МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет “Львівська політехніка”

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки до виконання циклу лабораторних робіт для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», денної та заочної форм навчання

Львів – 2021

Математичні методи дослідження операцій: Методичні вказівки до виконання циклу лабораторних робіт для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», денної та заочної форм навчання / Укл. Марікуца У.Б. – Львів.: НУ «Львівська політехніка», 2021. – 119 с.

Затверджено на засіданні кафедри Систем автоматизованого проектування.
Протокол № _1_ від _27.09.2021 р.

Укладачі:

Марікуца Уляна Богданівна, канд. техн. наук

Відповідальний редактор:

П.В. Тимощук

Рецензенти:

Т.І. Мандзак, к.ф.-м.н., доц.
Р.С. Куц, студ. каф. САПР
М.Б. Омелянчук студ. каф. САПР

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Математичні методи дослідження операцій» відноситься до циклу математичної, природничо-наукової підготовки; базується на знанні дисциплін «Теорія ймовірностей і математична статистика» та «Методи оптимізації» і використовується при вивченні дисциплін «Методи та засоби штучного інтелекту» та «Моделювання складних систем», а також в рамках магістерської підготовки.

Метою дисципліни є систематизоване викладання сучасного математичного апарату прийняття рішень в складних системах та набуття студентами необхідних знань в цій галузі та практичних навичок у розробці моделей, а також розв’язання практичних задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Завдання вивчення дисципліни полягає у формуванні системи наступних знань та умінь:

Знання:

– знання принципів і правил формалізації економічних ситуацій, здатність застосовувати математичні методи обґрунтування та прийняття управлінських і технічних рішень у різних ситуаціях;
– ґрунтовна математична підготовка та знання теоретичних, методичних і алгоритмічних основ інформаційних технологій для їх використання під час розв’язання прикладних і наукових завдань в області інформаційних систем і технологій.

Уміння:

– підготовленість до розроблення нових математичних методів, ефективних алгоритмів і методів реалізації функцій інформаційних систем і технологій в прикладних областях, зокрема під час розробки методів і систем штучного інтелекту;

– уміння застосовувати математичні методи обґрунтування та прийняття управлінських і технічних рішень, адекватних умовам, в яких функціонують об’єкти інформатизації.

Лабораторні роботи орієнтовані на студентів-бакалаврів, що навчаються за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки». Роботи мають дослідницький характер. Для полегшення підготування студентів до лабораторних робіт у методичних вказівках наведено необхідні довідникові дані і матеріали. Бажано також, щоб лабораторні роботи стимулювали подальше поглиблене вивчення студентами теоретичного матеріалу [2-4;7-10] та сприяли оволодінню українською науково-технічною термінологією [3;7;9;10].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1.

Багатокритеріальний вибір. Визначення оптимальних альтернатив за Парето та Слейтером

1 Мета роботи

Ознайомитись з поняттями оптимальності за Парето та за Слейтером при багатокритеріальному виборі [1-3;6;7].

2 Короткі теоретичні відомості

Задачу вибору, яка включає множину можливих рішень X та векторний критерій f, зазвичай називають багатокритеріальною задачею або задачею багатокритеріальної оптимізації. Позначимо множину рішень, що обираються, як $C(X)$. Ця множина представляє собою рішення задачі вибору і до неї може входити будь-яка підмножина множини можливих рішень X.

Постановка задачі багатокритеріального вибору включає:

1) множину можливих рішень X;

2) векторний критерій f;

3) відношення переваги $\succ_x$.

В загальному випадку векторний критерій має вигляд:

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m) \tag{1.1}$$

де $f_1, f_2, ..., f_m$ – числові функції, які визначені на множині можливих рішень X. Задача багатокритеріального вибору складається у знаходженні множини рішень, що обираються, $C(X) \subset X$ з врахуванням відношення переваги $\succ_X$ на основі заданого векторного критерію *f*, який відображає набір цілей особи, що приймає рішення (ОПР).

Розглянемо випадок, коли ОПР повинен обрати одно з двох можливих рішень x' або x''. Для цих рішень має місце один і тільки один з наступних трьох випадків:

1) $x' \succ_X x''$ – ОПР віддає перевагу першому рішенню (x');

2) $x'' \succ_X x'$ – ОПР віддає перевагу другому рішенню (x'');

3) не виконується ані $x' \succ_X x''$, ані $x'' \succ_X x'$ – ОПР не може надати переваги жодному рішенню.

Варіант, коли виконуються обидва випадки: $x' \succ_X x''$ та $x'' \succ_X x'$, не можливий внаслідок асиметричності відношення переваги $\succ_X$.

Для першого випадку $x' \succ_X x''$ говорять, що рішення x' *домінує* рішення x'' по відношенню $\succ_X$, або що рішення x'' *доміноване* x'. Для другого випадку $x'' \succ_X x'$ говорять, що рішення x'' *домінує* рішення x' по відношенню $\succ_X$, або що рішення x' *доміноване* x''. Для третього випадку кажуть, що рішення x' та x'' непорівнянні по відношенню $\succ_X$.

Нехай задана множина можливих рішень *X*, векторний критерій *f* та відношення переваги $\succ_X$. Припустимо, що для деякого можливого рішення x' виконується умова $x' \succ_X x''$. За визначенням відношення переваги $\succ_X$ це означає, що із пари x', x'' ОПР обере рішення x'. Тобто в термінах множини рішень, що обираються, це буде виглядати як:

$$x'' \succ_X x' \Leftrightarrow C\{x',\ x''\} = \{x'\}$$

Якщо рішення x'' не обирається із пари $\{x',\ x''\}$, це значить, що є рішення (x'), яке краще за нього ($x' \succ_X x''$). Розумно припустити, що на всій множині можливих рішень X рішення x'' також не буде обране, оскільки є принаймні одне рішення x' краще за нього. Таким чином, сформулюємо у вигляді аксіоми вимогу до поведінки ОПР:

Аксіома 1. (Аксіома виключення рішень, що домінуються)

Для будь-якої пари допустимих рішень $x', x'' \in X$, для яких має місце відношення $x' \succ_X x''$, виконується $x'' \notin C(X)$.

Незважаючи на очевидну «розумність» цієї аксіоми, не слід вважати, що вона виконується у будь-якому випадку при виборі рішень.

Розглянемо, наприклад, таку задачу вибору з трьох претендентів на два робочих місця за умови, що обидва робочі місця обов'язково повинні бути заповнені. Нехай в процесі порівняння претендентів з'ясувалося, що перший переважає другого та третього, а другий переважає третього. Вочевидь, що обрані будуть перший (x') та другий (x'') претенденти, хоча і виконується умова $x' \succ_X x''$ [1].

Цю задачу можливо розглядати як дві в сенсі вибору одного претендента на першу посаду з трьох можливих, а потім на другу посаду з виключенням з множини претендентів (можливих рішень) першого претендента.

Якщо задано декілька критеріїв оптимальності, то для кожного з них необхідно визначити напрямок зацікавленості ОПР. Тут і надалі будемо вважати, що ОПР зацікавлений в отриманні максимальних значень всіх компонентів векторного критерію *f*. Таким чином, сформулюємо «Аксіому Парето»:

Аксіома Парето. Для всіх пар можливих рішень $x', x'' \in X$, для яких має місце нерівність $f(x') \geq f(x'')$, виконується співвідношення $x' \succ_X x''$.

Запис $f(x') \geq f(x'')$ означає виконання покомпонентних нерівностей $f_j(x') \geq f_j(x'')$ для всіх *j=1(1)m*, причому $f(x') \neq f(x'')$. Це означає, що компоненти першого вектора $f(x')$ не менші за відповідні компоненти другого вектора $f(x'')$, і принаймні одна компонента першого вектора суворо більша за відповідну компоненту другого.

Визначення 1. Рішення $x^* \in X$ називається оптимальним за Парето (парето-оптимальним), якщо не існує такого можливого вирішення $x \in X$, для якого має місце нерівність $f(x) \geq f(x^*)$. Всі парето-оптимальні рішення утворюють множину Парето, що позначається $P_f(X)$.

У відповідності до «Визначення 1»:

$$P_f(X) = \{x^* \in X | \text{не існує такого } x \in X, \text{ що } f(x^*)\}.$$

Тобто, парето-оптимальне рішення – це таке можливе рішення, яке не може бути покращене (збільшене) по жодному з наявних критеріїв без погіршення (зменшення) по будь-якому хоча б одному іншому критерію. Рішення, що входять до множини Парето, також називають парето-ефективними.

Принцип Еджворта-Парето. Якщо ОПР веде себе «розумно» (тобто виконуються умови «Аксіоми 1» та «Аксіоми Парето»), то рішення, що їм обираються, обов'язково повинні бути парето-оптимальними $C(X) \subset P_f(X)$.

Домінування рішення $x^* \in X$ над $x \in X$ за Парето позначається як $x^* \succ_p x$, або $x^* \succ Px$, або $x^* \succ^P x$.

В багатьох випадках пошук парето-оптимальних рішень є вкрай трудомісткою задачею. Тому введемо поняття «слабкого» парето-оптимального рішення або рішення, оптимального за Слейтером.

Визначення 2. Рішення $x^* \in X$ називається оптимальним за Слейтером, якщо не існує такого можливого вирішення $x \in X$, для якого має місце нерівність $f(x) > f(x^*)$. Всі оптимальні рішення за Слейтером утворюють множину Слейтера, що позначається $S_f(X)$.

Запис $f(x') > f(x'')$ означає виконання покомпонентних нерівностей $f_j(x') > f_j(x'')$ для всіх *j=1(1)m*, причому $f(x') \neq f(x'')$. Це означає, що компоненти першого вектора $f(x')$ суворо більші за відповідні компоненти другого вектора $f(x'')$.

Домінування рішення $x^* \in X$ над $x \in X$ за Слейтером позначається як $x^* \succ_S x$, або або $x^* \succ Sx$, або $x^* \succ^S x$.

Хоча рішення, оптимальні за Слейтером, менш цікаві за оптимальні за Парето, але в багатьох випадках при вирішенні задач багатокритеріальної оптимізації отримуються саме такі рішення.

Як при пошуку парето-оптимальних рішень, так і при пошуку рішень, оптимальних за Слейтером, необхідно враховувати узгодженість побажань ОПР. Тобто, ОПР зацікавлений в отриманні максимальних значень всіх компонентів векторного критерію *f*.

Геометрична інтерпретація принципу Еджворта-Парето наведена на рис. 1.1.

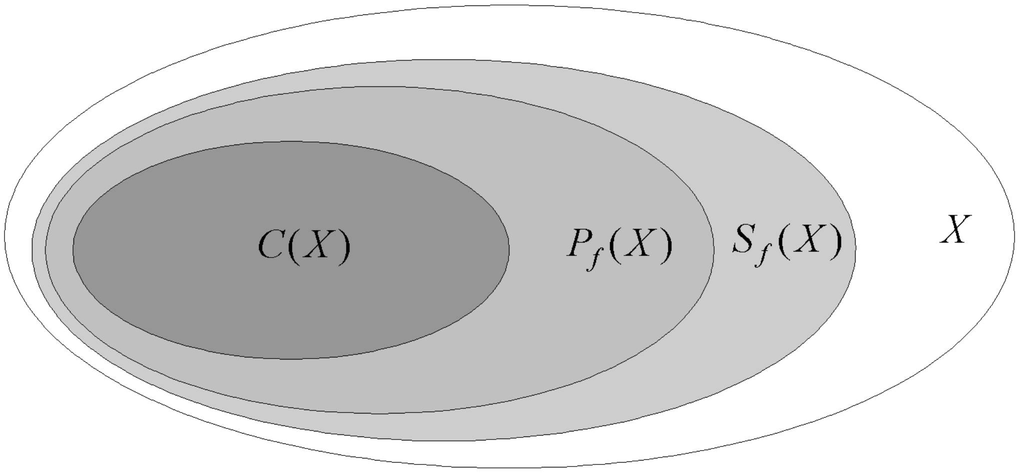


Рисунок 1.1 – Відношення між множинами допустимих, оптимальних за Слейтером, парето-оптимальних та обираних рішень

3 Алгоритми знаходження множини Парето та Слейтера

3.1 Алгоритм знаходження множини Парето

1) Покласти $P(X) = X$, $i=1$, $j=2$.

2) Перевірити $f(x_i) \succ Pf(x_j)$. Якщо умова виконуються, перейти до п. 3, інакше – до п. 5.

3) Виключити з множини X рішення x_j. Перейти до п. 4.

4) Перевірити виконання нерівності $j < N$. Якщо умова виконується, покласти $j = j + 1$ і повернутися до п. 2, інакше – перейти до п. 7.

5) Перевірити нерівність $f(x_j) \succ Pf(x_i)$. Якщо умова виконується, перейти до п. 6, інакше – повернутися до п. 4.

6) Видалити з поточної множини *P(X)* рішення x_i. Перейти до п. 7.

7) Перевірити виконання нерівності $i < N - 1$. Якщо умова виконується, послідовно покласти $i = i + 1, j = i + 1$. Повернутися до п. 2. Інакше (якщо $i \geq N - 1$) обчислення закінчити (залишилися лише парето-оптимальні рішення).

3.2 Алгоритм знаходження множини Слейтера

1) Покласти S(X) = X, i=1, j=2.

2) Перевірити $f(x_i) \succ Sf(x_j)$. Якщо умова виконуються, перейти до п. 3, інакше – до п. 5.

3) Виключити з множини X рішення x_j. Перейти до п. 4.

4) Перевірити виконання нерівності $j < N$. Якщо умова виконується, покласти $j = j + 1$ і повернутися до п. 2, інакше – перейти до п. 7.

5) Перевірити нерівність $f(x_j) \succ Sf(x_i)$. Якщо умова виконується, перейти до п. 6, інакше – повернутися до п. 4.

6) Видалити з поточної множини *S(X)* рішення x_i. Перейти до п. 7.

7) Перевірити виконання нерівності $i < N - 1$. Якщо умова виконується, послідовно покласти $i = i + 1, j = i + 1$. Повернутися до п. 2. Інакше (якщо $i \geq N - 1$) обчислення закінчити (залишилися лише оптимальні рішення за Слейтером).

4 Завдання

4.1 Для кожного рядка (1-3) за варіантом («Додаток А») побудувати таблицю значень альтернатив (A1-A20) в області критеріїв (Q1, Q2), де значення за першим критерієм відповідають першій цифрі числа, за другим критерієм – другій цифрі числа. Аналітично (за допомогою алгоритмів п. 3.1–3.2) та графічно визначити множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером (6 рисунків).

5 Приклад виконання

Надано рядок з 10-ти чисел: {79, 95, 4, 37, 92, 95, 12, 52, 70, 14}. Необхідно:

1) побудувати значення альтернатив в області критеріїв (Q1, Q2), де значення за першим критерієм відповідають першій цифрі числа, за другим критерієм – другій цифрі числа;
2) визначити аналітично множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером;
3) визначити графічно множину оптимальних рішень за Парето та за Слейтером.

П.1) Побудуємо значення альтернатив в області критеріїв (Q1, Q2) (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Значення альтернатив в області критеріїв

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4

П.2) Визначимо аналітично множину оптимальних рішень:

- (Ітерація 1 по A1) Обираємо перший стовпець (A1) і почергово порівнюємо його Q1 і Q2 з наступним стовпцем (A2):

Оскільки Q1(A1) < Q1(A2) можна пропускати порівняння по Q2 оскільки правила домінації за Парето та за Слейтером вже порушені, отже переходимо на наступну ітерацію

Таблиця 2.1 – (Ітерація 1 по A1)

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето										
Домінується за Слейтером										

- (Ітерація 2 по A1) Продовжуємо порівнювати Q1 і Q2 стовпця (A1) з наступними стовпцями, цього разу це буде A3:

В процесі порівняння визначаємо що Q1(A1) > Q1(A3), отже продовжуємо порівняння;

Визначивши що і Q2(A1) > Q2(A2), можна зробити висновок що A1 домінує над A3, за Парето та за Слейтером. Робимо позначки у відповідних клітинках

Таблиця 2.2 – (Ітерація 2 по A1)

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1							
Домінується за Слейтером			A1							

- (Подальші ітерації по A1) Продовжуємо порівнювати Q1 і Q2 стовпця (A1) з наступними стовпцями (A4, …, A10):

В процесі порівняння лишаємо мітки у відповідних клітинках стовпців.

Таблиця 2.3 – (результати ітерацій по A1)

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1	A1			A1			
Домінується за Слейтером			A1	A1			A1			

- (Ітерація 1 по А2) Після того як стовпець А1 був порівняний з усіма іншими переходимо до стовпця А2 і починаємо порівнювати його Q1 і Q2 з іншими за тим же алгоритмом, починаючи із стовпця А1:

В процесі порівнянь було визначено що Q1(A2) > Q1(A1), але Q2(A2) < Q2(A1). Такий випадок не задовольняє правила домінування за Парето та Слейтером, отже переходимо на наступну ітерацію.

Таблиця 2.4 – (Ітерація 1 по А2)

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1	A1			A1			
Домінується за Слейтером			A1	A1			A1			

- (Ітерація 2 по A2) Порівнювати з A3 та A4 не має потреби, бо вони вже були доміновані A1, тому в цій ітерації прирівнюватимуться A2 та A5:

В процесі порівнянь було визначено що Q2(A2) > Q2(A5), але Q1(A2) = Q1(A5). Такий випадок задовольняє лише правило домінування за Парето, але не за Слейтером, тому ставимо відповідну відмітку лише у рядку призначеному для Парето.

Таблиця 2.5 – (Ітерація 2 по A2)

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1	A1	A2		A1			
Домінується за Слейтером			A1	A1			A1			

За вищевказаним алгоритмом продовжуємо знаходження значення альтернатив в області критеріїв, кінцеві результати (Таблиця 2.6)

Таблиця 2.6 – Значення альтернатив в області критеріїв

Критерії	Альтернативи									
	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Q1	7	9	0	3	9	9	1	5	7	1
Q2	9	5	4	7	2	5	2	2	0	4
Домінується за Парето			A1	A1	A2		A1	A2	A2	A2
Домінується за Слейтером			A1	A1			A1	A2	A2	A2

Множина оптимальних значень за Парето: A1, A2=A6.

Множина оптимальних значень за Парето: A1, A2=A6, A5.

П.3) Визначимо графічно границю Парето (рис. 3.1) та Слейтера (рис. 3.2).

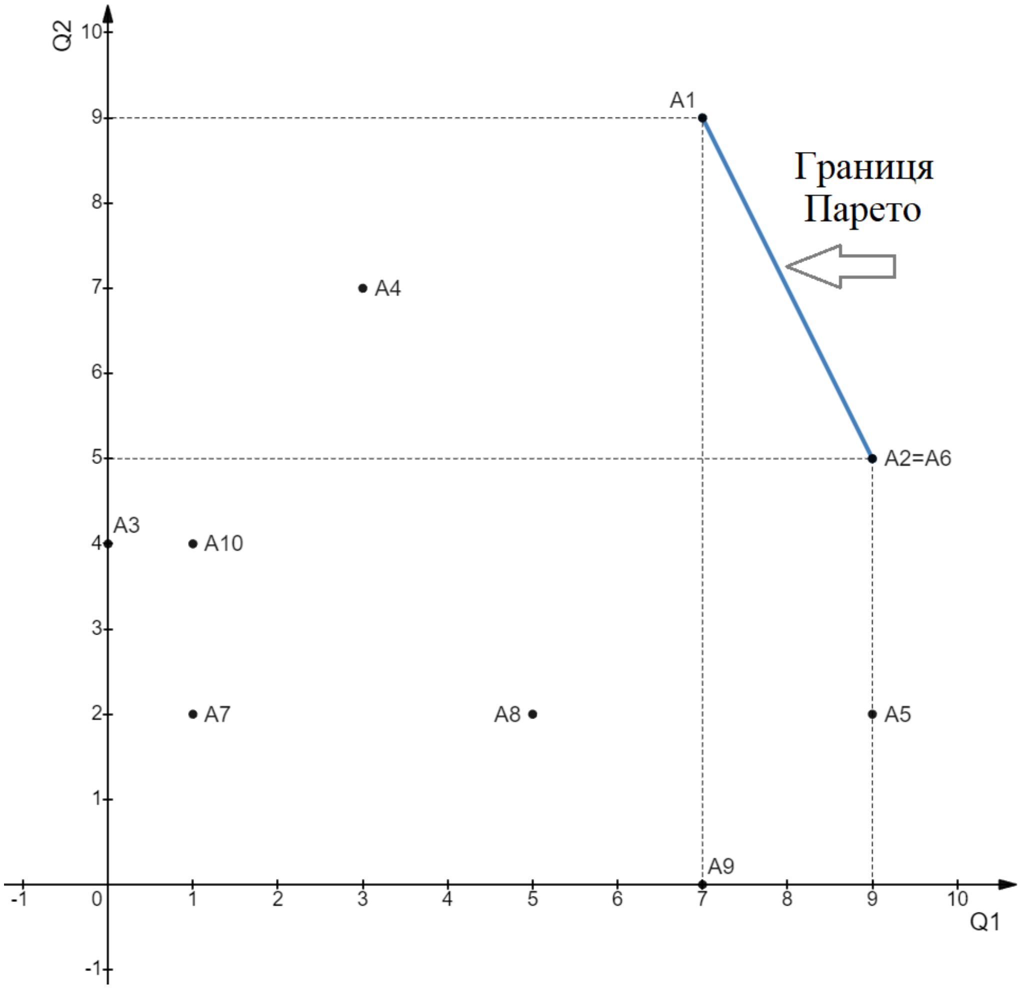


Рисунок 3.1 – Границя Парето

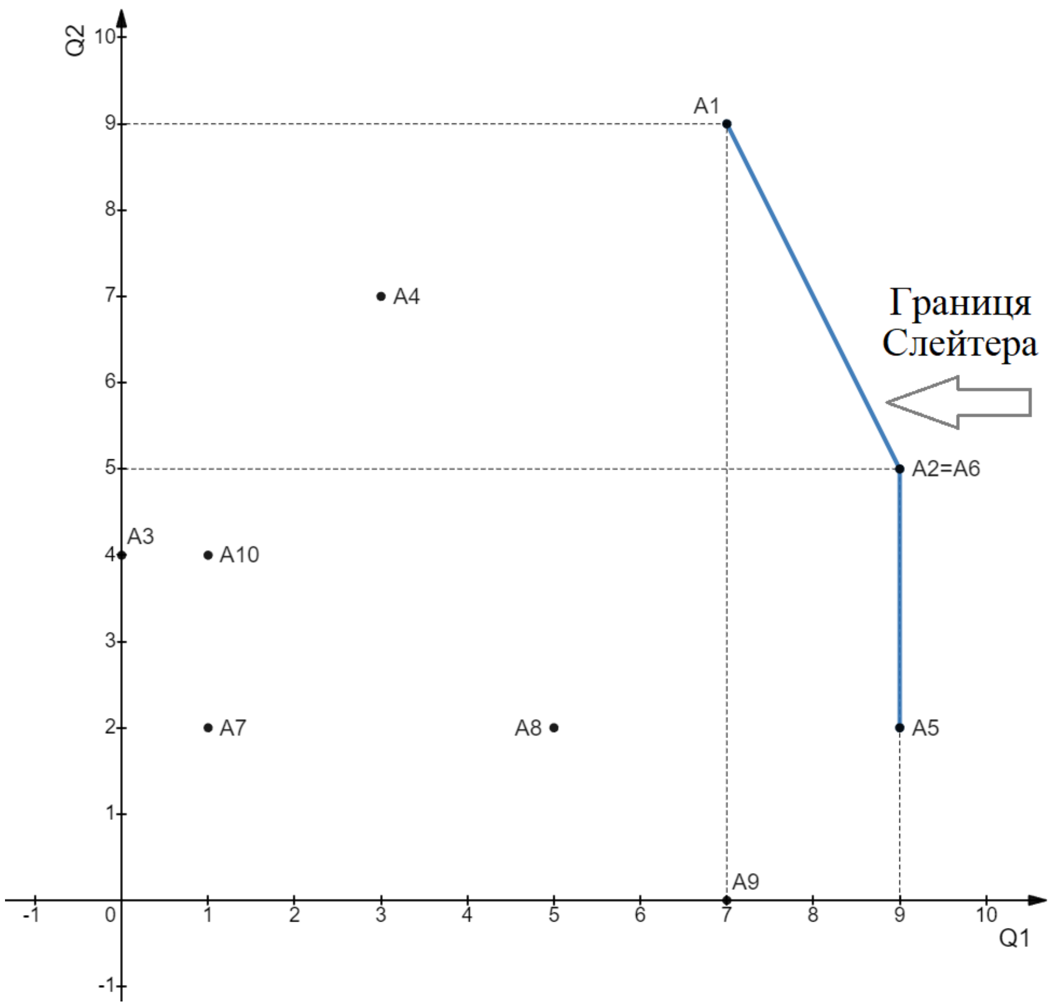


Рисунок 3.2 – Границя Слейтера

6 Зміст звіту

6.1 титульний аркуш;

6.2 мета роботи;

6.3 варіант завдання;

6.4 короткі теоретичні відомості;

6.5 результати побудови значень альтернатив у області критеріїв у вигляді таблиці 1.1 (3 таблиці);

6.6 результати визначення множини оптимальних рішень за Парето та за Слейтером у вигляді таблиці 2.6 (3 таблиці);

6.7 рисунки з графічним визначенням границі Парето та Слейтера (аналогічно до рис. 3.1, 3.2);

6.8 лістинг програми обчислення множини оптимальних рішень за Парето та за Слейтером;

6.8 висновки щодо кількості альтернатив, які увійшли до складу оптимальних за Парето та за Слейтером.

7 Контрольні запитання

7.1 З чого складається постановка задачі багатокритеріального вибору?

7.2 В чому полягає роль ОПР?

7.3 Що таке «оптимальність» при багатокритеріальному виборі?

7.4 Що таке множина оптимальних рішень за Парето та за Слейтером?

7.5 Як співвідносяться множини допустимих, оптимальних за Парето, оптимальних за Слейтером та обираємих рішень?

7.6 Що таке «слабке» парето-оптимальне рішення?

7.7 В чому полягає принцип Еджворта-Парето?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2.
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

1 Мета роботи

Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії лінійного програмування, навчитись знаходити оптимальні плани задач лінійного програмування графічно, за допомогою симплекс методу і двоїстого симплекс методу.

2 Короткі теоретичні відомості

У даний час багато завдань планування та управління в галузях господарства, а також великий обсяг приватних прикладних задач розв'язуються методами математичного програмування. Найкраще розвиненими і вивченими в цій області є методи лінійного програмування. Лінійне програмування – це галузь математичного програмування, який вивчає підходи до побудови математичних моделей оптимізаційних задач, що характеризуються лінійною функцією мети та лінійними залежностями між змінними, та методи їх розв'язування.

Розв'язування задачі лінійного програмування з двома змінними графічно та симплекс-методом (СМ)

1. **Задача лінійного програмування**

Під задачею лінійного програмування (ЗЛП) в загальному розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від *n* змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування (ЛП) можна подати в такому вигляді: знайти такі числові значення змінних $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $n_x \geq 0$, які задовольняють систему лінійних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m. \end{cases}$$

і перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Цю функцію називають цільовою функцією або функцією мети, вона моделює поставлену в задачі мету.

