Подробнее про дополнительный код отрицательного числа

- Образуется из решения уравнения x + a = 0, где x – дополнительный код числа -a, a – положительное число
- Если a = 5 (101b), то x = 0 – 5:

		. . . .	*	*	*	*
		. . . .	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
	–						
		. . . .	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*
Дополнительный код числа -5 =>		. . . .	*1*	*1*	*0*	*1*	*1*

Преобразование отрицательного числа в дополнительный код

- Ограниченная разрядная сетка из N двоичных разрядов содержит 2^N доступных кодов
- Все коды со старшим разрядом = 1 отводятся под отрицательные числа
- Код 0...000 отводится под 0
- Оставшиеся коды отводятся под положительные числа

Преобразование отрицательного числа в дополнительный код

- Формула для получения дополнительного кода произвольного отрицательного числа x: $x_{comp} = \sim|x| + 1$
- Берется код модуля числа
- Инверсией разрядов код переводится в область разрядов со старшим единичным разрядом
- Из-за несимметричности распределения положительных и отрицательных чисел по кодам (из-за наличия нуля), при инверсии получится код (и число) на 1 меньше искомого, поэтому к результату прибавляется 1

Беззнаковое сложение

- Беззнаковое n-битное число может принимать значения от 0 до $2^n – 1$
- При сложении n-битных чисел переполнение произойдет, если результат сложения превышает число $2^n – 1$
- Переполнение можно обнаружить, если следить за переносом бита из наиболее значимого разряда двоичного числа
- По умолчанию в SV переменные являются беззнаковыми

```
logic [3:0] a, b, c;
logic [4:0] c_ext;
assign a = 4'b1000;   // 8
assign b = 4'b1001;   // 9
assign c = a + b;     // 4'b0001
assign c_ext = a + b; // 5'b10001
```

Знаковое сложение

- В случае знаковых чисел – старший разряд означает знак числа
- n-битное знаковое число может принимать значения от -2^{n-1} до $2^{n-1}-1$
- При сложении n-битных чисел переполнение произойдет, если результат больше чем $2^{n-1} - 1$ или меньше чем -2^{n-1}
- Сложение положительного и отрицательного чисел никогда не приводит к переполнению
- Признаком переполнения является ситуация, когда после сложения двух чисел с одинаковым знаком, знаковый бит суммы не совпадает со знаковыми битами слагаемых

```
logic signed [3:0] a, b, c;
logic [4:0] c_ext;
assign a = 4'b1000;   // -8
assign b = 4'b1001;   // -7
assign c = a + b;     // 4'b0001
assign c_ext = a + b; // 5'b10001 // -15
```

- Разрядность операндов расширяется или усекается в зависимости от разрядности результата
- При увеличении разрядности операндов старшие разряды приобретают значения, зависящее от их интерпретации (для знаковых происходит расширение знакового разряда, для беззнаковых - дополнение нулями)
- Производится “обычная” операция сложения (т.е. на саму операцию не влияет знаковость/беззнаковость операндов)

```
logic signed [3:0] a, b;
logic [4:0] c;
assign a = 4'b0111; // 7
assign b = 4'b1001; // -7
assign c = a + b;   // 5'b00000
```

```
logic [3:0] a, b;
logic [4:0] c;
logic [4:0] c_s;
assign a = 4'b0111;                         // 7
assign b = 4'b1001;                         // -7
assign c = a + b;                           // 5'b10000
assign c_s = $signed(a) + $signed(b); // 5'b00000
```

Сложение

- Для корректного представления результата сложения, разрядность результата должна быть на один бит больше операнда с наибольшей разрядностью
- Операнды для арифметических операций рекомендуется объявлять с ключевыми словами signed или unsigned

Умножение чисел

- Умножение двоичных чисел аналогично десятичному умножению, но производится с единицами и нулями
- В обоих случаях формируются частичные произведения путем умножения отдельных разрядов 1го множителя на весь 2й множитель
- Результат умножения получается путем сложения сдвинутых частичных произведений

Умножение чисел

- При умножении чисел разрядностей N_1 и N_2 результат в общем случае имеет разрядность $N_1 + N_2$
- При умножении двух N-разрядных чисел получается 2N-разрядный результат
- Умножение одного разряда двоичных чисел равносильно операции И
- N-разрядным операндам соответствуют N частичных произведений и N-1 каскадов сумматоров

