



UNIVERSITÉ LYON 1 CLAUDE BERNARD
POLYTECH LYON
ANNÉE 2023/2024

Etude vibratoire d'une pale d'hélicoptère.

Auteurs:

Baptiste CHANAL
Romain URBANIAK
Loïc MACHEBOEUF

Encadrant:

Stéphane NICOLE

Contents

1	Objectif du projet	2
2	Contexte	2
3	Problématique	2
4	Hypothèse de travail et fil conducteur de l'étude	2
4.1	Hypothèse de travail	2
4.2	Déroulement de l'étude	3
5	Modèle d'étude vibratoire théorique	4
5.1	Système avec une masse	4
5.1.1	Masse-ressort	4
5.1.2	masse-ressort-amortisseur	6
5.1.3	Tracé des courbes :	7
5.2	Modèle avec deux masse	8
5.2.1	masse-ressort-masse	9
5.2.2	Masse-ressort-amortisseur-masse	11
5.2.3	Tracé des courbes :	14
6	Piste d'amélioration	16
7	Conclusion	16

1 Objectif du projet

Notre projet vise à étudier le comportement d'une pale d'hélicoptère dont le rotor anticouple présente un défaut de masse. Pour ce faire, nous allons concevoir plusieurs modèles simplifiés d'hélicoptère en intégrant ce défaut de masse. Ensuite, nous analyserons le comportement de ce modèle lorsqu'il est mis en rotation, afin de caractériser les conséquences des vibrations sur la queue et la cabine de l'hélicoptère.



2 Contexte

Notre étude va porter sur les vibrations provoquées par un défaut sur les pâles du rotor anticouple d'un hélicoptère. Cette pièce indispensable permet à l'hélicoptère de pouvoir se stabiliser en déplacement et de pivoter en vol stationnaire. D'où l'importance d'une étude vibratoire des pâles.

3 Problématique

La problématique principale de notre étude sera :

Comment caractériser les conséquences des vibrations sur un hélicoptère provoquées par un défaut de masse sur les pâles ?

Pour cela, nous répondrons à plusieurs questions intermédiaires :

- Comment modéliser l'hélicoptère et ses pâles ?
- Comment quantifier la force et le déplacement créés par les vibrations des pâles ?
- Quelle proportion de la force créée est-elle transmise à la cabine ?

4 Hypothèse de travail et fil conducteur de l'étude

4.1 Hypothèse de travail

Pour mieux structurer notre étude, il est nécessaire de prendre certaines hypothèses de travail.

Pour ce projet, nous avons fait le choix de s'intéresser à un hélicoptère en particulier : le SA 341 F GAZELLE destiné principalement pour l'armée de terre française.

De plus, nous avons choisi de représenter le balourd de notre problème par un déséquilibre statique. Le balourd pèsera 20g et sera disposé sur une des 2 pâles du rotor anticouple à une distance du centre de gravité initial $e = 70cm$. Ensuite, nous avons estimé quelques caractéristiques nécessaires pour la suite :

- Le matériau utilisé sera du PRFC (Polymère renforcé de fibre de carbone) de masse volumique $\rho = 1800kg.m^{-3}$ et de module d'Young de $E = 115GPa$

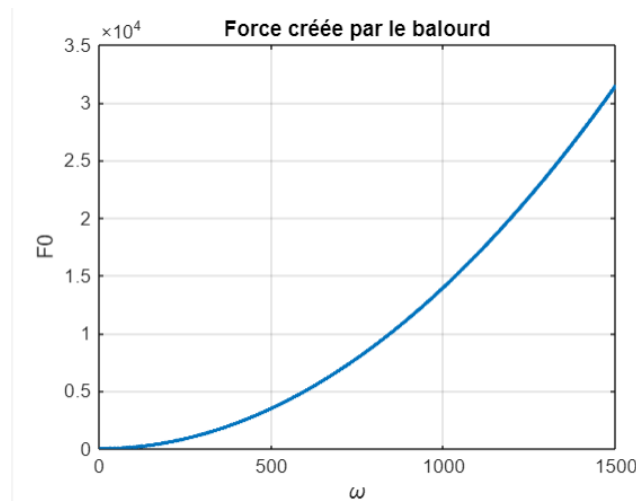
Concernant la queue :

- La queue mesurera $L_{queue} = 5m$ et sera modélisée comme une poutre rectangulaire creuse de section pleine $S_{queue} = 0.0351m^2$ d'où $m_{queue} = \rho * S_{queue} * L_{queue} = 315.9kg$ et par suite $I_{queue} = \frac{b_1 h^3}{12} - \frac{b_2 h^3}{12} = 0.027m^4$.
- La cabine pèsera $m_{cabine} = 1040kg$ et la vitesse de rotation de travail sera $\omega_{moteur} = 167rad/s = 1600tr/min$.

Enfin concernant la force créée par le balourd, nous avons choisi de la modéliser de la forme suivante :

$$F = F_0 \sin(\omega t) = \omega^2 * e * m_{balourd}$$

Si on trace cette force en fonction de la pulsation, on obtient :



4.2 Déroulement de l'étude

Lors de cette étude, nous voulons modéliser les phénomènes réels avec la meilleure précision possible. À cette fin, nous allons examiner les caractéristiques vibratoires (pulsation, masse...) de deux modèles d'hélicoptère séparé chacun en deux sous-modèles, classés du moins réaliste au plus réaliste.

Pour le premier modèle, la cabine de l'hélicoptère sera considérée comme un solide indéformable. Dans le premier sous-modèle, la queue reliant la cabine au rotor anticouple sera représentée par un ressort, et les pâles seront modélisées par une masse ponctuelle. Ce modèle simplifié permettra d'estimer la raideur équivalente de la queue et, par conséquent, la pulsation naturelle du système. Pour le deuxième sous-modèle, nous pouvons affiner l'analyse en ajoutant un amortisseur visqueux au système et en étudiant son comportement vibratoire.

