4

Inégalités et inéquations

Résumé

Ce chapitre est la suite logique du chapitre 2 sur le calcul littéral : après avoir étudié l'égalité, étudions l'inégalité.

1 Propriétés des inégalités

Propriété | Ordre dans $\mathbb{R}$

Si a, b et c sont des réels tels que $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.

Propriétés | Somme

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

- $a < x \Leftrightarrow a + b < x + b$
- $a < x \Leftrightarrow a - b < x - b$
- Si $a < x$ et $b < y$, alors $a + b < x + y$.

Propriétés | Produit

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

- Si $b > 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba < bx$
- Si $b < 0$, alors $a < x \Leftrightarrow ba > bx$

Remarque On a plusieurs conséquences du résultat précédent.

- $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow a^n \leqslant b^n$.

2 Valeur absolue

Définition | Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit $|x|$ la **valeur absolue** de x comme suit :

- Si $x > 0$, alors $|x| = x$
- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$

Exemples

- $|5| = 5$
- $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$

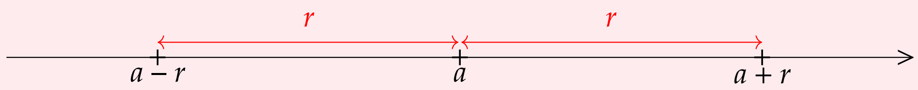
Remarques

- Une valeur absolue est toujours positive.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété

Soient $a, x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

$$|x - a| \leqslant r \Leftrightarrow a - r \leqslant x \leqslant a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$$



3 Inéquations

Définition | Inéquations

Une **inéquation** d'inconnue x est une inégalité qui peut être vraie pour certaines valeurs de x et fausse pour d'autres.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation d'inconnue x, c'est trouver l'ensemble de ses **solutions**, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inégalité est vraie.

Exemples

- $3x + 2 > 7 \Leftrightarrow 3x + 2 \mathbf{-2} > 7 \mathbf{-2} \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{\mathbf{3}} > \dfrac{5}{\mathbf{3}} \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$

  L'ensemble des solutions de $3x + 2 > 7$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} = \left]\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$.

- $-x + 9 \geqslant -2 \Leftrightarrow -x + 9 \mathbf{-9} \geqslant -2 \mathbf{-9} \Leftrightarrow -x \geqslant -11 \Leftrightarrow (\mathbf{-1}) \times (-x) \leqslant (\mathbf{-1}) \times (-11)$

Notons bien que l'inégalité **a changé de sens** puisque nous avons multiplié par un nombre **négatif**.

Finalement, $-x+9 \geqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant 11$.

L'ensemble des solutions de $-x+9 \geqslant -2$ dans $\mathbb{R}$ est $\mathscr{S} =]-\infty; 11[$.

4 Encadrements de réels et arrondis

Propriétés

Soient x un nombre réel et n un nombre entier relatif.

- Il existe un unique nombre entier relatif a tel que $\dfrac{a}{10^n} \leqslant x < \dfrac{a+1}{10^n}$.

  Cet encadrement est **l'encadrement décimal de x à 10^{-n} près**.

- **L'arrondi de x à 10^{-n} près** est celui des deux nombres $\dfrac{a}{10^n}$ ou $\dfrac{a+1}{10^n}$ qui est le plus proche de x.

Exemple On a :

$$\frac{16\,812}{10^3} \leqslant 16{,}812\,7 < \frac{16\,813}{10^3}$$

donc l'**encadrement** de $16{,}812\,7$ à 10^{-3} près est $16{,}812 \leqslant 16{,}812\,7 < 16{,}813$ et l'**arrondi** de $16{,}812\,7$ à 10^{-3} près est $16{,}813$.