

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Problèmes de Premier Passage et Commande Optimale pour le processus de
diffusion Cox–Ingersoll–Ross**

ROMAIN MRAD

Département de Mathématiques Appliquées et Génie Industriel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Mathématiques Appliquées

Janvier 2026

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Problèmes de Premier Passage et Commande Optimale pour le processus de
diffusion Cox–Ingersoll–Ross**

présenté par **Romain MRAD**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

PRENOM NOM, président

Mario LEFEBVRE, membre et directeur de recherche

PRENOM NOM, membre

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à ma famille qui m'a soutenue tout au long de cette aventure à Montréal, ainsi que toutes les rencontres qui en ont fait un séjour inoubliable.

Xaïpe.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, Professeur Mario Lefebvre, pour son encadrement rigoureux, sa disponibilité constante et la qualité de ses conseils tout au long de ce travail.

RÉSUMÉ

Le processus de diffusion de Cox–Ingersoll–Ross (CIR) est défini par l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t)$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard. Cette étude porte sur le moment de premier passage

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\}$$

c'est-à-dire le premier instant où le processus quitte l'intervalle $(0, c)$. Des expressions explicites de la fonction génératrice des moments, de l'espérance de $\tau(x)$ et de l'aire moyenne parcourue par le processus sont obtenues. De plus, un problème de commande optimale est étudié. En outre, des sauts sont ajoutés au processus afin de caractériser la probabilité de toucher la frontière inférieure ainsi que le temps moyen pour quitter l'intervalle. Enfin, le dépassement moyen au dessus de la frontière c est analysé.

ABSTRACT

The CIR diffusion process is defined by the stochastic differential equation

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t)$$

where $W(t)$ is a standard Brownian motion. This study focuses on the first passage time

$$\tau(x) = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\}$$

that is, the first time the process exits the interval $(0, c)$. Explicit expressions for the moment-generating function, the expected value of $\tau(x)$ and the average area under the process are derived. In addition, a stochastic control problem is studied. Furthermore, jumps are added to the process with the aim to analyse the probability of hitting the lower boundary first and the mean exit time. Finally, the average overshoot above the c frontier is characterised.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xi
LISTE DES ANNEXES	xii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Définitions et concepts de base	1
1.2 Éléments de la problématique	5
1.3 Objectifs de recherche	12
1.4 Plan du mémoire	12
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	14
CHAPITRE 3 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION PURE	16
3.1 Fonction Génératrice des Moments	16
3.1.1 Résolution du problème	16
3.1.2 Validation de l'expression obtenue	17
3.2 Fonction Temps Moyen	18
3.2.1 Résolution du problème	18
3.2.2 Validation de l'expression obtenue	22
3.3 Fonction Aire Moyenne	23
3.3.1 Résolution du problème	23
3.3.2 Validation de l'expression obtenue	25
CHAPITRE 4 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION AVEC SAUTS	27
4.1 Fonction Temps Moyen — Sauts Uniformes Descendants	27
4.1.1 Résolution du problème	27

4.1.2	Validation de l'expression obtenue	29
4.2	Fonction Probabilité de Sortie en Zéro — Sauts Uniformes Descendants . . .	29
4.2.1	Résolution du problème	29
4.2.2	Validation de l'expression obtenue	30
4.3	Fonction Dépassement Moyen — Sauts Exponentiels Ascendants	31
4.3.1	Formulation générale du problème	31
4.3.2	Sauts exponentiels ascendants	32
4.3.3	Application au CIR	35
4.3.4	Validation de l'expression obtenue	35
CHAPITRE 5 COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE		37
5.1	Formalisation du problème	37
5.2	Résolution du problème sous différentes configurations	38
5.2.1	P1 — Résolution	38
5.2.2	P1 — Visualisation	40
5.2.3	P2 — Résolution	43
5.2.4	P2 — Visualisation	44
5.2.5	P3 — Résolution	46
5.2.6	P3 — Visualisation	47
5.2.7	P4 — Résolution	48
5.2.8	P4 — Visualisation	48
5.3	Validation	49
5.4	Politiques Optimales	51
CHAPITRE 6 CONCLUSION		53
6.1	Synthèse des travaux	53
6.2	Limitations	53
6.3	Perspectives et améliorations futures	54
RÉFÉRENCES		55
ANNEXES		58

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1	Accélérations moyennes du temps de sortie	50
Tableau D.1	Longueurs moyennes des trajectoires simulées	62
Tableau D.2	Fréquence de sortie des trajectoires simulées	63

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Une trajectoire du Mouvement Brownien Standard	2
Figure 1.2	Une trajectoire d'un processus d'Itô avec $\mu(t, X(t)) \equiv \mu = 2$	3
Figure 1.3	Simulation de 10 trajectoires d'un processus de sauts pur $J(t)$	4
Figure 1.4	Une trajectoire du processus CIR avec $a = 1.1$, $b = 0.7$, $\sigma = \sqrt{2}$	6
Figure 1.5	Simulations de 30 trajectoires du CIR avec deux frontières absorbantes	7
Figure 1.6	Simulations de 30 trajectoires du CIR avec sauts dépassants la frontière c	9
Figure 1.7	Simulations de deux trajectoires du CIR avec et sans contrôle	11
Figure 3.1	Visualisation de la Fonction Génératrice des Moments $M(x; \alpha)$	18
Figure 3.2	Visualisation de la fonction Temps Moyen $m(x)$	22
Figure 3.3	Visualisation de la fonction Aire Moyenne $A(x)$	25
Figure 4.1	Visualisation des temps moyens de sortie $m(x)$ et $m_0(x)$	29
Figure 4.2	Visualisation des probabilités de sortir en zéro $p(x)$ et $p_0(x)$	31
Figure 4.3	Visualisation de la fonction Dépassement Moyen $D(x)$	35
Figure 5.1	P1 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal	40
Figure 5.2	P1 — Sensibilité des fonctions valeur $F(x)$ et contrôle optimal $u^*(x)$	41
Figure 5.3	P1 — Visualisation de l'effet de la commande optimale	42
Figure 5.4	P2 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal	44
Figure 5.5	P2 — Sensibilité des fonctions valeur $F(x)$ et contrôle optimal $u^*(x)$	45
Figure 5.6	P2 — Visualisation de l'effet de la commande optimale	46
Figure 5.7	P3 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal	47
Figure 5.8	P3 — Visualisation de l'effet de la commande optimale	47
Figure 5.9	P4 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal	49
Figure 5.10	P4 — Visualisation de l'effet de la commande optimale	49

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CIR	Cox–Ingersoll–Ross
MBS	Mouvement Brownien Standard
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EID	Équation Integro-différentielle
EDS	Équation Différentielle Stochastique
FGM	Fonction Génératrice des Moments
TPP	Temps de Premier Passage
HJB	Hamilton–Jacobi–Bellman

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Fonctions Spéciales	58
Annexe B	Générateur Infinitésimal	60
Annexe C	Unicité Trajectorielle	61
Annexe D	Simulations en Commande Optimale	62

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Les processus de diffusion occupent une place centrale en finance pour modéliser l'évolution temporelle d'une grande variété d'instruments financiers. Parmi les problématiques associées à ces modèles, l'étude des *temps de premier passage* revêt une importance particulière, notamment en gestion des risques, en évaluation d'options barrières ou encore en prévision d'événements extrêmes.

Un autre aspect fondamental concerne la *commande optimale stochastique*, qui consiste à influencer dynamiquement l'évolution du processus jusqu'à un temps d'arrêt, dans le but de minimiser un coût cumulé, composé d'un coût de contrôle et éventuellement d'un coût d'état. Ce mémoire s'intéresse à l'analyse conjointe des temps de franchissement et de la commande optimale appliquées au processus de Cox–Ingersoll–Ross [1], proposé en 1985, un modèle de référence largement utilisé pour représenter la dynamique des taux d'intérêt.

1.1 Définitions et concepts de base

Avant d'approfondir le sujet, il est essentiel de poser clairement les fondements théoriques sur lesquels repose cette étude.

L'élément central à introduire en premier lieu est le *mouvement Brownien standard*, pierre angulaire des processus de diffusion.

Définition : Le Mouvement Brownien Standard

Un processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard s'il vérifie :

- $W(0) = 0$;
- les trajectoires $t \mapsto W(t)$ sont continues presque sûrement ;
- il possède des accroissements indépendants : pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $(W(t_i) - W(t_{i-1}))_{i=1}^n$ sont indépendantes ;
- il possède des accroissements stationnaires gaussiens : pour tout $0 \leq s \leq t$, on a $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.



FIGURE 1.1 Une trajectoire du Mouvement Brownien Standard

Le MBS constitue la base de la construction des processus de diffusion employés dans de nombreux domaines tels que la finance, la physique ou la biologie. Ces processus sont modélisés par des Équation Différentielle Stochastique (EDS), qui consistent à enrichir le mouvement brownien en y ajoutant un terme de dérive et un terme de diffusion. Il en résulte une classe de processus dits *d'Itô*.

Définition : Processus d'Itô

$\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus d'Itô [2] s'il satisfait une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (1.1)$$

où :

- $\mu(t, X(t))$ et $\sigma(t, X(t))$ sont des fonctions mesurables et adaptées à la filtration brownienne standard $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$;
- $\mathbb{P} \left(\int_0^T |\mu(s, X(s))| ds < +\infty \right) = 1$;
- $\mathbb{P} \left(\int_0^T \sigma^2(s, X(s)) ds < +\infty \right) = 1$.

Dans cette formulation, $\mu(t, X(t))$ est appelé le *terme de dérive* et $\sigma(t, X(t))$ le *terme de diffusion*.



FIGURE 1.2 Une trajectoire d'un processus d'Itô avec $\mu(t, X(t)) \equiv \mu = 2$

La figure 1.2 illustre l'effet d'une dérive : la trajectoire du processus s'organise autour de la courbe moyenne $y = 2x$, tout en étant perturbée par la composante aléatoire de la diffusion.

De plus, il est important de noter que les termes de dérive et de diffusion peuvent eux-mêmes dépendre de l'état du processus ou du temps, ce qui permet de capturer des dynamiques complexes, comme une volatilité ou une dérive variable. Cette flexibilité permet notamment de modéliser des phénomènes réalistes dans les systèmes financiers ou physiques.

Par ailleurs, Il est parfois intéressant d'enrichir les processus d'Itô en leur ajoutant une composante de sauts, gouvernée par un processus de Poisson (processus de comptage classique modélisant une file d'attente).

Définition : Processus de Poisson

Un processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de taux λ s'il vérifie :

- Pour des intervalles de temps disjoints, le nombre d'occurrences est indépendant : pour tout $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables aléatoires $(N(t_i) - N(t_{i-1}))_{i=1}^n$ sont indépendantes ;
- La probabilité d'une occurrence dans un petit intervalle de temps dépend de la longueur de l'intervalle : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda h + o(h)$;
- La probabilité qu'il y ait plus d'une occurrence au sein d'un petit intervalle est négligeable : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[N(t+h) - N(t) > 1] = o(h)$;
- Le nombre d'occurrences dans un intervalle de longueur t suit une loi poisson : $N(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$;

— Le temps d'arrivé du n -ème événement T_n suis une loi exponentielle : $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$. En utilisant un processus de Poisson, il est donc possible de définir un processus de sauts pur.

Définition : Processus de Sauts

Soit $N(ds, dy)$ une mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, représentant les sauts aléatoires, avec une mesure d'intensité donnée par $\gamma(dy)ds$. On définit le processus de sauts $\{J(t), t \geq 0\}$ par :

$$J(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y N(ds, dy) \quad (1.2)$$

La figure ci-dessous visualise différentes réalisation d'un processus de sauts gouverné par un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 2$. La taille des sauts correspond à des réalisations d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\nu = 1.5$. La mesure d'intensité des sauts est donc donnée par :

$$\gamma(dy) := \lambda \nu e^{-\nu y} \mathbf{1}_{y \geq 0} dy$$

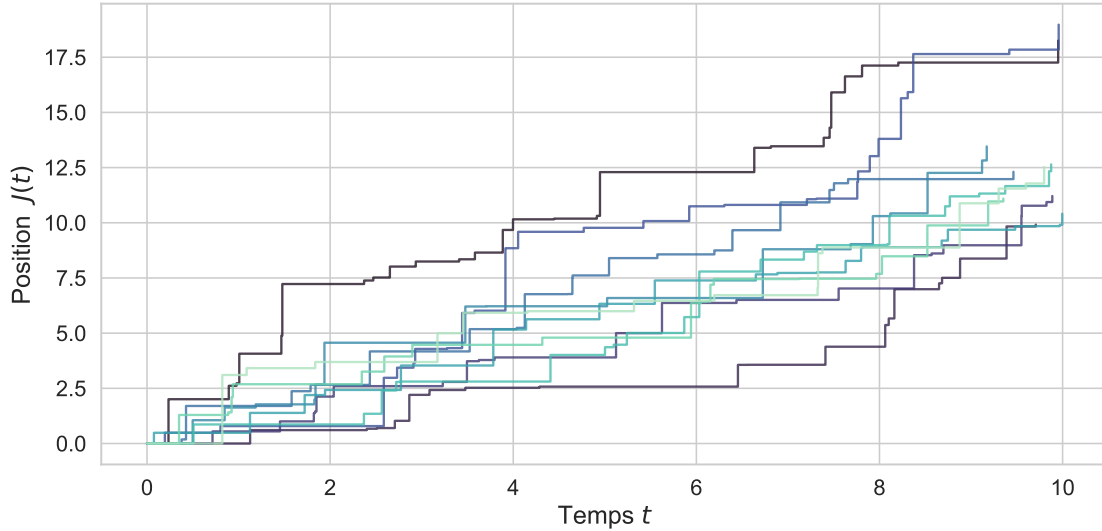


FIGURE 1.3 Simulation de 10 trajectoires d'un processus de sauts pur $J(t)$

1.2 Éléments de la problématique

Comme évoqué précédemment, cette étude s'intéresse à des problèmes appliqués au processus Cox–Ingersoll–Ross. Il convient donc d'en donner une définition formelle.

Définition : Le processus Cox–Ingersoll–Ross

Le processus CIR [1] est un processus d'Itô défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX(t) = a[b - X(t)] dt + \sigma\sqrt{X(t)} dW(t) \quad (1.3)$$

où :

- $a \geq 0$ est le paramètre de vitesse ;
- $b > 0$ représente la moyenne long-terme ;
- $\sigma > 0$ est volatilité instantanée ;
- $W(t)$ désigne un mouvement brownien standard.

Ce processus est particulièrement adapté à la modélisation des taux d'intérêt en raison de plusieurs propriétés clés :

- Le terme de dérive $\mu(t, X(t)) \equiv \mu(X(t)) = a[b - X(t)]$ induit un mécanisme de retour vers la moyenne b , avec une vitesse déterminée par a . Dans le contexte de modélisation des taux, cela reflète l'idée que ces derniers tendent à revenir vers un niveau de long terme après des déviations temporaires ;
- Le terme de diffusion $\sigma(t, X(t)) \equiv \sigma(X(t)) = \sigma\sqrt{X(t)}$ garantit la non-négativité du processus grâce à la racine carrée. Ceci est essentiel comme un taux négatif serait irréaliste dans de nombreux contextes économiques, en particulier pour les modèles de taux à court terme comme le CIR ;
- Le comportement à proximité de zéro est gouverné par la *condition de Feller*, selon laquelle :

$$\mathbb{P}\left[\exists t < \infty : X(t) = 0\right] = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \sigma^2 > 2ab$$

Cela signifie que le processus peut atteindre zéro en un temps fini si la *diffusion* domine la *dérive*.

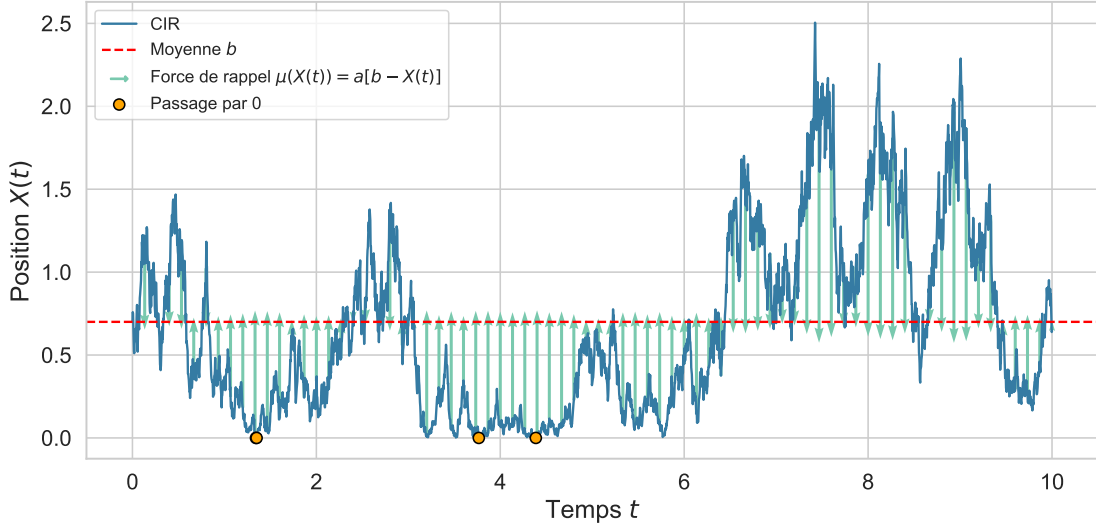


FIGURE 1.4 Une trajectoire du processus CIR avec $a = 1.1$, $b = 0.7$, $\sigma = \sqrt{2}$

La figure ci-dessus présente une trajectoire simulée du processus CIR, accompagnée d'une représentation discrétisée de la force de rappel vers la moyenne (flèches vertes). Il est intéressant de noter les points suivants :

- Plus le processus s'éloigne de la moyenne b , plus l'intensité de cette force augmente ;
- Lorsque le processus se trouve à proximité de zéro, les fluctuations aléatoires sont atténuées, tandis qu'elles deviennent plus marquées lorsque la position augmente. Ce comportement s'explique par la présence du terme $\sqrt{X(t)}$ dans le coefficient de diffusion, permettant ainsi de moduler l'amplitude stochastique en fonction de la position ;
- La trajectoire passe par 0 plusieurs fois comme la *condition de Feller* est satisfaite :

$$\begin{cases} \sigma^2 = 2 \\ 2ab = 1.54 \end{cases} \implies \sigma^2 > 2ab$$

Le prochain élément de problématique à introduire dans le cadre de cette étude est celui du *temps de premier passage*.

