From Toeplitz to Cauchy matrices

Let $\mathsf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ be the displacement matrix that acts as

$$\mathsf{Z}\,\mathsf{A} = \mathsf{A}{\downarrow}, \qquad \mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} = \mathsf{A}{\uparrow}, \qquad \mathsf{A}\,\mathsf{Z} = \mathsf{A}{\leftarrow}, \qquad \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t = \mathsf{A}{\rightarrow}.$$

Toeplitz and Cauchy matrices are introduced in the paper. To fix the notations, denote V_u, $\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}$, W_u and $\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}$ be the following "Vandermonde" matrices

$$\mathsf{V}_\mathsf{u} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & \cdots & u_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n & \cdots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_1^{n-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_n^{n-1} & \cdots & u_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{W}_\mathsf{u} = \begin{pmatrix} u_1^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

I keep the paper notations for V_u, W_u and introduce $\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}$, $\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}$ which are the correct matrices in my opinion (see below).

We have the following relations

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}_\mathsf{u}\,\mathsf{V}_\mathsf{u} &= \mathsf{V}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^n \end{pmatrix} \\
\mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u} &= \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}^t + \begin{pmatrix} u_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
\mathsf{W}_\mathsf{u}\,\mathsf{D}_\mathsf{u} &= \mathsf{Z}\,\mathsf{W}_\mathsf{u} + \begin{pmatrix} u_1^n & \cdots & u_n^n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}\,\mathsf{D}_\mathsf{u} &= \mathsf{Z}^t\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ u_1^n & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If $\mathsf{A}' = \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}$ then

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}(\mathsf{A}') &= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,(\mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} + \begin{pmatrix} u_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Otherwise ff $\mathsf{A}' = \mathsf{V}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\mathsf{W}_\mathsf{v}$ then

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}(\mathsf{A}') &= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\mathsf{V}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\mathsf{W}_\mathsf{v} - \mathsf{V}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\mathsf{W}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \mathsf{V}_\mathsf{u}\,(\mathsf{Z}\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z})\,\mathsf{W}_\mathsf{v} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^n \end{pmatrix} \mathsf{A}\,\mathsf{W}_\mathsf{v} - \mathsf{V}_\mathsf{u}\,\mathsf{A} \begin{pmatrix} u_1^n & \cdots & u_n^n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or we can express it using the more common $(\mathsf{A} - \mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)$ displacement operator using

$$\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}} = \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{Z} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

to get

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}(\mathsf{A}') &= \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} - \bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}} \\
&= \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} - \left[\mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{Z} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}} \\
&= \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} - \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}} \\
&= \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} - \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\left[\mathsf{Z}^t\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}} \\
&= \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,(\mathsf{A} - \mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}} - \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\bar{\mathsf{V}}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_{\mathsf{v}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}}.
\end{aligned}$$

Old stuff

Displacement operators :

1. Toeplitz:

$$\begin{aligned}
\phi^+ &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A} - \mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t = \mathsf{A} - (\mathsf{A} \text{ shifted down and right by one place}) \\
\phi &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t = (\mathsf{A} \text{ shifted up by one place}) - (\mathsf{A} \text{ shifted right by one place})
\end{aligned}$$

2. Cauchy:

$$\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}\colon \mathsf{A} \mapsto \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{D}_{\mathsf{v}}$$

3. Vandermonde:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathsf{u}}^+ &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{D}_{\mathsf{u}}\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t \\
\varphi_{\mathsf{u}} &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{D}_{\mathsf{u}}
\end{aligned}$$