Беззнаковое умножение

$X = x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 \qquad Y = y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0$

$$M = X \times Y = m_{2n-1}, m_{2n-2}, \ldots, m_0 = \sum_{i=0}^{N-1} P_i \times 2^i = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) \times y_i \times 2^i$$

$$P_i = p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots, p_0 = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) \times y_i = x_{n-1} y_i, x_{n-2} y_i, \ldots, x_0 y_i$$

2^i – вес разряда y_i

P_i – частичное произведение

$p_j = x_j y_i = x_j \,\&\, y_i$ – элементарные произведения

j – номер разряда X

Беззнаковое умножение

					x_{n-1}	x_{n-2}	…	x_2	x_1	x_0	X
				×	y_{n-1}	y_{n-2}	…	y_2	y_1	y_0	Y
				+	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-2}y_0$	…	x_2y_0	x_1y_0	$x_0\,y_0$	$P_0\,2^0$
			+	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-2}y_1$	…	x_2y_1	x_1y_1	x_0y_1		$P_1\,2^1$
			$x_{n-1}y_2$	$x_{n-2}y_2$	…	x_2y_2	x_1y_2	x_0y_2			$P_2\,2^2$
	+	…	…	…	…	…	…				…
	$x_{n-1}y_{n-1}$	$x_{n-2}y_{n-1}$		x_2y_{n-1}	x_1y_{n-1}	x_0y_{n-1}					$P_{n-1}\,2^{n-1}$
m_{2n-1}	m_{2n-2}	m_{2n-3}	…		m_n	m_{n-1}	…	m_2	m_1	m_0	M

Беззнаковый 8-битный умножитель

$$M = P_7 \times 2^7 + P_6 \times 2^6 + P_5 \times 2^5 + P_4 \times 2^4 + P_3 \times 2^3 + P_2 \times 2^2 + P_1 \times 2^1 + P_0 \times 2^0 =$$

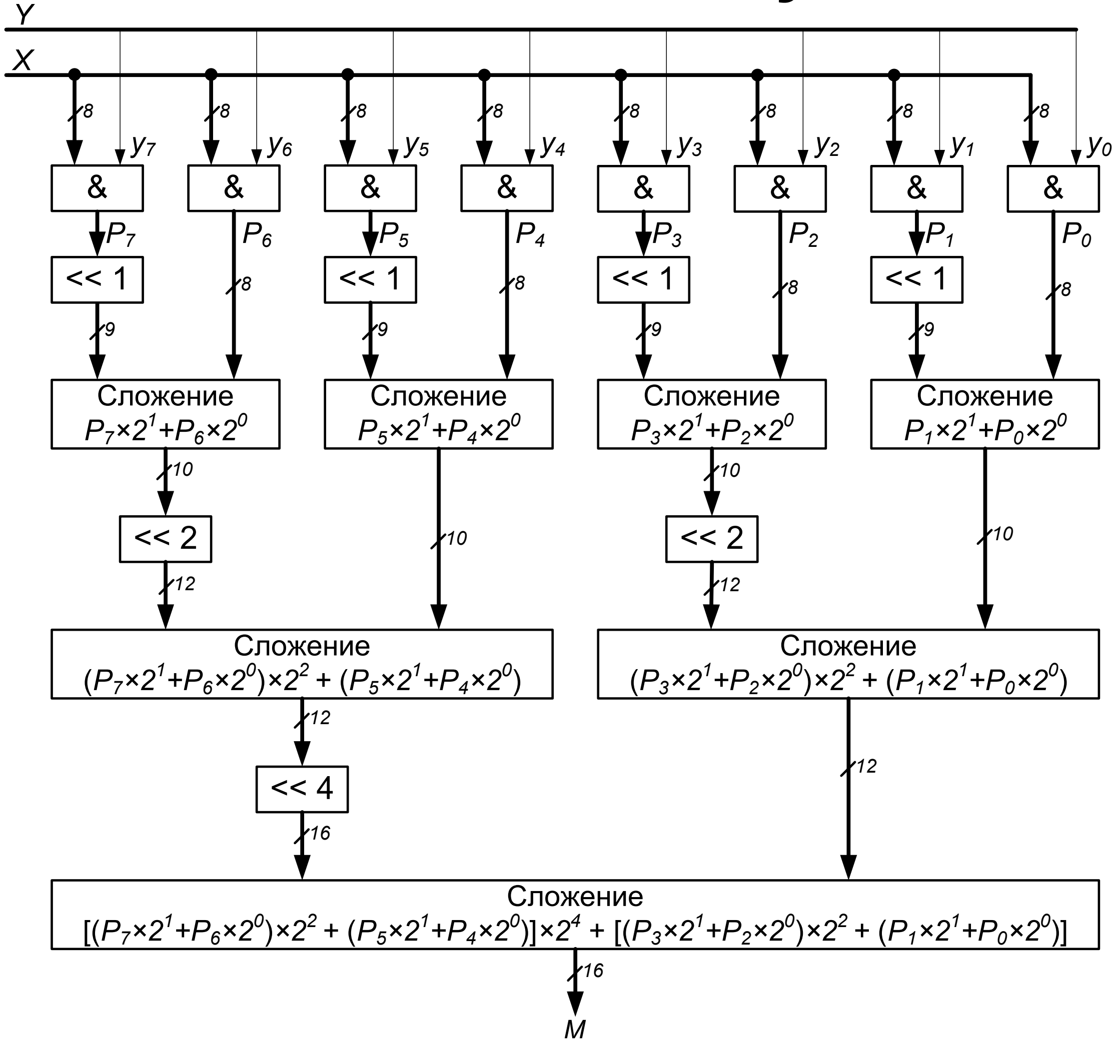
$$\left(P_7 \times 2^1 + P_6 \times 2^0\right) \times 2^6 + \left(P_5 \times 2^1 + P_4 \times 2^0\right) \times 2^4 +$$

