0

Calcul numérique

Résumé

Nous révisons quelques notions vues au collège : opérations sur les fractions, calcul avec des puissances de nombres et les racines carrées. Une définition plus rigoureuse de la racine carrée est donnée et de nombreuses propriétés phares sont établies...

1 Fractions

Définition | Fraction

Soient a et b deux nombres entiers relatifs, b non nul.
Le quotient de la division de a par b est la **fraction** $\frac{a}{b}$.

Propriété | Simplification

Soient a un nombre entier relatif et b et k deux nombres entiers relatifs non nuls.

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Exemple Simplifions $A = \frac{30}{42}$ à l'aide des critères de divisibilité.

$$A = \frac{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 5}{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 7}$$

À l'aide des critères de divisibilité par 2 et 3, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits et ainsi :

$$\mathbf{A} = \mathbf{\frac{5}{7}}$$

Remarque Une fraction qui ne peut plus être simplifiée est dite **irréductible**.

Propriétés | Somme et différence

Soient a et c deux entiers relatifs et k un entier relatif non nul.
On peut alors sommer :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

On peut aussi soustraire :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Exemple Calculons $B = \frac{11}{30} + \frac{1}{6} - \frac{4}{5}$ et donnons sa forme irréductible.
On écrit d'abord les trois fractions avec le même dénominateur 30.

$$\begin{aligned} B &= \frac{11}{30} + \frac{1 \times \mathbf{5}}{6 \times \mathbf{5}} - \frac{4 \times \mathbf{6}}{5 \times \mathbf{6}} \\ &= \frac{11}{30} + \frac{5}{30} - \frac{24}{30} \end{aligned}$$

On calcule la somme algébrique des numérateurs.

$$B = \frac{11 + 5 - 24}{30} = -\frac{8}{30}$$

Pour terminer, on simplifie et on vérifie que B est bien sous forme irréductible.

$$B = \frac{-4 \times \mathbf{2}}{15 \times \mathbf{2}} = -\mathbf{\frac{4}{15}}$$

Propriété | Produit

Soient a et c deux entiers relatifs et b et d deux entiers relatifs non nuls.
On peut alors multiplier :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemple Calculons $C = \frac{3}{14} \times \frac{22}{15}$.
On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$C = \frac{3 \times 22}{14 \times 15}$$

On simplifie.

$$C = \frac{\mathbf{3} \times \mathbf{2} \times 11}{\mathbf{2} \times 7 \times \mathbf{3} \times 5} = \mathbf{\frac{11}{35}}$$

Définition | Inverse

L'**inverse** d'une fraction $\frac{a}{b}$ non nulle est la fraction $\frac{b}{a}$.

Propriété | Quotient

Soient a un entier relatif et b, c et d des entiers relatifs non nuls.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Remarque Autrement dit, diviser par une fraction non nulle revient à multiplier par l'inverse de cette fraction.

Exemple $\frac{5}{7} \div \frac{5}{2} = \frac{2}{7}$

Exercice

En respectant les priorités d'opérations, calculer et donner sous forme irréductible :

$$D = \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$$

2 Racine carrée

Définition | Racine carée

Soit a un nombre réel positif.
La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel **positif** dont le carré est égal à a.

Remarque L'unicité de la racine carrée est très importante ! Elle servira dans une prochaine démonstration. Elle provient de l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Propriété | Positivité

Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples

- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{2,25} = 1,5$
- $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 9 donc $\sqrt{9} = 3$.
- $\sqrt{0} = 0$

Exemples

- $\sqrt{1,3^2} = 1,3$
- $\sqrt{-3,6^2} = 3,6$
- $\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

Propriétés | Opérations

Soient a et b deux réels positifs.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Si $b \neq 0$,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration. Pour le premier point, on sait que $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ et

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 &= \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \\
&= \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} \\
&= \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 \\
&= a \times b \\
&= ab
\end{aligned}$$

Les deux nombres $\sqrt{ab}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ont le même carré et sont positifs, donc ils sont égaux.
Le second point est démontré de la même manière. □

Exemples

- $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \times 100} = \sqrt{36} \times \sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$
- $\frac{\sqrt{0,44}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{0,44}{11}} = \sqrt{0,04} = 0,2$

Exercice

1. Calculer la somme $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}$.
2. Écrire $2\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{50}}{5}$ sous la forme $\sqrt{a}$ où a est un entier naturel.
3. Montrer que $\sqrt{288}+\sqrt{720}=12\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

3 Puissances

Définition | Puissance entière

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel.
Pour $n \geqslant 2$, $a^n = a \times a \cdots \times a$ (n fois).
De plus, on a, par convention, $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.

Exemples

- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-7)^4 = (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) = 2\,401$

Définition | Puissance entière relative

Soient a un nombre réel non nul et n un nombre entier naturel non nul.
On note a^{-n} l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exemples

- $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0{,}0001$
- $2^{-10} = \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{1}{1024}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^4} = \dfrac{1}{4}$

Propriétés | Règles de calcul sur les puissances

Soient a un nombre réel non nul et n, m deux nombres entiers relatifs.
On dispose des opérations suivantes :

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Exemples

- $5{,}2^3 \times 5{,}2^{-2} = 5{,}2^{3-2} = 5{,}2^1 = 5{,}2$
- $\dfrac{(-8)^7}{(-8)^9} = (-8)^{7-9} = (-8)^{-2} = \dfrac{1}{64}$
- $\left(\sqrt{2}^3\right)^2 = \left(\sqrt{2}^{3\times 2}\right) = \sqrt{2}^6 = 8$

Remarque Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de puissances.
Par exemple, $10^2 + 10^3 \neq 10^5$.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un entier relatif.
Alors,

- $a^n \times b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples

- $0{,}2^7 \times 10^7 = (0{,}2 \times 10)^7 = 2^7 = 128$
- $\dfrac{11{,}1^{-3}}{1{,}11^{-3}} = \left(\dfrac{11{,}1}{1{,}11}\right)^{-3} = 10^{-3} = 0{,}001$