4

Généralités sur les fonctions

L'histoire des fonctions remonte aux mathématiciens antiques tels qu'Archimède. Cependant, c'est au 17e siècle que Descartes et Fermat ont jeté les bases des fonctions modernes. Elles décrivent les relations entre les variables et sont essentielles dans la compréhension des phénomènes naturels et des applications technologiques.

1 Notion de fonction

Deux grandeurs peuvent varier tout en étant liées (distance et vitesse, température et temps, aire et longueur,...). Ce lien peut s'exprimer par un tableau de données, une formule ou un graphique. Ceci nous amène aux *fonctions*.

Définitions | Rappels

- On définit une **fonction** numérique f sur un ensemble de nombres $\mathscr{D}$ en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un **unique** nombre y.
- On dit f est une fonction de la **variable** x et on note $f : x \mapsto y$ ou $f(x) = y$.
- y est appelé l'**image** de x par f et x est l'**antécédent** de y par f.
- $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de f.

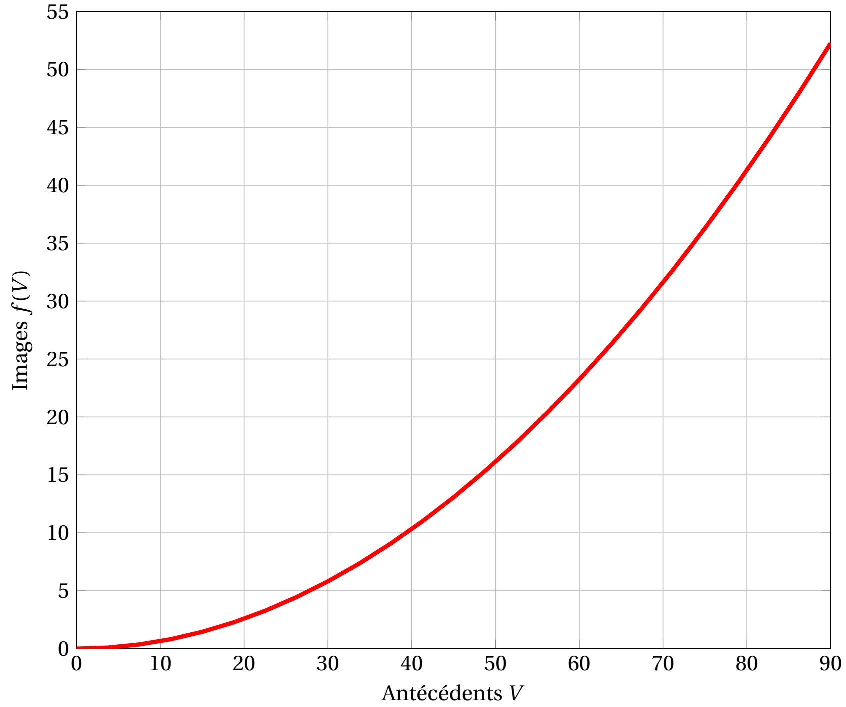
Exemple Nous pouvons modéliser la distance de freinage d'un véhicule en fonction de sa vitesse au moment le conducteur commence à freiner.

On peut le représenter sur l'intervalle $\mathscr{D} = [0;90]$ via $\boxed{f(V) = \frac{V^2}{155}}$ où $f(V)$ est la distance de freinage en m et V la vitesse en km/h.

Voici un tableau de valeurs (arrondies au dixième) :

V	0	30	80	90
$f(V)$	0	5,8	42,3	52,3

Et une courbe représentative :



Les images sont données en *ordonnée* (lecture verticale) et les antécédents en *abscisse* (lecture horizontale).

Remarquons que $f(50) = \frac{50^2}{155} = 16{,}13$ est l'**image** de 50 par f tandis que 50 est un **antécédent** de 16,13 par f.

