Chapitre 4

INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

I - Propriétés des inégalités

Propriété : Ordre dans $\mathbb{R}$

Si a, b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Propriétés : Somme

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

- $a < x \Leftrightarrow a + b < x + b$
- $a < x \Leftrightarrow a - b < x - b$
- Si $a < x$ et $b < y$, alors $a + b < x + y$.

Propriétés : Produit

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

- Si $b > 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba < bx$
- Si $b < 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba > bx$

Remarque

On a plusieurs conséquences du résultat précédent.

- $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a^n \leqslant b^n$.

II - Valeur absolue

Définition : Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ la **valeur absolue** de x comme suit :

- Si $x > 0$, alors $|x| = x$
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$

Exemples

- $|5| = 5$
- $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$

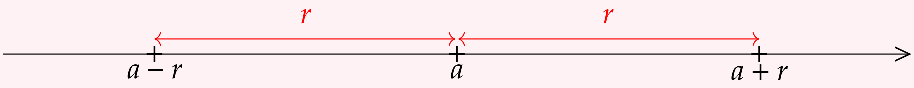
Remarques

- Une valeur absolue est toujours positive.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow a-r \leqslant x \leqslant a+r \Leftrightarrow x \in [a-r, a+r]$$



III - Inéquations

Définition : Inéquations

Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses **solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples

- $3x+2>7 \Leftrightarrow 3x+2\mathbf{-2}>7\mathbf{-2} \Leftrightarrow 3x>5 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{\mathbf{3}}>\dfrac{5}{\mathbf{3}} \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{3}$

  L'ensemble des solutions de $3x+2>7$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{3};+\infty\right[$.

- $-x+9 \geqslant -2 \Leftrightarrow -x+9\mathbf{-9} \geqslant -2\mathbf{-9} \Leftrightarrow -x \geqslant -11 \Leftrightarrow (\mathbf{-1})\times(-x) \leqslant (\mathbf{-1})\times(-11)$

  Notons bien que l'inégalité **a changé de sens** puisque nous avons multiplié par un nombre **négatif**.

  Finalement, $-x+9 \geqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant 11$.

  L'ensemble des solutions de $-x+9 \geqslant -2$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} =]-\infty;11[$.

IV - Encadrements de réels et arrondis

Propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$.

  Cet encadrement est **l'encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

- **L'arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ ou $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Exemple

On a :

$$\frac{16\,812}{10^3} \leqslant 16{,}8127 < \frac{16\,813}{10^3}$$

donc l'**encadrement** de $16{,}8127$ à 10^{-3} près est $16{,}812 \leqslant 16{,}8127 < 16{,}813$ et l'**arrondi** de $16{,}8127$ à 10^{-3} près est $16{,}813$.