



UNIVERSITÉ LYON 1 CLAUDE BERNARD
POLYTECH LYON
ANNÉE 2024/2025

Compte rendu TP Problème de Convection

Auteur:
Romain URBANIAK

Encadrant:
Séverine MILLET

Contents

1	Introduction	2
1.1	Présentation du problème	2
1.2	Mise en équation du problème	3
2	ÉLÉMENTS FINIS UNIDIMENSIONNELS LINÉAIRES	3
2.1	Résidu et formulation faible	3
2.1.1	Résidu	4
2.1.2	Formulation faible	4
2.2	Formulation faible discrète et fonctions de base	5
2.2.1	Formulation faible discrète	5
2.2.2	Fonctions de base	5
2.3	Mise sous forme matricielle	6
2.3.1	Matrice de raideur et de masse élémentaires	6
2.3.2	Matrice globale	7
3	Méthode de Résolution	8
4	Etude numérique	9
4.1	Cas avec isolant	9
4.1.1	Traitement des conditions aux limites	9
4.1.2	Tracé du profil de température	10
4.2	Cas sans isolant	12
4.2.1	Traitement des conditions aux limites	12
4.2.2	Tracé du profil de température	13
5	ELEMENTS FINIS QUADRATIQUES	15
5.1	Mise en place de la MEF P2	15
5.1.1	Discrétisation	15
5.1.2	Fonctions de base	15
5.1.3	Système matriciel	16
5.2	Cas avec isolant	18
5.2.1	Traitement des conditions limites	18
5.2.2	Tracé des courbes :	19
5.3	Cas sans isolant	20
5.3.1	Traitement des conditions limites :	20
5.3.2	Tracé de la température	21
6	Conclusion première partie	21
7	Eléments finis bidimensionnels linéaires	22
7.1	Etude théorique	22
7.1.1	Mise en équation du problème	22
7.1.2	Formulation faible	22
7.1.3	Discrétisation	23
7.1.4	Mise sous forme matricielle	24
7.2	Etude numérique	26
7.2.1	Maillage triangulaire	26
7.2.2	Maillage quadrangulaire	30
7.3	Cas d'une EDO à coefficients variables	33
7.4	Formulation faible	33
7.4.1	Mise sous forme matricielle	34
7.4.2	Etude numérique	34
8	Conclusion	36

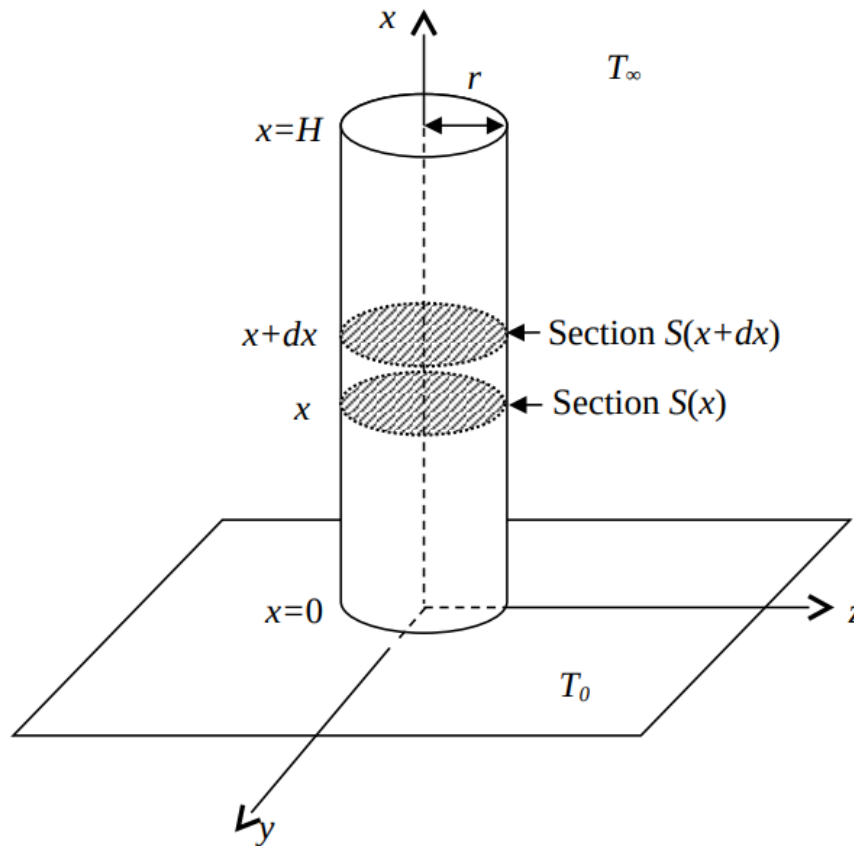
1 Introduction

Lors de ce TP, nous étudions la répartition de la température dans un barreau métallique soumis à différents échanges thermiques. Pour cela, nous utilisons la méthode des éléments finis (MEF) appliquée à une équation différentielle représentant le problème. Deux approches seront mises en œuvre : une MEF d'ordre 1 et une MEF d'ordre 2.

L'objectif est de comparer les performances des deux approches en termes de précision et de convergence, en utilisant les solutions exactes pour valider les résultats obtenus.

1.1 Présentation du problème

La géométrie du problème est présentée sur la figure suivante :



- En $x = 0$, la température est fixée à T_0 .
- En $x = H$, un isolant est présent dans un cas, tandis qu'un échange convectif est imposé dans un autre.
- Il y a un échange convectif présent sur toute la surface latérale avec l'air ambiant.

Les valeurs numériques utilisées seront les suivantes :

$$T_0 = 100^\circ\text{C} ; \lambda = 40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} ; h = 100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} ; T_{\text{infini}} = 20^\circ\text{C}$$

1.2 Mise en équation du problème

Procédons à un bilan de chaleur sur un petit élément de barreau d'épaisseur dx . Les contributions de chaleur sont par convection avec l'air ambiant sur la surface latérale et par conduction thermique au sein du barreau.

Exprimons chacun de ces termes :

Loi de Fourier :

$$\phi_{conduction}(x) = -\lambda grad(T(x)) = -\lambda S \frac{dT}{dx}(x)$$

$$\phi_{conduction}(x + dx) = -\lambda grad(T(x + dx)) = -\lambda S \frac{dT}{dx}(x + dx)$$

Ainsi :

$$\phi_{conduction}(x + dx) - \phi_{conduction}(x) = -\lambda S \frac{d}{dx}(T(x + dx) - T(x)) = -\lambda S \frac{d^2T}{dx^2}$$

Loi de Newton :

$$\phi_{convection}(x) = -hP(T - T_{infini})$$

Ecrivons la somme des flux thermiques :

$$\phi_{conduction}(x) + \phi_{conduction}(x + dx) + \phi_{convection}(x) = 0$$

D'où :

$$-\lambda S \frac{d^2T}{dx^2} + hP(T - T_{infini}) = 0$$

Avec $S = \pi r^2$ et $P = 2\pi r$ et en posant le changement de variable $\theta = T - T_{inf}$. On obtient l'équation suivante :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad \text{avec } m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} = \sqrt{\frac{2h}{\lambda r}} \quad (1)$$

Avec les conditions aux limites sur T suivantes :

$$\frac{dT}{dx}(x = H) = 0 \quad (\text{avec isolant})$$

$$\frac{dT}{dx}(x = H) = \frac{-h'}{\lambda} T \quad (\text{sans isolant})$$

$$T(x = 0) = T_0$$

L'obtention de cette relation permet alors d'utiliser une approche analytique et numérique du problème. En effet, il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Cette équation peut donc être résolue par la méthode des éléments finis pour donner une solution approchée du problème. C'est l'objet des sections suivantes.

2 ÉLÉMENTS FINIS UNIDIMENSIONNELS LINÉAIRES

Dans cette section, nous mettons en place la méthode des éléments finis (MEF) en 1D pour résoudre l'équation présentée précédemment. Cette démarche est indépendante des conditions aux limites et reste donc applicable aux deux cas étudiés.

2.1 Résidu et formulation faible

Dans un premier temps, calculons le résidu noté $R(T)$. Ce dernier mesure l'erreur dans l'estimation de la solution numérique.

2.1.1 Résidu

Pour simplifier les futures expressions, on pose le changement de variable suivant :

$$\theta = T - T_{inf} \quad (2)$$

Par définition, on a :

$$R(\theta) = L\theta(x) - f(x) = \frac{d^2\theta}{dx^2} - m\theta(x) \text{ avec } L = \frac{d^2}{dx^2} - m \text{ et } f(x) = 0 \quad (3)$$

L'équation (3) est appelée résidu du problème. Ce qui conclut la sous section sur le résidu.

2.1.2 Formulation faible

Ensuite, on cherche la formulation faible du problème. Pour cela, on introduit $\tilde{\theta}(x)$ comme étant l'approximation de la variable $\theta(x)$. On cherche à minimiser la norme du résidu, autrement dit :

$$||R(\tilde{\theta})|| = 0$$

Ce qui revient à trouver l'expression de $\tilde{\theta}$ telle que :

$$\int_0^H R(\tilde{\theta})\omega(x)dx = 0 \quad (4)$$

Avec $\omega(x)$ une fonction de pondération.

En substituant le résidu (2) dans l'équation (3) :

$$\int_0^H \frac{d^2\tilde{\theta}}{dx^2}\omega(x)dx - m^2 \int_0^H \tilde{\theta}\omega(x)dx = 0$$

Ensuite, on intègre par partie l'intégrale qui contient la dérivée de θ (à gauche) :

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}}{dx}\omega(x) \right]_0^H - \int_0^H \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} dx - m^2 \int_0^H \tilde{\theta}\omega(x)dx = 0 \quad (5)$$

Exploitions maintenant les conditions limites pour simplifier le terme d'évaluation. En $x=H$, à la paroi adiabatique, la condition aux limites de Neumann implique:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dx}(H) = 0$$

En $x=0$, par la condition de Dirichlet : $\omega(0) = 0$.

Finalement :

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}}{dx}\omega(x) \right]_0^H = 0$$

Grâce à cette simplification, on obtient la formulation faible du problème :

$$\int_0^H \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx + m^2 \int_0^H \tilde{\theta}(x)\omega(x)dx = 0 \quad (6)$$

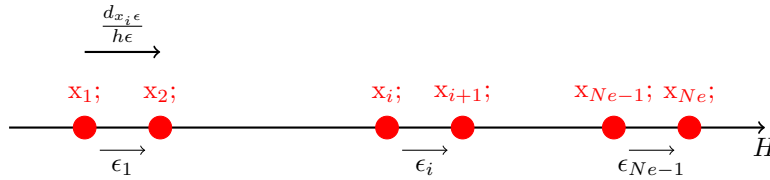
2.2 Formulation faible discrète et fonctions de base

2.2.1 Formulation faible discrète

Il est nécessaire de discrétiser l'intervalle d'étude et d'établir un maillage approprié. On définit aussi $\tilde{\theta}_i$ tel que $\tilde{\theta}(x) = \sum \tilde{\theta}_i$. Les $\tilde{\theta}_i$ sont définies sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et nul sinon. On utilise N noeuds pour discrétiser l'intervalle. Il y aura donc N-1 sous intervalles de longueur $dx = \frac{H}{N_e}$, autrement dit N_e éléments.

Ainsi le maillage peut se résumer de la manière suivante :

- N : nombre de noeuds
- N_e : nombre d'éléments (de sous intervalle)
- e_i : élément i correspondant à l'intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ avec $x_i = (i - 1) * dx$



En appliquant cette discrétisation, on peut en déduire la formulation faible sous forme discrète :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{d\tilde{\theta}_i}{dx} \cdot \frac{d\omega}{dx} + m^2 \tilde{\theta}_i \omega \right) dx = 0 \quad (7)$$

2.2.2 Fonctions de base

Maintenant que nous avons la formulation faible ainsi que la discrétisation, nous pouvons introduire des polynômes d'interpolations, appelés fonction de base. En P^1 , ces fonctions sont des polynômes de degré 1 que l'on définira par :

$$N_1(x) = A_1x + B_1 \quad \text{et} \quad N_2(x) = A_2x + B_2$$

Et, ils sont soumis aux conditions suivantes :

x	x_i	x_{i+1}
$N_1(x)$	1	0
$N_2(x)$	0	1

Déterminons A_1, A_2 et B_1, B_2 à l'aide de la figure précédente.

