Simulations de Monte Carlo pour l'évaluation d'options exotiques

IND8123 – Projet

Romain MRAD, Mateo VILLAIN, Thomas RICHER

MVR Technologies

April 23, 2025

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Contexte

Le Hedge Fund systématique MVR Technologies cherche à bien évaluer certaines options exotiques d'achat pour ses différentes stratégies de gestion des risques.

Plan de la présentation

Définitions

Simulation de Monte Carlo

Une **méthode algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**.

Définitions

Simulation de Monte Carlo

Une **méthode algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**.

Principales applications :

- Mathématiques : calcul d'intégrales (dimensions $d > 1$)

Définitions

Simulation de Monte Carlo

Une **méthode algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**.

Principales applications :

- Mathématiques : calcul d'intégrales (dimensions $d > 1$)
- Physique de particules : estimation de la forme d'un signal

Définitions

Simulation de Monte Carlo

Une **méthode algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**.

Principales applications :

- Mathématiques : calcul d'intégrales (dimensions $d > 1$)
- Physique de particules : estimation de la forme d'un signal
- Finance : simulation de la trajectoire d'un cours financier

Définitions

Simulation de Monte Carlo

Une **méthode algorithmique** visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des **procédés aléatoires**.

Principales applications :

- Mathématiques : calcul d'intégrales (dimensions $d > 1$)
- Physique de particules : estimation de la forme d'un signal
- Finance : simulation de la trajectoire d'un cours financier

Option exotique

- Un produit dérivé qui présente des caractéristiques plus complexes que les produits classiques
- Souvent échangé sur des marchés OTC

Plan de la présentation

Problématique

Comment évaluer certaines options exotiques avec des simulations de Monte-Carlo?

Plan de la présentation

Options évaluées

MVR Technologies cherche à évaluer les options d'achat suivantes :

- Vanilla
- Asian arithmetic average price
- Asian geometric agerage price
- Up-and-In barrier option
- Up-and-Out barrier option
- Lookback

Option Vanilla

- Option d'achat européenne (référence)
- Cashflow

$$CF_T = \max\{S_T - K \ , \ 0\}$$

- Cas d'usage : spéculation sur la hausse d'un titre

Option asiatique moyenne arithmétique

- Option d'achat basée sur une moyenne arithmétique des prix de l'action entre 0 et T
- Cashflow
$$CF_T = \max\left\{ \frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K \ , \ 0 \right\}$$
- Cas d'usage : se couvrir contre les variations de prix à court terme

Option asiatique moyenne géométrique

- Option d'achat basée sur une moyenne géométrique des prix de l'action entre 0 et T
- Cashflow

$$CF_T = \max\left\{\exp\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt\right] - K \ , \ 0\right\}$$

- Cas d'usage : modélisation mathématique et produits structurés

Option Up-and-In (knock-in barrier)

- Option d'achat qui devient active si le prix de l'action dépasse une barrière H entre 0 et T
- Cashflow

$$CF_T = \max\{S_T - K\ ,\ 0\}\mathbb{1}_{\sup_{0\leq t\leq T} S_t \geq H}$$

- Cas d'usage : protection conditionnelle contre un risque extrême

Option Up-and-Out (knock-out barrier)

- Option d'achat qui devient inactive si le prix de l'action dépasse une barrière H entre 0 et T
- Cashflow

$$CF_T = \max\{S_T - K\ ,\ 0\}\, \mathbb{1}_{\sup_{0\leq t\leq T} S_t < H}$$

- Cas d'usage : réduction de la prime avec une barrière désactivante

Option Lookback

- Option d'achat permettant à la personne de choisir le strike K comme la meilleure valeur prise par le prix de l'action entre 0 et T
- Cashflow

$$\max\left\{S_T - \min_{0\leq t<T} S_t\ ,\ 0\right\}$$

- Cas d'usage : maximiser le gain dans un marché volatil

Plan de la présentation

Modèle – GBM

Pour évaluer ses options, MVR Technologies utilise le mouvement brownien géométrique pour modéliser les prix de l'action

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Modèle – GBM

Pour évaluer ses options, MVR Technologies utilise le mouvement brownien géométrique pour modéliser les prix de l'action

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

On peut donc simuler le prix de l'action à un temps t en utilisant la solution forte de l'équation différentielle stochastique ci-dessus

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right]$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $\underline{\mu = r}$

Modèle – Fonctionnement

- On sait que la valeur actuelle d'une option correspond à l'espérance du cashflow actualisée

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}[CF_T]$$

Modèle – Fonctionnement

- On sait que la valeur actuelle d'une option correspond à l'espérance du cashflow actualisée

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}[CF_T]$$

- Pour mettre en œuvre une évaluation de ses différentes options d'achat, MVR Technologies va donc simuler plusieurs trajectoires pour le prix de l'action étudiée

Modèle – Fonctionnement

- On sait que la valeur actuelle d'une option correspond à l'espérance du cashflow actualisée

