Лабораторные работы 1-4

1 Краткие теоретические сведения

Будем рассматривать системы уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

где $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$– вектор свободных членов, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор неизвестных с вещественными координатами, $A = (a_{ij}), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$– вещественная матрица размера n×n, матрица коэффициентов системы.

Эффективность способов решения данной системы во многом зависит от структуры и свойств матрицы A: размера, обусловленности, симметричности, заполненности (т. е. соотношения между числом нулевых и ненулевых элементов), специфики расположения ненулевых элементов матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли: Необходимым условием существования единственного решения системы (1) является: det A ≠ 0.

Определение. Числом обусловленности системы называют число $\nu(A) = \|A\|\|A^{-1}\|, \nu(A) \geq 1$. Число обусловленности системы зависит от выбора матричной нормы.

В случае $\nu(A) \gg$ систему или матрицу А называют плохо обусловленной. В этом случае, погрешность решения системы (1) может оказаться неприемлемо большой. Понятие приемлемости или неприемлемости погрешности определяется постановкой задачи.

Определение. Нормой называется такая величина, обладающая свойствами:

1) $\|x\| > 0, \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0,$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Таблица 1 – Виды норм векторов и матриц

В пространстве векторов	В пространстве матриц
Кубическая норма	
$\|x\|_1 = \max\limits_{1\leq j<n} \lvert x_j \rvert$	$\|A\|_1 = \max\limits_{1\leq i<n} \left\lvert \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right\rvert$
Октаэдрическая норма	
$\|x\|_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$	$\|A\|_2 = \max\limits_{1\leq i<n} \left\lvert \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right\rvert$
Сферическая норма	
$\|x\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} \lvert x_j \rvert^2} = \sqrt{(x, x)}$	$\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

1.1 Метод Гаусса

Один из методов решения системы (1) – метод Гаусса. Суть метода Гаусса заключается в приведении исходной матрицы А к треугольному виду.

Будем постоянно приводить систему (1) к треугольному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, …, n-го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, …, n-го уравнений преобразованной системы и т. д.

На первом этапе заменим второе, третье, …, n-е уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет эквивалентная (1) система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_2 = b_2^{(1)} \\ \cdots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (2)$$

коэффициенты которой (с верхним индексом 1) подсчитываются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \qquad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1, \qquad i, j = 2,3, \dots n.$$

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом, с подсистемой (2).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_x + \cdots + a_{3n}^{(2)}\,x_3 = b_3^{(2)} \\ \cdots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \qquad (3)$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}, \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_1^{(1)}, \qquad i, j = 3, \dots n.$$

Продолжая этот процесс, на (n–1)-м шаге так называемого прямого хода метода Гаусса систему (1) приведем к треугольному виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_x + \cdots + a_{3n}^{(2)}\, x_3 = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{4}$$

Общая формула для расчета коэффициентов:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{i2}^{(k-1)}}{a_{22}^{(k-1)}} \cdot a_{2j}^{(k-1)}, \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{i2}^{(k-1)}}{a_{22}^{(k-1)}} \cdot b_1^{(k-1)},$$

где верхний индекс k – номер этапа, $k = \overline{1, n-1}$, нижние индексы i и j изменяются от k+1 до n. Полагаем, что $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$, $b_i^{(0)} = b_i$.

Структура полученной матрицы позволяет последовательно вычислять значения неизвестных, начиная с последнего (обратный ход метода Гаусса).

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$\dots,$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} - \cdots - a_{2n}^{(1)} x_n}{a_{22}^{(1)}},$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - \cdots - a_{1n} x_n}{a_{11}},$$

Этот процесс можно определить одной формулой

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right)$$

где k полагают равным n, n – 1, …, 2, 1 и сумма по определению считается равной нулю, если нижний предел суммирования имеет значение больше верхнего.

1.2 Оценки погрешностей решения системы

Приведем оценки погрешностей системы (1).

