

5

CONTINUITÉ

Résumé

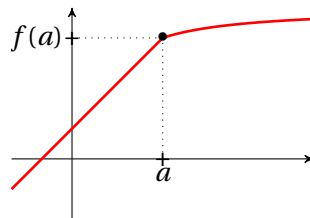
Nous nous initions ici à une notion cruciale en analyse pour l'étude de fonctions : la continuité. Le principe est naïf mais les conséquences sont colossales.

1 Fonction continue

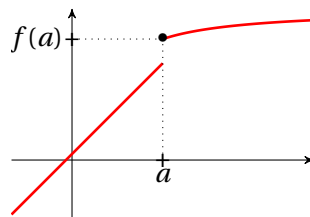
Définition | Continuité en un point a

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
 f est dite **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemples ► f est continue en a .



► f n'est pas continue en a



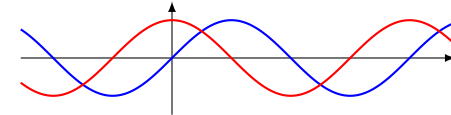
Définition | Continuité sur un intervalle I

f est **continue sur un intervalle I** si f est continue en a pour tout $a \in I$.

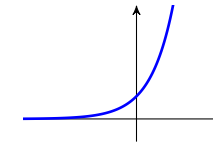
Remarque Graphiquement, la courbe d'une fonction continue sur un intervalle peut être tracée "sans lever le stylo".

Exemples ► Une fonction polynomiale est continue sur \mathbf{R} .

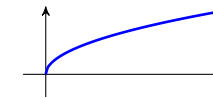
► sin et cos sont continues sur \mathbf{R}



► exp est continue sur \mathbf{R}



► $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur \mathbf{R}_+



Théorème | Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues sur I , et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- $f + g$ est continue sur I .
- $f \times g$ est continue sur I .
- Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- Si g est continue sur J , l'ensemble des images $f(x)$ pour tout $x \in I$, alors :
 $g \circ f$ est continue sur I .

Démonstration. Admise. □

Propriété | Lien dérivabilité/continuité

Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue en I .

Démonstration. Admise. \square

2 Application aux suites

Propriétés

- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite de I .
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et f est continue en ℓ alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
- Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite définie par la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $\ell = f(\ell)$.

Démonstration. Admise. \square

Exemples ► Nous savons que la suite de terme général $2 - \frac{4}{n+1}$ converge vers 2.
Ainsi, la suite de terme général $e^{2 - \frac{4}{n+1}}$ converge vers e^2 car \exp est continue en 2.

- Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 12}$ et $u_0 = -1$.

Posons $f : x \mapsto \sqrt{4x + 12}$.

On remarque, en dérivant, que f est **croissante** sur $[-2; +\infty[$.

En effet, $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x+12}} > 0$ pour tout $x \in [-2; +\infty[$.

- Montrons que (u_n) converge.

On peut prouver par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.

Initialisation : La propriété est vraie au rang 0 ($u_1 = 4$).

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et montrons la pour $n+1$.

Comme $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$, on a par croissance de f :

$$f(-2) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6).$$

Finalement, $-2 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$ par définition de la suite.

Nous venons de prouver que (u_n) est **croissante et majorée** par 6 donc **converge**.

- Par la propriété précédente, comme (u_n) converge, sa limite ℓ est forcément un point fixe de f ($f(\ell) = \ell$).

Cherchons tous les points fixes possibles. Soit x tel que $\sqrt{4x+12} = x$.

Si $x > 0$, alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{4x+12} &= x \\ \Leftrightarrow 4x+12 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 12 &= 0\end{aligned}$$

Une telle équation admet pour solutions -2 exclu et 6.

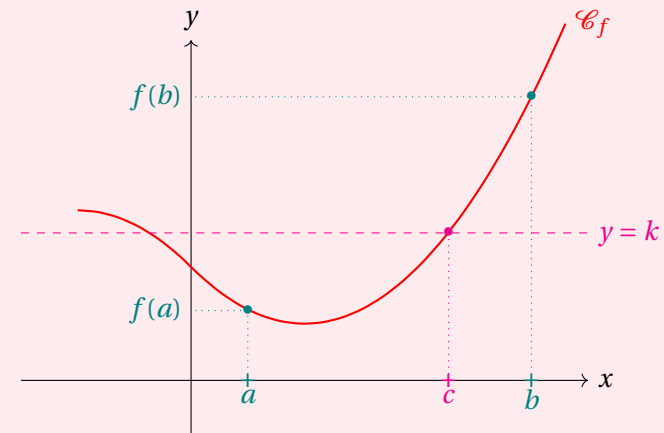
Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$.

3 Résolution d'équations

Théorème | Théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

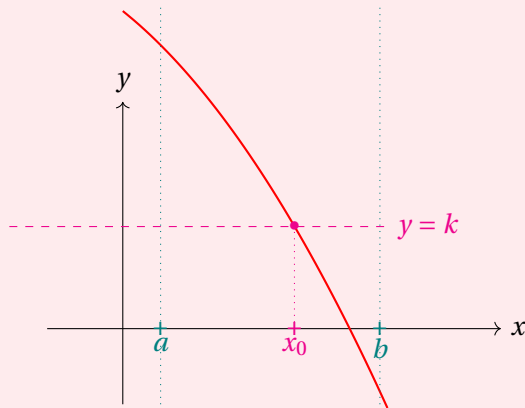
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.



Démonstration. Admise. \square

Corollaire

Soit f continue et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une unique solution x_0 dans $[a; b]$ à l'équation $f(x) = k$.



Démonstration. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe au moins une solution $c \in [a; b]$ à l'équation $f(x) = k$. Supposons par l'absurde qu'il y en a au moins une autre, c' .