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}[CF_T]$$

- Pour mettre en œuvre une évaluation de ses différentes options d'achat, MVR Technologies va donc simuler plusieurs trajectoires pour le prix de l'action étudiée
- Pour chaque prix simulé $S_T^{(i)}$, on calcule le prix de l'option $C^{(i)}$

Modèle – Fonctionnement

- On sait que la valeur actuelle d'une option correspond à l'espérance du cashflow actualisée

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}[CF_T]$$

- Pour mettre en œuvre une évaluation de ses différentes options d'achat, MVR Technologies va donc simuler plusieurs trajectoires pour le prix de l'action étudiée
- Pour chaque prix simulé $S_T^{(i)}$, on calcule le prix de l'option $C^{(i)}$
- Enfin, on a par le Théorème Centrale Limite

$$\bar{C_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}\left(C, \frac{\sigma_c^2}{n}\right)$$

Modèle – Fonctionnement

- On sait que la valeur actuelle d'une option correspond à l'espérance du cashflow actualisée

$$C = e^{-rT}\mathbb{E}[CF_T]$$

- Pour mettre en œuvre une évaluation de ses différentes options d'achat, MVR Technologies va donc simuler plusieurs trajectoires pour le prix de l'action étudiée
- Pour chaque prix simulé $S_T^{(i)}$, on calcule le prix de l'option $C^{(i)}$
- Enfin, on a par le Théorème Centrale Limite

$$\bar{C_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C^{(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}\left(C, \frac{\sigma_c^2}{n}\right)$$

On peut aussi générer un intervalle de confiance

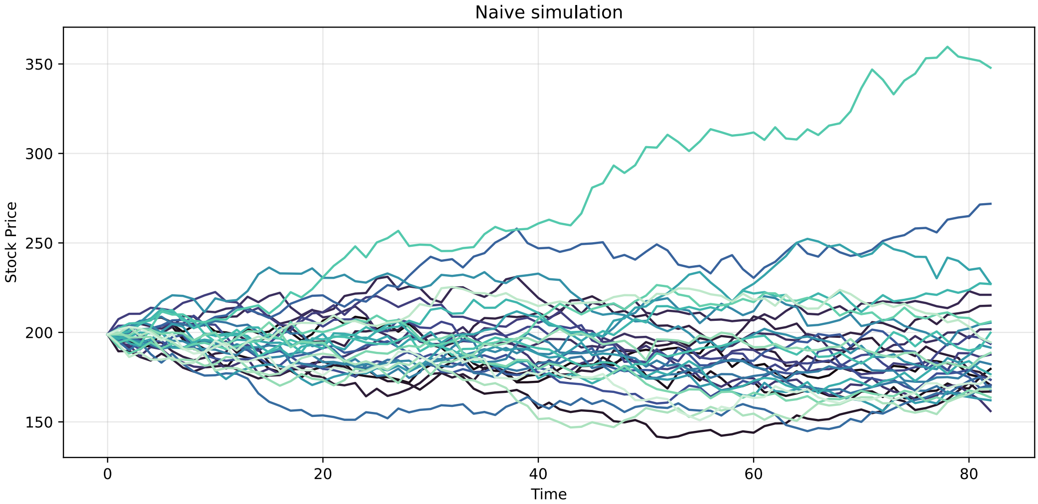
$$I_{95\%} = \left[\bar{C_n} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma_C^2}{n}},\ \bar{C_n} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma_C^2}{n}}\right]$$

Modèle – Méthodes de simulations

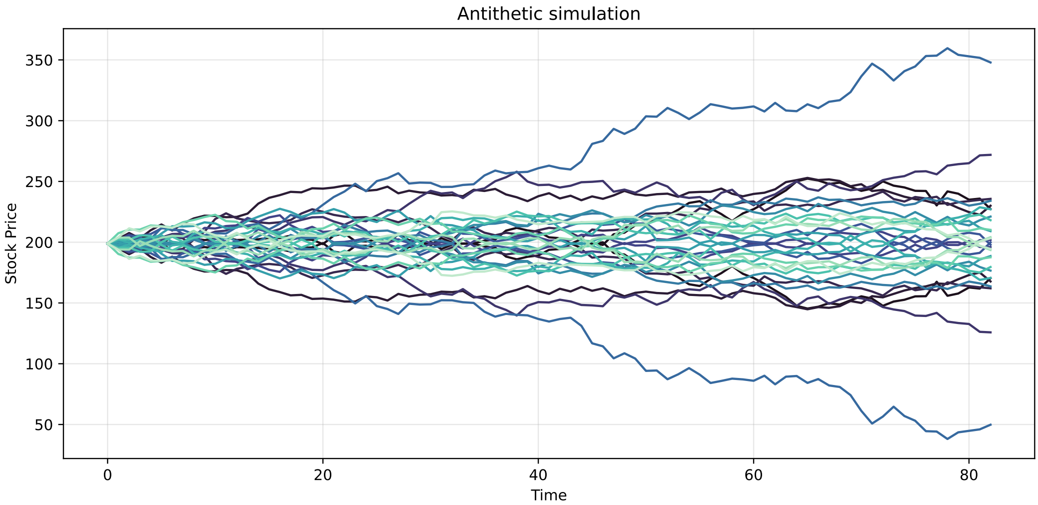
On utilise différentes méthodes de simulation :