Définition : Temps de premier passage

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus CIR. Le *temps de premier passage à deux frontières* est défini, pour un seuil $c > 0$, par :

$$\tau(x) = \inf \{t \geq 0 : X(t) \notin (0, c) \mid X(0) = x \in (0, c)\} \quad (1.4)$$

Autrement dit, $\tau(x)$ correspond au premier instant où le processus atteint l'une des bornes de l'intervalle $(0, c)$.

L'étude de ce temps d'arrêt est particulièrement pertinente dans le cadre du processus CIR, pour plusieurs raisons :

- **Modélisation du passage aux taux négatifs** : lors de la crise économique japonaise de 2016, des taux d'intérêt négatifs ont été instaurés pour stimuler l'activité. Or, le processus CIR, à valeurs strictement positives, ne permet pas de modéliser ce phénomène. Introduire une barrière à zéro permet de considérer le franchissement de ce seuil, au-delà duquel les taux deviennent négatifs ;
- **Surveillance des taux élevés** : en gestion des risques, il est crucial de modéliser l'éventualité d'une hausse brutale ou excessive des taux d'intérêt. L'introduction d'un seuil supérieur c permet de caractériser ces situations critiques et de quantifier leur probabilité d'occurrence via le temps de franchissement.

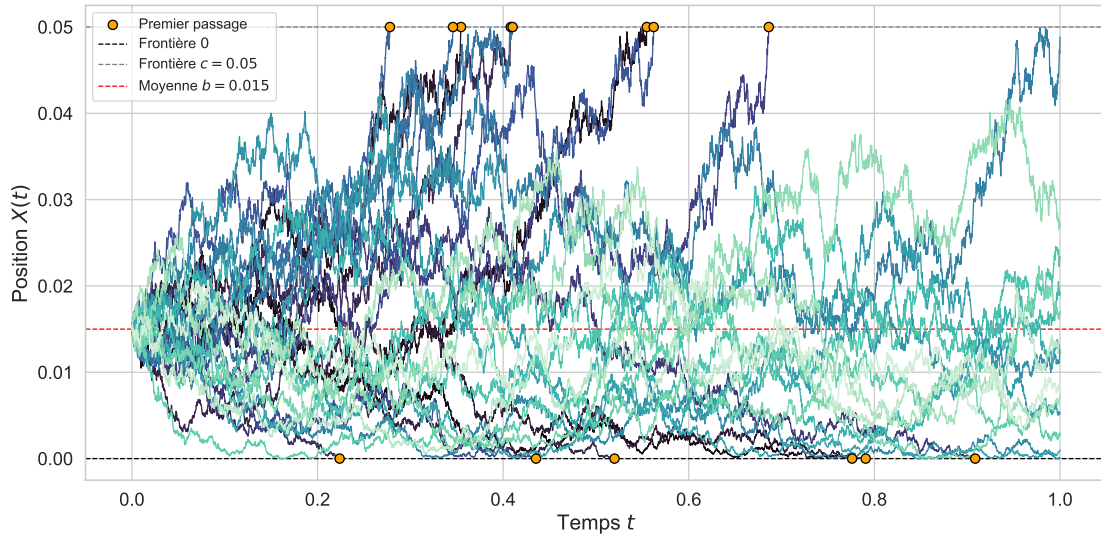


FIGURE 1.5 Simulations de 30 trajectoires du CIR avec deux frontières absorbantes

L'étude portera principalement sur le processus CIR, noté $X(t)$, ainsi que sur la variable aléatoire associée au temps de premier passage $\tau(x)$.

Nous introduisons à présent les fonctions analytiques qui feront l'objet de l'analyse. La première est la *fonction génératrice des moments*, outil central pour caractériser la distribution du temps d'arrêt.

Définition : Fonction Génératrice des Moments (FGM)

La fonction génératrice des moments du temps de premier passage $\tau(x)$ est définie, pour tout $\alpha > 0$, par :

$$M(x; \alpha) := \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \tau(x)} \right] \quad (1.5)$$

Cette fonction permet de résumer l'information probabiliste sur la variable $\tau(x)$, en particulier sa distribution. De plus, elle encode l'ensemble des moments de $\tau(x)$, lorsque ceux-ci existent, via dérivation en α .

La deuxième fonction d'intérêt est celle du *temps moyen de premier passage*, qui correspond à l'espérance de la variable aléatoire $\tau(x)$.

Définition : Temps Moyen de Premier Passage

Le temps moyen de premier passage est défini par :

$$m(x) := \mathbb{E}[\tau(x)] \quad (1.6)$$

Il représente le temps moyen que met le processus CIR, partant d'un niveau initial $x \in (0, c)$, pour atteindre l'une des deux bornes de l'intervalle $(0, c)$.

La troisième fonction étudiée est celle de l'*aire moyenne sous la trajectoire* jusqu'au temps de sortie.

Définition : Aire Moyenne

La fonction d'aire moyenne est définie par :

$$A(x) := \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(x)} X(t) dt \right] \quad (1.7)$$

En finance, l'aire moyenne peut représenter l'accumulation moyenne d'un taux d'intérêt à court terme jusqu'à un événement de sortie. Elle intervient également dans la tarification d'options asiatiques avec barrière, où le *payoff* dépend de l'intégrale temporelle du sous-jacent avant la sortie d'un intervalle donné.

La quatrième fonction étudiée est celle de la *probabilité toucher la frontière inférieure*.

Définition : Probabilité de Sortie en Zéro

La fonction de probabilité de sortie est définie par :

$$p(x) := \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0] \quad (1.8)$$

Elle caractérise la probabilité que le processus, partant d'une position initiale x , sorte de l'intervalle $(0, c)$ par le bas. Cette quantité peut être utilisée pour quantifier un risque de ruine, de défaut, ou encore d'apparition de taux négatifs (si le contexte économique le permet).

La cinquième fonction étudiée est celle du *dépassement moyen*, en ajoutant des sauts au CIR.

Définition : Dépassement Moyen

La fonction dépassement moyen est définie par :

$$D(x) := \mathbb{E} \left[(X(\tau(x)) - c)_+ \right] \quad (1.9)$$

Elle quantifie le dépassement moyen au-dessus de la frontière c , à partir d'une condition initiale $X(0) = x \in (0, c)$. Il est essentiel de souligner que cette fonction ne présente un intérêt que dans le cas où le processus comporte des sauts. En effet, dans le cadre purement continu, la trajectoire atteint la frontière exactement, sans possibilité de la franchir.

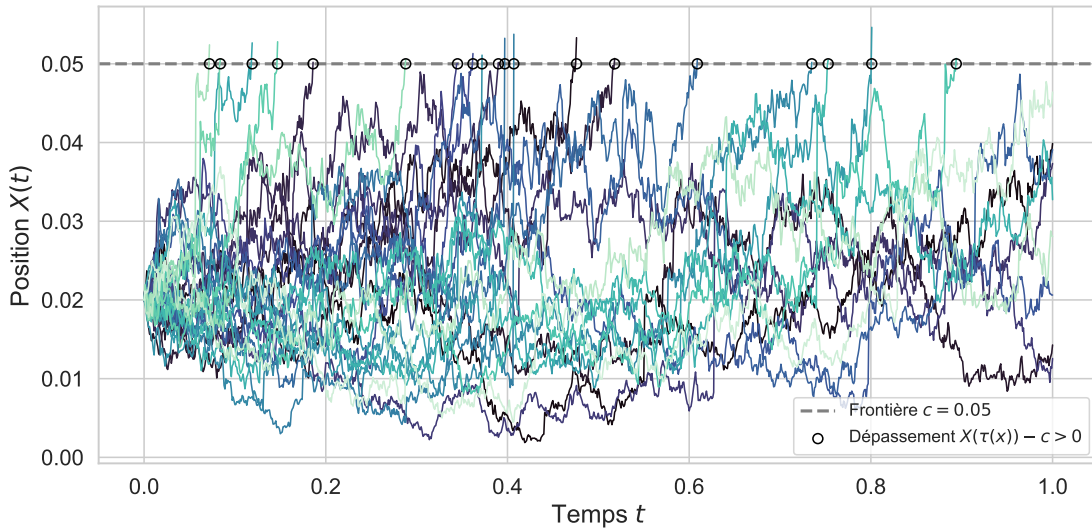


FIGURE 1.6 Simulations de 30 trajectoires du CIR avec sauts dépassant la frontière c

Ce type de quantité apparaît notamment dans la valorisation de produits financiers path-dependent, tels que les options lookback ou les produits structurés à barrière, où le dépassement moyen modélise l'espérance de gain associée au franchissement d'un niveau critique par le sous-jacent.

En complément de l'étude des temps de premier passage, ce mémoire s'intéresse également à un problème de *commande optimale stochastique* appliqué au processus CIR.

Définition : Problème de commande optimale — Homing Problem

Le *Homing problem* consiste à piloter un processus stochastique dynamiquement jusqu'à ce qu'il atteigne un ensemble d'arrêt donné, tout en optimisant un objectif. La configuration étudiée dans ce mémoire correspond à un processus CIR contrôlé $\{X_u(t), t \geq 0\}$ évoluant dans l'intervalle $(0, c)$, avec un arrêt déclenché dès que la trajectoire atteint l'une des deux frontières. Ce processus est défini par :

$$dX_u(t) = a[b - X_u(t)]dt + b[X_u(t)]u[X_u(t)]dt + \sigma\sqrt{X_u(t)}dW(t) \quad (1.10)$$

où $u(\cdot)$ est une stratégie de contrôle.

Le processus est contrôlé jusqu'à l'instant d'arrêt $\tau(x)$ défini précédemment (1.4). Par ailleurs, l'objectif est de minimiser une fonction coût de type intégral, définie par :

$$J(x) := \int_0^{\tau(x)} \left(\frac{1}{2}q[X_u(t)]u^2[X_u(t)] + r[X_u(t)] \right) dt \quad (1.11)$$

où :

- $r(x) \neq 0$ est le coût d'état (non associé au contrôle) ;
- $b(x) \neq 0$ est le coût du contrôle appliqué ;
- $q(x) > 0$ est un poids pénalisant l'intensité du contrôle.

Le problème consiste à déterminer une stratégie optimale $u^*(x)$ minimisant ce coût. La fonction valeur associée au problème s'écrit :

$$F(x) := \inf_{\substack{u[X_u(t)] \\ 0 \leq t \leq \tau(x)}} \mathbb{E}[J(x)] \quad (1.12)$$

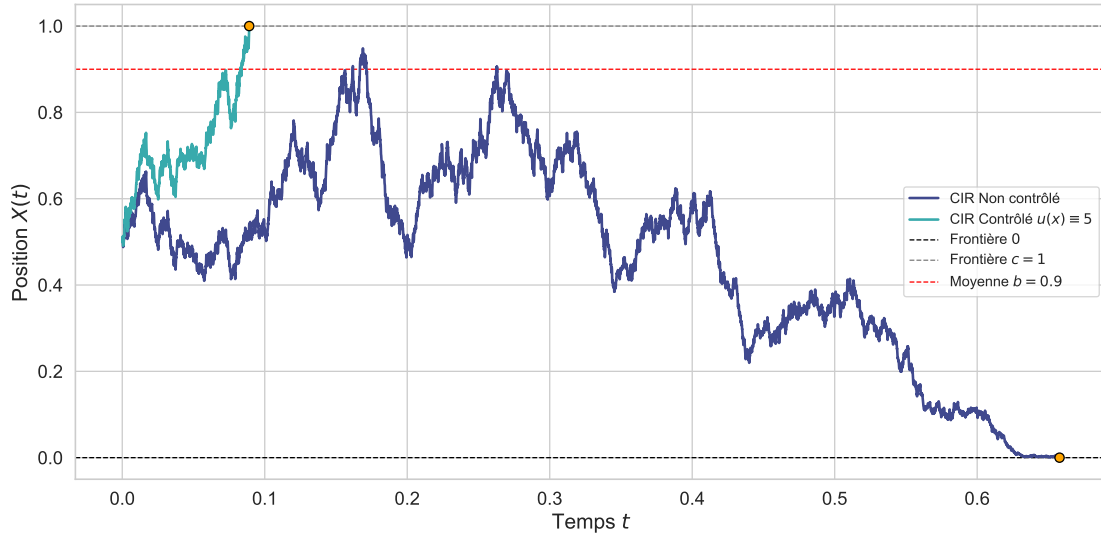


FIGURE 1.7 Simulations de deux trajectoires du CIR avec et sans contrôle

La figure ci-dessus illustre l'effet d'une stratégie de contrôle sur la dynamique du processus. Dans cet exemple, la commande est constante et positive ($u(x) \equiv 5$), et le même tirage aléatoire est utilisé pour les deux trajectoires. Il est intéressant de souligner que le processus contrôlé sort de l'intervalle beaucoup plus rapidement que celui sans contrôle. De plus, cette sortie s'effectue par la borne supérieure $c = 1$, alors que le processus non contrôlé atteint la borne inférieure 0. Cela met en évidence l'influence marquée d'un contrôle, même simple et non optimal, sur le comportement du processus CIR.

1.3 Objectifs de recherche

Après avoir posé les bases théoriques de l'étude, nous pouvons à présent formuler avec précision les objectifs de ce mémoire. Ceux-ci s'articulent autour de trois axes : l'analyse des temps de premier passage pour le processus CIR en l'absence de sauts, l'étude de ce même problème lorsque des sauts sont introduits, et enfin l'exploration de la commande optimale associée.

Objectifs pour le processus de diffusion

- Obtenir une expression explicite de la fonction génératrice des moments du temps de premier passage à deux frontières $M(x; \alpha) = \mathbb{E}[e^{-\alpha\tau(x)}]$;
- Expliciter une formule analytique pour le temps moyen de premier passage, $m(x) = \mathbb{E}[\tau(x)]$, pour une entrée initiale $x \in (0, c)$;
- Dédire l'aire moyenne sous la trajectoire $A(x)$ jusqu'au franchissement de l'intervalle $(0, c)$;

Objectifs pour le processus de diffusion avec sauts

- Obtenir une expression analytique du temps moyen de sortie dans ce nouveau cadre, en tenant compte de l'impact des sauts sur la dynamique du processus ;
- Établir une forme explicite de la probabilité de sortie par zéro : $p(x) = \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0]$, dans le cas de sauts uniformes descendants ;
- Déterminer le dépassement moyen à l'instant du franchissement supérieur c , défini par : $D(x) = \mathbb{E}[(X(\tau(x)) - c)_+]$ afin d'évaluer l'intensité des excursions au-delà de la borne supérieure, dans le cas de sauts exponentiels ascendants.

Objectif pour la commande optimale

- Résoudre différentes formes d'un *Homing problem* associé au processus diffusif, en déterminant la fonction valeur $F(x) = \inf_u \mathbb{E}[J(x)]$, ainsi que la politique de contrôle optimal $u^*(x)$.

1.4 Plan du mémoire

Afin de répondre aux objectifs de recherche définis précédemment, ce mémoire est structuré de la manière suivante.

Dans un premier temps, une revue de la littérature est proposée afin de replacer l'étude dans le cadre des travaux existants sur les temps de premier passage et les problèmes de

dépassement, avec une attention particulière portée au processus CIR et à ses extensions.

La suite du mémoire est consacrée à l'étude analytique des fonctions caractéristiques associées au processus. L'analyse se divise en trois parties distinctes :

- la première porte sur les problèmes de premier passage pour le processus CIR en diffusion pure ;
- la seconde examine sa version modifiée par l'introduction de sauts discrets ;
- la troisième se consacre à l'étude de la commande optimale appliquée au CIR diffusif.

Chaque section est accompagnée d'une analyse des résultats obtenus, permettant de vérifier la cohérence des solutions, d'en évaluer la sensibilité aux paramètres du modèle, et de comparer les dynamiques avec et sans sauts.

Enfin, la conclusion synthétise les contributions principales du mémoire, discute les limites de l'approche adoptée, et propose plusieurs pistes d'approfondissement pour des travaux futurs.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre propose une synthèse des travaux existants sur les TPP appliqués au processus CIR et ses extensions (voir [3–9]) ainsi que les problèmes de dépassement pour différents processus de diffusion (voir [10–12]), en mettant l’accent sur les méthodes analytiques. L’objectif est donc de situer le présent mémoire dans l’état de l’art.

Approche par cumulants et fonctions de Kummer Dans [3], l’auteur développe une approche analytique du TPP pour le processus CIR en utilisant la transformée de Laplace de la densité de passage. Celle-ci s’exprime via la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer. Les moments du TPP sont ensuite obtenus à partir des cumulants, exprimés en fonction de polynômes logarithmiques et de nombres de Stirling. Cela permet, entre autres, de construire des développements en série à l’aide de polynômes de Bell. L’auteur propose également une approximation de la fonction de répartition à l’aide d’un développement en séries basé sur la densité Gamma et les polynômes de Laguerre.

Développement orthogonal basé sur la densité Gamma Dans [4], l’approche est affinée par un développement tronqué de la densité du TPP obtenue en [3]. Cette méthode est accompagnée d’une analyse de convergence et d’un algorithme d’acceptation-rejet pour la simulation du TPP.

