5 Решение систем нелинейных уравнений

1 Методы решения нелинейных уравнений

Рассмотрим задачу нахождения корней нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (5.1)$$

Корнями уравнения (5.1) называются такие значения x, которые при подстановке обращают его в тождество. Только для простейших уравнений удается найти решение в виде формул, т.е. аналитическом виде. Чаще приходится решать уравнения приближенными методами, наибольшее распространение среди которых, в связи с появлением компьютеров, получили численные методы.

Алгоритм нахождения корней приближенными методами можно разбить на два этапа. На первом изучается расположение корней и проводится их разделение. Находится область [a, b], в которой существует корень уравнения или начальное приближение к корню x_0.

Существование на найденном отрезке [a, b], по крайней мере, одного корня уравнения (5.1) следует из условия Больцано:

$$\mathrm{f(a)} \cdot \mathrm{f(b)} < 0 \qquad (5.2)$$

При этом подразумевается, что функция f(x) непрерывна на данном отрезке. Однако данное условие не отвечает на вопрос о количестве корней уравнения на заданном отрезке [a, b]. Определить корень уравнения – значит, найти такой интервал, внутри которого имеется корень данного уравнения и притом единственный на данном интервале. Для отделения корней уравнения применяют следующий критерий: если на [a, b] функция f(x) непрерывна и монотонна, а её значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке существует и только один корень данного уравнения. Достаточный признак монотонности функции на отрезке – сохранение знака производной функции

Отделение корней уравнения можно выполнить графически. Для этого надо построить график функции y = f(x), по которому можно судить, в каких интервалах находятся его точки пересечения с осью Ox.

Теорема 1 (принцип сжимающих отображений). Пусть R – полное метрическое пространство. Если отображение f: R → R – сжатие, то оно имеет в R единственную неподвижную точку, которая является пределом последовательности, полученной по формуле

$$\mathrm{x}_{\mathrm{k+1}} = f(x_k) \tag{5.3}$$

где x_0 – произвольный элемент из R.

На втором этапе решения уравнения (5.1), используя полученное начальное приближение, строится итерационный процесс, позволяющий уточнять значение корня с некоторой, наперед заданной точностью ε. Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения. Каждый такой шаг называется итерацией. В результате процесса итерации находится последовательность приближенных значений корней уравнения $\{x_k\}_{k=0}^{k=n}$. Если эта последовательность с ростом n приближается к истинному значению корня x, то итерационный процесс сходится. Говорят, что итерационный процесса сходится, по меньшей мере, с порядком m, если выполнено условие:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq C|x_k - x_{k-1}|^m \tag{5.4}$$

где C > 0 некоторая константа. Если m=1, то говорят о сходимости первого порядка; m=2 - о квадратичной, m=3 - о кубической сходимости.

Итерационные циклы заканчиваются, если при заданной допустимой погрешности выполняются критерии по абсолютным или относительным отклонениям:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon; \ \left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| < \varepsilon \qquad (5.5,\ 5.6)$$

или малости невязки:

$$|f(x_k)| < \varepsilon \tag{5.7}$$

К итерационным методам относятся метод простых итераций, метод Ньютона, хорд, секущих решения уравнений, метод простой итерации и метод Ньютона решения систем уравнений.

1.1 Метод простой итерации

Применим принцип сжатых отображений для исследования сходимости итерационного метода решения нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \tag{5.8}$$

где F(x) – вещественная функция вещественного аргумента.

Сначала уравнение (6) приводят к виду, удобному для итераций

$$x = \varphi(x) \tag{5.9}$$

($\varphi(x) = x - \psi(x)f(x)$, $\psi(x)$ – знакопостоянная функция). Где искомый корень x^* уравнения (1) является и корнем уравнения (5.2). Допустим, что для x^* каким-то способом указано начальное приближение x_0, а затем дальнейшие приближения строятся по формуле

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), n = 0, 1, 2, \dots \tag{5.10}$$

Этот процесс называется простой одношаговой итерацией (методом простой итерации).