2 Variations d'une fonction

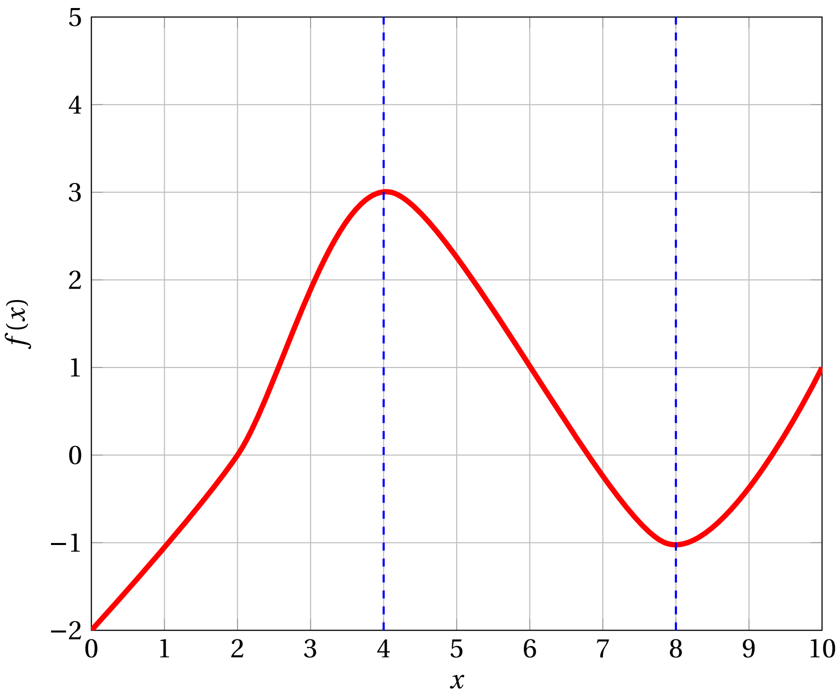
Définitions | Première approche

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.

- On dit que f est **croissante** sur I si quand les valeurs de x augmentent alors les valeurs de y augmentent. Graphiquement, la courbe *monte*.
- On dit que f est **décroissante** sur I si quand les valeurs de x augmentent alors les valeurs de y diminuent. Graphiquement, la courbe *descend*.

Exemple Dans la section précédente, la fonction f est croissante sur $[0;90]$.

Remarque On peut simplifier la courbe d'une fonction et n'indiquer que les variations de celle-ci dans un tableau qu'on appelle **tableau de variations**.
Faisons-le pour la fonction suivante dont on donne la courbe représentative.



f est croissante sur $[0;4]$ et sur $[8;10]$ mais est décroissante sur $[4;8]$.

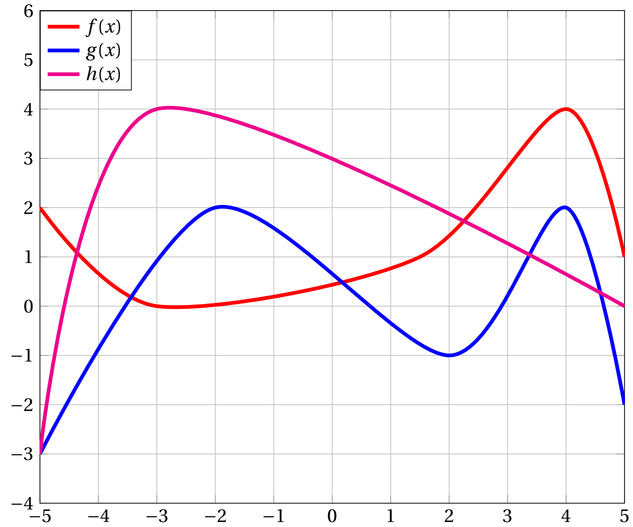
On modélise avec le tableau de variations suivant :

x	0		4		8		10
$f(x)$			3				1
		↗		↘		↗	
	0				-1		

Les antécédents figurent sur la première ligne, qui modélise l'axe des abscisses, tandis que les variations de la fonctions sont sur la seconde ligne, représentées par des flèches. On a l'habitude de noter les valeurs extrémales de la fonction en bout de flèche.

Exercice

Construire le tableau de variations des fonctions f, g et h dont les courbes sont données dans le graphique suivant.



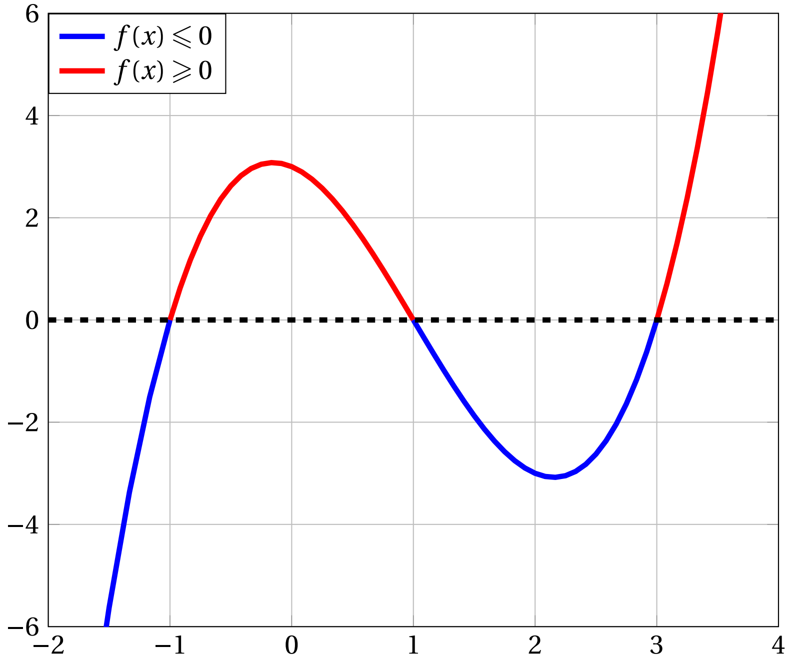
3 Signe d'une fonction

Définitions | Positivité et négativité

On dit qu'une fonction f est **positive** sur un ensemble $\mathscr{D}$ si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \geqslant 0$ et que f est **négative** sur $\mathscr{D}$ si pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) \leqslant 0$.

