

Romain CESSAC

Master 2 Agrégation

22 Avril 2020

Renforcement

ENCADRÉ PAR Adrien Richou



TABLE DES MATIÈRES

1	Urne de Pólya	1
1.1	Modélisation	1
1.2	Comportement asymptotique	4
1.2.1	Rappels	5
1.2.2	Convergence du modèle	6
1.3	Généralisation	11
2	Marche aléatoire renforcée	15
2.1	Modélisation	15
2.2	Comportement asymptotique	18
2.2.1	Absence de renforcement	18
2.2.2	Renforcement linéaire	21
2.2.3	Renforcement géométrique	22
	Bibliographie	29

INTRODUCTION

Dans le mémoire suivant, nous proposons d'étudier deux modèles mathématiques présentant le phénomène de *renforcement*. On peut parler de *renforcement*, par exemple, en psychologie lorsque l'on cherche à augmenter les fréquences d'apparition de certains comportements chez des humains ou des animaux. Des concepts similaires apparaissent dans différents domaines tels que la sociologie [1], la biologie et la génétique (on pourrait parler du processus de *sélection naturelle* [2]) ou encore, ce qui nous intéresse ici, les mathématiques. En probabilité, notamment, le *renforcement* consistera à augmenter la probabilité d'un évènement.

Le premier modèle dont nous parlerons est celui du processus des *urnes de Pólya* qui voit, entre autres, des applications en économie pour l'analyse des marchés financiers, de leurs turbulences et de l'apparition de bulles spéculatives [3].

Le second modèle à l'étude sera lui la *marche aléatoire renforcée* qui peut apparaître si l'on regarde les chemins empruntés par des passants dans les montagnes ou même par des fourmis sur le sol.

On peut aussi évoquer le *graphe de Barabási-Albert*, qui peut permettre de modéliser les structures des amitiés sur les réseaux sociaux ou les liens entre pages internet sur le web. Il est approfondi dans le livre [RMA] de Djalil Chafaï et Florent Malrieu dont est tirée une très grande partie de ce mémoire. Enfin, quelques résultats et preuves ont été empruntés à [CR].

CHAPITRE 1

URNE DE PÓLYA

1.1 Modélisation

Présentons, dans un premier temps, une version simple de l'*urne de Pólya*. On dispose d'une urne qui contient des boules de deux couleurs différentes. Au temps initial, la composition de l'urne est de $a \in \mathbb{N}^*$ boules rouges et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. Au temps suivant, on tire dans l'urne une boule de manière aléatoire, on la replace et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur. On répète ce procédé à chaque étape.

On introduit maintenant la variable aléatoire $M_n \in [0,1]$ qui est la proportion de boules rouges au temps $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, étant donnée la construction de l'urne, à l'instant $n \in \mathbb{N}$, il y a $a + b + n$ boules et $(a + b + n)M_n$ boules rouges. Connaissant M_n , on peut exprimer facilement M_{n+1} puisqu'une boule rouge est ajoutée au temps $n + 1$ avec une probabilité de M_n et cet événement peut être écrit $\{U \leq M_n\}$ où $U \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Donc, on peut donner :

$$M_0 = \frac{a}{a+b}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \frac{(a+b+n)M_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}}{a+b+n+1}$$

où $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$.

Posons, pour $n \geq 1$, X_n la variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $X_n = 1$ si la boule tirée au temps n est rouge et $X_n = -1$ si elle est blanche. Enfin, Y_n et Z_n sont respectivement le nombre de boules rouges et blanches ajoutées dans l'urne au temps $n \in \mathbb{N}^*$. Par convention, $Y_0 = Z_0 = 0$.

Il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_n + Z_n = n$$

1.1. MODÉLISATION

et

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1}.$$

Enfin, on peut relier Y_n et M_n avec la formule :

$$a + Y_n = (a + b + n)M_n.$$

Remarque 1.1.1. On peut observer le comportement de l'urne de Pólya, pour différentes valeurs de a et b , à l'aide de quelques simulations de trajectoires (voir figures 1.1 et 1.2) de la variable aléatoire M_n . Au vu de ces tracés, on peut émettre l'hypothèse que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire non constante.

Nous allons maintenant énoncer quelques résultats.

Proposition 1.1.2.

$(M_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov non homogène à espace d'états $[0,1]$.

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soient $(t_0, \dots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+2}$ tels que $\mathbb{P}(M_n \leq t_n, \dots, M_0 \leq t_0) > 0$. Montrons que

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \leq t_{n+1} \mid M_n \leq t_n, \dots, M_0 \leq t_0) = \mathbb{P}(M_{n+1} \leq t_{n+1} \mid M_n \leq t_n). \quad (\star)$$

Il est important de remarquer que M_0 est constante presque sûrement en $\frac{a}{a+b}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, M_k est à valeurs dans un espace discret et fini E_k dépendant de k . Ainsi, à n fixé, il est équivalent de démontrer (\star) ou

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n, \dots, M_0 = t_0) = \mathbb{P}(M_{n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n) \quad (\star\star)$$

$$\text{avec } (t_0, \dots, t_{n+1}) \in E_0 \times \dots \times E_{n+1}.$$

Montrons $(\star\star)$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M_{n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n, \dots, M_0 = t_0) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(a+b+n)M_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}}{a+b+n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n, \dots, M_0 = t_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(a+b+n)t_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq t_n}}{a+b+n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n, \dots, M_0 = t_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(a+b+n)t_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq t_n}}{a+b+n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n\right) \\ & \quad \text{par indépendance de } U_{n+1} \text{ avec } M_{n-1}, \dots, M_0 \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{(a+b+n)M_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}}{a+b+n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n\right) \\ &= \mathbb{P}(M_{n+1} = t_{n+1} \mid M_n = t_n) \end{aligned}$$

1.1. MODÉLISATION

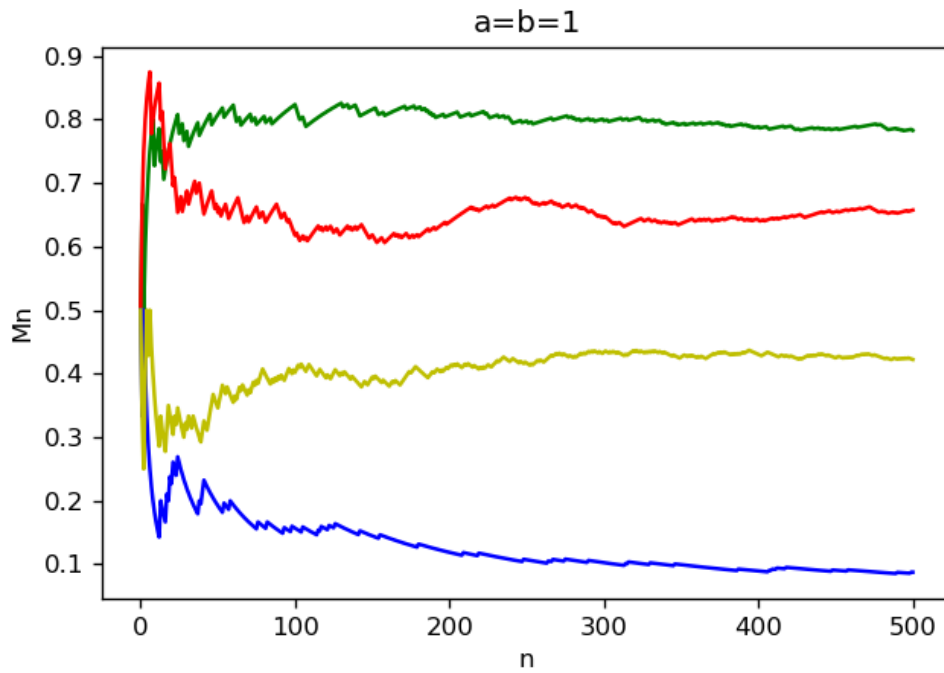


FIGURE 1.1 – Quelques trajectoires avec une situation initiale "équilibrée"