Méthodes analytiques et intégrales de Volterra L’article [5] traite le TPP pour des processus de diffusion généraux en formulant une équation intégrale de Volterra du premier type. Pour le processus CIR, l’auteur utilise un changement de mesure transformant le problème en celui d’un processus de Feller. Les moments sont ensuite dérivés à l’aide de la transformée de Laplace et des fonctions de Kummer.

Formules analytiques pour le processus de Feller Dans [6], les auteurs généralisent les résultats précédents à différents régimes de dérive du processus de Feller, en exprimant la densité du TPP à travers la fonction de Tricomi ou la fonction de Bessel modifiée selon différentes valeurs des paramètres. Des expressions explicites pour la densité et l’espérance du TPP sont fournies.

Comparaison avec les processus de Wiener et d’Ornstein-Uhlenbeck Dans [7], une comparaison est effectuée entre les comportements de TPP pour les processus de Wiener,

d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) et de Feller. Pour chacun, la probabilité d'atteindre l'état zéro est analysée. Des formules explicites sont données pour la densité du TPP avec absorption à zéro, et une étude asymptotique met en lumière les différences structurelles entre ces modèles.

Lien avec les processus de type Bessel L'article [8] s'intéresse à un processus de type Bessel présentant des similarités structurelles avec le processus CIR. Selon l'ordre du processus, le comportement au voisinage de zéro varie (absorbant, réfléchissant, ou entrée). Les auteurs proposent une résolution du problème de passage à l'aide de la théorie de Sturm-Liouville et des fonctions de Bessel, et obtiennent des densités de TPP analytiques. Une validation par simulation de type Euler-Maruyama complète l'étude.

Temps de premier passage avec sauts Dans le cas de processus à sauts, le franchissement du seuil peut se faire par discontinuité, générant un dépassement (*overshoot*) dont l'analyse complique considérablement le calcul du TPP. Pour un processus de diffusion avec sauts doublement exponentiels, Kou et Wang [10] obtiennent des expressions fermées pour la transformée de Laplace du TPP et de la distribution conjointe entre le temps de passage et l'*overshoot*. Ils montrent que l'*overshoot* est exponentiel conditionnellement à sa positivité, et que l'indépendance conditionnelle entre le TPP et le dépassement peut être exploitée pour simplifier les calculs.

Extensions à des lois plus générales Yin et al. [11] généralisent ce cadre aux sauts suivant une loi mixte exponentielle, obtenant également des formules explicites pour la transformée de Laplace jointe du TPP et de l'*overshoot*. Par ailleurs, Klüppelberg, Kyprianou et Maller [12] analysent le cas de processus de Lévy à queue lourde et dérivent une expression asymptotique explicite de l'*overshoot* conditionnellement au franchissement d'un niveau élevé. Ces résultats constituent les rares cas où des expressions analytiques sont disponibles, et fournissent un point de comparaison pour l'étude du processus de CIR avec sauts.

CHAPITRE 3 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION PURE

Cette partie du mémoire est consacrée à la résolution analytique des problèmes de premier passage appliqués au processus Cox–Ingersoll–Ross en diffusion pure.

3.1 Fonction Génératrice des Moments

3.1.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est connu que la Fonction Génératrice des Moments du temps de premier passage $\tau(x)$ satisfait l'équation du passé de Kolmogorov (voir [13] ou [14]) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x M''(x; \alpha) + a(b - x)M'(x; \alpha) - \alpha M(x; \alpha) = 0 \quad (3.1)$$

avec $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$.

Résolution

D'abord, en multipliant les deux côtés par $2/\sigma^2$ l'équation ci-dessus (3.1) est mise sous forme canonique :

$$xM''(x; \alpha) - \left(\frac{2a}{\sigma^2}x - \frac{2ab}{\sigma^2} \right) M'(x; \alpha) - \frac{2\alpha}{\sigma^2} M(x; \alpha) = 0$$

Ensuite, un changement de variable $y = \beta x$ avec $M(x; \alpha) = G(y; \alpha)$ est introduit. L'équation devient :

$$yG''(y; \alpha) - \left(\frac{2a}{\sigma^2}\beta y - \frac{2ab}{\sigma^2} \right) G'(y; \alpha) - \beta \frac{2\alpha}{\sigma^2} G(y; \alpha) = 0$$

Ce changement de variable a pour objectif de déterminer, en fonction des autres paramètres du problème, la valeur de β qui permet de ramener l'équation à la forme générale de l'équation de Kummer (3.2) :

$$xf''(x) - (x - \theta)f'(x) - sf(x) = 0, \quad \theta, s \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

dont la solution est connue. Pour ce faire, il faut que :

$$\frac{2a}{\sigma^2}\beta = 1 \implies \beta = \frac{\sigma^2}{2a}$$

L'équation devient :

$$yG'''(y; \alpha) - \left(y - \frac{2ab}{\sigma^2}\right) G''(y; \alpha) - \frac{\alpha}{a} G'(y; \alpha) = 0 \quad (3.3)$$

La solution générale de cette dernière (3.3) est de la forme (voir [15]) :

$$G(y; \alpha) = C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, y\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, y\right)$$

avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer, et $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $\Psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont les fonctions hypergéo-métriques confluentes de première et seconde espèce (voir annexe A).

Finalement, l'expression analytique de la FGM de $\tau(x)$ est :

$$M(x; \alpha) = C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) \quad (3.4)$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$ permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) = 1 \\ C_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Il en découle les valeurs suivantes pour C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right)}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \\ C_2 &= \frac{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - 1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.2 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Il convient de valider le comportement de la Fonction Génératrice des Moments $M(x; \alpha)$ définie par (3.4, 3.5). À cet effet, il faut tracer son évolution sur l'intervalle $[0, c]$ pour plusieurs valeurs du paramètre $\alpha \in \{1, 2, 5, 10\}$. Concernant les paramètres du CIR (1.2), et sauf indication contraire, les valeurs utilisées pour l'ensemble des visualisations sont :

- Vitesse de retour : $a = 0.1$;
- Moyenne long-terme : $b = 0.9$;

— Volatilité infinitésimale : $\sigma = 1$.

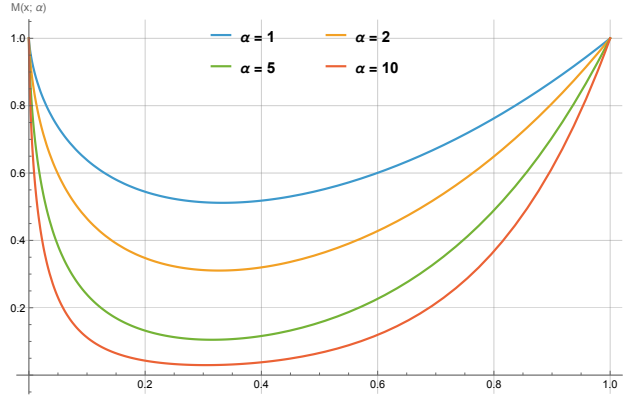


FIGURE 3.1 Visualisation de la Fonction Génératrice des Moments $M(x; \alpha)$

Analyse

Il est important de souligner les points suivants :

- Les conditions aux limites $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$ sont respectées ;
- Puisque α est par définition un paramètre positif (1.5), la fonction est bien comprise dans l'intervalle $(0, 1)$, car elle correspond à l'exponentielle d'un nombre négatif ;
- Par ailleurs, et pour la même raison, lorsque α augmente, la fonction diminue.

L'expression obtenue pour la Fonction Génératrice des Moments est ainsi validée.

3.2 Fonction Temps Moyen

3.2.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

En combinant le développement en série entière de l'exponentielle et la définition de la Fonction Génératrice des Moments (1.5), il est possible d'écrire (en supposant que les moments de $\tau(x)$ existent et sont finis) :

$$\begin{aligned}
 M(x; \alpha) &= \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \tau(x)} \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha \tau(x))^k}{k!} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k \mathbb{E} [\tau(x)^k]}{k!} \\
 &= 1 - \alpha \mathbb{E}[\tau(x)] + \frac{\alpha^2}{2} \mathbb{E} [\tau(x)^2] - \dots
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

En injectant (3.6) dans l'équation (3.1), et en reprenant la définition (1.6), il découle l'EDO linéaire de second ordre suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m''(x) + a(b-x)m'(x) = -1 \quad (3.7)$$

avec $m(0) = m(c) = 0$. En résolvant cette équation, une expression analytique de la fonction temps moyen est obtenue.

Réduction d'ordre

D'abord, afin d'alléger la notation, soit :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2a}{\sigma^2} \\ \beta = \frac{2ab}{\sigma^2} \\ \theta = -\frac{2}{\sigma^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

L'équation peut donc être réécrite comme suit :

$$x m''(x) + (\beta - \alpha x) m'(x) = \theta \quad (3.9)$$

La réduction d'ordre $u(x) = m'(x)$ donne l'EDO linéaire de premier ordre suivante :

$$x u'(x) + (\beta - \alpha x) u(x) = \theta \quad (3.10)$$

Pour procéder à sa résolution, il faut résoudre l'équation homogène associée puis déduire une solution particulière avec la méthode de variation de la constante. La solution générale obtenue est, avec C_1 une constante :

$$u(x) = x^{-\beta} e^{\alpha x} (C_1 - \theta \alpha^{-\beta} \Gamma(\beta, \alpha x)) \quad (3.11)$$

où $\Gamma(\cdot, \cdot)$ est la fonction Gamma incomplète (voir annexe A). Il suffit donc d'intégrer $u(x)$ et d'ajouter une constante C_2 pour obtenir l'expression de $m(x)$:

$$m(x) = \int u(x) dx + C_2 \quad (3.12)$$

Cependant, un problème survient lors de l'intégration du terme :

$$\int \theta \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E \underbrace{\Gamma(\beta, \alpha x)}_G dx \quad (3.13)$$

dans l'expression de $u(x)$ donnée par (3.11). En effet, cette intégrale ne possède pas de solution analytique. Les logiciels de calcul symbolique tels que *Mathematica* ou *Maple* échouent également à en trouver une. Il est donc nécessaire d'explorer une autre approche afin de contourner cette difficulté.

Intégration

L'intégrande de (3.13) présente des difficultés en raison de la présence du terme puissance $P := (\alpha x)^{-\beta}$ multiplié par le terme $E := e^{\alpha x}$, ainsi que le terme $G := \Gamma(\beta, \alpha x)$ (lui-même une intégrale). L'objectif est donc de reformuler cette expression afin de simplifier ou d'éliminer certains termes problématiques. C'est précisément ce qui sera abordé dans la suite de cette section. En effet, en combinant les deux expressions suivantes [16] :

$$\begin{cases} \Gamma(s, x) = \Gamma(s) - \gamma(s, x) \\ \gamma(s, x) = x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s + k + 1)} \end{cases}$$

avec $\gamma(\cdot, \cdot)$ une autre forme de la fonction gamma incomplète (voir annexe A).

Il est possible d'écrire :

$$\Gamma(s, x) = \Gamma(s) - x^s \Gamma(s) e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(s + k + 1)}$$

et donc, en reprenant les termes de l'équation à résoudre (3.8) il découle l'expression suivante :

$$\Gamma(\beta, \alpha x) = \Gamma(\beta) - \underbrace{\Gamma(\beta)}_{P'} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \quad (3.14)$$

L'expression ci-dessus (3.14) est très intéressante. En effet, en remplaçant le terme G dans (3.13) par (3.14), les termes P et P' ainsi que E et E' se simplifient comme suit :

$$\begin{aligned} & \int \theta \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E \overbrace{\left(\Gamma(\beta) - \underbrace{\Gamma(\beta)}_{P'} \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \right)}^G dx \\ &= \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E dx - \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{(\alpha x)^{\beta}}_{P'} \underbrace{e^{\alpha x}}_E \underbrace{e^{-\alpha x}}_{E'} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx \\ &= \int \theta \Gamma(\beta) \underbrace{(\alpha x)^{-\beta}}_P \underbrace{e^{\alpha x}}_E dx - \theta \Gamma(\beta) \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx \end{aligned}$$

En injectant dans (3.12), il découle :

$$m(x) = (C_1 - \theta\alpha^{-\beta}\Gamma(\beta)) \underbrace{\int x^{-\beta} e^{\alpha x} dx}_I + \theta\Gamma(\beta) \underbrace{\int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx}_J + C_2$$

avec I et J deux intégrales à résoudre :

— **Résolution de I :**

Wolfram Mathematica donne :

$$\int x^{-\beta} e^{\alpha x} dx = -x^{1-\beta} E_{\beta}(-\alpha x) \quad (3.15)$$

où $E_n(x)$ est la fonction intégrale exponentielle généralisée (voir annexe A). La relation suivante [17] :

$$E_n(x) = x^{n-1} \Gamma(1 - n, x)$$

permet d'écrire :

$$E_{\beta}(-\alpha x) = (-\alpha x)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x) \quad (3.16)$$

En combinant (3.15) et (3.16), l'expression analytique de la solution de I est obtenue :

$$I = -(-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x)$$

— **Résolution de J :**

La série à l'intérieur de l'intégrale converge uniformément grâce au terme factoriel au dénominateur. L'intégration terme-à-terme est donc possible :

$$\begin{aligned} \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k x^{k+1}}{(k+1)\Gamma(\beta + k + 1)} \\ &= \frac{x}{\Gamma(1 + \beta)} {}_2F_2 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix} \right], \alpha x \right) \end{aligned}$$

où ${}_pF_q(\cdot, \cdot, \cdot)$ est la fonction hypergéométrique généralisée (voir annexe A).

La forme finale de l'expression de la fonction temps moyen est donc :

$$m(x) = (-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x) [\theta\alpha^{-\beta}\Gamma(\beta) - C_1] + \frac{\theta x}{\beta} {}_2F_2 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix} \right], \alpha x \right) + C_2 \quad (3.17)$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $m(0) = m(c) = 0$ permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} (\theta\alpha^{-\beta}\Gamma(\beta) - C_1)\alpha^{\beta-1}\Gamma(1-\beta) + C_2 = 0 \\ (\theta\alpha^{-\beta}\Gamma(\beta) - C_1)\alpha^{\beta-1}\Gamma(1-\beta, \alpha c) + \frac{c\theta}{\beta} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) + C_2 = 0 \end{cases}$$

Les expressions des constantes C_1 et C_2 sont donc :

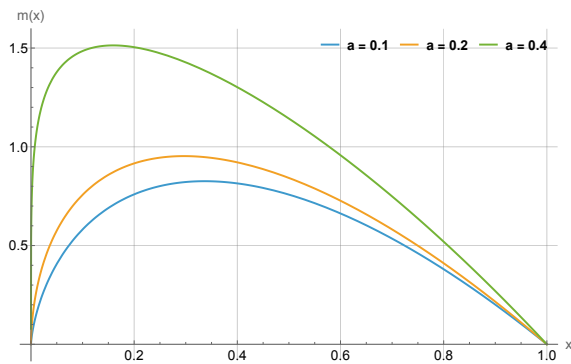
$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha^{-\beta}\theta\Gamma(\beta) + \frac{\alpha c\theta(-\alpha)^{-\beta}}{\beta\gamma(1-\beta, \alpha c)} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) \\ C_2 &= -\frac{c\theta\Gamma(1-\beta)}{\beta\gamma(1-\beta, \alpha c)} {}_2F_2\left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1+\beta \end{matrix}\right], \alpha c\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec α , β et θ définis en (3.8).

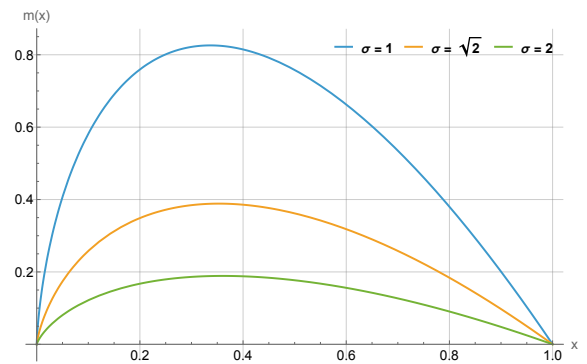
3.2.2 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Enfin, il est nécessaire de valider le comportement de la fonction Temps Moyen $m(x)$ définie par (3.17, 3.18). La fonction est donc tracée pour différentes valeurs des paramètres a , $\forall a \in \{0.1, 0.2, 0.4\}$ et σ , $\forall \sigma \in \{1, \sqrt{2}, 2\}$.



(a) Sensibilité de la vitesse a



(b) Sensibilité de la volatilité infinitésimale σ

FIGURE 3.2 Visualisation de la fonction Temps Moyen $m(x)$

Analyse

Il est important de noter les points suivants :

- Les conditions aux limites $m(0) = m(c) = 0$ sont respectées ;
- Cette fonction représente un *temps moyen de premier passage*, elle doit donc être positive pour toute valeur de x dans $[0, c]$;
- Une augmentation de la vitesse de retour a entraîne une hausse du temps moyen de sortie de l'intervalle. En effet, plus la force de rappel vers la moyenne est forte (i.e., a élevé), plus une déviation significative et peu probable est nécessaire pour franchir les bornes de l'intervalle ;
- À l'inverse, une augmentation de la volatilité infinitésimale σ diminue le temps moyen de sortie. Cela s'explique naturellement : des fluctuations plus intenses accroissent la probabilité de quitter rapidement l'intervalle.

L'expression obtenue pour la fonction de temps moyen de premier passage est ainsi validée.

3.3 Fonction Aire Moyenne

3.3.1 Résolution du problème

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est connu que l'EDO de second ordre régissant la fonction (1.7) est (voir [18]) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x A''(x) + a(b-x)A'(x) = -x$$

En reprenant les notations introduites en (3.8), l'équation devient :

$$xA''(x) + (\beta - \alpha x)A'(x) = \theta x$$

Il convient de noter que cette équation ressemble beaucoup à celle dérivée en (3.9). La résolution se fera donc de manière semblable.