Les fonctions de bases vérifient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} N_1(x_i) = 1 \\ N_1(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} N_2(x_i) = 0 \\ N_2(x_{i+1}) = 1 \end{cases}$$

D'où le système suivant (pour N_1):

$$\begin{cases} A_1x_i + B_1 = 1 \\ A_1x_{i+1} + B_1 = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{-1}{x_{i+1}-x_i} \\ B_1 = \frac{x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} \end{cases}$$

Or $dx = x_{i+1} - x_i$. D'où :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{-1}{dx} \\ B_1 = \frac{x_{i+1}}{dx} \end{cases}$$

On applique le même raisonnement pour N_2 .

Finalement, les fonctions de bases sont définies par :

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x_{i+1}-x}{dx} \\ N_2(x) = \frac{x-x_i}{dx} \end{cases} \quad (8)$$

En introduisant les a_i qui sont les températures aux noeuds, on peut réécrire chaque $\tilde{\theta}_i$ tel que :

$$\tilde{\theta}_i(x) = a_i N_1(x) + a_{i+1} N_2(x)$$

Que l'on peut réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\tilde{T}_i(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix}$$

Ce qui conclut la partie formulation faible discrète et détermination des fonctions de bases.

2.3 Mise sous forme matricielle

Dans cette partie, nous allons déterminer les matrices de raideur et de masse élémentaires. Ensuite, nous déterminerons la matrice globale pour obtenir une écriture matricielle du système.

2.3.1 Matrice de raideur et de masse élémentaires

Réécrivons chaque terme de la formulation faible sous forme matricielle :

Par la méthode de Galerkin:

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\theta}_i}{\partial a_i} \\ \frac{\partial \tilde{\theta}_i}{\partial a_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

D'où,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix}$$

De plus,

$$\frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial x} = \begin{bmatrix} N'_1 & N'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix}$$

On peut injecter ces derniers dans la formulation faible discrète (4) :

$$\sum_i^{Ne} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_1 & N'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + m^2 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} dx \right) = 0$$

En développant les produits matriciels et en rentrant l'intégrale dans les matrices. Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^{Ne} \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1'^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1' H_2' dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2' H_1' dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2'^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + m^2 \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1 H_2 dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2 H_1 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

Par suite, on identifie les matrices de masse et de raideur que l'on notera respectivement M_i et K_i telles que :

$$K_i = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1'^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1' H_2' dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2' H_1' dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2'^2 dx \end{bmatrix}$$

et

$$M_i = \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_1 H_2 dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2 H_1 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2^2 dx \end{bmatrix}$$

Simplifions les matrices en calculant chacun des termes et on a par exemple :

$$(K_i)_{1,2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} H_2' H_1' = \frac{1}{dx^2} [x]_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{1}{dx}$$

De la même manière, on calcule les autres termes des matrices K et M.

Finalement, on parvient aux matrices élémentaires suivantes :

$$K_i = \frac{1}{dx} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } M_i = \frac{dx}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On peut réécrire la formulation faible discrète de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^{Ne} (K_i + m^2 M_i) \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{Ne} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ce qui conclut la sous-section sur les matrices élémentaires.

2.3.2 Matrice globale

On discrétise le barreau avec 5 éléments. Ce choix nous permet d'assembler le système matricielle précédent.

Assemblons la matrice globale par bloc à partir des matrices élémentaires. Repartons de l'équation (6).

Commençons par assembler séparément les matrices de raideur et de masse (pour Ne=5) :

Soit $(K, M) \in M_6(R)^2$,

$$K = \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{1}{dx} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M = \sum_{i=1}^5 M_i = \frac{dx}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En additionnant ces 2 matrices, on obtient la matrice globale A du système suivante :

$$A = \frac{1}{dx} K + \frac{m^2 dx}{6} M$$

Pour simplifier l'écriture de cette matrice globale, on utilisera les notations suivantes :

$$\begin{pmatrix} C/2 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & C/2 \end{pmatrix} \text{ avec } C = \frac{2}{dx} + \frac{4m^2 dx}{6} \text{ et } D = \frac{-1}{dx} + \frac{m^2 dx}{6}$$

Sans prendre en compte les conditions aux limites de l'étude, le système matriciel décrivant notre problème est le suivant :

Soit $A \in M_6(R)$ $(X, B) \in M_{6,1}(R)^2$, on a : $AX = B$

$$\begin{pmatrix} C/2 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & C/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ce qui conclut la partie mise sous forme matricielle ainsi que la mise en place théorique de la méthode des éléments finis.

3 Méthode de Résolution

Pour résoudre le système matriciel trouvé précédemment, nous utiliserons une méthode de factorisation LU, composée d'une descente et d'une remontée. Les algorithmes correspondants sont détaillés ci-dessous.

Algorithme de factorisation LU

Initialisation:
 $U_{ij} = 0$ pour $i = 0, n-1$ et $j = 0, n-1$ avec $n = \text{taille}(A)$
 $L_{ij} = \delta_{ij}$ pour $i = 0, n-1$ et $j = 0, n-1$ avec $n = \text{taille}(A)$

Factorisation:
 Pour $j=0, n-1$
 Pour $i=0, j$
 $U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik} U_{kj}$
 Fin
 Pour $i=j+1, n-1$
 $L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=0}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \right)$
 Fin
 Fin

Cet algorithme a pour but d'écrire la matrice globale A en un produit de 2 matrices L et U, respectivement triangulaire inférieure et supérieure. Ces 2 matrices seront utilisées par les algorithmes de remontée et de descente.

Les codes de ces derniers sont les suivants :

Algorithme de Remontée

- Remontée $UX=Y$:
 Pour $i = n-1, 0$

$$X_i = \frac{1}{U_{ii}} \left(Y_i - \sum_{k=i+1}^{n-1} U_{ik} X_k \right)$$

 Fin

Algorithme de Descente

- Descente $LY=B$:
 Pour $i = 0, n-1$

$$Y_i = B_i - \sum_{k=0}^{i-1} L_{ik} Y_k$$

 Fin

Ces 2 méthodes permettent, en passant par un sous système vérifié par Y, d'obtenir l'expression du vecteur X inconnue de notre système principal.

L'implémentation de ces 3 méthodes en python ainsi que la mise en place de la méthode des éléments finie unidimensionnelle nous permet d'étudier l'évolution de la température dans le barreau. Cette étude fera l'objet des prochaines parties.

4 Etude numérique

4.1 Cas avec isolant

Dans ce cas, nous allons étudier l'évolution de la température lorsque l'on place un isolant à la paroi en $x=H$. Dans un 1er temps, nous traiterons les conditions limites pour les intégrer dans le système matriciel (10). Enfin, nous tracerons les courbes d'évolution de la température en fonction de la position pour une MEF du 1er ordre.

4.1.1 Traitement des conditions aux limites

Dans le cas adiabatique, les conditions aux limites sont les suivantes :

Condition de Dirichlet:

On rappelle que l'on a :

$$\theta(x) = T(x) - T_{\inf}$$

d'où,

$$\theta(x=0) = T_0 - T_{\inf}$$

Cette condition modifie la 1ère ligne du système matriciel (qui correspond au 1er noeud a_1 en $x=0$) (7) telle que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_{\inf} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Condition de Neumann : On rappelle que l'on a :

$$\frac{dT}{dx}(x = H) = 0$$

d'où,

$$\frac{d\theta}{dx}(x = H) = 0$$

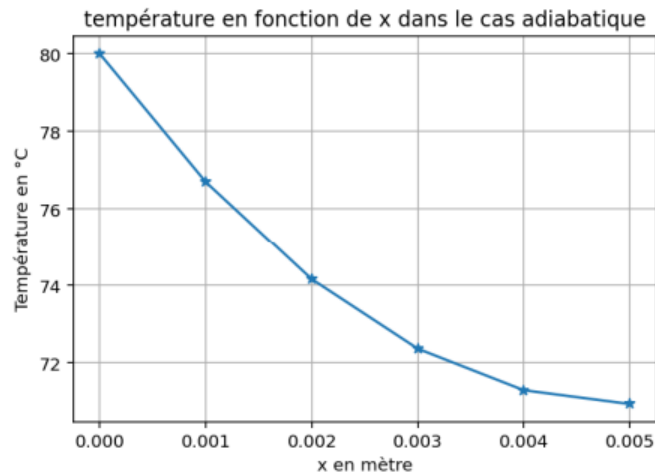
La condition de Dirichlet influe sur la dernière ligne du système matriciel (noeud a_6 en $x=H$) et nous donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A/2 + 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_{infini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ce qui conclut le traitement des conditions aux limites dans ce cas.

4.1.2 Tracé du profil de température

En résolvant le système matriciel (10) complété par les conditions aux limites, on obtient la température sur chaque noeud du maillage. On peut tracer l'évolution de la température du barreau selon la position :



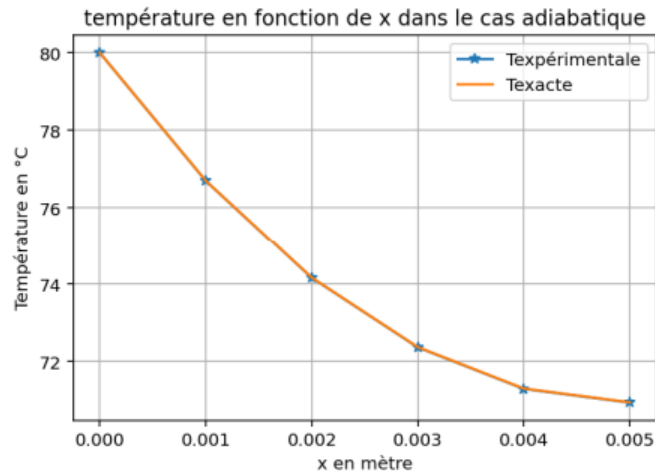
La courbe montre que la température diminue de manière progressive avec l'augmentation de x ce qui paraît cohérent car le barreau est plus froid que le milieu ambiant donc ce dernier va se refroidir progressivement. De plus, on remarque que la courbe n'est pas parfaitement lisse. En effet, avec peu d'élément ($N_e = 5$), l'interpolation n'est pas optimale. Il faudrait donc augmenter considérablement le nombre de points pour obtenir une courbe davantage lisse.

Dans un second temps, il serait pertinent de comparer le tracé expérimental avec le tracé de la solution exacte pour valider notre approche.

La solution exacte est définie par :

$$T_{ex}(x) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \frac{\cosh(m(H - x))}{\cosh(kH)} \quad (13)$$

Superposons donc les tracés de la courbe expérimentale et de la solution exacte. On obtient le tracé suivant :



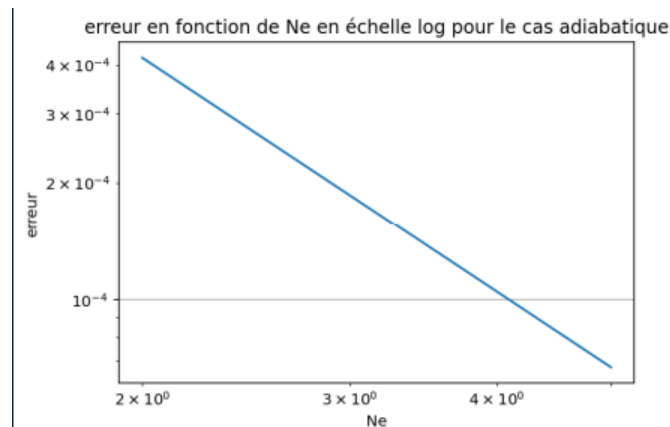
On remarque une quasi-superposition entre la solution expérimentale et la solution exacte. On peut alors déduire la fiabilité de la méthode des éléments finis unidimensionnels linéaires.

