# DEVOIR SURVEILLÉ 6

*Calculatrice autorisée*

Vendredi 29 mars 2024

---

**EXERCICE 1 (10 POINTS)**

**1.** Résoudre les deux équations différentielles suivantes.

**a.** $y' = 4x^4 - 3x + 2$

**b.** $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$

**2. a.** Résoudre l'équation différentielle $(E) : 2y' - 3y = 8y + 4y' + 1$.

**b.** Soit $f$ une solution de $(E)$.
Donner son expression si, de plus, $f(0) = 4$.

**3.** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(F) : 2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ en cherchant une solution particulière $\varphi$ sous la forme $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$.

**CORRECTION**

**1. a.** $y$ est primitive de $f$ d'expression $f(x) = 4x^4 - 3x + 2$. C'est-à-dire :

$$y(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C \qquad \text{où } C \in \mathbf{R}.$$

**b.**

$$y(x) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1} + C \qquad \text{où } C \in \mathbf{R}$$

**2. a.** $2y' - 3y = 8y + 4y' + 1 \Leftrightarrow y' = -\frac{11}{2}y - \frac{1}{2}$ est sous la forme $y' = ay + b$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} - \frac{b}{a} \qquad \text{où } C \in \mathbf{R} \\ &= Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{11}{2}} \\ &= Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

**b.** $f$ est d'expression $Ce^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}$ pour un certain $C \in \mathbf{R}$.
Si $f(0) = 4$ alors $C - \frac{1}{11} = 4$ donc $C = \frac{45}{11}$.

$$f(x) = \frac{45}{11}e^{-\frac{11}{2}x} - \frac{1}{11}$$

**3.** Si $\varphi$ vérifie $(F)$ alors :

$$\begin{aligned} & 2\varphi'(x) - 3\varphi(x) = 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow & 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow & 4ax + 2b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow & 0 = (3 + 3a)x^2 + (3b - 4a - a)x + 3c - 2b + 2 \end{aligned}$$

En résolvant le système en $a, b, c$ par identification au polynôme nul, on obtient $a = -1, b = -1$ et $c = 0$. C'est-à-dire, $\varphi(x) = -x^2 - x$.

Enfin, $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ est sous la forme $y' = ay + f$.

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \varphi(x) \qquad \text{où } C \in \mathbf{R} \\ &= Ce^{\frac{3}{2}x} - x^2 - x \end{aligned}$$

**EXERCICE 2 (10 POINTS)**
Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) du Grand Est, la variable aléatoire $X$ donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}2$.

**1.** Déterminer la probabilité qu'il se passe une journée sans aucune intervention.

**2.** Déterminer la probabilité qu'il y ait deux interventions dans la journée.

**3.** Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.

**4.** Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins quatre interventions aujourd'hui ?

**5.** Déterminer la probabilité qu'il y ait, en tout, deux interventions sur deux journées consécutives.

**Bonus** Déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'une seule intervention en une semaine. En un mois ? Jusqu'à la fin des temps ?

**CORRECTION**
Notons que $X \sim \mathscr{B}(6; 0{,}2)$.

**1.** $\mathbb{P}(X=0) = \binom{6}{0} \times 0{,}2^0 \times (1-0{,}2)^6 = 0{,}8^6 \approx 0{,}262$

**2.** $\mathbb{P}(X=2) = \binom{6}{2} \times 0{,}2^2 \times (1-0{,}2)^4 \approx 0{,}246$

**3.** $\mathbb{E}[X] = 6 \times 0{,}2 = 1{,}2$ donc on peut espérer 1,2 interventions par jour.

**4.** Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin ($X \geqslant 1$), la probabilité qu'il y ait au moins 4 interventions ($X \geqslant 4$) aujourd'hui est égale à :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X\geqslant 1}(X \geqslant 4) &= \frac{\mathbb{P}(X \geqslant 1 \cap X \geqslant 4)}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geqslant 4)}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=6)}{1-\mathbb{P}(X=0)} \\ &\approx 0{,}023\end{aligned}$$

**5.** Posons $X_2$ la variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(12; 0{,}2)$ qui correspond trivialement au nombre d'interventions sur deux journées.
On doit calculer $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \binom{12}{2} \times 0{,}2^2 \times (1-0{,}2)^{10} \approx 0{,}069$.

**Bonus** Posons $X_n$ la variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(6n; 0{,}2)$ qui correspond au nombre d'interventions sur $n$ journées.

- Pour une semaine, $\mathbb{P}(X_7 = 1) = \binom{42}{1} \times 0{,}2^1 \times (1-0{,}2)^{41} \approx 9 \times 10^{-4}$.
- Pour un mois de 31 jours, $\mathbb{P}(X_31 = 1) = \binom{217}{1} \times 0{,}2^1 \times (1-0{,}2)^{216} \approx 5 \times 10^{-20}$.
- Jusqu'à la fin des temps, on aura une probabilité limite de $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0{,}2(6n-1)0{,}8^{6n-1}$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.