7 Численное интегрирование методом Симпсона, решение задачи Коши (методы Рунге-Кутта и Адамса 2-го порядка)

1 Численное интегрирование

Пусть на отрезке [a, b] задана функция f(x). Найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Для некоторых функций трудно найти интеграл.

Определение. Выражение $\sum_i g_i f_i$, где $g_i \in R, f_i = f(x_i)$ называется квадратурной формулой.

Таким образом, задача сводится к представлению интеграла с помощью квадратурной формулы: $\int_a^b f(x)dx = \sum_i g_i f_i$ на отрезке [a, b].

1.2. Квадратурная формула прямоугольников

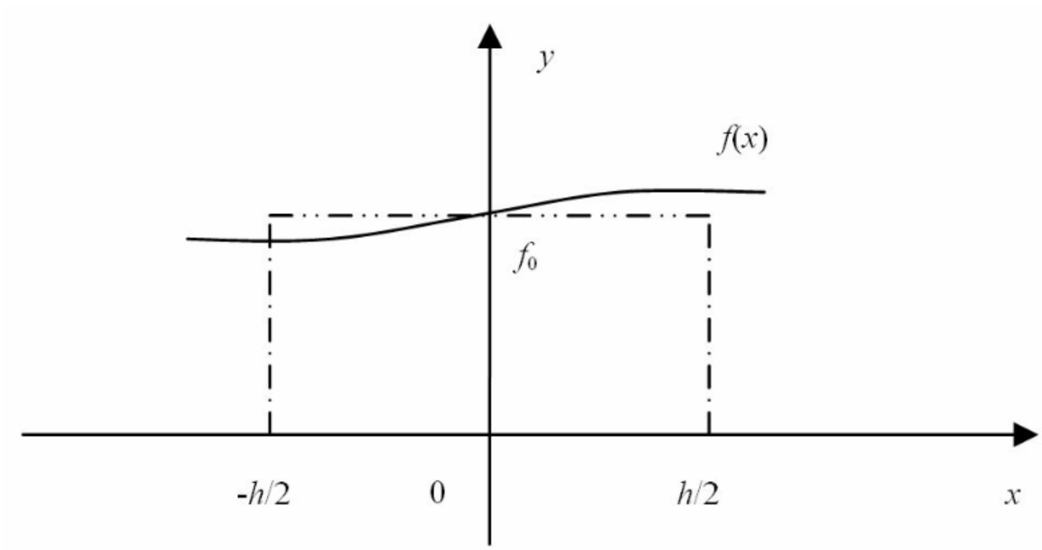

Рисунок 1 – График функции

Как видно из рисунка 1 интеграл можно вычислить как

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = hf_0$$

Обозначим интеграл $F(x) = \int_0^x f(x)dx$. Тогда по формуле Лейбница можно записать

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx F\left(\frac{h}{2}\right) - F(-\frac{h}{2})$$

По формуле Тейлора

$$F\left(\pm\frac{h}{2}\right) = F(0) \pm \frac{h}{2}F'(0) + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2!}F''(0) \pm \frac{h^3}{8}\frac{1}{3!}F'''(0) + \cdots$$
$$= \pm\frac{h}{2}f(0) + \frac{h^2}{4}\frac{1}{2!}f'(0) \pm \frac{h^3}{8}\frac{1}{3!}f''(0) + \cdots$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = hf(0) + \frac{h^3}{24}f''(0)$$

Таким образом, локальное представление формулы прямоугольников

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)dx = hf(0) + Î(\frac{h^3}{24}) \qquad (1)$$

Пусть отрезок [a, b] разбит на n частей, тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\left(hf(x_{i-1}) + \frac{h^3}{24}f''(\xi)\right) = \sum_{i=1}^{n} hf(x_{i-1}) + \frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi)$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + \frac{h^3}{24}f''(\xi)\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + \frac{h^2}{24}\frac{b-a}{n} f''(\xi)n$$

Откуда, при условии $f \in C^2_{[a,b]}, \xi \in [a, b]$, получаем глобальную формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) + \frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi) \qquad (2)$$

1.2 Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Идея в том, чтобы в интеграл $\int_a^b f(x)dx$ вместо $f(x)$ подставить интерполяционный полином Лагранжа.

Функция $f \in C^{n+1}_{[a,b]}$ может быть единственным образом представлена в виде

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x)$$

где $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f_i$, $p_i(x)$ – базисные многочлены.