Malgré les résultats proches de la réalité. Il serait intéressant de tracer l'erreur relative entre les 2 approches. L'erreur est définie telle que :

$$\epsilon = \frac{\|T_{exp}(x) - T_{exa}(x)\|}{\|T_{exa}(x)\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{Ne} (T_{exp}(x) - T_{exa}(x))^2}{\sum_{i=0}^{Ne} (T_{exa}(x))^2}} \quad (14)$$

Cette définition permet de calculer l'erreur en tout point de la courbe et pas seulement aux noeuds.

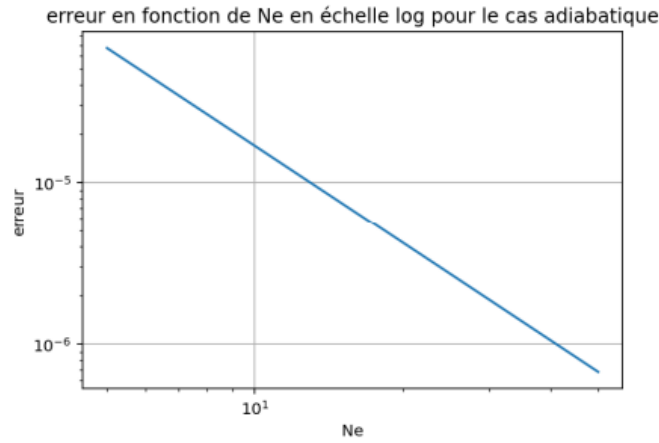
Maintenant, faisons varier la longueur de l'intervalle et traçons l'évolution de l'erreur en fonction de Ne :



On remarque que l'erreur relative décroît lorsque le nombre d'élément augmente. En effet, plus on affine le maillage plus la méthode est précise, donc les résultats obtenus sont cohérents et nous conforte dans la bonne écriture des codes.

Les nombres de noeuds utilisés ici est plutôt faibles (entre 1 et 6). On pourrait s'intéresser à l'erreur lorsque le nombre d'éléments devient plus grand.

La figure suivante trace l'erreur en fonction du nombre d'éléments variant de 50 à 100.



On observe que l'erreur diminue de moins en moins à mesure que le nombre d'éléments augmente. On en conclut qu'il n'est pas judicieux d'utiliser un nombre excessivement élevé d'éléments, car cela n'entraînerait qu'une faible réduction de l'erreur et coûterait plus cher en termes de complexité du programme.

Pour conclure sur l'ordre de précision de la MEF P1, on peut afficher la valeur de la pente à l'aide de la fonction polyfit de python.

-1.9965712266989357

Cette valeur nous confirme que la méthode des éléments finis P1 est d'ordre 2 et conclut sur l'étude du cas avec un isolant.

4.2 Cas sans isolant

Pour continuer notre étude, il serait intéressant d'enlever l'isolant placé précédemment en $x=H$ et d'étudier l'évolution de la température dans le barreau. Dans ce cas le flux d'échange convectif en $x=H$ n'est plus nul. En effet, il y a échange avec le milieu extérieur par convection avec un coefficient d'échange $h' = 80 \text{ W.m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ différent de h .

4.2.1 Traitement des conditions aux limites

Dans un premier temps, intéressons nous aux conditions limites de ce nouveau problème :

Condition de Dirichlet:

$$\theta(x=0) = T_0 - T_{\text{infini}}$$

Cette condition ne change pas du cas précédent donc on retrouve le système de l'équation (11).

Condition en $x=H$:

Appliquons une continuité des flux en $x=H$:

$$\phi_{\text{cond}}(H) = \phi_{\text{conv}}(H)$$

il en vient,

$$\lambda S \frac{d\theta}{dx}(x=H) = -h' S \theta$$

Et finalement,

$$\frac{d\theta}{dx}(x=H) = -\frac{h'}{\lambda} \theta$$

Travaillons cette expression pour pouvoir l'intégrer dans notre système matriciel

Repartons de l'équation (6). Intéressons nous au terme d'évaluation (entre crochet) suivant :

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}}{dx} \omega(x) \right]_0^H$$

En effet, ce terme n'est plus nul à cause de la continuité des flux en H. Compte tenu de la condition que nous avons écrit plus tôt :

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}}{dx} \omega(x) \right]_0^H = \frac{d\tilde{\theta}}{dx}(H) \omega(H)$$

Ce terme va se rajouter dans la formulation faible tel que :

$$\int_0^H \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx + m^2 \int_0^H \tilde{\theta}(x) \omega(x) dx - \frac{d\tilde{\theta}}{dx}(H) \omega(H) = 0 \quad (15)$$

Désormais discrétisons la formulation faible :

$$\sum_{i=1}^5 \frac{\partial \tilde{\theta}(H)}{\partial x} \omega(H) + \sum_{i=1}^5 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}(x)}{\partial x} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} + m^2 \tilde{\theta}(x) \omega(x) \right) dx = 0$$

Or,

$$\sum_{i=1}^5 \frac{\partial \tilde{\theta}(H)}{\partial x} \omega(H) = -\frac{h'}{\lambda} \tilde{\theta}$$

Ensuite, on réécrit cette équation sous la forme matricielle :

$$\sum_{i=1}^5 \left(\frac{h'}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1 N_2 dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2 N_1 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} + m^2 * \begin{bmatrix} \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1^2 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_1 N_2 dx \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2 N_1 dx & \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_2^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \right) = 0$$

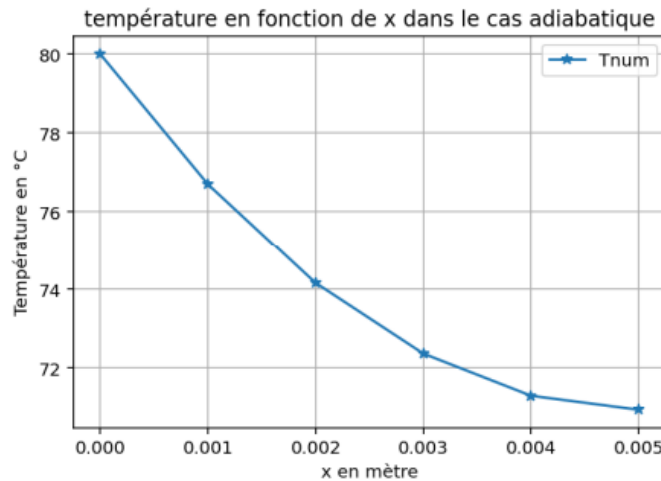
Les matrices de masse et de raideur sont inchangées et il suffit d'ajouter le terme suivant (en bleu) :

$$\begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & A & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & A/2 + \textcolor{blue}{\frac{h'}{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{T_0 - T_{infini}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ce qui conclut la partie traitement des conditions aux limites dans ce cas.

4.2.2 Tracé du profil de température

Après avoir modifié les programmes pour prendre en compte les nouvelles conditions aux limites, on peut tracer la température dans le barreau en fonction de la position dans le cas sans isolant :

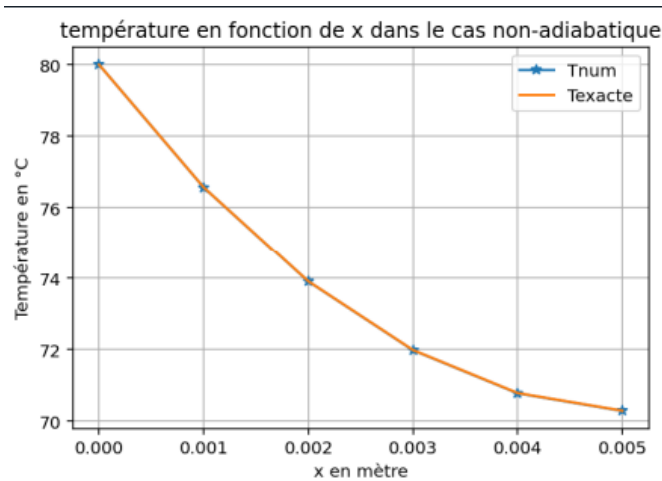


On observe que l'allure de la courbe reste similaire dans les cas avec et sans isolant. En effet, la température décroît de manière progressive à mesure que x augmente dans les 2 configurations. À noter que pour $x=0.005\text{m}$, la température est de 70°C sans isolant et à 71°C avec un isolant. Cela indique que l'isolant a peu d'influence ce qui paraît cohérent car il est situé à l'opposé de la source thermique.

Pour critiquer nos résultats, comparons la solution numérique obtenue et la solution exacte définie par :

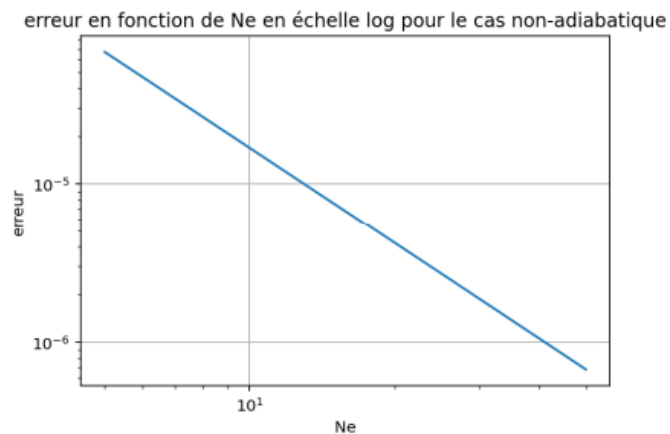
$$T_{ex}(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \frac{\cosh(m(H-x)) + \frac{h'}{\lambda m} \sinh(m(H-x))}{\cosh(kH) + \frac{h'}{\lambda m} \sinh(mH)} \quad (17)$$

Le tracé de la solution numérique ainsi que de la solution exacte nous indiquent :



Comme dans le cas précédent, les deux tracés sont presque superposés. Cela renforce la confiance dans la fiabilité de la méthode des éléments finis unidimensionnels linéaires et confirme également la validité de nos codes.

Toutefois, traçons l'erreur relative entre les 2 tracés. L'erreur est toujours définies par la relation (14).



On observe une erreur relative décroissante selon le nombre d'élément. Comme dans le cas sans isolant, plus on affine le maillage plus la méthode est précise.

De plus, on s'attend à ce que l'ordre de précision de la MEF P1 soit le même pour les 2 cas. Pour vérifier cela, affichons la valeur de la pente à l'aide de la fonction polyfit :

-1.9965712266989357

On remarque que la valeur est la même que pour le cas précédent et que la méthode est d'ordre 2. On peut en conclure que la méthode des éléments finis ne dépend pas des conditions initiales.

Cela conclut la section sur les ELEMENTS FINIS UNIDIMENSIONNELS LINEAIRES. En mettant en place la MEF d'ordre 1, nous avons constaté qu'il serait nécessaire d'augmenter considérablement le nombre de nœuds pour obtenir un résultat précis. Cependant, cette approche peut s'avérer longue à mettre en œuvre et coûteuse en ressources graphiques en raison de la complexité du programme.

Il nous semble donc pertinent de refaire cette étude en utilisant la MEF d'ordre 2, afin de comparer les performances des deux approches. En utilisant des fonctions d'interpolation de degré 2, la MEF du second ordre permet une représentation plus précise de la solution. Cette méthode sera l'objet des sections suivantes.

5 ELEMENTS FINIS QUADRATIQUES

Dans cette section, nous allons mettre en place et utiliser la méthode des éléments finis quadratiques pour étudier l'évolution de la température dans le barreau.

La sous section Résidu et formulation faible reste inchangée entre le P1 et le P2. On repartira donc de l'équation (6) de formulation faible.