- Simulation naïve
- Simulation avec variables antithétiques

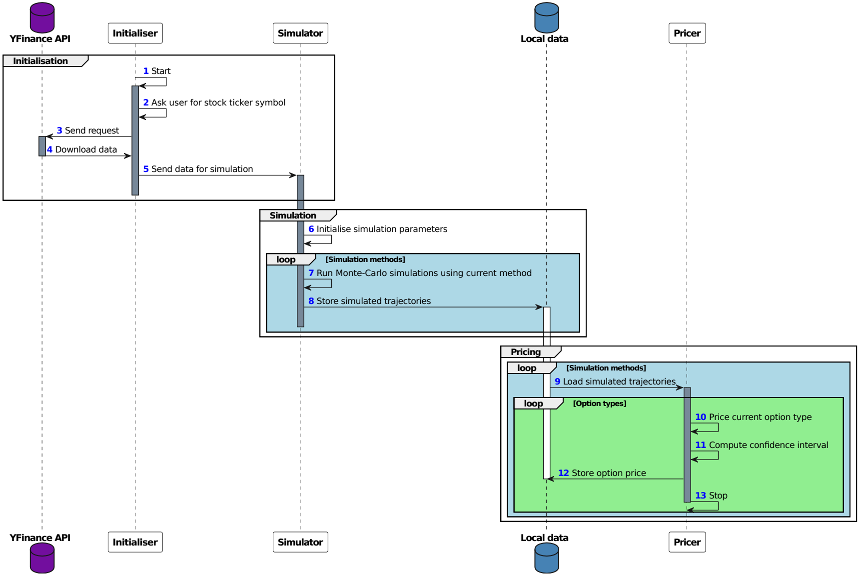
Modèle – Simulation naïve – Exemple du titre AAPL



Modèle – Simulation antithétique – Exemple du titre AAPL



Modèle – Diagramme UML



Plan de la présentation

Résultats – Prix des options – Exemple du titre AAPL

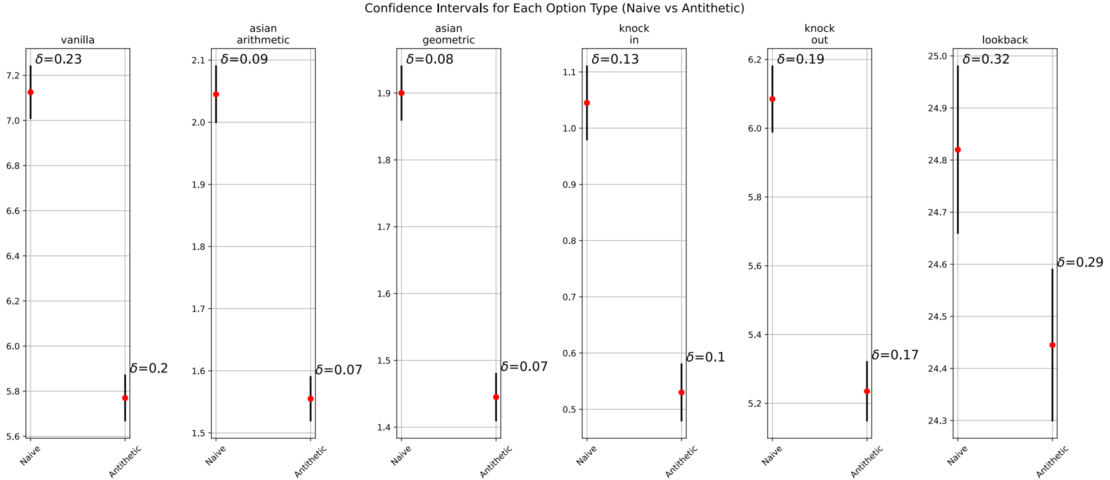
Option	Simulation naïve	Simulation antithétique
Vanilla	7.127	5.77
Asian arithmetic average	2.045	1.554
Asian geometric average	1.899	1.447
Up-and-In	1.045	0.534
Up-and-Out	6.082	5.236
Lookback	24.818	24.441

Plan de la présentation

Résultats – Intervalles de confiance – Exemple du titre AAPL

Option	Simulation naïve	Simulation antithétique
Vanilla	$[7.01, \quad 7.24]$	$[5.67, \quad 5.87]$
Asian arithmetic average	$[2.00, \quad 2.09]$	$[1.52, \quad 1.59]$
Asian geometric average	$[1.86, \quad 1.94]$	$[1.41, \quad 1.48]$
Up-and-In	$[0.98, \quad 1.11]$	$[0.48, \quad 0.58]$
Up-and-Out	$[5.99, \quad 6.18]$	$[5.15, \quad 5.32]$
Lookback	$[24.66, \quad 24.98]$	$[24.30, \quad 24.59]$

Résultats – Intervalles de confiance – Exemple du titre AAP



Plan de la présentation

Merci