3

LIMITES DE FONCTIONS

Résumé

L'étude des limites de suites nous a ouvert la voie à l'étude de nouvelles limites : celles des fonctions.
Nous pourrons aborder le comportement asymptotique de courbes et fonctions avancées tout en donnant des résultats de comparaisons très puissants.

Dans toute la suite, f, g, h, u et v désigneront des fonctions et ℓ, x_0, a, α des nombres réels.

1 Limites d'une fonction

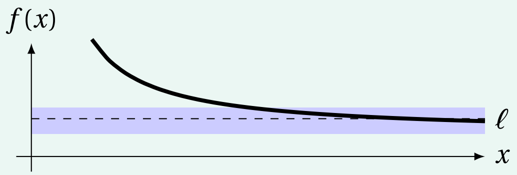
1.1 Comportement en $\pm\infty$

Définitions

Soit f définie sur $[\alpha\,;+\infty[$.

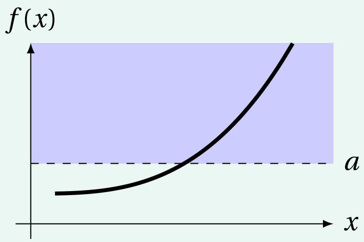
- La **limite de f en $+\infty$ est égale à ℓ** si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.



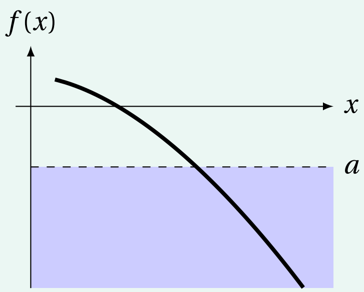
- La **limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



- La **limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty\,;a[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand.

  On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Exemple Une fonction constante égale à ℓ tend vers ℓ en $+\infty$ et tend vers ℓ en $-\infty$.

Remarques

- On peut encore utiliser les deux notations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

- On définit de manière similaire la limite de f en $-\infty$.
- On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale à la courbe** de f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$).

1.2 Comportement en un réel x_0

Définitions

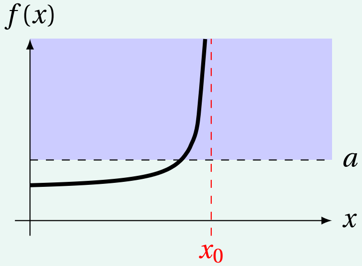
Soit f définie sur l'intervalle $]x_0\,;x_0+r[$ ou sur $]x_0-r\,;x_0[$ avec $r>0$.

- La **limite de f en x_0 est égale à ℓ** si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

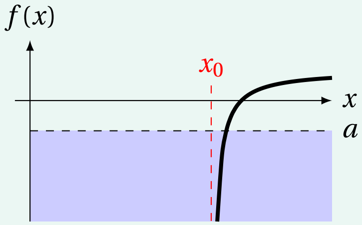
- La **limite de f en x_0 est égale à $+\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.



- La **limite de f en x_0 est égale à $-\infty$** si, et seulement si, tout intervalle $]-\infty\,;b[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment proche de x_0.

  On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.



Remarques

- On parlera de **limite à gauche** quand on approche de x_0 en faisant croître x. On pourra utiliser les notations suivantes.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

- On parlera de **limite à droite** quand on approche de x_0 en faisant décroître x. On pourra utiliser les notations suivantes.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

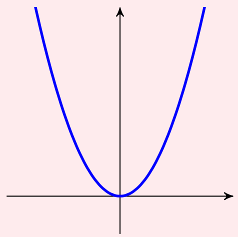
- On dit que la droite d'équation $x=x_0$ est une **asymptote verticale à la courbe** de f en x_0 si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Fonctions usuelles

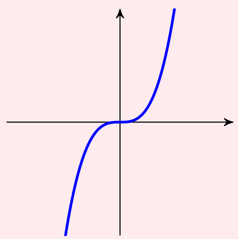
Propriétés | Limites usuelles

- Si $f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbf{N}^*$ **pair**, alors :



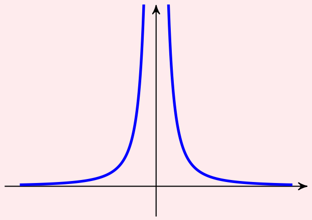
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.

- Si $f(x)=x^n$ avec $n\in\mathbf{N}$ **impair**, alors :



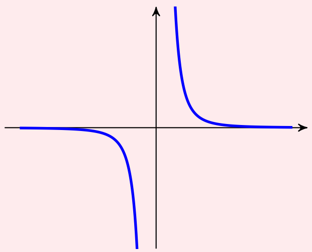
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$.

- Si $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbf{N}^*$ **pair**, alors :



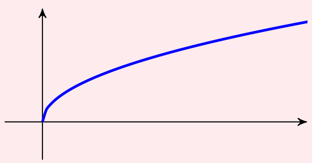
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty.$

- Si $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n\in\mathbf{N}$ **impair**, alors :



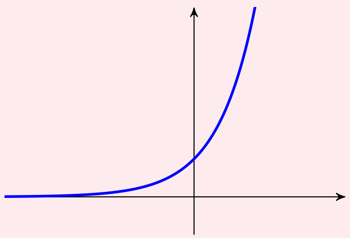
  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$
  - $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty\,.$

- Si $f(x)=\sqrt{x}$, alors :



  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$

- Si $f(x)=\mathrm{e}^x$, alors :



  - $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$
  - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty.$

Remarques On a aussi les limites suivantes. Soient $n\neq0$ et $a\in\mathbf{R}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to a}x^n=a^n$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$ pour $a\geqslant0$
- $\displaystyle\lim_{x\to a}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a.$

2.2 Somme, produit et quotient

On considère dans cette section deux fonctions f et g définies sur un intervalle I.

Théorème | Limite d'une somme

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemples

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+x^4\right)=+\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^0=1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^3}+\mathrm{e}^x\right)=+\infty.$

Théorème | Limite d'un produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	0
$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}-6\mathrm{e}^{-x}=-\infty.$
- $\displaystyle\lim_{x\to1}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}$ et $\displaystyle\lim_{x\to1}\sqrt{3x^3-x^2+2}=\sqrt{3-1+2}=2$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\mathrm{e}^x\sqrt{3x^3-x^2+2}\right)=2\mathrm{e}.$

Théorème | Limite d'un quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. a peut désigner ici $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	FI	FI

Si $g(x)>0$ pour tout $x\in I$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0^+	0^+
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$

Si $g(x)<0$ pour tout $x\in I$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell>0$	$\ell<0$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0^-	0^-
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple $\lim\limits_{x\to 7}\left(2-\dfrac{7}{14-x}\right)=2-\dfrac{7}{14-7}=1$ et $\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-x\right)=49+7=56$ donc $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\frac{7}{14-x}}{x^2-x}=\dfrac{2}{56}$.

3 Comparaison

On a des résultats similaires aux limites de suites, encore.

Théorème | Théorème de comparaison

Soient f et g deux fonctions et x_0 telles que pour tout $x\geqslant x_0$, $f(x)\leqslant g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Théorème | Théorème des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions et x_0 telles que pour tout $x\geqslant x_0$,

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x).$$

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\ell$.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+7\sin(x)}{x^2}$.