Remarque *Étudier le signe* d'une fonction revient à déterminer sur quels ensembles elle est positive ou ceux sur lesquels elle est négative. Nous résumons usuellement cette étude dans un **tableau de signe** de construction similaire aux tableaux de variations.

Exemple Donnons un exemple pour la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 - x + 3$ dont la courbe est donnée en dessous. On va délimiter **deux zones** à partir de l'axe horizontal des abscisses, une **positive** (au dessus) et une **négative** (en dessous).



f est négative sur $[-2;-1]$ puis sur $[1;3]$ et est positive sur $[-1;1]$ et $[3;4]$.

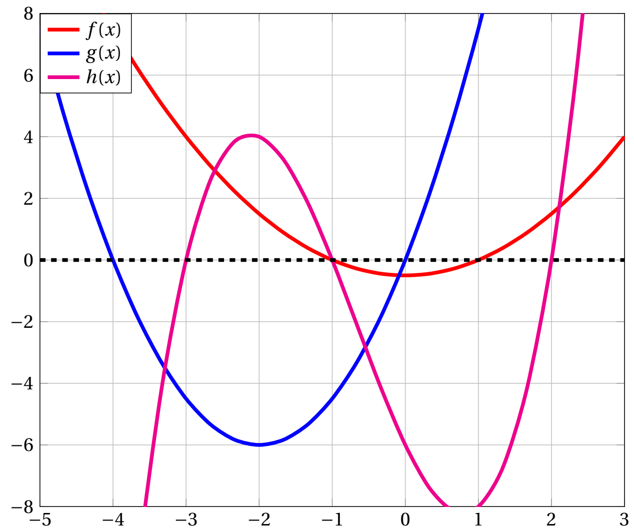
Ainsi, on a la simplification :

x	-2		-1		1		3		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Les zéros de la seconde ligne sont en dessous des x tes que $f(x) = 0$, c'est-à-dire quand il y a changement de signe dans le graphique.

Exercice

Construire le tableau de signe des fonctions f, g et h dont les courbes sont données dans le graphique suivant.



4 Cas des fonctions affines

Définition | Fonctions affines

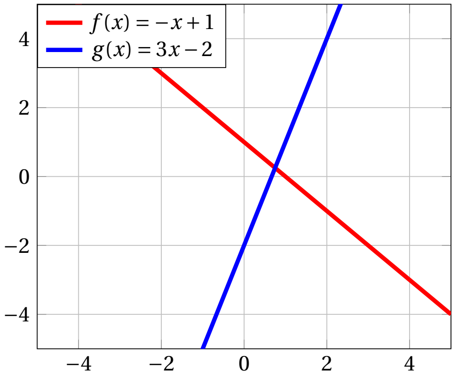
Les fonctions représentées par des droites sont appelées les **fonctions affines**. Ce sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ dont l'expression est de la forme

$$f(x) = ax + b$$

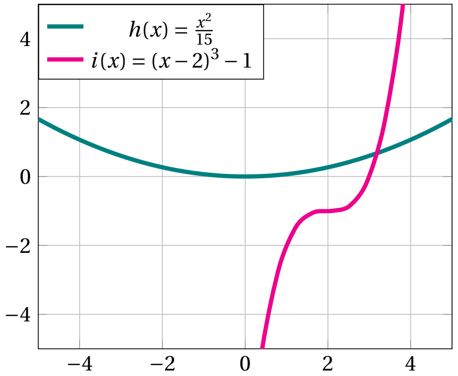
avec a et b deux nombres réels.

a est le **coefficient directeur** ou la **pente**.
b est l'**ordonnée à l'origine**.

Exemples



Fonctions affines



Fonctions non affines

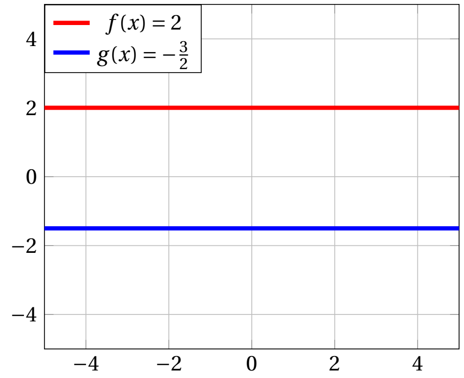
Exercice

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui sont affines et donner, dans ce cas, a et b.

