

Отчет о выполнении лабораторной работы
Определение модуля кручения

Лепарский Роман

02.10.2020

1 Аннотация

В работе измеряется модуль кручения двумя различными способами:

- 1) Определением угла поворота в зависимости от приложенного момента сил.
- 2) Измерением периодов крутильных колебаний подвешенного маятника.

2 теоретические сведения

2.1 Статический метод

Рассмотрим кольцо радиуса r , толщины dr , и высоты dl . При закручивании верхнее сечение кольца поворачивается на угол $d\varphi$, а образующая наклоняется на угол α . При небольших углах α можно считать:

$$\alpha dl = r d\varphi \quad (1)$$

Касательное напряжение τ связано с углом сдвига α линейной зависимостью:

$$\tau = G\alpha$$

Используя (1), получаем:

$$\tau = Gr \frac{d\varphi}{dl}$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot \tau \cdot r$$

Суммарный момент сил, действующий на всем поперечном сечении стержня, находится интегрированием:

$$M = 2\pi G \frac{d\varphi}{dl} \int_0^R r^3 dr = \pi G \frac{d\varphi}{dl} \frac{R^4}{2}.$$

Таким образом, для связи приложенного момента сил M и угла поворота φ , получаем:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f \varphi \quad (2)$$

Здесь введен модуль кручения f , связанный с модулем сдвига G :

$$f = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (3)$$

Необходимо подчеркнуть, что зависимость (2) выполняется только при малых углах α

2.2 Динамический метод

Вращение стержня с закреплёнными на нем грузами вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке. Это вращение описывается уравнением:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M \quad (4)$$

Введем обозначение:

$$\omega^2 = \frac{f}{I}$$

При этом из (2) и (4) получим уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0$$

Период колебаний T равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}$$

3 Оборудование

3.1 Статический метод

1. Исследуемый стержень
2. Отсчетная труба со шкалой
3. Рулетка
4. Микрометр
5. Набор грузов

3.2 Динамический метод

1. Проволока из исследуемого материала
2. Грузы
3. Секундомер
4. Рулетка
5. Микрометр
6. линейка

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Статический метод

Измерим расстояние от зекальца до шкалы: $L = 134\text{см}$, радиус стержня $R = 10\text{мм}$ и диаметр шкива $d = 98\text{мм}$.

Увеличивая нагрузку снимем зависимость $\varphi(M)$:

Зависимость отклонения луча от массы грузов

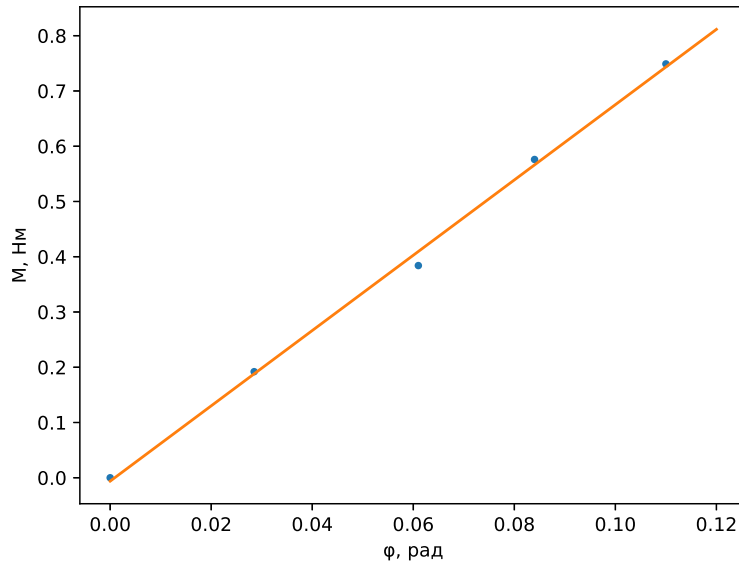
X, мм	m, г
421	0
344	100
258	200
196	300
126	390
126	390
195	300
258	200
345	100
421	0

$$2\varphi = \frac{(X(0) - X)}{L} \Rightarrow \varphi = \frac{(X(0) - X)}{2L}$$
$$M = 2mgd$$

