10

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Résumé

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations qui contiennent des variables inconnues et qui doivent être résolues ensemble pour trouver les valeurs de ces variables qui satisfont toutes les équations en même temps.

1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Définition | Systèmes de deux équations à deux inconnues

On appelle **système de deux équations à deux inconnues** x et y tout système pouvant s'écrire sous la forme suivante (où a, b, c, a', b', $c' \in \mathbf{R}$).

$$\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Une **solution** de ce système est un couple $(x;y)$ solution des deux équations simultanément.

Exemple On considère le système $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$.

Le couple $(1;-1)$ est solution de $x+y=0$ ainsi que de $3x-y=3$ donc $(1;-1)$ est solution du système.

Remarque Si $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$, nous obtenons des **équations cartésiennes** de droites (d) et (d').

$$\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + \ by - \ c = 0 \\ a'x + b'y - c' = 0 \end{cases}$$

Ainsi, une solution du système correspond à un point $M(x;y)$ appartenant à (d) mais aussi à (d'). C'est-à-dire, M appartient à l'**intersection des deux droites** (d) et (d').

Propriété | Existence et unicité de la solution

Soit un système $\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ tel que $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$.

Il existe un **unique couple solution** si et seulement si $ab' - ba' \neq 0$.

Démonstration. Les deux équations du système correspondent à deux équations cartésiennes de droites qu'on note (d) et (d'). On peut décomposer la situation en deux cas disjoints :

- (d) et (d') sont sécantes en un seul point.
- (d) et (d') sont parallèles (peut-être même confondues).

Or nous avons vu que $d \,//\, d' \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$. C'est-à-dire, en passant à la négation, (d) et (d') sont sécantes en un seul point $\Leftrightarrow ab' - ba' \neq 0$ $\square$

Exemples

- $\begin{cases} 16x + 12y + 40 = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ **admet** une unique solution car $16 \times 2 - 2 \times 12 = 32 - 24 = 8 \neq 0$.
- $\begin{cases} 25x + 12y - 1 = 0 \\ 50x + 24y - 2 = 0 \end{cases}$ **n'admet pas** une unique solution car $25 \times 24 - 50 \times 12 = 0$.

  Il y a, en fait, une infinité de solutions car les équations cartésiennes désignent la même droite.

2 Résolution

Donnons les différentes techniques permettant de manipuler des systèmes équivalents (c'est-à-dire dont les solutions sont identiques).

Résoudre un système $\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, c'est trouver $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que :

$$\begin{cases} ax + \ by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}.$$

Méthode | Opérations usuelles

Il est possible de remplacer une des équations par une équation qui lui est équivalente (à l'aide des techniques déjà connues comme factoriser, développer, ajouter un même nombre, multiplier par un nombre non nul).
Par exemple,

$$\begin{cases}16x+12y+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+3y+10=0\\ x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+3y=-10\\ x+y=\ \ 0\end{cases}.$$

Méthode | Permutation

On peut échanger indifféremment les deux équations du système :

$$\begin{cases}ax+\ by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a'x+b'y=c'\\ ax+\ by=c\end{cases}.$$

Méthode | Substitution

Si on a isolé une des inconnues, on peut la substituer dans la seconde équation.
Par exemple,

$$\begin{cases}4x+3y=-10\\ x+y=\ \ 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+3y=-10\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4(-y)+3y=-10\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-y=-10\\ x=-y\end{cases}$$

Il est très facile de conclure, en utilisant à nouveau la technique de substitution en remplaçant y par sa valeur 10.

$$\begin{cases}-y=-10\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\ 10\\ x=-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\ 10\\ x=-10\end{cases}$$

Finalement, $\begin{cases}16x+12y+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\ 10\\ x=-10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-10\\ y=\ 10\end{cases}.$

L'unique solution du système $\begin{cases}16x+12y+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$ est le couple $(-10;10)$.

Méthode | Combinaison linéaire

On peut ajouter ou soustraire (membre à membre) un multiple non nul d'une équation à l'autre.
Ainsi, on soustrait 6 fois la deuxième équation à la première.

$$\begin{cases}16x+12y+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16x+12y+40-6\times(2x+2y)=0-6\times 0\\ 2x+2y=\ \ 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+0y+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+40=0\\ 2x+2y=0\end{cases}$$

On divise les équations par 4 et 2 respectivement.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+10=0\\ x+y=0\end{cases}$$

On soustrait la première équation à la deuxième.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\ \ -10\\ x+y-x=-(-10)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-10\\ y=\ 10\end{cases}$$

Remarque Les techniques de **substitution** ou **combinaison linéaire** sont fondamentales et doivent être choisies judicieusement selon la forme du système à résoudre.