From Toeplitz to Cauchy matrices

Let $\mathsf{Z}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ be the displacement matrix that acts as

$$\mathsf{Z}\,\mathsf{A}=\mathsf{A}\!\downarrow, \qquad \mathsf{Z}^t\mathsf{A}=\mathsf{A}\!\uparrow, \qquad \mathsf{A}\,\mathsf{Z}=\mathsf{A}\leftarrow, \qquad \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t=\mathsf{A}\rightarrow.$$

Toeplitz and Cauchy matrices are introduced in the paper. To fix the notations, denote $\mathsf{V_u}$, $\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}$, $\mathsf{W_u}$ and $\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}$ be the following "Vandermonde" matrices

$$\mathsf{V_u}=\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \cdots & u_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & u_n & \cdots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}=\begin{pmatrix} u_1^{n-1} & \cdots & u_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_n^{n-1} & \cdots & u_n & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{W_u}=\begin{pmatrix} u_1^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 & \cdots & u_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ u_1 & \cdots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

I keep the paper notations for $\mathsf{V_u}$, $\mathsf{W_u}$ and introduce $\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}$, $\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}$ which are the correct matrices in my opinion (see below).

We have the following relations

$$\begin{aligned}
\mathsf{D_u}\,\mathsf{V_u} &= \mathsf{V_u}\,\mathsf{Z}+\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_n^n \end{pmatrix} \\
\mathsf{D_u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u} &= \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}^t+\begin{pmatrix} u_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
\mathsf{W_u}\,\mathsf{D_u} &= \mathsf{Z}\,\mathsf{W_u}+\begin{pmatrix} u_1^n & \cdots & u_n^n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}\,\mathsf{D_u} &= \mathsf{Z}^t\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{u}+\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ u_1^n & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

If $\mathsf{A}'=\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}$ then

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}(\mathsf{A}') &= \mathsf{D_u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}-\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D_v} \\
&= \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,(\mathsf{Z}^t\,\mathsf{A}-\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}+\begin{pmatrix} u_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}-\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or we can express it using the more common $(\mathsf{A}-\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)$ displacement operator using

$$\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}=\mathsf{D_u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}+\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

to get

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}(\mathsf{A}') &= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \left[\mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\left[\mathsf{Z}^t\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v} \\
&= \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,(\mathsf{A} - \mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t)\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v} - \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\bar{\mathsf{V}}_\mathsf{u}\,\mathsf{Z}\,\mathsf{A}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{W}}_\mathsf{v}\,\mathsf{D}_\mathsf{v}.
\end{aligned}
$$

Old stuff

Displacement operators :

1. Toeplitz:

$$
\begin{aligned}
\phi^+ &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{A} - \mathsf{Z}\,\mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t = \mathsf{A} - (\mathsf{A} \text{ shifted down and right by one place}) \\
\phi &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t = (\mathsf{A} \text{ shifted up by one place}) - (\mathsf{A} \text{ shifted right by one place})
\end{aligned}
$$

2. Cauchy:

$$\nabla_{\mathsf{u},\mathsf{v}}: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{D}_\mathsf{v}$$

3. Vandermonde:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\mathsf{u}^+ &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{D}_\mathsf{u}\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{Z}^t \\
\varphi_\mathsf{u} &: \mathsf{A} \mapsto \mathsf{Z}^t\,\mathsf{A} - \mathsf{A}\,\mathsf{D}_\mathsf{u}
\end{aligned}
$$