$$+ \left(P_3 \times 2^1 + P_2 \times 2^0\right) \times 2^2 + \left(P_1 \times 2^1 + P_0 \times 2^0\right) \times 2^0 =$$

$$\left[\left(P_7 \times 2^1 + P_6 \times 2^0\right) \times 2^2 + \left(P_5 \times 2^1 + P_4 \times 2^0\right) \times 2^0\right] \times 2^4 +$$

$$+ \left[\left(P_3 \times 2^1 + P_2 \times 2^0\right) \times 2^2 + \left(P_1 \times 2^1 + P_0 \times 2^0\right) \times 2^0\right] \times 2^0$$

Беззнаковый 8-битный умножитель



Знаковое умножение

$$X = x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0 = x_{n-1} \times (-2^{n-1}) + x_{n-2} \times 2^{n-2} + \ldots + x_1 \times 2^1 + x_0 \times 2^0$$

- Знаковый разряд имеет вес -2^{n-1}

$$M = X \times Y = m_{2n-1}, m_{2n-2}, \ldots, m_0 = \sum_{i=0}^{N-2} P_i \times 2^i - P_{N-1} \times 2^{N-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) \times y_i \times 2^i - (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) \times y_{N-1} \times 2^{N-1}$$

- Перед сложением разрядность частичных произведений расширяется до разрядности результата с расширением знакового разряда
- Последнее частичное произведение вычитается из общей суммы

Знаковое умножение

						x_{n-1}	x_{n-2}	…	x_2	x_1	x_0	X
					×	y_{n-1}	y_{n-2}	…	y_2	y_1	y_0	Y
	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-1}y_0$	$x_{n-2}y_0$	…	x_2y_0	x_1y_0	$x_0\,y_0$	$P_0\,2^0$
+	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-1}y_1$	$x_{n-2}y_1$	…	x_2y_1	x_1y_1	x_0y_1		$P_1\,2^1$
+	$x_{n-1}y_2$	$x_{n-1}y_2$	$x_{n-1}y_2$	$x_{n-1}y_2$	$x_{n-2}y_2$	…	x_2y_2	x_1y_2	x_0y_2			$P_2\,2^2$
	…	…	…	…	…	…	…	…				…
-	$x_{n-1}y_{n-1}$	$x_{n-1}y_{n-1}$	$x_{n-2}y_{n-1}$		x_2y_{n-1}	x_1y_{n-1}	x_0y_{n-1}					$P_{n-1}\,2^{n-1}$
	m_{2n-1}	m_{2n-2}	m_{2n-3}	…		m_n	m_{n-1}	…	m_2	m_1	m_0	M