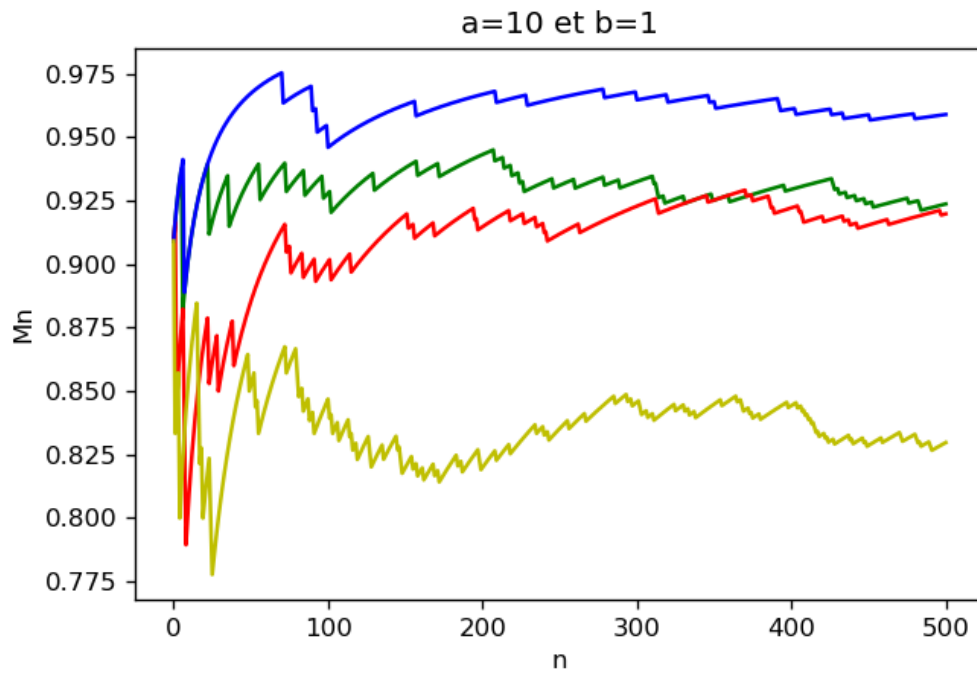


FIGURE 1.2 – Situation initiale "déséquilibrée"

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

On a bien prouvé que $(M_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Elle est clairement non-homogène. \square

Proposition 1.1.3.

$(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est à valeurs dans l'ensemble $[0,1]$ donc bornée sur un ensemble de mesure finie et ainsi M_n est intégrable.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$. M_n est bien \mathcal{F}_n -mesurable par construction, c'est à dire, $(M_n)_{n \geq 0}$ est adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{(a+b+n)M_n + \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}}{a+b+n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ &= \frac{a+b+n}{a+b+n+1} \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] + \frac{1}{a+b+n+1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}|\mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

On a d'une part, $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n$ car M_n est \mathcal{F}_n -mesurable et d'une autre, conditionnellement à \mathcal{F}_n , $\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $M_n \in [0,1]$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n} = 1|\mathcal{F}_n) \times 1 + \mathbb{P}(\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq M_n} = 0|\mathcal{F}_n) \times 0 \\ &= M_n \times 1 + (1 - M_n) \times 0 \\ &= M_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{(a+b+n)M_n}{a+b+n+1} + \frac{M_n}{a+b+n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= M_n. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 1.1.4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = \frac{a}{a+b}$

Démonstration. C'est évident puisque $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale et M_0 est constant. \square

1.2 Comportement asymptotique

Sur les simulations, tout porte à croire que $(M_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire. C'est un fait que nous allons préciser.

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

1.2.1 Rappels

Donnons, avant de continuer, quelques rappels qui nous serviront ensuite.

Théorème 1.2.1.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale bornée dans L^1 , c'est à dire telle que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$.

Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ intégrable.

Démonstration. Admise. □

Définition 1.2.2 (Loi bêta).

Soit $p > 0$, $q > 0$. Posons $B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$.

La fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{B(p, q)} \mathbb{1}_{]0, 1[}(t)$$

est la densité de probabilité d'une loi appelée bêta à paramètres (p, q) .

Proposition 1.2.3.

$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ où $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du \int_0^\infty v^{q-1} e^{-v} dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{p-1} v^{q-1} e^{-u-v} du dv && \text{par Fubini-Tonelli} \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 (zt)^{p-1} (z(1-t))^{q-1} e^{-z} z dt dz && \text{en posant } u = zt \text{ et } v = z(1-t) \\ &= \int_0^\infty e^{-z} z^{p+q-1} dz \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt && \text{toujours par Fubini-Tonelli} \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

□

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Définition 1.2.4 (Loi bêta-binomiale).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ et P qui suit une loi bêta à paramètres (α, β) .

On dit que X suit une loi bêta-binomiale de paramètres (n, α, β) si X est de la forme :

$$X = \sum_{k=1}^n B_k$$

où les B_k sont indépendants et la loi conditionnelle de B_k sachant P est une loi de Bernoulli de paramètre P .

Proposition 1.2.5.

Soit X suivant une loi bêta-binomiale de paramètres (n, α, β) .

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{B(\alpha + k, \beta + n - k)}{B(\alpha, \beta)}$$

Démonstration. En reprenant les notations de la définition 1.2.4 et en utilisant la formule des probabilités totales on a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \int_0^1 \mathbb{P}(X = k | P = p) f(p) dp \quad \text{où } f \text{ est la densité de la loi bêta}(\alpha, \beta).$$

Conditionnellement à $\{P = p\}$, X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \int_0^1 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dp \\ &= \binom{n}{k} \int_0^1 \frac{p^{\alpha+k-1} (1-p)^{\beta+n-k-1}}{B(\alpha, \beta)} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{B(\alpha + k, \beta + n - k)}{B(\alpha, \beta)}. \end{aligned}$$

□

1.2.2 Convergence du modèle

Théorème 1.2.6.

$(M_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement et dans L^p , pour tout $1 \leq p < \infty$, vers une variable aléatoire M_∞ à valeurs dans $[0, 1]$.

Démonstration. $\forall n \in \mathbb{N}, |M_n| \leq 1$ donc $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|M_n|] \leq 1 < \infty$ et on peut utiliser le théorème 1.2.1

qui nous donne la convergence presque sûre de $(M_n)_{n \geq 0}$ vers une variable aléatoire M_∞ . M_∞ est évidemment à valeurs dans $[0, 1]$ comme la suite $(M_n)_{n \geq 0}$.

Enfin, pour obtenir la convergence dans L^p , on va utiliser le théorème de convergence dominée :

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

- $(|M_n - M_\infty|^p)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers 0.
- $\forall n \in \mathbb{N}, |M_n - M_\infty|^p \leq 2^p$ intégrable.

Donc

$$\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[0] = 0.$$

□

Remarque 1.2.7. On a aussi $\mathbb{E}[M_\infty] = \frac{a}{a+b}$.

Théorème 1.2.8.

M_∞ suit une loi bêta sur $[0,1]$ de paramètres (a,b) .

Démonstration. On a convergence en loi de $(M_n)_{n \geq 0}$ vers M_∞ et donc convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de celle de M_∞ . Pour un tel $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_\infty \leq t).$$

Or, $M_n \leq t \Leftrightarrow Y_n \leq (a+b+n)t - a$. On veut donc déterminer la fonction de répartition de Y_n . Pour $c \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$, on pose

$$c^{(k)} := c(c+1) \dots (c+(k-1)) = \frac{(c+k-1)!}{(c-1)!} = \frac{\Gamma(c+k)}{\Gamma(c)}.$$

Pour tout n , Y_n est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ et $Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1}$. Prenons $k \in \{0, \dots, n\}$, $\{Y_n = k\}$ peut s'écrire

$$\bigcap_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k - (n-k) \\ k_i \in \{-1, 1\}}} \{X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n\}.$$

Par exemple, l'évènement $\{X_1 = 1, \dots, X_k = 1, \dots, X_{k+1} = -1, \dots, X_n = -1\}$ de cette intersection est de probabilité

$$\frac{a}{(a+b)} \frac{(a+1)}{(a+b+1)} \dots \frac{(a+k-1)}{(a+b+k-1)} \frac{b}{(a+b+k)} \dots \frac{(b+n-k+1)}{(a+b+n-1)} = \frac{a^{(k)} b^{(n-k)}}{(a+b)^{(n)}}.$$

En fait, tous les évènements de cette intersection sont indépendants et ont la même probabilité $\frac{a^{(k)} b^{(n-k)}}{(a+b)^{(n)}}$. Cela peut se remarquer facilement en décomposant, comme précédemment, en quotients successifs la probabilité de l'évènement. Les dénominateurs seront clairement égaux et les numérateurs aussi en regroupant de manière croissante les facteurs $(a+i)$ entre eux puis les $(b+j)$. Il reste à compter le nombre de ces évènements. On s'aperçoit que choisir l'un de ces évènements revient à choisir un n -uplet (k_1, \dots, k_n) où exactement k coordonnées parmi n sont égales à 1 et $n-k$ sont égales à -1.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{a^{(k)} b^{(n-k)}}{(a+b)^{(n)}}.$$