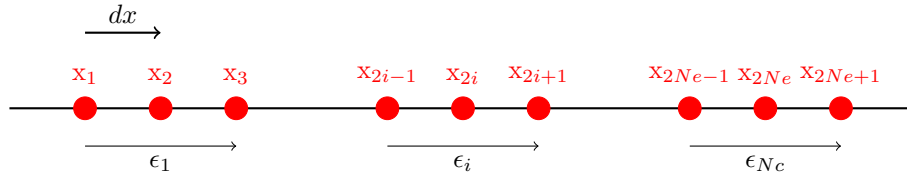
5.1 Mise en place de la MEF P2

5.1.1 Discrétisation

Cependant, il faut discrétiser différemment que pour le 1er ordre. Tout d'abord, pour avoir un problème unidimensionnel il faut respecter la condition suivante:

$$n = 2N_e + 1$$

Utilisons le schéma de discrétisation suivant :



En utilisant la discrétisation ci-dessus et l'équation (8), on obtient la formulation faible discrète suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \left(\frac{d\tilde{u}_i}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx + m^2 \tilde{u}_i(x) \omega(x) dx \right) = 0 \quad (18)$$

Ce qui conclut la sous-section discrétisation et nous permet de nous pencher sur les fonctions de base.

5.1.2 Fonctions de base

Pour la MEF de 2nd ordre, les fonctions de base sont des polynômes de degré 2 définies qui sont soumis aux conditions suivantes :

x	$x_{\{2i-1\}}$	$x_{\{2i\}}$	$x_{\{2i+1\}}$
$N_1(x)$	1	0	0
$N_2(x)$	0	1	0
$N_3(x)$	0	0	1

Détermination des fonctions de bases :

Prenons l'exemple pour $N_1(x)$:

Comme on voit sur le tableau précédent, x_{2i} et x_{2i+1} sont des racines de $N_1(x)$ donc on peut écrire :

$$N_1(x) = A_1(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})$$

Et on sait que $N_1(x_{2i-1}) = 1$ donc :

$$N_1(x_{2i-1}) = A_1(x_{2i-1} - x_{2i})(x_{2i-1} - x_{2i+1}) = 1.$$

Sachant que $x_{2i-1} - x_{2i} = -h/2$ et $x_{2i-1} - x_{2i+1} = -h$, on peut en déduire que $A_1 = -\frac{2}{h^2}$ et finalement on obtient l'expression suivante:

$$N_1(x) = -\frac{2}{h^2}(x - x_{2i})(x - x_{2i+1})$$

En utilisant le même raisonnement, on peut obtenir pour tout $i \in [1, N_e]$,

$$\begin{cases} N_1(x) = -\frac{2}{h^2}(x - x_{2i+1})(x - x_{2i}) \\ N_2(x) = \frac{4}{h^2}(x - x_{2i-1})(x - x_{2i+1}) \\ N_3(x) = -\frac{2}{h^2}(x - x_{2i-1})(x - x_{2i}) \end{cases}$$

Ce qui conclut la section détermination des fonctions de bases.

5.1.3 Système matriciel

En utilisant un cheminement analogue à celui utilisé précédemment en P1, déterminons les matrices de raideur et de masse élémentaires.

En écrivant matriciellement chaque terme de la formulation faible discrète en fonction des éléments $(a_{2i})_k$ avec $k \in [1, N_e]$ et des fonctions de bases, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i+1}} \begin{bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'_1 & N'_2 & N'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \\ a_{2i+1} \end{bmatrix} + m^2 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \\ a_{2i+1} \end{bmatrix} dx = 0$$

En distribuant l'intégrale dans les matrices, et en identifiant la matrice de masse et de raideur, la relation devient:

$$\sum_{i=1}^{N_e} (K_i + M_i m^2) \begin{bmatrix} a_{2i-1} \\ a_{2i} \\ a_{2i+1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient une relation analogue à celle obtenue pour la MEF P1.

De la même manière que pour la méthode P1, on calcule terme par terme les matrices élémentaires K_i et M_i :

$$M_i = \frac{30}{dx} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } K_i = \frac{1}{3dx} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas précédent, on se place avec 5 éléments ($N_e=5$). On peut désormais assembler les matrices de masse et de raideur par blocs à l'aide des matrices élémentaires.

Ainsi, on obtient :

$$K = \sum_{i=1}^5 K_i = \frac{1}{3dx} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \sum_{i=1}^5 M_i = \frac{30}{dx} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Enfin, on peut déduire l'expression de la matrice globale du système définie par bloc avec les matrices K et M. Finalement, on obtient l'expression suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & A \end{pmatrix}$$

Avec les constantes suivantes :

$$A = \frac{2dxm^2}{15} + \frac{7}{3dx}$$

$$B = \frac{4m^2dx}{15} + \frac{14}{3dx}$$

$$C = \frac{dxm^2}{15} - \frac{8}{3dx}$$

$$D = \frac{8m^2dx}{15} + \frac{16}{3dx}$$

$$E = -\frac{dxm^2}{30} + \frac{1}{3dx}$$

De la même manière que pour le cas MEF 1er ordre, on obtient le système matriciel suivant :
Soit $A \in M_{11}(R)$ $(X, B) \in M_{11,1}(R)^2$, on a : $AX = B$

$$\begin{pmatrix}
A & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & B \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & A
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\quad (19)$$

Ce qui conclut la section mise sous forme matricielle du système.

5.2 Cas avec isolant

Dans ce cas, nous allons étudier l'évolution de la température lorsque l'on place un isolant à la paroi en $x=H$. Dans un 1er temps, nous traiterons les conditions limites pour les intégrer dans le système matriciel. Enfin, nous tracerons les courbes d'évolution de la température en fonction de la position pour une MEF du 2nd ordre.

5.2.1 Traitement des conditions limites

Les conditions aux limites dans le cas adiabatique sont les mêmes que pour la MEF P1. Donc nous expliciterons uniquement le système final prenant en compte les différentes conditions :

Condition de Dirichlet : $\theta(x=0) = T_0 - T_{infini}$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & B \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & A
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
T_0 - T_{infini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\quad (20)$$

Condition de Neumann : $\frac{d\theta}{dx}(x=H) = 0$

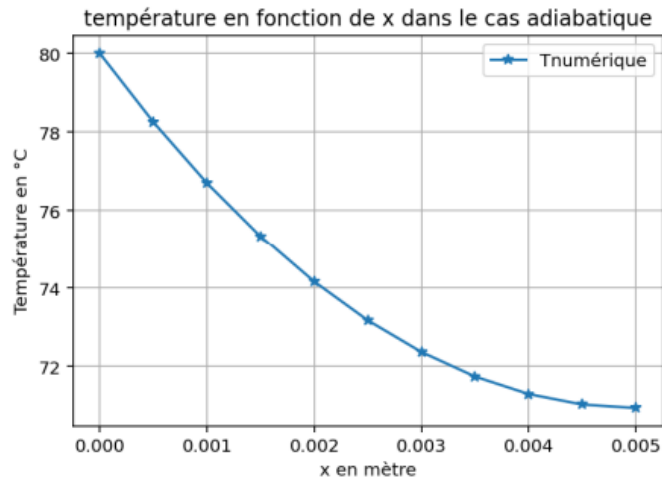
$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & B \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & A + 0
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
T_0 - T_{infini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\quad (21)$$

Enfin, appliquons l'algorithme de factorisation LU, comme détaillé dans la section 4, à ce système pour obtenir la température de chaque noeud, qui correspondent aux (a_i) .

Ce qui conclut la section traitement des conditions aux limites dans le cas adiabatique.

5.2.2 Tracé des courbes :

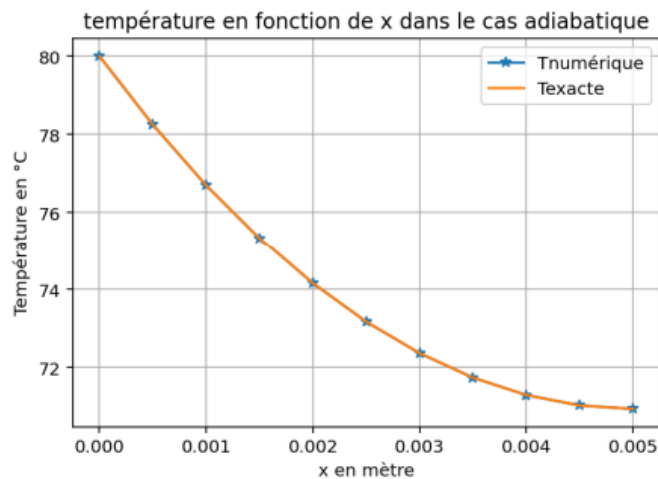
Dans un premier temps, avec ce qui précède, on traite le cas avec une solution approchée en P2. On étudie un intervalle avec 5 éléments donc $N_e = 5$. On obtient l'évolution de la température selon la position du barreau dans le cas avec isolant.



Comme pour la méthode des éléments finis (MEF) P1, on observe une diminution progressive de la température à mesure que x augmente.

Cependant, la courbe obtenue ici est nettement plus lisse que celle obtenue avec la MEF P1 dans des conditions similaires. Cela s'explique par le fait qu'en utilisant un élément d'ordre 2, le nombre de points est doublé, ce qui améliore significativement le lissage de la courbe. Donc pour le même nombre d'éléments, la MEF P2 double le nombre de noeud de la MEF P1.

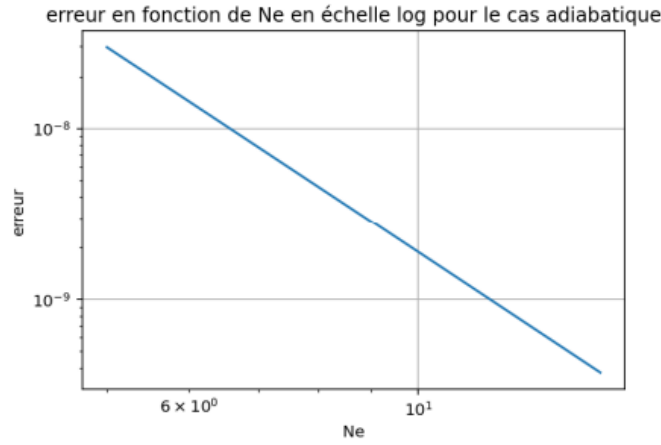
Dans un second temps, comparons la solution numérique et la solution exacte, définie par l'équation (11) :



On remarque une quasi-superposition entre la solution numérique et la solution exacte. Cependant, la superposition paraît dans ce cas beaucoup plus uniforme et pas seulement aux noeuds. On peut donc en déduire que la MEF du 2 ordre est plus précise que la MEF du 1er ordre.

Quantifions cette différence de précision en calculant l'erreur relative entre les 2 tracés et en la comparant avec la valeur trouvée pour la MEF P1.

L'erreur relative est définie d'après l'équation (10). On fait varier le nombre de noeud de 5 à 16 et on obtient la courbe suivante :



A l'oeil nu, l'évolution de l'erreur paraît similaire à la MEF P1. Utilisons la méthode polyfit pour calculer la valeur de la pente.

-3.975626959950456

Au vu de cette valeur, on peut conclure que la MEF P2 est d'ordre 4 et donc 2 fois plus précise que la MEF P1 pour le même nombre d'éléments. Il serait donc plus pertinent et précis de prioriser la MEF P2 pour traiter des études nécessitant de la précision.

Ce qui conclut l'étude du cas avec un isolant.

5.3 Cas sans isolant

Nous nous plaçons dans la même configuration que pour le cas sans isolant résolu par MEF P1 dans la sous partie 5.2.

5.3.1 Traitement des conditions limites :

Traisons les conditions aux limites.

Condition de Dirichlet : $T(x=0) = T_0 - T_{infini}$

Cette condition ne change pas donc on retrouve le système de l'équation (14).

Condition en $x=H$: L'obtention de cette condition aux limites et comment elle intervient dans le système matriciel est détaillée dans le cas sans isolant pour la MEF P1. (sous partie 4.2.1)

$$\frac{dT}{dx}(x=H) = -\frac{h'}{\lambda}T$$

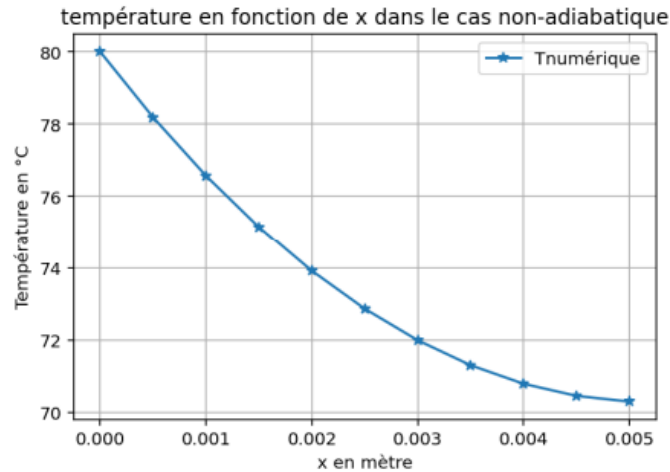
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & C & D & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & B & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & D & A+\frac{h'}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 - T_{infini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Appliquons l'algorithme de factorisation LU à ce système matriciel. On obtiendra la température à chaque noeuds, ce qui correspond aux (a_i) .