Пусть A = (a_{ij}) – матрица коэффициентов системы,

$\|A\| = \max\limits_{1 \le i < n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$- ее норма,

$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – соответственно столбцы свободных членов и неизвестных,

$\|\bar{b}\| = \max\limits_{1 \le i < n} |b_i|$, $\|\bar{x}\| = \max\limits_{1 \le i < n} |x_i|$ – нормы,

$\Delta_{\bar{b}}, \Delta_{\bar{x}}$ и $\delta_{\bar{b}} = \frac{\Delta_{\bar{b}}}{\|\bar{b}\|}, \delta_{\bar{x}} = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\|x\|}$ – соответственно их абсолютные и относительные погрешности.

Тогда абсолютная погрешность решения системы (1) имеет оценку:

$$\Delta_{\bar{x}} = \|A^{-1}\| \cdot \Delta_{\bar{b}},$$

а относительная погрешность – оценку:

$$\delta_{\bar{x}} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \delta_{\bar{b}}.$$

1.3 Метод простой итерации

Система вида $A\bar{x} = \bar{b}$ может быть преобразована к эквивалентной ей системе

$$\bar{x} = (E - A)\bar{x} + \bar{b}$$

Обозначим через $B = (E - A)$, тогда $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{b}$.

Образуем итерационный процесс:

$$\bar{x}^{k+1} = B\bar{x}^{k} + \bar{b}$$

Теорема о простых итерациях. Необходимым и достаточным условием сходимости МПИ при любом начальном векторе $\bar{x}_0$ к решению $\bar{x}^*$ системы (2) является выполнение условия: или $\|B\| < 1$ (хотя бы в одной норме), или все собственные числа $\lambda_B^i < 1$.

Для определения количества итераций, необходимых для достижения заданной точности ε, можно воспользоваться априорной оценкой погрешности решения системы и это значение найти из неравенства:

$$\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\cdot\|\bar{x}^1-\bar{x}^0\|<\varepsilon$$

Апостериорную (уточненную) оценку погрешности решения находят по формуле

$$\Delta_{\bar{x}_k}\leq\frac{\|B\|}{1-\|B\|}\cdot\left\|\bar{x}^k-\bar{x}^{k-1}\right\|$$

1.4 Метод Зейделя

Матрица А с элементами $\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ называется матрицей с диагональным преобладанием, если имеют место неравенства

$$|a_{ii}|-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|>0, i=\overline{1,n}$$

Метод Зейделя применяется в основном к системам, в которых преобладающими элементами являются диагональные. В противном случае скорость его сходимости практически не отличается от скорости сходимости МПИ.

Рассмотрим систему (1), где $a_{ii}\neq 0, i=\overline{1,n}$.

В (1) разделим i-е уравнение на a_{ii} а и обозначим $\tilde{a}_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\tilde{b}_i=\frac{b_i}{a_{ii}}$.

Получим эквивалентную (1) систему, выразив в каждом i-м уравнении компонент решения x_i

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{12}x_2 - \cdots - \tilde{a}_{1n}x_n \\ x_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{21}x_1 - \cdots - \tilde{a}_{2n}x_n \\ \cdots \\ x_n = \tilde{b}_n - \tilde{a}_{n1}x_1 - \cdots - \tilde{a}_{n,n-1}x_{n-1} \end{cases} \quad (5)$$

Идея метода Зейделя: при проведении итераций по формуле (5) используется результат предыдущих уравнений в процессе одной итерации.

Общая формула:

$$x_i^{k+1} = \tilde{b}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{i-1} \tilde{a}_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \tilde{a}_{ij}x_j^{k}$$

Для того чтобы метод Зейделя сходился, достаточно выполнения одного из условий: $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\ \forall i = \overline{1,n},\ i \neq j$ или A – вещественная, симметричная, положительно определенная матрица.

1.5 Метод квадратного корня

Симметричную матрицу A будем называть положительно определенной, если квадратичная форма $x^T Ax$ с этой матрицей принимает лишь положительные значения при любом векторе $x \neq 0$.

Рассмотрим линейную систему (1). При условии симметричности и положительной определённости матрицы A:

$$A^T = A, \qquad A > 0$$

Представим матрицу A в виде произведения:

$$A = U^T U$$

где U – верхняя треугольная матрица.