Réduction d'ordre

En procédant de façon identique à la résolution de l'équation du temps moyen (3.10, 3.11, 3.12), il est possible d'écrire :

$$xu'(x) + (\beta - \alpha x)u(x) = \theta x$$

et donc :

$$u(x) = C_1 x^{-\beta} e^{\alpha x} - \theta \alpha^{-\beta-1} x^{-\beta} e^{\alpha x} \Gamma(\beta + 1, \alpha x)$$

En combinant l'expression dérivée précédemment (3.14) et l'identité suivante [16] :

$$\Gamma(s+1, x) = s\Gamma(s, x) + x^s e^{-x}$$

il est possible de réécrire la solution sous la forme :

$$u(x) = C_1 x^{-\beta} e^{\alpha x} - \theta \alpha^{-\beta-1} \left(\beta x^{-\beta} e^{\alpha x} \Gamma(\beta) \left(1 - (\alpha x)^\beta e^{-\alpha x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} \right) + 1 \right)$$

Intégration

Pour obtenir la forme explicite de $A(x)$, il suffit d'intégrer $u(x)$ et d'ajouter une deuxième constante :

$$\begin{aligned} A(x) &= \int u(x) dx + C_2 \\ &= (C_1 - \theta \alpha^{-\beta-1} \Gamma(\beta + 1)) \underbrace{\int x^{-\beta} e^{\alpha x} dx}_I + \frac{\theta \beta \Gamma(\beta)}{\alpha} \underbrace{\int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{\Gamma(\beta + k + 1)} dx}_J - \theta \alpha^{-\beta-1} x + C_2 \end{aligned}$$

Les deux intégrales résolues précédemment I et J réapparaissent. En injectant leurs solutions analytiques, la forme finale de l'expression de la fonction Aire Moyenne est obtenue :

$$\begin{aligned} A(x) &= (-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha x) [\theta \alpha^{-\beta-1} \Gamma(\beta + 1) - C_1] \\ &\quad + \frac{x\theta}{\alpha} \left[{}_2F_2 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix} \right], \alpha x \right) - \alpha^{-\beta} \right] + C_2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $A(0) = A(c) = 0$ nous permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} (-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta) (\theta \alpha^{-\beta-1} \Gamma(\beta + 1) - C_1) + C_2 = 0 \\ (-\alpha)^{\beta-1} \Gamma(1 - \beta, -\alpha c) [\theta \alpha^{-\beta-1} \Gamma(\beta + 1) - C_1] \\ \quad + \frac{c\theta}{\alpha} \left[{}_2F_2 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \beta \end{matrix} \right], \alpha c \right) - \alpha^{-\beta} \right] + C_2 = 0 \end{cases}$$

Les constantes C_1 et C_2 s'écrivent donc :

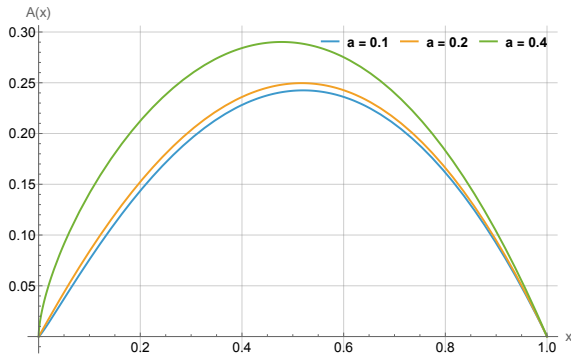
$$C_1 = \frac{1}{\gamma(1-\beta, -\alpha c)} \left[\theta(-\alpha)^{-\beta} \alpha^{-\beta-1} \left\{ c\alpha^{\beta+1} {}_2F_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\beta \end{bmatrix}, \alpha c \right) + (-\alpha)^\beta \Gamma(\beta+1) \gamma(1-\beta, -\alpha c) - \alpha c \right\} \right] \quad (3.20)$$

$$C_2 = - \frac{c\theta\alpha^{-\beta-1}\Gamma(1-\beta)}{\gamma(1-\beta, -\alpha c)} \left[\alpha^\beta {}_2F_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1+\beta \end{bmatrix}, \alpha c \right) - 1 \right]$$

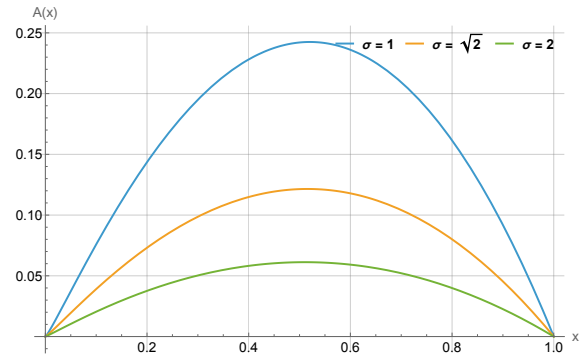
3.3.2 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Par ailleurs, la même démarche de validation est effectuée pour la fonction Aire Moyenne $A(x)$ définie par (3.19, 3.20).



(a) Sensibilité de la vitesse a



(b) Sensibilité de la volatilité infinitésimale σ

FIGURE 3.3 Visualisation de la fonction Aire Moyenne $A(x)$

Analyse

Il convient de souligner les points suivants :

- Les conditions aux limites $A(0) = A(c) = 0$ sont respectées ;
- Cette fonction représente une *aire moyenne* sous un processus positif, elle doit donc être positive pour toute valeur de x dans $[0, c]$;
- Une augmentation de la vitesse de retour a entraîne une augmentation de l'aire moyenne sous le processus avant la sortie de l'intervalle. En effet, une force de rappel plus intense maintient le processus autour de sa moyenne plus longtemps, retardant la sortie et augmentant ainsi l'accumulation totale ;

- À l'inverse, une augmentation de la volatilité infinitésimale σ réduit l'aire moyenne. Des fluctuations plus fortes rendent les sorties plus précoces, limitant la durée pendant laquelle le processus peut contribuer à l'intégrale.

L'expression obtenue pour la fonction Aire Moyenne est ainsi validée.

CHAPITRE 4 PREMIER PASSAGE EN DIFFUSION AVEC SAUTS

Ce chapitre se concentre sur la variante discontinue du CIR. Le processus est donc défini comme suit :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(b - X(s))ds + \int_0^t \sigma \sqrt{X(s)}dW(s) + J(t) \quad (4.1)$$

avec

- $X(0) = x$;
- $W(t)$ un MBS;
- $J(t)$ un processus de sauts pur comme défini en (1.2).

4.1 Fonction Temps Moyen — Sauts Uniformes Descendants

4.1.1 Résolution du problème

Dans cette section, la variante du CIR avec sauts considérée est celle avec des sauts négatifs modélisés par des variables uniformément distribuées sur $[-x, 0]$. La mesure d'intensité des sauts est donc :

$$\gamma(dy) = \lambda \frac{1}{x} \mathbb{1}_{y \in [-x, 0]} dy$$

Dérivation de l'équation à résoudre

En reprenant ce qui avait été fait en (3.1) pour dériver l'EDO régissant la Fonction Génératrice des Moments de $\tau(x)$, il est possible d'écrire :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x M''(x; \alpha) + a(b - x)M'(x; \alpha) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 M(x + y; \alpha) dy - M(x; \alpha) \right\} - \alpha M(x; \alpha) = 0$$

avec $M(0; \alpha) = M(c; \alpha) = 1$.

Ensuite, en procédant comme dans (3.2), il découle l'équation du temps moyen de sortie de l'intervalle pour le processus avec sauts :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m''(x) + a(b - x)m'(x) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 m(x + y) dy - m(x) \right\} = -1 \quad (4.2)$$

avec $m(0) = m(c) = 0$.

Soit le changement de variable suivant :

$$\int_{-x}^0 m(x+y)dy = \int_0^x m(z)dz \quad (4.3)$$

La formule de Leibniz permet d'écrire :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x m(z)dz \right) = m(x)$$

Donc, en dérivant les deux côtés de l'équation (4.2) et en éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$), il découle une EDO d'ordre 3 :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x m'''(x) + \sigma^2 m''(x) - \lambda m'(x) = -\frac{1}{x} \quad (4.4)$$

Résolution

Soit les valeurs suivantes des paramètres : $\sigma = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$ et $c = 1$. *Maple* donne comme solution :

$$m(x) = C_1 I_0(2\sqrt{x}) + C_2 K_0(2\sqrt{x}) + 2 \ln(2\sqrt{x}) + C_3 \quad (4.5)$$

avec C_1 , C_2 , C_3 des constantes à déterminer et $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce respectivement (voir annexe A).

Les constantes C_1 , C_2 et C_3 sont déterminées en imposant les conditions aux limites $m(0) = m(1) = 0$ ainsi qu'une condition supplémentaire $m(0.5) = r$. Ensuite, la valeur de r permettant de satisfaire l'équation originale (4.2) est trouvée : $r \simeq 0.3281$.

Étude du cas sans sauts

Afin de comparer l'effet de la présence des sauts, il est intéressant de résoudre le même problème en retirant ces derniers. Soit $m_0(x)$ le temps moyen de sortie du processus sans sauts. En considérant les mêmes valeurs des paramètres, l'équation à résoudre devient :

$$x m_0''(x) = -1 \quad (4.6)$$

La solution qui satisfait $m_0(0) = m_0(1) = 0$ est :

$$m_0(x) = -x \ln(x) \quad (4.7)$$

4.1.2 Validation de l'expression obtenue

Les fonctions $m(x)$ (avec sauts) et $m_0(x)$ (sans sauts), données respectivement par (4.5) et (4.7), sont tracées.

Visualisation

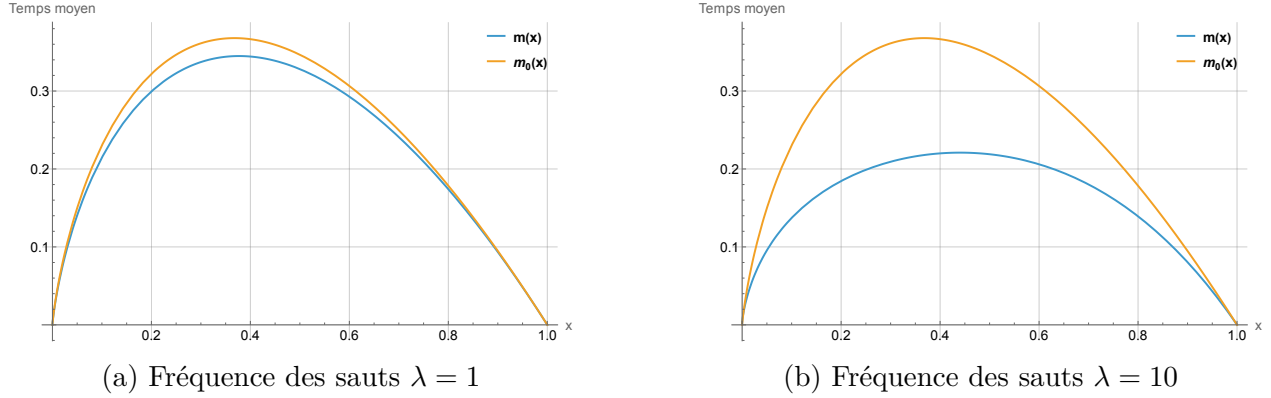


FIGURE 4.1 Visualisation des temps moyens de sortie $m(x)$ et $m_0(x)$

Analyse

Il convient de souligner les observations suivantes :

- Les conditions aux limites $m(0) = m(c) = m_0(0) = m_0(c) = 0$ sont bien vérifiées ;
- Le temps moyen de sortie en présence de sauts ($m(x)$ en bleu) est inférieur à celui observé sans sauts ($m_0(x)$ en orange), ce qui illustre l'accélération du processus induite par ces derniers ;
- Une augmentation de la fréquence des sauts λ induit une diminution du temps moyen de sortie. Ce comportement est attendu comme les sauts augmente la probabilité que le CIR quitte l'intervalle rapidement.

La fonction obtenue pour le temps moyen de sortie avec sauts est donc validée.

4.2 Fonction Probabilité de Sortie en Zéro — Sauts Uniformes Descendants

4.2.1 Résolution du problème

Dans cette section, la variante du CIR avec sauts considérée est identique à la précédente (sauts négatifs modélisés par des variables uniformément distribuées sur $[-x, 0]$).

Dérivation de l'équation à résoudre

Il est possible de montrer (voir [14]) que la fonction probabilité de sortie en zéro satisfait l'EDO :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x p''(x) + a(b-x)p'(x) + \lambda \left\{ \frac{1}{x} \int_{-x}^0 p(x+y)dy - p(x) \right\} = 0 \quad (4.8)$$

sous les conditions $p(0) = 1$ et $p(c) = 0$.

Ensuite, en effectuant le même changement de variable que pour la fonction temps moyen (4.3), en dérivant les deux membres de l'équation et en éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$), il découle :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x p'''(x) + \sigma^2 p''(x) - \lambda p'(x) = 0 \quad (4.9)$$

Résolution

En reprenant les mêmes valeurs des paramètres ($\sigma = \sqrt{2}$, $\lambda = 1$ et $c = 1$) et en imposant les conditions $p(0) = 1$, $p(1) = 0$ et $p(0.5) = r$, *Maple* donne la solution suivante :

$$p(x) = \frac{I_0(2) - I_0(2\sqrt{x})}{I_0(2) - 1} \quad (4.10)$$

avec $I_0(\cdot)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce (voir annexe A) et $r \simeq 0.5567$.

Étude du cas sans sauts

Dans la même logique, le même problème en absence des sauts est résolu pour $p_0(x) = \mathbb{P}[X(\tau(x)) = 0]$. L'équation (4.9) devient :

$$x p_0''(x) = 0$$

La solution qui satisfait $p(0) = 1$ et $p(1) = 0$ est :

$$p_0(x) = 1 - x \quad (4.11)$$

4.2.2 Validation de l'expression obtenue

Les fonctions $p(x)$ (avec sauts) et $p_0(x)$ (sans sauts), correspondant respectivement aux expressions (4.10) et (4.11), sont représentées graphiquement.

Visualisation

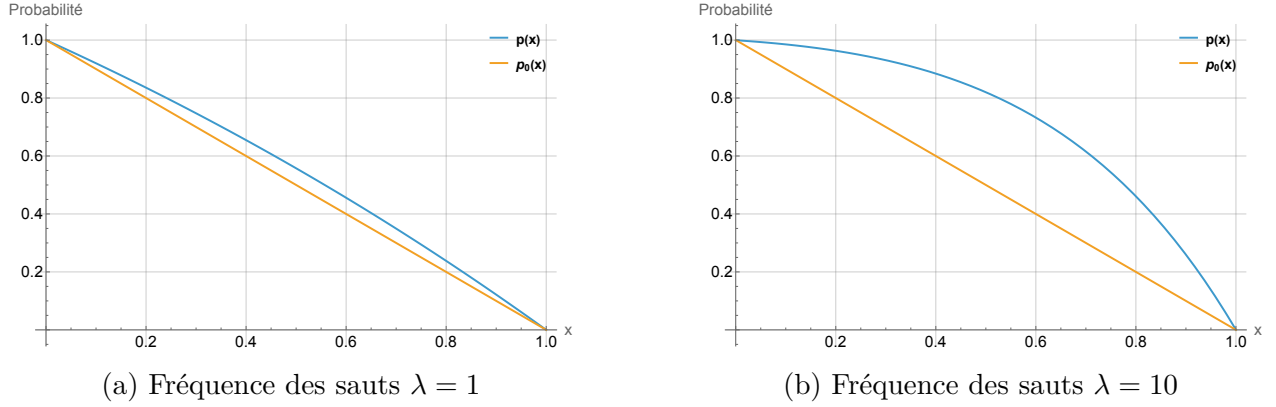


FIGURE 4.2 Visualisation des probabilités de sortir en zéro $p(x)$ et $p_0(x)$

Analyse

Les observations suivantes peuvent être formulées :

- Les conditions aux limites sont correctement satisfaites, à savoir $p(0) = p_0(0) = 1$ et $p(c) = p_0(c) = 0$;
- Les sauts étant négatifs, ils favorisent une sortie par la borne inférieure. La probabilité de franchissement par zéro est donc plus élevée dans le cas avec sauts ($p(x)$ en bleu) ;
- Une augmentation de la fréquence des sauts λ entraîne une augmentation considérable de la probabilité de sortir par zéro. En effet, la multiplication des sauts tend à entraîner le processus vers la borne inférieure.

Ces résultats permettent donc de valider l'expression obtenue pour la probabilité de sortie en zéro.

4.3 Fonction Dépassement Moyen — Sauts Exponentiels Ascendants

4.3.1 Formulation générale du problème

Théorème Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion à sauts vérifiant les conditions d'unicité des trajectoires (C), et défini par :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s)) ds + \int_0^t \sigma(X(s)) dW(s) + J(t)$$

où $J(t)$ est un processus de sauts pur associé à une mesure d'intensité $\gamma(dy)$.

Alors, la fonction $D(x)$ (1.9), représentant le dépassement moyen au-dessus de la frontière c

au temps du premier passage $\tau(x)$ (1.4), satisfait l'équation suivante :

$$\mathcal{L}D(x) = - \int_{c-x}^{+\infty} (x + y - c) \gamma(dy) \quad (4.12)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$ et \mathcal{L} le générateur infinitésimal du processus (voir B).