Для спрощення можна формулювати задачу лише для максимуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити мінімум функції $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, то це те саме, що шукати максимум функції $f(x) =- f(x) =- c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max\ (min) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m. \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Розв'язати задачу ЛП означає знайти її оптимальний план та обчислити максимальне (мінімальне) значення цільової функції або показати, що оптимального плану не існує.

Під час розв'язку задачі ЛП можливі три випадки:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).
2. Оптимальний план не існує, хоча плани даної задачі існують, але на непустій множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).
3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Окрім того, існує три форми задачі лінійного програмування:

1. Загальна задача, коли система обмежень (1.2) містить хоча б одну нерівність.

2. Основна задача – це випадок задачі ЛП, коли всі обмеження системи (1.2) є рівняннями.

3. Канонічна задача – це частковий випадок основної задачі у тому розумінні, що система рівнянь (1.2) – канонічна, а цільова функція (1.1) виражена тільки через вільні невідомі.

Система лінійних рівнянь називають канонічною системою, якщо вона задовольняє такі дві умови:

1. У кожному рівнянні є одна невідома змінна з коефіцієнтом, що дорівнює 1, яка відсутня у решті рівнянь. Таку невідому називають базисною.

2. Вільні члени усіх рівнянь системи (1.2) невід'ємні.

Невідомі змінні, що не є базисними, називають вільними.

Якщо в канонічній системі покласти рівними нулю всі вільні змінні, то базисні змінні дорівнюватимуть невід'ємним вільним членам рівнянь. Отриманий таким чином план називається базисним планом канонічної задачі.

Для того, щоб загальну задачу привести до основної, потрібно нерівності замінити рівняннями: достатньо ввести невід'ємні додаткові невідомі, додавши їх до лівих частинах нерівностей "типу $\leq$", вирахувавши з лівих частин нерівностей "типу ≥" і приписавши до заданої цільової функції з нульовими коефіцієнтами.

Приклад 1.1. Розглянемо задачу максимізації функції:

$f = x_1 + 2x_2 \to max$

з обмеженнями

$\{2x_1 + 3x_2 \le 5,$

$\{x_1 - 5x_2 \le 4,$

$\{x_1 \ge 0,$

$\{x_2 \ge 0.$

Зведемо задачу до канонічної форми:

$f = x_1 + 2x_2 \to max$

$\{2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$

$\{x_1 - 5x_2 + x_4 = 4,$

$\{x_1 \ge 0,$

$\{x_2 \ge 0.$

Приклад 1.2. Розглянемо задачу мінімізації функції:

$f = 2x_1 + 2x_2 \to min$

з обмеженнями

$\{3x_1 + 1x_2 \ge -5,$

$\{x_1 - 2x_2 \ge -4.$

Помножимо на (-1) цільову функцію та зведемо нерівності до рівнянь:

$f = -2x_1 - 2x_2 \to max$

$\{3x_1 + 1x_2 - x_3 = -5,$

$\{x_1 - 2x_2 - x_4 = -4$

Помножимо рівняння на (-1) та отримаємо канонічну задачу:

$f = -2x_1 - 2x_2 \rightarrow max$

$\{-3x_1 - 1x_2 + x_3 = 5$

$\{-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4.$

2. Симплекс-метод розв'язування задачі ЛП

Відомим методом розв'язування задачі ЛП є симплекс-метод, що був опублікований Д.Б.Данцигом у 1949 р. Його ідея полягає в спрямованому переборі допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функції під час переходу змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв'язку задачі симплекс-методом:

Зводимо задачу лінійного програмування до канонічного вигляду. При необхідності переходу від нерівності до рівняння вводимо додаткові змінні.

Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію записуємо у вигляді розширеної системи:

$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$

$\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$

$\{\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots,$

$\{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max.$

Слід мати на увазі, що всі компоненти вектора правої частини мають бути невід'ємними.

2. Знаходимо допустимий базисний розв'язок. Отриману розширену систему заносимо в першу симплекс-таблицю (СТ-1). Останній рядок таблиці називають оціночним. У ньому, окрім значення цільової функції (в першій таблиці рівного 0), вказуємо критерії оптимальності: для небазисних змінних коефіцієнти цільової функції з протилежним знаком $-c_j$, для базисних 0. У першому зліва стовпчику таблиці записуємо основні змінні (базис)x_b, а в заголовок таблиці заносимо всі змінні; у другому стовпці – вільні члени розширеної системи $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Останній стовпець необхідний для оціночних відношень, які використовують під час розрахунку найбільшого можливого значення змінної. У робочу частину таблиці (починаючи з третього стовпця) заносимо коефіцієнти $-a_{ij}$ при всіх змінних із розширеної системи.

3. Знайдений опорний план перевіряємо на виконання критерію оптимальності – для задачі максимізації на наявність в останньому рядку від'ємних коефіцієнтів. Якщо таких коефіцієнтів немає, то розв'язок оптимальний, досягнуто $max f = c_0$ (в лівому нижньому куті таблиці), основні змінні приймають значення, записані в другому стовпці, а змінні, що не входять в базис, рівні 0, тобто отримуємо оптимальний базисний розв'язок.

4. Якщо критерій оптимальності не виконується, то найбільшому по модулю від'ємному коефіцієнту $\Delta_s < 0$ в останньому рядку відповідає провідний стовпчик s.

Обчислюємо оціночні відношення для кожного рядка за такими правилами:

1) ∞ , якщо $a_{is} \leq 0$;

2) 0, якщо $b_i = 0$ і $a_{is} > 0$;

3) $\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$, якщо $a_{is} > 0$.

Визначаємо $i \; min \left\{ \left|\frac{b_i}{a_{is}}\right| \right\}$. Якщо скінченного мінімуму немає, то задача не містить скінченного оптимуму ($f max = \infty$). Якщо мінімум існує, то вибираємо рядок q, на якому він досягається (будь-який, якщо їх декілька), та називаємо його провідним рядком. На перетині провідних стовпця та рядка знаходиться головний елемент a_{qs}.

5. Переходимо до нового опорного плану. Базисний розв'язок можна знайти за правилом прямокутника.

Правило прямокутника

Заповнюємо нову симплекс таблицю за правилом:

а) у лівому стовпці записуємо новий базис: замість основної змінної

q_x – змінну x_s;

b) на місці головного елемента ставимо 1, у провідному стовпчику всі елементи, окрім головного, прирівнюємо до нуля;

c) новий рядок з номером q отримуємо із старого рядка діленням на головний елемент a_{qs};

d) решта елементів a'_{ij} обчислюються за правилом прямокутника (рис. 2.1):

$$a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qi}}{a_{qs}}, \qquad b_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}, \qquad (2.1)$$

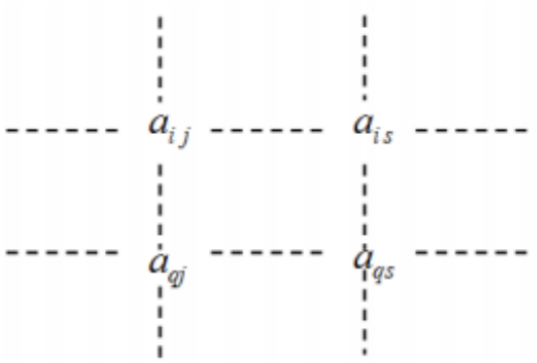


Рис. 2.1. Схема вибору елементів для методу прямокутника

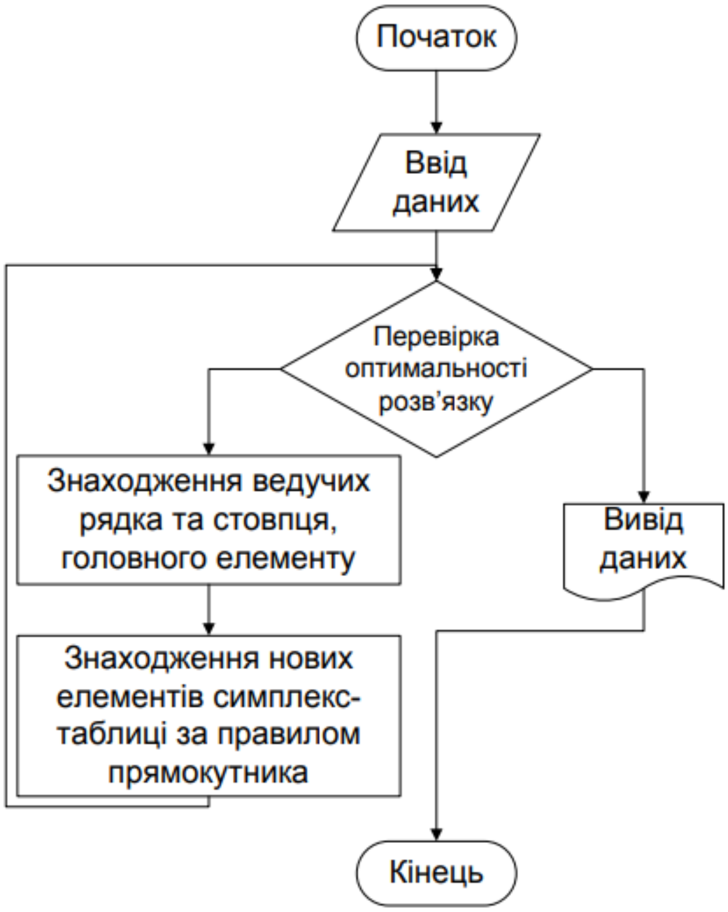


Рис. 2.2 Блок-схема симплекс-методу

3. Приклад розв'язування задачі симплекс-методом

Розв'язати задачу про оптимальне використання ресурсів симплекс-методом. Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує три типи сировини. Норми витрат ресурсів сировини кожного типу на одиницю продукції, їхня наявність, а також ціна наведені в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Тип ресурсу	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції				Наявність ресурсів
	A	B	C	D	
1	1	0	2	1	180
2	0	1	3	2	210
3	4	2	0	4	800
Ціна одиниці продукції	9	6	4	7	

Треба визначити, скільки сировини кожного виду потрібно виготовляти підприємству, якщо мета полягає в максимізації прибутку за умови, що збут продукції забезпечений.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 – число одиниць продукції, що відповідають видам *A, B, C, D*, які заплановано виготовляти на підприємстві. Оскільки існують обмеження на розміри витрат ресурсів, то змінні x_1, x_2, x_3, x_4 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800. \end{cases} \qquad (3.1)$$

За змістом задачі змінні задовольняють умовам невід'ємності:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \qquad (3.2)$$

Сумарний прибуток від реалізації продукції рівний:

$$F = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4. \qquad (3.3)$$

Отже, потрібно знайти такий план виробництва продукції $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, що задовольняє систему (3.1) та умови (3.2), при яких функція (3.3) приймає максимальне значення. Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію запишемо у вигляді розширеної системи:

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 180, & (p_1) \\
x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 210, & (p_2) \\
4x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_7 = 800, & (p_3) \\
F - 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 7x_4 = 0. & (f)
\end{cases}
$$

Додаткові змінні означають кількість відповідного ресурсу, що не використовується під час такого плану виробництва продукції (залишок).

Заповнюємо першу симплекс таблицю (СТ-1), у якій змінні x_5, x_6, x_7 вважаємо базисними (табл. 3.2). Останній рядок заповнюється коефіцієнтами лінійної функції з протилежним знаком (див. п. 2 алгоритму).

Як видно із табл. 3.2, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 рівні нулю, а додаткові змінні приймають свої значення відповідно з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому "плану", при якому нічого не виготовляється, ресурси не використовуються та значення цільової функції рівне нулю (тобто вартість виробництва продукції відсутня). Такий план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно і з 4-го рядку табл. 3.2, так як в ній існують чотири від'ємні числа: −9, −6, −4, −7. Від'ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загальної вартості продукції, що виготовляється, але й показують, наскільки збільшиться прибуток після введення в план одиниці того чи іншого товару. Так, число – 9 означає, що під час включення в план виробництва одиниці продукції типу *A* забезпечується збільшення загальної вартості товарів, що випускаються на 9 грошових одиниць. Якщо включити в план виробництва по одиниці продукції *B, C* або *D*, то загальна вартість виготовлених товарів виросте відповідно на 6, 4 або 7 грошових одиниць. Тому з економічної точки зору найбільш вигідно включати в план виробництва продукцію типу *A*.

Це ж необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплекс-методу. Відповідно до п. 3 алгоритму перевіряємо критерій оптимальності. В останньому рядку є від'ємні коефіцієнти. Вибираємо стовпчик, в якому найменший від'ємний елемент (-9), отже, цей стовпчик буде провідним (позначено вертикальною стрілкою).

Відповідно до п. 4 алгоритму, знаходимо оціночні відношення. Для цього ділимо елементи вільних членів на елементи ведучого стовпчика: 180/1=180; 210/0 = ∞;800/ 4 = 200 . Вибираємо min{180; ∞; 200}=180. Отже, перший рядок є провідним (позначено горизонтальною стрілкою). На перетині провідних рядка та стовпця стоїть головний елемент a11=1.

Таблиця 3.2. С Т-1

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		Основні				Додаткові			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	180	1	0	2	1	1	0	0	180
x_6	210	0	1	3	2	0	1	0	∞
x_7	800	4	2	0	4	0	0	1	200
F	0	-9	-6	-4	-7	0	0	0	

Відповідно до п.5 алгоритму переходимо до нового опорного плану. Будуємо симплекс-таблицю 2 (табл. 3.3.) Новий базисний розв'язок системи знайдемо за правилом прямокутника:

a) у ведучому стовпці всі елементи, крім головного, прирівнюємо до нуля;
b) перший рядок отримуємо шляхом ділення його елементів на головний елемент: a_{11}=1;
c) решта клітинок заповнюємо за правилом прямокутника, використовуючи (2.1).

Отримуємо

$b_2 = 210 - \frac{0\cdot180}{1} = 210; \quad b_3 = 800 - \frac{4\cdot180}{1} = 80; \quad b_4 = 0 - \frac{-9\cdot180}{1} = 1620;$

$a'_{22} = 1 - \frac{0\cdot0}{1} = 1; \quad a'_{23} = 3 - \frac{0\cdot2}{1} = 3; \quad a'_{24} = 2 - \frac{0\cdot1}{1} = 2; \quad a'_{25} = 0 - \frac{0\cdot1}{1} = 0;$

$a'_{32} = 2 - \frac{4\cdot0}{1} = 2; \quad a'_{33} = 0 - \frac{4\cdot2}{1} =- 8; \quad a'_{34} = 4 - \frac{4\cdot1}{1} = 0; \quad a'_{35} = 0 - \frac{4\cdot1}{1} =- 4;$

$a'_{42} =- 6 - \frac{-9\cdot0}{1} =- 6; a'_{43} =- 4 - \frac{-9\cdot2}{1} = 14; \; a'_{44} =- 7 - \frac{-9\cdot1}{1} = 2; \; a'_{45} = 0 - \frac{-9\cdot1}{1} = 9.$

Складемо другу симплекс таблицю (табл. 3.3), у лівому стовпці якої замість змінної x5, що виключається з базису, запишемо нову базисну змінну x1.

Таблиця 3.3 (СТ-2)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
x_1	180	1	0	2	1	1	0	0	∞
x_6	210	0	1	3	2	0	1	0	210
x_7	80	0	2	-8	0	-4	0	1	40
f	1620	0	-6	14	2	9	0	0	

У СТ-2 в останньому рядку існують від’ємні числа, що свідчить про те, що план не є оптимальним. Аналогічно, можна побудувати СТ-3 (табл. 3.4).

Таблиця 3.4 (СТ-3)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
x_1	180	1	0	2	1	1	0	0	90
x_6	170	0	1	7	2	2	1	$-\frac{1}{2}$	$24\frac{2}{7}$
x_2	40	0	1	-4	0	-4	0	$\frac{1}{2}$	∞
f	1860	0	0	-10	2	9	0	3	

І на цей раз критерій оптимальності не досягнутий: маємо два від'ємні елементи. Для обчислення виберемо як провідний третій стовпчик; визначимо, що другий рядок є провідним, відповідно, a_{25} – головний елемент.

Обчислимо нову симплекс таблицю (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 (СТ-4)

Базис	Вільний член	Змінні							Оціночні відношення
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8	
x_1	$131\frac{3}{7}$	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$306\frac{2}{3}$
x_5	$24\frac{2}{7}$	0	0	1	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	85
x_2	$137\frac{1}{7}$	0	1	0	$1\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$	∞
f	$2102\frac{6}{7}$	0	0	0	$4\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$1\frac{3}{7}$	$2\frac{2}{7}$	

У СТ-4 в останньому рядку існують від'ємні числа, що свідчить про те, що план не є оптимальним. Отже, будуємо СТ-5 (табл. 3.6).

Таблиця 3.6 (СТ-5)

Базис	Вільний член	Змінні						
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_8
x_1	95	1	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_5	85	0	0	$\frac{7}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
x_2	210	0	1	3	2	0	1	0
f	2115	0	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

Перевіримо, чи є даний план оптимальним, чи ні. Для цього розглянемо 4-ий рядок табл. 3.6. У цьому рядку нема від'ємних чисел. Це означає, що знайдений опорний план $X^*=(95, 210, 0, 0, 85, 0, 0)$ є оптимальним та $max\, f = 2115$.

Відповідно до умови задачі план випуску продукції, що включає виготовлення 95 товарів A та 210 товарів B, є оптимальним. При такому плані випуску продукції повністю використовується сировина II та III виду і залишається невикористаними 85 одиниць сировини I виду, а вартість виготовленої продукції дорівнює 2115 грошових одиниць.

Приклад розв'язування задачі ЛП графічно

Дуже часто задачу ЛП, яка містить лише дві невідомі змінні, розв'язують графічним методом. Графічний метод наочніший і зазвичай простіший для розуміння (хоч займає багато часу, бо вимагає побудови ретельного креслення). Також цей метод дозволяє практично одночасно знайти мінімальний і максимальний розв'язки задачі.

Основними кроками розв'язування задачі ЛП графічним методом є: побудувати область допустимих розв'язків задачі (опуклий багатокутник, який визначається як перетин півплощин, що відповідають нерівностям завдання), побудувати лінію рівня цільової функції, і, нарешті, рухати лінію рівня в потрібному напрямку, поки не досягнемо крайньої точки області – оптимальної точки (або множини точок). При цьому можна знайти єдиний оптимальний розв'язок (точку), безліч (відрізок) або жодного (область порожня або не обмежена у потрібному напрямку).

Розглянемо детальніше графічний метод на прикладі.

Приклад 4.1. Розв'язати задачу ЛП графічним методом:

$$f\left(x_1,\ x_2\right) = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 \le 50; & (I) \\ x_2 \le 80; & (II) \\ -3x_1 + 2x_2 \ge -90; & (III) \\ 4x_1 + x_2 \le 240; & (IV) \\ -3x_1 + x_2 \le 0; & (V) \\ x_1 \ge 0; & \\ x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

Спочатку відкладемо лінії, які отримують з обмежень. Для швидкого будування ліній зручно представити рівняння прямої у відрізках. Наприклад, рівняння $-3x_1+2x_2=-90$ зобразимо у вигляді:

$$\frac{x_1}{30} - \frac{x_2}{-45} = 1.$$

Отже, будуємо пряму, що проходить через точки (30;0) і (0;-45). Вибираємо з утворених внаслідок побудови прямої двох півплощин ту, яка відповідає умовам задачі. У випадку, коли пряма не проходить через точку (0;0), її зручно вибрати за контрольну. Наприклад, контрольна точка (0;0) не задовольняє умову нерівності $-3x_1 + 2x_2=-90$, тому обираємо півплощину, яка її не містить.

Аналогічно поступаємо з усіма нерівностями: замінюємо їх на рівності, проводимо відповідні прямі та обираємо необхідні півплощини.

$$x_1 = 50; (I)$$
$$x_2 = 80; (II)$$
$$-3x_1 + 2x_2 = -90; (III)$$
$$-3x_1 + x_2 = 0; (V)$$

У результаті отримаємо багатокутник допустимих розв’язків задачі – перетин усіх півплощин (рис. 4.1). Далі будуємо пряму, що відповідає цільовій функції *$2x_1+7x_2=0$*. Переносимо її паралельно в напрямі вектора (2; 7), який отримуємо з коефіцієнтів при змінних у цій функції. Максимальне значення функції буде в одній або двох вершинах (тоді й на відповідній стороні, що їх сполучає, це означає безліч розв'язків) многокутника, з якою (якими) перетнеться дана пряма.

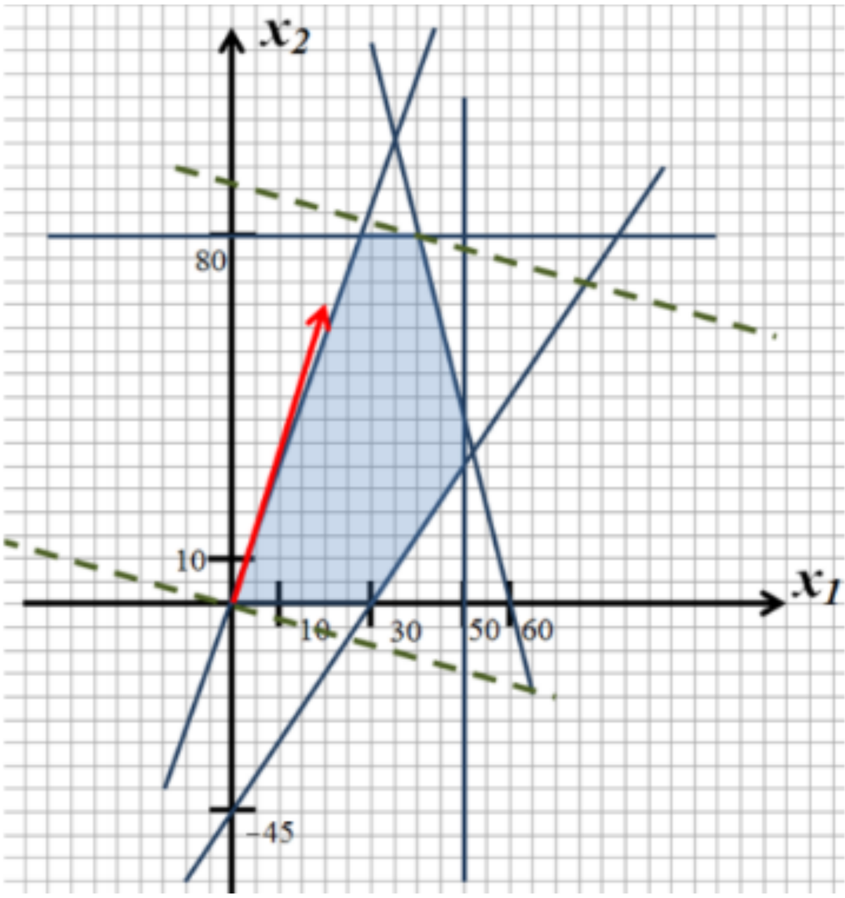


Рис. 4. 1. Графічний метод розв'язання задачі ЛП.

Таким чином ми отримали розв'язок задачі лінійного програмування: x_1=40; x_2=80 (остання точка перетину прямої, що відповідає функції мети, з багатокутником);

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 7x_2 \to max;$$
$$f(x_1, x_2) = 2\cdot40 + 7\cdot80 = 640;$$

Отже, задана функція має в точці (40;80) максимальне значення рівне 640.

3 Завдання

3.1. Отримати індивідуальний варіант завдання.

3.2. Розв'язати задачу з Додатку 1, використовуючи алгоритм наведений вище.

3.3. Написати програму розв'язування задачі ЛП та з її допомогою знайти розв'язок (максимальне значення функції та значення змінних, при якому воно досягається) задачі лінійного програмування згідно варіанту з Додатку 2.

3.4. Розв'язати задачу ЛП з Додатку 2 графічним методом, порівняти розв'язок з результатами написаної програми.

3.5. Оформити звіт про виконану роботу.

3.6. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

4 Зміст звіту

4.1. Титульний аркуш.

4.2. Тема звіту.

4.3. Мета звіту.

4.4. Теоретичні відомості.

4.5. Розв'язання задачі з додатку 1 аналітичним методом з описаними усіма послідовними кроками.

4.5. Текст програми (алгоритм симплекс-методу) до задачі з Додатку 2.

4.6. Вигляд реалізованої програми.

4.7. Розв'язання задачі з Додатку 2 графічним методом з описаними усіма послідовними кроками.

4.8. Висновки.

5. Вимоги до програми

Програма має передбачати наступні можливості:

5.1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:

i. Зведення до канонічної форми.

5.2. Ввід вхідних даних вручну:

i. Задати цільову функцію.

ii. Задати коефіцієнти обмеження на змінні “типу $\leq$”.

5.3. Передбачити можливість некоректного введення даних.

5.5. Підпис таблиць.

5.6. Вивід необхідного повідомлення у випадку не існування оптимального плану.

6. Контрольні запитання

6.1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.

6.2. Що таке цільова функція?

6.3. Як задачу мінімізації звести до задачі максимізації цільової функції?

6.4. Який план називається опорним?

6.5. Що таке допустимий план?

6.6. Які є три форми задачі ЛП?

6.7. Яка система називається канонічною?

6.8. Яка різниця між вільними та базисними змінними?

6.9. Опишіть алгоритм симлекс-методу.

6.10. На якій ідеї ґрунтується симплекс-метод?

6.11. У чому суть правила прямокутників?

6.12. Який елемент симплекс таблиці називається головним?

6.13. Як обчислити оціночні відношення для симплекс-таблиці?

6.14. Що таке провідний рядок (стовпець) симплекс-таблиці?

6.15. Яка умова закінчення симплекс-методу?

6.16. Чим відрізняється оптимальний розв'язок задачі ЛП від допустимого?

6.17. Чи може функція мети задачі ЛП містити нелінійні вирази зі змінних?

6.18. Чи може задача ЛП мати більше, ніж один, оптимальний розв'язок?

6.19. Чи може в допустимий розв'язок задачі ЛП входити від'ємна компонента?

6.20. Опишіть графічний спосіб розв'язування задачі ЛП.

Додаток №1 до лабораторної роботи №2

1. Для виготовлення залізобетонних конструкцій двох типів Р1 і Р2, вартість яких 25 та 15 ум. од. відповідно, використовують металеві конструкції трьох типів: К1, К2 та К3, запаси яких на виробництві відповідно 40, 65 та 80 ум. од. Для виготовлення конструкції Р1 необхідно 2 ум. од. К1, 3 ум. од. К2 і 4 ум. од. К3, а для виготовлення конструкції Р2 необхідні 1ум. од. К1, 2 ум. од. К2 і 2 ум. од. К3. Скласти план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток.

2. Процес виготовлення промислових виробів двох видів Р1 і Р2 складається з послідовної обробки кожного з них на трьох верстатах. Час використання цих верстатів для виробництва даних виробів обмежено 10 год на добу. Час обробки одного виробу (у хвилинах) і прибуток від продажу одного виробу кожного виду вказані в таблиці:

Станок	Р1	Р2	Обмеження часу
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
Прибуток	200	300	

Знайти оптимальні обсяги виробництва виробів кожного виду, що максимізують прибуток.

3. Підприємство виготовляє два види продукції - Р1 і Р2, яка надходить в оптовий продаж. Для виробництва продукції використовуються два види сировини - А і В. Максимально можливі запаси сировини на добу становлять 9 і 13 одиниці відповідно. Витрата сировини на одиницю продукції виду Р1 і виду Р2 дано в таблиці:

Сировина	Р1	Р2	Запас сировини

A	2	3	9
B	3	2	13

Оптові ціни одиниці продукції дорівнюють: 3 ум. од. для Р1 і 4 ум. од. для Р2. Яку кількість продукції кожного виду має виробляти підприємство, щоб дохід від її реалізації був максимальним?