Ce qui conclut la section traitement des conditions limites.

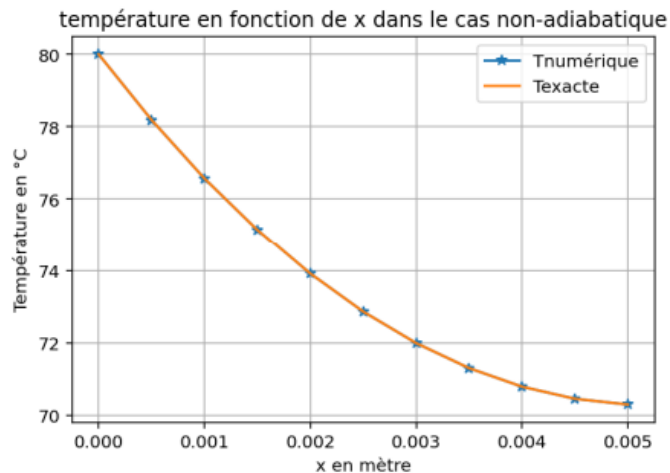
5.3.2 Tracé de la température

Traçons l'évolution de la température en fonction de la position dans le barreau.



Comme attendu, la courbe obtenue est similaire à celle du cas avec isolant, à la différence près que la température diminue légèrement (1 ou 2 degrés C) par rapport au cas avec isolant.

Comparons ce tracé avec le tracé de la solution exacte définie par l'équation (12).



Comme dans les cas précédents, les deux tracés se superposent, confirmant ainsi la validité de nos codes. Cependant, comme ce qui a été observé pour la MEF P1, l'erreur ne dépend pas des conditions aux limites. Par conséquent, le tracé de l'erreur du cas avec isolant reste cohérent dans ce cas. On peut tirer les mêmes conclusions sur la MEF P2.

Ce qui conclut l'étude du cas sans isolant.

6 Conclusion première partie

Pour conclure, le travail effectué nous a permis de nous familiariser avec les différentes méthodes d'éléments finis en traitant un problème connu. De plus, nous avons pu renforcer notre connaissance en codage sur python.

Pour revenir sur les conclusions tirées lors de l'étude. L'erreur de la MEF ne dépend pas des conditions aux limites. La MEF P1 a une précision d'ordre 2 alors que la MEF P2 est 2 fois plus précise, ce qui peut être un point important si on traite un cas nécessitant la meilleure précision. Cependant, la MEF P2 demande beaucoup de ressources graphiques et cela peut donner lieu à des programmes qui mettent plusieurs dizaines de secondes à tourner.

Il serait donc pertinent de trouver le bon compromis pour exploiter au maximum les forces de la méthode des éléments finis.

Après avoir étudié le profil de température en 1D dans une barre, nous voulons nous intéresser à un profil de température en 2D. On adaptera la méthode pour résoudre ce problème, ce qui fera l'objet des parties suivantes.

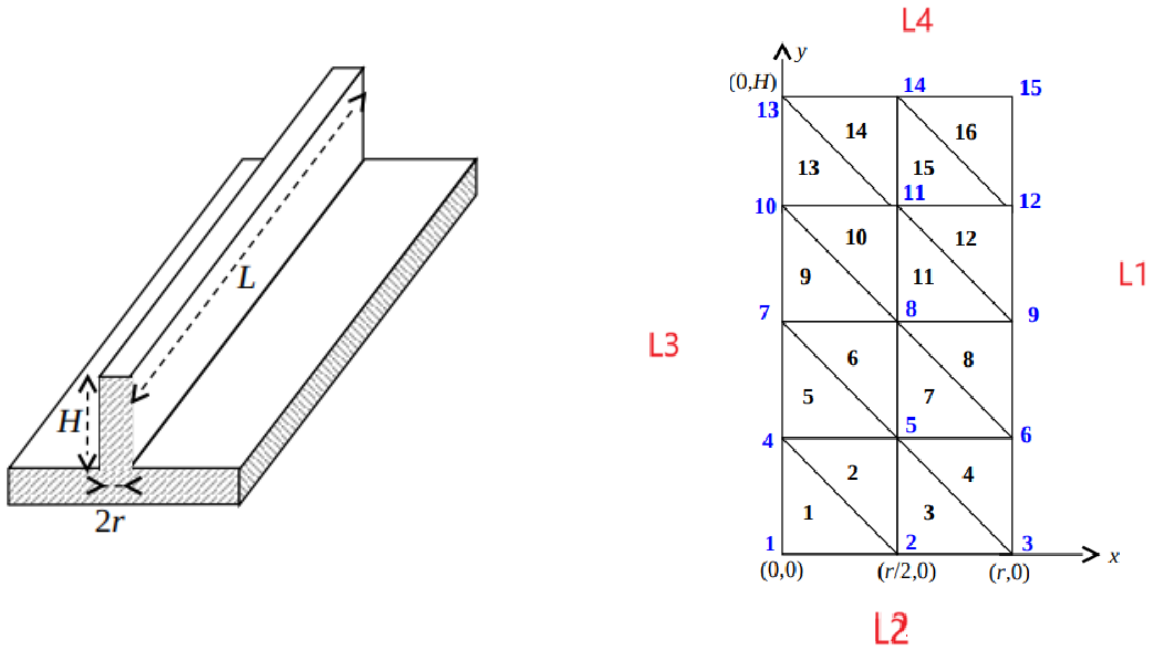
7 Eléments finis bidimensionnels linéaires

7.1 Etude théorique

7.1.1 Mise en équation du problème

Dans cette partie, nous allons étudier le profil de température 2D dans une coupe d'une ailette de grande longueur L par rapport à sa hauteur H et largeur $2r$. Par symétrie, nous allons limiter le domaine d'étude à $[0, r] \times [0, H]$ que l'on notera Ω .

Le schéma suivant résume le problème :



Résumons les conditions aux limites sur chaque frontière (de L1 à L4) :

- Sur la frontière supérieure, notée L4, il y a un flux de convection de coefficient h' avec le milieu extérieur traduit par :
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{h'}{\lambda}(T - T_{infini}) \text{ sans isolant} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ avec isolant} \end{cases}$$
- Sur la limite droite, notée L1, il y a un flux de convection de coefficient h traduit par : $\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{h}{\lambda}(T - T_{infini})$
- Sur la limite inférieure, notée L2, la température est fixée à T_0 .
- Sur la frontière gauche, notée L3, on a : $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- De plus sur Ω , on a $\Delta T = 0$ car on se place dans un régime stationnaire.

Ce qui conclut la sous section de mise en équation du système.

7.1.2 Formulation faible

De manière analogue à l'étude précédente, on écrit le résidu du problème :

$$R(T) = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On cherche $\tilde{T}(x)$ la solution approchée de T qui minimise le résidu, autrement dit $\tilde{T}(x)$ tel que $\|R(\tilde{T})\| = 0$. On a donc,

$$\int_0^r \int_0^H \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right) \omega dx dy = 0$$

Ensuite, en linéarisant puis en appliquant une intégration par partie, il en vient :

$$\int_0^H \left(\left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \right]_0^r - \int_0^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \right) dy + \int_0^r \left(\left[\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \right]_0^H - \int_0^H \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \right) dx = 0$$

et enfin en injectant les conditions aux limites en $x=0$ et $y=0$, on obtient la formulation faible :

$$\int_0^H \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \right)(r) dy + \int_0^r \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \right)(H) dx - \int_0^r \int_0^H \nabla \tilde{T} \nabla \omega dx dy = 0 \quad (23)$$

Pour la suite de l'étude, on utilisera les notations suivantes :

$$J = \int_0^H \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \omega \right)(r) dy ; \quad N = \int_0^r \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \omega \right)(H) dx ; \quad I = \int_0^r \int_0^H \nabla \tilde{T} \nabla \omega dx dy = 0$$

Ce qui conclut la sous partie sur la formulation faible.

7.1.3 Discrétisation

Maintenant, discrétisons l'équation de formulation faible. Pour rappel, on utilise un maillage triangulaire donc on discrétisera l'intervalle en triangles définis par 3 noeuds. Ensuite, on approxime la solution recherchée par une succession de solutions sur chaque triangle. Pour cela, on introduit les fonctions de forme N_1, N_2, N_3 telles que :

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{k=1}^{N_e} a_{n1} H_1(x, y) + a_{n2} H_2(x, y) + a_{n3} H_3(x, y)$$

Avec a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} les coordonnées des noeuds de chaque élément triangle.

Par définition en 2 dimensions, les fonctions de bases sont des plans définis par :

$$N_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y ; \quad N_2(x, y) = a_2 + b_2 x + c_2 y ; \quad N_3(x, y) = a_3 + b_3 x + c_3 y$$

Soumis aux conditions suivantes :

	N_1(x,y)	N_2(x,y)	N_3(x,y)
(x_{1},y_{1})	1	0	0
(x_{2},y_{2})	0	1	0
(x_{3},y_{3})	0	0	1

Pour déterminer l'expression de chaque fonction de forme, on résout le système d'équation obtenu à partir des conditions spécifiées dans le tableau précédent. Ensuite, on simplifie les expressions résultantes en utilisant les coordonnées barycentriques. Finalement, on obtient les expressions suivantes :

$$N_1(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{\det(A)} ((x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Grâce à ces expressions, on peut réécrire $\tilde{T}(x, y)$ sous la forme discrétisée suivante :

$$T_k(x, y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

Ce qui conclut la sous partie discrétisation.

7.1.4 Mise sous forme matricielle

Comme pour la MEF en 1 dimension, on cherche à écrire la formulation faible discrétisée sous forme matricielle. De cette façon, nous obtiendrons l'écriture des intégrales I, J et N les plus compactes possible.

Commençons par les termes de dérivée, il en vient :

$$\frac{\partial T_k(x, y)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial T_k(x, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}$$

Discrétisons la fonction de poids ω :

$$\omega(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial a_{n1}} \\ \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial a_{n2}} \\ \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial a_{n3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

Cette égalité découle de Galerkin.

Maintenant, écrivons chaque intégrale sous forme discrétisée :

Discrétisation de I

Cette intégrale traduit la condition aux limites sur Ω :

$$\Delta T = 0$$

D'où,

$$I = \int_0^r \int_0^H \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx dy$$

De ce fait, en remplaçant chaque terme sous leur forme matricielle respective, l'intégrale I discrétisée sur chaque élément e_k est :

$$I = \sum_{k=1}^{N_e} \int \int_{e_k} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k dx dy + \int \int_{e_k} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k dx dy$$

Comme en 1 dimensions, on pose $(K_x)_k$ et $(K_y)_k$ les matrices de raideur sur x et y élémentaires :

$$(K_x)_k = \int \int_{e_k} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} dx dy \quad \text{et} \quad (K_y)_k = \int \int_{e_k} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy$$

Après le calcul de chaque termes, on obtient :

$$(K_x)_k = \frac{1}{2 \det(A)} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)^2 & (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) & (y_2 - y_3)(y_1 - y_2) \\ (y_3 - y_1)^2 & (y_3 - y_1)(y_1 - y_2) & (y_3 - y_1)(y_2 - y_3) \\ (y_1 - y_2)^2 & (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) & (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

$$(K_y)_k = \frac{1}{2 \det(A)} \begin{bmatrix} (x_2 - x_3)^2 & (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) & (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) \\ (x_3 - x_1)^2 & (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) & (x_3 - x_1)(x_2 - x_3) \\ (x_1 - x_2)^2 & (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) & (x_1 - x_2)(x_3 - x_1) \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de conclure quant à l'écriture de I :

$$I = \sum_{k=1}^{N_e} ((K_x)_k + (K_y)_k) \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k \quad (24)$$

Discrétisation de J : Cette intégrale traduit la condition suivante sur la frontière 1

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-h}{\lambda} (T - T_{inf})$$

Rappelons son expression :

$$J = \int_0^H \frac{\partial T}{\partial x}(r) \omega(r) dy$$

En discrétisant,

$$J = \sum_{k=1}^{n_1-1} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{-h}{\lambda} (T - T_{inf}) \omega dx = \sum_{k=1}^{n_1-1} \int_{y_n}^{y_{n+1}} \frac{-h}{\lambda} T \omega dx + \frac{h}{\lambda} T_{inf} \omega dx$$

Avec n_1 qui désigne le nombre de noeud sur la frontière L1 (la paroi droite de l'ailette) et y_n et y_{n+1} les ordonnées des noeuds de cette frontière.

