Лабораторна робота № 2
Викорстання віконних функцій для зменшння ефекту частотних витоків

доц. Чкалов О. В.
tchkalov@gmail.com

20 березня 2024 р.

Мета роботи. Ознайомитися з явищем частотного витоку та дослідити вплив накладання віконних функцій на якість спектральної характеристики

1 Короткі теоретичні відомості

При відслідковуванні спектру сигналу в динаміці фрагмент вейву намагаються брати порівняно коротким, щоб результат якнайточніше характеризував частотний склад сигналу саме в данний момент часу. Хоча цей фрагмент не можна зменшувати нескінченно, бо від його довжини залежить також і роздільна здатність по частоті, всеж він є порівняно коротким і типово включає максимум декілька десятків періодів основної частоти. Внаслідок цього можуть спостерігатися деякі небажані ефекти, зокрема, ефект частотних витоків.

Сформуємо одночастотний сигнал 440 Гц, утворимо вейв довжиною 30 періодів і розрахуємо спектр. Результат можна бачити на рис. 1. Попри те, що результат виглядає неідеальним («трикутник» замість «стовпчика» на частоті 440 Гц), це обумовлено лише обмеженою роздільною здатністю по частоті, тобто значення спектру обраховуються з певною дискретністю. Але сама частота 440 Гц і її рівень знайдені вірно.

Тепер змінимо трохи довжину фрагмента, буквально на чверть періода і повторимо обчислення спектру. Результат представлено на рис. 2. Внаслідок невеликої зміни довжини фрагменту спектр змінився досить суттєво. Тепер в околі основної частоти 440 Гц явно присутні коливання на інших частотах. Але ж у вейві їх немає!

Причина в тому, що при першому обчисленні фрагмент містив ціле число періодів коливань, а тепер ми додали чверть періода. Перетворення Фур'є, що використовується для розрахунку спектру розглядає початковий фрагмент як періодичну функцію і приймає довжину фрагмента за її період. Але ж ми додали до початкового фрагмента **чверть**

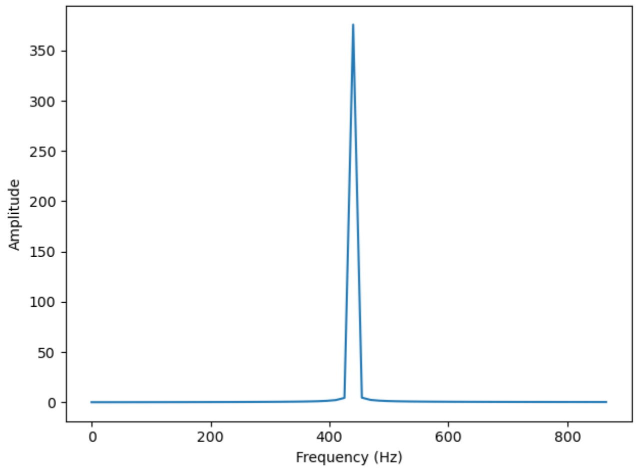

Рис. 1: Спектр монотонального сигналу 440 Гц

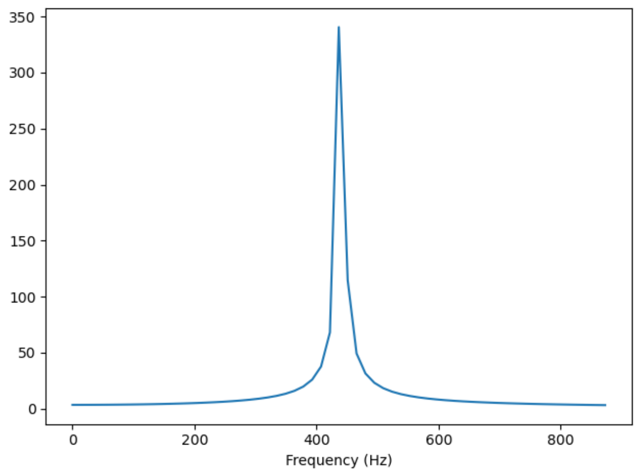

Рис. 2: Ефект частотного витоку

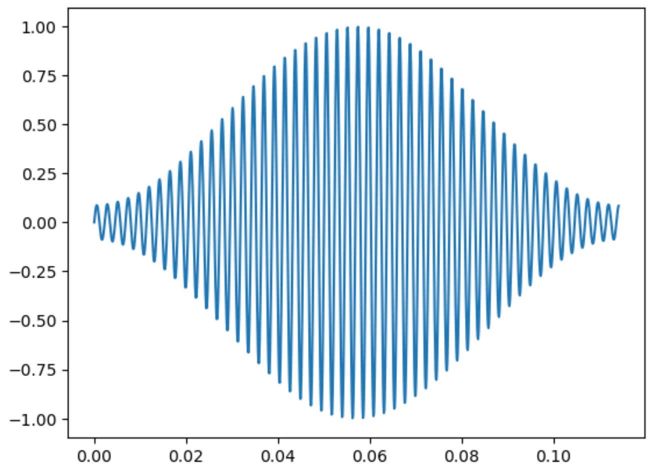

Рис. 3: Накладання віконної функції (функція Хаммінга)

періода коливань, тобто тепер значення функції на кінцях фрагмента не співпадають. Якщо все ж «зшити» кінці фрагмента, то в функції виникає «стрибок». Цей стрибок має свій спектр, який ми і спостерігаємо поруч з основною частотою. Цей ефект називають **частотним витоком**, оскільки правдивий пік основної частоти ніби «розтікається» по осі частот.

Яким же чином можна прибрати чи хочаб зменшити частотні витоки? Витримувати довжину фрагмента точно кратною основному періоду сигналу? Це практично неможливо, оскільки цей період заздалегідь невідомий, тим більше, він може змінюватись протягом часу, як в чірпах. Певного зниження витоків можна досягти множенням фрагменту на так звану **віконну функцію**. Ефект накладання віконної функції на сигнал можна бачити на рис. 3. Віконна функція підбирається таким чином, щоб амплітуду сигналу на кінцях інтервалу обертались на нуль чи значно зменшувалась. Завдяки цьому розрив на зшивці кінців зникає чи стає незначним. Відповідно зникають і амплітуди на частотах витоку. Зрозуміло, що спосіб цей не ідеальний. Адже саме накладання віконної функції також призводить до спотворення форми сигналу. Тим не менш, ефект частотного витоку може бути значно зменшений (рис. 4). Важливо відмітити, що негативним побічним ефектом накладання вікна є суттєве зниження амплітуди основної частоти в спектрі сигналу.

Будь-яка віконна функція спотворює форму сигнала. Тому ідеальної функції не існує. Різними авторами запропоновано десятки функцій, кожна з яких, на думку її винахідників, має певні переваги перед іншими. Нижче розглянемо деякі з таких функцій.

1.1 Прямокутне вікно

Прямокутна віконна функція формально задається виразом:

$$w[n] = 1; \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

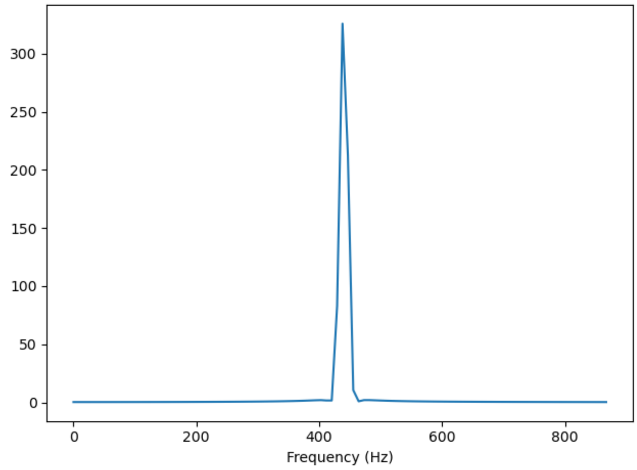

Рис. 4: Спектр сигналу після накладанні віконної функції

Фактично це означає збереження оригінального сигналу як є. Це тривіальне перетворення, що включене до розгляду для повноти набору.