4. Підприємство випускає продукцію двох видів: Р1 і Р2. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрати, ліміти ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці:

Ресурси	Р1	Р2	Об'єм ресурсів
Обладнання	2	3	30
Сировина	2	1	18
Електроенергія	2	1	20
Прибуток на одиницю продукції	30	20	

Знайти оптимальний план випуску продукції. 5. Для виготовлення двох видів виробів А.

5. Для виготовлення двох видів виробів А і В використовується токарне, фрезерне і шліфувальне обладнання. Норми витрат часу кожного з типів обладнання на один виріб кожного виду наведено в таблиці. У ній же зазначено загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу.

Тип обладнання	А	В	Загальний фонд роб. часу
Фрезерне	10	8	168
Токарне	5	10	180
Шліфувальне	6	12	144
Прибуток	14	18	

Знайти план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їх реалізації.

6. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери необхідно вирізати заготовки трьох видів в кількостях, що відповідно дорівнюють 24, 31 і 18 шт. Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготовки двома способами. Кількість одержуваних заготовок при кожному способі розкрою наведено в таблиці. У ній же зазначено величину відходів при даному способі розкрою одного листа фанери.

Вид заготовки	Число заготовок під час розкрою відповідним способом	
	1 сп.	2 сп.
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина відходів	12	16

Визначити, скільки листів фанери і яким способом слід розкроїти, щоб отримати не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних відходах.

7. Для відгодівлі тварин використовують 2 види кормів. Вартість 1кг. корму I – 1 одиниць, II – 2 одиниці грошей. В кожному кг корму I є 3 одиниць вітаміну A, 4 одиниці вітаміну B, 5 одиниця вітаміну C. В кожному кг корму II є 6 одиниці вітаміну A, 7 одиниці вітаміну B, і 8 одиниця вітаміну C.

Яку кількість корму необхідно витрачати щоденно, щоб витрати не відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає не менше 9 одиниць вітаміну A, не менше 10 одиниць вітаміну B, та не менше 11 одиниць вітаміну C.

8. При виготовленні двох видів будівельних конструкцій, вартість

одиниці кожної із яких відповідно 4 і 3 ум. од., використовують два сорти цементу, запаси яких відповідно 17 і 21 ум. од. Визначити, яку кількість конструкцій кожного виду треба виготовити, щоб сумарний прибуток від реалізації був максимальним, якщо виготовлення одиниці конструкції 1-го типу потребує 1 ум. од. цементу 1-го сорту та 2 ум. од. 2-го сорту, а для виготовлення одиниці конструкції 2-го типу необхідно 2 ум. од. цементу 1-го сорту та 1 ум. од. 2-го сорту.

9. Підприємство випускає продукцію двох видів: Р1 і Р2. Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрат, обмеження ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці.

Ресурси	Р1	Р2	Об'єм ресурсів
Обладнання	2	3	31
Сировина	1	1	12
Електроенергія	2	1	20
Прибуток на одиницю продукції	40	25	

Обчислити оптимальний план випуску продукції.

10. Під час годівлі кожна тварина має отримати не менше 9 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види кормів, наведених у таблиці:

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг	
	Корм 1	Корм 2
Білки	2	6
Вуглеводи	5	4
Протеїн	2	3

Вартість 1 кг корму першого виду - 4 ум. од., друга - 6 ум. од. Необхідно скласти денний раціон поживних речовин, що має мінімальну вартість.

11. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B1, B2, B3, B4. Для її випуску потрібна сировина чотирьох видів A1, A2, A3, A4, яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, необхідної для виготовлення кожного виду продукції, ціна кожного виду продукції, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці.

Сировина	Щомісячне надходження сировини (ум. од.)	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B1	B2	B3	B4
A1	1260	2	4	6	8
A2	900	2	2	0	6
A3	530	0	1	1	2
A4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18

Визначити, яку кількість треба випускати заводу кожного з видів продукції B1, B2,B3,B4, щоб прибуток від її реалізації був максимальний.

12. Для виготовлення різних виробів A і B використовують три види сировини. Для виготовлення одиниці виробу A треба затратити сировини першого виду 16 кг, сировини другого виду 8 кг, сировини третього виду 5 кг. Для виготовлення одиниці виробу B треба затратити сировини першого виду 4 кг, сировини другого виду 7 кг, сировини третього виду 9 кг. Виробництво забезпечено сировиною першого виду кількістю 784 кг, сировиною другого виду кількістю 552 кг, сировиною третього виду кількістю 567 кг. Витрати людиногодин на виготовлення одиниці готового виробу A дорівнюють 4 люд.-год., а виробу B – 6 люд.-год. Скласти план виготовлення виробів A і B при умові максимального використання працівників для забезпечення зайнятості персоналу.

13. При вирощуванні двох культур A і B використовують 3 види

добрива. На вирощування однієї тонни культури А треба затратити добрива першого виду 9 кг, добрива другого виду 7 кг, добрива третього виду 4 кг. На вирощування однієї тонни культури В треба затратити добрива першого виду 5 кг, другого виду 8 кг, третього виду 16 кг. Ферма забезпечена добривами: першого виду кількістю 1431 кг, другого виду – 1224 кг, третього виду – 1328 кг. Обидві культури використовують у вигляді корму на тваринницькій фермі. При цьому кожна тонна культури А дає приріст ваги тварин 3 кг за добу, а культури В – 2 кг за добу. Скласти оптимальний план вирощування культур А і В для забезпечення максимального приросту ваги тварин на фермі.

14. Для виробництва двох видів високопробної нержавіючої сталі А і В використовується три види добавок до руди. Для виробництва 1 т сталі виду А треба затратити 12 кг добавок першого виду, 10 кг добавок другого виду і 3 кг добавок третього виду. Для виробництва 1 т сталі виду В треба затратити добавок першого виду 3 кг, добавок другого виду 5 кг, добавок третього виду 6 кг. Завод забезпечений добавками першого виду кількістю 684 кг, добавками другого виду кількістю 690 кг, третього виду – 558 кг. Обидва види сталі використовуються для виробництва нових різців при модернізації виробництва. Економія металу (за рахунок збільшення строку служби нових різців) при обробці новими різцями зі сталі виду А на 1 тис. виробів складає 6 т, зі сталі виду В – 2 т. Скласти план виробництва сталі видів А і В, який забезпечує максимальну економію металу.

15. Є три виду сировини А, В і С, які використовують для виробництва двох видів продуктів – 1 та 2. У розпорядженні знаходиться 500 одиниць сировини А, 750 одиниць сировини В і 200 одиниць сировини С. Продукт 1 складається з однієї одиниці сировини А і двох одиниць

сировини В. Продукт 2 складається із двох одиниць сировини А, однієї одиниці сировини В і однієї одиниці сировини С. 22 Одиниця продукту 1 дозволяє отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одиниця продукту 2 – 5 одиниць. Скільки одиниць кожного продукту треба випустити, щоб максимально забезпечити суміжне виробництво нової продукції?

Додаток №2 до лабораторної роботи №2

1. Цільова функція

$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \le 50;\ x_2 \le 80;\ x_1 + x_2 \le 105;\ 4x_1 + x_2 \le 240;\ -3x_1 + x_2 \le 0;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

2. Цільова функція

$f\left(x_1, x_2\right) = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \le 50;\ x_2 \le 80;\ -3x_1 + 2x_2 \ge -90;\ -x_1 + 2x_2 \ge -10;\ 4x_1 + x_2 \le 240;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

3. Цільова функція

$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 7x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \le 50;\ x_2 \le 80;\ -x_1 + 2x_2 \ge -10;\ x_1 + x_2 \le 50;\ -2x_1 + x_2 \le 50;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

4. Цільова функція

$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \le 50;\ x_2 \le 80;\ x_1 + x_2 \le 105;\ 4x_1 + x_2 \le 240;\ -3x_1 + x_2 \le 0;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

5. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ 4x_1 + x_2 \leq 240;\ -3x_1 + x_2 \leq 0;\ -2x_1 + x_2 \leq 50;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

6. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ -3x_1 + 2x_2 \geq -90;\ x_1 + x_2 \leq 105;\ -2x_1 + x_2 \leq 50;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

7. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ -3x_1 + 2x_2 \geq -90;\ x_1 + x_2 \leq 105;\ -3x_1 + x_2 \leq 0;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

8. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ -x_1 + 2x_2 \geq -10;\ -3x_1 + x_2 \leq 0;\ -2x_1 + x_2 \leq 50;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

9. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ -x_1 + 2x_2 \geq -10;\ 4x_1 + x_2 \leq 240;\ -2x_1 + x_2 \leq 50;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

10. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \leq 50;\ x_2 \leq 80;\ x_1 + x_2 \leq 105;\ 4x_1 + x_2 \leq 240;\ -2x_1 + x_2 \leq 50;\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11. Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

Обмеження:

$x_1 \le 50;\ x_2 \le 80;\ \ -3x_1 + 2x_2 \ge -90;\ \ -x_1 + 2x_2 \ge -10;\ x_1 + x_2 \le 150;\ \ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

12.Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \to Max$

Обмеження:

$x_1 \le 40;\ x_2 \le 70;\ \ -3x_1 + 2x_2 \ge -90;\ 4x_1 + x_2 \le 240;\ \ -2x_1 + x_2 \le 50;\ \ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

13.Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to Max$

Обмеження:

$x_1 \le 40;\ x_2 \le 70;\ \ -x_1 + 2x_2 \ge -10;\ x_1 + x_2 \le 105;\ \ -3x_1 + x_2 \le 0;\ \ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

14.Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \to Max$

Обмеження:

$x_1 \le 40;\ x_2 \le 70;\ \ -x_1 + 3x_2 \ge -20;\ x_1 + x_2 \le 90;\ \ -3x_1 + x_2 \le 0;\ \ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

15.Цільова функція

$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \to Max$

Обмеження:

$x_1 \le 40;\ x_2 \le 70;\ x_1 + 2x_2 \le 10;\ x_1 - x_2 \le 20;\ \ -2x_1 + x_2 \le 50;\ \ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3.

Прийняття рішень в умовах повної інформації.

Задача про упакування в контейнери

1 Мета роботи

Ознайомитись з методами прийняття рішень в умовах повної інформації на прикладі задачі про упакування в контейнери та дослідити особливості їх використання [3-5].

2 Короткі теоретичні відомості

Задача про упакування в контейнери відноситься до NP–важких комбінаторних задач. Завдання полягає в упаковці об'єктів зумовленої форми в кінцеве число контейнерів зумовленої форми таким чином, щоб кількість використаних контейнерів була найменшою. Іноді розглядають зворотну задачу, щоб кількість або обсяг об'єктів, які упаковують, були найбільшими.

Існує безліч різновидів цієї задачі (двовимірна упаковка, лінійна упаковка, упаковка по вазі, упаковка по вартості і т.і.), які можуть застосовуватися в різних областях, наприклад, в задачі оптимального заповнення контейнерів, завантаження вантажівок з обмеженням по вазі, створення резервних копій на змінних накопичувачах і т.і.

Оскільки задача є NP-важкою, часто використовують алгоритми з евристичним та метаевристичним методом вирішення для отримання оптимальних результатів. Також активно використовуються методи штучного інтелекту, як, наприклад, нейронні мережі.

Математична постановка задачі

Розглянемо умову задачі. Дано:

– нескінчена кількість контейнерів розміром C;

– перелік вантажів розміром (вагою) c_i.

$$x_i^j = \begin{cases} 1, \textit{ якщо і-й об'єкт пакується в j-й контейнер} \\ 0, \textit{ в іншому випадку} \end{cases} \quad (1.1)$$

Бінарна змінна y_j дорівнює 1, якщо j-й контейнер використовується, та 0 в протилежному випадку.

Необхідно так упакувати вантажі в контейнери, щоб загальна кількість контейнерів була найменшою

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j$$

при наступних обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i^j \le C y_j, j = 1(1)n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_i^j = N, i = 1(1)N$$

$$x_i^j \in \{0,1\}, i = 1(1)N, j = 1(1)n$$

$$y_j \in \{0,1\}, j = 1(1)n$$

Перша нерівність фіксує, що розмір (вага) вантажів в одному контейнері не буде більшою, ніж його розмір (вантажопідйомність). Друга рівність потребує, щоб всі елементи були розміщені по контейнерах.

Для вирішення цієї задачі розглянемо наступні алгоритми:

- NFA (Next Fit Algorithm) – алгоритм «заповнення наступного»;
- FFA (First Fit Algorithm) – алгоритм «заповнення першого, що підходить»;
- WFA (Worst Fit Algorithm) – алгоритм заповнення «найменш повного»;
- BFA (Best Fit Algorithm) – алгоритм заповнення «найкращого».

Хоча всі алгоритми націлені на мінімізацію кількості контейнерів, але для різних алгоритмів є відмінності в пошуку контейнера і, відповідно в кількості обчислень, що потребується для цього.

3 Алгоритми

Існує декілька варіацій кожного алгоритму: без впорядкування, з впорядкуванням, з оглядом всіх наявних контейнерів та інші.

3.1 Алгоритми без впорядкування

Особливістю даних алгоритмів є те, що відсутній крок впорядкування вантажів за розмірами. За рахунок цього значно зменшується кількість операцій порівняння, але, найчастіше, збільшується кількість необхідних контейнерів.

Розглянемо дані алгоритми на прикладі наступної задачі: дано контейнер розміром (вантажопідйомністю) $C = 100$, та $N = 15$ вантажів з розмірами (вагою) відповідно до таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Розміри (вага) вантажів

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_i	23	3	51	20	51	42	52	12	4	7	59	58	25	94	18

3.1.1 Алгоритм «заповнення наступного»

Найбільш простий алгоритм, що в більшості випадків дає найгірші результати. Його перевагою є те, що він потребує найменшу кількість операцій порівняння.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується – йдемо на крок 2.

Таблиця 1.2 – Розподіл вантажів за алгоритмом NFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					
4											59				
5												58	25		
6														94	
7															18

Кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N = 15$. Головною перевагою даного алгоритму є те, що для розміщення вантажів не потрібна інформація про попередні контейнери. Дана обставина робить доцільним використання даного алгоритму, наприклад, при розташуванні вантажів на конвеєрі, оскільки контейнер готовий до відправки як тільки береться наступний.

3.1.2 Алгоритм «заповнення першого, що підходить»

Більш вдалий алгоритм, що намагається мінімізувати кількість контейнерів, зменшуючи при цьому кількість порівнянь для пошуку найбільш вдалого розташування.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується, перевіряємо всі контейнери по черзі, починаючи з першого. Якщо знайдено контейнер з достатньою кількістю місця для розташування вантажу – йдемо на крок 3. Якщо вантаж не вміщується в жоден наявний контейнер – йдемо на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) доцільно обирати останній за номером, оскільки, потенційно, він є найменш заповненим.

Таблиця 1.3 – Розподіл вантажів за алгоритмом FFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					18
4											59				
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомності) контейнеру, але, зазвичай, при великій кількості вантажів та контейнерів, кількість обчислень значно менша за N^2.

3.1.3 Алгоритм заповнення «найменш повного»

Головна ідея алгоритму – рівномірне розподілення вантажів по контейнерах.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується контейнер – перевіряємо всі контейнери на максимум вільного місця. Якщо в мінімально заповнений контейнер вантаж вміщується – йдемо на крок 3, якщо ні – на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) доцільно обирати останній за номером, оскільки, потенційно, він є найменш заповненим.

Таблиця 1.4 – Розподіл вантажів за алгоритмом WFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					
4											59				18
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомності) контейнеру.

3.1.4 Алгоритм заповнення «найкращого»

Головна ідея алгоритму – створення більшої кількості повністю заповнених контейнерів.

1) Беремо новий елемент.

2) Беремо новий контейнер.

3) Кладемо елемент в контейнер.

4) Беремо наступний елемент.

5) Якщо елемент вміщується в контейнер, то йдемо на крок 3. Якщо елемент не вміщується контейнер – перевіряємо всі контейнери на мінімум вільного місця, але в який ще можна покласти вантаж. Якщо такий контейнер знайдено – йдемо на крок 3, якщо ні – на крок 2. Наступним активним контейнером (з якого починається перевірка) обирається останній за номером.

Таблиця 1.5 – Розподіл вантажів за алгоритмом BFA без впорядкування

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	23	3	51	20											
2					51	42									
3							52	12	4	7					18
4											59				
5												58	25		
6														94	

У найгіршому випадку кількість порівнянь K, що потребує алгоритм, дорівнює $K = N(N-1)$, коли кожен вантаж більший за половину розміру (вантажопідйомність) контейнеру.

3.2 Алгоритми з впорядкуванням

Алгоритми з попереднім впорядкуванням вимагають більшого числа порівнянь, але на великих об’ємах вибірки можуть давати кращі результати.

Розглянемо дані алгоритми на прикладі попередньої задачі, але з початковим впорядкуванням вантажів від більшого до меншого: дано контейнер ємністю $C = 100$ та $N = 15$ вантажів з розмірами (вагою), наведеними у таблиці 1.6.

Таблиця 1.6 – Розміри (вага) вантажів (впорядковані за спаданням)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_i	94	59	58	52	51	51	42	25	23	20	18	12	7	4	3

3.2.1 Алгоритм NFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 1.7 – Розподіл вантажів за алгоритмом NFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														
2		59													
3			58												
4				52											
5					51										
6						51	42								
7								25	23	20	18	12			
8													7	4	3

3.2.2 Алгоритм FFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 1.8 – Розподіл вантажів за алгоритмом FFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94													4	
2		59						25				12			3
3			58						23		1 8				
4				52						20					
5					51										
6						51	42						7		

3.2.3 Алгоритм заповнення WFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 1.9 – Розподіл вантажів за алгоритмом WFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														
2		59									18				3
3			58							20					
4				52					23			12			
5					51			25						4	
6						51	42						7		

3.2.4 Алгоритм заповнення BFA із попереднім впорядкуванням

Таблиця 1.10 – Розподіл вантажів за алгоритмом BFA з впорядкуванням

№ конт-ру	№ вантажу														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	94														3
2		59						25				12		4	
3			58						23		18				
4				52						20					
5					51										
6						51	42						7		

3.3 Оцінка мінімальної кількості контейнерів

Мінімально можливу кількість контейнерів для даної вибірки можна оцінити як:

$$M_{\min} = \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i}{C} \right\rceil \qquad (1.2)$$

Дана оцінка є нижньою границею і може бути недосяжною для жодного алгоритму. В цьому легко переконатись, якщо уявити вибірку, в якої всі елементи c_i більше половини розміру (вантажопідйомності) контейнеру C. В цьому випадку мінімальна можлива кількість контейнерів (до речі, як і фактична) буде рівною розміру вибірки N.

Для алгоритмів FFA та BFA існує верхня границя оцінки кількості контейнерів:

$$M_{\max} = \frac{11}{9} M' + 1$$

де M' – кількість контейнерів при найкращому вирішені задачі.

Існують також алгоритми, що для великих розмірів вибірки можуть вирішувати задачу про упакування в контейнери із наперед заданим відсотком від найкращого (асимптотична схема наближення поліноміального часу). Це виділяє дану задачу серед інших основних NP-важких задач, більшість з яких взагалі не можуть бути наближені.

4 Завдання

У контейнери вантажопідйомністю 100 потрібно розкласти вантажі за варіантом («Додаток А»).

4.1 Скласти програму, що реалізує алгоритми NFA, FFA, WFA, BFA без впорядкування і з впорядкуванням та обраховує кількість порівнянь (обчислювальну складність алгоритму), враховуючи витрати на впорядкування.

Розрахувати:
4.2 Мінімально можливу кількість контейнерів для 20-ти вантажів («Додаток А»), за допомогою (1.2) – 3 значення окремо для 1-го, рядка варіанту.
4.3 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 20-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA без впорядкування окремо для 2-го рядка варіанту (12 значень).
4.4 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 20-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA з упорядкуванням окремо для 3-го рядка варіанту (12 значень).

За допомогою розробленої програми розрахувати:
4.5 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 60-ти вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA без упорядкування для 1-3 рядка варіанту сумісно (4 значення).
4.6 Кількість контейнерів та обчислювальну складність для 60-и вантажів, за допомогою алгоритмів NFA, FFA, WFA, BFA з упорядкуванням для 1-3 рядка варіанту сумісно (4 значення).

4.7 Результати п. 4.2–4.6 за кількістю контейнерів та за обчислювальною складністю звести у таблицю 1.11 (одна таблиця).

Таблиця 1.11 – Результати розрахунку

<table>
<tr><th>Дані</th><th colspan="8">Аналітичний розрахунок (кількість контейнерів)</th></tr>
<tr><td>1 рядок</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>2 рядок</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>3 рядок</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><td>1+2+3 рядок</td><td colspan="8"></td></tr>
<tr><th rowspan="3">Дані</th><th colspan="4">Кількість контейнерів</th><th colspan="4">Обчислювальна складність</th></tr>
<tr><th colspan="4">Без впорядкування</th><th colspan="4">Без впорядкування</th></tr>
<tr><th>NFA</th><th>FFA</th><th>WFA</th><th>BFA</th><th>NFA</th><th>FFA</th><th>WFA</th><th>BFA</th></tr>
<tr><td>1 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1+2+3 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th rowspan="2">Дані</th><th colspan="4">З впорядкуванням</th><th colspan="4">З впорядкуванням</th></tr>
<tr><th>NFA</th><th>FFA</th><th>WFA</th><th>BFA</th><th>NFA</th><th>FFA</th><th>WFA</th><th>BFA</th></tr>
<tr><td>1 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1+2+3 рядок</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

5 Зміст звіту

Звіт має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) варіант завдання;

5.4) короткі теоретичні відомості;

5.5) лістинг програми, що реалізує алгоритми FFA, NFA, WFA, BFA;

5.6) аналітичний розрахунок мінімально можливої кількості контейнерів (п. 4.2);

5.7) аналітичний розрахунок розміщення вантажів за кожним з алгоритмів, з упорядкуванням та без нього, для множини вантажів в 1-3 рядках окремо та відповідно до пунктів (4.3 - 4.4)

5.8) результати роботи програми для п. 4.5-4.6 у вигляді таблиць розміщення вантажів за кожним з алгоритмів, з упорядкуванням та без нього, для множини вантажів в 1-3 рядках окремо та в 1-3 рядках сумісно;

5.9) сумарні результати у вигляді таблиці 1.11;

5.10) висновки щодо кількості контейнерів та обчислювальної складності алгоритмів за однаковими множинами вантажів при використанні різних алгоритмів та з використанням впорядкування та без нього (на основі таблиці 1.11).

6 Контрольні запитання

6.1 Які особливості задачі о контейнерах серед інших NP-важких задач?

6.2 Навести приклади практичних задач, які зводяться до задачі о контейнерах.

6.3 Які головні ідеї та відмінності алгоритмів FFA, NFA, WFA та BFA?

6.4 Порівняти оптимальне рішення та рішення, що отримане за допомогою алгоритмів FFA, NFA, WFA та BFA.

6.5 Яка роль ОПР при вирішенні задачі о контейнерах?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4.

Прийняття рішень в умовах ризику

1 Мета роботи

Ознайомитись з методами прийняття рішень в умовах, коли вибір деякої стратегії пов'язаний з певним набором станів середовища з визначеною ймовірністю [1;2;6;7;9;10].

2 Короткі теоретичні відомості

Задача прийняття рішень в умовах ризику виникає в тих випадках, коли з кожною стратегією x_i, що обирається, пов'язана ціла множина різноманітних результатів O_j з відомими ймовірностями $P(O_j \mid x_i)$. В цьому випадку, модель задачі може бути представлена у вигляді такої матриці:

	O_1	O_2	…	O_m
x_1	$u(x_1,O_1)$	$u(x_1,O_2)$	...	$u(x_1,O_m)$
x_2	$u(x_2,O_1)$	$u(x_2,O_2)$	...	$u(x_2,O_m)$
…	...	...	...	...
x_n	$u(x_n,O_1)$	$u(x_n,O_2)$	...	$u(x_n,O_m)$

(1.1)

Тут $u(x_i,O_j)$ – корисність результату O_j при використанні стратегії x_i.

Якщо відомі ймовірності $P(O_j \mid x_i), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, то можливо вивести очікувану корисність для кожної стратегії:

$$E[U(x_i)] = \sum_{j=1}^{m} u(x_i, O_j) P(O_j \mid x_i), i=\overline{1,n} \qquad (1.2)$$

Вочевидь, в якості оптимальної стратегії слід обирати ту, для якої очікувана корисність максимальна. У разі, коли елементи матриці (1.1) є від'ємними числами (тобто виступають у ролі витрат), в якості найкращої стратегії обирається стратегія, для якої очікувані витрати мінімальні.

Даний критерій оптимальності носить назву «критерій Байеса-Лапласа» і застосовується при відомих значеннях ймовірностей, або є підстави вважати, що ймовірності виникнення кожного з результатів приблизно однакові.

Задачі, для яких можливо отримати ймовірність результатів, є вкрай поширеними у практиці і, найчастіше, виникають при обробці статистичних даних. Наприклад, дані по врожаю за декілька років, найбільш популярні марки автомобілів та т.і. В цьому випадку, для визначення ймовірностей, внаслідок великої кількості можливих результатів (O_j), переходять до ймовірностей потрапляння результатів в певний інтервал. Наприклад, у таблиці 1.1 наведено врожай з ділянки у певній місцевості в залежності від обраної культури за роками.

Таблиця 1.1 – Дані по врожаю

Культура	Врожай за роками, т/га									
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Просо	1201	1350	1317	1415	1134	1512	1650	1517	1035	1156
Ячмінь	1453	1258	1056	1687	1652	1245	1469	1124	1089	1214

Кількість результатів (значень врожаю за роками) може бути надвелика, і тому доцільно виділити декілька інтервалів врожаю, наприклад:

– інтервал 1 = врожай становить від 1000 до 1200 т/га;
– інтервал 2 = врожай становить від 1200 до 1400 т/га;
– інтервал 3 = врожай становить від 1400 до 1600 т/га;
– інтервал 4 = врожай становить від 1600 до 1800 т/га.

Переходячи до матриці ймовірностей результатів, отримаємо дані, наведені у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Ймовірності врожаю за інтервалами

Культура	Ймовірності врожаю, т/га			
	1000-1200	1200-1400	1400-1600	1600-1800
Просо	0.3	0.3	0.3	0.1
Ячмінь	0.3	0.3	0.2	0.2

В якості значення врожаю можна використовувати середини відповідних інтервалів. Для деяких задач значення можуть також визначатися лівою або правою границею інтервалів, що залежить від цілей досліджень та формулювання задачі. Наприклад, «обрати систему електропостачання потужністю не менше ніж 1200 кВт, 1400 кВт, … з врахуванням ймовірності працездатності …» або «обрати матеріали для системи теплопостачання, що забезпечують неефективні витрати не більше ніж 100кВт/100МВт, 200кВт/100МВт,…, якщо ймовірність виходу з ладу в залежності від матеріалу …» і т.і.

Хоча такий підхід призводить до деякої втрати точності обрахунків, але він дозволяє грубо оцінити можливі наслідки стратегій і відкинути деякі з них з подальшим більш детальним аналізом тих стратегій, що залишилися.

