

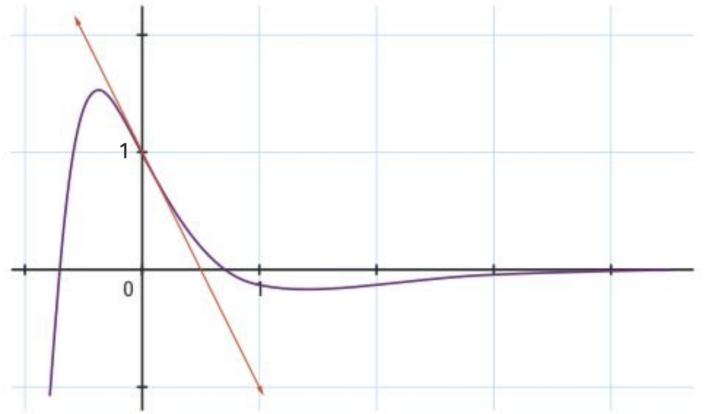
DEVOIR SURVEILLÉ 6

Calculatrice autorisée

Lundi 14 avril 2025

EXERCICE 1 (5 POINTS)

La courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbf{R} est donnée ci-dessous ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.



Pour chacune des affirmation suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

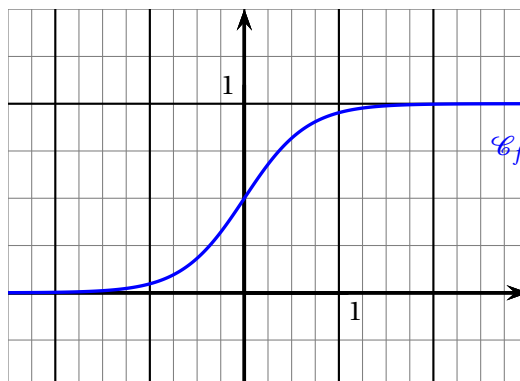
1. $f'(0) > 0$
2. f est convexe sur $[0; 2]$.
3. $f''(x) > 0$ sur $[-1; 0]$
4. Si f est la dérivée d'une fonction g alors g est décroissante sur $[1; 3]$.
5. Si f est la dérivée d'une fonction g alors g est convexe sur $[0; 0,5]$.

EXERCICE 2 (15 POINTS)

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-3x}}.$$

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative \mathcal{C}_f .



1. Conjecturer la convexité de f sur \mathbf{R} .
2. Étudier les variations de f sur \mathbf{R} .

3. On admet que f'' est définie sur \mathbf{R} par :

$$f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x} - 1)}{(1 + e^{-3x})^3}.$$

Donner, en justifiant, la convexité de f .

4.
 - a. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .
 - b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f .
5.
 - a. Montrer qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0,99$ sur \mathbf{R} .
 - b. Déterminer la valeur exacte de α .
6. (bonus) Déterminer la convexité de la fonction g définie sur \mathbf{R} par :

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

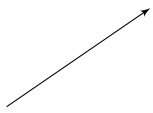
CORRECTION

1. La fonction semble être convexe sur $] -\infty ; 0]$ et concave sur $[0 ; +\infty[$.

2. En posant $u(x) = 1 + e^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3e^{-3x}$.

$$\text{De } f(x) = \frac{1}{u(x)}, \text{ on a donc } f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2} = \frac{3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2}.$$

On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^{-3x} > 0$, donc $1 + e^{-3x} > 1 > 0$ et $(1 + e^{-3x})^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur \mathbf{R} . La fonction f est strictement croissante sur \mathbf{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$3e^{-3x}$	+	
$(1 + e^{-3x})^2$	+	
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

3. Comme $9e^{-3x} > 0$ et $(1 + e^{-3x})^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $e^{-3x} - 1$:

- $e^{-3x} - 1 = 0 \iff e^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff x = 0$;
- $e^{-3x} - 1 > 0 \iff e^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff x < 0$;
- $e^{-3x} - 1 < 0 \iff e^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff x > 0$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$9e^{-3x}$	+		+
$e^{-3x} - 1$	+	0	-
$(1 + e^{-3x})^3$	+		+
$f''(x)$	+	0	-

f est convexe sur $]-\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$.

4. a. Avec $X = -3x$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-3x} = 1$ et enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

b. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-3x} = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-3x} = +\infty$ et enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + e^{-3x}} = 0$.

5. a. Utiliser le TVI.

b. On a $f(x) = 0,99 \iff \frac{1}{1 + e^{-3x}} = 0,99 \iff 1 = 0,99(1 + e^{-3x}) \iff 1 = 0,99 + 0,99e^{-3x} \iff 0,01 = 0,99e^{-3x} \iff \frac{0,01}{0,99} = e^{-3x} \iff \frac{1}{99} = e^{-3x}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln\left(\frac{1}{99}\right) = \ln(e^{-3x}) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \frac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

6. Graphiquement, on observe déjà que g est concave sur \mathbf{R} .

Ensuite, g est deux fois dérivable sur \mathbf{R} comme composée. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ comme } g \text{ composée logarithmique} \\ &= \frac{3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1 + e^{-3x}}{3e^{-3x}}} \\ &= \frac{3e^{-3x}}{1 + e^{-3x}} \end{aligned}$$

On dérive à nouveau (comme quotient $\frac{u}{v}$) :

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-9e^{-3x}(1 + e^{-3x}) - (-3e^{-3x})3e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2} \\ &= \frac{e^{-3x}(-9 - 9e^{-3x} + 9e^{-3x})}{(1 + e^{-3x})^2} \\ &= \frac{-9e^{-3x}}{(1 + e^{-3x})^2} \end{aligned}$$

g est concave sur \mathbf{R} car $g''(x)$ est du signe de -9 , tous les autres facteurs étant strictement positifs.