Enfin, dans le deuxième modèle, la cabine sera considérée cette fois comme une masse indépendante. Dans le premier sous-modèle, les deux masses seront reliées par un ressort, ce qui nous permettra d'estimer les pulsations naturelles du système. Pour le deuxième sous-modèle, nous ajouterons un amortisseur entre les deux masses afin de rendre le système plus proche de la réalité.

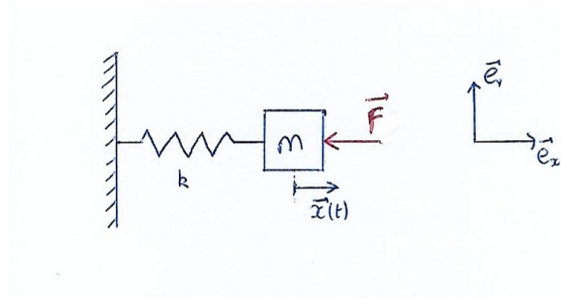
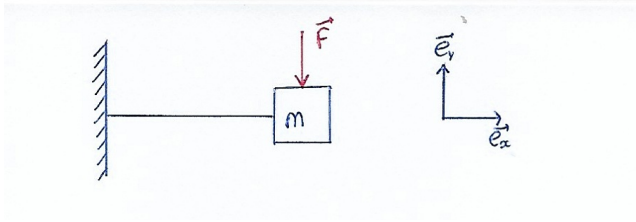
5 Modèle d'étude vibratoire théorique

5.1 Système avec une masse

5.1.1 Masse-ressort

Détermination de la pulsation naturelle

Dans ce 1er modèle, il sera question d'utiliser la méthode de Rayleigh pour déterminer la pulsation naturelle et la raideur équivalente de notre système. Nous examinerons les cas de flexion ainsi que de traction-compression. De plus, pour éviter de s'alourdir de calcul pour les 2 sollicitations, nous expliciterons seulement les calculs concernant la flexion.



Méthode de Rayleigh

D'après l'hypothèse de Rayleigh :

$$\frac{V_{max}}{T_{max}} = 1$$

Exprimons les 2 quantités d'énergie :

Dans cette étude, on considèrera la masse des pâles comme ponctuelle et on modélisera la queue par une masse répartie linéairement :

D'où :

$$T = \frac{1}{2} m_{helice} u^2(L, t) + \frac{1}{2} \int_m u^2(x, t) dm$$

Sachant que $dm = \rho S dx$:

$$T = \frac{1}{2} m_{helice} u^2(L, t) + \frac{1}{2} \rho_{PRFC} S \int_0^l u^2(x, t) dx$$

En passant au max, on obtient :

$$T_{max} = \frac{1}{2} m_{helice} \omega^2 X^2(L, t) + \frac{1}{2} \rho_{PRFC} S \omega^2 \int_0^l X^2(x, t) dx$$

Pour l'énergie potentielle, on a :

$$V = \frac{1}{2} \int_\omega \epsilon \sigma d\omega$$

Sachant que $\sigma = \epsilon E$ par la loi de Hooke :

$$V = \frac{1}{2} E \int_S \int_0^l \epsilon^2 dS dx$$

En flexion, on a la relation : $\epsilon = -y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

En traction-compression : $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

D'où :

$$V_{flexion} = \frac{1}{2} E \int_S y^2 dS \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

En passant au max et sachant que $\int_S y^2 dS = I_{gz}$, on obtient finalement :

$$V_{flexion,max} = \frac{1}{2} E I_{gz} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Pour continuer l'étude, il faut déterminer la forme du polynôme X. L'encastrement de la poutre implique les conditions aux limites suivantes :

- $u(0,t)=X(0,t)=0$ pour tout t
- $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$

Pour vérifier ces 2 conditions simultanément, on choisit X de la forme suivante : $X(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{L} + a_2 \left(\frac{x}{L} \right)^2$ Les 2 conditions aux limites impliquent :

- $a_0 = 0$
- $a_1 = 0$

Et on a finalement : $X(x) = X(L) \left(\frac{x}{L} \right)^2$

Le calcul de T_{max} et V_{max} connaissant l'expression de X donne :

$$V_{flexion,max} = \frac{1}{2} 4 E I_{gz} X(L)^2 L$$

$$T_{max} = \frac{1}{2} m_{helice} \omega^2 X^2(L, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{5} \rho_{PRFC} S \omega^2 X^2(L, t)$$

On peut en déduire les pulsations naturelles du système :

$$\omega_{flexion} = \sqrt{\frac{4EI}{L^3 * \left(\frac{\rho S L}{5} + m \right)}} = 246.7 rad/s \text{ et } \omega_{tract-compr} = \sqrt{\frac{ES}{mL + \frac{\rho S L^2}{3}}} = 1043 rad/s$$

Connaissant les pulsations naturelles et les masses équivalentes pour les 2 sollicitations, nous pouvons déduire les raideurs équivalentes de la queue :

$$k_{flexion} = \omega_{flexion}^2 * m_{flexion} = 7525171 N/m \text{ et } k_{TC} = \omega_{flexion}^2 * m_{TC} = 121839088 N/m$$

Nous avons maintenant déterminé la pulsation naturelle du système pour deux sollicitations distinctes. Dans la suite de l'étude, nous analyserons les effets de ces deux sollicitations en tenant compte des pulsations et des raideurs associées. La méthode de Rayleigh nous a permis de convertir notre système continu en un système masse-ressort à un degré de liberté.