On peut réécrire ce résultat :

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\Gamma(a+k) \Gamma(b+n-k) \Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(a+b+n)}$$

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

et la proposition 1.2.3 nous donne :

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a, b)}.$$

C'est à dire que Y_n suit une loi bêta-binomiale de paramètre (n, a, b) . Pour conclure, regardons, à $t \in]0, 1[$ fixé, point de continuité de la fonction de répartition de M_∞ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_\infty \leq t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq (a+b+n)t - a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E_n} \mathbb{P}(Y_n = k) \text{ où } E_n := \left\{ k \in \mathbb{N} \mid k \leq (a+b+n)t - a \text{ et } k \leq n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a, b)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)} dp \\ &\quad (\text{La somme est finie car } \#E_n \leq n+1) \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 0$ et $p \in [0, 1] \setminus \{t\}$,

$$0 \leq \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

d'où

$$\left| \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)} \right| \leq \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)}.$$

$p \mapsto \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)}$ est intégrable sur $[0, 1]$ car densité d'une loi bêta donc on peut intervertir limite et intégrale à l'aide du théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\mathbb{P}(M_\infty \leq t) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)} dp$$

Nous allons devoir étudier E_n pour calculer cette limite. Premièrement, comme $t > 0$, E_n sera non-vide à partir d'un certain rang car $(a+b+n)t - a \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow \infty$. Enfin,

$$n \leq (a+b+n)t - a \Leftrightarrow t \geq \frac{a+n}{a+b+n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Supposons maintenant N très grand afin que pour tout $n \geq N$, $E_n = \{0, \dots, \lfloor (a+b+n)t - a \rfloor\}$ et $\lfloor (a+b+n)t - a \rfloor < n$. C'est possible puisque $t < 1$.

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Posons $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes où $W_n \sim \mathcal{B}(p)$ et $Z_n := \sum_{k=1}^n W_k$. Alors, on a pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \mathbb{P}(Z_n \in E_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_n \leq \lfloor (a+b+n)t - a \rfloor) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \leq \frac{\lfloor (a+b+n)t - a \rfloor}{n}\right) \end{aligned}$$

Premièrement, en vertu de la loi forte des grands nombres, $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[W_1] = p$, on a donc aussi convergence en loi.

Mais on a également,

$$\frac{\lfloor (a+b+n)t - a \rfloor}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{a+b}{n} + t - \frac{a}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t.$$

D'où, on obtient, pour $p \in [0,1] \setminus \{t\}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) = \mathbb{P}(p \leq t) = \mathbf{1}_{[0,t]}(p)$$

et donc, en intégrant $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)}$, on a bien

$$\mathbb{P}(M_\infty \leq t) = \int_0^t \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a,b)} dp.$$

C'est à dire, M_∞ suit bien une loi bêta sur $[0,1]$ de paramètres (a,b) .

□

Remarque 1.2.9. Dans le cas $a = b = 1$, on obtient le théorème précédent bien plus facilement. La loi bêta(1,1) est en fait la loi uniforme sur $[0,1]$, résultat qui se lit facilement en comparant les densités respectives. Enfin, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{1^{(k)} 1^{(n-k)}}{(2)^{(n)}} \\ &= \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

C'est à dire, $Y_n \sim \mathcal{U}(\{0, \dots, n\})$ et enfin $M_n = \frac{Y_{n+1}}{n+2} \sim \mathcal{U}(\{\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{n+1}{n+2}\})$. On a la conclusion attendue par un passage à la limite en $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 1.2.10. On peut observer cette convergence en loi, par simulation, sur les figures 1.3 et 1.4. Ici, la fonction de répartition empirique de M_n converge bien vers celle attendue, c'est à dire, celle de la loi bêta(a,b).

1.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

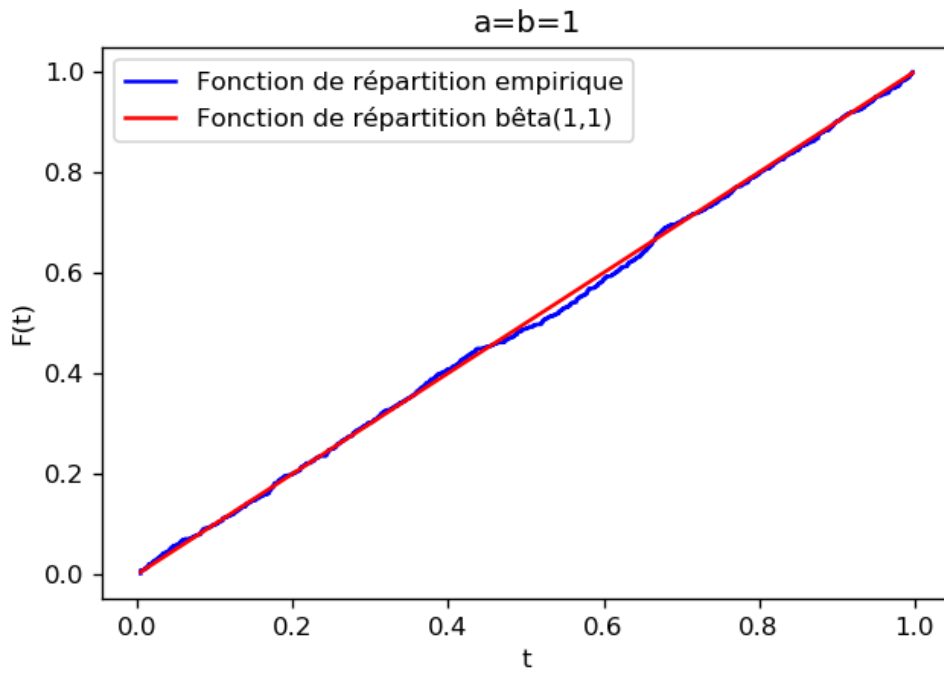


FIGURE 1.3 – Convergence en loi vers la loi uniforme dans le cas "équilibré"

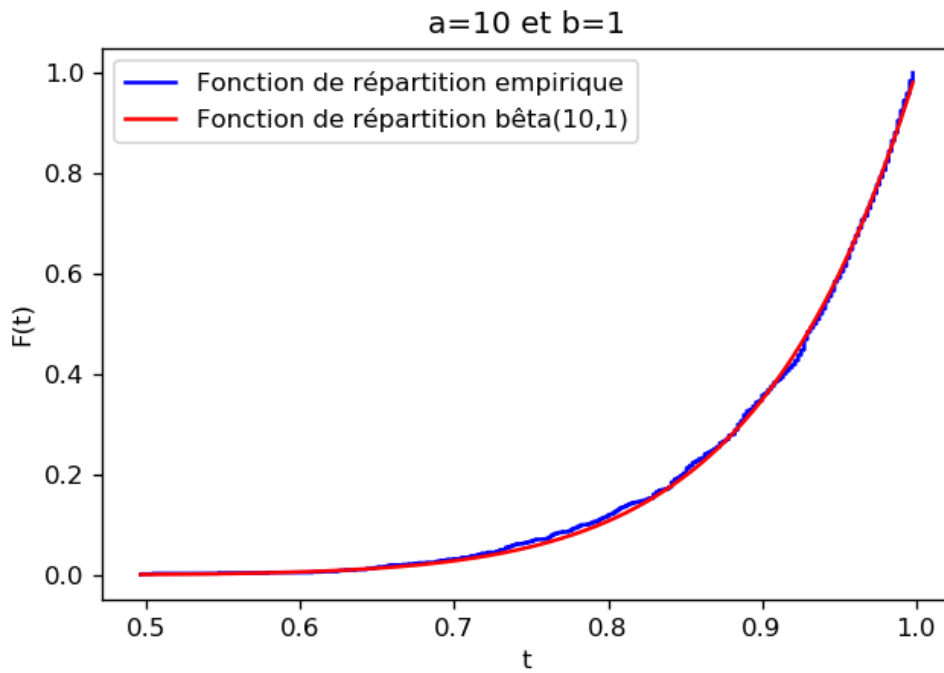


FIGURE 1.4 – Cas "déséquilibré"

1.3 Généralisation

Les résultats de la section précédente sont encore vrais lorsque a et b sont des réels strictement positifs. C'est ainsi l'un des intérêts d'avoir utilisé les fonctions Gamma et Bêta qui généralisent la notion de factorielles pour des réels. Les figures 1.5 et 1.6 en donnent une illustration, avec $a = \pi$ et $b = e$.