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Заполнение матрицы U проводится по строкам. Вычислим первую строку матрицы

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, \qquad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}, \qquad j = \overline{2, n} \tag{6}$$

Пусть найдены элементы первых (i-1) строк матрицы U, $i = \overline{2, n}$. Тогда элементы i-й строки подсчитываются следующим образом

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}, \qquad u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right), \tag{7}$$
$$j = \overline{\imath + 1, n}, \qquad i = \overline{2, n}$$

Соотношения (6) - (7) полностью определяют элементы матрицы U.

Перейдём к решению линейной системы (1). В силу разложения $A = U^T U$ имеем:

$$U^T U x = B$$

После обозначения $y = Ux$ получаем $U^T y = B$. В результате получаем две треугольные системы

$$U^T y = B, \qquad Ux = y \tag{8}$$

Решая первую систему, вычислим вектор y. После подстановки этого вектора в правую часть второй системы находим решение x.

Формулы (6) - (8) представляют метод квадратного корня для решения линейной системы (1).

Отметим, что определитель матрицы A вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\det A = \det U^T U = \det(U^T)\det U = (u_{11}u_{22}\dots u_{nn})\cdot(u_{11}u_{22}\dots u_{nn}) \\ = u_{11}^2 u_{22}^2 \dots u_{nn}^2\end{aligned}$$

Для поиска столбцов обратной матрицы необходимо решить n линейных систем вида

$$Ax = e^i, \qquad i = \overline{1, n}$$

где $e^i, i = 1, n$ – это столбцы единичной матрицы (единичные орты).

Пусть для матрицы A получено разложение $A = U^T U$. Тогда приходим к последовательности 2n треугольных систем:

$$U^T y = e^i, \qquad Ux = y, \qquad i = \overline{1, n}$$

Решая полученные уравнения относительно x, получаем столбцы обратной матрицы.

На практике нет необходимости перед решением системы (1) производить специальную проверку матрицы A на положительную определённость. Если в процессе решения в формулах (6) - (7) подкоренное выражение окажется неположительным, то это будет означать, что матрица A не является положительно определённой. Следовательно, применение метода квадратного корня непосредственно к системе (1) окажется безрезультатным.

Стоит отметить, что метод можно использовать и для систем с произвольной невырожденной матрицей A (не обязательно симметричной или положительно определенной). В этом случае перед применением метода необходимо умножить систему (1) слева на матрицу A^T:

$$A^T A x = A^T b \tag{9}$$

В результате получаем эквивалентную (1) систему:

$$\bar{A} x = \bar{b} \tag{10}$$

где $\bar{A} = A^T A, \bar{b} = A^T b$. Причем матрица $\bar{A}$ симметрично и положительно определена. Переход от (1) к (10) называется симметризацией системы (1).

1.6 Проблема собственных значений

Вычисление собственных значений и векторов матриц имеет исключительно важное значение для решения широкого круга задач. При этом часто требуется получение всех собственных значений и отвечающих им собственных векторов. Такую задачу принято называть полной проблемой собственных значений.

Собственные значения матрицы A являются корнями $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0$$

Собственные векторы $\bar{x}$, отвечающие собственному значению λ, представляют собой ненулевые решения системы

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0$$

Данная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, т.е.

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Развертывание этого определителя приводит к так называемому характеристическому уравнению матрицы A:

$$D(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \dots - p_1\lambda - p_n) = 0$$

1.7 Метод вращений

Метод вращений позволяет для симметричных матриц решить задачу отыскания всех собственных значений и собственных векторов без использования характеристического уравнения.

Известно, что для симметричной матрицы A существует ортогональная матрица U, такая, что

$$U^{T}AU = \Lambda \tag{11}$$

где Λ – диагональная матрица.

Так как $U_{T} = U^{-1}$ (условие ортогональности), то матрица Λ подобна матрице A и имеет те же собственные значения, что и матрица A. Так как собственными значениями диагональной матрицы являются ее диагональные элементы, то зная U, мы можем найти все собственные значения матрицы A.