Отклонение:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!} W_n(x)$$

$$W_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Пусть последовательность $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ совпадает с точками разбиения отрезка [a, b] с шагом h $x_k = x_0 + kh$, тогда

$$L_n(x_0 + kh) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \frac{k(k-1)\dots(k-n)}{k-i} f_i$$

Изменим границы интегрирования: $x = a \to k = 0; x = b \to k = n; dx = hdk$, получим квадратурную формулу Ньютона-Котеса:

$$\int_a^b f(x)dx \cong h \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \frac{k(k-1)\dots(k-n)}{k-i} f_i\, dk \qquad (3)$$

1.3 Квадратурные формулы трапеций и Симпсона

Формулы трапеций и Симпсона являются частными случаями формулы Ньютона-Котеса.

Применим полином Ньютона (эквивалентный многочлену Лагранжа в силу единственности):

$$P_n(x_0 + kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Пусть n=1, т.е. имеем две точки x_0 и $x_1=x_0+h$, и известны значения функции $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$. Этим точками соответствуют k=0, k=1, тогда получим простейшую квадратурную формулу трапеций

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_0^1 (y_0 + k\Delta y_0)hdk = h\left[y_0 k + \frac{k^2}{2}\Delta y_0\right]_0^1 = \\ = h\left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}\right) = \frac{y_0 + y_1}{2}h \qquad (4)$$

где $h = \frac{b-a}{n}$

Остаточный член формулы трапеций

$$r_1 = -\frac{f''(\xi_1)}{12}h^3, \qquad \xi_1 \in (x_0, x_1) \qquad (5)$$

Пусть n=2, т.е. интерполируем функцию f(x) по трем точкам x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, тогда получаем простейшую формулу Симпсона

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left(y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2}\Delta^2 y_0\right)hdk = \qquad (6)$$

$$= h\left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0)\right] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Остаточный член формулы Симпсона

$$r_2 = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_2) \tag{7}$$

Для применения простейшей формулы Симпсона интервал должен быть симметричен относительно точки x_1: (x_1-h;x_1+h).

Распространим формулы трапеций и Симпсона на все отрезки разбиения [a, b].

Глобальная формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + \frac{y_n}{2}) \tag{8}$$

Оценка погрешности

$$|R_n| \le M\frac{|b-a|h^2}{12}, M = max|f''(x)|;\ x \in [a,b] \tag{9}$$

Глобальная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3}(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \cdots + 2y_{2m-1}) \tag{10}$$

Оценка погрешности

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a|h^4}{180}, M = max|f^{IV}(x)|;\ x \in [a,b] \quad (11)$$

Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеции, в ней можно брать меньше отрезков разбиения.

1.4 Правило Рунге

Как следует из оценочных формул погрешностей интегрирования (9)-(10), вычисление R_n возможно лишь тогда, когда подынтегральная функция задана аналитически, что не всегда известно. На практике широко применяется следующий эмпирический прием.

Искомый интеграл вычисляется дважды при делении отрезка [a, b] на n и на 2n частей. Затем полученные значения интеграла (обозначим I(n) и I(2n)) сравниваются и совпадающие первые десятичные знаки считаются верными. Можно получить выражения, позволяющие хотя бы грубо контролировать точность численного интегрирования на основе двойного счета с шагом h и 2h:

$$I - I^p(h) \approx \frac{|I^p(h) - I^p(2h)|}{2^p - 1} \quad (12)$$

где p – порядок метода.

Например, p=2 соответствует формуле трапеций, тогда

$$I - I^{\text{ТР}}(h) \approx \frac{\left|I^{\text{ТР}}(h) - I^{\text{ТР}}(2h)\right|}{3} \qquad (13)$$

p=4 соответствует формуле Симпсона.

2 Решение задачи Коши

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y), x \in [x_0, b] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (14)$$

Пусть требуется найти решение y(x) на отрезке [a, b], где x_0=a. Применим к отрезку [a, b] равномерное разбиение, т.е. получим $h = \frac{b-a}{n}$ и $x_k = x_0 + kh$, где x_n=b, x_k – узлы сетки, h – шаг сетки.

Обозначим через $y(x_k)$ точное значение функции y(x) в точке x_k, через y_k – приближенное вычисленное значение функции y(x) в точке x_k.

2.1 Метод Эйлера

Разложим в ряд Тейлора в точке x_k значение функции $y(x_k+h)=y(x_k+1)$.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \text{где } x_k < \xi < x_{k+1} \qquad (15)$$

Согласно задаче Коши (14) $y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$, тогда разложение Тейлора $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf\big(x_k, y(x_k)\big) + \frac{h^2}{2} y''(\xi)$.

