6 Интерполяция таблично заданных функций. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяция кубическими сплайнами

1 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Интерполяция – это определение (вычислительным или графическим путем) промежуточных значений некоторой функции y=f(x), заданной дискретным рядом ее значений y_1, y_2, …, y_n, полученных эмпирически.

Пусть в точках x_0, x_1, …, x_n таких, что $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ известны значения функции y=f(x), то есть на отрезке [a; b] задана табличная функция:

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Функция φ(x) называется интерполирующей (интерполяционной) для f(x) на [a; b], если ее значения φ(x), φ(x), …, φ(x) в заданных точках x_0, x_1, …, x_n, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями f(x), то есть с y_0, y_1, …, y_n соответственно.

Будем строить многочлен n-степени в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i) \tag{1}$$

Где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \qquad (2)$$

обладающий свойством:

$$L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n} \qquad (3)$$

Теорема. Полином n-й степени, обладающий свойством (3), единственный.

2 Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция y=f(x) задана таблично значениями y_0, y_1, …, y_n на системе равностоящих узлов x_0, x_1, …, x_n. Множество x_k можно представить в виде $x_k = x_0 + kh, k = \overline{0, n}, h > 0, f_k = f(x_k)$, h – шаг сетки.

Конечной разностью первого порядка называется

$$\begin{gathered} \Delta^1 f_k = f_{k+1} - f_k \\ (\Delta^0 f_k = f_k) \end{gathered} \qquad (4)$$

Конечная разность n-порядка:

$$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k \qquad (5)$$

Свойства:

1 $\Delta^n P_n(x) = \text{const}$ (конечная разность n-го порядка от полинома n-й степени равно константе).

2 $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$ (конечная разность (n+1)-го порядка от полинома n-го порядка равна нулю).

3 Пусть f(x) имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k \approx f^{(n)}(x_k) h^n$.

Непосредственно через значения функции конечные разности можно представить рекуррентной формулой:

$$\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(C_n^i\right) f_{n+k+i}$$

Разделенной разностью f(x0, …, xn) n-го порядка называется:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0} \qquad (6)$$

Разделенная разность первого порядка:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2\ ) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Свойства разделенной разности:

1 Пусть f(x) имеет все производные, тогда при равномерном разбиении:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = f^{(n)}(\xi), f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

2 Разделенная разность n-го порядка, примененная к полиному n-й степени равна константе. Разделенная разность (n+1)-го порядка от полинома n-й степени равна нулю.

3 Разделенная разность n-го порядка $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – симметрическая функция своих аргументов.

Для функции f(x), заданной таблично на узлах $x_i, i = \overline{0, n}$, можно записать интерполяционный полином Ньютона:

$$\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

Замечание. Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Обычно интерполяция проводится не на всех точках разбиения, а только на 5–7 соседних. В этой ситуации при изменении точек интерполирования полином Лагранжа приходится строить заново каждый раз. А полином Ньютона изменяется лишь на несколько слагаемых. При увеличении числа точек интерполяции на одну точку все слагаемые полинома Ньютона сохраняются, добавляются только последующие слагаемые. Для полинома Лагранжа все n слагаемых должны быть построены заново.

2.1 I интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции y=f(x), заданной таблицей с постоянным шагом составлена таблица конечных разностей.

$$P_n(x) = y_o + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_{n-1}) \tag{8}$$

Пусть $k = \frac{x-x_0}{h}, x = x_0 + kh$, тогда

$$\begin{gathered} P_n(x) = P_n(x_0 + kh) = \\ = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{gathered} \tag{9}$$

Формулы (8)-(9) применяются для интерполирования в начале отрезка для значения k из интервала (0; 1).

Путем переобозначений за начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x, отбросив лишние узлы сетки.

2.2 II интерполяционная формула Ньютона

Когда значения аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае строят полином в виде:

$$P_n(x) = P_n(x_n + kh) = \tag{10}$$

$$= y_n + k\Delta y_{n-1} + \cdots + \frac{k(k-1)\dots(k+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

3 Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная аппроксимация

При кусочно-линейной интерполяции на каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на U(x) в данном случае не налагаются.