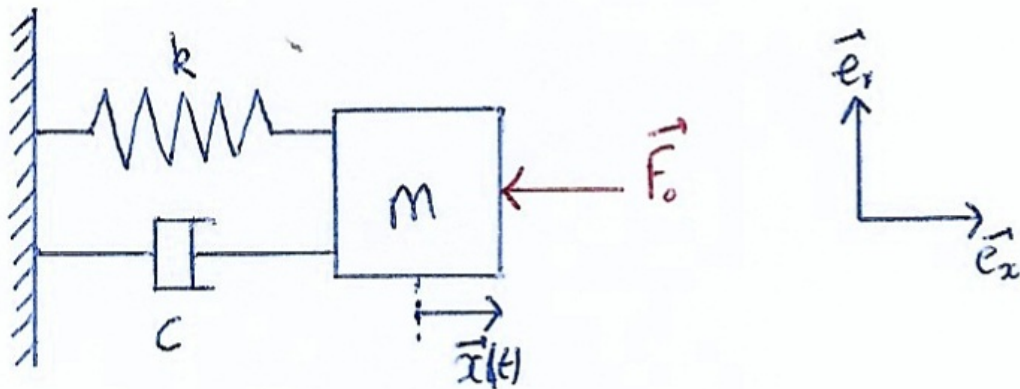
Cependant, ce modèle présente des limitations par rapport à la réalité. En effet, 2 problèmes se posent :

Premièrement, la queue est modélisée comme un ressort avec une masse linéique, ce qui complique les calculs des efforts correspondants. Pour simplifier, nous supposons que l'intégralité de la masse de la queue est concentrée en un point, situé au même endroit que l'hélice.

Secondement, il ne tient pas compte des effets visqueux de l'air qui ralentissent l'hélicoptère, ces effets étant particulièrement significatifs à haute vitesse. Afin de mieux représenter ces phénomènes et d'ajouter un mécanisme de dissipation d'énergie, nous allons intégrer un amortisseur visqueux pour modéliser les frottements visqueux entre l'air et le fuselage de l'hélicoptère.

5.1.2 masse-ressort-amortisseur

Voici le schéma du modèle étudié :



Dans ce contexte, l'amortisseur agit comme un dissipateur d'énergie entre l'air et le fuselage. Il sera représenté par une force opposée à la vitesse, comme illustré dans le schéma ci-dessus.

Etudions la réponse vibratoire de ce système

Nous faisons le choix d'étudier le modèle sous-amorti, autrement dit $\xi < 1$, et soumis à une excitation amortie F_0 . L'équation du mouvement en oscillation forcée est :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + ku = F_0 \sin(\omega t)$$

avec $F_0 \sin(\omega t)$ l'excitation harmonique. Cette excitation décrit la présence du balourd et des conséquences des vibrations entraînées. Nous pouvons tracer la représentation de F_0 en fonction de ω . La réponse temporelle prend la forme suivante :

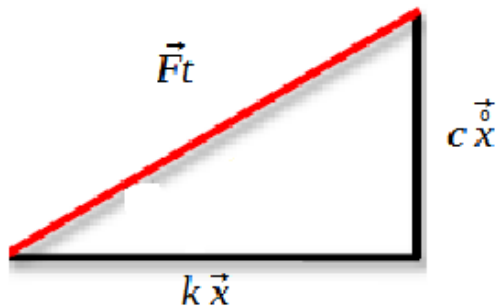
$$x(t) = U \sin(\omega t - \theta)$$

où $U = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_0})^2}}$ et $\theta = \arctan(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2})$

Pour la suite, on posera $r = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Le but de ce modèle est d'estimer la force transmise des vibrations créées par le balourd sur la cabine. Prenons une approche géométrique pour déterminer la force transmise.

On peut donc en déduire :



Si nous considérons, le déplacement, la vitesse et l'accélération comme des vecteurs, ceux-ci sont successivement déphasés de 90° l'un par rapport à l'autre.

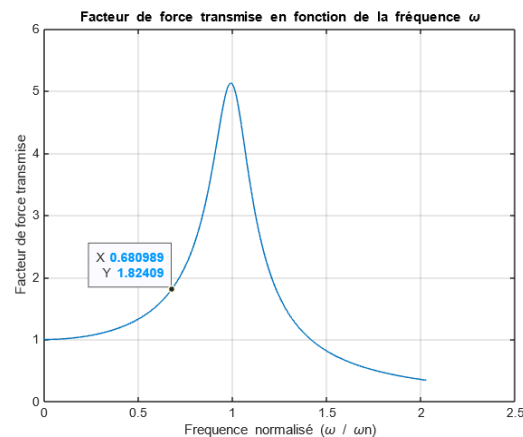
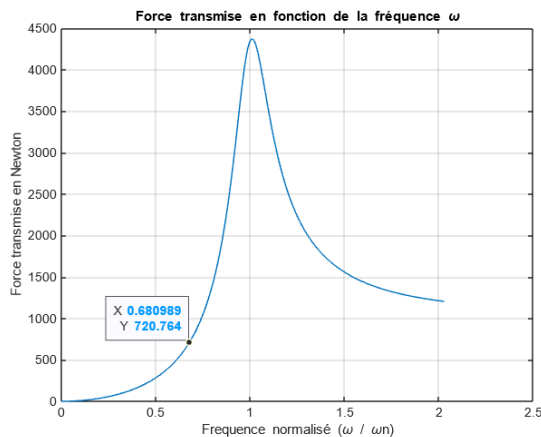
Par Pythagore, on peut en déduire l'expression de la force transmise : $Ft^2 = (kx)^2 + (c\dot{x})^2$ et en remplaçant l'expression de x puis en simplifiant cette dernière. On obtient finalement la force transmise en fonction des paramètres du système :

$$\frac{Ft^2}{F_0^2} = \frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 + r^2)^2 + (2\xi r)^2} \quad (1)$$

Connaissant l'expression de la force transmise, nous pouvons la tracer en fonction de la pulsation.

