5

CONTINUITÉ

Résumé

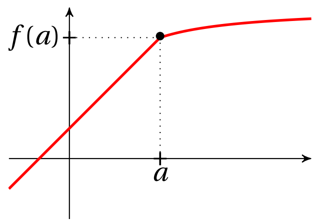
Nous nous initions ici à une notion cruciale en analyse pour l'étude de fonctions : la continuité. Le principe est naïf mais les conséquences sont colossales.

1 Fonction continue

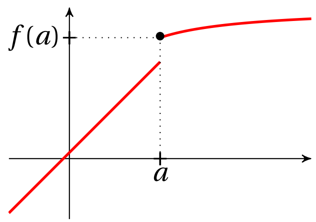
Définition | Continuité en un point a

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
f est dite **continue en** a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemples ► f est continue en a.



► f n'est pas continue en a



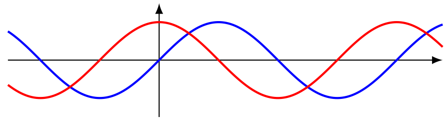
Définition | Continuité sur un intervalle I

f est **continue sur un intervalle** I si f est continue en a pour tout $a \in I$.

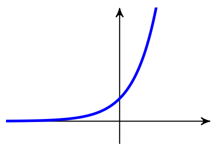
Remarque Graphiquement, la courbe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracée "sans lever le stylo".

Exemples ► Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.

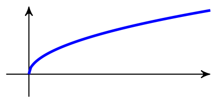
► sin et cos sont continues sur $\mathbf{R}$



► exp est continue sur $\mathbf{R}$



► $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$



Théorème | Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- ► $f + g$ est continue sur I.
- ► $f \times g$ est continue sur I.
- ► Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- ► Si g est continue sur J, l'ensemble des images $f(x)$ pour tout $x \in I$, alors : $g \circ f$ est continue sur I.

Démonstration. Admise. □

Propriété | Lien dérivabilité/continuité

Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue en I.

Démonstration. Admise. □

2 Application aux suites

Propriétés

- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite de I.

  Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et f est continue en ℓ alors $\left(f(u_n)\right)$ converge vers $f(\ell)$.

- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

  Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $\ell = f(\ell)$.

Démonstration. Admise. □

Exemples

- Nous savons que la suite de terme général $2 - \dfrac{4}{n+1}$ converge vers 2.
  Ainsi, la suite de terme général $\mathrm{e}^{2-\frac{4}{n+1}}$ converge vers e^2 car exp est continue en 2.

- Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 12}$ et $u_0 = -1$.
  Posons $f : x \mapsto \sqrt{4x+12}$.

  On remarque, en dérivant, que f est **croissante** sur $[-2;+\infty[$.

  En effet, $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{2\sqrt{4x+12}} > 0$ pour tout $x \in [-2;+\infty[$.

  ▷ Montrons que (u_n) converge.
  On peut prouver par récurrence que :
  pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
  Initialisation : La propriété est vraie au rang 0 ($u_1 = 4$).
  Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la pour $n+1$.
  Comme $-2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$, on a par croissance de f :
  $f(-2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6)$.
  Finalement, $-2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6$ par définition de la suite.
  Nous venons de prouver que (u_n) est **croissante et majorée** par 6 donc **converge**.

  ▷ Par la propriété précédente, comme (u_n) converge, sa limite ℓ est forcément un point fixe de f ($f(\ell) = \ell$).
  Cherchons tous les points fixes possibles. Soit x tel que $\sqrt{4x+12} = x$.
  SI $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned} &\sqrt{4x+12} = x \\ \Leftrightarrow\ & 4x + 12 = x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 12 = 0 \end{aligned}$$

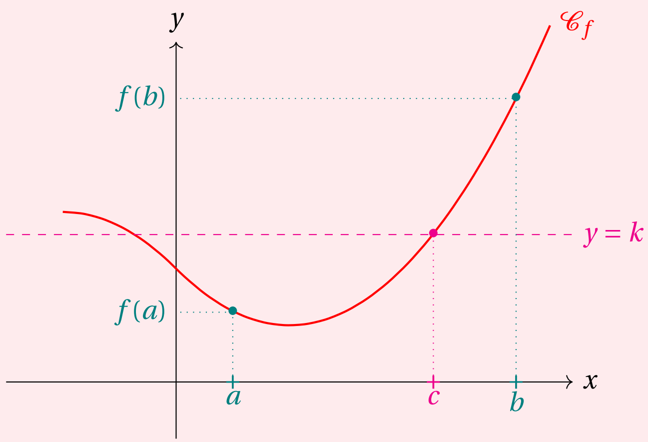
  Une telle équation admet pour solutions -2 exclu et 6.

  Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$.

3 Résolution d'équations

Théorème | Théorème des valeurs intermédiaires

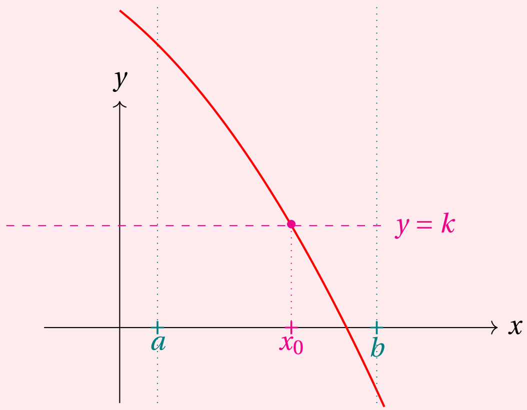
Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.



Démonstration. Admise. □

Corollaire

Soit f continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une unique solution x_0 dans $[a;b]$ à l'équation $f(x) = k$.