3 Приклад вирішення

Розглянемо знаходження оптимальної стратегії на прикладі наступної задачі: необхідно визначити оптимальну стратегію з вибору одягу для подорожі за умови, що Ви відбуваєте та повинні повернутись у вказане місце.

Набори одягу, які можна взяти із собою, складаються з: верхнього одягу, головного убору, брюк, взуття та рукавиць (рис. 1.1), причому кожен набір одягу є оптимальним для деякого діапазону температур. Час, який Ви будете перебувати в іншому місці, Вам невідомий, бо все залежить від обставин, тому Вам необхідно визначитись з набором одягу заздалегідь. А уніформа, в якій Ви перебуваєте на час відправлення, до кінця поїздки вже зноситься.

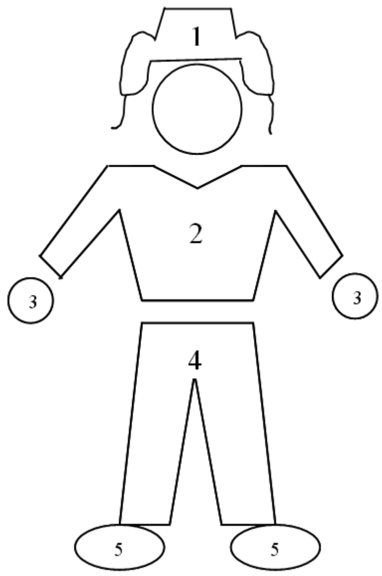


Рисунок 1.1 – Умовні позначення типів одягу

Кожен елемент одягу, що входить до складу набору, характеризується параметрами ваги та вартості, наведеними у таблиці 1.3. Перелік елементів одягу, які потрібні при кожному діапазоні температур, наведено в таблиці 1.4.

Таблиця 1.3 – Елементи одягу

№	Елемент одягу	Вага, кг	Вартість, у.о.
1	Блейзер	0.5	6
2	Пуховик	4	48
3	Ватні штани	2	24
4	В’єтнамки	0.5	6
5	Джинси	1	12
6	Кепка	0.5	6
7	Кросівки	1	12
8	Куртка	2	24
9	Пальто	3	36
10	Рукавички	0.5	6
11	Светр	1	12
12	Сорочка	0.5	6
13	Футболка	0.5	6
14	Черевики	1.5	18
15	Чоботи	2	24
16	Шапка	1	12
17	Шорти	0.5	6

Таблиця 1.4 – Набори одягу

Н	Т,◦	Головний убір	Верхній одяг	Рукавиці	Штани	Взуття	Вага, кг
1	< -10	Шапка	Пуховик	Рукавички	Ватні штани	Чоботи	9.5
2	-9..0	Шапка	Пальто	Рукавички	Джинси	Чоботи	7.5
3	1..10	Кепка	Куртка	–	Джинси	Черевики	5
4	11..20	–	Светр	–	Джинси	Кросівки	3
5	21..30	Блейзер	Сорочка	–	Джинси	Кросівки	3
6	30+	Блейзер	Футболка	–	Шорти	В’єтнамки	2

Н – номер набору одягу (стратегії), Т – температура.

Для визначення найкращого набору (стратегії) необхідно враховувати час повернення. Взяти більше одного набору Вам бракує місця, а в разі відсутності необхідних речей, Ви можете докуповувати їх на місці, але дорожче (+2 у.о. за кожну річ). Вартість перевезення багажу складає 10 у.о. за 1 кг ваги. Взагалі нічого не брати із собою та купувати все на місці не варто, оскільки у Вас з’являться однотипні речі, які Вам не потрібні.

Припустимо, що відправний пункт – м. Тегеран, а час повернення серпень або листопад. Для визначення оптимальної стратегії врахуємо середньомісячні температури м. Тегеран в червні (+28.2) та в листопаді (+12.3).

В цьому випадку, якщо Ви взяли із собою, наприклад, речі з першого набору (Шапка, Пуховик, Рукавички, Ватні штани, Чоботи), а повертаєтесь у червні, Вам необхідно докупити до набору 5 (що відповідає температурі +20..+30 градусів): Блейзер, Сорочку, Джинси та Кросівки, що обійдеться в 6+6+12+12+2*4=44 у.о. При повернені у листопаді (+12.3) та виборі набору 3, Вам необхідно докупити: Светр та Кросівки, що обійдеться в 12+12+2*2=28 у.о. і так далі.

Зведемо у таблицю перелік речей, які необхідно докуповувати до кожного набору при повернені в означені місяці (табл. 1.5) без врахування вартості перевезення речей, що залишилися.

Таблиця 1.5 – Вартість використання наборів

Набір	Вартість перевезення	Необхідно докупити	
		Червень	Листопад
Н1	95	36+8=44 Блейзер, Сорочка, Джинси, Кросівки	36+6=42 Светр, Джинси, Кросівки
Н2	75	24+6=30 Блейзер, Сорочка, Кросівки	24+4=28 Светр, Кросівки
Н3	50	24+6=30 Блейзер, Сорочка, Кросівки	24+4=28 Светр, Кросівки
Н4	30	12+4=16 Блейзер, Сорочка	–
Н5	30	–	12+2=14 Светр
Н6	20	30+6=36 Сорочка, Джинси, Кросівки	36+6=42 Светр, Джинси, Кросівки

Оскільки ймовірність повернутися у червні або серпні однакова (p=0.5), а корисність визначається найменшими витратами, то з врахуванням вартості перевезення отримаємо:

$$E[U(x_1)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_1, O_j) P(O_j \mid x_1) = -144 \cdot 0.5 - 142 \cdot 0.5 = -143$$

$$E[U(x_2)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_2, O_j) P(O_j \mid x_2) = -105 \cdot 0.5 - 103 \cdot 0.5 = -104$$

$$E[U(x_3)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_3, O_j) P(O_j \mid x_3) = -80 \cdot 0.5 - 78 \cdot 0.5 = -79$$

$$E[U(x_4)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_4, O_j) P(O_j \mid x_4) = -46 \cdot 0.5 - 30 \cdot 0.5 = -38$$

$$E[U(x_5)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_5, O_j) P(O_j \mid x_5) = -38 \cdot 0.5 - 44 \cdot 0.5 = -41$$

$$E[U(x_1)] = \sum_{j=1}^{2} u(x_6, O_j) P(O_j \mid x_6) = -56 \cdot 0.5 - 62 \cdot 0.5 = -59$$

Звідси, найкращою стратегією для подорожі буде стратегія x_4.

4 Завдання

4.1 Обрати варіант та дані температури («Додаток Б»).

4.2 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення в кожен з місяців однакова.

4.3 Визначити найкращу стратегію за при поверненні протягом одного сезону за наданих наборів ймовірностей повернення у кожен з місяців (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 – Набори значень ймовірностей

№ №	Назва набору	Місяць, P_i											
		01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
1	Зима	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3
2	Весна	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0
3	Літо	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0
4	Осінь	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0

4.4 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення взимку втричі більша за інші місяці.

4.5 Визначити найкращу стратегію при поверненні протягом одного з 12-ти місяців за умови, що ймовірність повернення залежить від кількості днів у місяці (рік вважати не високосним).

5 Зміст звіту

Зміст має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) варіант завдання;

5.4) короткі теоретичні відомості;

5.5) результати розрахунку вартості використання наборів для п. 4.2 у вигляді таблиці 1.5;

5.6) розрахунок найкращої стратегії для п. 4.2 (у вигляді (1.2));

5.7) результати розрахунку вартості використання для кожного з наборів ймовірностей для п. 4.3 у вигляді таблиці 1.5 (фрагменти таблиці з п.

5.5) – 4 таблиці;

5.8) розрахунки найкращої стратегії для кожного набору ймовірностей п. 4.3 (у вигляді (1.2)) – 4 розрахунки;

5.9) розрахунки найкращої стратегії для п. 4.4 та п. 4.5 (у вигляді (1.2)) – 2 розрахунки;

5.10) результати розрахунку вартості використання наборів для п. 4.6 у вигляді таблиці 1.5 – 1 таблиця;

5.11) зведені результати визначення найкращих стратегій за різними наборами ймовірностей та вартості речей (п. 5.5 – п. 5.10) у вигляді таблиці 1.7;

5.12) висновки.

Таблиця 1.7 – Результати визначення найкращих стратегій

№	Назва завдання	Найкраща стратегія(-ї), x_i	Значення $E[U(x_i)]$
1	За 12-ть місяців		
2	«Зима»		
3	«Весна»		
4	«Літо»		
5	«Осінь»		
6	«Зима» х3		
7	За 12-ть місяців (за кількістю днів)		

6 Контрольні запитання

6.1 В чому полягає особливість вирішення задачі прийняття рішення в умовах ризику, на відміну від задач прийняття рішень в умовах повної інформації?

6.2 За яких умов застосовується критерій Байеса-Лапласа?

6.3 Яка роль ОПР при вирішенні задачі в умовах ризику?

6.4 Навести приклад практичних задач, які можуть бути зведені до задач прийняття рішень в умовах ризику.

6.5 Які особливості обробки великих обсягів статистичних даних?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5.

Прийняття рішень в задачах розпізнавання образів

1 Мета роботи

Дослідження методів вирішення задачі ідентифікації з використанням апарату багатокритеріальної оптимізації [1;2;7-9].

2 Короткі теоретичні відомості

Задачу розпізнавання образів (ідентифікацію об'єкту) можна представити у вигляді задачі багатокритеріальної оптимізації, де в якості критеріїв будуть виступати деякі признаки (точніше, їх відхилення), за якими можна ідентифікувати об'єкт. Кількість об'єктів, що ідентифікуються, відома заздалегідь, і кожен такий об'єкт буде виступати у ролі альтернативи.

Для розв'язання багатокритеріальних задач застосовуються два основні підходи:

1. Вважають, що мету достатньо адекватно відображає множина критеріїв, і тому постає багатокритеріальна задача.
2. Вважають, що задано множину альтернатив, які можна обирати з цієї множини за допомогою покрокового діалогу з ОПР, будуючи послідовність слабших бінарних відношень для звуження первісної множини альтернатив.

Представниками першого підходу є різноманітні методи згортання критеріїв, а також методи поступок, а другого – методи ELECTRE.

Методи згортання критеріїв

Методи згортання критеріїв зводять первісну задачу (1.1)

$$Q_1(a,x) \Rightarrow Max, Q_2(a,x) \Rightarrow Max, ..., Q_n(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X \qquad (1.1)$$

де a – вектор відомих детермінованих значень параметрів задачі, x – вектор керованих змінних, X – множина допустимих варіантів рішень, до задачі наступного вигляду (4.2):

$$Q(Q_1(x), ..., Q_n(x)) \Rightarrow Max, \quad x \in X \qquad (1.2)$$

1.а) Лінійна згортка

За допомогою лінійного згортання глобальний критерій подається у вигляді лінійної комбінації компонентів векторного критерію якості з ваговими коефіцієнтами, основне призначення яких – врахування відносної важливості критеріїв (1.3):

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \times Q_i(x)) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \qquad (1.3)$$

де $Q_i(x)$ – i-та компонента векторного критерію якості, λ_i – ваговий коефіцієнт, що відображає відносну важливість i-го критерію.

1.б) Нормована лінійна згортка

Лінійне згортання нормованих критеріїв ґрунтується на ідеї зведення часткових критеріїв до безрозмірних величин з інтервалом можливих значень кожного з них [0,1]. Щоб виконати таке перетворення, необхідно для кожного з критеріїв визначити межі його зміни від мінімального значення $Q^{\min}$ до максимального $Q^{\max}$ та коефіцієнти відносної важливості нормованих критеріїв λ_i (1.4):

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \times \frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}}) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \qquad (1.4)$$

Головною проблемою цих методів є виявлення точних значень вагових коефіцієнтів. Найчастіше ця процедура суб’єктивна. Окрім того, коефіцієнти в методі лінійного згортання мають бути розмірними величинами, тому що критерії можуть мати різну розмірність. Щоб позбутися цієї вади в згортанні нормованих критеріїв (нормована лінійна згортка), окремі критерії спочатку нормують (нормовані критерії безрозмірні та змінюються в інтервалі від 0 до 1). Проте, нормовані критерії, що з’являються внаслідок такого «вдосконалення», не мають змістовної інтерпретації, і тому об’єктивне визначення вагових коефіцієнтів ще більше ускладнюється. Отже, невизначеність мети, спричинена багатокритеріальністю, не зменшується, а переходить в іншу форму – виникає проблема обчислення значень вагових коефіцієнтів.

Адитивні згортання мають ще одну ваду – значення одного зі складових критеріїв може бути дуже великим внаслідок того, що значення інших мінімальні. Дана обставина є вкрай небажаною.

У разі опуклої області значень векторного критерію лінійне згортання можна використати для отримання кількох розв’язків, оптимальних за Парето, змінивши значення вагових коефіцієнтів. Це дає

ОПР можливість у діалозі дослідити саме ту частину області Парето, яка найбільше його цікавить. У разі неопуклої області значень векторного критерію лінійне згортання не дає можливість визначити всі оптимальні розв’язки за Парето за будь-яких значень вагових коефіцієнтів.

2.а) Максмінна згортка

У методі максмінного згортання глобальний критерій визначається як (1.5):

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n} \lambda_i Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{1.5}$$

На значення глобального критерію впливає лише той частковий критерій, який має у відповідній точці найменше значення. Береться до уваги лише «найгірший» випадок, тому значення *Q(x)* визначає гарантовану нижню оцінку для всіх часткових критеріїв.

2.б) Нормована максмінна згортка

Ідея нормованого визначення глобального критерію методом максмінної згортки аналогічна до методу нормованої лінійної згортки (п. 1.б) – зведення часткових критеріїв до безрозмірних величин (1.6):

$$Q(x) = \min_{i \in 1,n} \lambda_i \left(\frac{Q_i(x) - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}} \right) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,n} \tag{1.6}$$

3) Метод «ідеальної» точки

Метод «ідеальної» точки реалізує принцип Джофріона, згідно з яким визначається існування «ідеальної» точки, тобто точки, у якій всі критерії сягають максимуму. Оскільки на практиці такий випадок є дуже маловірогідним, то найкраща альтернатива визначається за відстанню до «ідеальної» точки (рис. 1.1) за допомогою введеної метрики.

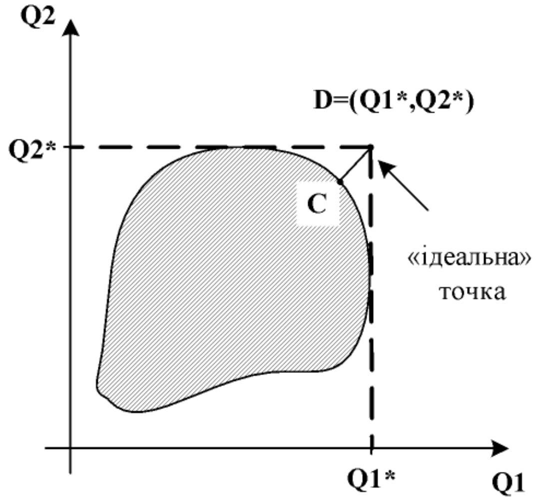


Рисунок 1.1 – Метод ідеальної точки

Для знаходження координат ідеальної точки необхідно розв'язати *n* однокритеріальних задач за кожним з критеріїв оптимізації (1.7):

$$Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, i = \overline{1,n} \tag{1.7}$$

Оптимальні значення критеріїв кожної з однокритеріальних задач $Q_i^* = MaxQ_i(x), \quad x \in X$, є координатами ідеальної точки $Q^* = (Q_1^*,...,Q_n^*)$ у просторі критеріїв.

Відстань до «ідеальної» точки із використанням обраної метрики зводить первісну задачу до задачі вирішення однокритеріальних задачі вигляду (1.8):

$$Q(x) = \rho(Q(x) - Q^*) \Rightarrow Min, \quad x \in X \tag{1.8}$$

де ρ – обрана метрика. Якщо в якості метрики обрано метрику Евкліда, то задача (4.8) набуває наступного вигляду (1.9):

$$Q(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Q_i(x) - Q_i^*)^2} \Rightarrow Min \tag{1.9}$$

До недоліків метрики Евкліда слід віднести некоректність її використання у деяких випадках: наприклад, відстань між містами земної кулі обраховується скрізь неї, а не по поверхні. Взагалі метрику Евкліда дуже рідко використовують при кількості критеріїв більше двох. Тому відшукання метрики, яка б враховувала мету задачі, стає суттєвою перешкодою перед застосуванням методу «ідеальної» точки.

4) Метод лексикографічної оптимізації

Метод лексикографічної оптимізації складається з двох етапів: на першому етапі за допомогою ОПР визначається послідовність критеріїв за важливістю в порядку спадання важливості $Q_1 \succ Q_2 \succ \ldots \succ Q_n$, на другому – за кожним критерієм послідовно розв'язується задача оптимізації, починаючи з Q_1. Якщо при оптимальному значенні першого критерію Q_1^* можна поліпшити значення наступного, це виконують, а у протилежному випадку переходять до наступного. Процес припиняється, коли переглянуто всі критерії. Отже, на i-му кроці розв'язують задачу однокритеріальної оптимізації виду (1.10) з додатковими обмеженнями у вигляді рівностей на оптимальні значення попередніх критеріїв:

$$Q_i(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad Q_1(x) = Q_1^*, \ldots, Q_{i-1}(x) = Q_{i-1}^* \qquad (1.10)$$

Вада цього методу – надмірна жорсткість: покращення значень наступних в лексикографічному порядку критеріїв в багатьох випадках є неможливим.

5) Метод послідовних поступок

Метод послідовних поступок є логічним продовженням методу лексикографічної оптимізації, в якому передбачена процедура «допуску» на оптимальне значення критерію, якщо ОПР згодна на певне погіршення значення поточного критерію за умови, що покращаться значення наступних критеріїв.

В даному методі, як і в методі лексикографічної оптимізації, визначається порядок важливості критеріїв $Q_1 \succ Q_2 \succ \ldots \succ Q_n$. Після цього на кожному i-му кроці алгоритму розв'язують задачу оптимізації за критерієм Q_i та призначають поступку $\Delta Q_i > 0$ (або позначають, як $Q_i \overset{\Delta Q_i}{\succ} Q_{i+1}$ $Q_1 \overset{\Delta Q_i}{\succ} Q_n$), на яку готова піти ОПР в зменшенні оптимального значення i-го критерію, щоб поліпшити значення менш важливих критеріїв. Призначення поступки означає введення на кожному кроці одного додаткового обмеження $Q_i \geq Q_i^* - \Delta Q_i$, тому на *(i+1)*-му кроці розв'язують задачу виду (1.11):

$$Q_{i+1}(x) \Rightarrow Max, \quad x \in X, \quad Q_1(x) \geq Q_1^* - \Delta Q_1, \ldots, Q_i(x) \geq Q_i^* - \Delta Q_i \qquad (1.11)$$

Процес розв’язання задачі закінчується, коли досягнуто останнього критерію, або ж призначення поступки становиться недоцільним. У разі потреби процес повторюють, проаналізувавши попередні результати (зі зміною величин поступки або зі змінами у порядку важливості критеріїв). Для реалізації методу послідовних поступок достатньо мати ефективний алгоритм вирішення однокритеріальної задачі.

3 Завдання

3.1 Обрати набір символів («Додаток В») за варіантом.

Таблиця 1.1 – Методи вирішення багатокритеріальної задачі

№	Назва методу
1	Метод лінійної згортки
2	Метод послідовних поступок

Розробіть систему ознак (алфавіт) на полотнах сіткою 11x11 одиниць для кожного окремого символа

3.2 Для заданого набору символів (альтернатив) розробити систему ознак (не менше 3-ох) різних типів (наприклад, кількість перетинів із заданою прямою, кількість зафарбованих комірок у певній ділянці тощо), що дозволяють **однозначно ідентифікувати всі символи набору**. Для цього для кожного символу з набору визначити значення альтернатив в області критеріїв та обрати в якості кращих множину альтернатив з мінімальним значенням комплексного критерію для методів (табл. 1.1):

$$Q_i(x) = \left| S_j - S_j(x_i) \right| \Rightarrow Min, \quad x \in X, i = 1(1)n, j = 1(1)m \tag{1.12}$$

де S_j – значення j-ої ознаки для символу-еталону; $S_j(x_i)$ – значення j-ої ознаки для i-го символу, що розпізнається; n – кількість символів у наборі; m – кількість ознак.

У випадку, коли множина отриманих рішень містить більше однієї альтернативи (символу), тобто коли символ, що розпізнається, визначений неоднозначно, змінити систему ознак (змінити вагові коефіцієнти, розміри поступок, обрати інші ознаки та ін.) та повторити п. 3.2. Сформована таким чином система ознак повинна однозначно ідентифікувати кожен символ з базового набору заданими методами. Остаточну систему ознак і значення параметрів Метод лінійної згортки та Метод максмінної згортки звести у таблицю 1.2.

Таблиця 1.2 – Система ознак та параметрів методів

№	Ознака	Графічна інтерпретація
1	Опис ознаки 1	Рисунок 1
…	…	…
m	Опис ознаки m	Рисунок m
№	Метод	Параметри методу
1	Метод лінійної згортки	…
2	Метод послідовних поступок	…

3.3 Сформувати набір символів (4 символи), що розпізнаються, наступним чином (використовуючи табл. В.1 Додатка В):

– $\{x_1–x_2\}$ – символи відповідають символам А1, А2, відповідно з підкресленням;

– $\{x_3–x_4\}$ – символи відповідають символам А3, А4, відповідно з курсивом;

Отриманий набір символів із розміщенням в сітці навести у таблиці 1.3, де С – символ базового набору, що відповідає x_i

Р – символ, що розпізнається, з п. 3.3 (x_i); графічне зображення (С) та (Р) – зображення символів на сітці розміру 11x11.

Таблиця 1.3 – Набір символів, що розпізнається

№	C	P	Графічне зображення (C)	Графічне зображення (P)
1				
…				
4				

3.4 Для кожного символу $\{x_1–x_4\}$, що розпізнається, визначити значення в області критеріїв та значення оптимальних альтернатив за Парето та Слейтером (див. «Лабораторна робота №1»). Врахувати, що оптимальні значення за Парето (Слейтером) будуть мати нульові значення критеріїв, тобто, оптимальними будуть ті альтернативи/символи, що мають менші відхилення від еталону (1.12). Вказати, якою альтернативою були доміновані альтернативи, що відкинуті.

3.5 Обрати найкращу альтернативу(-и) із множини оптимальних за Парето, використовуючи Метод лінійної згортки та Метод послідовних поступок із значеннями вагових коефіцієнтів, розмірів поступок та інших параметрів з п. 3.2.

3.7 Результати розпізнавання для кожного символу з використанням Методу лінійної згортки та Методу послідовних поступок звести у таблицю 1.4

Таблиця 1.4 – Результати розпізнавання

№	C	P	M1	M2	Графічне зображення (P)	Примітки
1						
…						
4						

У таблиці 1.4: C – символ базового набору, що відповідає x_i P – символ, що розпізнається, з п. 3.3 (x_i); M1 – результати розпізнавання за допомогою Методу лінійної згортки з параметрами методу та за системи ознак з п. 3.2;

М2 – результати розпізнавання за допомогою Методу послідовних поступок з параметрами методу та за системи ознак з п. 3.2; графічне зображення (Р) – зображення символу зі стовпчика (Р);

3.8 Зробити висновки щодо результатів ідентифікації, розробленої системи ознак, переваг та недоліків методів, що були використані тощо.

4 Приклад

Для заданого набору символів (табл. 1.5) розробити систему ознак (m=3) та розпізнати символ (рис. 1.2) за допомогою Методу лінійної згортки та Методу Послідовних поступок.

Таблиця 1.5 – Базовий набір символів

А 1	А 2	А 3	А 4	Метод 1	Метод 2
A	I	Z	6	1	7

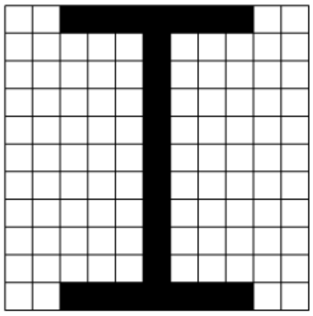


Рисунок 1.2 – Символ, що розпізнається

4.1 На сітці 11х11 зобразимо символи базового набору (рис. 1.3).

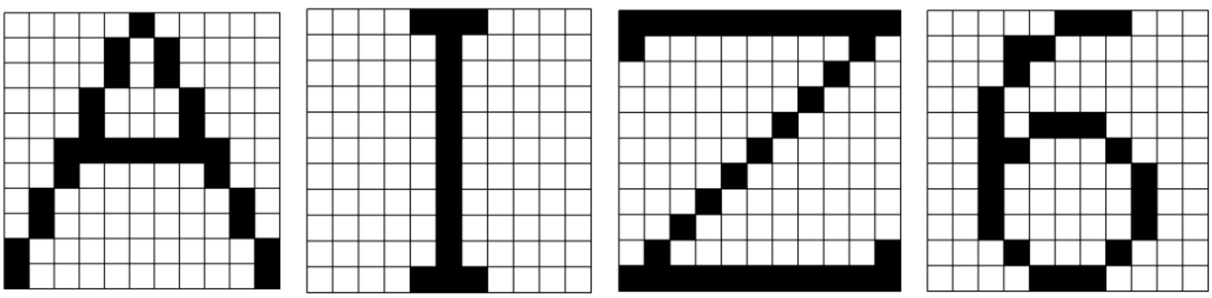


Рисунок 1.3 – Зображення символів базового набору

4.2 Для базового набору символів, що розглядається, введемо наступну систему ознак:

– S1= {Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)};

– S2 = {Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)};

– S3 = {Кількість зафарбованих клітинок в середньому квадраті 3x3}.

Еталонні значення ознак для базового набору та їх графічна інтерпретація наведені у таблицях 1.6–1.7.

Таблиця 1.6 – Еталонні значення ознак

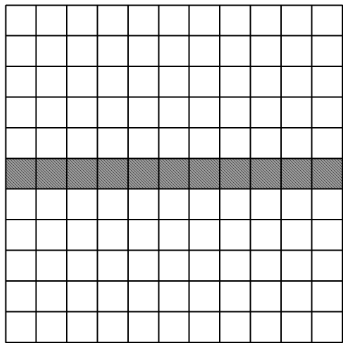
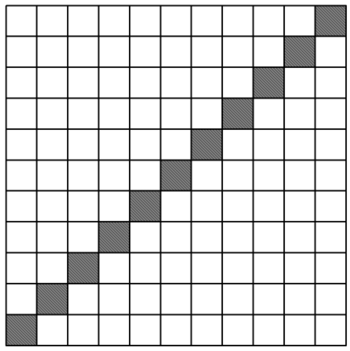
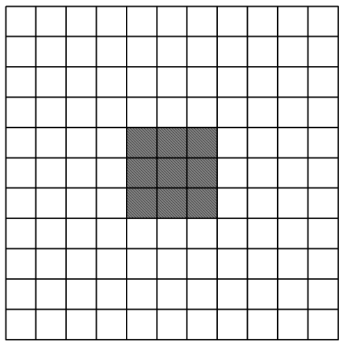
Ознака	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	1	1	1	2
S2	3	1	1	2
S3	3	3	3	3

Як видно з таблиці 1.6, значення ознак для символів «I» та «Z» повністю співпадають, що свідчить про неможливість однозначно визначити ці символи за обраного набору ознак. **Змінимо** ознаку S3 наступним чином:

– S3 = {Кількість зафарбованих клітинок на сітці 11x11}.