5.1.3 Tracé des courbes :

Cas de la flexion :

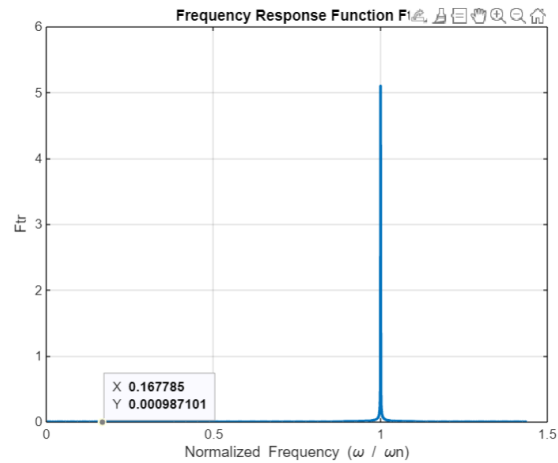
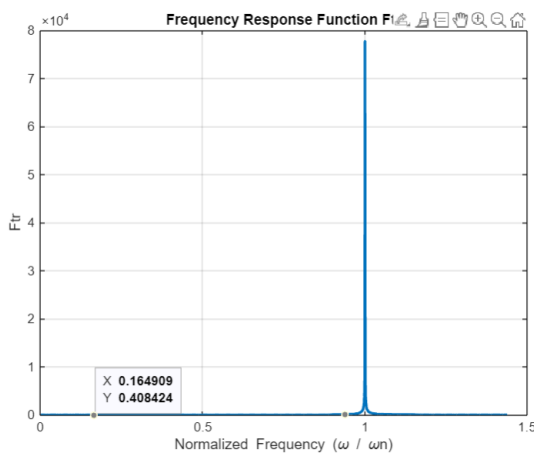


La première courbe illustre la force transmise à la cabine en Newton, résultant des vibrations générées par le déséquilibre. La seconde courbe fournit des informations sur le rapport entre cette force transmise et l'excitation harmonique F_0 . Nous avons opté pour représenter la force transmise en fonction de r (pulsation normalisée) afin d'obtenir une courbe centrée sur la pulsation de croisière.

Les données fournies par les courbes indiquent que, à la pulsation de croisière de l'hélicoptère, représentée par le point bleu sur la courbe, la force exercée sur la cabine s'élève à environ 720 Newtons. Par conséquent, il en découle que l'excitation harmonique est transmise à la cabine à un coefficient d'environ 1.82 fois.

De plus, une observation révèle un pic au niveau de la pulsation naturelle du système. Ce pic, qui représente la résonance, revête une importance cruciale pour la sécurité des passagers et de l'équipement, car il est impératif de ne jamais atteindre cette pulsation naturelle. En effet, à ce pic, la force transmise atteint approximativement 4500 Newtons, soit cinq fois la force transmise normalement. Pour illustrer, cela équivaut à une force de 450 kilogrammes qui agirait en flexion à l'arrière de l'hélicoptère.

Cas de la traction-compression



Les courbes obtenues pour une sollicitation en traction-compression présentent la même configuration que celles observées pour la flexion (pic de résonance). Il est important de noter que, puisque $5\omega_{flexion} \approx \omega_{trac_ompr}$, la force transmise lors d'une traction-compression est augmenté d'un facteur 5 par rapport à celle observée lors de la flexion. Cela s'explique par le maintien de la pulsation de croisière pour les 2 sollicitations, tandis que le pic de résonance a migré de $5\omega_{flexion}$ vers les hautes pulsations, ce qui diminue la force transmise proportionnellement. De surcroît, les valeurs de force transmises lors de la résonance sont considérablement plus élevées que pour la flexion. Cette observation semble cohérente, car il est plus aisé de fléchir la queue de l'hélicoptère que de la comprimer.

Grâce à ce modèle, nous avons pu analyser la force transmise à la cabine due aux vibrations engendrées par le déséquilibre. Cependant, un problème de réalisme persiste : la cabine n'est pas immobile et donc non déformable. Notre hypothèse de la considérer comme le bâti de notre système est peu réaliste. Dans le prochain modèle, la cabine ne sera plus traitée comme un solide indéformable, mais plutôt comme une masse distincte capable de se déplacer dans l'espace et dans le temps. L'ajout de cette seconde masse nous transpose vers un système à 2 masse donc 2 degrés de liberté.

5.2 Modèle avec deux masse

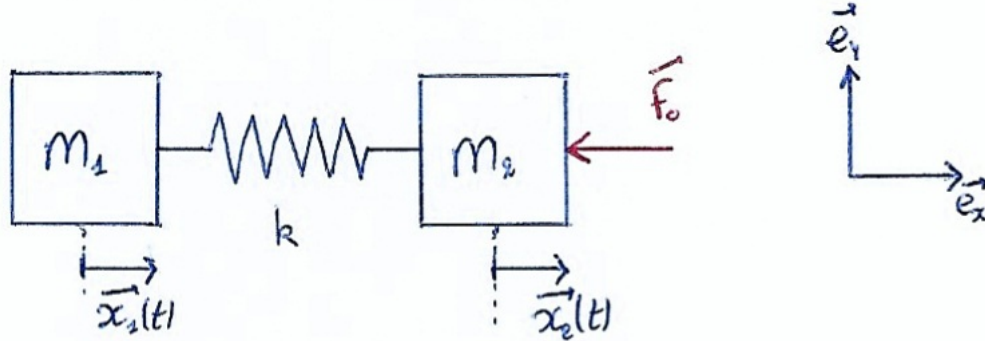
Dans cette section, nous allons traiter la cabine comme un solide déformable doté d'une masse. Cette masse représentera les mouvements possibles et les déformations subies par la cabine.

Pour cette analyse, nous examinerons deux scénarios :

Tout d'abord, nous étudierons un système masse-ressort-masse pour déterminer les pulsations naturelles du système.

Ensuite, nous analyserons le même modèle en y ajoutant un amortisseur.

5.2.1 masse-ressort-masse



D'après le schéma ci-dessus, il s'agit du modèle le plus simple à deux degrés de liberté. Ce modèle fournit une première méthode d'étude pour déterminer les pulsations naturelles du système. En effet, dans un système à plusieurs degrés de liberté, le nombre de pulsations naturelles correspond au nombre de degrés de liberté.

Lors de cette étude, on considèrera les déplacements de chaque masse comme représentés sur le schéma ci-dessus.

