11

ÉTUDE DE FONCTION

Résumé

Nous avons besoin d'un catalogue de fonctions usuelles qui seront centrales en mathématiques. Il est indispensable de connaître un large panel de fonctions pour répondre à de nombreux problèmes. Les fonctions carré, inverse et racine carrée sont des classiques et leur propriétés sont à maîtriser.

1 Fonctions de référence

1.1 Fonction carré

Définition

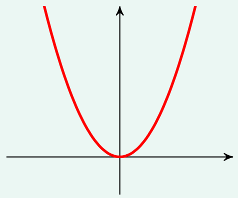
La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.

Propriétés | Parité et positivité

- Pour tout réel x, $(-x)^2 = x^2$, c'est-à-dire $f(-x) = f(x)$.
  On dit que la fonction carré est **paire**.
- Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, soit $f(x) \geqslant 0$.
  On dit que la fonction carré est **positive** sur $\mathbf{R}$.

Définition

La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une **parabole**.



Remarques

- La courbe représentative est toujours située au dessus de l'axe des abscisses (positivité de f).
- La courbe représentative admet un axe de symétrie : l'axe des ordonnées (parité de f).

Propriétés | Variations de la fonction carré

- La fonction carré est **croissante** sur $[0; +\infty[$:
  pour tout $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $x^2 \leqslant y^2$.
- La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty; 0]$:
  pour tout $x \leqslant y \leqslant 0$, on a $y^2 \leqslant x^2$.

Démonstration.

- Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. Montrons que $x^2 - y^2 \leqslant 0$.
  Par la troisième identité remarquable,
  $$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y).$$
  On étudie le signe de ces deux quantités : $x + y \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ (puisque par hypothèse $0 \leqslant x \leqslant y$).
  La règle du signe implique que $x^2 - y^2 \leqslant 0$.
- La preuve est similaire.

$\square$

Remarque On résume le résultat précédent dans un tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	↘	0	↗

Exercice

Dans chaque cas, comparer numériquement les deux nombres puis utiliser la parabole de la fonction carré dans un repère pour visualiser la comparaison.

1. 3^2 et 4^2
2. $1{,}5^2$ et $(-0{,}5)^2$
3. $1{,}7^2$ et $1{,}5^2$
4. $(-3{,}7)^2$ et $(-4{,}2)^2$

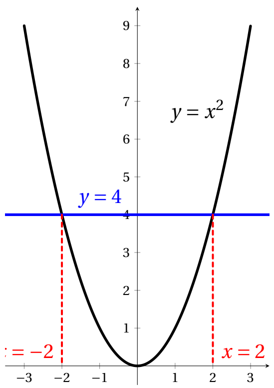
Remarque On va souvent avoir besoin de résoudre des équations ou des inéquations faisant intervenir l'expression de la fonction carré. On peut utiliser la représentation graphique (la parabole) afin de les résoudre. Donnons quelques exemples.

▶ Trouvons les solutions réelles de l'équation $6x^2 = 24$.

On commence par isoler le terme x^2 :

$$\begin{aligned} & 6x^2 = 24 \\ \iff & x^2 = \frac{24}{6} \\ \iff & x^2 = 4 \end{aligned}$$

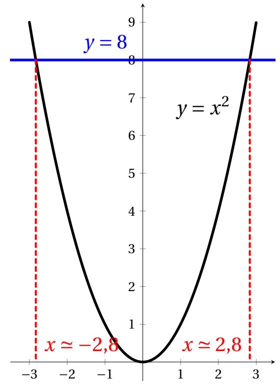
Regardons, graphiquement, quels x ont pour image 4 par la fonction carré.



Donc l'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions réelles qui sont -2 et 2 et ce sont les mêmes solutions pour $6x^2 = 24$.

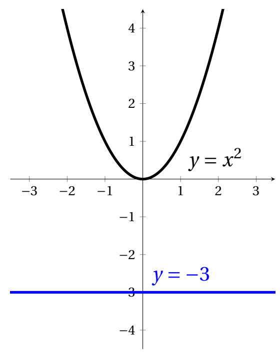
▶ Trouvons les solutions réelles de l'inéquation $x^2 < 8$.

Regardons, graphiquement, quels x ont pour image 8 par la fonction carré.



Ainsi, les solutions réelles de l'inéquation $x^2 < 8$ sont comprises strictement entre les deux abscisses obtenues (qui correspondent à $\sqrt{8}$ et $-\sqrt{8}$). On peut lire graphiquement une valeur approchée de $\sqrt{8}$ qui est environ de 2,8.