Требуется аппроксимировать функцию f(x) кусочно-линейной функции функции φ(x), исходя из условий интерполяций, т.е.:

$$\varphi(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{a_1x + b_1, x_0 \le x \le x_1} \\ \mathrm{a_2x + b_2, x_1 \le x \le x_2} \\ \dots \\ \mathrm{a_nx + b_n, x_{n-1} \le x \le x_n} \end{cases} \tag{11}$$

Для нахождения неизвестных параметров $\mathrm{a_k, b_k}$ $(\mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{n}})$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{cases} \mathrm{a_1x_0 + b_1 = y_0} \\ \mathrm{a_1x_1 + b_1 = y_1} \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} \mathrm{a_nx_{n-1} + b_n = y_{n-1}} \\ \mathrm{a_nx_n + b_n = y_n} \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

Каждая из подсистем решается отдельно.

Кусочно-квадратичная аппроксимация осуществляется аналогично кусочно-линейной аппроксимации. Каждое звено кусочно-квадратичной функции при n=2m

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, x_0 \leq x \leq x_1 \\ a_2x^2 + b_2, x_1 + c_2, x_1 \leq x \leq x_2 \\ \dots \\ a_nx^2 + b_nx + c_n, x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \qquad (13)$$

Тройка коэффициентов a_k, b_k, c_k $(k = \overline{1, m})$ может быть найдена последовательным решением трехмерных линейных систем, соответствующим выставленным интерполяционным узлам.

$$\begin{cases} a_kx_{2k-2}^2 + b_kx_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_kx_{2k-1}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_kx_{2k}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k} \end{cases} \qquad (14)$$

4 Интерполяция кубическим сплайном

Кубическим сплайном, интерполирующим на отрезке [a, b] данную функцию y(x) называется функция (15)

$$g_k(s) = a_k + b_k(s - x_k) + c_k(s - x_k)^2 + d_k(s - x_k)^3, \\ s \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n} \qquad (15)$$

Удовлетворяющая следующим условиям:

1 $g_k(x_k) = y_k; g_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$ (условие интерполяции в узлах сплайна).

2 Функция g(x) дважды непрерывно дифференцируема на интервале [a,b].

3 На концах интервала функция g должна удовлетворять следующим соотношениям $g_1''^{(a)} = g_k''(b) = 0$

Для построения интерполяционного сплайна необходимо найти 4n коэффициентов a_k, b_k, c_k, d_k (k=1, 2, …, n).

Из определения сплайна получаем n+1 соотношение (16)

$$g_1(x_0) = y_0; g_k(x_k) = y_k, k = \overline{1, n} \qquad (16)$$

Из условий гладкой стыковки звеньев сплайна (во внутренних узловых точках совпадают значения двух соседний звеньев сплайна, их первый и вторые производные) получаем еще ряд соотношений (17)-(18)

$$\begin{array}{l} g_{k-1}(x_{k-1}) = g_k(x_k) \\ g'_{k-1}(x_{k-1}) = g'_k(x_k), \qquad k = \overline{1, n} \\ g''_{k-1}(x_{k-1}) = g''_k(x_k) \end{array} \qquad (17)$$

$$g''_1(x_0) = g''_n(x_n) \qquad (18)$$

Соотношения (16)-(18) образуют 4n соотношений для нахождения коэффициентов сплайна. Подставляя выражения функций (15) и их производных (19)

$$\begin{array}{c} g'_k(s) = b_k + 2c_k(s - x_k) + 3d_k(s - x_k)^2 \\ g''_k(s) = 2c_k + 6d_k(s - x_k) + \end{array} \qquad (19)$$

в соотношения (16)-(18) и принимая во внимание соотношение

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \qquad k = \overline{1, n} \tag{20}$$

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = y_0 \\ a_k = y_k, k = \overline{1, n} \\ a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, k = \overline{2, n} \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^3, k = \overline{2, n} \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, k = \overline{2, n} \\ c_1 - 3d_1 h_1 = 0 \\ c_n = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Задача интерполяции свелась к решению системы (21). После преобразований данной системы и использования метода прогонки получаем следующие соотношения

$$h_k = x_k - x_{k-1}, \qquad k = \overline{1, n}$$

$$l_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}, \qquad k = \overline{1, n}$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{2}\frac{h_2}{h_1 + h_2} \tag{22}$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}\frac{l_2 - l_1}{h_1 + h_2}$$

$$\delta_{k-1} = -\frac{h_k}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}}, \qquad k = \overline{3, n}$$

$$\lambda_{k-1} = \frac{2l_k - 3l_{k-1} - h_{k-1}\lambda_{k-2}}{2h_{k-1} + 2h_k + h_{k-1}\delta_{k-2}}, \qquad k = \overline{3, n}$$

$$c_{k-1} = \delta_{k-1}c_k + \lambda_{k-1}, \qquad k = \overline{n, 2}$$

$$b_k = l_k + \frac{2}{3}c_k h_k + \frac{1}{3}h_k c_{k-1}, \qquad k = \overline{1, n}$$

$$d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}, \qquad k = \overline{1, n}$$

Используя формулы (22) можно рассчитать все необходимые коэффициенты для составления функции кубического сплайна (15).