La première étape de cette résolution consiste à formuler les équations du système. Pour cela, nous devons d'abord établir les équations du mouvement. Pour les déterminer, nous avons utilisé la méthode de Lagrange. Toutefois, avant de pouvoir appliquer cette méthode, il est nécessaire de calculer les énergies cinétiques et potentielles du système.

Sachant que l'on considère 2 masses ponctuelles, l'énergie cinétique du système donne :

$$\text{Energie cinétique: } \mathcal{T} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

De plus, la seule énergie potentielle étant celle associée au ressort, on obtient :

$$\text{Energie potentielle: } \mathcal{V} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

Ecrivons les équations de Lagrange pour chaque déplacement :

$$\text{Equations de Lagrange: } \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_2} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} - F_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\text{Nous avons donc les équations du mouvement suivant: } \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = -F_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Et enfin, nous pouvons avoir le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

A présent, cherchons les valeurs propres de la matrice $\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}$ qui représentent les pulsations naturelles de notre modèle avec \mathbf{K} la matrice de raideur et \mathbf{M} la matrice de masse du système matriciel.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \det \begin{pmatrix} k - m_1 \omega^2 & -k \\ -k & k - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui revient à :

$$\omega^2(\omega^2 m_1 m_2 - k(m_1 + m_2)) = 0$$

Les solutions de l'équation précédente sont :

$$\omega_1 = 0 \text{ rad/s et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 272.5 \text{ rad/s}$$

Les pulsations naturelles du modèle sont donc $\omega_1 = 0$ rad/s et $\omega_2 = 272.5$ rad/s.

Nous remarquons la présence d'une pulsation naturelle de 0 rad/s. Cette dernière indique que le système a un mouvement de corps rigide. Autrement dit, les deux masses se déplacent ensemble sans relative déformation, comme s'il s'agissait d'un seul bloc rigide. Dans ce type de mouvement, les forces internes dues aux ressorts et amortisseurs n'ont pas d'effet sur la dynamique du système, car les deux masses restent à une distance constante l'une de l'autre.

Maintenant que nous connaissons les valeurs propres de la matrice. Cherchons les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Ces vecteurs sont nécessairement non-nuls et vérifient :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \vec{U}_i = 0 \text{ avec } \vec{U}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs propres correspondent aux vecteurs modaux qui nous seront utiles dans la suite de notre étude. Nous obtenons donc le système suivant:

$$\begin{pmatrix} k - \omega_i^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega_i^2 m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce système, nous sommes forcés de choisir arbitrairement l'une des coordonnées des vecteurs propres. Pour la première pulsation naturelle, nous obtenons:

$$kX_1 - kY_1 = 0 \quad \text{On choisit de prendre } x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1, \text{ et par suite : } \vec{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même, pour la deuxième pulsation naturelle, nous trouvons:

$$\begin{cases} (k - \omega_2^2 m_1)X_2 + kY_2 = 0 \\ kX_2 + (k - \omega_2^2 m_2)Y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 = \frac{k - \omega_2^2 m_1}{k} \\ y_2 = \frac{k}{k - \omega_2^2 m_2} \end{cases}$$

Donc en posant $X_2 = 1$ nous obtenons $Y_2 = -9.4$ avec la première équation et $Y_2 = -9.27$ avec la deuxième. Cette différence vient sûrement des approximations, mais nous prendrons donc $Y_2 = -9.3$ pour la suite.

$$\text{D'où } \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -9.3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en normalisant ces vecteurs, nous trouvons la matrice modale décrivant notre système :

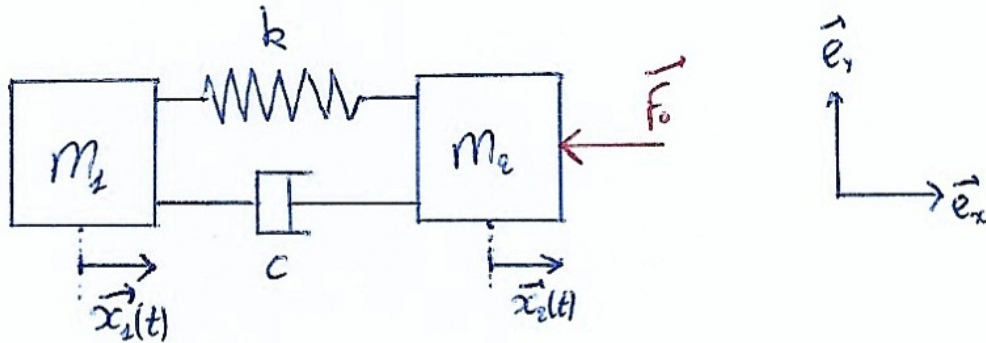
$$\bar{\mathbf{U}} \approx \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0.1 \\ 1/\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Ce système nous a permis de calculer les deux pulsations naturelles et d'obtenir la matrice modale de notre modèle.

Grâce à la matrice modale, nous pouvons décomposer le mouvement complexe en modes de vibrations indépendants, ce qui est crucial pour analyser et contrôler les réponses du système. Ainsi, cette étude nous aide à comprendre les effets des mouvements de corps rigide et des vibrations indépendantes.

Ce modèle, bien qu'il soit plus réaliste que les précédents, ne décrit pas parfaitement la réalité. En effet, comme le premier sous-modèle, il ne prend pas en compte les effets visqueux de l'air sur le fuselage de l'hélicoptère. Pour modéliser les effets dissipatifs de l'air, nous avons besoin d'un composant supplémentaire. C'est pourquoi le prochain modèle intègre un amortisseur visqueux, similaire à celui utilisé dans le modèle précédent. Dans ce nouveau modèle, nous pourrions réutiliser les pulsations naturelles déterminées initialement, car l'amortisseur n'influence pas ces paramètres.