La discrétisation est unidimensionnelle comme effectué en P1 dans les parties précédentes. Nous ne détaillerons donc pas le raisonnement car il est le même que dans les paragraphes 4.2.1.

Il en vient donc :

$$J = \sum_{k=1}^{n_1-1} \frac{h}{\lambda} (M_y^{1D})_k \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} - \frac{h}{\lambda} T_{inf} B_k \quad (25)$$

Avec

$$M_y^{1D} = \frac{dy}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B_k = \frac{dy}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour vérifier que le raisonnement est cohérent, on retrouve bien l'expression de la matrice de masse obtenue en 1D. De plus, on observe que le terme avec la matrice B_k est indépendant des coordonnées des nœuds. Par conséquent, ce terme sera intégré dans le second membre de l'équation.

Enfin, on s'intéresse à l'intégrale N.

Discrétisation de N : Cette intégrale traduit mathématiquement la convection entre l'air et la paroi haute de l'ailette de coefficient h' :

$$\frac{dT}{dy} = \frac{-h'}{\lambda} (T - T_{inf})$$

Rappelons son expression :

$$N = \int_0^r \frac{\partial T}{\partial y}(H) \omega(H) dx$$

Le raisonnement pour discrétiser cette intégrale est tout à fait similaire à celui utilisé pour l'intégrale J donc :

$$N = \sum_{j=1}^{n_4-1} \frac{h'}{\lambda} (M_x^{1D})_j \begin{pmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{pmatrix} - \frac{h'}{\lambda} T_{inf} B_j$$

On note N4 le nombre de noeud sur la paroi L4 à l'extrémité haute de l'aillette.

$$M_x^{1D} = \frac{dx}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B_j = \frac{dx}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comme vu avec J, on observe que le terme avec la matrice B_j est indépendant des coordonnées des noeuds. Il sera inscrit dans le 2nd membre du système.

Formulation faible discrète

On trouve donc la formulation faible discrète :

$$\sum_{k=1}^{N_e} ((K_x)_k + (K_y)_k) \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \end{bmatrix}_k + \sum_{k=1}^{n_1-1} \frac{h}{\lambda} (M_y^{1D})_k \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{n_4-1} \frac{h'}{\lambda} (M_x^{1D})_j \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_1-1} \frac{h}{\lambda} T_{inf} B_k + \sum_{j=1}^{n_4-1} \frac{h'}{\lambda} T_{inf} B_j \quad (26)$$

Maintenant que nous avons obtenu cette formulation faible discrète, nous pouvons l'implémenter en Python pour déterminer la distribution de température dans la barre. Nous utiliserons les fonctions table, factolu, descente, remontée et tracé maillage disponibles sur Moodle pour traiter les différents cas.

7.2 Etude numérique

Grâce à l'étude théorique précédente, nous pouvons maintenant aborder des cas pratiques de transfert thermique. Nous examinerons deux cas : un cas où un isolant est placé sur la frontière L4 et un cas sans isolant. Ces deux cas seront traités successivement en utilisant deux types de maillages différents : un maillage triangulaire, dont la mise en place théorique a été décrite ci-dessus, et un maillage quadrangulaire, dont la mise en place théorique sera présentée de manière plus concise.

7.2.1 Maillage triangulaire

Avec isolant

On place un isolant à la frontière L4. Le transfert thermique décrit par l'intégrale N est donc nul. Pour ce cas, on prend N=0. De plus, on prend 15 noeuds ce qui fait 16 éléments triangulaires comme décrit sur la figure. Ci-dessous la table de connexion et de coordonnées des noeuds du maillage.

	0	1	2
0	0	1	3
1	1	4	3
2	1	2	4
3	2	5	4
4	3	4	6
5	4	7	6
6	4	5	7
7	5	8	7
8	6	7	9
9	7	10	9
10	7	8	10
11	8	11	10
12	9	10	12
13	10	13	12
14	10	11	13
15	11	14	13

	0	1
0	0	0
1	0.05	0
2	0.1	0
3	0	0.025
4	0.05	0.025
5	0.1	0.025
6	0	0.05
7	0.05	0.05
8	0.1	0.05
9	0	0.075
10	0.05	0.075
11	0.1	0.075
12	0	0.1
13	0.05	0.1
14	0.1	0.1

Procédons à l'assemblage du système matriciel de la forme $AX=B$ grâce à la fonction bloc qui ajoute bloc par bloc des matrices dans une matrice globale.

Après assemblage, on obtient dans ce cas les matrices suivantes :

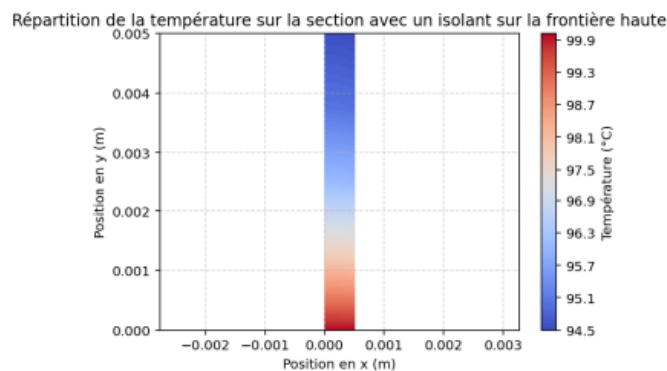
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	2.60017	-2.49992	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-2.49992	5.20033	-2.49992
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-2.49992	2.60121

100
100
100
0
0
0.0625
0
0
0.0625
0
0
0.0625
0
0
0.0625
0
0
0.03125

Tout d'abord on observe l'assemblage par blocs des matrices de raideur $(K_x)_k$ et $(K_y)_k$ et les conditions aux limites imposées sur les différentes frontières.

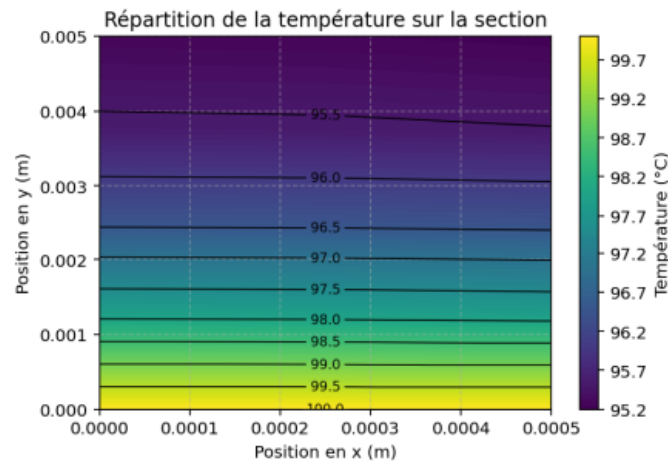
On peut également noter les trois premières lignes de A, qui indiquent que la température des trois premiers nœuds est fixée à T_0 . À ce propos, on observe également la condition de Dirichlet imposée aux trois premiers nœuds, visible sur les trois premières lignes de B. De plus, on remarque bien l'influence de la matrice B_k (dans l'intégrale J) aux lignes 6,9,12 et 15 ce qui correspond bien aux nœuds de frontière L1, où il y a de la convection avec l'air extérieur avec un coefficient d'échange convectif h.

Ensuite, on applique les algorithmes de résolution pour obtenir le vecteur température à chaque nœud. On peut désormais tracer l'évolution de la température dans la section de l'ailette en fonction de la position en x et y.



Premièrement, on remarque un gradient vertical de température ce qui pouvait être attendu au vu de la géométrie et du placement des sources de chaleur. En effet, sur ce graphe on remarque bien les pertes verticales par conduction dans la section de l'ailette.

De plus, on devine des pertes de chaleur 'horizontales' par convection avec l'extérieur. Pour les mettre en valeur, on peut tracer l'évolution de la température dans l'ailette entière en y ajoutant des lignes de température comme sur le graphique suivant :



Les lignes de température mettent bien en évidence les pertes de chaleur 'horizontales'. Ces dernières sont dues à la convection avec l'air à la frontière droite. On voit bien que plus on est proche de la frontière droite plus les pertes par convection sont grandes.

Pour l'étude en 2D, nous ne pouvons pas tracer l'erreur entre ce que l'on a obtenu et la réalité car il n'existe pas de solution analytique. On ne pourra donc ni calculer l'erreur ni comparer avec la réalité.

Mais nous pouvons étoffer l'étude en enlevant l'isolant placé à la frontière et en étudiant la répartition de température.

Ce qui conclut l'étude de la répartition de température dans la section de l'ailette avec un isolant placé sur la frontière haute.

Sans isolant avec maillage triangulaire

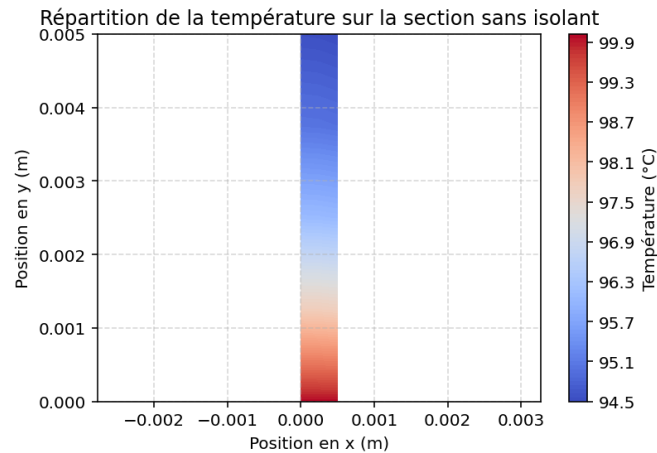
Dans cette sous-section, on enlève l'isolant placé à la frontière haute. L'intégrale N n'est plus nulle et influe sur le système. Voici les nouvelles expressions des matrices :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	5.2	-5	0	-0.1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-5	10.4	-5	0	-0.2	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-5	5.20208	0	0	-0.0994792
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.1	0	0	2.60017	-2.49992	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2	0	-2.49992	5.20033	-2.49992
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.0994792	0	-2.49992	2.60121

	0
0	100
1	100
2	100
3	0
4	0
5	0.0625
6	0
7	0
8	0.0625
9	0
10	0
11	0.0625
12	0.005
13	0.01
14	0.03625

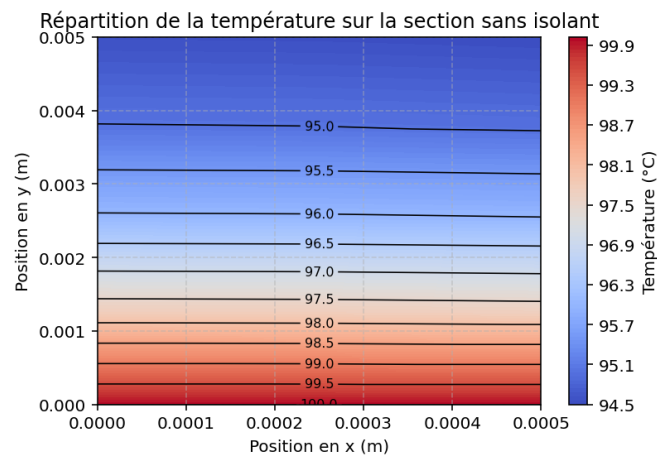
On note une différence entre les matrices de 2nd membre au niveau des 3 dernières lignes. En effet, N s'applique sur les noeuds 13,14 et 15 donc des termes s'ajoutent d'un cas à l'autre.