Примеры

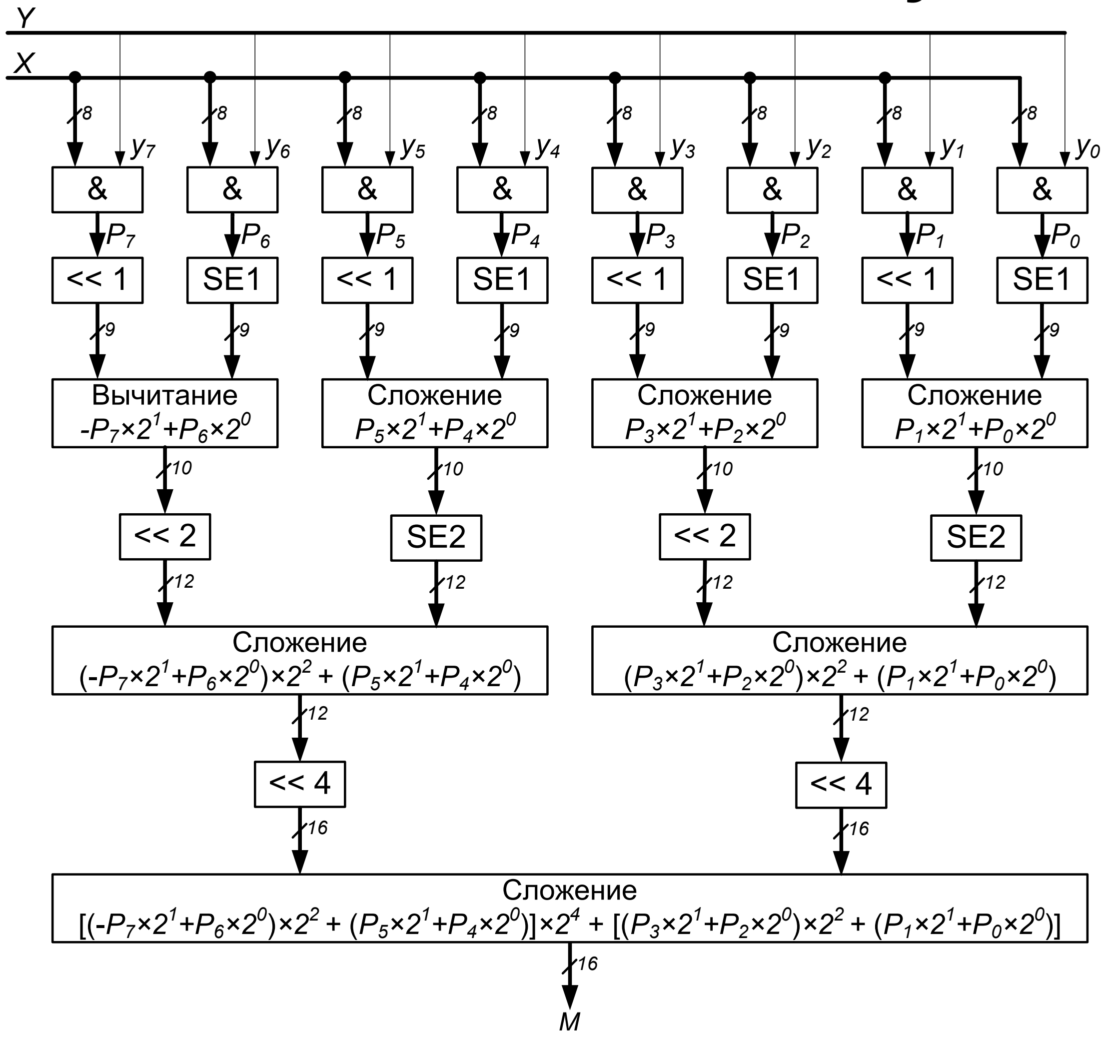
Беззнаковое умножение

					1	0	1	1	11
				×					
					1	0	0	1	9
					1	0	1	1	
			+						
			0	0	0	0			
		+							
		0	0	0	0				
	+								
	1	0	1	1					
0	1	1	0	0	0	1	1		