Ainsi, nous avons soit $c > c'$ soit $c' > c$.

Par stricte monotonie de f , soit $f(c) > f(c')$ soit $f(c') > f(c)$ ce qui est absurde puisque

$$f(c) = f(c') = k.$$

□

Exemples ► Soit f continue sur \mathbf{R} telle que $f(3) = 23$ et $f(12) = 2$.

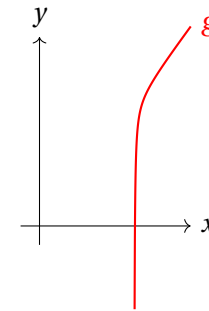
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 10$.

► Soit g définie sur $]5; +\infty]$ par $g(x) = 4x - \frac{1}{x-5}$. Il existe une unique solution à l'équation $g(x) = \pi$.

En effet, sur $]5; +\infty]$, g est strictement croissante :

$$\forall x \in]5; +\infty], g'(x) = 4 + \frac{1}{(x-5)^2} > 0.$$

On conclut par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -\infty$.

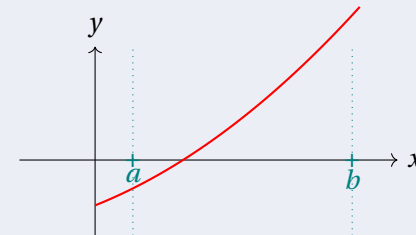


⚙ Méthode | Algorithme de dichotomie

Pour résoudre certaines équations, on peut se résoudre à utiliser des **méthodes numériques**. La résolution numérique par **dichotomie** en est une. Prenons l'exemple d'une fonction continue sur $[a; b]$ telle que :

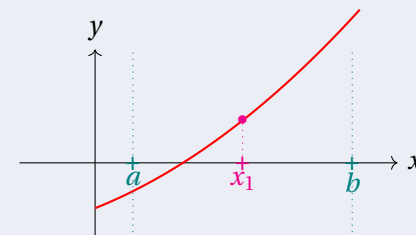
$$f(a) \times f(b) < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires (ou son corollaire), il existe une unique solution x_0 à l'équation $f(x) = 0$ dans $[a; b]$.



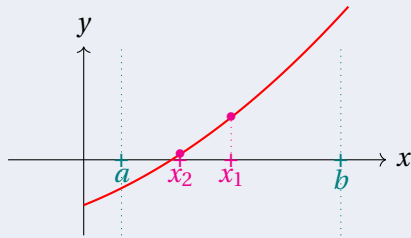
Nous allons construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ qui converge vers x_0 .

Posons $x_1 = \frac{a+b}{2}$.



Si $f(x_1) = 0$, c'est terminé. Sinon :

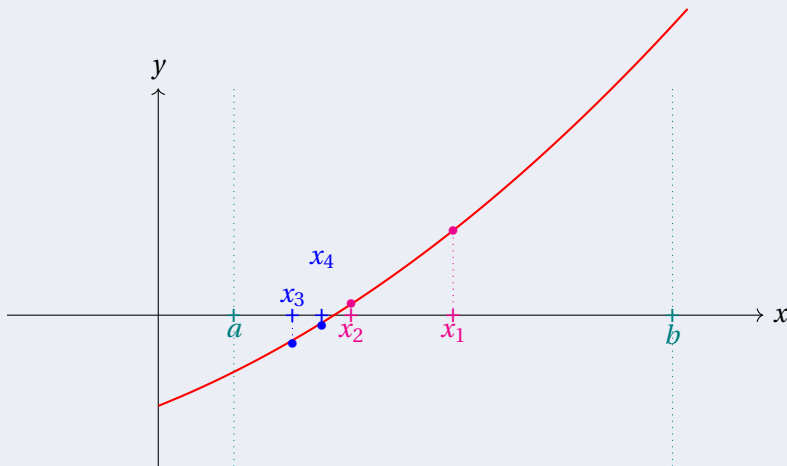
- Si $f(a) \times f(x_1) < 0$, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = x_1$ et $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.
- Si $f(a) \times f(x_1) > 0$, on pose $a_1 = x_1$ et $b_1 = b$ et $x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$.



Si $f(x_2) = 0$, c'est terminé. Sinon :

- Si $f(a) \times f(x_2) < 0$ on pose $a_2 = a$ et $b_2 = x_2$ et $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.
- Si $f(a) \times f(x_2) > 0$ on pose $a_2 = x_2$ et $b_2 = b$ et $x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

On continue ce processus pour obtenir une valeur approchée de x_0 à $\frac{b-a}{2^n}$ près.



Remarque Par construction, $0 \leq |x_n - x_0| \leq \frac{b-a}{2^n}$ et par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n - x_0 = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$.

Exercice

Donner un encadrement à 10^{-2} près de la solution de $x^3 - 3x + 1$ dans $]1; +\infty[$. On admet qu'elle existe et qu'elle est unique.

Algorithmique & Programmation

Nous pouvons écrire un programme python procédant à l'algorithme de dichotomie. Faisons-le pour l'exercice précédent.

```
1 from maths import *
2 def f(x):
3     return x**3-3*x+1
4 def dichotomie(a,b,n):
5     for i in range(n):
6         x=(a+b)/2
7         if f(a)*f(x)<0:
8             b=x
9         if f(a)*f(x)>0:
10            a=x
11     return(x)
```

Ici, la fonction dichotomie renvoie x_n et si on demande `dichotomie(1,1000,100)`, nous obtenons 1.5320888862379562 donc on peut estimer à 10^{-2} près que $x_0 \approx 1,53$.

Exercice

Écrire un programme python permettant de résoudre numériquement l'équation $4x - \frac{1}{x-5} = 1000$ par dichotomie. Donner une solution à 10^{-5} près.