On peut également compléter le modèle de l'urne de Pólya. Prenons $r \in [-1, +\infty[$, et on construit l'urne de la même manière, à l'exception qu'à chaque étape, on ajoute $1 + r$ boules de la couleur tirée.

Remarque 1.3.1. Si $r = 1$, on retrouve le cas précédemment étudié en 1.1.

Remarque 1.3.2. Dans le cas $r = 0$, à chaque itération, on tire une boule parmi a rouges et b blanches et on la replace. C'est à dire, on fait un tirage avec remise d'une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \sim \mathcal{R}\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

et

$$Y_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$$

Remarque 1.3.3. À $r = -1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n suit une loi hypergéométrique de paramètres $(n, \frac{a}{a+b}, a+b)$. En effet, les tirages sont désormais sans remise.

Proposition 1.3.4.

Dans le cas général, $r \in [-1, +\infty[$, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{a^{(r,k)} b^{(r,n-k)}}{(a+b)^{(r,n)}}$$

avec $c^{(r,k)} = c(c+r) \dots (c+(k-1)r)$.

Enfin, pour $r \neq 0$, M_∞ suit une loi bêta de paramètres $(\frac{a}{r}, \frac{b}{r})$.

Démonstration. La première partie se prouve par dénombrement, comme pour 1.2.8.

Si $r \neq 0$,

$$\begin{aligned} c^{(r,k)} &= c(c+r) \dots (c+(k-1)r) \\ &= r^k \frac{c}{r} \left(\frac{c}{r} + 1\right) \dots \left(\frac{c}{r} + (k-1)\right) \\ &= r^k \left(\frac{c}{r}\right)^{(k)}. \end{aligned}$$

1.3. GÉNÉRALISATION

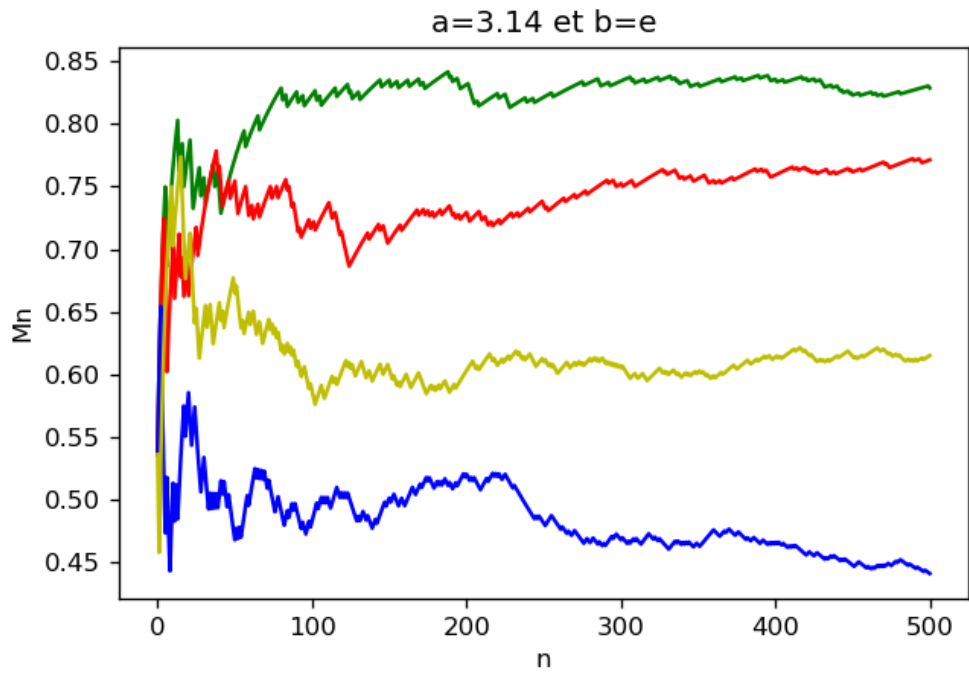


FIGURE 1.5 – Trajectoires pour l'urne de Pólya généralisée

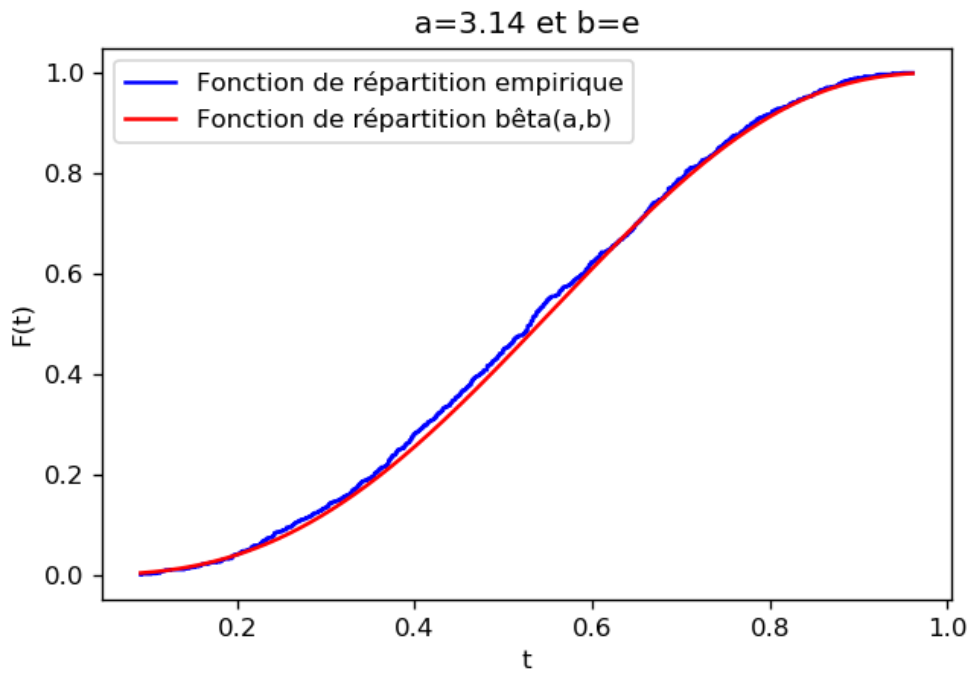


FIGURE 1.6 – Convergence en loi pour l'urne de Pólya généralisée

1.3. GÉNÉRALISATION

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{r^{k(\frac{a}{r})} r^{(n-k)(\frac{b}{r})}}{r^{n(\frac{a+b}{r})}} \\ &= \binom{n}{k} \frac{(\frac{a}{r})^{(k)} (\frac{b}{r})^{(n-k)}}{(\frac{a+b}{r})^{(n)}}\end{aligned}$$

et on peut conclure comme pour 1.2.8. □

1.3. GÉNÉRALISATION

CHAPITRE 2

MARCHE ALÉATOIRE RENFORCÉE

2.1 Modélisation

Nous proposons le problème suivant : des fourmis veulent quitter leur fourmilière pour en rejoindre une autre, les unes après les autres, et elles ont le choix entre deux chemins possibles pour y arriver. Si un chemin est choisi, alors des phéromones y sont déposées et augmentent les chances de ce chemin d'être choisi ensuite par les autres fourmis.

Pour modéliser cette expérience, nous allons noter X_n égal à 1 ou 0 le chemin choisi par la $(n+1)^e$ fourmi, n étant un entier naturel positif ou nul. Il faut également prendre en compte l'attractivité des deux chemins, nous posons ainsi A_n et B_n des réels strictement positifs correspondant aux quantités de phéromones présentes respectivement sur les chemins 1 et 0 au temps $n \in \mathbb{N}$. En se donnant une fonction $r : \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, r(x) \geq x$ et $(A_0, B_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on peut proposer une construction de la suite $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $X_n = 1$, alors $(A_{n+1}, B_{n+1}) = (r(A_n), B_n)$. Dans le cas $X_n = 0$, on a $(A_{n+1}, B_{n+1}) = (A_n, r(B_n))$. On appelle r la *fonction de renforcement*.

Soit maintenant $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi uniforme sur $[0,1]$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ va être déterminée par la récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \mathbb{1}_{U_{n+1} \leq \frac{A_n}{A_n + B_n}}.$$

Notons que le rôle de X_0 importe peu puisqu'on a fixé au départ le couple (A_0, B_0) .

Remarque 2.1.1. Tout comme dans le chapitre précédent, il est intéressant d'observer le comportement du modèle à l'aide de simulations. Pour ce faire, on peut regarder le quotient $\frac{A_n}{A_n + B_n}$ qui est la probabilité que $X_{n+1} = 1$ et nous allons faire varier les données initiales (A_0, B_0) ainsi que la fonction de renforcement r .

