &=& f(x)\\ y &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ f(x) &=& \ln(x)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \ln(x)\\ 0 &=& f(x)-\ln(x)\end{array}\right.$$

   On calcule :

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x).\ \text{On réduit au dénominateur } x : \\ &= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x)-2)+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[x\ln(x)-2x-\ln(x)+2+2x-x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}(2-\ln(x)) \end{aligned}$$

Or $2-\ln(x)=0$ n'a qu'une solution qui est $x=\mathrm{e}^2$.
Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x=\mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y=\ln\left(\mathrm{e}^2\right)=2$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or ln est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et H est une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= 2\left[\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} - \left[H(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} \\ &= 2\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)-\ln(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)^2 - \ln(1)^2\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

L'aire délimitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=\mathrm{e}^2$ est donc égale à 2.

Exercice 2 (10 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

- **a.** Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
- **b.** En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
- **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
- **d.** Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

- **a.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
- **b.** Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, admet la représentation paramétrique suivante :
$$\left\{\begin{array}{lll} x &=& -4t-2 \\ y &=& t \\ z &=& 3t+2 \end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$
- **c.** La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Correction

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$. On a : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-5}$.

Les coordonnéees des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

a. Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 1\times 2 + (-1)\times(-1) + (-1)\times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u} = 2\times 2 + (-5)\times(-1) + (-3)\times 3 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.
La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC).

b. De ce qui précède, on déduit que $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC).
Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.
Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
$2\times 0 + (4)\times(-1) + (1)\times 3 + d = 0 \iff d = 1$.
On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.
Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et contient le point D $(7\ ;\ -1\ ;\ 4)$, une représentation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$

d. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2x-y+3z+1 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7\\ y &=& -t-1\\ z &=& 3t+4\\ t &=& -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3\\ y &=& 1\\ z &=& -2\\ t &=& -2\end{array}\right.$$

Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrons que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Le plan $\mathscr{P}_\in$ d'équation $x+4y+2=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

b. Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4t-2\\ y &=& t\\ z &=& 3t+2\end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0\\ x+4y+2 &=& 0\\ y &=& y\end{array}\right., \ t\in\mathbf{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0\\ x+4y+2 & = & 0\\ y & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -\ x-t\\ x & = & -4t-2\\ y & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 3t+2\\ x & = & -4t-2\\ y & = & t\end{array}\right.$$

On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -4t-2\\ y & = & t\\ z & = & 3t+2\end{array}\right., \ t \in \mathbf{R}.$$

On peut également vérifier que la droite (d) est incluse dans le plan $\mathscr{P}_1$ et également dans le plan $\mathscr{P}_2$.
En effet, on a démontré que ces deux plans étaient sécants, ils sont donc sécants suivant une droite qui appartient simultanément aux deux plans et cette droite est unique.
$-4t-2+t+3t+2=0$ donc (d) est contenue dans le plan $\mathscr{P}_1$;
$-4t-2+4t+2=0$ donc (d) est contenue dans la plan $\mathscr{P}_2$

c. On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'}=0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles.