МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №1.3 Теоретико-множественные тождества

по дисциплине: Дискретная математика

Выполнил: студент ПВ-233 Мороз Роман Алексеевич

Проверил: Островский Алексей

Мичеславович

Цель работы: изучить методы доказательства теоретикомножественных тождеств.

Задание

Два теоретико-множественных выражения (TMB) назовём тождественными, если их значения равны при любых значениях входящих в них множеств. Тождественность теоретикомножественных выражений B1 и B2 будем обозначать как B1 \sim B2. Если B1 и B2 не тождественны, то будем писать B1 \sim B2. Дано множество TMB (см. варианты заданий).

Нужно получить все двухэлементные подмножества этого множества, состоящие из тождественных ТМВ, и составить из них тождества. Для проверки тождественности ТМВ использовать методы доказательства теоретико-множественных тождеств:

- 1) метод эквивалентных преобразований;
- 2) теоретико-множественный метод.

Применяя метод эквивалентных преобразований, нужно ТМВ преобразовать в совершенную нормальную форму Кантора, используя разложение Шеннона. Для сокращения количества проверок на тождественность ТМВ можно использовать следующие правила:

- 1) если $B1 \sim B2$, то $B2 \sim B1$;
- 2) если B1 ~ B2 и B2 ~ B3, то B1 ~ B3;
- 3) если $B1 \sim B2$ и $B2 \sim B3$, то $B1 \sim B3$.

Для автоматизации проверки тождественности ТМВ рекомендуется разработать программное обеспечение (ПО). Функциональность разрабатываемого ПО согласовать с преподавателем

Пропуск знака будем считать за ∩ для наглядности

Вариант 8

```
\{((C-A)\cap B\cup (C-A-B))\Delta(A\cap B), ((A-B)\Delta B)-C, (A-C)\cap (C-A\cup B), (A-C)\Delta\overline{A}\cap \overline{B}\cap C, (A\cup B)\cap ((\overline{A}\cup B)\cap \overline{B}\cup \overline{C})\}
```

1)
$$((C - A) \cap B \cup (C - A - B))\Delta(A \cap B) = ((C \cap \overline{A}) \cap B \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}))\Delta(A \cap B) =$$

 $(C \cap \overline{A})\Delta(A \cap B) = (C \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (A \cap B \cap (\overline{C} \cup A)) = (C \cap \overline{A} \cup C \cap \overline{A} \cap B)$
 $(C \cap \overline{A})\Delta(A \cap B) = (C \cap \overline{A} \cap (\overline{A} \cup B)) \cup (A \cap B \cap (\overline{C} \cup A)) = (C \cap \overline{A} \cup C \cap \overline{A} \cap B)$

Найдем СНФК с помощью разложения Шеннона

```
\overline{A} \, \overline{B} \, C = U
\overline{A} \, B \, \overline{C} = \emptyset
\overline{A} \, B \, \overline{C} = \emptyset
A \, \overline{B} \, \overline{C} = \emptyset
A \, \overline{B} \, \overline{C} = \emptyset
A \, B \, \overline{C} = U
A \, B \, \overline{C} = U
A \, B \, C = U
CH\Phi K: \overline{A} \, \overline{B} \, C \, \cup \, \overline{A} \, B \, C \, \cup \, A \, B \, \overline{C} \, \cup \, A \, B \, C
```

```
program_course.py ×
                                                              master.py
   Project ~
                       sorting.py
    python_Project
                              import random

→ □ algorithms

32
           sorting.py
                              def generate_sets():
                                  U = set(range(1, 11)) # Универсальное множество
80
        \oslash .gitignore
                                  A = set(random.sample(list(U), random.randint( = 0, b 10)))
                                 B = set(random.sample(list(U), random.randint( = 0, b 10)))
                                 c = set(random.sample(list(U), random.randint( = 0, b: 10)))
                                  D = set(random.sample(list(U), random.randint( = 0, b 10)))
      Th External Libraria
       👺 Scratches and (
                              def check_equivalence(A, B, C, D, U):
                                  expr1 = ((U-A) & (U-B) & C) | ((U-A) & B & C) | (A & B & (U-C)) | (A & B & C)
                                  expr2 = (C & (U - A)) | (A & B)
                                 print(expr1)
                                  print(expr2)
                                 return expr1 == expr2
                              def test_equivalence():
                                  for _ in range(1000):
                                     A, B, C, D, U = generate_sets()
     Run
            program_course >>
  {6}
 {8, 5}
  \{8, 5\}
  {8}
  {8}
```

```
2) ((A - B)\Delta B) - C = ((A \cap \overline{B})\Delta B) \cap \overline{C} = ((A \cap \overline{B} \cap \overline{B}) \cup (B \cap (\overline{A} \cup B)) \cap \overline{C} = ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B \cup B)) \cap \overline{C} = ((A \cap \overline{B}) \cup B) \cap \overline{C} = A \cap \overline{C} \cup B \cap \overline{C} = A\overline{C} \cup B\overline{C}
```

{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10} {2, 4, 5, 6, 7, 8, 10} выражения тождественны.

Process finished with exit code 0

```
Project - Sorting py Program_course.py Project - Sorting py Program_course.py Project - Sorting py Project - Sorti
```

Найдем СНФК с помощью разложения Шеннона

```
\overline{A} \, \overline{B} \, C = \emptyset
\overline{A} \, B \, \overline{C} = U
\overline{A} \, B \, \overline{C} = \emptyset
A \, \overline{B} \, \overline{C} = U
A \, \overline{B} \, C = \emptyset
A \, B \, \overline{C} = U
A \, B \, \overline{C} = U
A \, B \, C = \emptyset
CH\Phi K: \overline{A} \, B \, \overline{C} \, \cup A \, \overline{B} \, \overline{C} \, \cup A \, \overline{B} \, \overline{C}
```

```
∨ □ python_Project

                                  U = set(range(1, 11)) # Универсальное множество
                                                                                                      A 23
                                  A = set(random.sample(list(U), random.randint( a: 0, b: 10)))

→ algorithms

                                  B = set(random.sample(list(U), random.randint( a 0, b 10)))
เร
           sorting.py
                                  C = set(random.sample(list(U), random.randint( a 0, b 10)))
                                  D = set(random.sample(list(U), random.randint( a: 0, b: 10)))
80
         .gitignore
                                  return A, B, C, D, U
         main.py
         🕏 program_cou
                              def check_equivalence(A, B, C, D, U):
    > (h External Librario
       Scratches and
                                  expr1 = (U-A) & B & (U-C) | A & (U-B) & (U-C) | A & B & (U-C)
                                  expr2 =A & (U-C) | B & (U-C)
                                  print(expr1)
                                  print(expr2)
                                  return expr1 == expr2
                              def test_equivalence():
                                  for _ in range(1000):
                                      A, B, C, D, U = generate_sets()
                                      if not check_equivalence(A, B, C, D, U):
                                          print("Выражения не эквивалентны для множеств:")
                                          print(f"A: {A}, B: {B}, C: {C}, D: {D}, U: {U}")
                                          break
                      check_equivalence()
     Run
            program_course ×
```

```
      З, 4, 6}

      set()

      set()

      set()

      set()

      {1, 2, 3, 6, 9, 10}

      б {1, 2, 3, 6, 9, 10}

      выражения тождественны.
```

3)
$$(A - C) \cap (C - A \cup B) = (A \cap \overline{C}) \cap (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) = \emptyset$$

Найдем СНФК с помощью разложения Шеннона

```
\overline{A} \ \overline{B} \ C = \emptyset
\overline{A} \ B \ \overline{C} = \emptyset
\overline{A} \ B \ C = \emptyset
A \ \overline{B} \ \overline{C} = \emptyset
A \ \overline{B} \ C = \emptyset
A \ B \ \overline{C} = \emptyset
A \ B \ \overline{C} = \emptyset
A \ B \ \overline{C} = \emptyset
A \ B \ C = \emptyset
A \ B \ C = \emptyset
A \ B \ C = \emptyset
```

4) $(A - C)\Delta \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (A \cap \overline{C})\Delta \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (A \cap \overline{C}) \cap (A \cup B \cup \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cap (\overline{A} \cup C) = A \cap \overline{C} \cup C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$

```
python_Project
                                                                                          A 25
  algorithms
                       def check_equivalence(A, B, C, D, U):
      🗬 sorting.py
   build
                           expr1 = (A-C)^{\wedge}((U-A) & (U-B) & C)
    ⊘ .gitignore
                          expr2 =(A & (U-C)) | (C & (U - A) & (U -B))
                           print(expr1)
                           print(expr2)
 Th External Librario
  Scratches and
                           return expr1 == expr2
                       def test_equivalence():
                           for _ in range(1000):
                                  print("Выражения не эквивалентны для множеств:")
                                   print(f"A: {A}, B: {B}, C: {C}, D: {D}, U: {U}")
                       test_equivalence()
      program_course ×
Run
    выражения эквивалентны.
      {1, 10, 5, 9}
      {2, 3, 4, 5, 6, 9, 10}
     {2, 3, 4, 5, 6, 9, 10}
5
      {10, 1, 2, 3}
      {10, 1, 2, 3}
{2, 6, 7, 9, 10}
      {2, 6, 7, 9, 10}
亩
      выражения тождественны.
```

Найдем СНФК с помощью разложения Шеннона

```
\overline{A} \ \overline{B} \ C = U
\overline{A} \ B \ \overline{C} = \emptyset
\overline{A} \ B \ C = \emptyset
\overline{A} \ \overline{B} \ \overline{C} = U
\overline{A} \ \overline{B} \ C = \emptyset
\overline{A} \ \overline{B} \ \overline{C} = U
```

 $ABC = \emptyset$

CH Φ K: $\overline{A}\overline{B}$ C \cup A $\overline{B}\overline{C}$ \cup A B \overline{C}

```
Project ~
                         e sorting.py
                                           program_course.py ×
                                                                   master.py
                                                                                     main.py

∨ □ python_Project

                                     expr1 = (A & (U-C)) | (C & (U-A) & (U-B))

✓ □ algorithms

                                  • expr2 = ((U-A) & (U-B) & C) | (A & (U-B) & (U-C)) | (A & B & (U-C))
33
            e sorting.py
                                     print(expr1)
80
          Ø .gitignore
                                     print(expr2)
          e main.py
                                     return expr1 == expr2
     > file External Librario
       Scratches and
                                 def test_equivalence():
                                      for _ in range(1000):
                                          \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{U} = generate_sets()
                                          if not check_equivalence(A, B, C, D, U):
                                              print("Выражения не эквивалентны для множеств:")
                                              print(f*A: {A}, B: {B}, C: {C}, D: {D}, U: {U}*)
                                              break
                                          print("выражения эквивалентны.")
                                test_equivalence()
                        check_equivalence()
      Run
             program_course ×
D
6
(D)
2
           выражения эквивалентны.
```

```
Run program_course ×

{1, 2, 7, 8, 10}

{2, 6}

{3, 4, 5, 6, 7, 10}

{3, 4, 5, 6, 7, 10}

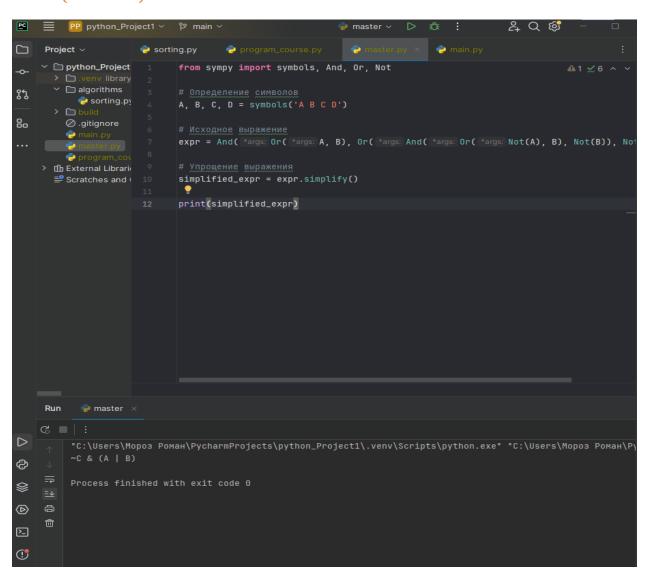
{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10}

{2, 3, 4, 5, 8, 9, 10}

выражения тождественны.

Process finished with exit code 0
```