В методе вращений матрица U строится как предел последовательности произведений матриц простых поворотов, при которых все оси координат кроме двух остаются неподвижными. При этом матрицы простых поворотов подбираются так, чтобы при преобразовании матрицы с помощью матрицы простого поворота на каждом шаге уничтожался максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент.

Итерационный процесс осуществляется следующим образом.

На первом этапе в матрице A находится максимальный по абсолютной величине элемент $a_{i_0 j_0} (i_0 < j_0)$. Строится ортогональная матрица простого поворота вида

$$
\mathrm{U}_0 = \begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \cdots & & & & & & & & & \\
 & & \cos\varphi_0 & . & . & . & . & -\sin\varphi_0 & & & \\
 & & . & 1 & & & & . & & & \\
 & & . & & \cdots & & & . & & & \\
 & & . & & & \cdots & & . & & & \\
 & & . & & & & 1 & . & & & \\
 & & -\sin\varphi_0 & . & . & . & . & \cos\varphi_0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \cdots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ \mathrm{i}_0 \\ \\ \\ \\ \\ \mathrm{j}_0 \\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \mathrm{i}_0 & & & & & \mathrm{j}_0 & & &
\end{array}
\end{array}
$$

где все невыписанные элементы нулевые. Угол φ_1 подбирается так, чтобы у матрицы

$$
\mathrm{A}^{(1)} = \mathrm{U}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{U}_0 = \left(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}^{(1)}\right), \qquad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}, \qquad \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}
$$

Элемент $\mathrm{a}_{\mathrm{i}_0\mathrm{j}_0}^{(1)}$ обратился бы в нуль:

$$
\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\mathrm{a}_{\mathrm{i}_0\mathrm{j}_0}}{\mathrm{a}_{\mathrm{i}_0\mathrm{i}_0} - \mathrm{a}_{\mathrm{j}_0\mathrm{j}_0}}\right)
$$

Находим матрицу $\mathrm{A}^{(1)}$:

$$
\mathrm{A}^{(1)} = \mathrm{U}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{U}_0
$$

На втором этапе находится максимальный по абсолютной величине элемент $\mathrm{a}_{\mathrm{i}_1\mathrm{j}_1}(\mathrm{i}_1 < \mathrm{j}_1)$, соответственно в матрице $\mathrm{A}^{(1)}$. Строится ортогональная матрица простого поворота U_1.

Далее процесс повторяется до получения практически диагональной матрицы. В этом случае элементы на диагонали аппроксимируют собственные значения матрицы A.

Обобщим формулы для построения матрицы $A^{(k)}$.

$$\varphi_{k-1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{i_0 j_0}^{(k-1)}}{a_{i_{k-1}i_{k-1}}^{(k-1)} - a_{j_{k-1}j_{k-1}}^{(k-1)}}\right)$$

$$U_{k-1} = \begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \cdots &&&&&&&&& \\
&& \cos\varphi_{k-1} & . & . & . & . & -\sin\varphi_{k-1} &&& \\
&& . & 1 &&&& . &&& \\
&& . && \cdots &&& . &&& \\
&& . &&& \cdots && . &&& \\
&& . &&&& 1 & . &&& \\
&& -\sin\varphi_{k-1} & . & . & . & . & \cos\varphi_{k-1} &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \cdots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i_k \\ \\ \\ \\ \\ j_k \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} && i_k &&&&& j_k &&& \end{array} &
\end{array}$$

$$A^{(k)} = U_{k-1}^{T} A^{(k-1)} U_{k-1}$$

Последовательность матриц

$$U^{(k)} = U_0 U_1 \ldots U_{k-2} U_{k-1} \tag{12}$$

сходится при $k \to \infty$ к ортогональной матрице U из (11).

1.8 Нахождение собственных векторов

Если λ_i – i-й диагональный элемент матрицы Λ, определяемый формулой (11), то соответствующим ему собственным вектором будет вектор

$$\overline{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{i-я строка} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

т.е. $U^T A U \overline{e_i} = \lambda_i \overline{e_i}$ или в силу ортогональности матрицы U: $AU\overline{e_i} = \lambda_i U \overline{e_i}$.