Полагая, что значение функции в следующем узле получается таким образом:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{16}$$

Эта формула и определяет метод Эйлера.

2.2 Методы Рунге-Кутта

2.2.1 Метод Рунге-Кутта II порядка

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (коши) на отрезке [x_k; x_k+1], получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx\,, y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx$$

Воспользуемся формулой трапеций, тогда получим

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\Big(f\big(x_k, y(x_k)\big) + f\big(x_{k+1}, y(x_{k+1})\big)\Big)$$

Эта формула дает приближенное значение

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\big) \tag{17}$$

Формула (17) – это неявная формула метода Рунге-Кутта II порядка.

Из формулы (17) с помощью замены y_{k+1} в правой части равенства по формуле Эйлера можно получить явную формулу Рунге-Кутта II порядка:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y^*_{k+1})\big) \tag{18}$$

$$y^*_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{19}$$

Формула (19) – предиктор, формула (18) – корректор.

2.2.2 Метод Рунге-Кутта IV порядка

Формулы (20) определяют метод Рунге-Кутта IV порядка.

$$\begin{gathered} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) \\ F_1 = f(x_k, y_k) \\ F_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 = f(x_{k+1}, y_k + hF_3) \end{gathered} \tag{20}$$

2.3 Выбор шага интегрирования

Точность расчетов существенным образом зависит от величины шага интегрирования h, поэтому важно правильно выбрать его начальное значение h_0.

Выбор начального шага h_0 проведем на примере метода Рунге-Кутта IV порядка. Итак, пусть ε – заданная точность счета. Поскольку метод Рунге-Кутта имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4=\varepsilon$. Кроме того, отрезок [a, b] должен быть разбит на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий:

$$h_0 = \sqrt[4]{\varepsilon}, \qquad \frac{b-a}{h_0} - \text{четно} \tag{21}$$

Наибольшее h_0, удовлетворяющее условиям (21), является грубым приближением начального шага. Для его уточнения поступаем следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке x_0+2h_0 по формулам Рунге-Кутта с шагами h_0 и $2h_0$, получаем два значения y_2 и $\tilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение h_0, при котором будет выполнено неравенство $\frac{1}{15}|y_2 - \tilde{y}_2| < \varepsilon$. Это и будет величина шага h, с которым решается задача Коши методом Рунге-Кутта.

2.3 Многошаговые методы Адамса

Рассмотренные методы Рунге-Кутта описываются формулой $y_{k+1} = \Phi(x_k, y_k)$, т.е. только в одной точке используется только один шаг. Можно получить значение на следующем шаге, используя значение не только в одной точке, но и в точках, стоящих перед ней (N+1 шаг).

$$y_{k+1} = \Phi(x_k, \dots, x_{k-N}, \dots, x_{k-N}) \qquad (22)$$

Рассмотрим интегральное представление дифференциального уравнения Коши (14).

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx \qquad (23)$$

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L(x_{k-N}, x_{k-N+1}, \dots, x_{k-1}, x_k)$ для функции f(x, y).

2.3.1 Явные методы Адамса

Пусть известны значения y_k, y_{k-1}, …, y_{k-m}, т.е. известны значения $f(x_k,y_k)$, …, $f(x_{k-m},y_{k-m})$. На данных значениях построим интерполяционный полином Лагранжа степени m. Рассмотрим два случая.

1 Пусть m=0, т.е. известно $f(x_k,y_k)$.

$$L_0(x) = f(x_k, y_k)$$

Тогда из (23) получим метод Эйлера $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

2 Пусть m=1, т.е. известны две точки. Получим

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{h} f_k - \frac{x - x_k}{h} f_{k-1} \qquad (24)$$

Тогда из (23) следует, что

$$y_{k+1} = y_k + \left[\frac{(x - x_{k-1})^2}{2h} f_k - \frac{(x - x_k)^2}{2h} f_{k-1}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$
$$= y_k + \frac{4h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_k - \frac{h}{2} f_{k-1}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\big) \qquad (25)$$

Формула (25) определяет явный метод Адамса.

2.3.2 Неявные методы Адамса

Построим полином Лагранжа на значениях $f(x_{k+1}, y_{k+1})$, …, $f(x_{k-m}, y_{k-m})$.