Sur la première figure 2.1, A_0 et B_0 sont sensiblement du même ordre et la fonction de renforcement assez proche de l'identité. Cela dit, à chaque fois, $\frac{A_n}{A_n + B_n}$ converge soit vers 1 soit vers

2.1. MODÉLISATION

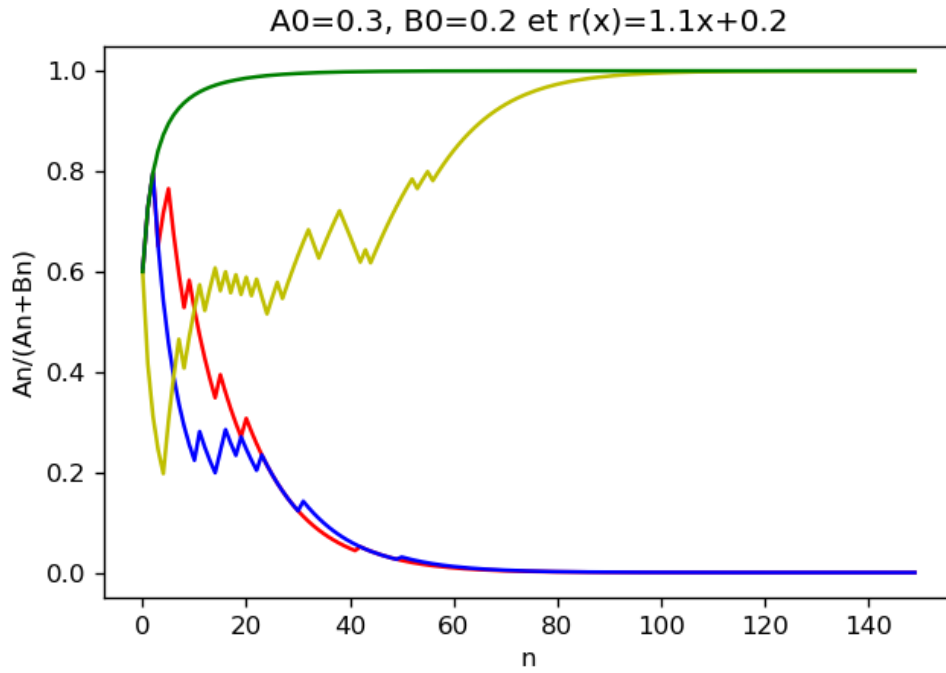


FIGURE 2.1 – Quelques trajectoires du rapport $\frac{A_n}{A_n+B_n}$

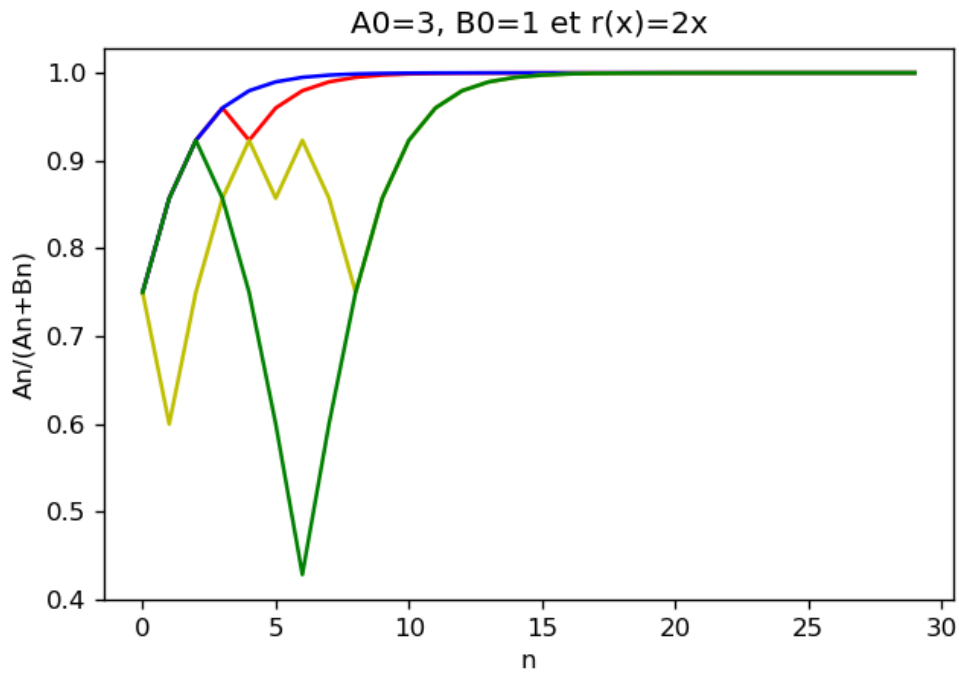


FIGURE 2.2 – Autres trajectoires de $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ pour des paramètres différents

2.1. MODÉLISATION

0. C'est à dire que, pour en revenir au problème initial, avec ces paramètres, les fourmis finiront à partir d'un certain moment par toutes prendre le même chemin presque sûrement. Le phénomène de renforcement prend donc tout son sens. Pour la figure 2.2, le renforcement est plus fort et le chemin 1 est bien plus favorisé au départ. On constate que $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ converge toujours et plus rapidement que dans le cas précédent. Il est maintenant temps de donner un premier résultat.

Théorème 2.1.2.

$(X_n, A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov non homogène à espace d'état $\{0,1\} \times \Delta(A_0) \times \Delta(B_0)$ où $\Delta(x) := \{r^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $x > 0$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $E = \{0,1\} \times \Delta(A_0) \times \Delta(B_0)$ est un ensemble dénombrable. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\xi_0, \dots, \xi_{n+1} \in E$, où ξ_i est de la forme (x_i, a_i, b_i) , tels que

$$\mathbb{P}\left((X_n, A_n, B_n) = \xi_n, \dots, (X_0, A_0, B_0) = \xi_0\right) > 0.$$

Si $x_n = 1$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left((X_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}) = \xi_{n+1} \mid (X_n, A_n, B_n) = \xi_n, \dots, (X_0, A_0, B_0) = \xi_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq \frac{A_n}{A_n+B_n}}, r(A_n), B_n\right) = \xi_{n+1} \mid (X_n, A_n, B_n) = \xi_n, \dots, (X_0, A_0, B_0) = \xi_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq \frac{a_n}{a_n+b_n}}, r(a_n), b_n\right) = \xi_{n+1} \mid (X_n, A_n, B_n) = \xi_n, \dots, (X_0, A_0, B_0) = \xi_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(\mathbb{1}_{U_{n+1} \leq \frac{a_n}{a_n+b_n}}, r(a_n), b_n\right) = \xi_{n+1} \mid (X_n, A_n, B_n) = \xi_n\right) \\ & \text{par indépendance de } U_{n+1} \text{ avec } (X_{n-1}, A_{n-1}, B_{n-1}), \dots, (X_0, A_0, B_0) \\ &= \mathbb{P}\left((X_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}) = \xi_{n+1} \mid (X_n, A_n, B_n) = \xi_n\right). \end{aligned}$$

Si $x_n = 0$, on procède de la même manière. Ainsi, $(X_n, A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov. \square

Remarque 2.1.3. La marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement une chaîne de Markov. En effet, dans le cas général, il est impossible de déterminer la loi du chemin que va prendre une fourmi en ne connaissant que celui qu'a pris la fourmi précédente.

Remarque 2.1.4. Dans le cas où (A_0, B_0) et r prennent uniquement des valeurs entières, on peut considérer l'expérience comme étant, au temps $n \in \mathbb{N}^*$, un tirage de boule dans une urne contenant A_n boules rouges et B_n boules blanches avec remise dépendant de r . Si on tire une boule rouge, on la repose dans l'urne ainsi que $r(A_n) - A_n$ autres boules de la même couleur. Pour une boule blanche, $r(B_n) - B_n$ seront déposées en plus de cette boule.

Par exemple, si $r(x) = x$, il s'agit d'un tirage avec remise classique et il n'y a pas de renforcement. Pour $r(x) = 1 + x$, on s'aperçoit qu'il s'agit exactement de l'urne de Pólya décrite dans le chapitre précédent.