Найдем достаточные условия сходимости метода простой итерации.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

1 Функция определена на отрезке

$$|x_1 - x_0| \leq \delta \tag{5.11}$$

непрерывна там и удовлетворяет условию Липшица с постоянным коэффициентом, меньшим единицы

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq q|x - x'|, (0 < q < 1) \tag{5.12}$$

2 Для исходного приближения x_0 верно равенство

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \leq m \tag{5.13}$$

3 Числа δ, q, m удовлетворяют условию

$$\frac{m}{1-q} \leq \delta \tag{5.14}$$

Тогда:

1 Уравнение (5.2) в области (5.8) имеет решение;

2 Последовательность x^k приближений, построенных по правилу (3q), принадлежит отрезку (5.11), является сходящейся ($\lim x_k = x^*$), и предел последовательности x^* удовлетворяет уравнению (5.9);

3 Скорость сходимости x_k к x^* оценивается неравенством

$$|x^* - x_k| \leq \frac{m}{1-q} q^k, n = 1,2, \dots \tag{5.15}$$

Теорема 2 (О единственности решения). На всяком множестве точек, где для функции φ(x) выполняется условие $|\varphi(x) - \varphi(y)| < |x - y|$, $x \neq y$, уравнение x= φ(x) может иметь не более одного решения.

Замечание 1. Условие Липшица с константой q < 1 выполняется для функции φ(x) на (5.11), если эта функция имеет на (5.11) производную φ'(x), удовлетворяющую неравенству $|\varphi'(x)| \leq q < 1$.

Скорость сходимости метода итерации – линейная. Метод простой итерации является самоисправляющимся: допущенная при вычислении ошибка (не выводящая за пределы отрезка (5.11)) будет исправлена.

1.2 Метод касательных (или метод Ньютона)

Построим эффективный алгоритм вычисления корней уравнения. Пусть задано начальное приближение x_0. Вычислим в этой точке значение функции $f(x_0)$ и её производной $f'(x_0)$. Рассмотрим графическую иллюстрацию метода:

$$tg\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \tag{5.16}$$

Далее получим следующее приближение в точке x_1, проводя касательную из точки $(x_0, f(x_0))$ до пересечения с осью абсцисс:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{5.17}$$

Продолжая этот процесс, получим известную формулу Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{5.18}$$

Эту же формулу можно получить с помощью модификации метода простой итерации, используя $\psi(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся и приводил к искомому результату, требуется выполнение условия:

$$x = \varphi(x), \qquad |\varphi'(x)| < 1 \tag{5.19}$$

Переход от уравнения f(x) = 0 к уравнению x = φ(x) можно осуществлять различными способами. При этом важно, чтобы выбранная функция φ(x) удовлетворяла условию (5.19). К примеру, если функцию f(x) умножить на произвольную константу q и добавить к обеим частям уравнения (1) переменную x, то $\varphi(x) = q \cdot f(x) + x$. Выберем константу q такой, чтобы скорость сходимости алгоритма была самой высокой. Если $1 < \varphi'(x) < 0$, то сходимость итерационного процесса будет двусторонней. Производная по x от этой функции: $\varphi'(x) = 1 + q \cdot f'(x)$. Наибольшую сходимость получим при $\varphi'(x) = 0$, тогда $q = -\frac{1}{f'(x)}$.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости, однако он не всегда сходится. Условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$, где $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, сводится к требованию

$$|f(x_k)| \cdot |f^{(2)}(x_k)| < \left(f'(x_k)\right)^2 \qquad (5.20)$$

В практических расчетах важно выбирать начальное значение x_0 как можно ближе к искомому значению, а в программе предусмотреть выход при зацикливании.

Скорость сходимости метода Ньютона – квадратичная.

Недостатком метода является и то, что на каждом шаге необходимо вычислять не только функцию, но и ее производную. Это не всегда удобно. Одна из модификаций метода Ньютона - вычисление производной только на первой итерации:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \qquad (5.21)$$

Другой метод модификации – замена производной конечной разностью

$$f'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \qquad (5.22)$$

Тогда

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \qquad (5.23)$$

Геометрический смысл такого изменения алгоритма Ньютона состоит в том, что от касательной мы приходим к секущей. Метод секущих уступает методу Ньютона в скорости сходимости, но не требует вычисления производной. Заметим, что начальные приближения в методе секущих могут располагаться как с разных сторон от корня, так и с одной стороны.

Запишем в общем виде алгоритм метода Ньютона.