1.2 Трикутне вікно

Функція трикутного вікна задається виразом:

$$w[n] = 1 - \left| \frac{n - N/2}{L/2} \right|; \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Величину L приймають рівною N, $N+1$, або $N+2$. Для достатньо великих N результат мало залежить від цього вибору.

1.3 Функція Уелша

Функція вікна має параболічну форму:

$$w[n] = 1 - \left(\frac{n - N/2}{L/2} \right)^2; \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

1.4 Синусне вікно

Функція вікна має синусоїдальну форму:

$$w[n] = \sin \frac{\pi n}{N} = \cos \left(\frac{\pi n}{N} - \frac{\pi}{2} \right); \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Називають також косинусним або навіть напів-синусним чи напів-косинусним вікном. Адже форма функції в межах вікна — половина хвилі.

1.5 Функції Ханна та Хаммінга

Загальний вигляд тригинометричного ряду з обмеженням до членів першого порядку:

$$w[n] = a_0 - (1 - a_0) \cdot \cos \frac{2\pi n}{N}; \qquad 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Взявши $a_0 = 0.5$, отримаємо функцію Ханна:

$$w[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) = \sin^2 \frac{\pi n}{N}.$$

Взявши $a_0 = 0.54$ (точніше $a_0 = 25/46$), отримаємо функцію Хаммінга.

1.6 Вікно з пласким верхом

Функція має вигляд косинусного ряду:

$$\begin{aligned} w[n] = a_0 - a_1 \cos \frac{2\pi n}{N} + a_2 \cos \frac{4\pi n}{N} - \\ - a_3 \cos \frac{6\pi n}{N} + a_4 \cos \frac{8\pi n}{N}. \end{aligned}$$

MATLAB використовує натупні значення коефіцієнтів: $a_0 = 0.21557895$; $a_1 = 0.41663158$; $a_2 = 0.277263158$; $a_3 = 0.083578947$; $a_4 = 0.006947358$.

Цікавою особливістю останньої функції є те, що на певних частинах інтервалу коефіцієнт перетворення стає від'ємним. Стверджується, що функція такого виду менше спотворює рівні сигналів при накладанні вікна.

2 Завдання

1. В робочому пакеті відкрийте блокнот `windowing.ipynb`. Ознайомтеся з поясненнями та прикладами, що до нього входять.

2. Сформуйте вейв основного сигналу, керуючись параметрами відповідно до вашого варіанту. Розрахуйте його «ідеальний спектр». Збільшіть довжину фрагменту на чверть періоду проти заданої довжини і розрахуйте спектр із ефектом частотних витоків. Порівняйте спектри.

3. Реалізуйте віконну функцію відповідно до вашого варіанту, застосуйте її до вейву і розрахуйте новий спектр. Порівняйте її з попередніми спектрами, зробіть висновки про корисні та негативні наслідки накладання вікна.

Вар.	Частота, Гц	Фрагмент (періодів)	Віконна функція
1	440	30	Трикутник
2	220	50	Уелша
3	440	30	Синусне вікно
4	220	20	Трикутник
5	880	50	Ханна
6	440	20	Уелша
7	220	30	Трикутник
8	440	20	Уелша
9	880	50	Ханна
10	440	20	Синусне вікно
11	880	30	Плаский верх
12	220	50	Уелша
13	880	20	Ханна
14	220	50	Синусне вікно
15	880	30	Плаский верх

Табл. 1: Індивідуальні завдання для дослідження

3 Контрольні запитання

1. Поясніть зміст ефекту частотних витоків.
2. В чому причина появи частотних витоків.
3. Яким чином віконна функція знижує частотні витоки?
4. В чому недоліки операції накладання вікна?