2.2 Comportement asymptotique

Désormais, nous allons utiliser l'hypothèse simplificatrice $A_0 = B_0 = 1$. On définit aussi deux nouvelles suites de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$Y_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=1} = \sum_{k=1}^n X_k$$

et

$$Z_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{X_k=0} = \sum_{k=1}^n (1 - X_k)$$

qui correspondent respectivement au nombre de passage sur le chemin 1 ou 0 au temps n . On ne compte pas le chemin choisi à $n = 0$ car il est inutile. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n + Z_n = n$. Enfin, on obtient directement des relations entre Y_n et A_n ainsi qu'entre Z_n et B_n . Pour $n \geq 0$,

$$A_n = r^{Y_n}(A_0) = r^{Y_n}(1)$$

et

$$B_n = r^{Z_n}(B_0) = r^{Z_n}(1)$$

L'objet de cette section est d'étudier le comportement asymptotique de ces suites de variables aléatoires sous différentes fonctions de renforcement.

2.2.1 Absence de renforcement

On choisit la fonction de renforcement $r : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.
 $x \longmapsto x$

Dans ce cas, le modèle devient beaucoup plus simple. Les suites $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont constantes égales à 1. $(X_n, A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une chaîne de Markov, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en est une aussi. En fait, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ devient même une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{A_0}{A_0+B_0} = \frac{1}{2}$.

Proposition 2.2.1.

$$Y_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad Z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{2} \text{ p.s.}$$

Démonstration. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Z_n = \sum_{k=1}^n (1 - X_k).$$

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

D'autre part, si $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, alors $1 - X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On applique donc la loi forte des grands nombres aux deux suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(1 - X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Ainsi,

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}$$

et

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[1 - X_1] = \frac{1}{2}.$$

□

Remarque 2.2.2. On vient de voir que la fréquence du choix d'un chemin converge vers $\frac{1}{2}$, c'est à dire, ce à quoi on pouvait s'attendre.

Proposition 2.2.3.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |Y_n - Z_n| = 0 \text{ p.s.}$$

Démonstration. Remarquons que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} = (Y_n - Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible. En effet, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la marche aléatoire centrée sur \mathbb{Z} : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} - T_n = X_{n+1} - (1 - X_{n+1}) = 2X_{n+1} - 1 \sim \mathcal{R}\left(\frac{1}{2}\right).$$

On sait que la marche aléatoire est une chaîne de Markov irréductible à espace d'état \mathbb{Z} . On pourra conclure si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente en l'état 0. Considérons $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_n = 0)$. En effet, 0 est récurrent si et seulement si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_n = 0)$ diverge.

Si n est impair, $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$. Sinon, $n = 2m$ et

$$\mathbb{P}(T_n = 0) = \frac{\binom{2m}{m}}{2^{2m}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \text{ par la formule de Stirling.}$$

Enfin, $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{\sqrt{\pi m}}$ diverge par le critère de Riemann.

0 est récurrent donc $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle presque sûrement une infinité de fois. C'est à dire, il existe presque sûrement une sous-suite nulle de $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. D'où,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |Y_n - Z_n| \leq 0 \text{ p.s.}$$

□

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

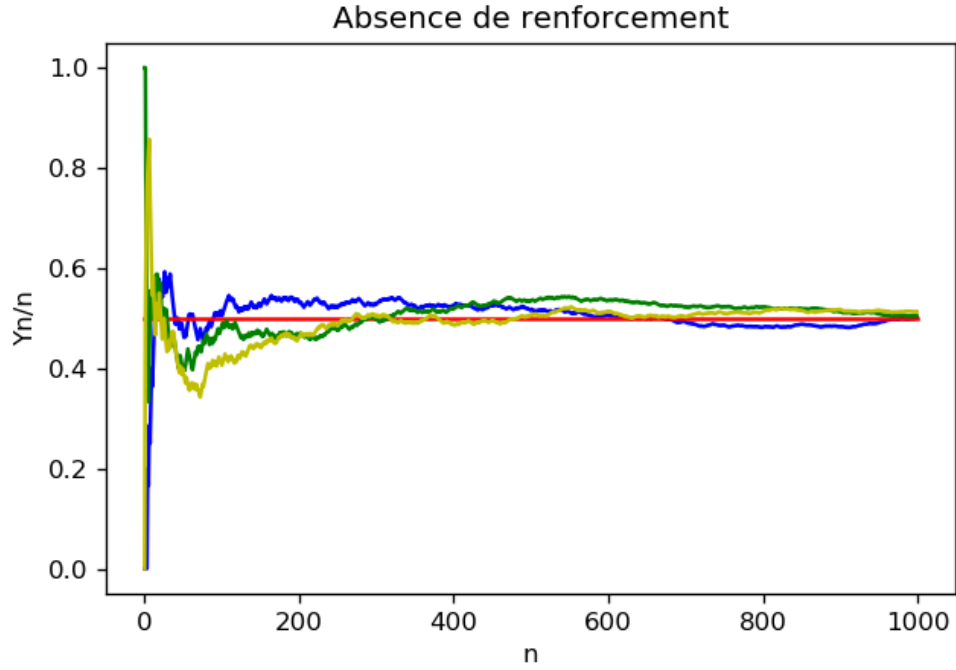


FIGURE 2.3 – Illustration de la proposition 2.2.1

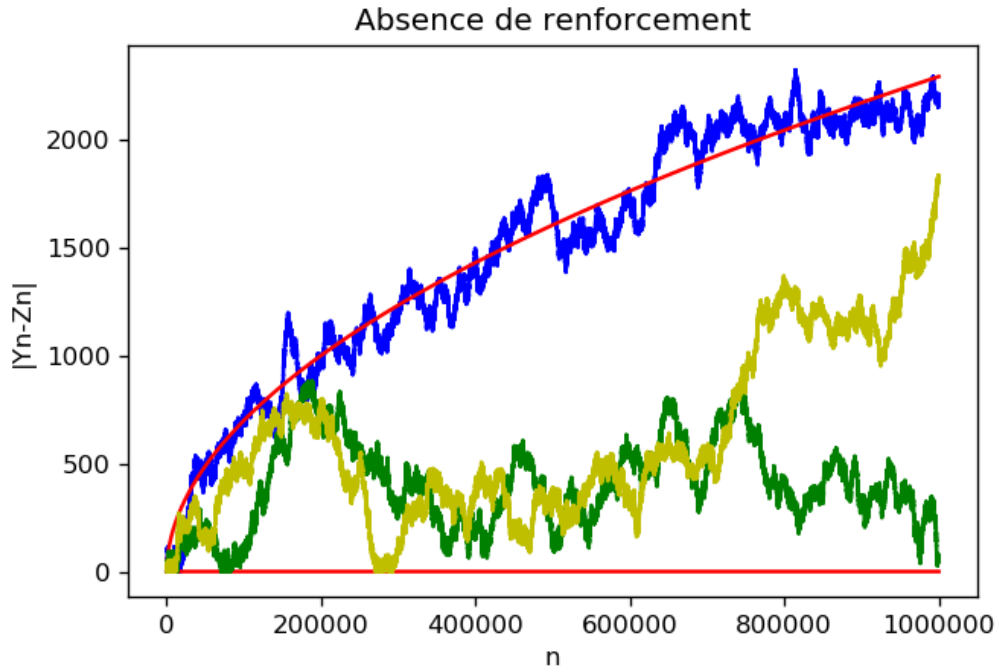


FIGURE 2.4 – Illustration de la proposition 2.2.3 et du théorème 2.2.5

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Lemme 2.2.4 (Loi du logarithme itéré).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées possédant un moment d'ordre 2 fini. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ et

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors, on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma \sqrt{2 \log \log n}} = 1 \text{ p.s.}$$

et

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma \sqrt{2 \log \log n}} = -1 \text{ p.s.}$$

Démonstration. Admise. □

Théorème 2.2.5.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{|Y_n - Z_n|}{\sigma \sqrt{2n \log \log n}} = 1 \text{ p.s.}$$

Démonstration. On reprend la notation $T_n = Y_n - Z_n$ introduite pendant la preuve de 2.2.3. On applique le lemme 2.2.4 à la suite $(T_n - T_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d de loi de Rademacher, donc d'espérance nulle et de variance 1. Ainsi,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\frac{Y_n - Z_n}{n})}{\sqrt{2 \log \log n}} = 1 \text{ p.s. et } \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(\frac{Y_n - Z_n}{n})}{\sqrt{2 \log \log n}} = -1 \text{ p.s.}$$

Comme $\frac{\sqrt{n}(\frac{Y_n - Z_n}{n})}{\sqrt{2 \log \log n}} = \frac{Y_n - Z_n}{\sqrt{2n \log \log n}}$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, $\frac{\sqrt{n}(\frac{Y_n - Z_n}{n})}{\sqrt{2 \log \log n}} \in]-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$ à partir d'un certain rang, on peut conclure que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{|Y_n - Z_n|}{\sigma \sqrt{2n \log \log n}} = 1 \text{ p.s.}$$

□

Remarque 2.2.6. Sur la figure 2.4, on peut observer le comportement de $|Y_n - Z_n|$.