5.2.2 Masse-ressort-amortisseur-masse



Dans cette section, nous allons introduire un amortisseur dans notre système afin de mieux représenter la réalité. Pour déterminer comment l'incorporer dans notre système matriciel, nous partirons des énergies. L'amortisseur joue un rôle crucial en dissipant l'énergie et en influençant les vibrations du système. Il introduit une fonction de dissipation D, définie par le terme $c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$. Cette dissipation d'énergie modifie les équations de mouvement du système.

Les équations de Lagrange deviennent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_1} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_2} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}_2} - F_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Ces équations prennent en compte l'effet de l'amortissement sur la dynamique du système.

Nous obtenons donc le système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +c & -c \\ -c & +c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +k & -k \\ -k & +k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Dans ce système, nous pouvons identifier la matrice d'amortissement à : $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$

Notons que cette matrice à la même forme que la matrice de raideur. Nous pouvons la décrire proportionnelle à \mathbf{K} , de tel que $\mathbf{C} = \beta \mathbf{K}$.

Cherchons la valeur de β . Nous avons $\xi_i = \frac{\beta \omega_i}{2}$. Et on fixe que le plus grand ξ_i soit égal à 0.1 car le système est en régime sous amorti. En sachant que $\omega_1 = 0$ on en déduit $\xi_1 = 0$. Donc :

$$\xi_2 = \frac{\beta \omega_2}{2} = 0.1 \implies \beta = \frac{2\xi_2}{\omega_2} \implies \beta = \frac{2 * 0.1}{260} = 7.7 * 10^{-4}$$

Le système matriciel initial devient : $\mathbf{M}\ddot{\vec{X}} + \beta \mathbf{K}\dot{\vec{X}} + \mathbf{K}\vec{X} = \vec{F}$.

Déduisons les pulsations naturelles amorties : $\omega_{d1} = 0$ $\omega_{d2} = \omega_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} = 271.1 \text{ rad/s} \approx \omega_2$

Pour continuer l'étude modale, il est nécessaire de procéder au changement de variable suivant $\vec{X} = \bar{\mathbf{U}} \vec{\eta}$ avec $\bar{\mathbf{U}}$ un des vecteurs propres trouvés précédemment.

L'équation du mouvement initiale vérifiée par x devient dépendante de η :

$$\mathbf{M} \bar{\mathbf{U}} \ddot{\vec{\eta}} + \beta \mathbf{K} \bar{\mathbf{U}} \dot{\vec{\eta}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{U}} \vec{\eta} = \vec{F}$$

En multipliant par $\bar{\mathbf{U}}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0.1 & -1 \end{pmatrix}$, nous obtenons :

$$Id \ddot{\vec{\eta}} + \beta \bar{\mathbf{\Omega}} \dot{\vec{\eta}} + \bar{\mathbf{\Omega}} \vec{\eta} = \bar{\mathbf{U}}^T \vec{F} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{\Omega}} = \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{U}} \quad \text{et on pose} \quad \bar{\mathbf{U}}^T \vec{F} = \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{F_0 \sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \\ -F_0 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Cette équation matricielle est vérifiée par chaque η_i .

D'où :

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = \ddot{\eta}_1 = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{\sqrt{2}} \\ \ddot{\eta}_2 + 2\xi_2 \omega_2 \dot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = -F_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Nous cherchons les η_i solutions de ce système.

Résolution:

Supposons que les solutions sont de la forme de l'excitation :

$$\eta_i = A \sin(\omega t - \theta) \quad \dot{\eta}_i = \omega A \cos(\omega t - \theta) \quad \ddot{\eta}_i = -\omega^2 A \sin(\omega t - \theta)$$

- Pour η_1 , nous obtenons : $\ddot{\eta}_1 = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{\sqrt{2}} = -\omega^2 A \sin(\omega t - \theta)$

$$\implies -\omega^2 A \cos(\theta) \sin(\omega t) + \omega^2 A \sin(\theta) \cos(\omega t) = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{\sqrt{2}}$$

$$\implies \text{Par identification: } \begin{cases} -\omega^2 A \cos(\theta) = \frac{F_0}{\sqrt{2}} \\ \omega^2 A \sin(\theta) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{F_0}{\sqrt{2}\omega^2} \\ \theta = 0 \end{cases}$$

Finalement: $\eta_1 = A \sin(\omega t) = A' F_0 \sin(\omega t)$ avec $A' = \frac{A}{F_0} = -\frac{1}{\sqrt{2}\omega^2}$

- Pour η_2 , remplaçons les termes dans l'équation et nous obtenons:

$$\ddot{\eta}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\eta}_2 + \omega_2^2\eta_2 = -F_0\sin(\omega t)$$

$$-B\omega^2\sin(\omega t - \theta) + 2\xi_2\omega_2B\omega\cos(\omega t - \theta) + \omega_2^2B\sin(\omega t - \theta) = F_0\sin(\omega t)$$

En développant cette expression par les formules trigonométriques et en regroupant chaque terme en facteur de $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$, nous obtenons:

$$[B\omega^2\cos(\theta) - 2\xi_2\omega_2\omega B\sin(\theta) - \omega_2^2B\cos(\theta)]\sin(\omega t) + [-B\omega^2\sin(\theta) + 2\xi_2\omega_2\omega B\cos(\theta) + \omega_2^2B\sin(\theta)]\cos(\omega t) = -F_0\sin(\omega t)$$

D'où par identification :

$$\begin{cases} B((\omega^2 - \omega_2^2)\cos(\theta) - 2\xi_2\omega_2\omega\sin(\theta)) = -F_0 \\ B((\omega_2^2 - \omega^2)\sin(\theta) + 2\xi_2\omega_2\omega\cos(\theta)) = 0 \end{cases}$$

Finalement, on trouve

$$\eta_2 = B\sin(\omega t - \theta) \text{ avec } \theta = \arctan\left(\frac{2\xi_2\omega_2\omega}{\omega_2^2 - \omega^2}\right) \text{ et } B = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_2^2)^2 + (2\xi_2\omega_2\omega)^2}}$$

