6

Suites arithmétiques et géométriques

Résumé

Nous commençons ici à créer un catalogue de suites numériques usuelles. Les suites arithmétiques, qui modélisent des croissances linéaires, et les suites géométriques, pour des croissances exponentielles, sont toutes désignées.

1 Suites arithmétiques

Définition

Soient $r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

(u_n) est appelée **suite arithmétique** de **raison** r.

Exemples ► Les deux suites suivantes sont arithmétiques, respectivement de raison de 2,3 et −1 :

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = u_n + 2{,}3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = v_n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

► Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier $u_0 = -5$.

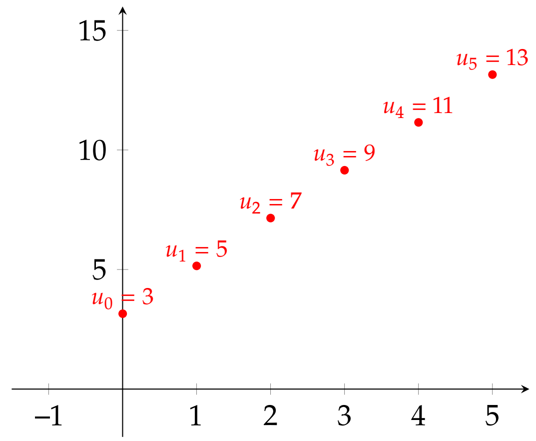
Alors, $u_1 = u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$. De même, $u_2 = u_1 + 3 = 1$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 4$, $u_4 = 7$, $u_5 = 10$, …

Propriété

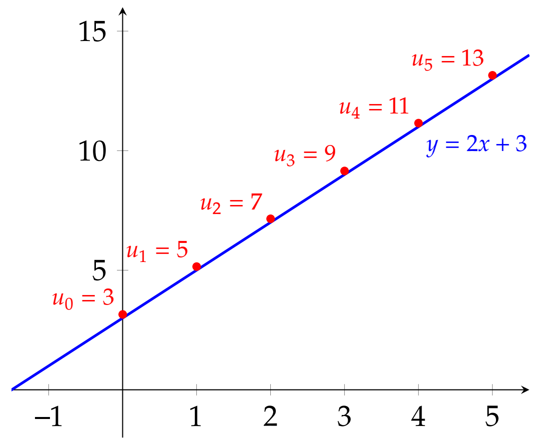
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0.$$

Exemple Représentons la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme 3.



La forme explicite de (u_n) est : $u_n = 2n + 3$ si $n \in \mathbb{N}$. Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de (u_n) et de la fonction affine f d'expression $f(x) = 2x + 3$ si $x \in \mathbb{R}$ coïncident sur $\mathbb{N}$.



Théorème | Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

Démonstration. Donnons le premier cas : les autres sont similaires.
(u_n) est strictement croissante si pour tout $0 \leq p < q$, on a $u_p < u_q$.
Prenons deux entiers naturels quelconques p et q tels que $p < q$. Ainsi, on a :

$$u_p = rp + u_0 \qquad \text{et} \qquad u_q = rq + u_0$$

d'où, en soustrayant les deux équations membre à membre, de manière équivalente :

$$u_p - u_q = r(p - q)$$

$p - q < 0$ et donc $r > 0 \Leftrightarrow u_p - u_q < 0 \Leftrightarrow u_p < u_q$. □

Propriété | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On peut calculer $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des $n + 1$ premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n + 1)$$

Exemple Calculons $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 21$. Cette somme correspond à la somme des 11 premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.
$S = \dfrac{1 + 21}{2} \times 11 = 11^2 = 121$.

Remarque On peut calculer la somme des entiers de 1 à n pour $n \in \mathbb{N}^*$ grâce à la propriété précédente. Ainsi,

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Suites géométriques

Définition

Soient $q \neq 0$ et (u_n) une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

(u_n) est appelée **suite géométrique** de **raison** q.

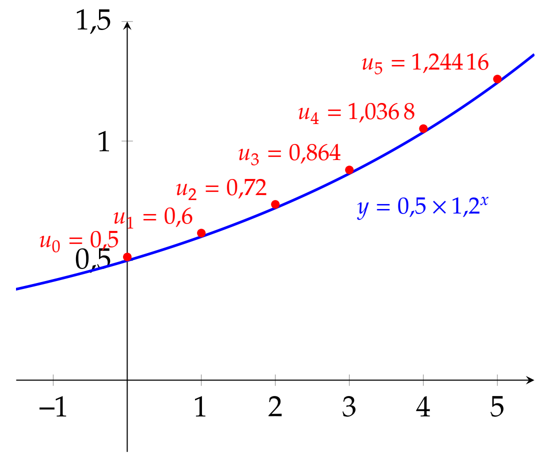
Exemple Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier $u_0 = 1{,}3$.
Alors, $u_1 = 2 \times u_0 = 3 \times 1{,}3 = 2{,}6$. De même, $u_2 = 2 \times u_1 = 5{,}2$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 10{,}4$, $u_4 = 20{,}8$, $u_5 = 41{,}6$, …

Propriété

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple Représentons la suite géométrique (u_n) de raison 1,2 et de premier terme 0,5.



Théorème | Variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 **strictement positif**.

- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $q > 1$.
- (u_n) est constante si, et seulement si, $q = 1$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $0 < q < 1$.

Démonstration. La démonstration se fait de la même manière que pour le résultat sur les suites arithmétiques, à la différence qu'on utilise le critère de variation des suites strictement positives (étude du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). □

Propriété | Somme des premiers termes

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.
On peut calculer $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes par la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exemple Calculons $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2048$. Cette somme correspond aux 12 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

Ainsi, $S = \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = \frac{1 - 4096}{1 - 2} = 4095$.