Démonstration. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe au moins une solution $c \in [a;b]$ à l'équation $f(x) = k$. Supposons par l'absurde qu'il y en a au moins une autre, c'.
Ainsi, nous avons soit $c > c'$ soit $c' > c$.
Par stricte monotonie de f, soit $f(c) > f(c')$ soit $f(c') > f(c)$ ce qui est absurde puisque

$$f(c) = f(c') = k.$$

$\square$

Exemples ▶ Soit f continue sur $\mathbf{R}$ telle que $f(3) = 23$ et $f(12) = 2$.

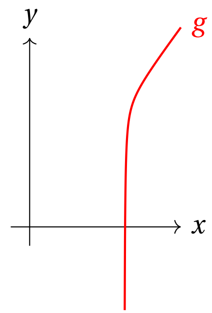
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 10$.

▶ Soit g définie sur $]5;+\infty]$ par $g(x) = 4x - \dfrac{1}{x-5}$. Il existe une unique solution à l'équation $g(x) = \pi$.

En effet, sur $]5;+\infty]$, g est strictement croissante :

$$\forall x \in]5;+\infty], g'(x) = 4 + \frac{1}{(x-5)^2} > 0.$$

On conclut par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires car $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5} g(x) = -\infty$.

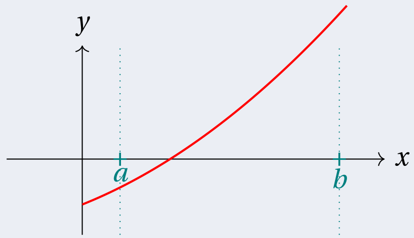


Méthode | Algorithme de dichotomie

Pour résoudre certaines équations, on peut se résoudre à utiliser des **méthodes numériques**. La résolution numérique par **dichotomie** en est une.
Prenons l'exemple d'une fonction continue sur $[a;b]$ telle que :

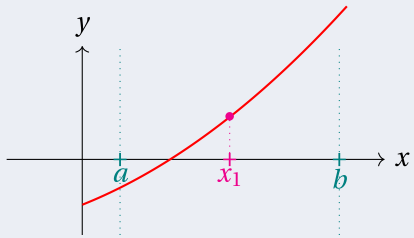
$$f(a) \times f(b) < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire), il existe une unique solution x_0 à l'équation $f(x) = 0$ dans $[a;b]$.



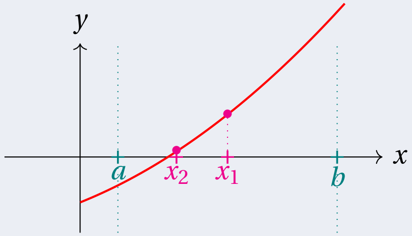
Nous allons construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ qui converge vers x_0.

Posons $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.



Si $f(x_1) = 0$, c'est terminé. Sinon :

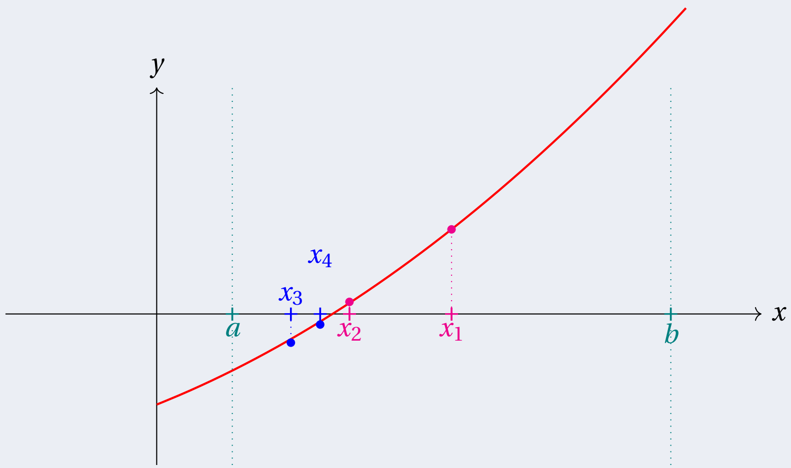
- Si $f(a) \times f(x_1) < 0$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = x_1$ et $x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.
- Si $f(a) \times f(x_1) > 0$, on pose $a_1 = x_1$ et $b_1 = b$ et $x_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.



Si $f(x_2) = 0$, c'est terminé. Sinon :

- Si $f(a) \times f(x_2) < 0$ on pose $a_2 = a$ et $b_2 = x_2$ et $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.
- Si $f(a) \times f(x_2) > 0$ on pose $a_2 = x_2$ et $b_2 = b$ et $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

On continue ce processus pour obtenir une valeur approchée de x_0 à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près.



Remarque Par construction, $0 \leqslant |x_n - x_0| \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$ et par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n - x_0 = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Exercice

Donner un encadrement à 10^{-2} près de la solution de $x^3 - 3x + 1$ dans $]1\,;+\infty[$. On admet qu'elle existe et qu'elle est unique.

Algorithmique & Programmation

Nous pouvons écrire un programme python procédant à l'algorithme de dichotomie. Faisons-le pour pour l'exercice précédent.

```python
from maths import *
def f(x):
    return x**3-3*x+1
def dichotomie(a,b,n):
    for i in range(n):
        x=(a+b)/2
        if f(a)*f(x)<0:
            b=x
        if f(a)*f(x)>0:
            a=x
    return(x)
```

Ici, la fonction `dichotomie` renvoie x_n et si on demande `dichotomie(1,1000,100)`, nous obtenons `1.5320888862379562` donc on peut estimer à 10^{-2} près que $x_0 \approx 1{,}53$.

Exercice

Écrire un programme python permettant de résoudre numériquement l'équation $4x - \dfrac{1}{x-5} = 1000$ par dichotomie. Donner une solution à 10^{-5} près.