Maintenant que nous avons le vecteur associé à $\vec{\eta}$, nous le multiplions à $\bar{\mathbf{U}}$ pour obtenir le déplacement \vec{X} . D'où :

$$\vec{X} = \bar{\mathbf{U}}\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0.1 \\ 1/\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 + 0.1\eta_2 \\ x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta_1 - \eta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\sin(\omega t) + 0.1B\sin(\omega t - \theta) \\ x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\sin(\omega t) - B\sin(\omega t - \theta) \end{cases}$$

Cherchons R_1 et R_2 les amplitudes respectives de x_1 et x_2 :

- Pour R_1 : $x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\sin(\omega t) + 0.1B\sin(\omega t - \theta)$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}A\sin(\omega t) + 0.1B(\sin(\omega t)\cos(\theta) - \cos(\omega t)\sin(\theta))$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}A + 0.1B\cos(\theta)\right)\sin(\omega t) - 0.1B\sin(\theta)\cos(\omega t)$$

On cherche R_1 tel que $x_1(t) = R_1\sin(\omega t + \phi)$:

$$R_1^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}A + 0.1B\cos(\theta)\right]^2 + [0.1B\sin(\theta)]^2$$

On peut tout factoriser par F_0 tel que :

$$R_1 = F_0\sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A' + 0.1B'\cos(\theta)\right]^2 + (0.1B'\sin(\theta))^2}$$

et par suite, on pose R_1' tel que :

$$R'_1 = \frac{R_1}{F_0} = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A' + 0.1B' \cos(\theta)\right]^2 + (0.1B' \sin(\theta))^2}$$

- Pour trouver R_2 , nous procédons de la même manière et nous trouvons:

$$\Rightarrow R_2 = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A - B \cos(\theta)\right]^2 + (-B \sin(\theta))^2}$$

On peut tout factoriser par F_0 tel que

$$R_2 = F_0 \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A' - B' \cos(\theta)\right]^2 + (-B' \sin(\theta))^2}$$

et par suite, on pose :

$$R'_2 = \frac{R_2}{F_0} = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}A' - B' \cos(\theta)\right]^2 + (-B' \sin(\theta))^2}$$

Ce qui conclut la partie résolution.

Connaissant les amplitudes des déplacements, nous pouvons maintenant exprimer la force transmise.

En raisonnant de manière géométrique comme fait précédemment pour le système masse-ressort-amortisseur, on a :

$$\vec{F}_r = k(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) + c(\dot{\vec{x}}_2 - \dot{\vec{x}}_1)$$

$$\Rightarrow \frac{F_r^2}{F_0^2} = (R'_2 - R'_1)^2(k^2 + \omega^2 c^2)$$

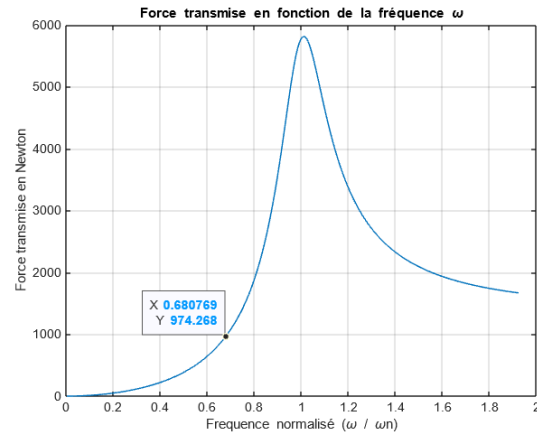
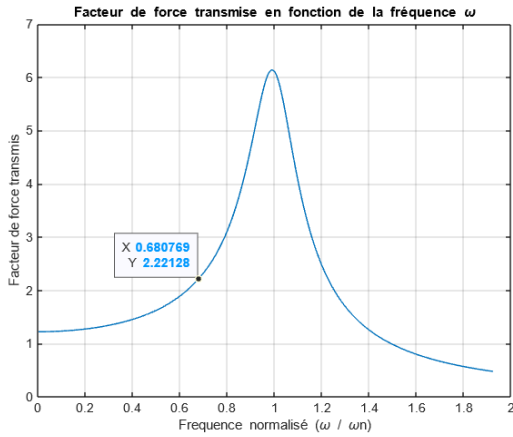
Ainsi la transmissibilité de la force est la suivante :

$$\frac{F_r}{F_0} = (R'_2 - R'_1) \sqrt{(k^2 + \omega^2 c^2)}$$

À partir de cette formule, nous avons tracé deux courbes. La première montre le facteur de transmissibilité de la force en fonction de la pulsation, tandis que la seconde représente la force transmise à la cabine en newtons, obtenue en multipliant la transmissibilité par la force F_0 .

5.2.3 Tracé des courbes :

Cas de la flexion :

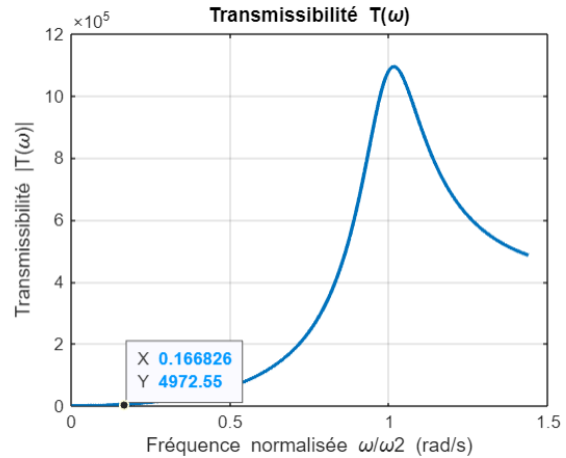
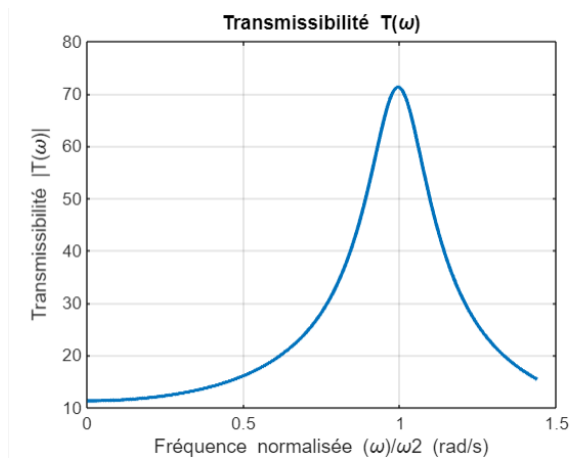


Le point placé sur chacune des courbes représente notre ω de 167 rad/s fixé dans les hypothèses. Nous avons opté pour représenter la force transmise en fonction de r (pulsation normalisée) afin d'obtenir une courbe centrée sur la pulsation de croisière.