Знаковое умножение

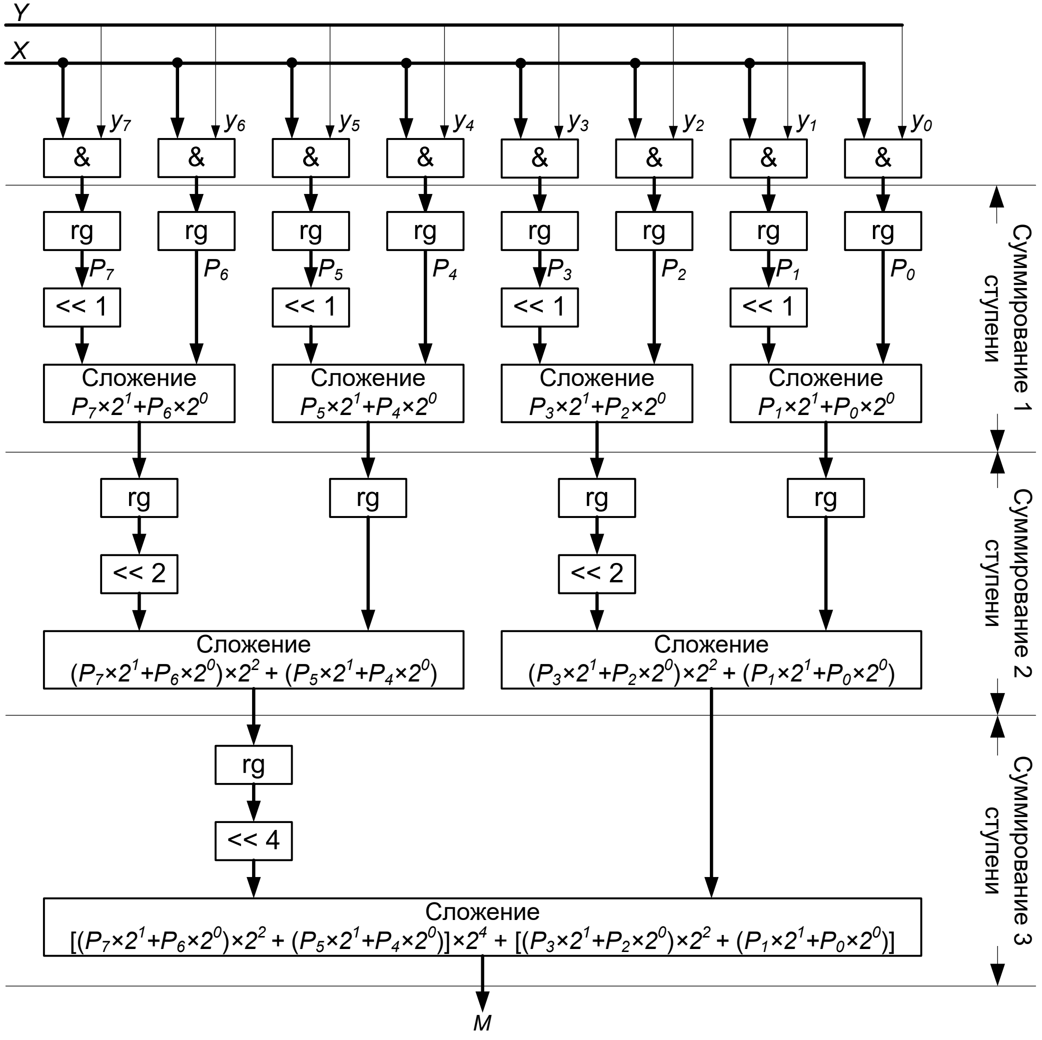
					1	0	1	1	-5
				×					
					1	0	0	1	-7
	1	1	1	1	1	0	1	1	
+									
	0	0	0	0	0	0	0		
+									
	0	0	0	0	0	0			
-									
	1	1	0	1	1				
	0	0	1	0	0	0	1	1	

Знаковый 8-битный умножитель



SEn - расширение знакового разряда на n бит

Конвейерный беззнаковый 8-битный умножитель



Литература

- Дэвид М. Хэррис, Сара Л. Хэррис: “Цифровая схемотехника и архитектура компьютера”
- Кузин А.А.: Презентация к лекциям по дисциплине “Аппаратные средства ЦОС”