1 Задать начальное приближение x_0 так, чтобы выполнилось условие

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \tag{5.24}$$

Задать малое положительное число ε, как точность вычислений. Положить k=0.

2 Вычислить x_{k+1} по формуле (5.18):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

3 Если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, то процесс вычисления прекратить и положить

$$x^* = x_{k+1}.$$

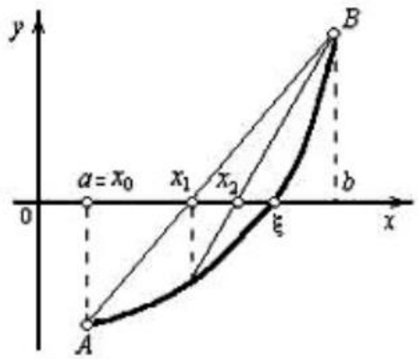
Иначе увеличить k на 1 (k = k + 1) и перейти к пункту 2.

1.3 Метод хорд

Пусть f(x) – непрерывная функция на [a; b] и выполняется условие (5.2). Запишем уравнение прямой через две точки – уравнение хорды, где x_0=a, x_1=b.

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Рассмотрим пересечение хорды с осью Ox, получим точку x_2.



Выбираем две новые точки таким образом, чтобы на данном отрезке выполнялось условие (2).

Опять ищем пересечение с осью Ox, то есть $x_2 = x|_{y=0}$

$$x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0)$$

Пусть на n-м шаге выполнено условие $f(x_n)f(x_{n-1}) < 0$.

Итерационный процесс метода хорд можно записать:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) \qquad (5.25)$$

2 Методы решение систем нелинейных уравнений

2.1 Метод Ньютона

Пусть требуется решить систему вида:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

$$F(\bar{x}) = 0$$

где функции f_1, f_2, …, f_n – заданные нелинейные вещественнозначные функции n вещественных переменных x_1, x_2, …, x_n.

Обозначим через

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

J – матрица Якоби, якобиан.

Для n-мерного случая итерационный процесс Ньютона:

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^k - [J(\bar{x}^k)]^{-1} F(\bar{x}^k) \tag{5.28}$$

Метод Ньютона достаточно трудоемкий – на каждом шаге итерационного процесса необходимо найти матрицу, обратную якобиану.

Если матрицу Якоби вычислить и обратить лишь в начальной точке, то получим модифицированный метод Ньютона.

$$\bar{x}^{k+1} = \bar{x}^{k} - [J(\bar{x}^{0})]^{-1} F(\bar{x}^{k}) \qquad (5.29)$$

Использование такой модификации метода Ньютона требует меньших вычислительных затрат на 1 итерационных шаг, однако требуется значительно больше итераций для достижения заданной точности, чем при использовании основного метода Ньютона. Имеет геометрическую скорость сходимости.

2.2 Метод простой итерации

Пусть система (5.26) преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (5.30)$$

$$\bar{x} = \Phi(\bar{x})$$

Запишем итерацию

$$\bar{x}^{k+1} = \Phi(\bar{x}^{k}) \qquad (5.31)$$

которая определяет метод простой итерации для задачи (5.26).

Задание

Для допуска к защите лабораторной работы студент должен иметь распечатанный отчет, содержащий титульный лист; задание (включая числовые значения варианта по списку); подробное описание выполнения всех пунктов задания (отделение корней, решение уравнений и т.д.) и выводы.

1 Отделить корни заданного уравнения графически.

2 Решить уравнение методом хорд.

3 Решить уравнение методом касательных.

4 Отделить корни заданной системы нелинейных уравнений графически.

5 Построить рабочие формулы метода простых итераций, метода Ньютона, реализующие процесс поиска корня системы нелинейных уравнений на найденном отрезке.

6 Решить систему методом простых итераций.

7 Решить систему методом Ньютона.

8 Решить систему модифицированным методом Ньютона. Сравнить скорости сходимости методов.