Пусть m=0, тогда

$$L_1(x) = \frac{x - x_{k+1}}{h} f_k - \frac{x - x_k}{h} f_{k+1} \qquad (26)$$

И из (23) получаем неявный метод Адамса.

$$y_{k+1} = y_k + \left[-\frac{(x - x_{k+1})^2}{2h} f_k + \frac{(x - x_k)^2}{2h} f_{k+1} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = y_k + \frac{h}{2} f_k + \frac{h}{2} f_{k+1}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\big) \qquad (27)$$

Т.к. (27) неявная формула (требуется разрешение относительно y_{k+1}), применяют схемы предиктора-корректора.

Предиктор:

$$y_{k+1}^{*} = y_k + \frac{h}{2}\big(3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})\big) \qquad (28)$$

Корректор:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{*})\big) \qquad (29)$$

Замечание. Неявные схемы неудобны в применении, но являются наиболее эффективными средствами противодействия неустойчивости численных расчетов.

Задание

Для допуска к защите лабораторной работы студент должен иметь распечатанный отчет, содержащий титульный лист; задание (включая числовые значения варианта по списку); подробное описание выполнения всех пунктов задания (построение многочленов, таблицы, графики и т.д.) и выводы.

1 Найти шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по формуле трапеций с точностью 0.001.

2 Вычислить интеграл по формуле трапеций с шагами 2h и h. Дать уточненную оценку погрешности.

3 Вычислить интеграл по формуле Симпсона с шагами 2h и h. Дать уточненную оценку погрешности.

4 Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона–Лейбница. Сравнить приближенные значения интеграла с точными. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

Указание для выполнения пунктов 1-4. Шаг h следует выбирать с учетом дополнительного условия: отрезок интегрирования должен разбиваться на число частей, кратное 4.

5 Найти шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге-Кутта (IV) с точностью 10^{-4}.

6 Найти решение задачи Коши на отрезке [a, b] методом Рунге-Кутта (IV), методом Адамса (2-го порядка) с точностью 10^{-4}. Построить приближенные интегральные кривые.

x_i	Метод Рунге-Кутта (IV)		
	y_i	$\tilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \tilde{y}_i \rvert$

x_i	Метод Адамса

	y_i	$\tilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \tilde{y}_i \rvert$

7 Найти решение задачи Коши на отрезке [a, b] методом Эйлера. Построить на одном графике (с п. 6) приближенную интегральную кривую.

x_i	Метод Эйлера		
	y_i	$\tilde{y}_i$	$\Delta_i = \lvert y_i - \tilde{y}_i \rvert$

8 Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенными. Найти максимумы модулей отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

x_i	Точное решение	Метод Рунге-Кутта	Δ_{i1}	Метод Адамса	Δ_{i2}
	y_i	y_i		y_i	

9 Записать результаты расчетов в сводные таблицы.

Варианты заданий

Численное интегрирование

№	Функция
1	$f(x) = x^4(1+x^2)^{-1}, \qquad a = 1, b = 2$
2	$f(x) = x^2 e^{-2x}, \qquad a = 0, b = 1.6$
3	$f(x) = x^{-0.5} lnx, \qquad a = 1, b = 3$
4	$f(x) = xsin3x, \qquad a = 0, b = 1$
5	$f(x) = \sqrt{x+1} lg\,(x+1), \qquad a = 0.1, b = 1.1$
6	$f(x) = x^2 lnx, \qquad a = 1, b = 2$
7	$f(x) = x^2(x+1)^{-2}, \qquad a = 1, b = 4$

8	$f(x) = xcos2x, \qquad a = 0, b = 1$
9	$f(x) = x^2 lnx, \qquad a = 1, b = 2$
10	$f(x) = \sqrt{x} lnx, \qquad a = 1, b = 4$
11	$f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad a = -0.5, b = 0.5$
12	$f(x) = e^{-x} cosx, \qquad a = 0, b = 2$
13	$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}, \qquad a = 1, b = 4$
14	$f(x) = e^{-\sqrt{x}}, \qquad a = 1, b = 4$
15	$f(x) = xarctgx, \qquad a = 0, b = 1$
16	$f(x) = xarccosx, \qquad a = -0.5, b = 0.5$
17	$f(x) = xarcsinx, \qquad a = 0, b = 0.9$
18	$f(x) = (x^3 + x)^{-1}, \qquad a = 1, b = 2.2$
19	$f(x) = x3^{-x}, \qquad a = 0, b = 1.5$
20	$f(x) = x^2 e^{-x}, \qquad a = 0, b = 1$
21	$f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}, \qquad a = 0, b = 2$
22	$f(x) = (x^2 + 1)^{-1}, \qquad a = 1, b = 3$
23	$f(x) = \sqrt{1+x^2}, \qquad a = 0, b = 1.8$
24	$f(x) = x^2 sin\, x, \qquad a = 0, b = 1$
25	$f(x) = xsinx, \qquad a = 0, b = 1.6$
26	$f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad a = -0.4, b = 0.8$
27	$f(x) = x^2 \mathrm{cosx}, \qquad \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 1$
28	$\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}2^{-\mathrm{x}}, \qquad \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 2$
29	$\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x sinx}, \qquad \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 1.2$