Это равенство показывает, что вектор $x = U\overline{e_i}$ есть собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_i. Компонентами вектора x_i являются элементы i-ого столбца матрицы U.

Следовательно, за приближенные значения собственных векторов матрицы A можно считать столбцы матрицы $U^{(k)}$, рассчитанной по формуле (12).

2 Задание

Каждая лабораторная работа состоит из двух частей:

1 Решение системы уравнений указанным методом с числовыми значениями согласно варианту.

2 Написание программы, выполняющей решение любой системы указанным методом и проверка решения с заданными числовыми значениями.

Лабораторная работа №1.

- Решение системы уравнений методом Гаусса.

- Нахождение обратной матрицы для матрицы системы.

- Нахождение оценку абсолютной и относительной погрешности решения, зная, что свободные члены исходной системы имеют абсолютную погрешность 0,001.

Лабораторная работа №2.

- Преобразование системы к виду, необходимому для применения метода простых итераций. Нахождение необходимого числа итеративных шагов (k_0) для решения системы методом простой итерации с точностью 0,01. Решение системы методом простых итераций.

- Преобразование системы к виду, необходимому для применения метода Зейделя. Решение системы методом Зейделя.

- Проверка условий сходимости методов.

Лабораторная работа №3.

- Симметризация системы.
- Решение системы методом квадратного корня.
- Вычисление определителя матрицы А.
- Нахождение обратной матрицы $А^{-1}$ с помощью метода квадратного корня.

Лабораторная работа №4.

- Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы методом вращений.

4 Варианты заданий

№	Система уравнений
1	$4{,}003 \times x1 + 0{,}207 \times x2 + 0{,}519 \times x3 + 0{,}281 \times x4 = 0{,}425$ $0{,}416 \times x1 + 3{,}273 \times x2 + 0{,}326 \times x3 + 0{,}375 \times x4 = 0{,}021$ $0{,}297 \times x1 + 0{,}351 \times x2 + 2{,}997 \times x3 + 0{,}429 \times x4 = 0{,}213$ $0{,}412 \times x1 + 0{,}194 \times x2 + 0{,}215 \times x3 + 3{,}628 \times x4 = 0{,}946.$
2	$2{,}591 \times x1 + 0{,}512 \times x2 + 0{,}128 \times x3 + 0{,}195 \times x4 = 0{,}159$ $0{,}203 \times x1 + 3{,}469 \times x2 + 0{,}572 \times x3 + 0{,}162 \times x4 = 0{,}280$ $0{,}256 \times x1 + 0{,}273 \times x2 + 2{,}994 \times x3 + 0{,}501 \times x4 = 0{,}134$ $0{,}381 \times x1 + 0{,}219 \times x2 + 0{,}176 \times x3 + 5{,}903 \times x4 = 0{,}864.$
3	$2{,}979 \times x1 + 0{,}427 \times x2 + 0{,}406 \times x3 + 0{,}348 \times x4 = 0{,}341$ $0{,}273 \times x1 + 3{,}951 \times x2 + 0{,}217 \times x3 + 0{,}327 \times x4 = 0{,}844$ $0{,}318 \times x1 + 0{,}197 \times x2 + 2{,}875 \times x3 + 0{,}166 \times x4 = 0{,}131$ $0{,}219 \times x1 + 0{,}231 \times x2 + 0{,}187 \times x3 + 3{,}276 \times x4 = 0{,}381.$
4	$3{,}738 \times x1 + 0{,}195 \times x2 + 0{,}275 \times x3 + 0{,}136 \times x4 = 0{,}815$ $0{,}519 \times x1 + 5{,}002 \times x2 + 0{,}405 \times x3 + 0{,}283 \times x4 = 0{,}191$ $0{,}306 \times x1 + 0{,}381 \times x2 + 4{,}812 \times x3 + 0{,}418 \times x4 = 0{,}423$ $0{,}272 \times x1 + 0{,}142 \times x2 + 0{,}314 \times x3 + 3{,}935 \times x4 = 0{,}352.$
5	$4{,}855 \times x1 + 1{,}239 \times x2 + 0{,}272 \times x3 + 0{,}258 \times x4 =1{,}192$ $1{,}491 \times x1 + 4{,}954 \times x2 + 0{,}124 \times x3 + 0{,}236 \times x4 = 0{,}256$ $0{,}456 \times x1 + 0{,}285 \times x2 + 4{,}354 \times x3 + 0{,}254 \times x4 = 0{,}852$ $0{,}412 \times x1 + 0{,}335 \times x2 + 0{,}158 \times x3 + 2{,}874 \times x4 = 0{,}862.$
6	$5{,}401 \times x1 + 0{,}519 \times x2 + 0{,}364 \times x3 + 0{,}283 \times x4 = 0{,}243$ $0{,}295 \times x1 + 4{,}830 \times x2 + 0{,}421 \times x3 + 0{,}278 \times x4 = 0{,}231$ $0{,}524 \times x1 + 0{,}397 \times x2 + 4{,}723 \times x3 + 0{,}389 \times x4 = 0{,}721$ $0{,}503 \times x1 + 0{,}264 \times x2 + 0{,}248 \times x3 + 4{,}286 \times x4 = 0{,}220.$
7	$3{,}857 \times x1 + 0{,}239 \times x2 + 0{,}272 \times x3 + 0{,}258 \times x4 = 0{,}190$ $0{,}491 \times x1 + 3{,}941 \times x2 + 0{,}131 \times x3 + 0{,}178 \times x4 = 0{,}179$ $0{,}436 \times x1 + 0{,}281 \times x2 + 4{,}189 \times x3 + 0{,}416 \times x4 = 0{,}753$ $0{,}317 \times x1 + 0{,}229 \times x2 + 0{,}326 \times x3 + 2{,}971 \times x4 = 0{,}860.$
8	$4{,}238 \times x1 + 0{,}329 \times x2 + 0{,}256 \times x3 + 0{,}425 \times x4 = 0{,}560$ $0{,}249 \times x1 + 2{,}964 \times x2 + 0{,}351 \times x3 + 0{,}127 \times x4 = 0{,}380$ $0{,}365 \times x1 + 0{,}217 \times x2 + 2{,}897 \times x3 + 0{,}168 \times x4 = 0{,}778$ $0{,}178 \times x1 + 0{,}294 \times x2 + 0{,}432 \times x3 + 3{,}701 \times x4 = 0{,}749.$