Задание

Для допуска к защите лабораторной работы студент должен иметь распечатанный отчет, содержащий титульный лист; задание (включая числовые значения варианта по списку); подробное описание выполнения всех пунктов задания (построение многочленов, таблицы разностей, графики и т.д.) и выводы.

1 Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.

2 Построить таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица 1 – Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 yk$	$\Delta^3 yk$	$\Delta^4 yk$

Таблица 2 – Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка

3 Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Ньютона.

4 Построить интерполяционные сплайны кусочно-линейный и кусочно-квадратичный. Построить графики сплайнов.

5 Построить кубический интерполяционный сплайн. Построить график.

6 На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

Варианты заданий

№	Таблица значений функции
1	x: 0,847 1,546 1,834 2,647 2,910 y: –1,104 1,042 0,029 –0,344 –0,449
2	x: 0,284 0,883 1,384 1,856 2,644 y: –3,856 –3,953 –5,112 –7,632 –8,011
3	x: 0,259 0,841 1,562 2,304 2,856 y: 0,018 –1,259 –1,748 –0,532 0,911
4	x: 0,172 0,567 1,113 2,119 2,769 y: –7,057 –5,703 –0,132 1,423 2,832
5	x: 0,092 0,772 1,385 2,108 2,938

	y: 3,161 1,357 –0,158 –0,129 –4,438
6	x: 0.357 0.871 1,567 2,032 2,628 y: 0,548 1,012 1,159 0,694 –0,503
7	x: 0,235 0,672 1,385 2,051 2,908 y: 1,082 1,805 4,280 5,011 7,082
8	x: 0,015 0,681 1,342 2,118 2,671 y:–2,417 –3,819 –0,642 0,848 2,815
9	x: 0,231 0,848 1,322 2,224 2,892 y:–2,748 –3,225 –3,898 –5,908 –6,506
10	x: 0,083 0,472 1,347 2,117 2,947 y:–2,132 –2,013 –1,613 –0,842 2,973
11	x: 0,119 0,718 1,342 2,859 3,948 y:–0,572 –2,015 –3,342 –6,752 –6,742
12	x: 0,184 0,865 1,213 2,019 2,862 y:–1,687 –2,542 –5,082 –7,042 –8,538
13	x: 0,351 0,867 1,315 2,013 2,859 y: 0,605 0,218 0,205 1,157 5,092
14	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,642 y:–2,132 –2,113 –1,613 –0,842 1,204
15	x: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,851 y: 2,382 –0,212 –1,305 –3,184 –4,365
16	x: 0,079 0,637 1,345 2,095 2,782 y:–4,308 –0,739 1,697 4,208 6,203
17	x: 2,119 3,618 5,342 7,859 8,934 y: 0,605 0,718 0,105 2,157 3,431

18	x: 0,345 0,761 1,257 2,109 2,943 y:–1,221 –0,525 2,314 5,106 9,818
19	x: 0,234 0,649 1,382 2,672 2,849 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,184
20	x: 0,238 0,647 1,316 2,108 4,892 y: 0,092 0,672 2,385 3,108 2,938
21	x: 0,248 0,663 1,238 2,092 2,939 y:–3,642 0,802 0,841 0,513 0,328
22	x: 0,282 0,872 1,513 2,022 2,672 y: 6,324 –0,405 –1,114 –1,315 –1,469
23	x: 0,324 0,718 1,315 2,035 2,893 y:–2,052 –1,597 –0,231 2,808 8,011
24	x: 0,218 0,562 1,492 2,119 2,948 y: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,561
25	x: 0,132 0,567 1,153 2,414 3,939 y: 69,531 1,112 –1,672 –1,922 –1,925
26	x: 0,234 0,649 1,382 3,672 5,911 y: 3,902 2,675 0,611 –3,256 –3,615
27	x: 0,134 0,561 1,341 2,291 6,913 y: 2,156 3,348 3,611 4,112 4,171
28	x: 0,452 0,967 2,255 4,013 5,432 y: 1,252 2,015 4,342 5,752 6,911
29	x: 0,151 0,862 1,282 2,139 2,739 y:–4,528 –0,345 0,638 1,342 3,645
30	*x*: 0,219 0,811 1,341 2,111 2,874 *y*:–2,151 –0,452 1,214 2,891 4,617