Comme pour le cas précédent et en connaissance des 2 matrices du système, on utilise les algorithmes de résolution pour tracer l'évolution de la température dans la section de l'ailette en fonction de la position.



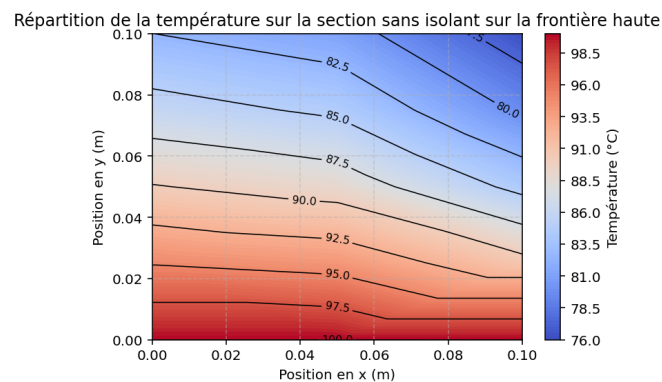
Comme pour le cas avec isolant, on observe un gradient vertical de température dû aux pertes thermiques par conduction dans l'ailette. A noter que, la température minimale atteinte est 1 degré inférieur que avec l'isolant et est atteinte à la frontière haute. On peut donc comprendre que l'isolant influe peu sur l'évolution de la température.

On remarque toujours les pertes thermiques horizontales par convection avec l'air extérieur. Pour mieux les mettre en évidence, traçons l'évolution de la température dans l'ailette entière en y ajoutant les lignes de températures.



Les lignes de température montrent bien les pertes thermiques par convection avec la frontière droite. De plus, ces lignes de température mettent bien en valeur la faible influence de l'isolant. En effet, la courbe de température de 95°C qui débutait en $y=0.004$ m avec isolant semble commencer $y=0.0038$ m sans isolant. La différence est moindre.

Pour étoffer l'étude, on se propose de regarder l'influence des dimensions de l'ailette. Etudions la répartition de température pour une ailette de 1cm de largeur et de longueur.



Ce graphique met en évidence l'influence des dimensions sur les pertes thermiques. En augmentant la longueur de l'aillette (selon l'axe y), les pertes thermiques par conduction augmentent de manière significative, ce qui se traduit par une diminution de la température jusqu'à 76 °C. Par ailleurs, une augmentation de la largeur de l'aillette intensifie les pertes thermiques horizontales par convection. En effet, les lignes de température montrent une diminution marquée de la température à mesure que l'on se rapproche de la frontière droite. Ainsi, plus les dimensions de l'aillette augmentent, plus elle dissipe efficacement la chaleur. Il est donc crucial de trouver un équilibre entre maximiser la taille de l'aillette et respecter les contraintes du cahier des charges.

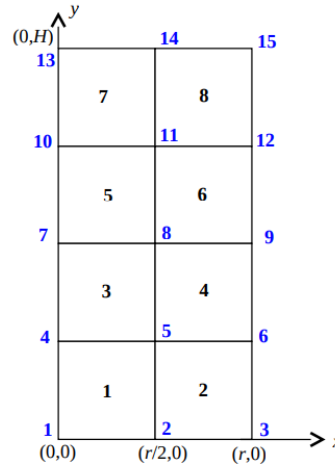
Pour conclure sur ce cas pratique, on a bien observé les pertes thermiques par conduction et par convection et l'influence des dimensions de l'aillette. Mais nous n'avons pas pu observer l'influence du maillage sur la solution. C'est pourquoi on se propose de modifier le maillage dans la suite de l'étude.

7.2.2 Maillage quadrangulaire

Approche théorique

Dans les 2 prochains cas, nous allons utiliser un maillage quadrangulaire. Ce maillage nécessite une courte mise en place théorique.

Dans un premier temps, voici le maillage utilisé :



La formulation faible trouvée pour le maillage triangulaire n'est pas modifiée donc on se référera à l'équation (23).

En revanche, la discrétisation change. En effet, sur ce maillage l'approximation de la solution est donnée par :

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{k=1}^n \tilde{T}_k(x, y)$$

avec

$$\tilde{T}^k(x, y) = \begin{cases} a_1 N_1(x, y) + a_2 N_2(x, y) + a_3 N_3(x, y) + a_4 N_4(x, y) & \text{si } (x, y) \in Q_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions de bases sont définies pour $i \in [1, 4]$ telles que :

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy$$

Et sont soumises aux conditions suivantes :

	N1	N2	N3	N4
(x1,y1)	1	0	0	0
(x2,y2)	0	1	0	0
(x3,y3)	0	0	1	0
(x4,y4)	0	0	0	1

Dans ces conditions et en suivant le même développement que pour le maillage triangulaire, on obtient 2 nouvelles matrices de raideur $(K_y)_k$ et $(K_x)_k$:

$$K_x = \frac{h_2}{6h_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_y = \frac{h_1}{6h_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Avec h_1 , h_2 respectivement la longueur et largeur des quadrangles.

Cette approche théorique nous permet de mettre en place le maillage quadrangles sous python et de résoudre le système matriciel de la forme $AX=B$.

Ce qui conclut l'approche théorique de mise en place du maillage quadrangle.

Cas avec maillage quadrangulaire

Maintenant que nous avons mis en place le maillage dans python, procédons à l'assemblage. Pour cela, nous prenons 15 noeuds et 8 éléments. Ci-dessous la table de connexion et des coordonnées des noeuds associées :

	0	1	2	3
0	0	1	4	3
1	1	2	5	4
2	3	4	7	6
3	4	5	8	7
4	6	7	10	9
5	7	8	11	10
6	9	10	13	12
7	10	11	14	13

	0	1
0	0	0
1	0.00025	0
2	0.0005	0
3	0	0.00125
4	0.00025	0.00125
5	0.0005	0.00125
6	0	0.0025
7	0.00025	0.0025
8	0.0005	0.0025
9	0	0.00375
10	0.00025	0.00375
11	0.0005	0.00375
12	0	0.005
13	0.00025	0.005
14	0.0005	0.005

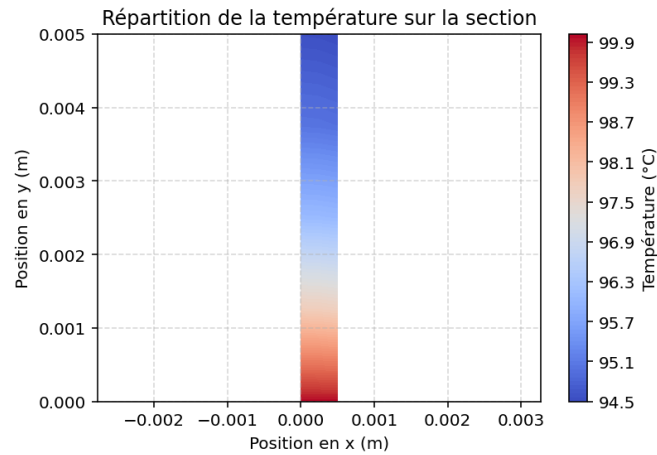
Après assemblage, on obtient un système matriciel de la forme $AX=B$ avec les matrices A et B suivantes :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	0	0	0	0	0	0
4	-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667	0	0	0	0	0	0
5	0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	0	0	0
7	0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667	0	0	0
8	0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0.766667	-0.866667	0	3.46667	-3.26667	0	0.766667	-0.866667	0	0
10	0	0	0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-3.26667	6.93333	-3.26667	-0.866667	1.53333	-0.866667	0
11	0	0	0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	-3.26667	3.46875	0	-0.866667	0.767188	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0.766667	-0.866667	0	1.7335	-1.63325	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	1.53333	-0.866667	-1.63325	3.467	-1.63325	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.866667	0.767188	0	-1.63325	1.73454	0

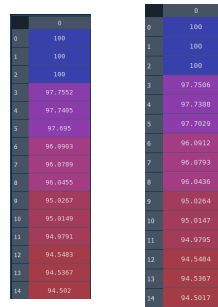
	0	100
0	100	
1	100	
2	100	
3	0	
4	0	
5	0.0625	
6	0	
7	0	
8	0.0625	
9	0	
10	0	
11	0.0625	
12	0.005	
13	0.01	
14	0.03625	

Comme pour le maillage précédent, la matrice A présente des termes répétés et des singularités dues aux conditions limites sur certaines frontières. On remarque aussi les conditions limites sur les 3 premières lignes des 2 matrices.

Désormais, utilisons les algorithmes de résolution numérique pour obtenir le vecteur température à chaque noeud et tracer son évolution en fonction de la position dans la section de l'ailette :



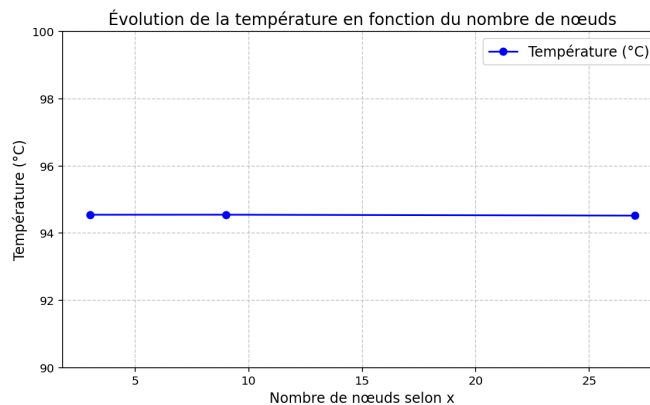
Au vu de ce graphe, on peut conclure que les 2 maillages donnent les mêmes résultats. Pour pouvoir mieux comparer, regardons les vecteurs solutions pour les 2 maillages :



On observe le vecteur de température pour le maillage quadrangulaire à gauche et celui pour le maillage triangulaire à droite. On remarque entre les 2 une infime différence qui ne diffère que de quelques centièmes entre les 2. Au vu de l'infime différence donnée par les 2 maillages, nous nous pencherons pas sur le cas avec isolant car il en viendrait les mêmes conclusions que pour le maillage triangulaire.

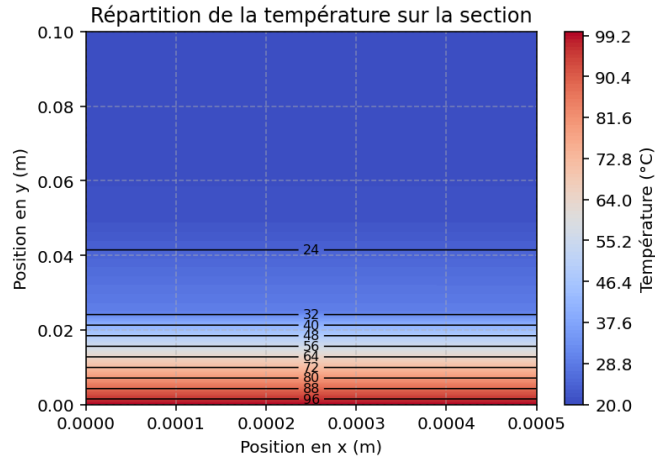
Pour davantage étudier le maillage utilisé, il serait intéressant de tracer la température sur la frontière haute en fonction de différents paramètres du maillage comme le nombre de noeud selon x ou même la longueur (ou largeur) des éléments.

Traçons l'évolution de la température au point (0, h) (noeud situé en haut à gauche de l'ailette) en fonction du nombre de noeuds selon l'axe x. Pour cela, nous considérerons des configurations avec 3, 9 et 27 noeuds selon x. Afin de maintenir un rapport constant entre la longueur et la largeur, le nombre de noeuds selon y devra également être modifié en conséquence.