▶ Trouvons graphiquement les solutions réelles de l'équation $x^2 = -3$.



Les deux courbes ne s'intersectent pas : il n'y a pas de solution à l'équation $x^2 = -3$. C'était attendu puisqu'un carré est toujours positif. D'où, $\mathscr{S} = \emptyset$.

1.2 Fonction cube

Définition

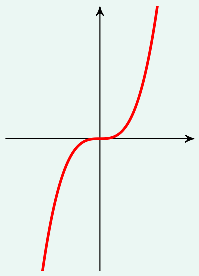
La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^3$.

Propriété | Imparité

Pour tout réel x, $(-x)^3 = -x^3$, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$.
On dit que la fonction cube est **impaire**.

Définition

La courbe représentative de la fonction cube s'appelle une **cubique**.



Remarque La courbe représentative admet un centre de symétrie : l'origine du repère (imparité de f).

Propriété | Variations de la fonction cube

La fonction cube est **croissante** sur $]-\infty;+\infty[$.
Pour tout $x \leqslant y$, on a $x^3 \leqslant y^3$.

Démonstration. Soient $x \leqslant y$. Montrons que $x^3 - y^3 \leqslant 0$.
On peut remarquer, en développant le membre de droite par exemple, que

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + yx + y^2).$$

On étudie le signe de ces deux quantités : $x - y$ qui est toujours négatif par hypothèse et $x^2 + yx + y^2$.
On peut minorer $x^2 + yx + y^2$ par $x^2 + x \times x + y^2 = 2x^2 + y^2$ qui est positif.
Ainsi,

$$x^2 + yx + y^2 \geqslant 2x^2 + y^2 \geqslant 0.$$

Finalement, le produit $(x-y)(x^2 + yx + y^2)$ est bien négatif comme voulu. □

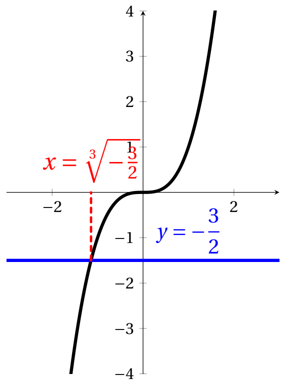
Remarques

- Le tableau de variation de la fonction cube est simple.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3	↗	

- Tout comme pour la fonction carré, on peut désormais, à partir de la courbe de la fonction cube, résoudre graphiquement des équations du type $x^3 = k$ ou des inéquations $x^3 < k$.

  Comme la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbf{R}$, les équations $x^3 = k$ possèdent une unique solution, qu'on appelle **racine cubique** de k (notée $\sqrt[3]{k}$).



Théorème | Positions relatives des courbes de référence sur $[0;+\infty[$

On note $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

- Sur $[0;1]$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_3$.

  C'est-à-dire, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.

- Sur $[1;+\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_1$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_2$, qui est elle-même en dessous de la courbe $\mathscr{C}_3$.

  C'est-à-dire, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$.

Démonstration. ▶ Soit $x \in [0;1]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Nous pouvons multiplier par x (positif) les deux membres de l'inéquation sans en changer le sens.

Ainsi, $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ et on peut même préciser que $0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant 1$.

En multipliant à nouveau par x, on établit :

$$0 \leqslant x^3 \leqslant x^2 \leqslant x.$$

▶ Soit $x \geqslant 1$. Comme dans le cas précédent, nous pouvons multiplier par x les deux membres de l'inéquation et $x^2 \geqslant x$.

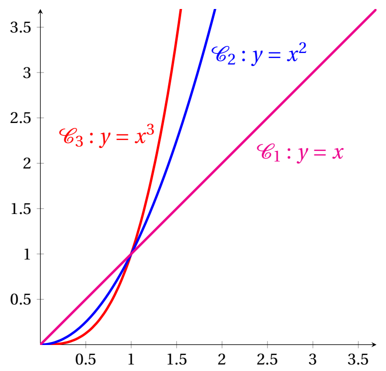
En multipliant une nouvelle fois par x, nous obtenons $x^3 \geqslant x^2$.

Combinons toutes les inégalités et nous avons

$$1 \leqslant x \leqslant x^2 \leqslant x^3.$$

□

Remarque On visualise très bien le résultat précédent sur le graphique suivant. Notons que les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ appartiennent aux trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



Exemples ▶ On peut comparer 0,5, $0{,}5^2$ et $0{,}5^3$. $0{,}5 \in [0;1]$ donc

$$0{,}5 \geqslant 0{,}5^2 \geqslant 0{,}5^3.$$

▶ De même, $1{,}5 \geqslant 1$ donc

$$1{,}5^3 \geqslant 1{,}5^2 \geqslant 1{,}5.$$

Exercice

1. Comparer 0,8, $(-0{,}8)^3$, $-0{,}8$, $0{,}8^2$ et $0{,}8^3$
2. Faire de même en remplaçant 0,8 par -2.

1.3 Fonction inverse

Définition

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Attention

Notons bien que la fonction **n'est pas définie** en 0.