2.2.2 Renforcement linéaire

On considère ici la fonction de renforcement $r : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.
 $x \longmapsto 1 + x$

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Théorème 2.2.7.

Il existe une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ telle que

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} U$$

et

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1 - U.$$

Démonstration. Nous avons vu à la remarque 2.1.4 que nous sommes face à une urne de Pólya ($A_n = 1 + Y_n$ et $B_n = 1 + Z_n$). Elle est à paramètres $a = A_0 = 1$ et $b = B_0 = 1$. Enfin, la variable aléatoire M_n du chapitre précédent correspond au quotient $\frac{A_n}{A_n + B_n}$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \frac{A_n}{A_n + B_n} = \frac{1 + Y_n}{(1 + Y_n) + (1 + Z_n)} = \frac{1 + Y_n}{n + 2} = \frac{1}{n + 2} + \frac{n}{n + 2} \frac{Y_n}{n}.$$

On a $\frac{1}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0$ et $\frac{n}{n+2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 1$. Enfin, par le théorème 1.2.8, $M_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} M_\infty$ où $M_\infty \sim \mathcal{U}([0,1])$. Donc,

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} M_\infty$$

et

$$\frac{Z_n}{n} = 1 - \frac{Y_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 1 - M_\infty.$$

□

2.2.3 Renforcement géométrique

Prenons la fonction de renforcement $r : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, avec $\lambda > 0$.

$$x \mapsto \lambda x$$

Nous avons dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \lambda^{Y_n}$ et $B_n = \lambda^{Z_n}$.

Lemme 2.2.8.

Posons, pour tout $n \geq 0$, $T_n = Y_n - Z_n$. Si $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie $f(1) \geq f(0)$ et $\forall n \geq 1, \lambda^n(f(n+1) - f(n)) = f(n) - f(n-1)$. Alors $(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $n \geq 0$, $f(|T_n|)$ est discret à valeurs dans un espace fini, donc intégrable. Définissons maintenant la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \dots, U_n)$.

$(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ est adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, à $n \geq 1$ fixé, X_1, \dots, X_n sont \mathcal{F}_n -mesurables et ainsi, $T_n = \sum_{k=1}^n (2X_k - 1)$ est \mathcal{F}_n -mesurable. On a bien que $f(|T_n|)$ est \mathcal{F}_n -mesurable lui aussi.

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Regardons maintenant pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}[f(|T_{n+1}|)|\mathcal{F}_n] = f(|T_n| + 1)\mathbb{P}\left(|T_{n+1}| = |T_n| + 1 \middle| \mathcal{F}_n\right) + f(|T_n| - 1)\mathbb{P}\left(|T_{n+1}| = |T_n| - 1 \middle| \mathcal{F}_n\right).$$

On a $T_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, T_{k+1} &= T_k + 2(X_{k+1} - 1) \\ &= T_k + \mathbb{1}_{U_{k+1} \leq \frac{A_k}{A_k + B_k}} - \mathbb{1}_{U_{k+1} > \frac{A_k}{A_k + B_k}} \\ &= T_k + \mathbb{1}_{U_{k+1} \leq \frac{\lambda^{Y_k}}{\lambda^{Y_k} + \lambda^{Z_k}}} - \mathbb{1}_{U_{k+1} > \frac{\lambda^{Y_k}}{\lambda^{Y_k} + \lambda^{Z_k}}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|T_{n+1}| = |T_n| - 1 \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{P}\left(U_{n+1} > \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_{T_n > 0} + \mathbb{P}\left(U_{n+1} \leq \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &= \frac{\lambda^{Z_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \mathbb{1}_{T_n > 0} + \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &\text{car } U_{n+1} \sim \mathcal{U}([0,1]) \text{ et } U_{n+1} \perp \mathcal{F}_n \\ &= \frac{1}{\lambda^{T_n} + 1} \mathbb{1}_{T_n > 0} + \frac{1}{1 + \lambda^{-T_n}} \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &= \frac{1}{1 + \lambda^{|T_n|}} \mathbb{1}_{T_n \neq 0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|T_{n+1}| = |T_n| + 1 \middle| \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{1}_{T_n = 0} + \mathbb{P}\left(U_{n+1} \leq \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_{T_n > 0} + \mathbb{P}\left(U_{n+1} > \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \middle| \mathcal{F}_n\right) \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &= \mathbb{1}_{T_n = 0} + \frac{\lambda^{Y_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \mathbb{1}_{T_n > 0} + \frac{\lambda^{Z_n}}{\lambda^{Y_n} + \lambda^{Z_n}} \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &\text{toujours car } U_{n+1} \sim \mathcal{U}([0,1]) \text{ et } U_{n+1} \perp \mathcal{F}_n \\ &= \mathbb{1}_{T_n = 0} + \frac{\lambda^{T_n}}{\lambda^{T_n} + 1} \mathbb{1}_{T_n > 0} + \frac{\lambda^{-T_n}}{1 + \lambda^{-T_n}} \mathbb{1}_{T_n < 0} \\ &= \mathbb{1}_{T_n = 0} + \frac{\lambda^{|T_n|}}{1 + \lambda^{|T_n|}} \mathbb{1}_{T_n \neq 0}. \end{aligned}$$

Reste à étudier $f(|T_n| + 1)$ et $f(|T_n| - 1)$. Si $T_n = 0$, alors $f(|T_n| + 1) = f(1) \geq f(0) = f(|T_n|)$. Sinon pour $T_n \neq 0$, par définition de f :

$$\begin{aligned} f(|T_n| + 1) - f(|T_n|) &= \frac{f(|T_n|) - f(|T_n| - 1)}{\lambda^{|T_n|}} \\ \iff f(|T_n| + 1) &= f(|T_n|) + \frac{f(|T_n|)}{\lambda^{|T_n|}} - \frac{f(|T_n| - 1)}{\lambda^{|T_n|}} \\ \iff f(|T_n| + 1) \frac{\lambda^{|T_n|}}{1 + \lambda^{|T_n|}} &= f(|T_n|) - \frac{f(|T_n| - 1)}{1 + \lambda^{|T_n|}} \end{aligned}$$

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Donc, on peut simplifier notre expression :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(|T_{n+1}|)|\mathcal{F}_n] &= f(|T_n| + 1) \left(\mathbb{1}_{T_n=0} + \frac{\lambda^{|T_n|}}{1 + \lambda^{|T_n|}} \mathbb{1}_{T_n \neq 0} \right) + f(|T_n| - 1) \left(\frac{1}{1 + \lambda^{|T_n|}} \mathbb{1}_{T_n \neq 0} \right) \\
 &= f(|T_n| + 1) \mathbb{1}_{T_n=0} + \left(f(|T_n| + 1) \frac{\lambda^{|T_n|}}{1 + \lambda^{|T_n|}} + f(|T_n| - 1) \frac{1}{1 + \lambda^{|T_n|}} \right) \mathbb{1}_{T_n \neq 0} \\
 &= f(1) \mathbb{1}_{T_n=0} + f(|T_n|) \mathbb{1}_{T_n \neq 0} \\
 &\geq f(|T_n|).
 \end{aligned}$$

Nous avons bien montré que $(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale. □

Théorème 2.2.9.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une sous-martingale bornée dans L^1 .

Alors $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ intégrable.

Démonstration. Admise. □

Théorème 2.2.10.

Presque sûrement, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang et sa valeur limite suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Démonstration. Considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 n &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-\frac{k(k+1)}{2}} & \text{sinon} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Elle vérifie $f(1) = 1 \geq f(0) = 0$ et si $n > 0$,

$$\begin{aligned}
 \lambda^n (f(n+1) - f(n)) &= \lambda^n \lambda^{-\frac{n(n+1)}{2}} \\
 &= \lambda^{-\frac{(n-1)n}{2}} \\
 &= f(n) - f(n-1).
 \end{aligned}$$

On va lui appliquer le lemme 2.2.8 et on obtient donc que $(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-martingale. f est bornée par $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) < +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^k}$ et $\frac{1}{\lambda} < 1$) et ainsi $(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée. Le théorème 2.2.9 nous donne sa convergence presque sûre.

f est strictement croissante et à valeurs dans un espace discret, ainsi $(f(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s vers le seul point d'accumulation de l'image de f qui s'avère être $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$. Clairement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n| = +\infty \text{ p.s.}$$

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Nous allons pouvoir conclure en étudiant la croissance de la suite $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. On appelle C_N , pour N , les évènements $\{\forall n \geq N, |T_{n+1}| = |T_n| + 1\}$. Ils nous permettent de traduire la croissance de $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang N . On a, pour $d > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_N | |T_N| = d) &= \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|T_{N+(k+1)}| = d + (k+1) \middle| |T_{N+k}| = d + k\right) \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{d+k}}{1 + \lambda^{d+k}} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^{-(d+k)}} \\ &= \prod_{k=d}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^{-k}}. \end{aligned}$$

Si $d = 0$,

$$\mathbb{P}(C_N | |T_N| = 0) = 1 \times \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|T_{N+(k+1)}| = k+1 \middle| |T_{N+k}| = k\right) = \mathbb{P}(C_{N+1} | |T_{N+1}| = 1).$$

On remarque que $\mathbb{P}(C_N | |T_N| = d)$ ne dépend pas de N , on va noter cette probabilité α_d , croissante en d et $\lim_{d \rightarrow \infty} \alpha_d = 1$. On recherche maintenant la probabilité de l'évènement $C : "(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang".