5) $(A \cup B) \cap ((\overline{A} \cup B) \cap \overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B} \cup \emptyset \cup \overline{C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B} \cup \overline{C}) = \overline{C} \cap A \cup \overline{C} \cap B = \overline{C}A \cup \overline{C}B$



```
\overline{A} \overline{B} C = \emptyset
\overline{A} \ \mathrm{B} \ \overline{C} = U
\overline{A} B C = \emptyset
A \overline{B} \overline{C} = U
A \overline{B} C = \emptyset
AB\overline{C}=U
ABC = \emptyset
```

CH Φ K: \overline{A} B \overline{C} U A \overline{B} \overline{C} U A B \overline{C}

```
80
        Ø .gitignore
        e main py

√ def check_equivalence(A, B, C, D, U):
                                 expr1 = ((U-C) & A) | ((U-C) & B)
    expr2 = ((U-A) & B & (U-C)) | (A & (U-B) & (U-C)) | (A & B & (U - C))
      Scratches and
                                print(expr1)
                                print(expr2)
                                return expr1 == expr2
                            v def test_equivalence():
                                 for _ in range(1000):
                                     A, B, C, D, U = generate_sets()
                                         print("Выражения не эквивалентны для множеств:")
                                         print(f"A: {A}, B: {B}, C: {C}, D: {D}, U: {U}")
                                     print("выражения эквивалентны.")
                     test_equivalence()
     Run
           program_course ×
0
6
8
(D)
    \Sigma
         выражения эквивалентны.
```

```
{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10}
    {1, 2, 3, 4, 5, 9}
    {1, 2, 3, 4, 5, 9}
    {2, 4, 6}
    {2, 4, 6}
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10}
⑪
    {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10}
    выражения тождественны.
```

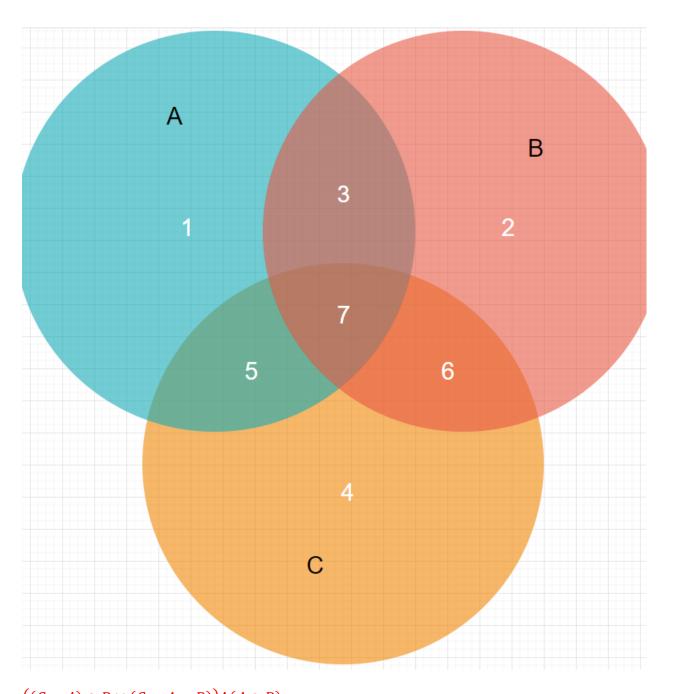
СНФК Выражений:

- a) $\overline{A}\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup AB\overline{C} \cup ABC$
- b) $\overline{A} B \overline{C} \cup A \overline{B} \overline{C} \cup A B \overline{C}$
- c) $A \cap \overline{C} \cap C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$
- d) $\overline{A}\overline{B}C \cup A\overline{B}\overline{C} \cup AB\overline{C}$
- e) $\overline{A} \ B \overline{C} \cup A \overline{B} \overline{C} \cup A B \overline{C}$

Исходя из результатов, полученных при использовании метода эквивалентных преобразований

MTOT:
$$\overline{B1} \sim \overline{B2}$$
, $\overline{B1} \sim \overline{B3}$, $\overline{B1} \sim \overline{B4}$, $\overline{B1} \sim \overline{B5}$; $\overline{B2} \sim \overline{B3}$, $\overline{B2} \sim \overline{B4}$, $\overline{B2} \sim \overline{B5}$ $\overline{B3} \sim \overline{B4}$, $\overline{B3} \sim \overline{B5}$

$$\{((C-A)\cap B\cup (C-A-B))\Delta(A\cap B), ((A-B)\Delta B)-C, (A-C)\cap (C-A\cup B), (A-C)\Delta\overline{A}\cap \overline{B}\cap C, (A\cup B)\cap (\overline{A}\cup B)\cap \overline{B}\cup \overline{C})\}$$



$$((C - A) \cap B \cup (C - A - B))\Delta(A \cap B)$$

$$= ((\{4,5,6,7\} - \{1,3,5,7\}) \cap \{2,3,6,7\})$$

$$\cup (\{4,5,6,7\} - \{1,3,5,7\} - \{2,3,6,7\}))\Delta(\{1,3,5,7\} \cap \{2,3,6,7\})$$

$$= (\{4,5\} \cap \{2,3,6,7\} \cup \{4,5\})\Delta\{3,7\} = \{3,4,5,7\}$$

$$((A - B)\Delta B) - C = ((\{1,3,5,7\} - \{2,3,6,7\})\Delta\{2,3,6,7\}) - \{4,5,6,7\}$$

$$= (\{1,5\}\Delta\{2,3,6,7\}) - \{4,5,6,7\} = \{1,2,3\}$$

$$(A - C) \cap (C - A \cup B) = (\{1,3,5,7\} - \{4,5,6,7\}) \cap (\{4,5,6,7\} - \{1,3,5,7\} \cup \{2,3,6,7\})$$

$$= \{1,3\} \cap \{4\} = \emptyset$$

$$(A - C)\Delta \overline{A} \cap \overline{B} \cap C = (\{1,3,5,7\} - \{4,5,6,7\})\Delta\{2,4,6\} \cap \{1,4,5\} \cap \{4,5,6,7\} = \{1,3\}\Delta\{4\}$$

$$= \{1,3,4\}$$

```
(A \cup B) \cap \Big( (\overline{A} \cup B) \cap \overline{B} \cup \overline{C} \Big)
= \{ \{1,3,5,7\} \cup \{2,3,6,7\} ) \cap ((\{2,4,6\} \cup \{2,3,6,7\}) \cap \{1,4,5\} \cup \{1,2,3\} \})
= \{1,2,3,5,6,7\} \cap (\{2,3,4,6,7\} \cap \{1,4,5\} \cup \{1,2,3\}) = \{1,2,3,5,6,7\} \cap (\{4\} \cup \{1,2,3\})
= \{1,2,3\}
Исходя из результатов, полученных при использовании теоретико-множественного метода: \overline{B1} \sim \overline{B2}, \overline{B1} \sim \overline{B3}, \overline{B1} \sim \overline{B4}, \overline{B1} \sim \overline{B5};
\overline{B2} \sim \overline{B3}, \overline{B2} \sim \overline{B4}, \overline{B2} \sim \overline{B5}
\overline{B3} \sim \overline{B4}, \overline{B3} \sim \overline{B5}
```

Вывод: изучили методы доказательств теоретико-множественных тождеств.