Démonstration Soit $f(x) = (x - c)_+$ la fonction mesurant un dépassement. En appliquant la formule de Dynkin (voir [19]), il est possible d'écrire :

$$\mathbb{E}[f(X(\tau(x)))] = f(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(x)} \mathcal{L}f(X(s)) ds \right] \quad (4.13)$$

Pour $x \in (0, c)$:

- $f(x) = (x - c)_+ = 0$
- $f'(x) = \mathbb{1}_{x \geq c} = 0 \implies f''(x) = 0$

Le générateur infinitésimal (B) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(x) &= \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x) + \mu(x) f'(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(x + y) - f(x)] \gamma(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x + y - c)_+ \gamma(dy) \\ &= \int_{c-x}^{+\infty} (x + y - c) \gamma(dy) \end{aligned}$$

Le dépassement moyen est donc :

$$D(x) := \mathbb{E}[(X(\tau(x)) - c)_+] = \mathbb{E}[f(X(\tau(x)))] = \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau(x)} \left(\int_{c-x}^{+\infty} (X(s) + y - c) \gamma(dy) \right) ds \right]$$

Alors, Abundo [18] a montré que $D(x)$ satisfait :

$$\mathcal{L}D(x) = - \int_{c-x}^{+\infty} (x + y - c) \gamma(dy)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$. □

4.3.2 Sauts exponentiels ascendants

Lemme Sous les mêmes hypothèses que précédemment, et en supposant que les sauts suivent une loi exponentielle de paramètre $\nu > 0$ avec une intensité $\lambda > 0$, la fonction $D(x)$ (1.9)

satisfait l'équation différentielle homogène d'ordre trois suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(x)^2 D'''(x) + D''(x) [2\mu(x) + \sigma(x)(2\sigma'(x) - \nu\sigma(x))] \\ - 2D'(x)[\lambda - \mu'(x) + \nu\mu(x)] = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec $D(0) = D(c) = 0$.

Démonstration Si la mesure d'intensité s'écrit :

$$\gamma(dy) := \lambda \nu e^{-\nu y} \mathbf{1}_{y \geq 0} dy$$

Alors :

$$\int_{c-x}^{+\infty} (x+y-c) \gamma(dy) = \frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x}$$

L'équation (4.12) devient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \int_0^\infty [D(x+y) - D(x)] \nu e^{-\nu y} dy = -\frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x} \quad (4.15)$$

D'abord, l'intégrale peut être simplifiée :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \int_0^\infty D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy - \lambda D(x) = -\frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x} \quad (4.16)$$

Le changement de variable $z = x + y$ donne :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D(x+y) \nu e^{-\nu y} dy &= \int_x^\infty D(z) \nu e^{-\nu(z-x)} dz \\ &= \nu e^{\nu x} \int_x^\infty D(z) e^{-\nu z} dz \end{aligned}$$

Soit :

$$\Phi(x) := \int_x^\infty D(z) e^{-\nu z} dz$$

L'équation (4.16) devient :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x) D''(x) + \mu(x) D'(x) + \lambda \nu e^{\nu x} \Phi(x) - \lambda D(x) = -\frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} e^{\nu x} \quad (4.17)$$

D'une part, la dérivée de $\Phi(x)$ est (règle de Leibniz) :

$$\Phi'(x) = -D(x) e^{-\nu x} \implies D(x) = -e^{\nu x} \Phi'(x) \quad (4.18)$$

D'autre part, les dérivées de $D(x)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} D'(x) &= -\nu e^{\nu x} \Phi'(x) - e^{\nu x} \Phi''(x) \\ D''(x) &= -\nu^2 e^{\nu x} \Phi'(x) - 2\nu e^{\nu x} \Phi''(x) - e^{\nu x} \Phi'''(x) \end{aligned} \quad (4.19)$$

En injectant (4.19) dans (4.17) et en éliminant les termes $-e^{\nu x}$, il découle l'EDO d'ordre 3 suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sigma^2(x) \Phi'''(x) + \Phi''(x) [\nu \sigma^2(x) + \mu(x)] \\ &+ \Phi'(x) \left[\frac{1}{2} \nu^2 \sigma^2(x) + \nu \mu(x) - \lambda \right] - \lambda \nu \Phi(x) = \frac{\lambda}{\nu e^{\nu c}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Comme $D(x)$ ne dépend que de $\Phi'(x)$ (4.18), il est intéressant de dériver l'équation ci-dessus (4.20) en posant $\phi(x) = \Phi'(x)$ pour obtenir l'EDO homogène suivante :

$$\begin{aligned} &\sigma(x)^2 \phi'''(x) + 2\phi''(x) [\mu(x) + \sigma(x) (\sigma'(x) + \nu \sigma(x))] \\ &+ \phi'(x) [-2\lambda + 2\mu'(x) + 2\nu \mu(x) + \nu \sigma(x) (4\sigma'(x) + \nu \sigma(x))] \\ &+ 2\nu \phi(x) [-\lambda + \mu'(x) + \nu \sigma(x) \sigma'(x)] = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

avec $D(x) = -e^{\nu x} \Phi'(x) = -e^{\nu x} \phi(x)$ et $\phi(0) = \phi(c) = 0$.

Ensuite, il est possible de montrer que $\phi_1(x) = e^{-\nu x}$ est une solution particulière de (4.21). La solution générale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} D(x) &= -e^{\nu x} \phi(x) \\ &= -e^{\nu x} \phi_1(x) u(x) \\ &= -e^{\nu x} e^{-\nu x} u(x) \\ &= -u(x) \end{aligned}$$

avec $u(x)$ une fonction à déterminer. En effectuant un changement de variable avec la solution particulière et en échangeant u par $-D$, l'EDO homogène d'ordre 3 suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} &\sigma(x)^2 D'''(x) + D''(x) [2\mu(x) + \sigma(x) (2\sigma'(x) - \nu \sigma(x))] \\ &- 2D'(x) [\lambda - \mu'(x) + \nu \mu(x)] = 0 \end{aligned}$$

avec $D(0) = D(c) = 0$. □

Cette équation permet donc de résoudre le problème pour tout processus $\{X(t), t \geq 0\}$. Dans la suite, le CIR avec sauts exponentiels est considéré.

4.3.3 Application au CIR

En reprenant les termes de dérive et de diffusion du CIR (1.2), l'équation (4.14) devient :

$$\sigma^2 x D'''(x) + D''(x) [2a(b-x) + \sigma^2 - \nu\sigma^2 x] - 2D'(x)[a\nu(b-x) + a + \lambda] = 0$$

Cependant, une expression explicite pour $D(x)$, si elle existe, est très difficile à obtenir. Cela rend donc la résolution du problème général assez compliqué.

Résolution pour $a = 0$

En considérant le cas du CIR à sauts sans retour à la moyenne ($a = 0$) et en posant $\sigma = c = \lambda = \nu = 1$, *Maple* donne l'expression suivante :

$$D(x) = 2xe^x [E_1(x) - E_1(1)] \quad (4.22)$$

avec $E_n(x)$ la fonction intégrale exponentielle généralisée (voir annexe A).

Détermination des constantes

Les conditions aux limites $D(0) = D(c) = 0$ permettent de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 . Étant donné la longueur des expressions obtenues, celles-ci ne seront pas détaillées dans le présent document.

4.3.4 Validation de l'expression obtenue

Visualisation

Afin de valider le résultat, l'expression obtenue pour $D(x)$ (4.22) est tracée.

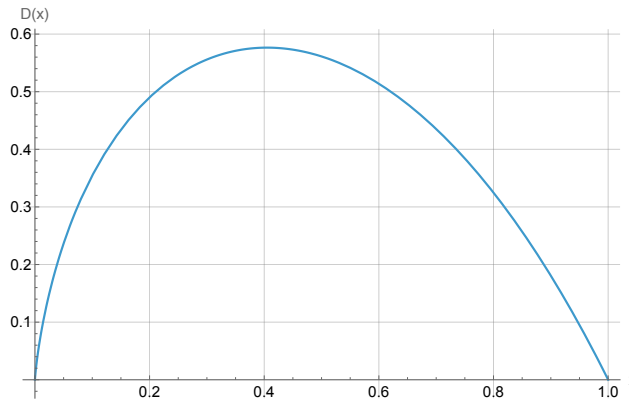


FIGURE 4.3 Visualisation de la fonction Dépassement Moyen $D(x)$

Analyse

Les différents points suivants sont relevés :

- Les conditions aux limites $D(0) = D(c) = 0$ sont respectées ;
- La fonction représente un *dépassement moyen*, elle doit donc être positive pour toute valeur x dans $[0, c]$;
- Une augmentation de la fréquence des sauts λ induit une augmentation du dépassement moyen. En effet, il devient plus probable que le processus effectue un saut juste avant d'atteindre la frontière, ce qui augmente les chances de la franchir avec un certain excès ;

La fonction Dépassement Moyen $D(x)$ est donc validée.

CHAPITRE 5 COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE

Ce chapitre est consacrée à l'étude du problème de commande optimale défini en (1.2).

5.1 Formalisation du problème

Dérivation de l'équation de programmation dynamique

En reprenant la définition (1.12) et en appliquant le principe d'optimalité de Bellman, il découle :

$$F(x) = \inf_u \mathbb{E} \left[\int_0^{\delta t} \left(\frac{1}{2} q[X_u(s)] u^2[X_u(s)] + r[X_u(s)] \right) ds + F(X_u(\delta t)) \right] \quad (5.1)$$

D'une part, pour δt petit, il est possible d'écrire :

$$\int_0^{\delta t} \left(\frac{1}{2} q[X_u(s)] u^2[X_u(s)] + r[X_u(s)] \right) ds = \left(\frac{1}{2} q(x) u(x)^2 + r(x) \right) \delta t + o(\delta t) \quad (5.2)$$

D'autre part, un développement de Taylor combiné avec la formule d'Itô [2] (appliquée au processus contrôlé de dynamique (1.10)) permet d'écrire (en supposant que $F \in C^2$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F(X_u(\delta t))] &= F(x) + \mathbb{E}[dF(X_u(\delta t))] + o(\delta t) \\ &= F(x) + \mathbb{E} \left[F'(X_u(\delta t)) dX_u(t) + \frac{1}{2} F''(X_u(\delta t)) d\langle X_u \rangle_{\delta t} \right] + o(\delta t) \\ &= F(x) + [a(b-x) + b(x)u(x)] F'(x) \delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) \delta t + o(\delta t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où $\langle X_u \rangle_t$ dénote la variation quadratique du processus $X_u(t)$.

En injectant (5.2) et (5.3) dans (5.1), il découle :

$$F(x) = \inf_u \left\{ \left(\frac{1}{2} q(x) u(x)^2 + r(x) \right) \delta t + F(x) + [a(b-x) + b(x)u(x)] F'(x) \delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) \delta t + o(\delta t) \right\} \quad (5.4)$$

Ensuite, en retranchant $F(x)$ des deux côtés, en divisant partout par δt et en prenant la limite lorsque $\delta t \rightarrow 0$, l'équation de programmation dynamique est obtenue :

$$0 = \min_u \left\{ r(x) + \frac{1}{2} q(x) u^2(x) + [a(b-x) + b(x)u(x)] F'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) \right\} \quad (5.5)$$

Détermination de la commande optimale et dérivation de l'équation associée

La minimisation à faire dans (5.5) est en fonction de $u(x)$. Le terme à minimiser est :

$$f(u(x)) = \frac{1}{2}q(x)u(x)^2 + b(x)u(x)F'(x)$$

La minimisation donne :

$$\begin{aligned} f'(u^*(x)) &= 0 \\ q(x)u^*(x) + b(x)F'(x) &= 0 \\ u^*(x) &= -\frac{b(x)}{q(x)}F'(x) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par ailleurs, la dérivée seconde est :

$$f''(u(x)) = q(x) \quad \forall u(x)$$

Puisque $q(x) > 0$ par hypothèse (1.2), la dérivée seconde par rapport au contrôle est strictement positive. L'expression de $u^*(x)$ obtenue en (5.6) réalise donc bien un minimum global. Il s'agit ainsi du contrôle optimal.

En injectant ce dernier (5.6) dans (5.5), l'équation Hamilton–Jacobi–Bellman est obtenue, régissant la fonction valeur associée à la commande optimale :

$$r(x) - \frac{b(x)^2}{2q(x)}[F'(x)]^2 + a(b-x)F'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x) = 0 \tag{5.7}$$

avec $F(0) = F(c) = 0$ et $r(x) \neq 0, b(x) \neq 0, q(x) > 0$.

5.2 Résolution du problème sous différentes configurations

5.2.1 P1 — Résolution

Résolution du problème

Il faut donc procéder à la résolution de l'équation (5.7). Whittle [20] a montré que la transformation :

$$F(x) = -K \log(\varphi(x))$$

avec $\varphi(0) = \varphi(c) = 1$ permet de linéariser l'équation si :

$$Kb(x)^2 = \sigma^2 x q(x), \quad K \in \mathbb{R} \tag{5.8}$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x\varphi''(x) + a(b-x)\varphi'(x) - \frac{r(x)}{K}\varphi(x) = 0 \quad (5.9)$$

Dans le cas où le terme suivant est constant :

$$\frac{r(x)}{K} \equiv k \in \mathbb{R} \quad \forall x \quad (5.10)$$

l'équation (5.9) est identique à celle de la Fonction Génératrice des Moments $M(x; \alpha)$ pour :

$$\alpha \equiv \frac{r(x)}{K}$$

Cela permet de résoudre une multitude de problèmes en supposant différentes formes pour $r(x)$, $b(x)$ et $q(x)$ tout en satisfaisant la condition (5.8, 5.10).

Soit les coûts suivants :

- $r(x) = \rho$: coût immédiat constant, indépendant de l'état x et du contrôle ;
- $b(x) = \beta x$: coût du contrôle proportionnel à x sur la dynamique ;
- $q(x) = \kappa x$: poids pénalisant l'intensité du contrôle, linéaire avec x .

Cela donne :

$$K \equiv \frac{\kappa\sigma^2}{\beta^2}$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x\varphi''(x) + a(b-x)\varphi'(x) - \frac{\rho\beta^2}{\kappa\sigma^2}\varphi(x) = 0 \quad (5.11)$$

La solution est :

$$\varphi(x) = C_1 \Phi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right) + C_2 \Psi\left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2}\right)$$

Les conditions aux limites $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$ permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)}{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) \Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \\ C_2 &= \frac{\Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - 1}{\Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, 0\right) \Phi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right) - \Psi\left(\frac{\beta^2\rho}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ac}{\sigma^2}\right)} \end{aligned} \quad (5.12)$$

L'expression analytique de la fonction valeur est donc :

$$F(x) = -\frac{\kappa\sigma^2}{\beta^2} \log \left[C_1 \Phi \left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2} \right) + C_2 \Psi \left(\frac{\rho\beta^2}{a\kappa\sigma^2}, \frac{2ab}{\sigma^2}, \frac{2ax}{\sigma^2} \right) \right] \quad (5.13)$$

Par ailleurs, le contrôle optimal est

$$u^*(x) = -\frac{\beta}{\kappa} F'(x) \quad (5.14)$$

L'expression complète de la fonction $u^*(x)$ étant assez lourde dû à la dérivée de $F(x)$, elle ne sera pas présentée dans ce mémoire.

5.2.2 P1 — Visualisation

La fonction valeur $F(x)$ (5.13, 5.12) et le contrôle optimal (5.14) sont tracés. D'abord, tous les paramètres des coûts sont fixés : $\rho = \beta = \kappa = 1$.

