1

SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Résumé

Les suites arithmético-géométriques captivent l'attention des mathématiciens et des chercheurs car elles combinent des modèles de croissance linéaire et exponentielle. Leurs propriétés uniques permettent d'aborder des problèmes complexes dans des domaines tels que la finance, la biologie, l'informatique et la physique, enrichissant notre compréhension des phénomènes divers.

1 Rappels

1.1 Suites arithmétiques

Définition 1

Soient $r \in \mathbf{R}$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + r.$$

(u_n) est appelée **suite arithmétique** de **raison** r.

Propriété 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Théorème 3 | Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- (u_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow r > 0$.
- (u_n) est constante $\Leftrightarrow r = 0$.
- (u_n) est strictement décroissante $\Leftrightarrow r < 0$.

Démonstration. Donnons le premier cas : les autres sont similaires.
(u_n) est strictement croissante si pour tout $0p < q$, on a $u_p < u_q$.
Prenons deux entiers naturels quelconques p et q tels que $p < q$. Ainsi, on a :

$$u_p = rp + u_0 \qquad \text{et} \qquad u_q = rq + u_0$$

d'où, en soustrayant les deux équations membre à membre, de manière équivalente :

$$u_p - u_q = r(p-q)$$

$p - q < 0$ et donc $r > 0 \Leftrightarrow u_p - u_q < 0 \Leftrightarrow u_p < u_q$. □

Propriété 4 | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On peut calculer $S_n := u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1).$$

Démonstration. Admise pour le moment. □

Exemple 5 Calculons $S = 1+3+5+\cdots+21$. Cette somme correspond à la somme des 11 premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
$S = \dfrac{1+21}{2} \times 11 = 11^2 = 121$.

Remarque 6 On peut calculer la somme des entiers de 1 à n pour $n \in \mathbf{N}^*$ grâce à la propriété précédente. Ainsi,

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 7

1. Soit w la suite arithmétique de premier terme $w_0 = 6$ et de raison 5.

   Calculer $S = w_0 + w_1 + \ldots + w_{30} = \sum_{k=0}^{k=30} w_k$.

2. Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 6.

   Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{30} = \sum_{k=0}^{k=30} u_k$.

1.2 Suites géométriques

Définition 8

Soient $q \neq 0$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = q \times u_n.$$

(u_n) est appelée **suite géométrique** de **raison** q.

Propriété 9

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_n = u_0 \times q^n.$$

Théorème 10 | Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 **strictement positif**.

- (u_n) est strictement croissante $\Leftrightarrow q > 1$.
- (u_n) est constante $\Leftrightarrow q = 1$.
- (u_n) est strictement décroissante $\Leftrightarrow 0 < q < 1$.

Démonstration. La démonstration se fait de la même manière que pour le résultat sur les suites arithmétiques, à la différence qu'on utilise le critère de variation des suites strictement positives (étude du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$). □

Propriété 11 | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration. Admise pour le moment. □

Exemple 12 Calculons $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$. Cette somme correspond aux 12 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

Ainsi, $S = \dfrac{1-2^{12}}{1-2} = \dfrac{1-4096}{1-2} = 4095$.

Exercice 13

1. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 1,6.

   Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{12} = \sum_{k=0}^{12} u_k$ et donner un arrondi au millième près.

2. Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 1,4.

   Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k$ et donner un arrondi au millième près.

2 Suites arithmético-géométriques

Définition 14

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbf{N}$ par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

(u_n) est appelée **suite arithmético-géométrique** de paramètres a et b.

Remarques 15

- Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers des suites arithmético-géométriques (pour, respectivement, $a = 1$ et $b = 0$).
- La relation de récurrence est affine mais nous allons voir que ce n'est pas le cas de la forme explicite.

Propriété 16

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et b et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. Admise pour le moment. □

Exercice 17

Déterminer, dans chacun des cas, la forme générale des suites définies sur $\mathbf{N}$ par :

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = 6u_n + 5$
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = -5u_n + 12$
3. $\forall n \in \mathbf{N}, \qquad u_{n+1} = u_n - 10.$

Propriété 18 | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et b et de premier terme u_0.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (u_0 - r)\frac{1-a^{n+1}}{1-a} + (n+1)r \qquad \text{où } r = \frac{b}{1-a}$$

Démonstration. Admise. □

Exercice 19

Soit u une suite arithmético-géométrique de paramètres $a \neq 1$ et $b \in \mathbf{R}$.

1. Calculer S_{12} pour $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{3}{2}$.
2. Déterminer, pour tout $m > n$, $\sum_{k=n}^{m} u_k$ pour a et b quelconques.

Exercice 20 | Problème

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n est le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2023 + n)$. En 2023, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :
$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3.$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
   b) Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 60 - 10 \times 0{,}95^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2028. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4. a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$$u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times 0{,}95^n.$$
   b) En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10% le nombre d'arbres de la forêt en 2023.