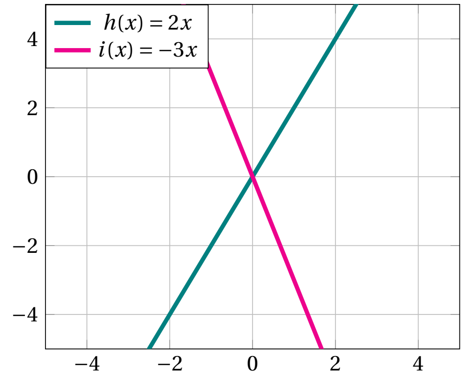
1. $g : x \mapsto -x+4$ **2.** $h : x \mapsto 3x^2 - 2$ **3.** $f : x \mapsto \dfrac{1-2x}{3}$

Remarques

- Si $a = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = b$. La fonction est **constante**.
- Si $b = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = ax$. La fonction est **linéaire**. Les fonctions linéaires sont les seules fonctions dont le tableau de valeurs est un tableau de proportionnalité.



Fonctions constantes



Fonctions linéaires

Propriété | Variations d'une fonction affine

Soit f une fonction affine telle que $f : x \mapsto ax + b$.

- Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbf{R}$.
- Si $a = 0$ alors f est constante sur $\mathbf{R}$.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbf{R}$.

Exemples $f : x \mapsto 10x - 2$ est croissante sur $\mathbf{R}$ mais $g : x \mapsto -x+1$ est décroissante sur $\mathbf{R}$.

⚠ Attention

Pour bien lire le coefficient directeur a, il ne faut pas regarder le premier nombre de l'expression mais celui en facteur de x.
Ainsi, pour $f(x) = 3 - 5x$, $a = 5$ et pour $f(x) = -2 + x$, $a = 1$.

Exemple On donne le **tableau de variations** de $f : x \mapsto -2x + 3$ sur $[-5;5]$.

x	-5	5
$f(x)$	13 ↘	-7

Théorème | Signe d'une fonction affine

Le signe de $f : x \mapsto ax+b$ ($a \neq 0$) dépend du signe de a et change en $-\frac{b}{a}$, unique solution de $ax+b=0$. Donnons les tableaux de signe associés :

- Si $a>0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Démonstration. Faisons la preuve pour $a>0$. Elle est similaire pour $a<0$.

$$\begin{aligned} f(x)>0 &\iff ax+b>0 \\ &\iff ax>-b \\ &\iff x>-\frac{b}{a} \\ &\iff x \in \left]-\frac{b}{a};+\infty\right[\end{aligned}$$

On a ainsi que f est strictement positive sur $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$ et strictement négative sur $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$. □

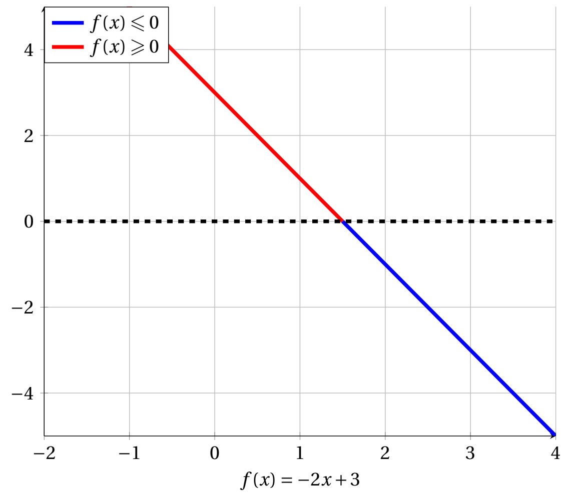
Exemple Donnons le **tableau de signe** de $f : x \mapsto -2x+3$ sur **R**. Nous savons déjà qu'elle est décroissante sur **R** car $-2<0$ et nous avons vu son tableau de variations sur $[-5;5]$. Nous avons besoin de savoir quand est-ce que f s'annule. Il faut donc résoudre l'équation $f(x)=0$ dans **R**.

$$f(x)=0 \iff -2x+3=0 \iff x=\frac{3}{2}$$

f ne s'annule qu'une seule fois sur **R**, en $\frac{3}{2}$, donc elle est de signe constant sur $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ (celui de $f(-5)=13$) et sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ (celui de $f(5)=-7$).

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

C'est cohérent avec la représentation graphique de f.



Exercice

Construire les tableaux de signe des fonctions affines suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto 20x-7$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{x+8}{3}$

3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{2}x-\pi$