В цьому випадку еталонні значення ознак приймуть вигляд, наведений у табл. 1.8.

Таблиця 1.7 – Система ознак (до зміни ознаки S3)

№	Ознака	Графічна інтерпретація
S1	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)	
S2	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)	
S3	Кількість зафарбованих клітинок в середньому квадраті 3x3	

Таблиця 1.8 – Еталонні значення ознак (модифіковані)

Ознака	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	1	1	1	2
S2	3	1	1	2
S3	26	15	33	25

Припустимо, що розпізнати необхідно символ «А», значення ознак якого за критеріями S1-S3 відповідають значенням символу «А» у таблиці 1.8, та зведемо дані у таблицю 1.9.а.

4.2.1) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «А»:

$$Q_1(x_1) = |S_1 - S_1(x_1)| = |1-1| = 0$$

$$Q_2(x_1) = |S_2 - S_2(x_1)| = |3-3| = 0$$

$$Q_3(x_1) = |S_3 - S_3(x_1)| = |26-26| = 0$$

4.2.2) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «І»:

$$Q_1(x_2) = |S_1 - S_1(x_2)| = |1-1| = 0$$

$$Q_2(x_2) = |S_2 - S_2(x_2)| = |3-1| = 2$$

$$Q_3(x_2) = |S_3 - S_3(x_2)| = |26-15| = 11$$

4.2.3) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «Z»:

$$Q_1(x_3) = |S_1 - S_1(x_3)| = |1-1| = 0$$

$$Q_2(x_3) = |S_2 - S_2(x_3)| = |3-1| = 2$$

$$Q_3(x_3) = |S_3 - S_3(x_3)| = |26-33| = 7$$

4.2.4) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символом базового набору «6»:

$$Q_1(x_4) = |S_1 - S_1(x_4)| = |1 - 2| = 1$$

$$Q_2(x_4) = |S_2 - S_2(x_4)| = |3 - 2| = 1$$

$$Q_3(x_4) = |S_3 - S_3(x_4)| = |26 - 25| = 1$$

Таблиця 1.9.а – Розпізнавання символу «А» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	0	2	2	1
Q3	0	11	7	1

Аналогічно будуються значення альтернатив в області критеріїв і для інших символів (результати без розрахунків наведені в табл. 1.9.б-1.9.г).

Таблиця 1.9.б – Розпізнавання символу «I» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	0
Q2	2	0	0	0
Q3	11	0	18	10

Таблиця 1.9.в – Розпізнавання символу «Z» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	2	0	0	1
Q3	7	18	0	8

Таблиця 1.9.г – Розпізнавання символу «6» на базовому наборі

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	1	1	1	0
Q2	1	1	1	0
Q3	1	10	8	0

Метод лінійної згортки:

4.2.5) Покладемо для Методу лінійної згортки наступні вагові коефіцієнти:

$$\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2$$

Визначимо найкращу альтернативу, використовуючи значення альтернатив в області критеріїв (табл. 1.9.а) при розпізнаванні символу «А». Значення комплексного критерію обрахуємо за (1.3) та зведемо результати у таблицю 1.10:

$$Q(x_1) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i * Q_i(x_1)) = 0.4 * 0 + 0.4 * 0 + 0.2 * 0 = 0$$

$$Q(x_2) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i * Q_i(x_2)) = 0.4 * 0 + 0.4 * 2 + 0.2 * 11 = 3$$

$$Q(x_3) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i * Q_i(x_3)) = 0.4 * 0 + 0.4 * 2 + 0.2 * 7 = 2.2$$

$$Q(x_4) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i * Q_i(x_4)) = 0.4 * 1 + 0.4 * 1 + 0.2 * 1 = 1$$

Таблиця 1.10 – Розпізнавання символу «А» (Метод лінійної згортки)

Критерії	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
Q1	0	0	0	1
Q2	0	2	2	1
Q3	0	11	7	1
Q	0	3	2.2	1

Мінімальне значення комплексного критерію (Q) відповідає одній альтернативі A1(«A»), тобто символ розпізнаний та розпізнаний однозначно. Аналогічно розпізнаються і всі інші символи, що входять до базового набору.

Таким чином, розроблена система ознак для методу лінійної згортки з ваговими коефіцієнтами:

$$\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2$$

дозволяє однозначно ідентифікувати всі символи базового набору.

Метод послідовних поступок:

4.2.6) Покладемо для методу послідовних поступок наступний порядок критеріїв за важливістю та значення поступок:

$Q_2 \overset{2}{\succ} Q_3 \overset{7}{\succ} Q_1$

та врахуємо, що краще значення за критеріями мають альтернативи, значення яких у просторі критеріїв найменше (оскільки критерії задають відхилення від еталону).

1) Порівняння символу, що розпізнається («A»), з символами базового набору (табл. 1.9.а):

Крок 1. Визначимо найменше значення альтернатив за другим критерієм з таблиці 1.9.а: $min\, Q_2(x_i) = 0,\ x \in X$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_1 = 2$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за другим критерієм в межах від 0 до $min\, Q_2(x_i) + \Delta Q_1 = 0 + 2 = 2$. Тобто на першому кроці до множини найкращих альтернатив (К1) увійдуть К1 = { А1, А2, А3, А4 }.

Крок 2. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К1 за третім критерієм (табл. 1.9.а): $min\, Q_3(x_i) = 0,\ x \in K1$. Враховуючи розмір поступки (($\Delta Q_2 = 7$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за третім критерієм в межах від 0 до $min\, Q_3(x_i) + \Delta Q_2 = 0 + 7 = 7$. Тобто, на другому кроці до множини найкращих альтернатив (К2) увійдуть К2 = {А1, А3, А4}.

Крок 3. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К2 за першим критерієм (табл. 1.9.а): $min\, Q_1(x_i) = 0,\ x \in K2$, тобто до множини найкращих альтернатив (К3) входять ті, які мають значення за першим критерієм 0: К3={А1,А3}.

Остаточно, множина найкращих альтернатив $Q = min\, K3 = \{A1, A3\}$ складається з А1 та А3. Таким чином, отримано більше ніж одну альтернативу, що свідчить про невдалий вибір ознак або параметрів методу (порядку критеріїв за важливістю, розмірів поступок).

Оберемо інший порядок важливості критеріїв для перевірки символу «А» (символу, що розпізнається) з усіма альтернативами $Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$.

1) Порівняння символу, що розпізнається («А»), з символами базового набору (табл. 1.9.а):

Крок 1. Визначимо найменше значення альтернатив за першим критерієм з таблиці 1.9.а: $min\, Q_1(x_i) = 0,\ x \in X$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_1 = 2$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за першим критерієм в межах від 0 до $min\, Q_1(x_i) + \Delta Q_1 = 0 + 2 = 2$. Тобто, на першому кроці до множини найкращих альтернатив (К1) увійдуть К1 = {А1, А2, А3, А4}.

Крок 2. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К1 за другим критерієм (табл. 1.9.а): $min\, Q_2(x_i) = 0,\ x \in K1$. Враховуючи розмір поступки ($\Delta Q_2 = 7$), до множини найкращих альтернатив входять ті, які мають значення за третім критерієм в межах від 0 до $min\, Q_3(x_i) + \Delta Q_2 = 0 + 7 = 7$. Тобто, на другому кроці до множини найкращих альтернатив (К2) увійдуть К2 = {А1, А2, А3, А4}.

Крок 3. Визначимо найменше значення альтернатив з множини К2 за третім критерієм (табл. 1.9.а): $min\, Q_3(x_i) = 0,\ x \in K2$, тобто до множини найкращих альтернатив (К3) входять ті, які мають значення за третім критерієм 0: К3={**А1**}.

Оскільки отримано лише одне значення в множині найкращих альтернатив, то за даних ознак та параметрів методу символ «А» розпізнається однозначно. Аналогічно перевіряються інші символи набору з використанням відповідних значень альтернатив в області критеріїв (наведемо без пояснень).

2) Порівняння символу, що розпізнається («I»), з символами базового набору (табл. 1.9.б):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4},

$$Q = \min K3 = \{A2\}$$

Крок 3. К3={**А2**}.

3) Порівняння символу, що розпізнається («Z»), з символами базового набору (табл. 1.9.в):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4},

$$Q = \min K3 = \{A3\}$$

Крок 3. К3={**А3**}.

4) Порівняння символу, що розпізнається («6»), з символами базового набору (табл. 1.9.г):

Крок 1. К1={А1,А2,А3,А4},

Крок 2. К2={А1,А2,А3,А4},

$$Q = \min K3 = \{A4\}$$

Крок 3. К3={**А4**}.

Зведемо дані у таблицю 1.11. Як видно з таблиці 1.11, для Методу послідовних поступок за обраних ознак, порядку важливості критеріїв та розмірів поступок всі символи базового набору ідентифікуються вірно та однозначно.

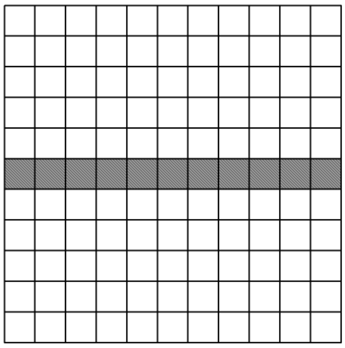
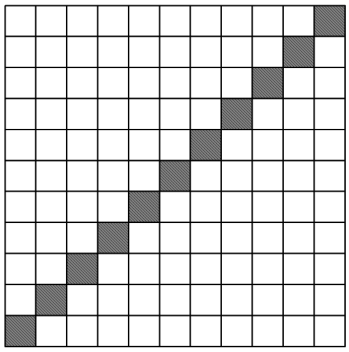
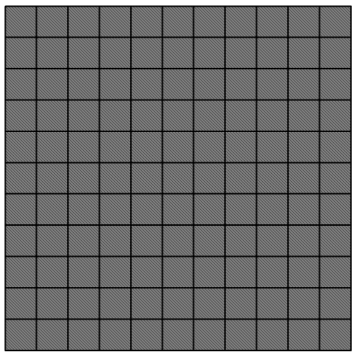
Таблиця 1.11 – Розпізнавання символів (Метод послідовних поступок)

Крок	Символ, що розпізнається			
	«A»	«I»	«Z»	«6»
K1	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4
K2	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4	A1,A2,A3,A4
K3	A1	A2	A3	A4
Q	A1	A2	A3	A4

Таким чином, розроблена система ознак та обрані параметри для обох методів дозволяють однозначно ідентифікувати всі символи набору, якщо вони отримані у «чистому» вигляді, але для символів, що потрібно розпізнати, у багатьох випадках присутні «шуми». Шуми з’являються внаслідок інструментальних похибок отримання зображення, наявності сторонніх позначень (плям, приміток), використання інших шрифтів та засобів форматування тексту (підкреслення, курсиву) та т.і. Вочевидь, в цьому випадку розпізнавання символів може стати вкрай важкою задачею.

Зведемо дані, що їх отримано під час розробки системи ознак, у таблицю 1.2 (табл. 1.12).

Таблиця 1.12 – Система ознак та параметрів методів (після всіх модифікацій)

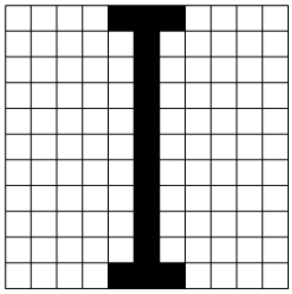
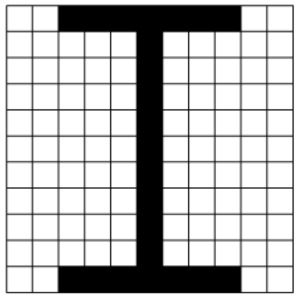
№	Ознака	Графічна інтерпретація
1	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = 6 (11 – повна висота символу)	
2	Кількість перетинів відрізків, що формують символ, з прямою y = x (де точка (1,1) – ліва нижня клітинка сітки)	
3	Кількість зафарбованих клітинок в квадраті 11x11	
№	**Метод**	**Параметри методу**
1	Метод лінійної згортки	$\lambda_1 = 0.4, \quad \lambda_2 = 0.4, \quad \lambda_3 = 0.2$
2	Метод послідовних поступок	$Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$

4.3 Розглянемо розпізнавання символу «I» за наявності «шумів» введення – збільшених нижнього та верхнього відрізків (рис. 1.2). Надалі будемо позначати цей символ, як «I*» (табл. 1.13).

Обрахуємо значення ознак даного символу:

- S1=1,
- S2=1,
- S3=23.

Таблиця 1.13 – Набір символів, що розпізнається

№	С	Р	Графічне зображення (С)	Графічне зображення (Р)
1	I	I*		

4.4 За допомогою (1.3) та ознак еталонного набору (табл. 1.8), визначимо значення альтернатив в області критеріїв при розпізнаванні символу «I*», зводячи дані у таблицю (табл. 1.14).

Таблиця 1.14 – Значення альтернатив в області критеріїв для символу «I*»

Критерій (I*)	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	0	0	0	1
S2	2	0	0	1
S3	3	8	10	2

Визначимо оптимальні альтернативи за Парето та Слейтером, враховуючи, що значеннями альтернатив є відхилення, тобто найкращими є найменші значення (табл. 1.15).

Таким чином, множина оптимальних альтернатив становить:

– за Парето: P(X)={A1,A2,A4};

– за Слейтером: S(X)={A1,A2,A3,A4}.

Таблиця 1.15 – Визначення оптимальних альтернатив для символу «І*»

Критерій (І*)	Символи базового набору			
	A1(«A»)	A2(«I»)	A3(«Z»)	A4(«6»)
S1	0	0	0	1
S2	2	0	0	1
S3	3	8	10	2
домінується за Парето	–	–	A2	–
домінується за Слейтером	–	–	–	–

4.5 Далі будемо шукати найкращу альтернативу серед множини оптимальних альтернатив за Парето, що дає змогу зменшити кількість необхідних обчислень.

4.5.1) Розпізнавання символу «І*» за допомогою методу лінійної згортки: $\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2$.

Таблиця 1.16 – Розпізнавання символу «І*» («Метод 1»)

Критерії (І*)	Символи базового набору		
	A1(«A»)	A2(«I»)	A4(«6»)
Q1	0	0	1
Q2	2	0	1
Q3	3	8	2
Q	1.4	1.6	1.2

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А4 («6»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q.

4.5.2) Розпізнавання символу «І*» за допомогою Методу послідовних поступок $Q_1 \overset{2}{\succ} Q_2 \overset{7}{\succ} Q_3$.

Крок 1. К1={A1,A2,A4}.
Крок 2. К2={A1,A2,A4}.
Крок 3. К3={A4}.

$$Q = \min K3 = \{A4\}$$

Найкращою альтернативою для символу «І*» є A4 («6»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q.
4.6 Оскільки відбулося хибне розпізнавання символу «І*» за допомогою обох методів, введемо додаткові ознаки або змінимо параметри методів.

4.6.1) Для методу лінійної згортки змінимо значення вагових коефіцієнтів на $\lambda_1 = 0.4,\ \lambda_2 = 0.4,\ \lambda_3 = 0.2.$ Визначимо найкращу альтернативу (табл. 1.17).

Таблиця 1.17 – Розпізнавання символу «І*» Метод лінійної згортки – модифікація

Критерії (І*)	Символи базового набору		
	A1(«A»)	A2(«І»)	A4(«6»)
Q1	0	0	1
Q2	2	0	1
Q3	3	8	2
Q	1.2	0.8	1.1

Найкращою альтернативою для символу «І*» є A2 («І»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q, тобто за допомогою модифікації вагових коефіцієнтів розпізнавання символу відбулося успішно.

4.6.2) Для Методу послідовних поступок змінимо порядок важливості критеріїв та розміри поступки: $Q_3 \overset{6}{\succ} Q_2 \overset{1}{\succ} Q_1$. Визначимо найкращу альтернативу.

Крок 1. К1={А1,А2,А4}.

Крок 2. К2={А2,А4}.

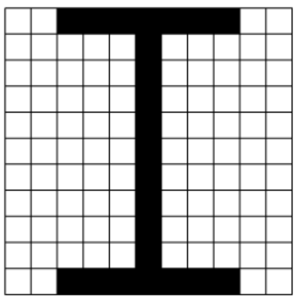
Крок 3. К3={А2}.

$$Q = \min K3 = \{A2\}$$

Найкращою альтернативою для символу «І*» є А2 («І»), що має мінімальне значення комплексного критерію Q, тобто за допомогою модифікації порядку важливості критеріїв та розмірів поступки розпізнавання символу відбулося успішно.

4.7 Зведемо дані по розпізнаванню символу «І*» у таблицю (табл. 1.18).

Таблиця 1.18 – Результати розпізнавання

№	С	Р	М1	М2	Графічне зображення (Р)	Примітки
1	І	І*	6	6		Метод лінійної згортки (зміна параметрів): $\lambda_1 = 0.45,\quad \lambda_2 = 0.45,\quad \lambda_3 = 0.1$ Метод послідовних поступок (зміна параметрів): $Q_3 \overset{6}{\succ} Q_2 \overset{1}{\succ} Q_1$

5 Зміст звіту

Звіт має містити:

5.1) титульний аркуш;

5.2) мету роботи;

5.3) короткі теоретичні відомості;

5.4) варіант завдання (у вигляді табл. 1.5);

5.5) розроблену систему ознак та параметрів методів (у вигляді табл. 1.2);

5.6) значення ознак для символів еталонного набору (у вигляді табл. 1.8);

5.7) сформований набір символів, що потрібно розпізнати (у вигляді табл. 1.3);

5.8) значення ознак для символів набору, що потрібно розпізнати (у вигляді табл. 1.8);

5.9) перелік символів (альтернатив), що входять до множини Парето та Слейтера для кожного символу набору, що розпізнається (4 таблиці у вигляді табл. 1.15);

5.10) результати визначення кращої альтернативи з множини Парето для кожного символу, що розпізнається, у вигляді зведених таблиць або опису (аналогічно прикладу у п. 4.5), а також результати розпізнавання за змінених параметрів методів або додаткових ознак відповідно до п. 3.6 (аналогічно прикладу у п. 4.6);

5.11) зведені результати розпізнавання (у вигляді табл.1.4);

5.12) висновки.

6 Контрольні запитання

6.1 В чому полягає головна ідея методів згортання, які використовують нормування?

6.2 Які відмінності методів лексикографічної оптимізації та методу поступок?

6.3 В чому полягає сутність методу «ідеальної» точки?

6.4 Пояснити сутність невизначеності в методах багатокритеріальної оптимізації.

6.5 Яку форму приймає невизначеність у методах згортання, методі «ідеальної» точки та методах поступок?

6.6 Яку роль відіграє ОПР в методах багатокритеріальної оптимізації?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6.

ТЕОРІЯ СТАТИСТИЧНИХ РІШЕНЬ «ІГРИ З ПРИРОДОЮ».

1 Мета роботи

Ознайомитися з теорією статистичних рішень, навчитись розв'язувати задачі прийняття рішень за критеріями Вальда, Севіджа, та Гурвіца [6;7].

2 Короткі теоретичні відомості

У задачах теорії статистичних рішень невідомі умови операцій які залежать не від свідомо діючого «супротивника» (або інших учасників конфлікту), а від об'єктивної дійсності, яку в теорії статистичних рішень прийнято називати «природою». Відповідні ситуації часто називаються «іграми з природою». «Природа» мислиться як якась незацікавлена інстанція, «поведінка» яка невідома, але в усякому разі не зловмисна.

Здавалося б, відсутність свідомої протидії спрощує завдання вибору рішення. Виявляється, ні: не спрощує, а ускладнює. У грі проти свідомого супротивника елемент невизначеності знімається тим, що ми "думаємо" за супротивника, «приймаємо» за нього рішення, найсприятливіше для нас самих. У грі ж з природою така концепція не підходить.

Розглянемо гру з природою: у нас (сторона А) має можливі стратегій А1,А2, ,.., Аn; що стосується обстановки, то про неї можна зробити П припущень: П1, П2, ..., Пn. Розглянемо їх як «стратегії природи». наш виграш аij при кожній парі стратегій Аi , Пj заданий матрицею (таблиця 1). Потрібно вибрати таку стратегію гравця А, яка є більш вигідною в порівнянні з іншими.

Таблиця 1

Ai \ $Пj$	$П_1$	$П_2$	**…**	$П_n$
A_1	a_{11}	a_{11}	$\ldots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Найпростіший випадок вибору рішень у грі з природою - це випадок коли (на наше щастя) якась із стратегій гравця А перевершує інші («домінує» над ними), як, наприклад, стратегія A_2 у таблиці 2. Тут виграш при стратегії A_2 при будь-якому стані природи не менше, ніж при інших стратегіях, а при деяких - більше; значить, все ясно, і потрібно вибирати саме цю стратегію.

Таблиця 2

Ai \ $Пj$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	2	3	5
A_2	7	4	4	5
A_3	3	4	4	1
A_4	7	4	2	2

Якщо навіть в матриці гри з природою немає однієї домінуючої над всіма іншими, все ж корисно подивитися, чи немає в ній дублюючих стратегій П поступаються іншим за всіх умов. Але тут є одна тонкість: так ми можемо зменшити тільки число стратегій гравця А, але не гравця П - адже йому все одно, чи ми виграємо. Припустимо, що «чистка» матриці проведена, і не дублюючих, ні заведено невигідних гравцю А стратегій в ній немає.

Цілком природно, повинна враховуватися матриця виграшів (a_{ij}). Проте в якомусь сенсі картина ситуації, яку дає матриця (a_{ij}), неповна і не відображає належним чином переваг і недоліків кожного рішення.

Припустимо, що виграш a_{ij} при нашій стратегії A_i та стан природи $П_j$ більше, ніж за нашої стратегії A_k та стан природи $П_l$: $a_{ij}>a_{kl}$. Наприклад, стан природи «нормальні умови» для будь-якої операції вигідніше, ніж «повінь», «землетрус» і т. п. Бажано ввести такі показники, які не просто давали б виграш при даній стратегії в кожній ситуації, але відображали б «вдалість» або «невдалість» вибору даної стратегії в даній ситуації.

З цією метою в теорії рішень вводиться поняття «ризику». ризиком rij гравця А при користуванні стратегією Ai в умовах Пj називається різниця між виграшем, який ми отримали б, якби знали умови Пj і виграшем, який ми отримаємо, не знаючи їх і вибираючи стратегію Ai.

Очевидно, якби ми (гравець А) знали стан природи Пj, ми вибрали б ту стратегію, при якій наш виграш максимальний. Цей виграш, максимальний у стовпці Пj ми вже раніше зустрічали і позначили βj Щоб отримати ризик rij, потрібно з βj обчислити фактичний виграш aij:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$$

Для прикладу візьмемо матрицю виграшів (таблиця 3) і побудуємо для неї матрицю ризиків (ri j) (таблиця 4).

При погляді на матрицю ризиків (таблиця 4) нам ясніше видно деякі риси даної «гри з природою».

Таблиця 3

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2
β_j	4	8	6	9

Таблиця 4

$П_j$ / A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Так, в матриці виграшів (a_{ij}) (таблиця 3) у другому рядку перший і останній елементи були рівні один одному: $a_{21} = a_{24} = 3$. Однак ці виграші зовсім не рівноцінні в сенсі вдалого вибору стратегії: при стані природи П1 ми могли виграти щонайбільше 4, і наш вибір стратегії А2 майже зовсім ідеальний, а ось при стані П4 ми могли б, вибравши стратегію А1, отримати на цілих 6 одиниць більше, тобто вибір стратегії А2 дуже поганий. Ризик - це «плата за відсутність інформації»: в таблиці 4 r21 = 1, r24 = 6 (тоді як виграші aij в тому і іншому випадку однакові). Природно, нам хотілося б мінімізувати ризик, супроводжуючий вибір рішення.

Отже, перед нами - дві постановки задачі про вибір рішення: при одній нам бажано отримати максимальний виграш, при іншій - мінімальний ризик.

Ми знаємо, що найпростіший випадок невизначеності - це «доброякісна» або стохастична невизначеність, коли стану природи мають якісь ймовірності Q1,Q2, ..., Qn і ці ймовірності нам відомі. Тоді природно вибрати ту стратегію, для якої середнє значення виграшу, узяте по рядку, максимально:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j a_{ij} \Rightarrow max$$

Цікаво відзначити, що та ж стратегія, яка звертає в максимум середній виграш, звертає в мінімум і середній ризик:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j a_{ij} \Rightarrow min$$

так що в разі стохастичною невизначеності обидва підходи («від виграшу» і «від ризику») дають одне і те ж оптимальне рішення.

Тоді трішки «зіпсуємо» нашу невизначеність і припустимо, що ймовірності Q1, Q2, ..., Qn в принципі існують, але нам невідомі. Іноді в цьому випадку припускають всі стани природи рівноймовірними (так званий «принцип недостатньої підстави» Лапласа), але взагалі-то це робити не рекомендується. Все-таки зазвичай більш-менш ясно, які стани більші, а які - менш імовірні; Для того щоб знайти орієнтовні значення ймовірностей Q1, Q2, ..., Qn, можна, наприклад, скористатися методом експертних оцінок. Хоч якісь орієнтовні значення ймовірностей станів природи все ж краще, ніж повна невідомість. Неточні значення ймовірностей станів природи в подальшому можуть бути «скориговані» за допомогою спеціально поставленого експерименту. Експеримент може бути як «ідеальним», повністю з'ясовує стан природи, так і неідеальним, де ймовірність станів уточнюються за непрямими даними. Кожен експеримент, зрозуміло, вимагає якихось витрат. Виявляється, «ідеальний» експеримент має сенс проводити тільки у разі, коли його вартість менше, ніж мінімальний середній ризик.

Однак не будемо більше займатися випадком стохастичної невизначеності, а візьмемо випадок «поганої невизначеності», коли ймовірності стану "природи або взагалі не існують, або не піддаються оцінці навіть наближено. Обстановка несприятлива для прийняття «хорошого» рішення спробуємо знайти хоча б не найгірше.

Тут все залежить від точки зору на ситуацію, від позиції дослідника, від того, якими бідами загрожує невдалий вибір рішення, Опишемо кілька можливих підходів, точок зору для вибору рішення.

2.1. Максимінний критерій Вальда. Згідно з цим критерієм гра з природою ведеться як гра з розумним, причому агресивним супротивником, що робить все для того, щоб перешкодити нам досягти успіху. Оптимальною вважається стратегія, при якій гарантується виграш у будь-якому випадку не менший, ніж «нижня ціна гри з природою»:

$$a = max_i \, min_j \, a_{ij}$$

Якщо керуватися цим критерієм, що втілює «позицію крайнього песимізму», треба завжди орієнтуватися на гірші умови, знаючи напевно, що «гірше цього не буде». Очевидно, такий підхід - природний для того, хто дуже боїться програти, - не є єдино-можливим, але як крайній випадок він заслуговує розгляду.

2.2. Критерій мінімаксного ризику Севіджа. Цей критерій - теж вкрай песимістичний, але при виборі оптимальної стратегії радить орієнтуватися не на виграш, а на ризик. Вибирається в якості оптимальної та стратегія, при якій величина ризику в найгірших умовах мінімальна:

$S = min_i\ max_j\ r_{ij}$

Сутність такого підходу в тому, щоб всіляко уникати великого ризику при прийнятті рішення. У сенсі «песимізму» критерій Севіджа схожий з критерієм Вальда, але самий «песимізм» тут розуміється по іншому.