Варианты заданий

Нелинейные уравнения

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$x - \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$	16	$\sin(1 - 0.2x^2) - x = 0$
2	$x + \ln(4x) - 1 = 0$	17	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$

3	$e^x - 4e^{-x} - 1 = 0$	18	$x - \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
4	$xe^x - 2 = 0$	19	$e^x + \ln(x) - x = 0$
5	$4(x^2+1)\ln(x) - 1 = 0$	20	$1 - x + \sin(x) - \ln(1+x) = 0$
6	$2 - x - \sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0$	21	$(1-x)^{1/2} - \cos(1-x) = 0$
7	$x^2 + \ln(x) - 2 = 0$	22	$\sin(x^2) + \cos(x^2) - 10x = 0$
8	$\cos(x) - (x+2)^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$	23	$x^2 - \ln(1+x) - 3 = 0$
9	$4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 1 = 0$	24	$\cos\left(\frac{x}{2}\right)\ln(x-1) = 0$
10	$5\ln(x) - x^{\frac{1}{2}} = 0$	25	$\cos\left(\frac{x}{5}\right)(1+x)^{1/2} - x = 0$
11	$e^x + x^3 - 2 = 0$	26	$3x - e^{-x} = 0$
12	$3\sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + x - 3 = 0$	27	$4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 10 = 0$
13	$0.1x^2 - xln(x) = 0$	28	$x - \frac{1}{3 + \sin(3.6x)} = 0$
14	$\cos(1 + 0.2x^2) - x = 0$	29	$0.25x^3 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) = 0$
15	$3x - 4\ln(x) - 5 = 0$	30	$2 - x = \ln(x)$

Системы нелинейных уравнений

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} tg(xy+0.4) = x^2 \\ 0.6x^2 + 2y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin(x+y) - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.6x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, x, y > 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} tg(xy+0.2) = x^2 \\ 0.9x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} tg(xy+0.1) = x^2 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \sin(x+y) - 1.1x = 0 \\ 0.8x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$

4	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.2x=0.2\\x^2+y^2=1\end{cases}$	19	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.2x=0.1\\x^2+2y^2=1\end{cases}$
5	$\begin{cases}tg(xy+0.3)=x^2\\0.9x^2+2y^2=1\end{cases}$	20	$\begin{cases}tg(xy)=x^2\\0.5x^2+3y^2=1\end{cases}$
6	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.3x=0\\0.8x^2+2y^2=1\end{cases}$	21	$\begin{cases}\sin(x+y)+2x=1\\2x^2+y^2=1\end{cases}$
7	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.5x=0.1\\x^2+y^2=1\end{cases}$	22	$\begin{cases}tg(xy+0.4)=3x^2\\6x^2+0.2y^2=1, x, y>0\end{cases}$
8	$\begin{cases}tg(xy)=x^2\\0.7x^2+2y^2=1\end{cases}$	23	$\begin{cases}\sin(2x+y)-1.6x=0\\x^2+2y^2=1, x, y>0\end{cases}$
9	$\begin{cases}\sin(x+y)+1.2x=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$	24	$\begin{cases}tg(xy+1)=x^2\\3x^2+2y^2=1\end{cases}$
10	$\begin{cases}tg(xy+0.2)=x^2\\0.6x^2+2y^2=1\end{cases}$	25	$\begin{cases}tg(xy+0.1)=2x^2\\0.6x^2+2y^2=1, x, y>0\end{cases}$
11	$\begin{cases}\sin(x+y)=1.5x-1\\x^2+y^2=1\end{cases}$	26	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.5x=0.1\\x^2+y^2=1\end{cases}$
12	$\begin{cases}tg(xy+0.3)=x^2\\0.9x^2+2y^2=2\end{cases}$	27	$\begin{cases}tg(xy+0.1)=x^2\\x^2+2y^2=1\end{cases}$
13	$\begin{cases}tg(xy+0.1)=2x^2\\0.6x^2+2y^2=1, x, y>0\end{cases}$	28	$\begin{cases}tg(xy+0.5)=x^2\\x^2+y^2=1\end{cases}$
14	$\begin{cases}\sin(x+2y)-1.2x=0\\x^2+y^2=1, x, y>0\end{cases}$	29	$\begin{cases}\sin(x+y)+1.5x=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$
15	$\begin{cases}tg(xy+0.5)=x^2\\x^2+y^2=1\end{cases}$	30	$\begin{cases}\sin(x+y)-1.1x=0\\0.8x^2+2y^2=1\end{cases}$