

## DEVOIR SURVEILLÉ 4

Calculatrice autorisée

Lundi 10 février 2025

### EXERCICE 1 (8 POINTS)

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $x_0$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ .
2. Montrer que  $x_0$  est l'unique solution de  $g(x) = 0$  dans  $[0; +\infty[$ .
3. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  de  $x_0$ .

### CORRECTION

1.
  - La fonction  $g$  est continue sur  $[0; 1]$  car  $g$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$ .
  - $g(0) = -1$  et  $g(1) = 1$  donc  $g(0) \leq 0 \leq g(1)$ .
  - $g$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$  car  $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ .Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $g$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $[0; 1]$  à  $g(x) = 0$ .
2.  $g$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$  et son minimum sur cet intervalle est  $g(1) = 1$  donc  $g$  ne s'annule pas sur  $[1; +\infty[$  et par la question précédente,  $x_0$  est l'unique solution de  $g(x) = 0$  dans  $[0; +\infty[$ .
3. Une lecture graphique sur la calculatrice nous donne  $x_0 \approx 0,68$ .

### EXERCICE 2 (8 POINTS)

La population, en dizaine de milliers d'habitants, à l'année  $(2015+x)$ , d'une ville nouvelle est modélisée pour les cinq premières années par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 5]$  par :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^3 + 1}.$$

1. Donner l'expression de  $f'$  sur  $[0; 5]$ .
2. En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; 5]$ .
3. Montrer que pour la période concernée, la population de cette ville atteindra 18 500 habitants.

**bonus 4.** Donner la date au cours de laquelle le seuil des 18 500 habitants a été atteint.

### CORRECTION

$$1. \forall x \in [0; 5], f'(x) = \frac{(6x^2)(x^3 + 1) - (3x^2)(2x^3 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^5 + 6x^2 - 6x^5 - 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

2. Le quotient  $\frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$  est strictement positif sur  $]0; 5]$  car c'est un carré.

Ainsi,  $f$  est strictement croissante sur  $[0; 5]$ .

3.
  - $f$  est continue sur  $[0; 5]$  car dérivable.
  - $1 = f(0) \leq 1,85 \leq f(5) \approx 1,99$ .
  - $f$  est strictement croissante sur  $[0; 5]$  d'après la question précédente.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  admet une unique solution  $x_0$  dans  $[0; 5]$  à  $f(x) = 1,85$ .

Pour la période concernée, la population de cette ville atteindra 18 500 habitants.

4. Par lecture graphique sur la calculatrice,  $x_0 \approx 1,7828$ .

Nous sommes ainsi en 2016, année bissextile. Pour la date exacte, calculons  $0,7828 \times 365$  pour connaître le nombre de jours écoulés puis le 1er janvier 2016.  $0,7828 \times 366 = 286,505$  donc cela fait 286 jours après le 1er janvier 2016, c'est-à-dire, le 13 octobre 2016.

**EXERCICE 3 (6 POINTS)**

Démontrer que l'équation  $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbf{R}$  et encadrer celle-ci par des entiers consécutifs.

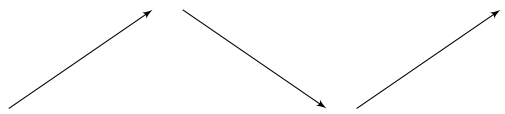
*Indication : On pourra commencer par étudier les variations de  $f$  d'expression  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ .*

**CORRECTION**

$f$  d'expression  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x = (3x - 6)x.$$

On peut donner le tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x$	$-$	$0$	$+$	$+$
$3x - 6$	$-$	$0$	$0$	$+$
$f'(x)$	$+$	$0$	$0$	$+$
$f(x)$				

$f$  admet une maximum local en 0 et on a  $f(0) = -1$ . Ainsi, d'après le tableau,  $f$  ne s'annule que sur  $[2; +\infty[$ .

Une utilisation du TVI sur cet intervalle nous permet d'affirmer qu'il existe une unique solution  $x_0$  à  $f(x) = 0$  sur  $[2; +\infty]$  et donc sur  $\mathbf{R}$ .

Par balayage sur la calculatrice, on se rend compte que  $3 \leq x_0 \leq 4$ .