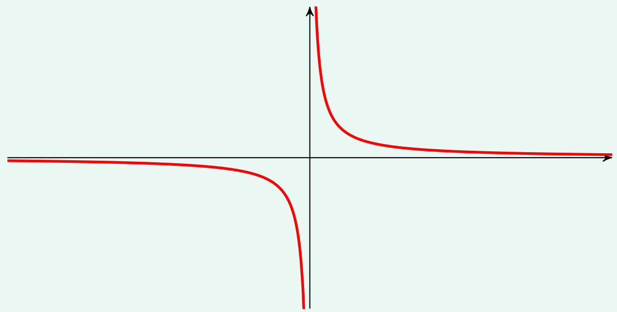
Propriété | Imparité

La fonction inverse est **impaire**.

Démonstration. En effet, pour tout x réel, $\dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$ donc $f(-x) = -f(x)$. □

Définition

La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.



Propriétés | Variations de la fonction inverse

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty;0[$:

  Pour tout $x \leqslant y < 0$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]0;+\infty[$:

  Pour tout $0 < x \leqslant y$, on a $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

Attention

Si $x < 0 < y$ alors
$$\frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{x}.$$

Démonstration. ► Soient $x \leqslant y < 0$. On divise la double inégalité par xy qui est strictement positif (produit de deux strictement négatifs) et le sens des inégalités ne change donc pas.

$$\frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy} < \frac{0}{xy}$$
$$\iff \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} < 0$$

► Soient $0 < x \leqslant y$. On divise encore la double inégalité par xy qui est strictement positif (produit de deux strictement positifs).

$$\frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy}$$
$$\iff 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}$$

□

Remarque Le tableau de variations de la fonction inverse est le suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

Exercice

À l'aide du résultat sur les variations de la fonction inverse, déterminer l'intervalle auquel appartient $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants.

- $x \in [5;20]$
- $x \in [1\,000;2\,000]$
- $x \in [10^6;10^{15}]$
- $x \in [-4;-1]$
- $x \in [-5\,000;-3\,000]$
- $x \in \left[-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{2}\right]$

1.4 Fonction racine carrée

Définition

La **fonction racine** est la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété | Positivité

La fonction racine carrée est **positive**.

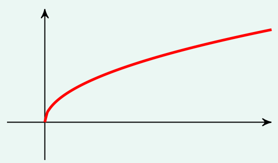
Démonstration. Par définition de la racine carrée : si $a \geqslant 0$ alors $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** y tel que $y^2 = a$. □

Attention

Il est important de noter que la fonction racine carrée n'est pas définie sur $]-\infty;0[$.

Définition

La courbe représentative de la fonction racine carrée s'appelle une **demi-parabole**.



Propriété | Variations de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est **croissante** sur $[0;+\infty[$.
Pour tout $0 \leqslant x \leqslant y$, on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

Démonstration. Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. **Montrons par l'absurde** que $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.
Dans le cas où $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ est faux, c'est-à-dire $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, nous pouvons utiliser la croissance de la fonction carré pour établir $(\sqrt{x})^2 > (\sqrt{y})^2$. Ainsi, $x > y$, ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. Notre raisonnement est impossible et donc nous avons montré que $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ par l'absurde. □

Remarque Le tableau de variation de la fonction carré est trivial.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$\nearrow$

2 Propriétés générales

2.1 Parité

Définitions | Fonction paire, fonction impaire

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}$.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = f(x)$ alors f est **paire**.
Si pour tout x de $\mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$ et $f(-x) = -f(x)$ alors f est **impaire**.

Exemples Nous avons déjà vu que la fonction carré est paire et que la fonction cube est impaire.

⚠ Attention

Notons bien que l'ensemble de définition d'une fonction à parité doit être **symétrique** par rapport à 0 !