2.3. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца. Цей критерій рекомендує при виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом, ні крайнім, легковажним оптимізмом.

Згідно з цим критерієм вибирається стратегія з умови

$$H = \chi * min_i a_{ij} + (1 - \chi) * max_i a_{ij}$$

де χ - «коефіцієнт песимізму», обираний між нулем і одиницею. При χ = 1 критерій Гурвіца перетворюється на критерій Вальда; при χ = 0 - у критерій «крайнього оптимізму», що рекомендує вибрати ту стратегію, при якій найбільший виграш в рядку максимальний. При 0 <χ <1 виходить щось середнє між тим і іншим. Коефіцієнт χ вибирається з суб'єктивних міркувань - чим небезпечніше ситуація, чим більше ми хочемо в ній «підстрахуватися», чим менш наша схильність до ризику, тим ближче до одиниці вибирається χ.

Якщо рекомендації, що випливають з різних критеріїв, співпадають - тим краще, значить, можна сміливо вибрати рекомендований рішення: воно швидше за все «не підведе». Не треба забувати, що в будь-яких завданнях обґрунтування рішень деяке свавілля неминуче - хоча б при побудові математичної моделі, виборі показника ефективності. Вся математика, вживана в дослідженні операцій, не скасовує цього свавілля, а дозволяє лише «поставити його на своє місце».

Таблиця 5

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3
A_1	20	30	15
A_2	75	20	35
A_3	25	80	25
A_4	85	5	45

Розглянемо елементарний приклад «гри з природою» 4 Х 3, матриця виграшів якої (aij) дана в таблиці 5.

Користуємось критеріями Вальда, Севіджа і Гурвіца, причому в останньому візьмемо $\chi = 0{,}6$

1. Критерій Вальда. Підрахуємо мінімум по рядках (див. таблицю 6) і виберемо ту стратегію, при якій мінімум рядка максимальний (дорівнює 25). Це - стратегія **А3**.

Таблиця 6

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	min рядків
A_1	20	30	15	15
A_2	75	20	35	20
A_3	25	80	25	25
A_4	85	5	45	5

max серед мінімумів

2. Критерій Севіджа. Перейдемо від матриці виграшів (таблиця 6) до матриці ризиків (таблиця 7). Щоб утворити її віднімаємо значення кожної клітинки від максимуму стовпця у якому воно знаходиться:

Таблиця 7

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	85-20= **65**	80-30=**50**	45-15=**30**
A_2	85-75=**10**	80-20=**60**	45-35=**10**
A_3	85-25=**60**	80-80=**0**	45-25=**20**
A_4	85-85=**0**	80-5=**75**	45-45=**0**

У правому додатковому стовпці запишемо максимальне в рядку значення ризику **γ**.

З чисел правого стовпця мінімальна (60) відповідає стратегіям **А2** та **А3**; значить, обидві вони оптимальні по Севіджу (таблиця 8).

Таблиця 8

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	γ_i
A_1	65	50	30	65
A_2	10	60	10	60
A_3	60	0	20	60
A_4	0	75	0	75

3. Критерій Гурвіца (при $\chi = 0,6$). Знову перепишемо таблицю 5, але на цей раз в правих трьох додаткових стовпцях поставимо: мінімум рядка її максимум і величину $H = \chi * min_i a_{ij} + (1 - \chi) * max_i a_{ij}$, заокругленої до цілих одиниць (див. таблицю 8).

максимальне значення Н = 47 відповідає стратегії **А3**.

Отже, в даному випадку всі три критерії згідно говорять на користь стратегії А3 (За Севіджем ще підходить А2) яку є всі підстави обрати.

Таблиця 8

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	min рядків	max рядків	H_i
A_1	20	30	15	15	30	21
A_2	75	20	35	20	75	42
A_3	25	80	25	25	80	47
A_4	85	5	45	5	85	37

А тепер візьмемо випадок, коли між критеріями виникає «суперечка». матриця виграшів (aij) (із заздалегідь виписаними стовпцями мінімумів рядків, максимумами рядків і значеннями Н (при $\chi = 0,6$)) таблиця 9.

Таблиця 9

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	min рядків	max рядків	H_i
A_1	19	30	41	49	19	49	31
A_2	51	38	10	20	10	51	26,4
A_3	73	18	81	11	11	81	39

За критерієм Вальда оптимальною є стратегія **А1**, за критерієм Гурвіца при $\chi = 0{,}6$ — стратегия **А3**. Подивимося, що скаже критерій Севіджа. Матриця ризиків з додатковим стовпцем γ_i, що містить максимуми рядків, дана в таблиці 10.

Мінімальним в останньому стовпці є число 38, так що критерій Севіджа, так само як і критерій Гурвіца, «голосує» за стратегію **А3**.

Якщо ми дуже боїмося малого виграшу «11», який нас може спіткати при стратегії А3, ну що ж - виберемо стратегію А1 Рекомендовану вкрай обережним критерієм Вальда, при якому ми, принаймні, можемо собі гарантувати виграш «19», а може бути, і більше. Якщо ж наш песимізм не такий вже похмурий, мабуть, треба зупинитися на стратегії А3, рекомендованої двома з трьох критеріїв.

Таблиця 10

Π_j / A_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	γ_i
A_1	54	8	40	0	54
A_2	22	0	71	29	71
A_3	0	20	0	38	38

На закінчення зазначимо таке: всі три критерії (Вальда, Севіджа і Гурвіца) були сформульовані для чистих стратегій, але кожен з них може бути поширений і на змішані. Однак змішані стратегії в грі з природою мають лише обмежене (головним чином, теоретичне) значення. Якщо в грі проти свідомого супротивника змішані стратегії іноді мають сенс як «трюк», що вводить в оману противника, то в грі проти «байдужої природи» цей резон відпадає. Крім того, змішані стратегії набувають сенсу тільки при багаторазовому повторенні гри. А якщо вже ми її повторюємо, то неминуче починають вимальовуватися якісь імовірнісні риси ситуацій, і ми ними можемо скористатися для того, щоб застосувати «стохастичний підхід» до задачі, а він, стратегій не дає. Крім того, в ситуаціях з «дурною» невизначеністю, коли нам болісно не вистачає інформації, головне завдання - цю інформацію отримати, а не вигадувати хитромудрі методи, що дозволяють без неї обійтися. Одна з основних задач теорії статистичних рішень - це якраз планування експерименту, мета якого - з'ясування або уточнення якихось даних.

3 Зміст звіту

1. Мета роботи.
2. Короткі теоретичні відомості.
3. Файли проекту.
4. Аналіз результатів та висновки.

4.КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Для чого теорія статистичних рішень?
2. Для чого призначений ступінь оптимізму Гурвіца?
3. Опишіть алгоритм вирішення задачі критерієм Вальда.
4. Опишіть алгоритм вирішення задачі критерієм Севіджа.
5. Опишіть алгоритм вирішення задачі критерієм Гурвіца

5.ЛАБОРАТОРНЕ ЗАВДАННЯ

Задано матрицю, розробити програмний продукт для вирішення задачі критерієм Вальда, Севіджа та Гурвіца:

Варіант 1. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

60	12	58	61	49	58
51	82	71	88	80	83
32	1	34	95	70	100
51	58	92	47	3	26
17	67	8	97	22	50
65	46	46	72	30	71

Варіант 2. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,1

7	84	33	32	54	82
28	35	100	87	6	47
8	26	73	82	78	71
40	20	97	41	46	33
2	70	14	24	27	45
73	39	50	99	9	35

Варіант 3. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,3

27	77	55	25	22	30
55	60	76	19	12	94
34	93	71	64	80	74
24	18	97	50	18	72
32	30	73	40	25	40
44	38	15	85	98	8

Варіант 4. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,9

12	88	67	64	17	74
88	94	58	16	2	3
32	37	12	55	58	46
14	54	73	16	76	99
38	33	21	2	17	94
33	31	95	48	8	55

Варіант 5. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,8

28	71	42	79	67	5
91	33	80	23	26	61
25	55	19	3	76	90
78	5	34	47	35	66
63	65	82	95	94	24
31	65	20	9	82	46

Варіант 6. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,4

31	72	39	95	31	85
73	35	53	76	47	80
82	86	73	53	68	63
65	36	3	14	72	25
84	60	4	68	11	32
29	20	14	42	28	19

Варіант 7. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

57	78	9	95	84	27
25	48	19	64	54	52
83	90	78	28	83	66
17	69	49	15	38	75
3	40	21	80	37	14
52	85	58	85	67	73

Варіант 8. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,6

5	90	4	89	53	68
43	87	90	74	40	85
11	11	64	73	69	37
89	19	2	20	36	93
49	78	53	78	21	83
78	65	69	36	83	38

Варіант 9. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,8

59	6	43	30	83	56
76	81	25	56	27	74
22	36	17	48	5	25
9	26	96	16	99	48
80	1	7	8	42	78
41	55	38	18	58	100

Варіант 10. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,2

81	37	91	59	25	96
15	99	39	37	34	64
74	51	55	4	25	66
33	75	63	19	42	8
78	55	73	15	89	2
96	100	34	24	32	66

Варіант 11. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

91	75	43	71	8	53
75	75	84	56	67	98
92	15	62	92	91	49
92	44	47	48	19	60
58	38	49	39	43	50
15	29	6	37	89	10

Варіант 12. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,6

23	74	31	44	4	89
94	51	94	61	18	44
16	54	51	35	69	30
53	81	80	71	52	6
33	36	34	11	33	89
18	17	30	22	33	24

Варіант 13. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,1

39	10	98	48	87	3
8	71	19	69	58	96
67	15	97	52	100	45
31	73	61	1	23	67
42	38	68	36	94	38
34	44	84	27	13	21

Варіант 14. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,3

68	93	69	30	17	65
81	85	74	45	60	62
1	59	14	22	1	63
18	25	71	59	35	36
27	79	15	76	67	90
4	4	8	6	5	92

Варіант 15. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,7

84	47	70	71	45	41
13	16	39	73	45	47
46	47	17	79	93	55
74	39	35	7	98	95
67	49	48	28	99	48
93	4	47	40	63	97

Варіант 16. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,9

22	7	44	97	64	80
15	56	97	36	16	85
36	9	71	60	6	76
94	55	76	89	90	46
4	5	75	19	40	80
6	13	36	84	15	85

Варіант 17. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

54	74	55	68	77	76
60	70	23	28	90	50
16	6	32	18	31	44
98	52	56	55	70	3
25	6	24	28	27	45
81	31	1	65	62	48

Варіант 18. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,4

55	17	70	98	25	94
73	10	25	40	9	79
84	23	46	55	24	47
46	35	27	42	74	75
22	4	21	74	41	5
83	37	23	85	81	68

Варіант 19. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,8

1	51	75	40	4	14
15	67	75	53	34	57
90	23	35	18	64	47
4	44	46	23	86	20
44	46	29	21	64	95
62	66	51	62	60	70

Варіант 20. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,7

59	20	17	28	23	62
6	63	16	59	89	16
11	97	59	35	80	90
8	60	99	66	2	53
85	96	22	33	61	24
20	92	87	84	95	91

Варіант 21. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,1

85	53	72	28	75	5
18	70	2	38	2	91
83	48	56	32	47	56
70	31	98	96	36	14
19	78	15	23	64	72
92	41	61	48	81	63

Варіант 22. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,5

4	39	55	14	35	38
93	97	96	43	31	34
96	2	22	22	12	24
73	4	91	55	85	83
79	38	3	98	95	25
6	79	65	68	67	59

Варіант 23. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, х =0,3

95	47	83	13	79	16
9	49	24	27	79	1
20	88	60	35	91	54
48	74	31	37	76	86
98	24	95	65	37	58
68	88	50	10	100	10

Варіант 24. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,8

21	26	30	53	45	93
41	3	50	2	6	18
43	7	19	47	43	75
66	65	84	13	37	47
75	38	63	23	22	78
21	18	78	92	92	29

Варіант 25. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

10	89	67	12	76	37
36	7	38	92	41	44
15	25	96	45	38	49
85	16	70	50	100	49
52	91	80	22	83	38
2	45	9	16	19	32

Варіант 26. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,8

11	66	83	36	36	61
22	80	49	53	86	67
97	66	92	98	100	95
4	89	51	48	25	35
8	58	3	76	57	95
72	67	66	58	23	94

Варіант 27. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,4

12	32	82	41	24	54
50	47	40	4	60	73
82	42	10	82	30	52
33	99	41	37	5	21
49	89	77	67	97	98
5	52	30	36	38	51

Варіант 28. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,2

42	31	44	93	14	68
16	43	57	80	100	13
6	18	95	27	61	92
34	92	28	56	15	73
88	63	72	99	42	49
7	84	60	73	1	7

Варіант 29. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,7

26	2	16	96	38	69
54	21	14	99	37	65
68	71	81	2	69	12
38	26	53	76	67	82
49	61	10	14	49	41
49	19	67	35	23	86

Варіант 30. Ступінь оптимізму для критерію Гурвіца, x =0,5

56	92	61	29	56	51
61	12	11	65	6	89
95	83	87	77	69	63
50	57	49	86	32	35
72	100	55	82	58	38
15	15	4	8	97	38

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛП ЗА МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

1 Мета роботи

Ознайомитись із основними поняттями транспортних задач, навчитись знаходити початкові опорні плани (за методом північно-західного кута, мінімального елемента та евристичним методом Фойгеля) та оптимальні плани задач за допомогою методу потенціалів.

2 Короткі теоретичні відомості

Нехай запаси однорідного товару, зосередженого у постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$, відповідно дорівнюють $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць. Від постачальників товар необхідно транспортувати до споживачів $B_1, B_2, \dots, B_n$, потреби яких відповідно становлять $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. Очевидно, що $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$; $b_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Якщо у деякого постачальника A_i запаси $a_i = 0$, то з економічного погляду цей постачальник – банкрут. Якщо ж потреби деякого споживача B_j дорівнюють $b_j = 0$, то можна підозрювати, що цей споживач – фіктивна форма. У таких випадках – немає що і немає кому транспортувати.

Таблиця 2.1

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_i
A_2	c_{21} x_{21}	c_{12} x_{12}	…	c_{2n} x_{2n}	a_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Відомо, що транспортні витрати на перевезення одиниці товару від постачальника A_i до споживача B_j становлять $c_{ij} > 0$, одиниць вартості. Позначимо $x_{ij} > 0$ кількість одиниць товару, що планується перевезти від постачальника A_i до споживача B_j. Величини x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, називаються перевезеннями. Умову транспортної задачі зручно записувати в табл. 3.1, яка називається **таблицею планування**.

Розв'язати транспортну задачу означає: скласти такий план перевезень від постачальників до споживачів, тобто знайти значення $A_m B_n$ невідомих величин x_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, при яких всі запаси постачальників будуть розподілені, всі потреби споживачів задоволені і при цьому сумарна вартість транспортних витрат на перевезення буде мінімальною. Оскільки вартість перевезень відіграє ключову роль, то сформульована задача називається **транспортною задачею за критерієм вартості.**

Складемо математичну модель транспортної задачі. Якщо від i-го постачальника до j-го споживача заплановано перевести x_{ij} одиниць товару, то вартість перевезення дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. А вартість усього плану перевезень дорівнює

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Систему обмежень отримаємо з таких умов задачі:

а) усі вантажі повинні бути вивезені, тобто повинна виконуватись умова

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, 2, ..., m) -$ ці рівняння отримуємо із рядків табл. 2.1;

б) усі потреби повинні бути задоволенні, тобто має виконуватись умова

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, 2, ..., n) -$ ці рівняння отримуємо із стовпців табл. 2.1.

Отже, математична модель транспортної задачі має такий вигляд: знайти значення невідомих, які мінімізують лінійну функцію

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow min$$

і задовольняють умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1, 2, ..., m); \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1, 2, ..., n); \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m; \ j = 1, 2, ..., n). \quad (2.3)$$

Транспортну задачу, звичайно, можна розв’язувати симплексним методом. Ми, проте, розглянемо спеціальний підхід, у якому незручності, пов’язані з можливою великою кількістю невідомих, значно менші, ніж у симплексному методі.

Важливими для питань існування розв’язку транспортної задачі є суми запасів і потреб.

Означення. Транспортна задача називається закритою, якщо сума запасів дорівнює сумі потреб, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad (2.4)$$

Співвідношення (3.4) називається ***умовою балансу*** або ***закритості***.

Якщо в моделі транспортної задачі не виконується співвідношення (3.4), то така модель називається ***відкритою*** моделлю транспортної задачі. Тут може бути два випадки:

а) сумарні запаси перевищують сумарні потреби, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

б) сумарних запасів менше, ніж сумарних потреб, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Відкриту модель завжди можна звести до моделі закритого типу. Для цього випадку а) вводиться фіктивний споживач B_{n+1}, потреби якого дорівнюють $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а у випадку б) вводиться фіктивний постачальник A_{m+1}, запаси якого дорівнюють $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Вартість перевезення одиниці вантажу до фіктивного споживача і вартість перевезення одиниці вантажу від фіктивного постачальника дорівнюють нулю, оскільки вантаж в обох випадках не переводиться.

Транспортну задачу застосовують також під час виконання економічних завдань, які за своїм характером не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу, тому величини можуть мати різний зміст залежно від конкретного завдання. Наприклад, величини c_{ij} можуть означати вартість, відстань, час, продуктивність тощо.

Як і для інших задач лінійного програмування, процес пошуку оптимального розв'язку транспортної задачі розпочинається із знаходження початкового опорного плану. Розглянемо систему обмежень (3.1) і (3.2) транспортної задачі. Вона містить mn невідомих та $A_m + B_n$ рівнянь, пов'язаних між собою співвідношенням (3.4). Якщо додати почленно рівняння окремо підсистеми (3.1) і окремо підсистеми (3.2), то отримаємо два однакові рівняння. У табл. 3.1 таке додавання рівнозначне почленному додаванню стовпців і рядків.

Така ситуація свідчить про лінійну залежність системи обмежень. Якщо одне з рівнянь цієї системи відкинути, то система обмежень міститиме не більше $A_m + B_n - 1$ лінійно незалежних рівнянь або стільки само базисних змінних, відповідно ***невироджений опорний розв'язок транспортної задачі містить*** $A_m + B_n - 1$ додатних компонент або перевезень.

Якщо умови транспортної задачі та її опорний розв'язок записані у вигляді табл. 3.1, то клітинки, в яких знаходяться відмінні від нуля перевезення, називаються ***заповненими*** клітинками, решта - ***вільними*** клітинами. Зайняті клітинки відповідають базисним змінним і для невиродженого опорного розв'язку їхня кількість дорівнює $A_m + B_n - 1$.

3 Знаходження початкового опорного плану транспортної задачі

1) **Метод північно-західного кута**

Для знаходження початкового опорного розв'язку транспортної задачі зручно скористатися методом північно-західного кута, суть якого полягає у такому.

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 2.1. Заповнюватимемо цю таблицю, починаючи від лівого верхнього кута, який умовно назвемо «північно-західним кутом». Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задовольняти потреби першого споживача B_1 за рахунок запасів першого постачальника A_1. Для цього записуємо у лівий нижній кут клітинки A_1B_1 менше з чисел a_1 і b_1, тобто $x_{11} = min(a_1, \ b_1)$.

На першому кроці можуть бути два випадки. Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший стовпець «закритий», тобто потреба першого споживача задоволена повністю. Це означає, що для решти клітинок першого стовпця $x_{i1} = 0$

$(i = 2, ..., m)$. Рухаючись далі по першому рядку таблиці, переходимо до задоволення потреб другого споживача B_j за рахунок запасу, що залишився у постачальника A_1. Тут у клітинку A_1B_2 записуємо менше з чисел $a_1 - b_1$ і b_2, тобто $x_{12} = min(a_1 - b_1, \ b_2)$.

Якщо $(a_1 - b_1) \geq b_2$, то $x_{12} = b_2$, другий стовпець «закритий», тобто

$x_{i2} = 0$ $(i = 2, ..., m)$, і тепер переходимо до задоволення потреб споживача B_3. Якщо $(a_1 - b_1) < b_2$, то $x_{12} = min(a_1 - b_1, \ b_2)$ і перший рядок «закритий», тобто запаси першого постачальника повністю вивезені. Це означає, що для решти клітинок першого рядка $x_{1j} = 0$ $(j = 3, ..., n)$. У цьому випадку задоволення потреб споживача B_j розпочинаємо тепер за рахунок запасів постачальника A_2. Процес в аналогічний спосіб продовжуємо далі.

Якщо ж на першому кроці $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ і перший рядок «закритий», тобто $x_{1j} = 0\ (j = 2, ..., n)$, і тепер, рухаючись далі по першому стовпцю таблиці, переходимо до задоволення потреб споживача B_1 за рахунок запасів постачальника A_2. Тут у клітинку A_2B_1 записуємо менше з чисел a_2 і $b_1 - a_1$, а саме: $x_{21} = \left(a_2,\ b_1 - a_1\right)$.

Цей процес продовжується до вичерпання усіх запасів $a_i\ (i = 1, 2, ..., m)$ та задоволення всіх потреб $b_j\ (j = 1, 2, ..., n)$. Остання заповнена клітинка буде у n-му стовпчику та в m-му рядку. Починаючи рух із клітинки A_1B_1 тільки по зайнятих клітинках, неможливо повернутись не лише до неї, але в будь-яку іншу зайняту клітинку. Тобто розв'язок знайдений за методом північного-західного кута, є опорним планом розв'язку транспортної задачі.

Приклад 3.1. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої у табл. 3.1, за методом північно-західного кута.

Таблиця 3.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200	200	100	100	250	

Розв'язок до цієї задачі наведено у табл. 3.3 – 3.10

- Зробимо перевірку на закритість:

$$\sum \text{потреби} = \sum \text{запаси}$$

$$200 + 200 + 100 + 100 + 250 = 100 + 250 + 200 + 300$$

850 = 850

Сума потреб дорівнює сумі запасів → перевірка на закритість пройдена.

- Заповнюємо потреби в запаси:

Крок 1: Починаємо з A_1B_1. Потреби – 200 у стовпці B_1, а запаси – 100 у рядку A_1. Отже, ми записуємо в клітинку A_1B_1 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 200-100=100; залишок запасів: 100-100=0.

Рядок, у якому закінчились запаси або стовпець, у якому закінчились потреби позначаємо «-». (див. табл. 3.2)

Таблиця 3.2

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потреби	200/100	200	100	100	250	

Крок 2: Так як у нас залишився стовпець потреби B_1, а рядок запасів A_1 уже вичерпаний, то перейдемо до наступного рядка запасів A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_1 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 100-100=0; залишок запасів: 250-100=150. (див. табл. 3.3)

Таблиця 3.3

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7	10	6	11	250/150
A_3	8 -	5	3	2	2	200
A_4	11 -	8	12	16	13	300
Потреби	200/0	200	100	100	250	

Крок 3: Ми успішно вичерпали потреби стовпця B_1, тому можемо переходити до клітинки A_2B_2. Потреби – 200 у стовпці B_2, а запаси – 150 у рядку A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_2 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 200-150=50; залишок запасів: 150-150=0. (див. табл. 3.4)

Таблиця 3.4

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5	3	2	2	200
A_4	11 -	8	12	16	13	300
Потреби	200/0	200/50	100	100	250	

Крок 4: Так як у нас залишився стовпець потреби B_2, а рядок запасів A_2 уже вичерпаний, то перейдемо до наступного рядка запасів A_3. Отже, ми записуємо в клітинку A_3B_2 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 50-50=0; залишок запасів: 200-50=150. (див. табл. 3.5)

Таблиця 3.5

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 50	3	2	2	200/150
A_4	11 -	8 -	12	16	13	300
Потреби	200/0	200/0	100	100	250	

Крок 5: Ми успішно вичерпали потреби стовпця B_2, тому можемо переходити до клітинки A_3B_3. Потреби – 100 у стовпці B_3, а запаси – 150 у рядку A_3. Отже, ми записуємо в клітинку A_3B_3 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 100-100=0; залишок запасів: 150-100=50. (див. табл. 3.6)

Таблиця 3.6

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 50	3 100	2	2	200/50
A_4	11 -	8 -	12 -	16	13	300
Потреби	200/0	200/0	100/0	100	250	

Крок 6: Ми успішно вичерпали потреби стовпця B_3, тому можемо переходити до клітинки A_3B_4. Потреби – 100 у стовпці B_4, а запаси – 50 у рядку A_3. Отже, ми записуємо в клітинку A_3B_4 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 100-50=50; залишок запасів: 50-50=0. (див. табл. 3.7)

Таблиця 3.7

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200/0
A_4	11 -	8 -	12 -	16	13	300
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/50	250	

Крок 7: Так як у нас залишився стовпець потреби B_4, а рядок запасів A_3 уже вичерпаний, то перейдемо до наступного рядка запасів A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_4 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 50-50=0; залишок запасів: 300-50=250. (див. табл. 3.8)

Таблиця 3.8

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200/0
A_4	11 -	8 -	12 -	16 50	13	300/250
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250	

Крок 8: У нас залишився стовпець потреб B_5 та рядок запасів A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_5 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 250-250=0; залишок запасів: 250-250=0. (див. табл. 3.9)

Таблиця 3.9

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200/0
A_4	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Отриманий розв'язок є **невиродженим** опорним розв'язком, оскільки містить точно $A_m + B_n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ заповнених клітин.

Знайдемо загальну вартість перевезень як суму добутків обсягів перевезень, що стоять у нижньому кутку заповнених клітинок, на відповідні вартості перевезення одиниці вантажу у цих самих клітинках:

$$Z = 100 * 10 + 100 * 2 + 150 * 7 + 50 * 5 + 100 * 3 + 50 * 2 +$$
$$+ 50 * 16 + 250 * 13 = 6950.$$

Початковий опорний розв'язок, знайдений за методом північно-західного кута, є дуже далеким від оптимального, бо під час його отримання не враховують вартості перевезення одиниці вантажу c_{ij}. Тому у подальших розрахунках потрібно буде багато ітерацій для досягнення оптимального розв'язку.

2) **Метод мінімального елемента**

Суть методу мінімального елемента полягає у тому, що на кожному кроці здійснюється максимально можливе «переміщення» вантажу у клітинку з мінімальною вартістю перевезення одиниці вантажу c_{ij}.

Нехай умови транспортної задачі задані у табл. 3.2. Заповнення таблиці починаємо з клітинки, в якій найменша величина витрат c_{ij}. Запишемо у цю клітинку менше з чисел a_i і b_j. Потім або рядок, зо відповідає постачальнику, запаси якого повністю задоволені, або стовпець, що відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений, або і рядок, і стовпець, якщо вивезені запаси постачальника і задоволені потреби споживача, «викреслюють», тобто вони більше не беруть участі у процесі побудови початкового опорного плану. Далі з решти клітинок таблиці знову вибирають клітинку з найменшою величиною витрат, і процес розподілу запасів продовжується доти, доки вони усі не будуть вивезені, а потреби задоволені.

Приклад 3.2. Знайти початковий опорний розв’язок транспортної задачі, заданої у табл. 3.2, за методом мінімального елемента.