№	Система уравнений
9	3,389 × x1 + 0,273 × x2 + 0,126 × x3 + 0,418 × x4 = 0,144 0,329 × x1 + 2,796 × x2 + 0,179 × x3 + 0,278 × x4 = 0,297 0,186 × x1 + 0,275 × x2 + 2,987 × x3 + 0,316 × x4 = 0,529 0,197 × x1 + 0,219 × x2 + 0,274 × x3 + 3,127 × x4 = 0,869.
10	2,958 × x1 + 0,147 × x2 + 0,354 × x3 + 0,238 × x4 = 0,651 0,127 × x1 + 2,395 × x2 + 0,256 × x3 + 0,273 × x4 = 0,898 0,403 × x1 + 0,184 × x2 + 3,815 × x3 + 0,416 × x4 = 0,595 0,259 × x1 + 0,361 × x2 + 0,281 × x3 + 3,736 × x4 = 0,389.
11	4,503 × x1 + 0,219 × x2 + 0,527 × x3 + 0,396 × x4 = 0,553 0,259 × x1 + 5,121 × x2 + 0,423 × x3 + 0,206 × x4 = 0,358 0,413 × x1 + 0,531 × x2 + 4,317 × x3 + 0,264 × x4 = 0,565 0,327 × x1 + 0,412 × x2 + 0,203 × x3 + 4,851 × x4 = 0,436.
12	5,103 × x1 + 0,293 × x2 + 0,336 × x3 + 0,270 × x4 = 0,745 0,179 × x1 + 4,912 × x2 + 0,394 × x3 + 0,375 × x4 = 0,381 0,189 × x1 + 0,321 × x2 + 2,875 × x3 + 0,216 × x4 = 0,480 0,317 × x1 + 0,165 × x2 + 0,386 × x3 + 3,934 × x4 = 0,552.
13	5,554 × x1 + 0,252 × x2 + 0,496 × x3 + 0,237 × x4 = 0,442 0,580 × x1 + 4,953 × x2 + 0,467 × x3 + 0,028 × x4 = 0,464 0,319 × x1 + 0,372 × x2 + 8,935 × x3 + 0,520 × x4 = 0,979 0,043 × x1 + 0,459 × x2 + 0,319 × x3 + 4,778 × x4 = 0,126.
14	2,998 × x1 + 0,209 × x2 + 0,315 × x3 + 0,281 × x4 = 0,108 0,163 × x1 + 3,237 × x2 + 0,226 × x3 + 0,307 × x4 = 0,426 0,416 × x1 + 0,175 × x2 + 3,239 × x3 + 0,159 × x4 = 0,310 0,287 × x1 + 0,196 × x2 + 0,325 × x3 + 4,062 × x4 = 0,084.
15	5,452 × x1 + 0,401 × x2 + 0,758 × x3 + 0,123 × x4 = 0,886 0,785 × x1 + 2,654 × x2 + 0,687 × x3 + 0,203 × x4 = 0,356 0,402 × x1 + 0,244 × x2 + 4,456 × x3 + 0,552 × x4 = 0,342 0,210 × x1 + 0,514 × x2 + 0,206 × x3 + 4,568 × x4 = 0,452.
16	2,923 × x1 + 0,220 × x2 + 0,159 × x3 + 0,328 × x4 = 0,605 0,363 × x1 + 4,123 × x2 + 0,268 × x3 + 0,327 × x4 = 0,496 0,169 × x1 + 0,271 × x2 + 3,906 × x3 + 0,295 × x4 = 0,590 0,241 × x1 + 0,319 × x2 + 0,257 × x3 + 3,862 × x4 = 0,896.