30	$f(x) = x^2 arctgx, \qquad a = 0, b = 1$

Решение задачи Коши

№	Задача Коши
1	$y' + xy = 0.5(x-1)e^x y^2, \qquad y(0) = 2, \qquad a = 0, b = 2$
2	$y' - ytgx = -\frac{2}{3} y^4 sinx, \qquad y(0) = 1, \qquad a = 0, b = 1.2$
3	$y' + y^2 = x, \qquad y(0) = 1, \qquad a = 0, b = 2$
4	$xy' + y = y^3 e^{-x}, \qquad y(1) = 1, \qquad a = 1, b = 2$
5	$y' + xy = 0.5(x+1)e^x y^2, \qquad y(0) = 1, \qquad a = 0, b = 2$
6	$xy' - y = -y^2(2lnx + \ln^2 x), \qquad y(1) = 2, \qquad a = 1, b = 2$
7	$y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), \qquad y(1) = 1, \qquad a = 1, b = 2.8$
8	$2y' + 3ycosx = \frac{e^{2x}(2 + 3cosx)}{y}, \qquad y(1) = 2, \qquad a = 1, b = 1.6$
9	$y' + 2xy = 2x^3 y^3, \qquad y(0) = 1, \qquad a = 0, b = 1$
10	$xy' + y = y^2 lnx, \qquad y(1) = 0.5, \qquad a = 1, b = 5$
11	$2y' + 3ycosx = \frac{(8 + 12cosx)e^{2x}}{y}, \qquad y(0) = 2, \qquad a = 0, b = 2$
12	$4y' + 3ycosx = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \qquad y(0) = 0.5, \qquad a = 0, b = 2.4$
13	$8xy' + 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \qquad y(1) = 1, \qquad a = 1, b = 3$
14	$y' + y = 0.5xy^2, \qquad y(0) = 2, \qquad a = 0, b = 2$
15	$y' + y = 0.5xy^2, \qquad y(0) = 1, \qquad a = 0, b = 2$
16	$3y' - 3ycosx = -\frac{e^{-2x}(2 + 3cosx)}{y}, \qquad y(0) = 1.1, \qquad a = 0, b = 0.8$
17	$y' - y = xy^2, \qquad y(0) = 0.5, \qquad a = 0, b = 0.8$
18	$xy' + y = y^2 lnx, \qquad y(1) = 1, \qquad a = 1, b = 2.6$

19	$y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = 2$
20	$xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1, \quad a = 1, b = 2$
21	$2y' + 3ycosx = \frac{e^{2x}(2 + 3cosx)}{y}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = 1.6$
22	$3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 1, \quad a = 1, b = 5$
23	$y' - \mathrm{y} = 2\mathrm{xy}^2, \quad \mathrm{y}(-1) = 0.2, \quad a = -1, b = 0.6$
24	$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = 0.25, \quad a = 1, b = 5$
25	$2\mathrm{y}' + 3\mathrm{ycosx} = \frac{(8 + 12\mathrm{cosx})\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}}{y}, \quad y(0) = 3, \quad a = 0, b = 3$
26	$y' + xy = (1 + x)e^x y^{-2}, \quad y(0) = 1, \quad a = 0, b = 1.6$
27	$xy' + y = 2y^2 lnx, \quad y(1) = 0.5, \quad \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 5$
28	$2\mathrm{xy}' + 2\mathrm{y} = \mathrm{xy}^2, \quad y(1) = 2, \quad \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 1.8$
29	$\mathrm{y}' + 4\mathrm{x}^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2, \quad y(0) = 0.5, \quad \mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 1$
30	$\mathrm{xy}' - \mathrm{y} = -\mathrm{y}^2(2lnx + \ln^2 x), \quad y(1) = 1, \quad \mathrm{a} = 1, \mathrm{b} = 3$