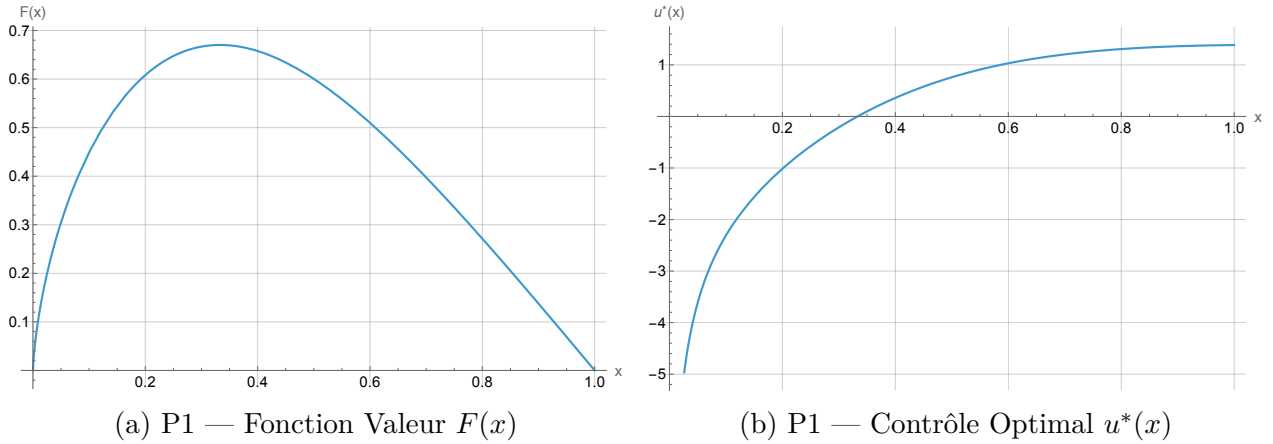
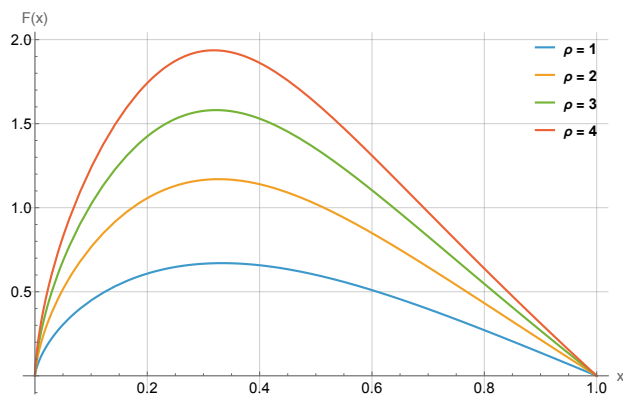
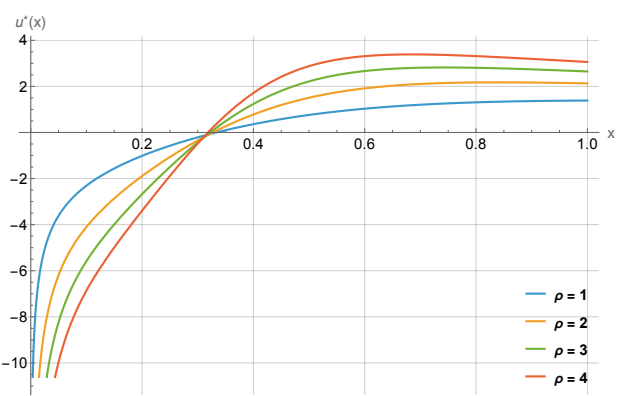
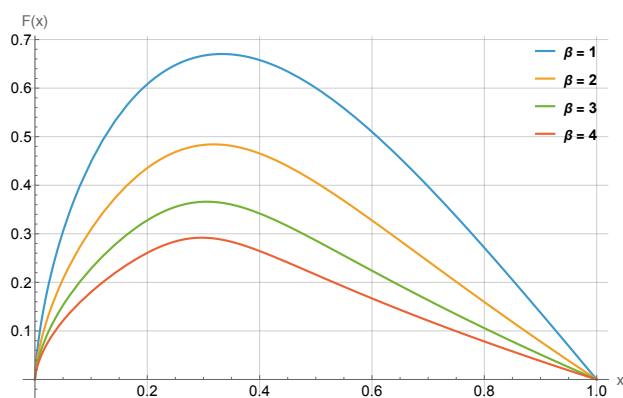
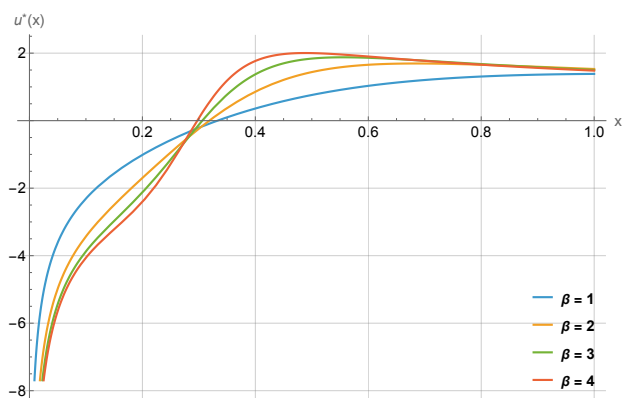
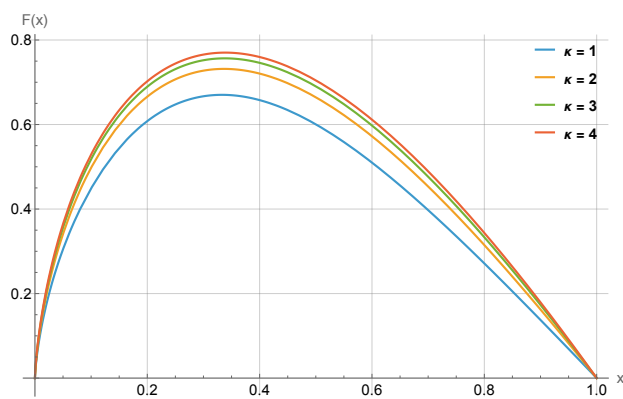
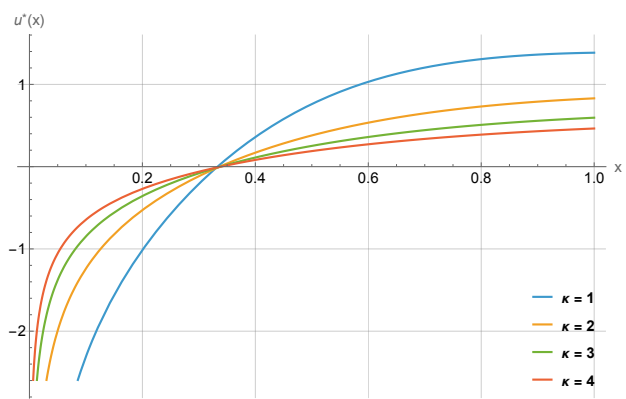


FIGURE 5.1 P1 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal

De plus, il est intéressant d'analyser la sensibilité de ces fonctions par rapport à la variation des coûts. Les différentes valeurs des paramètres suivants sont évaluées :

- Paramètre du coût immédiat ρ , $\forall \rho \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Paramètre du coût de contrôle β , $\forall \beta \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Paramètre du poids pénalisant l'intensité du contrôle κ , $\forall \kappa \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) P1 — Fonction Valeur $F(x)$, $r(x) = \rho$ (b) P1 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $r(x) = \rho$ (c) P1 — Fonction Valeur $F(x)$, $b(x) = \beta x$ (d) P1 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $b(x) = \beta x$ (e) P1 — Fonction Valeur $F(x)$, $q(x) = \kappa x$ (f) P1 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $q(x) = \kappa x$ FIGURE 5.2 P1 — Sensibilité des fonctions valeur $F(x)$ et contrôle optimal $u^*(x)$

Par ailleurs, une simulation d'une trajectoire contrôlée et d'une trajectoire non contrôlée est effectuée en utilisant un même tirage aléatoire, afin de permettre une comparaison pertinente entre les deux dynamiques.

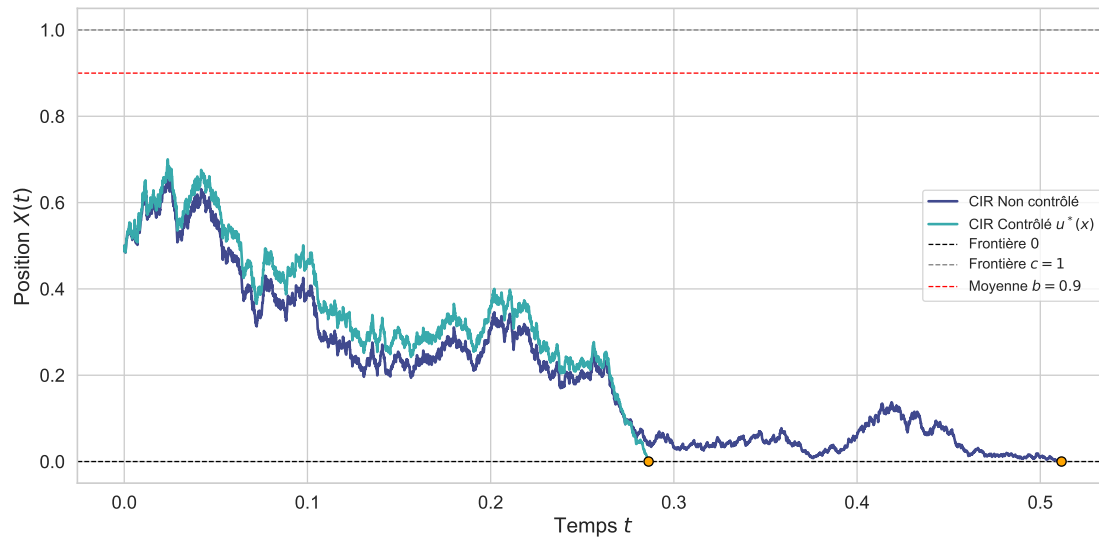


FIGURE 5.3 P1 — Visualisation de l'effet de la commande optimale

5.2.3 P2 — Résolution

Soit le problème suivant :

- $r(x) = \rho^2 x$: coût immédiat linéaire en x , indépendant du contrôle ;
- $b(x) = \beta\sqrt{x}$: coût du contrôle proportionnel à \sqrt{x} (dynamique semblable à celle de la diffusion du CIR) ;
- $q(x) = \kappa^2$: poids pénalisant l'intensité du contrôle constant.

Les conditions (5.8, 5.10) n'étant pas satisfaites, ce problème ne permet pas une linéarisation facile. Il faut donc le résoudre d'une autre manière. En éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$) l'équation (5.7) devient :

$$\rho^2 x - \frac{\beta^2 x}{2\kappa^2} F'(x)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 x F''(x) = 0$$

Mathematica donne comme solution :

$$F(x) = C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (x - C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] \quad (5.15)$$

Les conditions aux limites $F(0) = F(c) = 0$ permettent de déterminer les constantes C_1 et C_2 en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (-C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] = 0 \\ C_2 - \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho (c - C_1 \kappa^2 \sigma^2)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

Les constantes C_1 et C_2 s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{c}{2\kappa^2 \sigma^2} \\ C_2 &= \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \log \left[\cosh \left(\frac{\beta \rho c}{\sqrt{2} \kappa \sigma^2} \right) \right] \end{aligned}$$

L'expression finale de la fonction valeur est donc :

$$F(x) = \frac{\kappa^2 \sigma^2}{\beta^2} \left(\log \left[\cosh \left(\frac{\beta \rho c}{\sqrt{2} \kappa \sigma^2} \right) \right] - \log \left[\cosh \left(\frac{\sqrt{2} \beta \rho \left(x - \frac{c}{2} \right)}{\kappa \sigma^2} \right) \right] \right) \quad (5.16)$$

Enfin, le contrôle optimal associé est :

$$\begin{aligned} u^*(x) &= -\frac{\beta\sqrt{x}}{\kappa^2} F'(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}\rho}{\kappa} \sqrt{x} \tanh \left[\frac{\sqrt{2}\beta\rho \left(x - \frac{c}{2}\right)}{\kappa\sigma^2} \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.2.4 P2 — Visualisation

D'abord, et comme pour P1, les paramètres des coûts sont fixés à 1 et la fonction valeur (5.16) et la commande optimale (5.17) sont tracées.

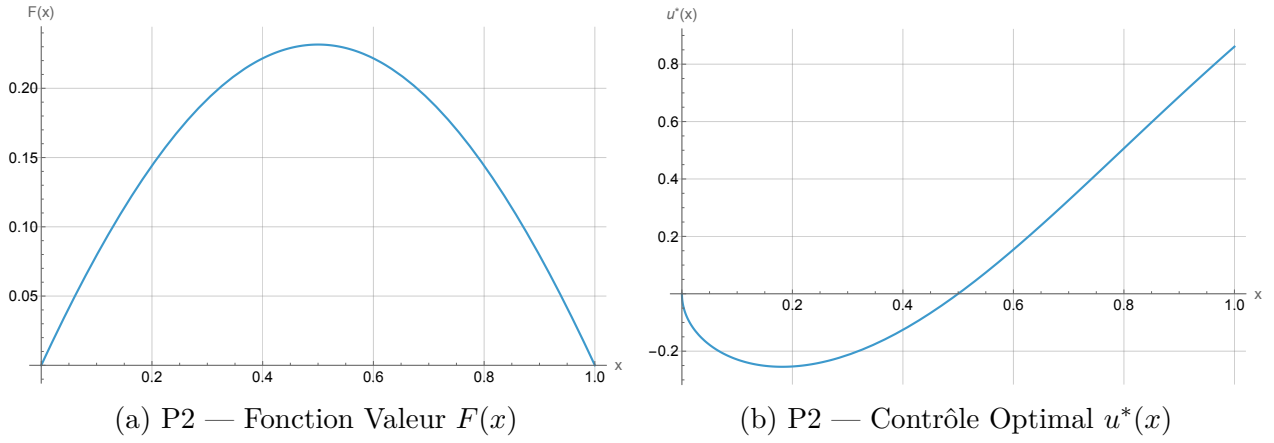
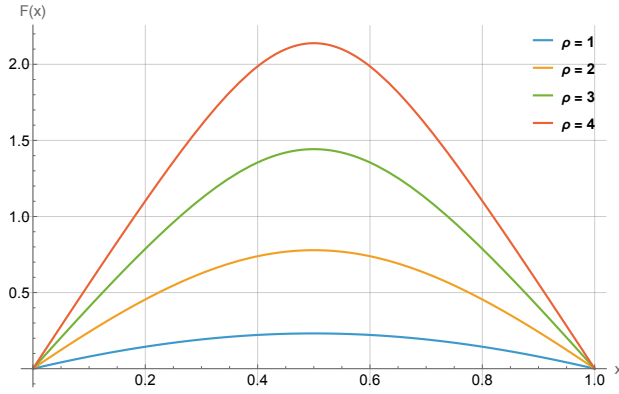
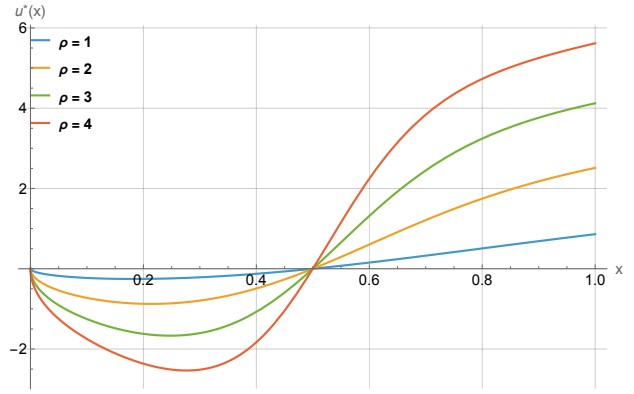
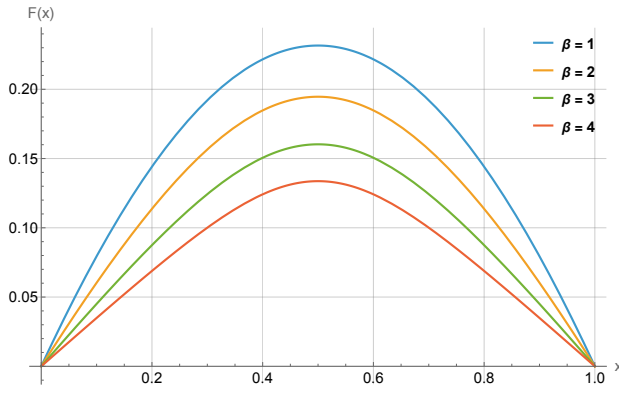
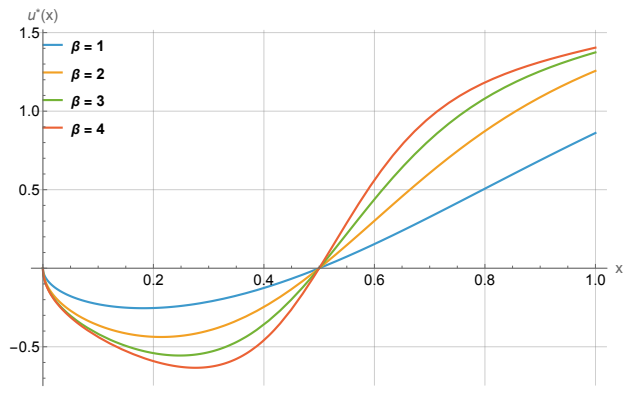
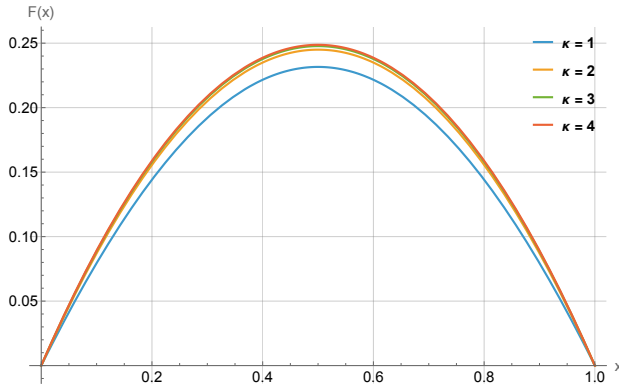
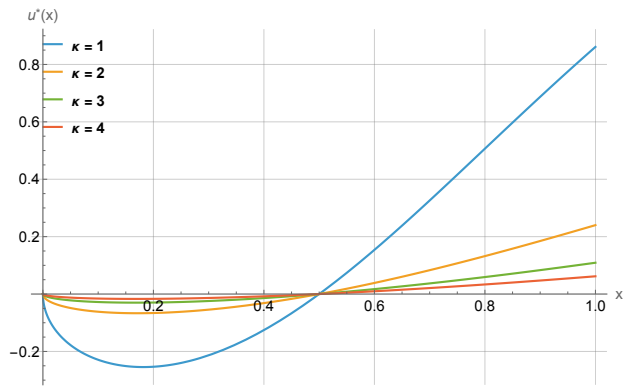


FIGURE 5.4 P2 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal

Ensuite, la sensibilité aux paramètres des coûts est visualisée.

(a) P2 — Fonction Valeur $F(x)$, $r(x) = \rho^2 x$ (b) P2 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $r(x) = \rho^2 x$ (c) P2 — Fonction Valeur $F(x)$, $b(x) = \beta\sqrt{x}$ (d) P2 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $b(x) = \beta\sqrt{x}$ (e) P2 — Fonction Valeur $F(x)$, $q(x) = \kappa^2$ (f) P2 — Contrôle Optimal $u^*(x)$, $q(x) = \kappa^2$ FIGURE 5.5 P2 — Sensibilité des fonctions valeur $F(x)$ et contrôle optimal $u^*(x)$

Enfin, une simulation est effectuée avec le même tirage aléatoire.