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{N \geq 0} C_N\right) &\geq \sup_{N \geq 0} \mathbb{P}(C_N) = \sup_{N \geq 0} \sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{P}(C_N | |T_N| = d) \mathbb{P}(|T_N| = d) = \sup_{N \geq 0} \sum_{d=0}^{\infty} \alpha_d \mathbb{P}(|T_N| = d) \\ &\quad (\text{par la formule des probabilités totales}) \end{aligned}$$

Cependant, à d fixé, $\mathbb{P}(|T_N| = d) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$, étant donné que $\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n| = +\infty$ p.s. On peut donc continuer à minorer le sup en retirant les premiers termes de la série. C'est à dire, pour $D \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(C) \geq \sup_{N \geq 0} \sum_{d=D}^{\infty} \alpha_d \mathbb{P}(|T_N| = d) \geq \alpha_D \sup_{N \geq 0} \sum_{d=D}^{\infty} \mathbb{P}(|T_N| = d) = \alpha_D \xrightarrow[D \rightarrow \infty]{} 1.$$

Pour résumer, $(|T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s vers $+\infty$ et est même strictement croissante à partir d'un certain rang presque sûrement. Ainsi, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi presque sûrement strictement monotone à partir d'un certain rang. La relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{T_{n+1} - T_{n+1}}{2}$ permet évidemment de conclure, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constant à partir d'un certain rang. Enfin, notons p la probabilité que la valeur limite de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit 1. On s'aperçoit que le modèle, tous les résultats et les raisonnements précédents sont toujours valables en remplaçant $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 - X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, autant dire en échangeant le rôle des deux chemins. Finalement, la probabilité que $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ait 1 comme limite est encore p et donc p est nécessairement égal à $\frac{1}{2}$ par symétrie. \square

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

Remarque 2.2.11. C'est probablement le modèle de renforcement le plus intéressant. Concrètement, les fourmis finiront toujours par prendre le même chemin au bout d'un certain temps contrairement aux autres modèles où le rapport des choix des chemins va seulement devenir constant ($\frac{1}{2}$ pour une absence de renforcement et $u \in [0,1]$ dans le cas linéaire). Ici, on est assuré d'avoir une convergence presque sûre de $\frac{A_n}{A_n+B_n}$ soit vers 0 soit vers 1, avec la même probabilité. On illustre et vérifie ces résultats par simulation en figures 2.5 et 2.6.

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

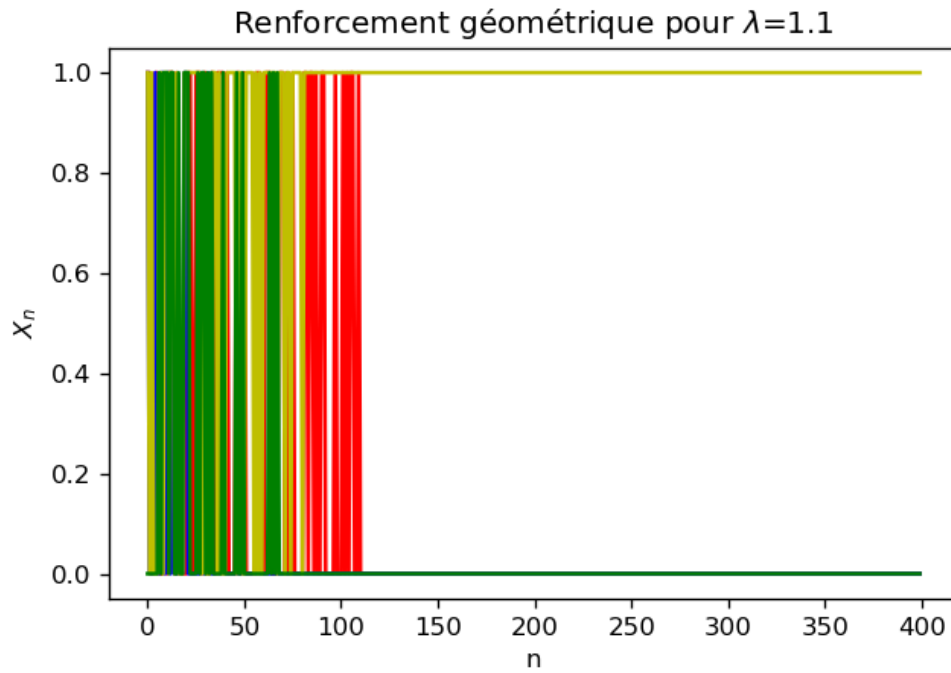


FIGURE 2.5 – Illustration de la convergence presque sûre de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$

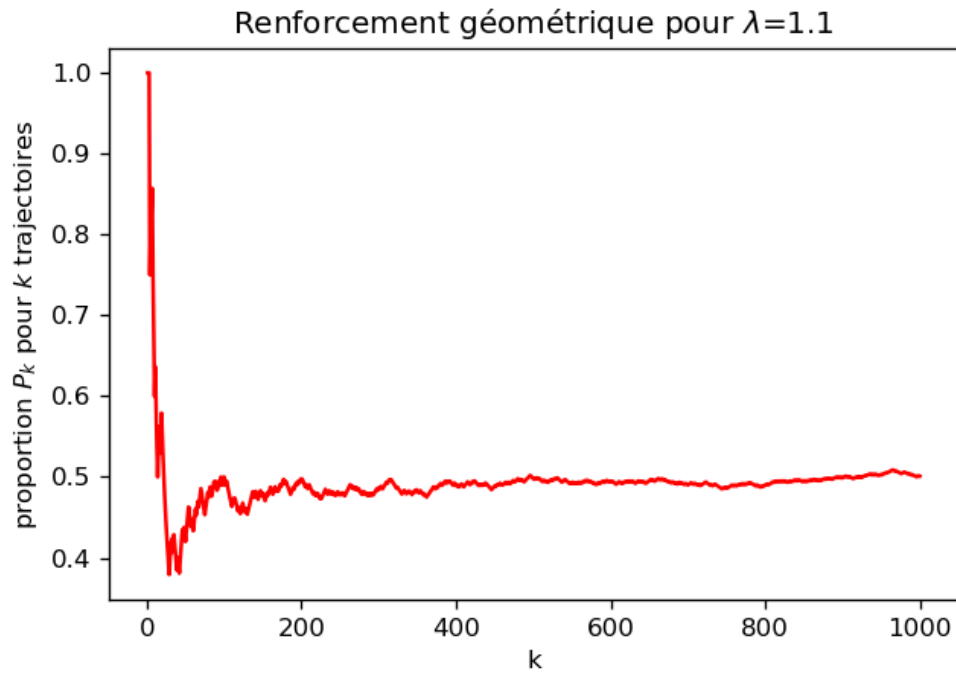


FIGURE 2.6 – P_k représente la proportion de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui ont convergées vers 1 pour k suites

2.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

BIBLIOGRAPHIE

- [RMA] D. Chafaï, F. Malrieu, *Recueil de Modèles Aléatoires*, Springer, 2016.
- [CR] M-L. Chabanol, J-J. Ruch, *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*, Ellipses, 2016.
- [1] K. Huffman, M. Vernoy, J. Vernoy, *Psychologie en direct*, 2e édition, Modulo, Mont-Royal, 2000, p. 227
- [2] E. Mayr, *Histoire de la biologie. Diversité, évolution et hérédité*, Fayard, 1989, p. 894
- [3] N. Moureau, H. Tordjman, A. Vignes, *Quoi de neuf du côté des marchés*, 1997, p. 20