Nous pouvons constater que, dans la fenêtre de fonctionnement du rotor anticouple, le système n'atteint pas sa pulsation naturelle. Cela implique que la transmissibilité ne peut jamais être inférieure à 1, mais présente un avantage majeur en ne pouvant pas entrer en résonance. Cette caractéristique est cruciale pour un hélicoptère, car elle réduit considérablement le risque de vibrations excessives et de dommages structurels.

En termes de force transmise, nous observons que les valeurs restent inférieures à 1000 N, ce qui semble raisonnable. Après quelques recherches, il apparaît que la plupart des rotors mal équilibrés peuvent générer des forces de plusieurs centaines de Newton sur la cabine. Par conséquent, notre système, bien que n'atteignant pas une transmissibilité inférieure à 1, offre une sécurité accrue contre les risques de résonance tout en maintenant des forces transmissibles dans des limites acceptables pour le confort et la sécurité des passagers.

Cas de la traction-compression :



Les courbes obtenues lors d'une sollicitation en traction-compression présentent, une fois de plus, des similarités marquées avec celles observées pour la flexion simple. Cette correspondance persiste avec le facteur 5 provenant de la pulsation naturelle. De manière analogue à ce que l'on observe en flexion, la résonance n'est pas atteinte dans ce scénario, ce qui constitue incontestablement un point très positif. De plus, nous pouvons apporter les mêmes conclusions sur les ordres de grandeurs concernant notamment la force transmise qui est de l'ordre de plusieurs milliers de Newton. Cela s'explique par le fait que compresser la queue de l'hélicoptère demande bien plus de force que de la faire fléchir.

L'absence de résonance assure en effet la stabilité et la sécurité du système, évitant ainsi les risques de défaillance ou de dommages potentiels qui pourraient survenir dans des conditions de résonance.

Ce modèle nous a permis d'augmenter la précision de nos résultats en considérant la cabine comme une masse distincte, plutôt qu'un simple bâti. Grâce à cette approche, nous avons obtenu une nouvelle force transmise qui est assez proche de celle obtenue dans le modèle initial, ce qui nous conforte dans la cohérence et la logique de nos résultats.

Cependant, il est important de noter que certaines améliorations restent possibles pour décrire la réalité le plus fidèlement possible.

6 Piste d'amélioration

Pour approfondir davantage notre analyse, nous aurions pu, dans notre dernier modèle, prendre en compte la masse du ressort. En effet, ce ressort symbolise la queue de l'hélicoptère et, dans notre modèle actuel, nous avons décidé d'intégrer la masse de la queue dans celle de la masse 2. Cette simplification, bien qu'utile, pourrait être affinée pour améliorer la fidélité de notre modèle.

De plus, un autre aspect crucial pour augmenter la précision de notre étude réside dans l'obtention de valeurs plus exactes. L'industrie aéronautique est connue pour son caractère hautement confidentiel, rendant l'accès à des données précises extrêmement difficile. Une amélioration de la précision de nos chiffres aurait un impact significatif sur la fiabilité de nos résultats, et sur l'exactitude des conclusions que nous pouvons en tirer. En résumé, l'intégration de ces éléments et l'accès à des informations plus détaillées permettraient de perfectionner notre modèle et d'obtenir des résultats encore plus proches de la réalité.

7 Conclusion

Finalement, ce projet nous a permis d'explorer en détail l'effet d'un déséquilibre de masse sur l'une des pales d'un rotor anticouple d'hélicoptère. Plus précisément, nous avons pu observer que même un déséquilibre de masse de seulement 20 grammes, ce qui peut sembler insignifiant, produit des effets significatifs. Ces effets se manifestent par des forces substantielles transmises à la cabine et aux passagers, que ce soit en traction/compression ou en flexion. Cette expérience nous a clairement démontré l'importance cruciale de la précision dans la fabrication des composants aéronautiques. Grâce à cette étude, nous comprenons désormais à quel point il est essentiel de maintenir une rigueur extrême dans les processus de fabrication et d'assemblage pour assurer la sécurité et le confort des passagers, ainsi que la performance optimale de l'appareil.

Pour conclure sur les bénéfices de ce projet, nous pouvons affirmer qu'il nous a énormément enrichis dans le domaine de la mécanique vibratoire. En premier lieu, il nous a donné l'opportunité de mettre en pratique des concepts théoriques abordés en cours, mais que nous n'avions pas encore exploités dans des exercices. Cela a considérablement renforcé notre compréhension théorique. Ensuite, ce projet nous a offert l'opportunité de travailler sur un sujet qui pourrait ressembler à notre futur métier, ce qui a été particulièrement enrichissant d'un point de vue personnel. Enfin, nous avons eu la chance de réaliser un travail complet, du début à la fin, en prenant nos propres décisions et en obtenant des résultats concrets. Cette autonomie et la réalisation de ce projet de manière indépendante nous ont procuré une grande satisfaction.

Il est important de noter que notre étude repose sur des calculs théoriques et que nous avons peu d'expérience pratique dans ce domaine, notamment en ce qui concerne les ordres de grandeur. En effet, les valeurs obtenues nous semblent cohérentes en tant qu'étudiants ingénieurs, mais nous n'avons pas pu obtenir de données expérimentales pour valider nos résultats.