5

Second degré, étude du signe

Résumé

Précédemment, nous avons étudié algébriquement les polynômes du second degré et particulièrement leur factorisation à partir de la recherche de racines. Nous nous intéressons ici au signe de ces expressions ainsi qu'à la résolution d'inéquations de degré 2 qui nous sont facilement accessibles maintenant.

1 Signe d'une fonction du second degré

Théorème

Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est du signe de a, sauf entre les racines quand elles existent.

Démonstration. Soit f une fonction du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$. On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

1[er] **cas $\Delta < 0$:** On sait que le polynôme possède deux racines x_1 et x_2 et qu'on peut le factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a				signe de a			
$x - x_1$		$-$	0		$+$		
$x - x_2$			$-$		0	$+$	
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

2[e] **cas $\Delta = 0$:** f possède une unique racine α donc on peut factoriser sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2$. Le signe de f peut alors aussi être déterminé grâce à la règle des signes.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
a			signe de a		
$x - \alpha$		$-$	0	$+$	
$x - \alpha$		$-$	0	$+$	
produit $f(x)$		signe de a	0	signe de a	

3[e] **cas $\Delta < 0$:** Pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La courbe de la fonction ne coupe jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe, celui de a.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

□

Remarque En pratique, il suffit de connaître les éventuelles racines du polynôme et de regarder le signe de a pour visualiser la parabole et donc obtenir le tableau de signes. En effet, si a est strictement positif, la parabole est ouverte (fermée sinon).

2 Résolution d'inéquations du second degré

On souhaite des inéquations du type $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Méthode

Pour résoudre des inéquations de ce type, il suffit de construire le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de l'expression $ax^2 + bx + c$. Faisons le pour $-2x^2 + 4x + 6 \geq 0$ et $-2x^2 + 4x + 6 < 0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 16 + 48 = 64$
Le discriminant est strictement positif donc il y a deux racines distinctes qui sont -1 et 3.
Le tableau de signes est immédiat car $a = -7 < 0$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2 + 4x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut conclure :

$$-2x^2+4x+6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1\,;3]$$

et

$$-2x^2+4x+6 < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-1[\,\cup\,]3\,;+\infty[\,.$$

3 Position relative de deux courbes

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes respectives de f et g, c'est dire laquelle est graphiquement au dessus de l'autre sur I.

Propriété

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq g(x)$.

Remarque Pour comparer les deux courbes, il suffit d'étudier le signe de $f - g$.

Exemple Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2+12x-8$ et $g(x) = 8x-14$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x) = (-2x^2+12x-8)-(8x-14) = -2x^2+4x+6$.
À l'aide du tableau de signes établi précédemment, on va pouvoir conclure.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x^2+4x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur $[-1\,;3]$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ mais sur $]-\infty\,;-1]\cup[3\,;+\infty[$, c'est l'inverse : $\mathscr{C}_g$ est au dessus de $\mathscr{C}_f$.
Nous le vérifions graphiquement pour terminer.