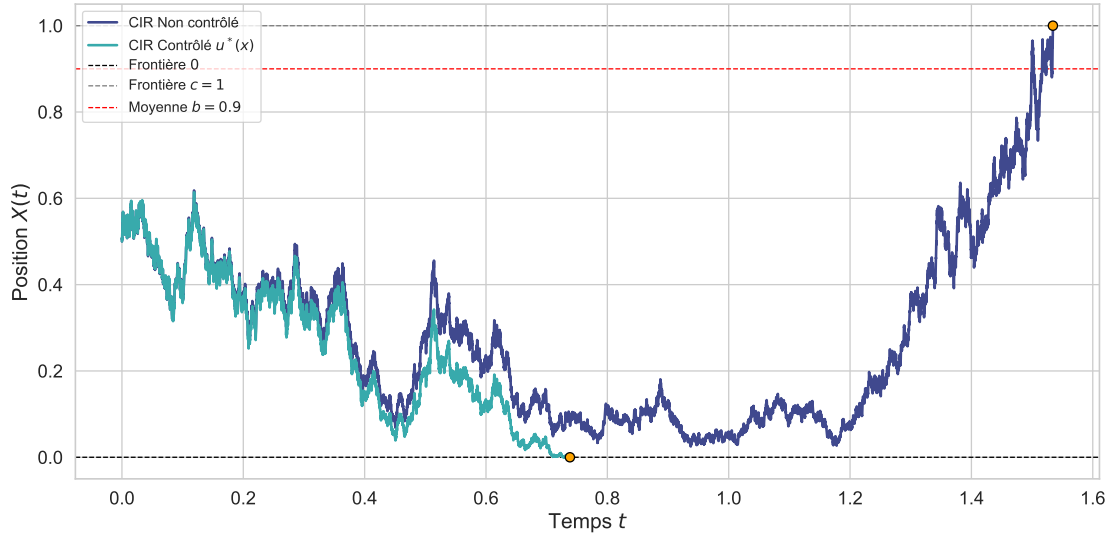


FIGURE 5.6 P2 — Visualisation de l'effet de la commande optimale

5.2.5 P3 — Résolution

Soit le problème suivant :

- $r(x) = x^2$: coût immédiat quadratique en x , indépendant du contrôle ;
- $b(x) = x$: coût du contrôle linéaire égal à x ;
- $q(x) \equiv 1$: poids pénalisant l'intensité du contrôle constant.

Comme pour P2, la linéarisation n'est pas possible car les conditions (5.8,5.10) ne sont pas satisfaites. En éliminant le retour à la moyenne ($a = 0$) et en posant $\sigma = 1$, l'équation (5.7) se réduit à :

$$x^2 - \frac{x^2}{2} F'(x)^2 + \frac{1}{2} x F''(x) = 0$$

Le logiciel de calcul symbolique *Maple* donne comme solution pour $F(0) = 0$ (avec C_1 une constante à déterminer) :

$$F(x) = \int_0^x -\sqrt{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{2} z^2}{2} + C_1 \sqrt{2} \right) dz$$

En posant $c = 1$, la valeur de C_1 qui satisfait $F(c) = F(1) = 0$ est $C_1 \simeq -0.1652$. Donc, la forme finale de la fonction valeur est obtenue :

$$F(x) \simeq \int_0^x -\sqrt{2} \tanh \left(\frac{\sqrt{2} z^2}{2} - 0.1652 \sqrt{2} \right) dz \quad (5.18)$$

La commande optimale est donc :

$$u^*(x) \simeq x\sqrt{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{2}x^2}{2} - 0.1652\sqrt{2}\right) \quad (5.19)$$

5.2.6 P3 — Visualisation

La fonction valeur (5.18) ainsi que la commande optimale (5.19) sont tracés.

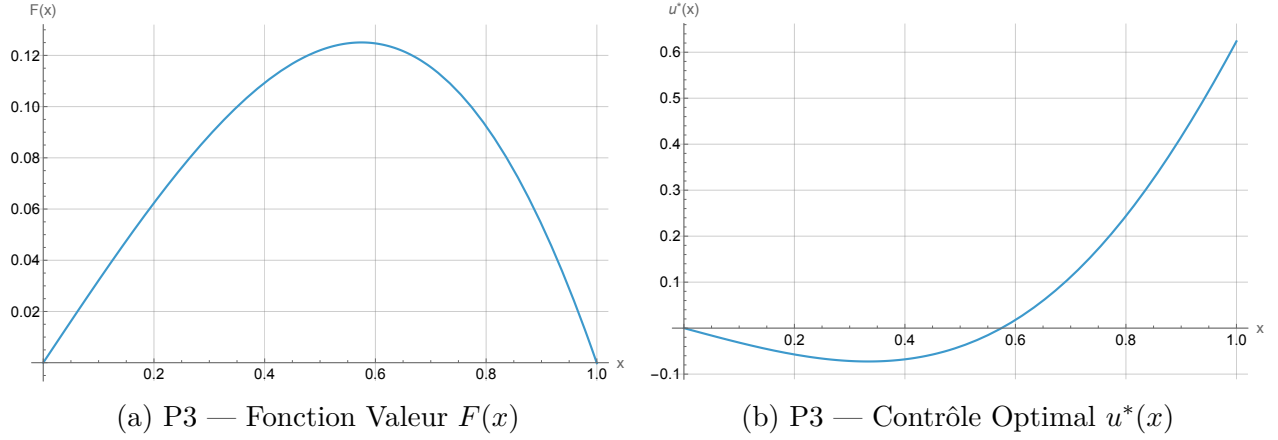


FIGURE 5.7 P3 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal

Une simulation est aussi effectuée.

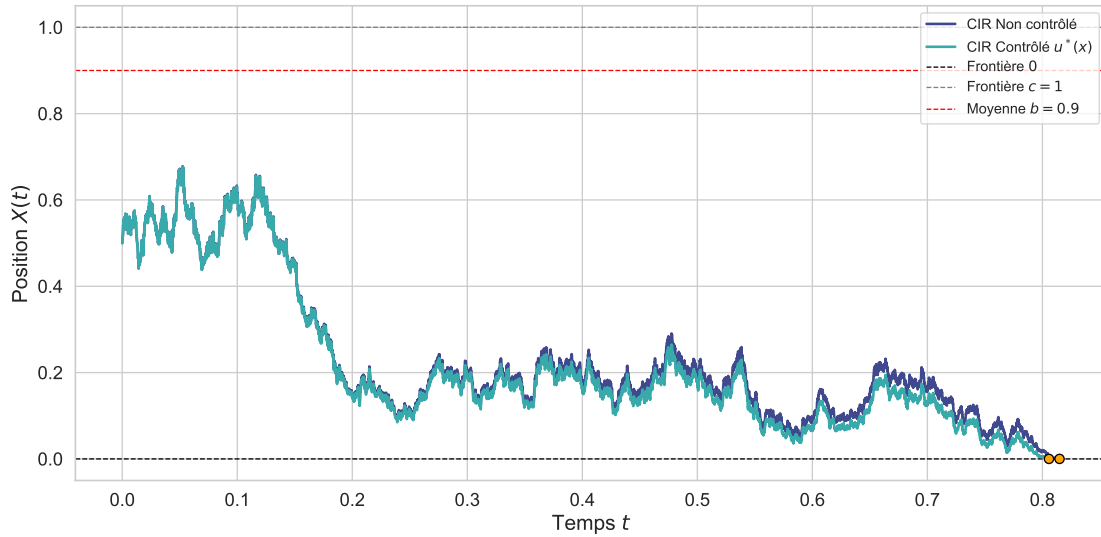


FIGURE 5.8 P3 — Visualisation de l'effet de la commande optimale

5.2.7 P4 — Résolution

Soit le problème où tous les coûts sont constants :

- $r(x) \equiv \rho^2$;
- $b(x) \equiv \beta$;
- $q(x) \equiv \kappa^2$.

Comme ce qui précède, cette configuration ne permet pas de linéariser l'équation de la fonction valeur. En éliminant le retour à la moyenne, cette dernière devient :

$$\rho^2 - \frac{\beta^2 F'(x)^2}{2\kappa^2} + \frac{1}{2}\sigma^2 x F''(x) = 0$$

La solution donnée par *Mathematica* est :

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}\kappa\rho x}{\beta} \left[2 {}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{\kappa\sigma^2}{2\sqrt{2}\beta\rho} \end{matrix} \right], \frac{\kappa\sigma^2}{2\sqrt{2}\beta\rho} + 1, -e^{-2\sqrt{2}\beta\kappa\rho C_1} x^{\frac{2\sqrt{2}\beta\rho}{\kappa\sigma^2}} \right) - 1 \right] + C_2$$

avec C_1 et C_2 des constantes à déterminer et ${}_pF_q(\cdot, \cdot, \cdot)$ la fonction hypergéométrique généralisée (voir A). En posant $\sigma = \rho = \beta = \kappa = 1$, la solution devient :

$$F(x) \simeq \sqrt{2}x \left[2 {}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right], \frac{\sqrt{2}+4}{4}, -9.76175x^{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \quad (5.20)$$

La commande optimale associée est alors :

$$\begin{aligned} u^*(x) \simeq & 20.3985x^{2\sqrt{2}} {}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 2 \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right], \frac{\sqrt{2}+8}{4}, -9.76175x^{2\sqrt{2}} \right) \\ & - \sqrt{2} \left[2 {}_2F_1 \left(\left[\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix} \right], \frac{\sqrt{2}+4}{4}, -9.76175x^{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.8 P4 — Visualisation

La fonction valeur (5.20) ainsi que la commande optimale (5.21) sont tracés.

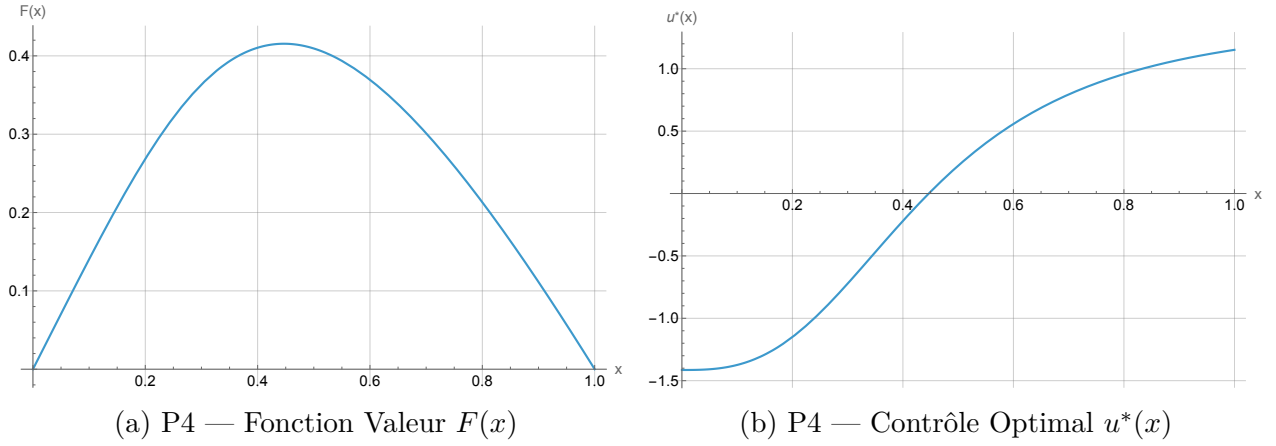


FIGURE 5.9 P4 — Visualisation de la fonction valeur et du contrôle optimal

Par ailleurs, une simulation est effectuée.

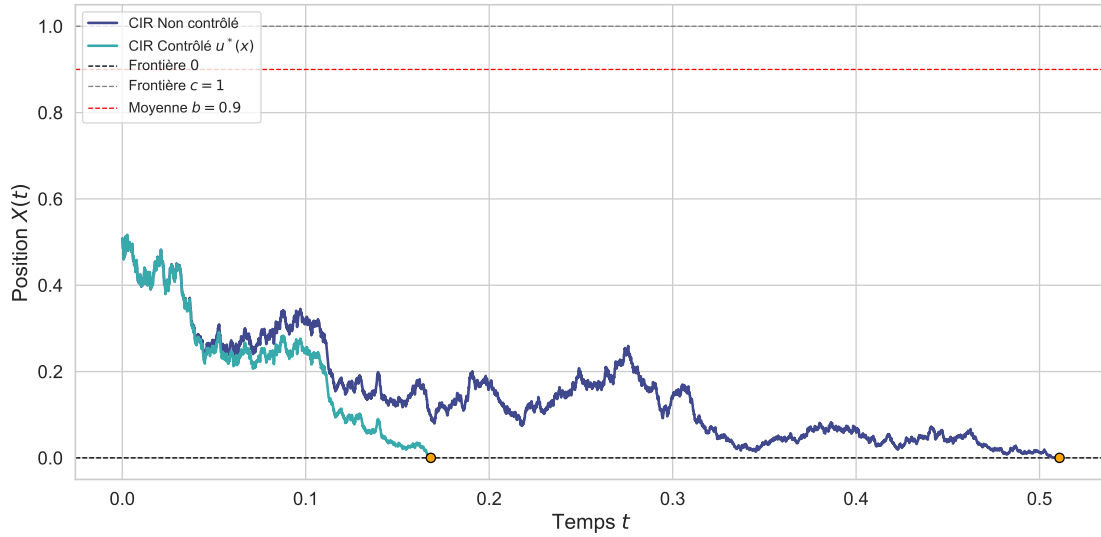


FIGURE 5.10 P4 — Visualisation de l'effet de la commande optimale

5.3 Validation

Il est important de souligner que, dans les quatre problèmes étudiés et pour les différentes valeurs des paramètres considérés :

- Les conditions aux limites $F(0) = F(c) = 0$ sont toujours respectées ;
- La fonction valeur est toujours positive, le coût encouru étant nécessairement positif ;

- Le contrôle optimal est négatif lorsque $x \rightarrow 0^+$, l'optimiseur cherchant à diriger rapidement le processus vers la frontière inférieure, plus proche. Inversement, pour $x \rightarrow c^-$, le contrôle devient positif afin d'accélérer l'atteinte de la frontière supérieure ;
- Une augmentation du coût immédiat ρ , induisant une hausse du coût encouru (5.2a, 5.5a), entraîne un renforcement du contrôle optimal ($|u^*(x)|$ augmente dans 5.2b, 5.5b), traduisant ainsi une volonté accrue de quitter l'intervalle aussi rapidement que possible ;
- Une hausse du coût du contrôle β incite à intensifier le contrôle optimal (5.2d, 5.5d) afin de quitter l'intervalle plus rapidement. Cette stratégie réduit la durée d'exposition au coût instantané, ce qui compense partiellement le surcoût du contrôle et diminue le coût total encouru $F(x)$ (5.2c, 5.5c) ;
- Une augmentation du poids pénalisant le contrôle κ , induisant une hausse du coût encouru (5.2e, 5.5e), entraîne une relaxation du contrôle optimal (5.2f, 5.5f). En effet, plus le poids du contrôle est élevé, moins il est intéressant d'appliquer un contrôle fort ;
- Les simulations (5.3, 5.6, 5.8, 5.10) mettent en évidence l'effet du contrôle optimal, qui accélère la sortie du processus par rapport au cas non contrôlé. Pour valider cette observation, 1000 trajectoires sont simulées pour chaque problème, et la durée moyenne jusqu'à la sortie est comparée. Un facteur d'accélération est ensuite estimé (voir annexe D pour les détails du calcul) :

TABLEAU 5.1 Accélérations moyennes du temps de sortie

Problème	Accélération Moyenne
P1	2.660552
P2	1.254483
P3	1.065163
P4	2.284579

Ainsi, les expressions obtenues pour la fonction valeur $F(x)$ et le contrôle optimal $u^*(x)$ sont validées.

Ces observations générales fournissent un cadre d'interprétation cohérent pour les stratégies optimales. Ces dernières sont détaillées dans la partie qui suit.

5.4 Politiques Optimales

À partir des simulations réalisées, de l'analyse des profils des commandes optimales $u^*(x)$ illustrés dans les figures (5.1b, 5.4b, 5.7b et 5.9b), ainsi que de leur mise en relation avec les structures de coûts propres à chaque configuration, il est possible de caractériser précisément les différentes stratégies de contrôle optimales associées à chacun des problèmes étudiés :

Stratégie P1 : La politique optimale en configuration P1 adopte une structure à seuil, avec un point critique situé autour de $x^* \approx 0.33$. Pour $x < x^*$, le contrôle diverge rapidement vers $-\infty$, tirant agressivement le processus vers la borne inférieure. Ce comportement traduit une exploitation stratégique de la structure des coûts $b(x) = q(x) = x$, qui tendent eux aussi vers zéro, rendant le contrôle intensif peu pénalisant dans cette région. Inversement, pour $x > x^*$, le contrôle devient positif mais reste modéré, poussant le processus vers la borne supérieure de l'intervalle jusqu'à $u(1) \approx 1.4$. L'asymétrie du seuil observée dans cette politique s'explique par la nature du coût d'état constant $r(x) \equiv 1$ ainsi que deux mécanismes complémentaires. Premièrement, la dynamique du processus CIR possède un terme de retour à la moyenne dirigé vers b (fixé ici à 0.9). Ainsi, dès que le processus est situé en dessous de cette valeur, il bénéficie naturellement d'une poussée ascendante, ce qui rend avantageux de renforcer cette tendance au-delà du seuil x^* par un contrôle positif. Deuxièmement, la diffusion du processus étant proportionnelle à $\sqrt{X(t)}$, les perturbations aléatoires sont fortement atténuées près de zéro. Il est donc inefficace de chercher à atteindre la borne inférieure depuis une position trop éloignée, et le contrôle n'est justifié dans cette direction que pour des valeurs suffisamment petites de x (en-dessous du seuil x^*). Ce comportement est corroboré par une analyse empirique : sur 1000 trajectoires simulées, le processus s'échappe par la borne supérieure dans 67 % des cas (voir D.2).

Stratégie P2 : La politique optimale pour le problème P2 est aussi une politique à seuil $x^* \approx 0.5$. Sans retour à la moyenne, le CIR ne bénéficie d'aucune dérive, rendant ainsi le seuil d'inversion du contrôle au centre de l'intervalle $(0, c)$. D'un côté, lorsque le processus s'approche de 0, la commande $u^*(x)$ s'annule, comme le coût d'état $r(x) = \rho^2 x$ et le coût de contrôle $b(x) = \beta\sqrt{x}$ s'annulent aussi. L'optimiseur attend donc que la dynamique propre du CIR entraîne la sortie. D'un autre côté, plus le processus s'approche de la borne supérieure, plus le contrôle augmente, comme le coût d'état devient conséquent. L'optimiseur cherche alors à provoquer une sortie le plus rapidement possible. Cependant, le contrôle appliqué dans les deux directions reste toujours modéré comme le poids pénalisant l'intensité du contrôle est constant $q(x) = \kappa^2$. Cela est validé par le facteur d'accélération moyen d'environ 1.25 (5.1),

ce qui confirme une accélération de sortie modérée, ni excessive ni négligeable, cohérente avec l'intensité relativement stable du contrôle appliqué.