№	Система уравнений
17	5,482 × x1 + 0,358 × x2 + 0,237 × x3 + 0,409 × x4 = 0,416 0,580 × x1 + 4,953 × x2 + 0,467 × x3 + 0,028 × x4 = 0,464 0,319 × x1 + 0,372 × x2 + 8,935 × x3 + 0,520 × x4 = 0,979 0,043 × x1 + 0,459 × x2 + 0,319 × x3 + 4,778 × x4 = 0,126.
18	3,738 × x1 + 0,195 × x2 + 0,275 × x3 + 0,136 × x4 = 0,815 0,519 × x1 + 5,002 × x2 + 0,405 × x3 + 0,283 × x4 = 0,191 0,306 × x1 + 0,381 × x2 + 4,812 × x3 + 0,418 × x4 = 0,423 0,272 × x1 + 0,142 × x2 + 0,314 × x3 + 3,935 × x4 = 0,352.
19	3,910 × x1 + 0,129 × x2 + 0,283 × x3 + 0,107 × x4 = 0,395 0,217 × x1 + 4,691 × x2 + 0,279 × x3 + 0,237 × x4 = 0,432 0,201 × x1 + 0,372 × x2 + 2,987 × x3 + 0,421 × x4 = 0,127 0,531 × x1 + 0,196 × x2 + 0,236 × x3 + 5,032 × x4 = 0,458.
20	5,482 × x1 + 0,617 × x2 + 0,520 × x3 + 0,401 × x4 = 0,823 0,607 × x1 + 4,195 × x2 + 0,232 × x3 + 0,570 × x4 = 0,152 0,367 × x1 + 0,576 × x2 + 8,193 × x3 + 0,582 × x4 = 0,625 0,389 × x1 + 0,356 × x2 + 0,207 × x3 + 5,772 × x4 = 0,315.
21	3,345 × x1 + 0,329 × x2 + 0,365 × x3 + 0,203 × x4 = 0,305 0,125 × x1 + 4,210 × x2 + 0,402 × x3 + 0,520 × x4 = 0,283 0,314 × x1 + 0,251 × x2 + 4,531 × x3 + 0,168 × x4 = 0,680 0,197 × x1 + 0,512 × x2 + 0,302 × x3 + 2,951 × x4 = 0,293.
22	4,247 × x1 + 0,275 × x2 + 0,397 × x3 + 0,239 × x4 = 0,721 0,466 × x1 + 4,235 × x2 + 0,264 × x3 + 0,358 × x4 = 0,339 0,204 × x1 + 0,501 × x2 + 3,721 × x3 + 0,297 × x4 = 0,050 0,326 × x1 + 0,421 × x2 + 0,254 × x3 + 3,286 × x4 = 0,486.
23	3,476 × x1 + 0,259 × x2 + 0,376 × x3 + 0,398 × x4 = 0,871 0,425 × x1 + 4,583 × x2 + 0,417 × x3 + 0,328 × x4 = 0,739 0,252 × x1 + 0,439 × x2 + 3,972 × x3 + 0,238 × x4 = 0,644 0,265 × x1 + 0,291 × x2 + 0,424 × x3 + 3,864 × x4 = 0,581.
24	3,241 × x1 + 0,197 × x2 + 0,643 × x3 + 0,236 × x4 = 0,454 0,257 × x1 + 3,853 × x2 + 0,342 × x3 + 0,427 × x4 = 0,371 0,324 × x1 + 0,317 × x2 + 2,793 × x3 + 0,238 × x4 = 0,465 0,438 × x1 + 0,326 × x2 + 0,483 × x3 + 4,229 × x4 = 0,822.