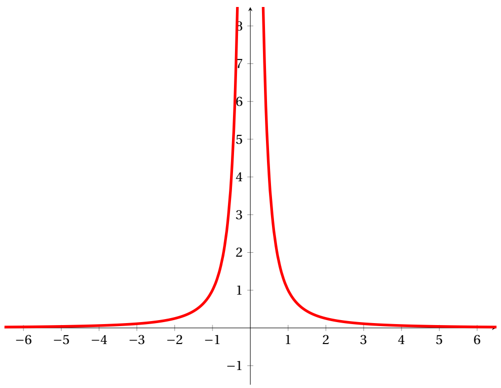
Remarques
- Si une fonction est **paire** alors sa courbe représentative dans un **repère orthogonal** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
- Si une fonction est **impaire**, il y a une **symétrie centrale par rapport au point** $(0;0)$.
- Une fonction peut être ni paire ni impaire. C'est le cas de la fonction racine carrée.

Exemples
- Soit f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

  Soit $x \in \mathscr{D}$. Tout d'abord, $-x \in \mathscr{D}$ car $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0.

  Enfin, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2} = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$.

  Ainsi, f est **paire** comme on peut le voir ci-dessous.

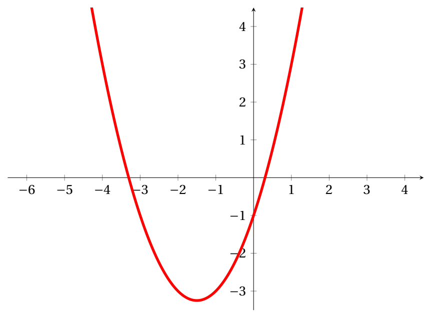


- Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

  Si $x \in \mathbf{R}$, $-x \in \mathbf{R}$ et $f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) - 1 = x^2 - 3x - 1$.

  Pour $x = 2$, $f(-2) = 2^2 - 3 \times 2 - 1 = -3$ mais $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$.

  Ainsi, $f(-2) \neq f(2) \neq -f(2)$ et f est ni paire ni impaire. On donne sa représentation graphique :



Exercice

Pour chaque fonction f définie par son expression, déterminer $f(-x)$ puis en déduire la parité de la fonction f.

1. $f(x) = 3x^2 - 10$ sur $\mathbf{R}$
2. $f(x) = x^3 - 2x + 7$ sur $\mathbf{R}$
3. $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$ sur $\mathbf{R}^*$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ sur $[-1;1]$

2.2 Variations

Définitions | Fonction croissante, fonction strictement croissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est croissante sur** I si :

  pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \leqslant f(y)$.

- On dit que f **est strictement croissante sur** I si :

  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) < f(y)$.

Exemple La fonction affine définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 5x - 1$ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

Définitions | Fonction décroissante, fonction strictement décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f **est décroissante sur** I si :

  pour tout $x \leqslant y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) \geqslant f(y)$.

- On dit que f **est strictement décroissante sur** I si :

  pour tout $x < y$ ($x \in I$ et $y \in I$), alors $f(x) > f(y)$.

Exemple La fonction affine définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -x - 2$ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

Remarque Une fonction constante sur I est à la fois croissante et décroissante sur I (pas strictement).

Attention

On parle toujours de variations **sur un intervalle**. Dire que ń f est croissante ż ne veut rigoureusement rien dire !

Définitions | Fonction monotone, fonction strictement monotone

Une fonction est dite **monotone** sur un intervalle I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.
Une fonction est **strictement monotone** sur un intervalle I si elle est strictement croissante sur I ou si elle est strictement décroissante sur I.

Remarque On résume usuellement les variations d'une fonction dans un tableau de variations.
La tableau de la fonction carré a déjà été vu (strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $]0;+\infty[$).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Les tableaux rappellent aussi quand la fonction n'est pas définie, comme en 0 pour la fonction inverse.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2.3 Extremums d'une fonction sur un intervalle

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $m \in \mathbf{R}$.

Définition | Maximum

m est le **maximum de** f **sur** I si m est le plus petit des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le maximum m est **atteint en** a.

Exemple Le maximum de la fonction cube sur l'intervalle $[-2;2]$ est 8. En effet, la fonction cube est strictement croissante sur cet intervalle donc le maximum sera l'image du plus grand élément de $[-2;2]$.

Remarque La fonction carré n'admet pas de maximum sur $\mathbf{R}$ mais en admet sur des intervalles comme $[-1;1]$ ou $[5;16]$.

Définition | Minimum

m est le **minimum de** f **sur** I si m est le plus grand des réels k tels que pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant k$. En particulier, si m est l'image d'un élément a de I ($m = f(a)$), on dit que le minimum m est **atteint en** a.

Exemple 0 est le minimum de la fonction carré sur $\mathbf{R}$. En effet, $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geqslant 0$.

Définition | Extremum

On appelle un **extremum** de f sur I le maximum sur I ou le minimum sur I.