1 Croissance linéaire

Résumé

Dans le langage commun, la croissance désigne quelque chose qui augmente (croissance d'un pays, d'une entreprise, de la criminalité, etc...). La croissance d'une fonction sur un intervalle a été vue en seconde mais nous allons étudier ici une croissance particulière : la croissance linéaire. Rentrent dans ce cadre les fonctions affines, connues, ou encore les suites arithmétiques, cas particulier de suites numériques.

1 Suites

1.1 Généralités

Définition

Une **suite numérique** est une liste (infinie) de nombres, appelés **termes**, qui sont ordonnés et numérotés.
Le premier terme d'une suite u se note u_0, le suivant u_1, ... et plus généralement, le terme de rang n , appelé aussi **terme d'indice** n, se note u_n.
L'ensemble de tous ces termes, qui constitue la suite, est noté u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus souvent (u_n).

Exemple On peut définir une suite explicitement comme la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^4 - \dfrac{2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Suites arithmétiques

Définition

Une **suite arithmétique** est une suite telle qu'il existe un nombre r, appelé **raison** qui vérifie :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque On appelle cette relation une **relation de récurrence** et elle permet de déterminer tous les termes de la suite à partir d'un seul.

Attention

Il faut veiller à démontrer la relation de récurrence pour **tous** les indices de la suite ! Quelques exemples ne peuvent suffire.

Exemple Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 3 et de premier $u_0 = -5$. Alors, $u_1 = u_0+3 = -5+3 = -2$. De même, $u_2 = u_1+3 = 1$. On peut continuer indéfiniment : $u_3 = 4$, $u_4 = 7$, $u_5 = 10$, …

Propriété

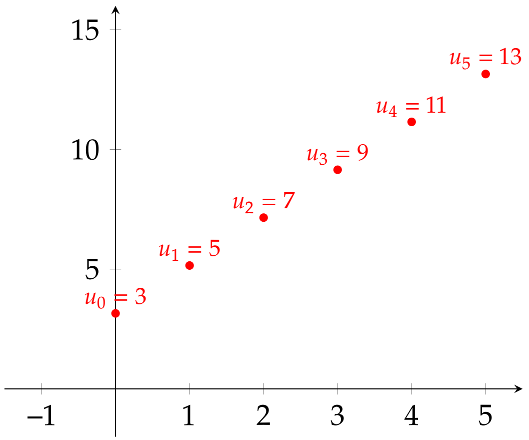
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = r \times n + u_0$$

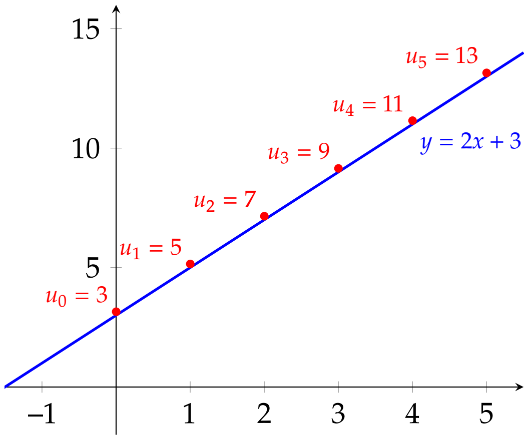
Remarques

- C'est une écriture explicite de cette suite arithmétique. Elle permet de déterminer très facilement tous les termes de la suite.
- On peut avoir envie de représenter graphiquement une suite numérique de la même manière que l'on trace les courbes représentatives de fonctions. Cette fois-ci, pas de courbe mais un nuage de points puisque nous indexons sur des entiers naturels. Le nuage de points est constitué de l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Représentons la suite arithmétique (u_n) de raison 2 et de premier terme 3.



La forme explicite de (u_n) est : $u_n = 2n + 3$ si $n \in \mathbb{N}$. Il est ainsi cohérent de constater que les représentations de (u_n) et de la fonction affine f d'expression $f(x) = 2x + 3$ si $x \in \mathbb{R}$ coïncident sur $\mathbb{N}$.



Définitions

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- (u_n) est **strictement croissante** si pour tout $0 \leq p < q$, on a $u_p < u_q$.
- (u_n) est **constante** si $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (u_n) est **strictement décroissante** si pour tout $0 \leq p < q$, on a $u_p > u_q$.

Théorème | Variations d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

Démonstration. Donnons le premier cas : les autres sont similaires.
(u_n) est strictement croissante si pour tout $0 \leq p < q$, on a $u_p < u_q$.
Prenons deux entiers naturels quelconques p et q tels que $p < q$. Ainsi, on a :

$$u_p = rp + u_0 \qquad \text{et} \qquad u_q = rq + u_0$$

d'où, en soustrayant les deux équations membre à membre, de manière équivalente :

$$u_p - u_q = r(p - q)$$

$p - q < 0$ et donc $r > 0 \Leftrightarrow u_p - u_q < 0 \Leftrightarrow u_p < u_q$. □

2 Fonctions affines

2.1 Rappels

Définition

On appelle **fonction affine** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.

Exemples

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 3)^2 - (x - 1)^2$ est une fonction affine.

  En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut développer :

$$f(x) = (x + 3)^2 - (x - 1)^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x - 1 = 8x + 8.$$

- Soit f affine telle que $f(-5) = 2$ et $f(1) = 1$.

  Déterminons a et b de sorte que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

  On sait que $f(-5) = 2$ donc $2 = -5a + b$. De même, $1 = a + b$. Nous avons un système de deux équations à deux inconnues que l'on peut résoudre par la méthode substitution.

Grâce à la deuxième équation, nous avons que $b = 1 - a$ donc en remplaçant dans la première, nous obtenons

$$2 = -5a + 1 - a \Leftrightarrow 2 = -6a + 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}.$$

Nous obtenons ainsi dans la deuxième équation $1 = -\frac{1}{6} + b$ donc $1 + \frac{1}{6} = b$.

Pour conclure, $\boxed{a = -\frac{1}{6} \text{ et } b = \frac{7}{6}}$.

Propriétés

- Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est affine si, et seulement si, sa courbe représentative dans un repère est une droite. Dans ce cas, a est appelé le coefficient directeur de la droite et b son ordonnée à l'origine.
- $b = f(0)$
- Pour tout $x_A, x_B \in \mathbb{R}$ tels que $x_A \neq x_B$:

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}.$$

Exemple Soit f affine dont la courbe représentative passe par $(0; 132)$ et $(3; 465)$. On détermine facilement a et b :
$b = f(0) = 132$ et $a = \frac{465 - 132}{3 - 0} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{333}{3} = 111$.

Théorème | Variations d'une fonction affine

Soit f une fonction affine de coefficient directeur a.

- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a > 0$.
- f est constante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a = 0$.
- f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $a < 0$.

Démonstration. Pour étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de f, on regarde la différence $f(y) - f(x)$ pour tout $x < y$ dans $\mathbb{R}$. On note b l'ordonnée à l'origine de f.
Ainsi, $f(y) - f(x) = ay + b - (ax + b) = a(y - x)$. L'étude du signe du produit (règle des signes) nous donne directement les résultats attendus (puisque $y - x > 0$). □