Розв’язок до цієї задачі наведено у табл. 3.11 – 3.17

- Перш за все, необхідно перевірити задачу на закритість:

$$\sum \text{потреби} = \sum \text{запаси}$$

$$200 + 200 + 100 + 100 + 250 = 100 + 250 + 200 + 300$$

$$850 = 850$$

Сума потреб дорівнює сумі запасів → перевірка на закритість пройдена.

- Заповнюємо потреби в запаси:

Крок 1: Починаємо з клітинки, вартість якої найменша (A_1B_4). Потреби – 100 у стовпці B_4, а запаси – 100 у рядку A_1. Отже, ми записуємо в клітинку A_1B_4 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 100-100=0; залишок запасів: 100-100=0.

Рядок, у якому закінчились запаси або стовпець, у якому закінчились потреби позначаємо «-». (див. табл. 3.10)

Таблиця 3.10

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2	7	10	6 -	11	250
A_3	8	5	3	2 -	2	200
A_4	11	8	12	16 -	13	300
Потреби	200	200	100	100/0	250	

Крок 2: Шукаємо наступну клітинку, вартість якої найменша. У нас знайшлося 2 кандидати A_2B_1 та A_3B_5 з найменшою вартістю. Отже, вибираємо одну із них на власний розсуд (A_2B_1). Потреби – 200 у стовпці B_1, а запаси – 250 у рядку A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_1 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 200-200=0; залишок запасів: 250-200=50. (див. табл. 3.11)

Таблиця 3.11

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7	10	6 -	11	250/50
A_3	8 -	5	3	2 -	2	200
A_4	11 -	8	12	16 -	13	300
Потреби	200/0	200	100	100/0	250	

Крок 3: Шукаємо наступну клітинку, вартість якої найменша (A_3B_5). Потреби – 250 у стовпці B_5, а запаси – 200 у рядку A_3. Отже, ми записуємо в клітинку A_3B_5 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 250-200=50; залишок запасів: 200-200=0. (див. табл. 3.12)

Таблиця 3.12

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7	10	6 -	11	250/50
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
A_4	11 -	8	12	16 -	13	300
Потреби	200/0	200	100	100/0	250/50	

Крок 4: Шукаємо наступну клітинку, вартість якої найменша (A_2B_2). Потреби – 200 у стовпці B_2, а запаси – 50 у рядку A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_2 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 200-50=150; залишок запасів: 50-50=0. (див. табл. 3.13)

Таблиця 3.13

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
A_4	11 -	8	12	16 -	13	300
Потреби	200/0	200/15(	100	100/0	250/50	

Крок 5: Шукаємо наступну клітинку, вартість якої найменша (A_4B_2). Потреби – 150 у стовпці B_2, а запаси – 300 у рядку A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_2 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 150-150=0; залишок запасів: 300-150=150. (див. табл. 3.14)

Таблиця 3.14

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
A_4	11 -	8 150	12	16 -	13	300/150
Потреби	200/0	200/0	100	100/0	250/50	

Крок 6: Шукаємо наступну клітинку, вартість якої найменша ($A_4 B_3$). Потреби – 100 у стовпці B_3, а запаси – 150 у рядку A_4. Отже, ми записуємо в клітинку $A_4 B_3$ ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 100-100=0; залишок запасів: 150-100=50. (див. табл. 3.15)

Таблиця 3.15

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
A_4	11 -	8 150	12 100	16 -	13	300/50
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/50	

Крок 7: У нас залишився стовпець потреб B_5 та рядок запасів A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_5 ту кількість потреб, яка вміщається в запаси. Залишок потреб: 50-50=0; залишок запасів: 50-50=0. (див. табл. 3.16)

Таблиця 3.16

Постачальники	Споживачі					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
A_2	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250/0
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
A_4	11 -	8 150	12 100	16 -	13 50	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Отриманий розв'язок є **виродженим** опорним розв'язком, оскільки містить точно $A_m + B_n - 1 = 4 + 5 - 1 > 7$ заповнених клітин.

Знайдемо загальну вартість перевезень як суму добутків обсягів перевезень, що стоять у нижньому кутку заповнених клітинок, на відповідні вартості перевезення одиниці вантажу у цих самих клітинках:

$$Z = 100 * 1 + 200 * 2 + 50 * 7 + 200 * 2 + 150 * 8 +$$
$$+ 100 * 12 + 50 * 13 = 4300.$$

Можна побачити, що загальна вартість плану перевезень у прикладі 3.2 значно менша, ніж у прикладі 3.1, отже, він ближчий до оптимального.

3) **Евристичний метод Фойгеля**

Метод Фойгеля доволі простий і дає змогу отримати опорний план, більш наближений до оптимального розв'язку, ніж у випадку застосування інших методів, розглянутих у п. 1 та 2.

Спосіб полягає у тому, що ми шукаємо штрафи стовпців і рядків й за ними заповнюємо потреби. Штрафи стовпців – це різниця між двома мінімальними елементами в стопці, а штрафи рядків – це різниця між двома мінімальними елементами в рядку.

Потім ми вибираємо максимальне число в штрафах стовпців і штрафах рядків і заповнюємо той стовпець / рядок. Якщо максимальних чисел декілька, то порівнюємо мінімальні тарифи і вибираємо найменший. Якщо мінімальні тарифи однакові, то порівнюємо сумарні штрафи рядків і стовпців і вибираємо найбільший.

Приклад 3.3. Знайти початковий опорний розв'язок транспортної задачі, заданої у табл. 3.2, за методом Фойгеля.

Розв'язок до цієї задачі наведено у табл. 3.18 – 3.24

- Перш за все, необхідно перевірити задачу на закритість:

$$\sum \text{потреби} = \sum \text{запаси}$$

$$200 + 200 + 100 + 100 + 250 = 100 + 250 + 200 + 300$$

$$850 = 850$$

Сума потреб дорівнює сумі запасів → перевірка на закритість пройдена.

- Метод Фойгеля:

Крок 1: Заповнюємо штрафи стовпців:

Для стовпця B_1 найменші елементи – це $A_2B_1 = 2$ та $A_3B_1 = 8$. Різниця між ними $8 - 2 = 6$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці. Для стовпця B_2 найменші елементи – це $A_3B_2 = 5$ та $A_1B_2 = 7$. Різниця між ними $7 - 5 = 2$.

Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 3 = 1$.
Для стовпця B_4 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_3B_4 = 2$. Різниця між ними $2 - 1 = 1$.
Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_3B_5 = 2$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 2 = 2$.

Заповнюємо штрафи рядків:
Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 1 = 3$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.
Для рядка A_2 найменші елементи – це $A_2B_1 = 2$ та $A_2B_4 = 6$. Різниця між ними $6 - 2 = 4$.
Для рядка A_3 найменші елементи – це $A_3B_4 = 2$ та $A_3B_5 = 2$. Різниця між ними $2 - 2 = 0$.
Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_2 = 8$ та $A_4B_1 = 11$. Різниця між ними $11 - 8 = 3$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – стовпець B_1. У стовпці B_1 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша - A_2B_1. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 200 у стовпці B_1, а запаси – 250 у рядку A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_1 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси.

Залишок потреб: 200-200=0; залишок запасів: 250-200=50.

(!) Залишки потреб і запасів записуємо через «/» після шуканого штрафу на кожній ітерації. Рядок, у якому закінчились запаси або стовпець, у якому закінчились потреби позначаємо «-». (див. табл. 3.17)

Таблиця 3.17

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Постача-льники</td><td colspan="5">Споживачі</td><td rowspan="2">Запа-си</td><td colspan="7">Штрафи рядків</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td>B_5</td><td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td><td>VI</td><td>VII</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_1</td><td>10
-</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>100</td><td>3/
100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A_2</td><td>2
200</td><td>7</td><td>10</td><td>6</td><td>11</td><td>250</td><td>4/
50</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A_3</td><td>8
-</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>200</td><td>0/
200</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A_4</td><td>11
-</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>13</td><td>300</td><td>3/
300</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Потреби</td><td>200</td><td>200</td><td>100</td><td>100</td><td>250</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Штрафи стовпців</td><td>I</td><td>6/
0</td><td>2/
200</td><td>1/
100</td><td>1/
100</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>II</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>V</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VI</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Крок 2: Заповнюємо штрафи стовпців:

(!) Клітинки, у яких позначено «-» не враховуються для розрахунку штрафів.

Для стовпця B_2 найменші елементи – це $A_3B_2 = 5$ та $A_1B_2 = 7$. Різниця між ними $7 - 5 = 2$.

Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 3 = 1$.

Для стовпця B_4 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_3B_4 = 2$. Різниця між ними $2 - 1 = 1$.

Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_3B_5 = 2$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 2 = 2$.

Заповнюємо штрафи рядків:

Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 1 = 3$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.
Для рядка A_2 найменші елементи – це $A_2B_4 = 6$ та $A_2B_2 = 7$. Різниця між ними $7 - 6 = 1$.
Для рядка A_3 найменші елементи – це $A_3B_4 = 2$ та $A_3B_5 = 2$. Різниця між ними $2 - 2 = 0$.
Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_2 = 8$ та $A_4B_3 = 11$. Різниця між ними $11 - 8 = 3$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – рядок A_4. У рядку A_4 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша - A_4B_2. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 200 у стовпці B_2, а запаси – 300 у рядку A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_2 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси.
Залишок потреб: 200-200=0; залишок запасів: 300-200=100. (див. табл. 3.18)

Таблиця 3.18

<table>
<tr><td rowspan="2">Постача-льники</td><td colspan="5">Споживачі</td><td rowspan="2">Запа-си</td><td colspan="7">Штрафи рядків</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td>B_5</td><td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td><td>VI</td><td>VII</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>10
-</td><td>7
-</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>100</td><td>3/
100</td><td>3/
100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>2
200</td><td>7
-</td><td>10</td><td>6</td><td>11</td><td>250</td><td>4/
50</td><td>1/
50</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>8
-</td><td>5
-</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>200</td><td>0/
200</td><td>0/
200</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A_4</td><td>11
-</td><td>8
200</td><td>12</td><td>16</td><td>13</td><td>300</td><td>3/
300</td><td>4/
100</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Потреби</td><td>200</td><td>200</td><td>100</td><td>100</td><td>250</td></tr>
<tr><td>Штрафи стовпців I</td><td>6/
0</td><td>2/
200</td><td>1/
100</td><td>1/
100</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>II</td><td>-</td><td>2/
0</td><td>1/
100</td><td>1/
100</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>V</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VI</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Крок 3: Заповнюємо штрафи стовпців:
Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 3 = 1$.
Для стовпця B_4 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_3B_4 = 2$. Різниця між ними $2 - 1 = 1$.
Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_3B_5 = 2$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 2 = 2$.

Заповнюємо штрафи рядків:
Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 1 = 3$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.
Для рядка A_2 найменші елементи – це $A_2B_4 = 6$ та $A_2B_3 = 10$. Різниця між ними $10 - 6 = 4$.

Для рядка A_3 найменші елементи – це $A_3B_4 = 2$ та $A_3B_5 = 2$. Різниця між ними $2 - 2 = 0$.

Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_3 = 12$ та $A_4B_5 = 13$. Різниця між ними $13 - 12 = 1$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – рядок A_2. У рядку A_2 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша - A_2B_4. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 100 у стовпці B_4, а запаси – 50 у рядку A_2. Отже, ми записуємо в клітинку A_2B_4 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси.

Залишок потреб: 100-50=50; залишок запасів: 50-50=0. (див. табл. 3.19)

Таблиця 3.19

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Постача-
льники</td><td colspan="5">Споживачі</td><td rowspan="2">Запа-
си</td><td colspan="7">Штрафи рядків</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td><td>B_5</td><td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td><td>VI</td><td>VII</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_1</td><td>10
-</td><td>7
-</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>100</td><td>3/
100</td><td>3/
100</td><td>3/
100</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A_2</td><td>2
200</td><td>7
-</td><td>10
-</td><td>6
50</td><td>11
-</td><td>250</td><td>4/
50</td><td>1/
50</td><td>4/
0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td colspan="2">A_3</td><td>8
-</td><td>5
-</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>200</td><td>0/
200</td><td>0/
200</td><td>0/
200</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">A_4</td><td>11
-</td><td>8
200</td><td>12</td><td>16</td><td>13</td><td>300</td><td>3/
300</td><td>4/
100</td><td>1/
100</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Потреби</td><td>200</td><td>200</td><td>100</td><td>100</td><td>250</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Штрафи стовпців</td><td>I</td><td>6/
0</td><td>2/
200</td><td>1/
100</td><td>1/
100</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>II</td><td>-</td><td>2/
0</td><td>1/
100</td><td>1/
100</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>III</td><td>-</td><td>-</td><td>1/
100</td><td>1/
50</td><td>2/
250</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>V</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VI</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>VII</td><td>-</td><td>-</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Крок 4: Заповнюємо штрафи стовпців:
Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 3 = 1$.
Для стовпця B_4 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_3B_4 = 2$. Різниця між ними $2 - 1 = 1$.
Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_3B_5 = 2$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 2 = 2$.

Заповнюємо штрафи рядків:
Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_4 = 1$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 1 = 3$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.
Для рядка A_3 найменші елементи – це $A_3B_4 = 2$ та $A_3B_5 = 2$. Різниця між ними $2 - 2 = 0$.
Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_3 = 12$ та $A_4B_5 = 13$. Різниця між ними $13 - 12 = 1$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – рядок A_1. У рядку A_1 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша - A_1B_4. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 50 у стовпці B_4, а запаси – 100 у рядку A_1. Отже, ми записуємо в клітинку A_1B_4 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси.
Залишок потреб: 50-50=0; залишок запасів: 100-50=50. (див. табл. 3.20)

Таблиця 3.20

Постачальники	Споживачі					Запаси	Штрафи рядків						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		I	II	III	IV	V	VI	VII
A_1	10 -	7 -	4	1 50	4	100	3/ 100	3/ 100	3/ 100	3/ 50			
A_2	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250	4/ 50	1/ 50	4/ 0	-	-	-	-
A_3	8 -	5 -	3	2 -	2	200	0/ 200	0/ 200	0/ 200	0/ 200			
A_4	11 -	8 200	12	16 -	13	300	3/ 300	4/ 100	1/ 100	1/ 100			
Потреби	200	200	100	100	250								
Штрафи стовпців I	6/ 0	2/ 200	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
II	-	2/ 0	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
III	-	-	1/ 100	1/ 50	2/ 250								
IV	-	-	1/ 100	1/ 0	2/ 250								
V	-	-		-									
VI	-	-		-									
VII	-	-		-									

Крок 5: Заповнюємо штрафи стовпців:

Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_1B_3 = 4$. Різниця між ними $4 - 3 = 1$.

Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_3B_5 = 2$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 2 = 2$.

Заповнюємо штрафи рядків:

Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_3 = 4$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 4 = 0$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.

Для рядка A_3 найменші елементи – це $A_3B_3 = 3$ та $A_3B_5 = 2$. Різниця між ними $3 - 2 = 1$.

Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_3 = 12$ та $A_4B_5 = 13$. Різниця між ними $13 - 12 = 1$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – стовпець B_5. У стовпці B_5 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша - A_3B_5. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 250 у стовпці B_5, а запаси – 200 у рядку A_3. Отже, ми записуємо в клітинку A_3B_5 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 250-200=50; залишок запасів: 200-200=0. (див. табл. 3.21)

Таблиця 3.21

Постачальники	Споживачі					Запаси	Штрафи рядків						
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		I	II	III	IV	V	VI	VII
A_1	10 -	7 -	4	1 50	4	100	3/ 100	3/ 100	3/ 100	3/ 50	0/ 50		
A_2	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250	4/ 50	1/ 50	4/ 0	-	-	-	-
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200	0/ 200	0/ 200	0/ 200	0/ 200	1/ 0	-	-
A_4	11 -	8 200	12	16 -	13	300	3/ 300	4/ 100	1/ 100	1/ 100	1/ 100		
Потреби	200	200	100	100	250								
Штрафи стовпців I	6/ 0	2/ 200	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
II	-	2/ 0	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
III	-	-	1/ 100	1/ 50	2/ 250								
IV	-	-	1/ 100	1/ 0	2/ 250								
V	-	-	1/ 100	-	2/ 50								
VI	-	-		-									
VII	-	-		-									

Крок 6: Заповнюємо штрафи стовпців:

Для стовпця B_3 найменші елементи – це $A_1B_3 = 4$ та $A_4B_3 = 12$. Різниця між ними $12 - 4 = 8$.

Для стовпця B_5 найменші елементи – це $A_1B_5 = 4$ та $A_4B_5 = 13$. Різниця між ними $13 - 4 = 9$.

Заповнюємо штрафи рядків:

Для рядка A_1 найменші елементи – це $A_1B_3 = 4$ та $A_1B_5 = 4$. Різниця між ними $4 - 4 = 0$. Отже, записуємо це значення у відповідній клітинці.

Для рядка A_4 найменші елементи – це $A_4B_3 = 12$ та $A_4B_5 = 13$. Різниця між ними $13 - 12 = 1$.

Серед знайдених штрафів обираємо найбільший – стовпець B_5. У стовпці B_5 шукаємо клітинку, вартість якої буде найменша – A_1B_5. Заповнюємо шукану клітинку.

Потреби – 50 у стовпці B_5, а запаси – 50 у рядку A_1. Отже, ми записуємо в клітинку A_1B_5 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 50-50=0; залишок запасів: 50-50=0. (див. табл. 3.22)

Таблиця 3.22

Постачальники		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	Штрафи рядків I	II	III	IV	V	VI	VII
A_1		10 -	7 -	4 -	1 50	4 50	100	3/100	3/100	3/100	3/50	0/50	0/0	-
A_2		2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250	4/50	1/50	4/0	-	-	-	-
A_3		8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200	0/200	0/200	0/200	0/200	1/0	-	-
A_4		11 -	8 200	12	16 -	13 -	300	3/300	4/100	1/100	1/100	1/100	1/100	
Потреби		200	200	100	100	250								
Штрафи стовпців	I	6/0	2/200	1/100	1/100	2/250								
	II	-	2/0	1/100	1/100	2/250								
	III	-	-	1/100	1/50	2/250								
	IV	-	-	1/100	1/0	2/250								
	V	-	-	1/100	-	2/50								
	VI	-	-	8/100	-	9/0								
	VII	-	-		-	-								

Крок 7: Залишилась лише одна клітинка – це A_4B_3.

Потреби – 100 у стовпці B_3, а запаси – 100 у рядку A_4. Отже, ми записуємо в клітинку A_4B_3 ту кількість потреб, яка поміщається в запаси. Залишок потреб: 100-100=0; залишок запасів: 100-100=0. (див. табл. 3.23)

Таблиця 3.23

Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси	I	II	III	IV	V	VI	VII
A_1	10 -	7 -	4 -	1 50	4 50	100	3/ 100	3/ 100	3/ 100	3/ 50	0/ 50	0/ 0	-
A_2	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250	4/ 50	1/ 50	4/ 0	-	-	-	-
A_3	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200	0/ 200	0/ 200	0/ 200	0/ 200	1/ 0	-	-
A_4	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300	3/ 300	4/ 100	1/ 100	1/ 100	1/ 100	1/ 100	12/ 0
Потреби	200	200	100	100	250								
Штрафи стовпців I	6/ 0	2/ 200	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
II	-	2/ 0	1/ 100	1/ 100	2/ 250								
III	-	-	1/ 100	1/ 50	2/ 250								
IV	-	-	1/ 100	1/ 0	2/ 250								
V	-	-	1/ 100	-	2/ 50								
VI	-	-	8/ 100	-	9/ 0								
VII	-	-	12/ 0	-	-								

Цей розв'язок складається із 7 зайнятих клітин, а отже, є **виродженим** опорним розв'язком. $(A_m + B_n - 1 = 4 + 5 - 1 > 7)$

Знайдемо загальну вартість плану перевезень:

$$Z = 200 * 2 + 200 * 8 + 100 * 12 + 50 * 1 + 50 * 6 + 50 * 4 + 200 * 2 = 4150.$$

Отже, метод Фойгеля дає змогу отримати ще кращий опорний план перевезень порівняно з методами північно-західного кута та мінімального елемента.

4 Знаходження оптимального розв’язку транспортної задачі

Метод потенціалів.

За допомогою розглянутих методів можна отримати початковий (вироджений або невироджений) опорний план транспортної задачі. Цей опорний план як розв'язок задачі лінійного програмування можна було б довести до оптимального за допомогою симплекс-методу. Однак через громіздкість симплексних таблиць і великий обсяг обчислень для отримання оптимального плану транспортної задачі використовують простіші методи. Найпоширенішим з них вважається метод потенціалів.

За допомогою методу потенціалів після скінченної кількості кроків знаходимо оптимальний план транспортної задачі. Для перевірки на оптимальність знайденого на кожному етапі опорного розв'язку кожному постачальнику A_i і кожному споживачу B_j ставлять у відповідність числа u_i та v_j $(i = 1, 2,..., m;\ j = 1, 2,..., n)$, які називаються їхніми ***потенціалами***. Відношення між цими потенціалами встановлюють за допомогою теореми.

Теорема 4.1. Якщо план $X^* = (x^*_{ij})$ ***транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідають*** $m + n$ ***чисел*** u^*_i ***та*** v^*_j***, що задовольняють такі умови:***

$$u^*_i + v^*_j = c_{ij} \text{ для } x^*_{ij} > 0,$$

$$u^*_i + v^*_j \le c_{ij} \text{ для } x^*_{ij} = 0$$

$$(i = 1, 2,..., m;\ j = 1, 2,..., n)$$

На основі теореми 3.1 для того, щоб опорний розв'язок транспортної задачі був оптимальним, необхідно виконати такі умови:

а) для кожної зайнятої клітини сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \qquad (4.1)$$

б) для кожної вільної клітинки сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу, що стоїть у цій клітинці:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}; \qquad (4.2)$$

Якщо хоча б одна вільна клітинка не задовольняє умову (4.2), то знайдений опорний план не є оптимальним і його можна покращити. Для перевірки отриманого плану на оптимальність необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати тільки для невиродженого опорного плану. Такий план містить $m + n - 1$ зайнятих клітинок, тому для нього можна скласти систему із $m + n - 1$ лінійно незалежних рівнянь вигляду (4.1) з $m + n$ невідомими. У цій системі рівнянь на одне менше, ніж невідомих, тому припустивши, що один із потенціалів дорівнює нулю, можна однозначно визначити решту. Потім необхідно перевірити правильність побудови системи потенціалів, для цього потрібно перевірити виконання умов (4.1) для усіх заповнених клітинок.

Якщо опорний план є виродженим, тобто містить менше $m + n - 1$ заповнених клітинок, то перед побудовою системи потенціалів вводимо додаткову кількість клітинок з нульовими перевезеннями, щоб отримати $m + n - 1$ заповнених. Клітинки, в які уведені нульові перевезення, називають ***фіктивно заповненими клітинками***. Оскільки у транспортній задачі потрібно знайти мінімальне значення цільової функції, то доцільно зробити фіктивно заповненими ті клітинки, в яких найменша вартість перевезення.

Після того, як визначені числові значення усіх потенціалів, для усіх вільних клітин обчислюють величини

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}. \qquad (4.3)$$

Якщо для всіх i та j ($i = 1, 2..., m;\ j = 1, 2,..., n$) виконується $\Delta_{ij} \leq 0$, то знайдений опорний план буде оптимальним. Якщо, хоча б для однієї пари i та j виконується $\Delta_{ij} > 0$, то знайдений опорний план не буде оптимальним, і його замінюють на новий опорний план. Для цього необхідно «завантажити» вільну клітинку $A_k B_l$ (ввести у базис змінну x_{kl}), що задовольняє умову

$$\Delta_{kl} =, max\Delta_{ij}; \quad \Delta_{ij} > 0 \qquad (4.4)$$

З цією метою будуємо цикл у вигляді ламаної лінії, починаючи від вільної клітинки $A_k B_l$ і проводячи ланки ламаної вздовж рядків і стовпчиків до заповнених клітин. У клітинку $A_k B_l$ ставимо знак "+", а в решту вершин циклу почергово знаки "-" та "+" (при цьому точки самоперетину ламаної не враховуємо - вони не є вершинами циклу).

Вибираємо найменше перевезення з вершин циклу, відзначених "-" (у клітинці $A_r B_s$), позначаємо його через θ і цю величину «переміщаємо» клітинками циклу, тобто віднімаємо її від об'ємів перевезень у клітинках, відзначених "-", і додаємо до об'єму перевезень у клітинках, відзначених "+". Тоді об'єм перевезень у клітинці $A_k B_l$ дорівнює θ, а в клітинці $A_r B_s$ – нулю.

У результаті клітинка $A_r B_s$ стає вільною (якщо після переміщення перевезень у деяких зайнятих клітинках з'являються нульові перевезення, то із цих клітин тільки одна перетворюється на вільну), а клітинка $A_k B_l$ – зайнятою, і отримаємо новий опорний план. Баланс перевезень не змінився, оскільки у кожному рядку та стовпчику ми додали і відняли одне й те саме значення.

Для отриманого нового опорного плану знову визначаємо числові значення потенціалів і для вільних клітин обчислюємо величини вигляду (4.3). Цей процес продовжуємо, поки серед Δ_{ij} не залишиться жодного додатного.

Приклад 4.1. Знайти методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі, заданої у табл. 3.1.

Нехай початковий опорний розв’язок (план) цієї транспортної задачі знайдено за методом Фойгеля (табл. 3.17 – 3.23).

Крок 1: Початковий опорний розв'язок є **виродженим**, бо кількість заповнених клітинок дорівнює 7, а $A_m + B_n - 1 = 8$. Тому потрібно одну незаповнену клітинку заповнити фіктивним перевезенням (нулем). Його можна розмістити в одній з клітинок $\left(A_1B_2\right)$, $\left(A_1B_3\right)$, $\left(A_2B_2\right)$, $\left(A_3B_2\right)$, $\left(A_3B_3\right)$, $\left(A_4B_1\right)$, $\left(A_4B_4\right)$ і $\left(A_4B_5\right)$, але не можна вважати заповненою жодну з клітинок $\left(A_1B_1\right)$, $\left(A_2B_5\right)$, $\left(A_3B_1\right)$ і $\left(A_3B_4\right)$, бо заповнення будь-якої з них призводить до появи циклу, складеного з заповнених клітин. Тому розмістимо, наприклад, фіктивне перевезення в клітинці A_3B_3 ($c_{ij} = 3$).

(!) Якщо початковий опорний план є невиродженим (кількість заповнених клітинок дорівнює $A_m + B_n - 1$), то крок 1 пропускаємо.

Крок 2: Замінимо стовпець постачальників A на u та рядок споживачів B на v (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Постачальники	Споживачі					Запаси
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
u_1	10 -	7 -	4 -	1 50	4 50	100/0
u_2	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
u_3	8 -	5 -	3 **0**	2 **-**	2 200	200/0
u_4	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 3: Складемо систему рівнянь, у якій ми повинні врахувати тільки заповнені клітинки.

Виберемо рядок / стовпець, у якому найбільша кількість заповнених клітинок, щоб полегшити обрахунки (насправді, немає значення, який рядок / стовпець обирати), тобто рядок A_1, і для нього вважатимемо $u_1 = 0$. Використаємо формулу (3.5).

