10

COMPLÉMENTS SUR LES FONCTIONS

Résumé

Précisons les subtiles notions de variations et parlons de parité de fonction. Nous préparons le terrain pour, entre autres, la trigonométrie avec les fonctions cos et sin ou l'étude de fonctions avec les recherches d'extremums ou de zéros...

1 Parité

Définitions | Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = f(x)$ alors f est **paire**.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = -f(x)$ alors f est **impaire**.

Exemples Nous avons déjà vu que la fonction carré est paire et que la fonction cube est impaire.

Attention

Notons bien que l'ensemble de définition d'une fonction à parité doit être **symétrique** par rapport à 0 !

Remarques

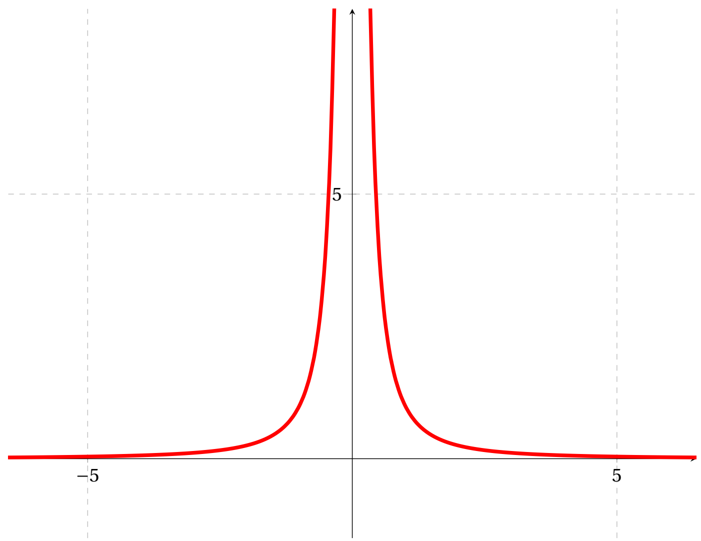
- Si une fonction est **paire** alors sa courbe représentative dans un **repère orthogonal** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Si une fonction est **impaire**, il y a une **symétrie centrale par rapport au point** $(0;0)$.
- Une fonction peut être ni paire ni impaire. C'est le cas de la fonction racine carrée.

Exemples

- Soit f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

  Soit $x \in \mathscr{D}$. Tout d'abord, $-x \in \mathscr{D}$ car $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0.

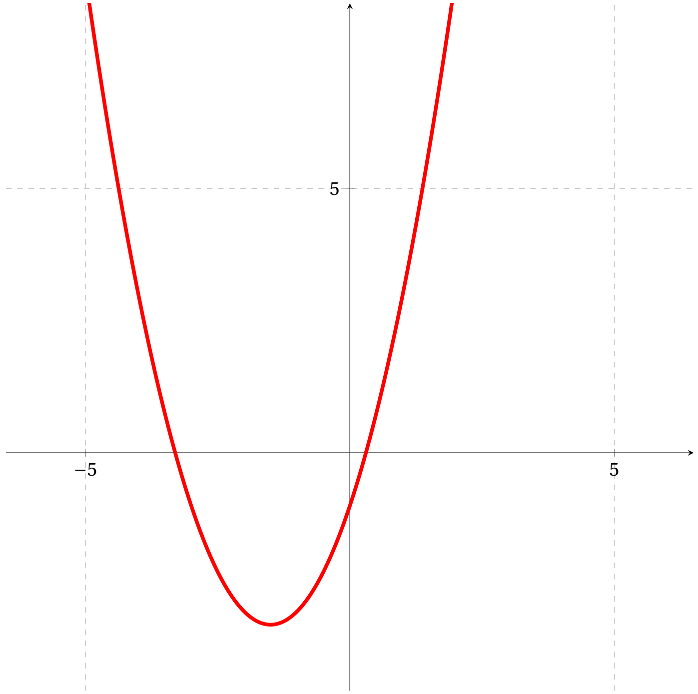
  Enfin, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$. Ainsi, f est **paire** comme on peut le voir ci-dessous.



- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

  Si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) - 1 = x^2 - 3x - 1$.

  Pour $x = 2$, $f(-2) = 2^2 - 3 \times 2 - 1 = -3$ mais $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$. Ainsi, $f(-2) \neq f(2) \neq -f(2)$ et f est ni paire ni impaire. On donne sa représentation graphique :



Exercice

Pour chaque fonction f définie par son expression, déterminer $f(-x)$ puis en déduire la parité de la fonction f.

1. $f(x) = 3x^2 - 10$ sur $\mathbb{R}$
2. $f(x) = x^3 - 2x + 7$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ sur $[-1;1]$

2 Variations

Définitions | Fonction croissante, fonction strictement croissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est croissante sur** I si :
  pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f **est strictement croissante sur** I si :
  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) < f(y)$.

Exemple La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Définitions | Fonction décroissante, fonction strictement décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est décroissante sur** I si :
  pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \geqslant f(y)$.
- On dit que f **est strictement décroissante sur** I si :
  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) > f(y)$.

Exemple La fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x - 2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque Une fonction constante sur I est à la fois croissante et décroissante sur I (pas strictement).

Attention

On parle toujours de variations **sur un intervalle**. Dire que ń f est croissante ż ne veut rigoureusement rien dire !

Définitions | Fonction monotone, fonction strictement monotone

Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.
Une fonction est **strictement monotone** sur un intervalle I si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I.

Remarque On résume usuellement les variations d'une fonction dans un tableau de variations.
La tableau de la fonction carré a déjà été vu (strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $]0;+\infty]$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

Les tableaux rappellent aussi quand la fonction n'est pas définie, comme en 0 pour la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		↘	‖	↘	

3 Extremums d'une fonction sur un intervalle

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $m \in \mathbb{R}$.

Définition | Maximum

m est le **maximum de** f **sur** I si m est le plus petit des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le maximum m est **atteint en** a.

Exemple Le maximum de la fonction cube sur l'intervalle $[-2;2]$ est 8. En effet, la fonction cube est strictement croissante sur cet intervalle donc le maximum sera l'image du plus grand élément de $[-2;2]$.

Remarque La fonction carré n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$ mais en admet sur des intervalles comme $[-1;1]$ ou $[5;16]$.

Définition | Minimum

m est le **minimum de** f **sur** I si m est le plus grand des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le minimum m est **atteint en** a.

Exemple 0 est le minimum de la fonction carré sur $\mathbb{R}$. En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.

Définition | Extremum

On appelle un **extremum** de f sur I le maximum sur I ou le minimum sur I.

Remarque On peut visualiser et noter les extremums sur des tableaux de variations. On suppose $I = [A;B]$ et qu'on a les tableaux suivants.

x	A		a		B
f	$f(A)$	↗	$m = f(a)$	↘	$f(B)$

Ici, m est le maximum de f sur $[A;B]$. On dit qu'il est atteint en a.

x	A		a		B
f	$f(A)$	↘	$m = f(a)$	↗	$f(B)$

Cette fois, m est le minimum de f sur $[A;B]$. Il est aussi atteint en a.