№	Система уравнений
25	4,405 × x1 + 0,472 × x2 + 0,395 × x3 + 0,253 × x4 = 0,623 0,227 × x1 + 2,957 × x2 + 0,342 × x3 + 0,327 × x4 = 0,072 0,419 × x1 + 0,341 × x2 + 3,238 × x3 + 0,394 × x4 = 0,143 0,325 × x1 + 0,326 × x2 + 0,401 × x3 + 4,273 × x4 = 0,065.
26	2,974 × x1 + 0,347 × x2 + 0,439 × x3 + 0,123 × x4 = 0,381 0,242 × x1 + 2,895 × x2 + 0,412 × x3 + 0,276 × x4 = 0,721 0,249 × x1 + 0,378 × x2 + 3,791 × x3 + 0,358 × x4 = 0,514 0,387 × x1 + 0,266 × x2 + 0,431 × x3 + 4,022 × x4 = 0,795.
27	3,452 × x1 + 0,458 × x2 + 0,125 × x3 + 0,236 × x4 = 0,745 0,254 × x1 + 2,458 × x2 + 0,325 × x3 + 0,126 × x4 = 0,789 0,305 × x1 + 0,125 × x2 + 3,869 × x3 + 0,458 × x4 = 0,654 0,423 × x1 + 0,452 × x2 + 0,248 × x3 + 3,896 × x4 = 0,405.
28	2,979 × x1 + 0,427 × x2 + 0,406 × x3 + 0,348 × x4 = 0,341 0,273 × x1 + 3,951 × x2 + 0,217 × x3 + 0,327 × x4 = 0,844 0,318 × x1 + 0,197 × x2 + 2,875 × x3 + 0,166 × x4 = 0,131 0,219 × x1 + 0,231 × x2 + 0,187 × x3 + 3,276 × x4 = 0,381.
29	2,048 × x1 + 0,172 × x2 + 0,702 × x3 + 0,226 × x4 = 0,514 0,495 × x1 + 4,093 × x2 + 0,083 × x3 + 0,390 × x4 = 0,176 0,277 × x1 + 0,368 × x2 + 4,164 × x3 + 0,535 × x4 = 0,309 0,766 × x1 + 0,646 × x2 + 0,767 × x3 + 5,960 × x4 = 0,535.
30	2,389 × x1 + 0,273 × x2 + 0,126 × x3 + 0,418 × x4 = 0,144 0,329 × x1 + 2,796 × x2 + 0,179 × x3 + 0,278 × x4 = 0,297 0,186 × x1 + 0,275 × x2 + 2,987 × x3 + 0,316 × x4 = 0,529 0,197 × x1 + 0,219 × x2 + 0,274 × x3 + 3,127 × x4 = 0,869.