On constate ainsi que le nombre de nœuds a une influence négligeable sur le résultat. En effet, l'augmentation du nombre de nœuds entraîne une variation de la température de seulement quelques millièmes. Cela démontre que la méthode des éléments finis (MEF) est une technique précise, même avec un maillage relativement grossier. Cependant, augmenter le nombre de nœuds engendre une hausse significative du temps de calcul, rendant peu pertinent l'ajout de nœuds pour un gain de précision minime. Il est donc essentiel de trouver un compromis optimal afin d'éviter des calculs inutiles.

Maintenant, regardons l'évolution de la température en (0,h) en fonction des dimensions de l'ailette. On prendra une ailette de longueur 10 cm sur 0.5mm. On obtient la répartition de température suivante :



En augmentant la longueur de l'ailette, on a considérablement augmenté les pertes thermiques par conduction. La température tend vers 20 °C qui correspond à la température de l'air extérieur. À noter aussi que les pertes thermiques horizontales dues à la convection sont plus présentes. Ceci est dû au fait que la largeur de l'ailette est très faible devant sa longueur, impliquant donc que les pertes par convection sont infimes devant les pertes par conduction.

Pour conclure, les maillages quadrangulaire et triangulaire présentent des solutions tout à fait similaires et dans ce cas les 2 maillages ne présentent pas d'intérêt majeur l'un par rapport à l'autre. La seule différence est le nombre d'éléments qui est moindre pour le maillage quadrangulaire mais la précision reste la même. Il pourrait donc être plus avantageux de choisir ce maillage. En effet, on obtiendrait la même solution pour moins de calcul.

Ce qui conclut l'étude de l'ailette en 2 dimensions.

7.3 Cas d'une EDO à coefficients variables

Dans cette section, nous voulons utiliser le même cheminement que précédemment pour résoudre une équation différentielle mais à coefficients variables. La démarche théorique étant très similaire aux démarches précédentes, on se propose d'alléger le compte rendu en ne mettant que les étapes clés des calculs.

L'équation différentielle avec les conditions aux limites est :

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} + 4 = 0 \quad \text{pour } 1 < x < 4$$

Associée aux conditions aux limites suivantes :

$$u(1) = 1 \quad \text{et} \quad u(4) = 0.$$

7.4 Formulation faible

Dans cette section, nous allons établir la formulation faible en passant par le résidu.

$$R(U) = x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} + 4 \quad (27)$$

On cherche \tilde{U} tel que $\|R(\tilde{U})\| = 0$, ce qui revient à écrire :

$$\int_1^4 x^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} \omega_i(x) dx + \int_1^4 (2x \frac{d\tilde{u}}{dx} + 4) \omega_i(x) dx = 0 \quad (28)$$

Sur l'intégrale de gauche, par intégration par partie on obtient :

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} x^2 \omega_i(x) \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \left(2x \omega_i(x) + x^2 \frac{\partial \omega_i}{\partial x} \right) dx$$

En utilisant les conditions de Dirichlet en $x=0$ et $x=4$, il en vient :

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} x^2 \omega_i(x) \right]_1^4 = 0$$

D'où la formulation faible :

$$\int_{-1}^4 -x^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + 4 \omega_i(x) dx = 0 \quad (29)$$

Le processus de discrétisation étant le même que pour le paragraphe 2.2 on ne détaillera pas la méthode. Discrétisons cette équation sur chaque intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ avec N_e éléments, d'où :

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{x_i}^{x_{i+1}} -x^2 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x} \frac{\partial \omega_i}{\partial x} + 4 \omega_i(x) dx = 0 \quad (30)$$

7.4.1 Mise sous forme matricielle

Le processus de mise sous forme matricielle est similaire au paragraphe 2.3. En utilisant le même processus, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{N_e} K_i \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N_e} B_i \quad (31)$$

Avec

$$K_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} -x^2 \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dx} \\ \frac{dH_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dH_1}{dx} & \frac{dH_2}{dx} \end{bmatrix} = \frac{1}{3h^2} \begin{bmatrix} x_{i+1}^3 - x_i^3 & -x_{i+1}^3 - x_i^3 \\ -x_{i+1}^3 - x_i^3 & x_{i+1}^3 - x_i^3 \end{bmatrix}$$

Et

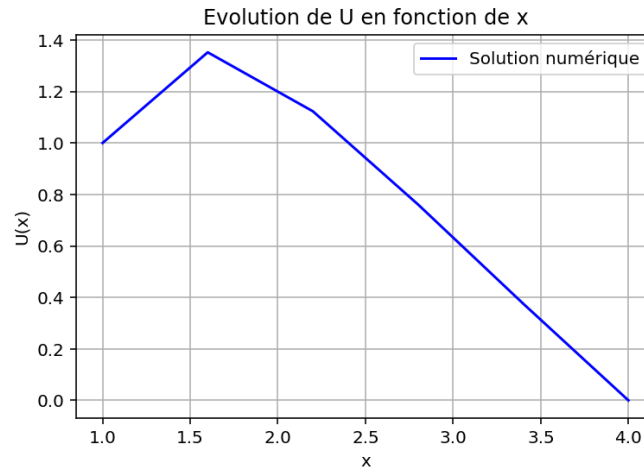
$$B_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h \\ 2h \end{bmatrix}$$

Finalement, on obtient un système matriciel de la forme $AX=B$ avec A composé de matrice de raideur K_i par bloc et B composé de B_i par bloc.

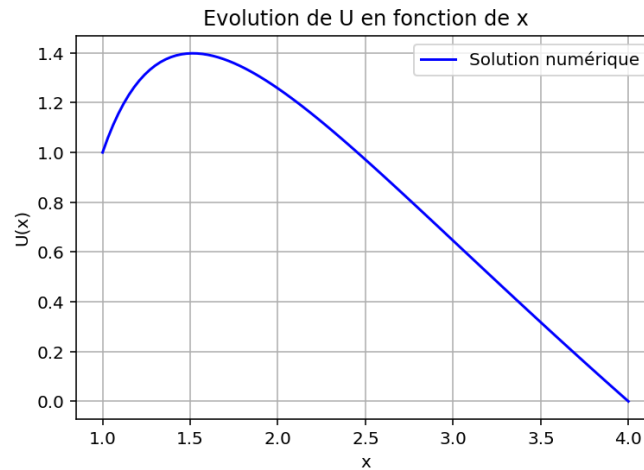
Ce qui conclut la sous section mise sous forme matricielle et la section théorique.

7.4.2 Etude numérique

Maintenant que nous avons le système matriciel de la forme $AX=B$, nous pouvons utiliser les algorithmes de résolution numérique pour obtenir le vecteur solution en chaque noeud. De fait, nous pouvons tracer la solution en fonction de la variable x .



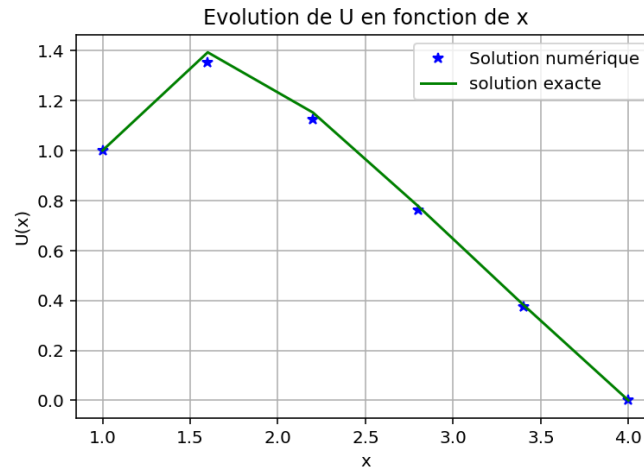
On obtient une courbe très peu lisse due au faible nombre de noeud utilisé. On pourrait augmenter considérablement le nombre de noeud pour augmenter le caractère lisse de la solution numérique. Par exemple, avec un nombre d'éléments de 100.



Cette courbe est beaucoup plus lisse et donc beaucoup plus précise que la précédente. On en conclut que pour avoir la meilleure précision possible, il faut augmenter le nombre de noeud. De plus, pour vérifier la véracité de nos résultats, on pourrait tracer la solution numérique et la solution exacte sur le même graphe. La solution exacte a pour expression :

$$U_{ex}(x) = -4 \ln(x) - \frac{\frac{32}{3} \ln(2) - 4}{x} - \frac{1}{3} + \frac{32}{3} \ln(2) \quad (32)$$

Le tracé des 2 solutions en fonction de la variable x nous donne :

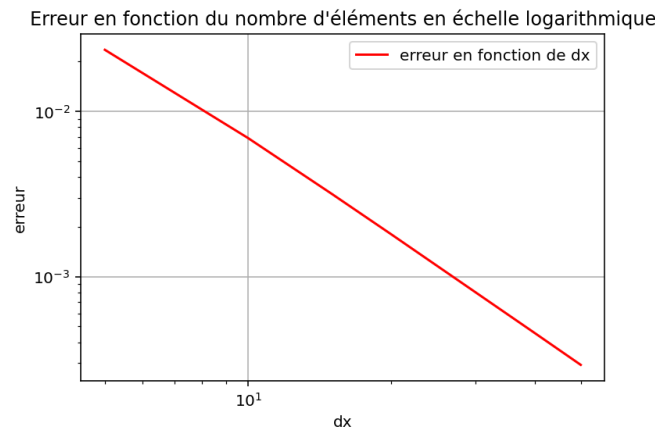


On observe que la solution numérique obtenue est très proche de la solution exacte ce qui nous rassure dans notre démarche.

Malgré les résultats proches de la solution exacte, il serait intéressant d'étudier l'erreur entre la solution numérique et la solution exacte. L'erreur est définie par :

$$\epsilon = \frac{\|U_{num}(x) - U_{ex}(x)\|}{\|U_{ex}(x)\|} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{Ne} (U_{num}(x) - U_{ex}(x))^2}{\sum_{i=0}^{Ne} (U_{ex}(x))^2}} \quad (33)$$

Pour tracer cette erreur, on fait varier le nombre d'éléments Ne, on prend 5, 10, 15, 20, 40 et 50 éléments. On obtient donc en échelle logarithmique :



On observe donc que plus on augmente le nombre d'éléments plus l'erreur diminue. Ce qui nous paraît cohérent car en augmentant le nombre de noeud on affine le maillage et donc on augmente la précision. A remarquer que lorsque l'erreur décroît d'une décade, le nombre d'éléments décroît de 2 décades. On conclut donc que la méthode des éléments finis P1 est d'ordre 2 comme vu dans la 1ère partie de ce compte rendu. Ce qui conclut la résolution de cette équation différentielle à coefficients variables.

8 Conclusion

Lors de ce TP, nous avons appliqué la méthode des éléments finis (MEF) en une dimension pour résoudre l'équation de la chaleur ainsi qu'une équation différentielle ordinaire (EDO) à coefficients variables. Nous avons utilisé des éléments P1 linéaires pour une première approche et des éléments P2 quadratiques pour affiner la précision des

solutions. Cette démarche nous a permis de nous familiariser avec la discrétisation des problèmes physiques dans le but d'obtenir des solutions numériques approchées.

Dans une extension à deux dimensions, nous avons étudié la répartition de la température au sein d'une ailette de refroidissement en employant deux types de maillages : triangulaires et quadrilatéraux. Cette analyse nous a offert une perspective spatiale sur la distribution thermique et mis en lumière l'influence de la géométrie du maillage sur les résultats. Par ailleurs, nous avons exploré plusieurs algorithmes de résolution numérique tout en évaluant l'impact de divers paramètres tels que le nombre de nœuds, les dimensions de l'aillette, et la configuration des maillages sur la qualité et la convergence des solutions.

En conclusion, ces travaux pratiques nous ont initié à la méthode des éléments finis et à son application dans le domaine de la thermique. Il nous a également permis de développer des compétences en programmation, notamment grâce à l'utilisation du langage Python, en favorisant une approche algorithmique et automatisée des calculs numériques. Cette expérience a renforcé notre compréhension des outils numériques modernes pour résoudre des problèmes physiques complexes.