Stratégie P3 : La politique optimale correspond à une stratégie d'évasion passive. Bien qu'un seuil $x^* \approx 0.574$ subsiste, marquant l'inversion du signe de la commande, l'amplitude de $u^*(x)$ demeure globalement faible. En effet, comme pour P2, le poids pénalisant l'intensité du contrôle étant constant $q(x) \equiv 1$, l'optimiseur n'est pas particulièrement incité à appliquer une commande intensive. Celui-ci n'intervient donc qu'avec un contrôle faible, sans chercher à forcer activement la dynamique du processus. Ce comportement est confirmé par le faible facteur d'accélération observé, estimé à 1.06 (voir 5.1), ainsi qu'une fréquence de sortie pour chaque frontière presque identique à celle du processus non-contrôlé (D.2), indiquant une quasi-absence de différence entre les trajectoires contrôlées et non contrôlées.

Stratégie P4 : Cette configuration correspond au cas où tous les coûts sont constants et où le processus CIR est sans retour à la moyenne. La politique optimale est alors presque symétrique autour du seuil d'inversion $x^* \approx 0.44$: le contrôle s'intensifie progressivement à mesure que le processus approche les frontières, sans pour autant diverger. Ce comportement est cohérent, car l'optimiseur supporte un coût uniforme quelle que soit la position du processus. On observe toutefois une légère asymétrie du seuil. Comme mentionné précédemment, l'optimiseur cherche à exploiter les perturbations aléatoires plus marquées lorsque $X(t) \rightarrow c$, du fait de la diffusion proportionnelle à $\sqrt{X(t)}$. Il est donc jugé optimal d'appliquer un contrôle positif (quoique modéré) dès que $X(t) > x^*$. En revanche, lorsque $X(t) \rightarrow 0$, le contrôle devient plus intense que dans la direction opposée, afin de compenser la diminution des fluctuations aléatoires. Les simulations confirment cette analyse avec une fréquence de sortie par zéro d'environ 53% (voir D.2), ainsi qu'un facteur d'accélération moyen de 2.28 (voir 5.1), traduisant une sortie significativement anticipée tout en restant dans un régime de contrôle modéré.

CHAPITRE 6 CONCLUSION

6.1 Synthèse des travaux

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des temps de premier passage et des problèmes de commande optimale appliqués au processus CIR, à la fois en diffusion pure et en présence de sauts. L'objectif principal consistait à obtenir, sous forme analytique, plusieurs fonctions d'intérêt : la fonction génératrice des moments du temps de sortie, la fonction temps moyen de sortie, l'aire moyenne sous la trajectoire, la probabilité de sortie en zéro, la fonction de dépassement moyen dans le cas avec sauts et la fonction valeur des problèmes de commande optimale considérés ainsi que le contrôle optimal associé.

Ces résultats ont été obtenus en résolvant des équations différentielles ordinaires faisant intervenir la dynamique du processus. Les méthodes utilisées incluent notamment des changements de variables adaptés (comme la transformation de Kummer), l'usage de fonctions spéciales (fonctions hypergéométriques, fonctions Gamma, fonction Intégrale Exponentielle), ainsi que le recours à des outils de calcul symbolique comme *Wolfram Mathematica* ou encore *Maple*.

L'analyse des résultats a permis de valider les expressions obtenues à l'aide des conditions aux limites et des propriétés structurelles attendues des solutions. Les visualisations produites viennent renforcer cette validation en illustrant les comportements théoriques anticipés.

Enfin, l'étude des problèmes de commande optimale associés au processus CIR a permis de déterminer les fonctions valeur et les stratégies optimales dans quatre configurations de coûts différentes. Les solutions proposées satisfont les conditions de régularité et de positivité attendues, confirmant ainsi la solidité des approches analytiques adoptées. De plus, les simulations effectuées mettent en avant l'effet des différentes commandes optimales trouvées, permettant ainsi de valider davantage les expressions obtenues.

Les résultats relatifs à la fonction génératrice des moments, à l'aire moyenne, au temps moyen de sortie (avec et sans sauts), à la probabilité de sortie en zéro (avec et sans sauts), ainsi qu'au problème de contrôle non linéarisable P3, exposés dans ce mémoire, ont fait l'objet d'un article de recherche publié dans la revue internationale *WSEAS Transactions on Mathematics* [21].

6.2 Limitations

Les résultats présentés dans ce mémoire reposent sur des hypothèses spécifiques concernant les paramètres du processus CIR et la structure des coûts dans les problèmes de commande

optimale. En particulier, les paramètres a , b et σ du processus CIR sont supposés constants dans le cadre de cette étude. Cette hypothèse permet de simplifier les équations différentielles associées, mais elle peut s'avérer restrictive lorsque ces paramètres varient en fonction du temps ou de l'état du processus. De plus, bien que les solutions analytiques proposées soient valides dans ces contextes particuliers, comme le CIR sans retour à la moyenne, elles peuvent perdre en pertinence lorsque la dérive est non-négligeable. Par ailleurs, les configurations de coûts étudiées en commande optimale réduisent le problème général à des cas spécifiques. Dans le cas où les coûts sont plus complexes, obtenir des formes fermées pour les solutions devient presque impossible.

6.3 Perspectives et améliorations futures

Afin de surmonter les limitations identifiées, plusieurs pistes de recherche peuvent être explorées. Une première perspective consisterait à étendre l'étude au processus de Chen [22] :

$$\begin{aligned} dX(t) &= \kappa[\theta(t) - X(t)]dt + \sqrt{\sigma(t)X(t)}dW_1(t) \\ d\theta(t) &= \nu[\zeta - \theta(t)]dt + \alpha\sqrt{\theta(t)}dW_2(t) \\ d\sigma(t) &= \mu[\beta - \sigma(t)]dt + \eta\sqrt{\sigma(t)}dW_3(t) \end{aligned}$$

dans lequel la volatilité et la moyenne long-terme du processus sont stochastiques

Une deuxième piste pourrait consister à explorer des méthodes numériques permettant de compléter les résultats analytiques dans des situations où les solutions exactes ne sont pas accessibles. L'utilisation de techniques de simulation Monte Carlo ou de méthodes numériques pour la résolution des équations de HJB pourrait permettre de mieux appréhender les comportements dans des cadres plus réalistes.

Enfin, l'extension des modèles de commande optimale pour inclure des coûts non linéaires ou des contraintes supplémentaires pourrait offrir de nouvelles perspectives, en particulier dans le cadre de la gestion de portefeuille ou de la couverture d'actifs financiers sous contraintes réglementaires. Cependant, la complexité des équations associées augmentera considérablement.

En conclusion, ce mémoire propose une approche analytique rigoureuse pour l'étude des problèmes de premier passage et de commande optimale appliqués au processus CIR. Les résultats obtenus constituent une base solide pour des développements futurs dans des contextes plus généraux ou appliqués.

RÉFÉRENCES

- [1] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, Jr. et S. A. Ross, “A theory of the term structure of interest rates,” *Econometrica*, vol. 53, n°. 2, p. 385–408, 1985. [En ligne]. Disponible : [https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/0012-9682\(198503\)53:2<385:ATOTTS>2.0.CO;2-B](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/0012-9682(198503)53:2<385:ATOTTS>2.0.CO;2-B)
- [2] K. Itô, “Stochastic integral,” *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, vol. 20, n°. 8, p. 519–524, 1944. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.3792/pia/1195572786>
- [3] E. Di Nardo et G. D’Onofrio, “A cumulant approach for the first-passage-time problem of the feller square-root process,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 391, p. 125707, 2021. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300320306603>
- [4] E. Di Nardo, G. D’Onofrio et T. Martini, “Orthogonal gamma-based expansion for the cir’s first passage time distribution,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 480, p. 128911, 2024. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300324003722>
- [5] B. Kepplinger, “The first passage time problem : Analytical, numerical and statistical methods (with r and mathematica)/submitted by bernhard kepplinger, bsc,” 2017.
- [6] V. Giorno et A. G. Nobile, “On the First-Passage Time Problem for a Feller-Type Diffusion Process,” *Mathematics*, vol. 9, n°. 19, p. 1–27, October 2021. [En ligne]. Disponible : <https://ideas.repec.org/a/gam/jmathe/v9y2021i19p2470-d649256.html>
- [7] —, “On the absorbing problems for wiener, ornstein-uhlenbeck, and feller diffusion processes : Similarities and differences,” *Fractal and Fractional*, vol. 7, n°. 1, 2023. [En ligne]. Disponible : <https://www.mdpi.com/2504-3110/7/1/11>
- [8] E. Martin, U. Behn et G. Germano, “First-passage and first-exit times of a bessel-like stochastic process,” *Phys. Rev. E*, vol. 83, p. 051115, May 2011. [En ligne]. Disponible : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.051115>
- [9] J. Masoliver et J. Perelló, “First-passage and escape problems in the feller process,” *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, vol. 86, p. 041116, 10 2012. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.041116>
- [10] S. Kou et H. Wang, “First passage times of a jump diffusion process,” *Advances in Applied Probability*, vol. 35, 06 2003. [En ligne]. Disponible : <https://www.columbia.edu/~sk75/KouWangAAP.pdf>

- [11] C. Yin, Y. Wen et Y. Shen, “The first passage time problem for mixed-exponential jump processes with applications in insurance and finance,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, 07 2014. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1155/2014/571724>
- [12] C. Klüppelberg, A. E. Kyprianou et R. A. Maller, “Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes,” *The Annals of Applied Probability*, vol. 14, n^o. 4, p. 1766 – 1801, 2004. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.1214/105051604000000927>
- [13] D. Cox et H. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*. Routledge, sept. 2017. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1201/9780203719152>
- [14] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*. Springer New York, 2007. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-48976-6>
- [15] W. Magnus, F. Oberhettinger et R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 1^{er} éd. Springer Berlin Heidelberg, 1966. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-11761-3>
- [16] “NIST Digital Library of Mathematical Functions,” <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.2.4 of 2025-03-15, 2025, f. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds. [En ligne]. Disponible : <https://dlmf.nist.gov/>
- [17] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing éd. New York : Dover, 1964. [En ligne]. Disponible : https://www.bibsonomy.org/bibtex/223ec744709b3a776a1af0a3fd65cd09f/a_olympia
- [18] M. Abundo, “On the First-Passage Area of a One-Dimensional Jump-Diffusion Process,” *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 15, n^o. 1, p. 85–103, March 2013. [En ligne]. Disponible : https://ideas.repec.org/a/spr/metcap/v15y2013i1d10.1007_s11009-011-9223-1.html
- [19] E. B. Dynkin, *Markov Processes*, ser. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. New York : Springer Berlin Heidelberg, 1965, vol. 1, translated by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra, and G. Majone. See Vol. I, p. 133. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1>
- [20] P. Whittle, *Optimization over time : Dynamic Programming and stochastic control*. Wiley, 1982, vol. 1. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.2307/2981713>
- [21] M. Lefebvre et R. Mrad, “First exit and optimization problems for a CIR diffusion process,” *WSEAS Transactions on Mathematics*, vol. 24, n^o. 36, p. 382–388, 2025. [En ligne]. Disponible : [https://wseas.com/journals/mathematics/2025/a725106-018\(2025\).pdf](https://wseas.com/journals/mathematics/2025/a725106-018(2025).pdf)

- [22] L. Chen, *A Three-Factor Model of the Term Structure of Interest Rates*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1996, p. 1–36. [En ligne]. Disponible : https://doi.org/10.1007/978-3-642-46825-4_1
- [23] D. Bakry, I. Gentil et M. Ledoux, *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Springer International Publishing, 2014. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-00227-9>

ANNEXE A FONCTIONS SPÉCIALES

Cette annexe contient une définition de toutes les fonctions spéciales utilisées dans ce mémoire. Pour plus d'information, voir [16].

Fonctions Gamma

— La fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(n) := (n-1)!$$

— Les fonction Gamma incomplètes sont définies par :

$$\Gamma(s, x) := \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

$$\gamma(s, x) := \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$$

Symbole de Pochhammer

Le symbole de Pochhammer (ou factoriel ascendant) est défini par :

$$(a)_n := \prod_{i=1}^n (a + i - 1)$$

Fonctions hypergéométriques

— Les fonctions hypergéométriques confluentes de première et seconde espèce (aussi appelées fonctions de Kummer et Tricomi) sont définies par :

$$\Phi(s, t, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s)_n z^n}{(t)_n n!}$$

$$\Psi(s, t, z) := \frac{\Gamma(1-t)}{\Gamma(s+1-t)} \Phi(s, t, z) + \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(s)} z^{1-t} \Phi(s+1-t, 2-t, z)$$

— La fonction hypergéométrique généralisée est définie par :

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} [s_1] \\ \vdots \\ [s_p] \end{matrix}, \begin{matrix} [t_1] \\ \vdots \\ [t_q] \end{matrix}, z \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_1)_n \cdots (s_p)_n}{(t_1)_n \cdots (t_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

Il est intéressant de noter que la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ n'est autre que le cas particulier ${}_1F_1(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Fonctions intégrale exponentielle

— La fonction intégrale exponentielle est définie par :

$$\text{Ei}(x) := - \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— La fonction intégrale exponentielle généralisée est définie par :

$$E_n(x) := \int_1^{+\infty} \frac{e^{xt}}{t^n} dt$$

Il est intéressant de noter que, pour $x > 0$:

$$\text{Ei}(x) = -E_1(-x)$$

Fonctions de Bessel

— Les fonctions de Bessel de première et seconde espèce sont définies par :

$$J_{\alpha}(x) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

$$Y_{\alpha}(x) := \frac{J_{\alpha}(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

— Les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce sont définies par :

$$I_{\alpha}(x) := i^{-\alpha} J_{\alpha}(ix)$$

$$K_{\alpha}(x) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_{\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

ANNEXE B GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL

Le générateur infinitésimal \mathcal{L} associé à un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est défini, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, par :

$$\mathcal{L}f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X(t))] - f(x)}{t}$$

Cet opérateur permet d'établir des équations différentielles décrivant l'évolution d'une statistique du processus étudié. Pour plus d'informations, voir [23].

Diffusion pure

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion pure à valeurs réelles, solution forte de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (\text{B.1})$$

Sous des hypothèses standards d'unicité trajectorielle, le générateur infinitésimal s'écrit :

$$\mathcal{L}f(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)$$

Diffusion avec sauts

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion avec sauts à valeurs réelles, solution forte de l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y N(ds, dy) \quad (\text{B.2})$$

avec $N(ds, dy)$ une mesure de Poisson sur $(0, \infty) \times \mathbb{R}$, représentant les sauts aléatoires indépendants de X , avec une mesure d'intensité donnée par :

$$\nu(dy) ds$$

Sous des hypothèses standards d'unicité trajectorielle, le générateur infinitésimal s'écrit :

$$\mathcal{L}f(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + \int_{\mathbb{R}} [f(x+y) - f(x)] \nu(dy)$$

ANNEXE C UNICITÉ TRAJECTOIRELLE

Diffusion pure

Soit un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ à valeurs dans \mathbb{D} défini par B.1. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- **Dérive Lipschitz** : il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{D}$,

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq K|x - y|$$

- **Diffusion Hölder** : il existe des constantes $K > 0$ et $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{D}$,

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

- **Croissance au plus linéaire** : il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{D}$,

$$|\mu(x)|^2 + |\sigma(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

$X(t)$ est alors l'unique solution forte, càdlàg, non-explosive et adaptée de l'équation (B.1).

Diffusion avec sauts

Soit un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini par B.2. Si les conditions d'unicité trajectorielle associées à la diffusion sont satisfaites (dérive Lipschitz, diffusion Hölder, croissance au plus linéaire), et si la mesure ν , modélisant la loi des tailles des sauts, vérifie la **Condition de Lévy minimale** :

$$\int_{\mathbb{R}} \min(1, y^2) \nu(dy) < \infty$$

$X(t)$ est alors l'unique solution forte, càdlàg, non-explosive et adaptée de l'équation (B.2).

ANNEXE D SIMULATIONS EN COMMANDE OPTIMALE

Les données suivantes découlent de l'analyse de 1000 simulations différentes du CIR.

Accélération de sortie

Les longueurs moyennes des trajectoires avec et sans contrôle simulées pour chaque problème sont présentées dans le tableau ci-dessous.

TABLEAU D.1 Longueurs moyennes des trajectoires simulées

Problème	Longueur moyenne CIR non contrôlé	Longueur moyenne CIR contrôlé
P1	6904.4004	2595.1005
P2	6927.486	5522.185
P3	7004.5290	6576.0133
P4	7291.346	3191.549

Ces dernières sont mesurées en discrétisant la trajectoire avec des pas temporels de longueur 10^{-4} . Il est donc possible d'estimer un facteur d'accélération moyenne pour le temps de sortie comme suit :

$$\text{Accélération} := \frac{\text{Longueur moyenne CIR non contrôlé}}{\text{Longueur moyenne CIR contrôlé}}$$

Statistiques de sortie

La fréquence de sortie par chaque frontière peut être estimée pour chaque configuration étudiée. Sur 1000 simulations, le calcul est :

— Fréquence de sortie en 0 :

$$\bar{f}_0 := \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{1}_{X(\tau(x))=0}$$

— Fréquence de sortie en c :

$$\bar{f}_c := 1 - \bar{f}_0$$

TABLEAU D.2 Fréquence de sortie des trajectoires simulées

Configuration	Fréquence de sortie en 0 \bar{f}_0	Fréquence de sortie en $c = 1$ \bar{f}_c
Sans contrôle	44.4 %	55.6 %
P1	33 %	67 %
P2	48.2 %	51.8 %
P3	45.2 %	54.8 %
P4	52.9 %	47.1 %