Зависимость $\varphi(M)$

φ	M, Н·м
0	0
0,029	0,192
0,061	0,384
0,084	0,576
0,110	0,749
0,110	0,749
0,084	0,576
0,061	0,384
0,028	0,192
0	0

Построим график этой зависимости



По МНК получаем:

$$f_0 = 6.81 \text{ Нм}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (f_0 - f_i)^2 = 0.0575 \text{ Нм}^2$$

$$\Rightarrow f = 6.8 \pm 0.24 \text{ Нм}$$

Зная значение f , посчитаем модуль сдвига G , пользуясь формулой (3) на странице (2)

$$G = \frac{f 2l}{\pi R^4} = 0.58 \pm 0.02 \text{ ГПа}$$

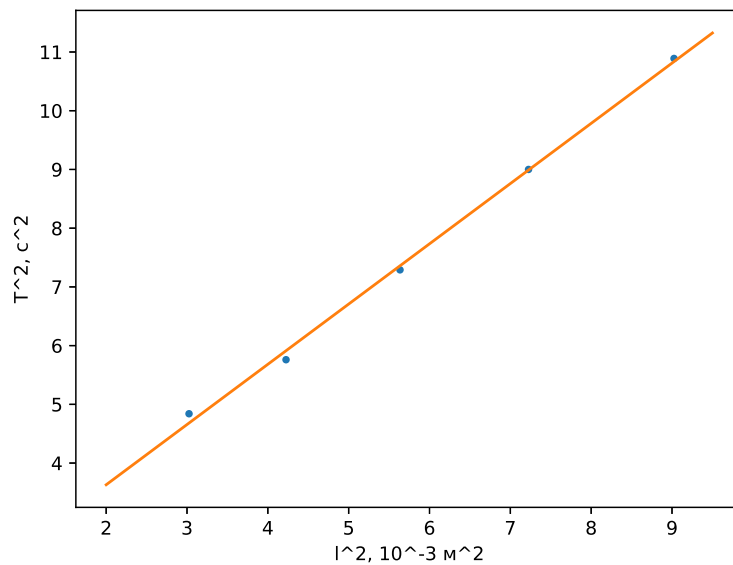
4.2 Динамический метод

Измерим диаметр проволоки $d_0 = 1.55 \text{ мм}$, её длину $L = 1.34 \text{ м}$ и массу подвешиваемых грузов $m = 0.376 \text{ кг}$. Снимем зависимость квадрата периода колебаний T от квадрата расстояния от проволоки до центра масс каждого груза l :

Зависимость $T^2(l^2)$

T^2, c^2	$l^2, 10^{-3}m^2$
4,84	3,025
5,76	4,225
7,29	5,635
9,00	7,225
10,89	9,025

По данным значениям построим график:



По МНК найдем коэффициент наклона прямой:

$$k_0 = 1,55 \frac{c^2}{10^{-3}m^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (k_0 - k_i)^2 = 0,065 \text{ Нм}^2$$

$$\Rightarrow k = 1.55 \pm 0.25 \text{ Нм}$$

Из коэффициента k найдем модуль кручения f по формуле

$$f = \frac{8\pi^2 m}{k} = 19,67 \pm 3,18 \text{ Нм}$$

Зная значение f , посчитаем модуль сдвига G , пользуясь формулой (3) на странице (2)

$$G = \frac{f2l}{\pi r^4} = 0.46 \pm 0.75 \text{ ГПа}$$

5 Заключение

Получив значения модуля кручения и модуля сдвига двумя различными способами и посчитав погрешность, мы можем увидеть, что статический метод даёт более точный результат. Более точное значение достигается за счёт статичности установки.