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ c_{14} = u_1 + v_4 \\ c_{15} = u_1 + v_5 \\ c_{21} = u_2 + v_1 \\ c_{24} = u_2 + v_4 \\ c_{33} = u_3 + v_3 \\ c_{35} = u_3 + v_5 \\ c_{42} = u_4 + v_2 \\ c_{43} = u_4 + v_3 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ 1 = u_1 + v_4 \\ 4 = u_1 + v_5 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 6 = u_2 + v_4 \\ 3 = u_3 + v_3 \\ 2 = u_3 + v_5 \\ 8 = u_4 + v_2 \\ 12 = u_4 + v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = 4 \\ v_1 = -3 \\ u_2 = 5 \\ v_3 = 5 \\ u_3 = -2 \\ v_2 = 1 \\ u_4 = 7 \end{cases}$$

Заповнимо ці значення у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = -3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	$v_5 = 4$	
$u_1 = 0$	10 -	7 -	4 -	1 50	4 50	100/0
$u_2 = 5$	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
$u_3 = -2$	8 -	5 -	3 **0**	2 **-**	2 200	200/0
$u_4 = 7$	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 4: Визначимо для усіх вільних клітин (відзначені "-") знак Δ_{ij}, використовуючи формулу (4.3).

$$\begin{cases}
\Delta_{11} = 0 - 3 - 10 = -13 \\
\Delta_{12} = 0 + 1 - 7 = -6 \\
\Delta_{13} = 0 + 5 - 4 = 1 > 0 \\
\Delta_{22} = 5 + 1 - 7 = -1 \\
\Delta_{23} = 5 + 5 - 10 = 0 \\
\Delta_{25} = 5 + 4 - 11 = -2 \\
\Delta_{31} = -2 - 3 - 8 = -13 \\
\Delta_{32} = -2 + 1 - 5 = -6 \\
\Delta_{34} = -2 + 1 - 2 = -3 \\
\Delta_{41} = 7 - 3 - 11 = -7 \\
\Delta_{44} = 7 + 1 - 16 = -8 \\
\Delta_{45} = 7 + 4 - 13 = -2
\end{cases}$$

Для вільної клітинки Δ_{ij} буде додатне, тобто $\Delta_{13} = 1$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. Для переходу до нового оптимального плану потрібно знайти клітинку, яку потрібно завантажувати, за умови (4.4). Такою клітинкою є саме Δ_{13}. Позначимо її жовтим кольором на таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = -3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	$v_5 = 4$	
$u_1 = 0$	10 -	7 -	4(+) -	1 50	4(-) 50	100/0
$u_2 = 5$	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
$u_3 = -2$	8 -	5 -	3(-) **0**	2 **-**	2(+) 200	200/0
$u_4 = 7$	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 5: Виділену клітинку позначаємо знаком "+". Далі потрібно геометрично із цією клітинкою виділити ще 3 або більше клітинок, які будуть заповнені. Таким чином, щоб утворилася ламана лінія. Утворена лінія може бути як звичайним квадратом (що є зручно) або, якщо не вдається, то складнішою геометричною фігурою. У цій фігурі кожен кут має «йти» по заповненій клітинці та починатися з тої, яка була обрана. Кожен кут чергується знаками "+" та "-" і їхня сума повинна бути завжди парною.

У нашому випадку це буде квадрат з вершинами u_1v_3, u_1v_5, u_3v_5, u_3v_3 (див. табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = -3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 5$	$v_4 = 1$	$v_5 = 4$	
$u_1 = 0$	10 -	7 -	4(+) -	1 50	4(-) 50	100/0
$u_2 = 5$	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
$u_3 = -2$	8 -	5 -	3(-) **0**	2 -	2(+) 200	200/0
$u_4 = 7$	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 6: Знаходимо найменше перевезення θ у вершинах цієї фігури із знаком "-" (клітинки u_1v_5; u_3v_3): $\theta = min(0; 50) = 0$.

Це шукане значення (0) застосовуємо до клітинок, які належать вершинам фігури, а саме: віднімаємо від об’ємів перевезень у клітинках зі знаком "-" і додаємо до об’ємів перевезень у клітинках зі знаком "+". У результаті отримуємо незначні зміни (клітинка u_1v_3 набуває значення 0 та ця клітинка вважається фіктивно заповненою) див. табл. 4.5:

Таблиця 4.5

Постачальники	Споживачі					Запаси
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
u_1	10 -	7 -	4 0	1 50	4 50	100/0
u_2	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
$u_3 =$	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
u_4	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

(!) Продовжуємо виконувати цей цикл починаючи з Крок3 до тих пір, поки на Крок4 не залишиться додатних чисел.

Крок 7: Складемо систему рівнянь, у якій ми повинні врахувати тільки заповнені клітинки.

Виберемо рядок, у якому найбільша кількість заповнених клітинок, тобто рядок A_1, і для нього вважатимемо $u_1 = 0$. Використаємо формулу (4.1).

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ c_{13} = u_1 + v_3 \\ c_{14} = u_1 + v_4 \\ c_{15} = u_1 + v_5 \\ c_{21} = u_2 + v_1 \\ c_{24} = u_2 + v_4 \\ c_{35} = u_3 + v_5 \\ c_{42} = u_4 + v_2 \\ c_{43} = u_4 + v_3 \end{cases}$$

Розв’яжемо систему:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ 4 = u_1 + v_3 \\ 1 = u_1 + v_4 \\ 4 = u_1 + v_5 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 6 = u_2 + v_4 \\ 2 = u_3 + v_5 \\ 8 = u_4 + v_2 \\ 12 = u_4 + v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_3 = 4 \\ v_4 = 1 \\ v_5 = 4 \\ v_1 = -3 \\ u_2 = 5 \\ u_3 = -2 \\ v_2 = 0 \\ u_4 = 8 \end{cases}$$

Заповнимо ці значення у табл. 4.6.

Таблиця 4.6

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 =- 3$	$v_2 = 0$	$v_3 = 4$	$v_4 = 1$	$v_5 = 4$	
$u_1 = 0$	10 -	7 -	4 0	1 50	4 50	100/0
$u_2 = 5$	2 200	7 -	10 -	6 50	11 -	250/0
$u_3 =- 2$	8 -	5 -	3 -	2 -	2 200	200/0
$u_4 = 8$	11 -	8 200	12 100	16 -	13 -	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 8: Визначимо для усіх вільних клітин (відзначені "-") знак Δ_{ij}, використовуючи формулу (4.3).

$$\begin{cases} \Delta_{11} = 0 - 3 - 10 = -13 \\ \Delta_{12} = 0 + 0 - 7 = -7 \\ \Delta_{22} = 5 + 0 - 7 = -2 \\ \Delta_{23} = 5 + 4 - 10 = -1 \\ \Delta_{25} = 5 + 4 - 11 = -2 \\ \Delta_{31} = -2 - 3 - 8 = -13 \\ \Delta_{32} = -2 + 0 - 5 = -7 \\ \Delta_{33} = -2 + 4 - 3 = -1 \\ \Delta_{34} = -2 + 1 - 2 = -3 \\ \Delta_{41} = 8 - 3 - 11 = -6 \\ \Delta_{44} = 8 + 1 - 16 = -7 \\ \Delta_{45} = 8 + 4 - 13 = -1 \end{cases}$$

Для усіх вільних клітин Δ_{ij} будуть недодатними. Отже, знайдений опорний план є оптимальним, а його загальна вартість перевезень буде наступною:

$$Z = 200 * 2 + 200 * 8 + 100 * 12 + 0 * 4 + 50 * 1 + 50 * 6 + \\ + 50 * 4 + 200 * 2 = 4150.$$

Можна зробити висновок, що опорний план був оптимальним із самого початку.

Так як це був не дуже хороший приклад для розгляду методу потенціалів, розглянемо декілька ітерацій з наступним прикладом.

Приклад 4.2. Знайти методом потенціалів оптимальний план транспортної задачі, заданої у табл. 3.1.

Нехай початковий опорний розв'язок (план) цієї транспортної задачі знайдено за методом північно-західного кута (табл. 3.3 – 3.10).

Крок 1: Початковий опорний розв'язок є **невиродженим**, бо кількість заповнених клітинок дорівнює 8, а $A_m + B_n - 1 = 8$. Тому переходимо до Крок 2.

Крок 2: Замінимо стовпець постачальників A на u та рядок споживачів B на v (див. табл. 4.7).

Таблиця 4.7

Постачальники	Споживачі					Запаси
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
u_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
u_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
u_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200/0
u_4	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 3: Складемо систему рівнянь, у якій ми повинні врахувати тільки заповнені клітинки.

Виберемо рядок / стовпець, у якому найбільша кількість заповнених клітинок, тобто рядок A_3, і для нього вважатимемо $u_3 = 0$. Використаємо формулу (4.1).

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ c_{11} = u_1 + v_1 \\ c_{21} = u_2 + v_1 \\ c_{22} = u_2 + v_2 \\ c_{32} = u_3 + v_2 \\ c_{33} = u_3 + v_3 \\ c_{34} = u_3 + v_4 \\ c_{44} = u_4 + v_4 \\ c_{45} = u_4 + v_5 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ 10 = u_1 + v_1 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 7 = u_2 + v_2 \\ 5 = u_3 + v_2 \\ 3 = u_3 + v_3 \\ 2 = u_3 + v_4 \\ 16 = u_4 + v_4 \\ 13 = u_4 + v_5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_3 = 0 \\ u_1 = 10 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 3 \\ v_4 = 2 \\ u_4 = 14 \\ v_5 = -1 \end{cases}$$

Заповнимо ці значення у табл. 4.8.

Таблиця 4.8

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = 0$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	$v_5 = -1$	
$u_1 = 10$	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100/0
$u_2 = 2$	2 100	7 150	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = 0$	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200/0
$u_4 = 14$	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 4: Визначимо для усіх вільних клітин (відзначені "-") знак Δ_{ij}, використовуючи формулу (4.3).

$$\begin{cases} \Delta_{12} = 10 + 5 - 7 = 8 > 0 \\ \Delta_{13} = 10 + 3 - 4 = 9 > 0 \\ \Delta_{14} = 10 + 2 - 1 = 11 > 0 \\ \Delta_{15} = 10 - 1 - 4 = 5 > 0 \\ \Delta_{23} = 2 + 3 - 10 = -5 \\ \Delta_{24} = 2 + 2 - 6 = -2 \\ \Delta_{25} = 2 - 1 - 11 = -10 \\ \Delta_{31} = 0 + 0 - 8 = -8 \\ \Delta_{35} = 0 - 1 - 2 = -3 \\ \Delta_{41} = 14 + 0 - 11 = 3 > 0 \\ \Delta_{42} = 14 + 5 - 8 = 11 > 0 \\ \Delta_{43} = 14 + 3 - 12 = 5 > 0 \end{cases}$$

Для вільних клітинок Δ_{ij} будуть додатні, тобто $\Delta_{12} = 8$; $\Delta_{13} = 9$; $\Delta_{14} = 11$; $\Delta_{15} = 5$; $\Delta_{41} = 3$; $\Delta_{42} = 11$; $\Delta_{43} = 5$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. Для переходу до нового оптимального плану потрібно знайти клітинку, яку потрібно завантажувати, за умови (4.4). Такою клітинкою є саме Δ_{14}. Позначимо її жовтим кольором на таблиці 4.9.

Таблиця 4.9

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = 0$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	$v_5 =- 1$	
$u_1 = 10$	10(-) 100	7 -	4 -	1(+) -	4 -	100/0
$u_2 = 2$	2(+) 100	7(-) 150	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = 0$	8 -	5(+) 50	3 100	2(-) 50	2 -	200/0
$u_4 = 14$	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 5: Виділену клітинку позначаємо знаком "+". Отримуємо цикл із складної фігури з вершинами u_1v_4, u_3v_4, u_3v_2, u_2v_2, u_2v_1 і u_1v_1 (див. табл. 4.10).

Таблиця 4.10

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = 0$	$v_2 = 5$	$v_3 = 3$	$v_4 = 2$	$v_5 = -1$	
$u_1 = 10$	10(-) 100	7 -	4 -	1(+) -	4 -	100/0
$u_2 = 2$	2(+) 100	7(-) 150	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = 0$	8 -	5(+) 50	3 100	2(-) 50	2 -	200/0
$u_4 = 14$	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 6: Знаходимо найменше перевезення θ у вершинах цієї фігури із знаком "-" (клітинки u_3v_4; u_2v_2; u_1v_1): $\theta = min(50; 150; 100) = 50$.

Це шукане значення (50) застосовуємо до клітинок, які належать вершинам фігури, а саме: віднімаємо від об'ємів перевезень у клітинках зі знаком "-" і додаємо до об'ємів перевезень у клітинках зі знаком "+". див. табл. 4.11:

Таблиця 4.11

Постачальники	Споживачі					Запаси
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
u_1	10 50	7 -	4 -	1 50	4 -	100/0
u_2	2 150	7 100	10 -	6 -	11 -	250/0
u_3	8 -	5 100	3 100	2 -	2 -	200/0
u_4	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 7: Складемо систему рівнянь, у якій ми повинні врахувати тільки заповнені клітинки.

Виберемо рядок, у якому найбільша кількість заповнених клітинок, тобто рядок A_1, і для нього вважатимемо $u_1 = 0$. Використаємо формулу (4.1).

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ c_{11} = u_1 + v_1 \\ c_{14} = u_1 + v_4 \\ c_{21} = u_2 + v_1 \\ c_{22} = u_2 + v_2 \\ c_{32} = u_3 + v_2 \\ c_{33} = u_3 + v_3 \\ c_{44} = u_4 + v_4 \\ c_{45} = u_4 + v_5 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ 10 = u_1 + v_1 \\ 1 = u_1 + v_4 \\ 2 = u_2 + v_1 \\ 7 = u_2 + v_2 \\ 5 = u_3 + v_2 \\ 3 = u_3 + v_3 \\ 16 = u_4 + v_4 \\ 13 = u_4 + v_5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 10 \\ v_4 = 1 \\ u_2 = -8 \\ v_2 = 15 \\ u_3 = -10 \\ v_3 = 13 \\ u_4 = 15 \\ v_5 = -2 \end{cases}$$

Заповнимо ці значення у табл. 4.12.

Таблиця 4.12

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = 10$	$v_2 = 15$	$v_3 = 13$	$v_4 = 1$	$v_5 =- 2$	
$u_1 = 0$	10 50	7 -	4 -	1 50	4 -	100/0
$u_2 =- 8$	2 150	7 100	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 =- 10$	8 -	5 100	3 100	2 -	2 -	200/0
$u_4 = 15$	11 -	8 -	12 -	16 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 8: Визначимо для усіх вільних клітин (відзначені "-") знак Δ_{ij}, використовуючи формулу (4.3).

$$\begin{cases} \Delta_{12} = 0 + 15 - 7 = 8 > 0 \\ \Delta_{13} = 0 + 13 - 4 = 9 > 0 \\ \Delta_{15} = 0 - 2 - 4 = -6 \\ \Delta_{23} = -8 + 13 - 10 = -5 \\ \Delta_{24} = -8 + 1 - 6 = -13 \\ \Delta_{25} = -8 - 2 - 11 = -21 \\ \Delta_{31} = -10 + 10 - 8 = -8 \\ \Delta_{34} = -10 + 1 - 2 = -11 \\ \Delta_{35} = -10 - 2 - 2 = -14 \\ \Delta_{41} = 15 + 10 - 11 = 14 > 0 \\ \Delta_{42} = 15 + 15 - 8 = 22 > 0 \\ \Delta_{43} = 15 + 13 - 12 = 16 > 0 \end{cases}$$

Для вільних клітинок Δ_{ij} будуть додатні, тобто $\Delta_{12} = 8$; $\Delta_{13} = 9$; $\Delta_{41} = 14$; $\Delta_{42} = 22$; $\Delta_{43} = 16$. Отже, знайдений опорний план не є оптимальним. Для переходу до нового оптимального плану потрібно знайти клітинку, яку потрібно завантажувати, за умови (4.4). Такою клітинкою є саме Δ_{42}. Позначимо її жовтим кольором на таблиці 4.13.

Таблиця 4.13

Постачальники	Споживачі $v_1 = 10$	$v_2 = 15$	$v_3 = 13$	$v_4 = 1$	$v_5 = -2$	Запаси
$u_1 = 0$	10(-) 50	7 -	4 -	1(+) 50	4 -	100/0
$u_2 = -8$	2(+) 150	7(-) 100	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = -10$	8 -	5 100	3 100	2 -	2 -	200/0
$u_4 = 15$	11 -	8(+) -	12 -	16(-) 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 9: Виділену клітинку позначаємо знаком "+". Отримуємо цикл із складної фігури з вершинами u_4v_2, u_4v_4, u_1v_4, u_1v_1, u_2v_1 і u_2v_2 (див. табл. 4.14).

Таблиця 4.14

Постачальники	Споживачі $v_1 = 10$	$v_2 = 15$	$v_3 = 13$	$v_4 = 1$	$v_5 = -2$	Запаси
$u_1 = 0$	10(-) 50	7 -	4 -	1(+) 50	4 -	100/0
$u_2 = -8$	2(+) 150	7(-) 100	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = -10$	8 -	5 100	3 100	2 -	2 -	200/0
$u_4 = 15$	11 -	8(+) -	12 -	16(-) 50	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Крок 10: Знаходимо найменше перевезення θ у вершинах цієї фігури із знаком "-" (клітинки u_1v_1; u_2v_2; u_4v_4): $\theta = min(50; 100; 50) = 50$. Так як значення однаково малі, то виберемо, наприклад, клітинку u_1v_1.

Це шукане значення (50) застосовуємо до клітинок, які належать вершинам фігури, а саме: віднімаємо від об'ємів перевезень у клітинках зі знаком "-" і додаємо до об'ємів перевезень у клітинках зі знаком "+". див. табл. 4.15:

Таблиця 4.15

Постачальники	Споживачі					Запаси
	$v_1 = 10$	$v_2 = 15$	$v_3 = 13$	$v_4 = 1$	$v_5 = -2$	
$u_1 = 0$	10 -	7 -	4 -	1 100	4 -	100/0
$u_2 = -8$	2 200	7 50	10 -	6 -	11 -	250/0
$u_3 = -10$	8 -	5 100	3 100	2 -	2 -	200/0
$u_4 = 15$	11 -	8 50	12 -	16 -	13 250	300/0
Потреби	200/0	200/0	100/0	100/0	250/0	

Даний цикл продовжуємо до тих пір, поки на Крок 4 не залишаться додатні значення.

5 Завдання

5.1 Отримати індивідуальний варіант завдання (із **Додатка Г**)

5.2 Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів (для пошуку опорного початкового плану використовувати метод північно-західного кута, метод мінімального елемента, евристичний метод Фойгеля) згідно з варіантом.

5.3 Оформити звіт про виконану роботу.

5.4 Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

6 Зміст звіту

6.1 Титульний аркуш;

6.2 Тема звіту;

6.2 Мета роботи;

6.3 Варіант завдання;

6.4 Короткі теоретичні відомості (дати відповідь на контрольне запитання у відповідності із номером студента у журналі);

6.5 Розв’язання транспортної задачі (пошук опорного початкового плану) з описаними усіма послідовними кроками.

6.6 Розв’язання транспортної задачі за методом потенціалів (пошук оптимального плану) з описаними усіма послідовними кроками.

6.7 Висновки.

7 Контрольні запитання

7.1 Що таке транспортна задача і яке її призначення?

7.2 Яка постановка транспортної задачі?

7.3 Чи можна застосувати для розв'язування транспортних задач симплекс-метод? Відповідь обґрунтуйте.

7.4 У чому полягає математична модель транспортної задачі?

7.5 Що ви знаєте про закриту модель транспортної задачі?

7.6 Як визначається опорний план транспортної задачі у таблиці, що таке вільні клітинки і заповнені?

7.7 У чому полягає суть методу північно-західного кута?

7.8 У чому полягає суть методу мінімального елемента?

7.9 У чому полягає суть евристичного методу Фойгеля?

7.10 У чому полягає суть методу потенціалів?

7.11 Поясніть, яким чином можна перевірити оптимальність розв'язку транспортної задачі після застосування одного з методів.

7.12 З якою метою застосовується метод потенціалів?

7.13 Що таке потенціали, який зв'язок існує між ними?

7.14 Як будується система потенціалів, яку називають фіктивно заповненими клітинками?

7.15 Як переходити до нового опорного плану у методі потенціалів? Як будується цикл?

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Варіанти набору вантажів

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	83	86	77	15	93	35	86	92	49	21	62	27	90	59	63	26	40	26	72	36
	2	11	38	67	29	82	30	62	23	67	35	29	02	22	58	59	67	93	56	11	42
	3	29	73	21	19	84	37	98	24	15	70	13	26	91	80	56	73	62	70	96	81
2	1	05	25	84	27	36	05	46	29	13	57	24	95	82	45	14	67	34	64	43	50
	2	87	08	76	78	88	84	03	51	54	99	32	60	76	68	39	12	26	86	94	39
	3	95	70	34	78	67	01	97	02	17	92	52	56	01	80	86	41	65	89	44	19
3	1	40	29	31	17	97	71	81	75	09	27	67	56	97	53	86	65	06	83	19	24
	2	28	71	32	29	03	19	70	68	08	15	40	49	96	23	18	45	46	51	21	55
	3	79	88	64	28	41	50	93	51	34	64	24	14	87	56	43	91	27	65	59	36
4	1	32	51	37	28	75	07	74	21	58	95	29	37	35	93	18	28	43	11	28	29
	2	76	04	43	63	13	38	06	40	04	18	28	88	69	17	17	96	24	43	70	83
	3	90	99	72	25	44	90	05	39	54	86	69	82	42	64	97	07	55	04	48	11
5	1	22	28	99	43	46	68	40	22	11	10	05	01	61	30	78	05	20	36	44	26
	2	22	65	08	16	82	58	24	37	62	24	51	36	52	99	79	50	68	71	73	31
	3	81	30	33	94	60	63	99	81	99	96	59	73	13	68	90	95	26	66	84	40

C – номер рядка.

Таблиця А.1 (продовження)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	1	90	84	76	42	36	07	45	56	79	18	87	12	48	72	59	09	36	10	42	87
	2	06	01	13	72	21	55	19	99	21	04	39	11	40	67	05	28	27	50	84	58
	3	20	24	22	69	96	81	30	84	92	72	72	50	25	85	22	99	40	42	98	13
7	1	98	90	24	90	09	81	19	36	32	55	94	04	79	69	73	76	50	55	60	42
	2	79	84	93	05	21	67	04	13	61	54	26	59	44	02	02	06	84	21	42	68
	3	28	89	72	08	58	98	36	08	53	48	03	33	54	48	90	33	67	46	68	29
8	1	51	46	88	97	49	90	03	33	63	97	53	92	86	25	52	96	75	88	57	29
	2	36	60	14	21	60	04	28	27	50	48	56	02	94	97	99	43	39	02	28	03
	3	51	81	47	38	59	51	35	34	39	92	15	27	04	29	49	64	85	29	43	35
9	1	77	51	38	71	49	89	67	88	92	95	43	44	29	90	82	40	41	69	26	32
	2	61	42	60	17	23	61	81	09	90	25	96	67	77	34	90	26	24	57	14	68
	3	05	58	12	86	51	46	26	94	16	52	78	29	46	90	47	70	51	80	31	93
10	1	57	27	12	86	14	55	12	90	12	79	10	69	89	74	55	41	20	33	87	88
	2	38	66	70	84	56	17	06	60	49	37	05	59	17	18	45	83	73	58	73	37
	3	89	83	07	78	57	14	71	29	51	59	18	38	25	88	74	33	57	81	93	58

Таблиця А.1 (продовження)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	1	70	99	17	39	69	63	22	94	73	47	31	62	82	90	92	91	57	15	21	57
	2	74	91	47	51	31	21	37	40	54	30	98	25	81	16	16	02	31	39	96	04
	3	38	80	18	21	70	62	12	79	77	85	36	04	76	83	07	59	57	44	99	11
12	1	27	50	36	60	18	05	63	49	44	11	05	34	91	75	55	14	89	68	93	18
	2	05	82	22	82	17	30	93	74	26	93	86	53	43	74	14	13	79	77	62	75
	3	88	19	10	32	94	17	46	35	37	91	53	43	73	28	25	91	10	18	17	36
13	1	63	55	90	58	30	04	71	61	33	85	89	73	04	51	05	50	68	03	85	06
	2	95	39	49	20	67	26	63	77	96	81	65	60	36	55	70	18	11	42	32	96
	3	79	21	70	84	72	27	34	40	83	72	98	30	63	47	50	30	73	14	59	22
14	1	47	24	82	35	32	04	54	43	98	86	40	78	59	62	62	83	41	48	23	24
	2	72	22	54	35	21	57	65	47	71	76	69	18	01	03	53	33	07	59	28	06
	3	97	20	84	08	34	98	91	76	98	15	52	71	89	59	06	10	16	24	09	39
15	1	51	78	09	53	81	14	38	89	26	67	47	23	87	31	32	22	81	75	50	79
	2	90	54	50	31	13	57	94	81	81	03	20	33	82	81	87	15	96	25	04	22
	3	92	51	97	32	34	81	06	15	57	08	95	99	62	97	83	76	54	77	09	87

Таблиця А.1 (продовження)

№	С	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
16	1	32	82	21	66	63	60	82	11	85	86	85	30	90	83	14	76	16	20	92	25
	2	28	39	25	90	36	60	18	43	37	28	82	21	10	55	88	25	15	70	37	53
	3	08	22	83	50	57	97	27	26	69	71	51	49	10	28	39	98	88	10	93	77
17	1	90	76	99	52	31	87	77	99	57	66	52	17	41	35	68	98	84	95	76	05
	2	66	28	54	28	08	93	78	97	55	72	74	45	51	25	97	83	12	27	82	21
	3	93	34	39	34	21	59	85	57	54	61	62	72	41	16	52	50	62	82	99	17
18	1	54	73	15	06	51	64	90	63	91	72	37	37	59	28	71	80	87	56	90	41
	2	70	52	65	11	69	17	61	83	51	12	51	06	38	67	64	89	32	54	04	75
	3	79	41	12	38	69	36	70	56	44	60	49	14	65	14	26	86	83	39	69	35
19	1	52	21	93	90	89	09	31	73	64	35	48	95	77	13	33	98	49	55	55	93
	2	68	56	60	33	23	86	71	58	77	40	45	81	61	90	23	50	51	54	75	64
	3	42	24	59	19	89	44	69	38	51	76	83	19	33	43	04	56	81	75	66	11
20	1	67	12	92	29	02	68	31	02	74	07	18	16	83	77	87	72	73	57	62	25
	2	33	97	96	18	41	53	26	74	80	93	85	48	05	30	29	59	98	60	62	24
	3	19	80	41	02	10	80	26	83	89	40	08	23	38	57	93	31	10	20	05	90

Таблиця А.1 (продовження)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	1	13	91	38	70	21	87	29	71	80	43	95	99	24	88	54	86	69	32	69	10
	2	73	30	33	63	87	79	94	49	99	51	39	64	42	30	86	15	49	15	86	81
	3	11	34	33	87	22	87	73	43	19	42	54	44	24	39	59	63	18	53	12	69
22	1	05	04	33	99	34	19	15	35	87	53	69	50	87	02	37	62	89	10	05	60
	2	04	11	57	29	03	16	92	21	22	05	43	79	61	28	78	47	51	45	82	87
	3	99	51	89	86	53	26	48	94	36	06	07	92	17	64	21	20	80	66	94	54
23	1	23	37	33	84	17	12	31	17	09	65	56	08	69	45	95	22	71	95	69	59
	2	01	76	52	71	40	25	43	72	91	89	27	66	78	12	50	96	24	33	13	86
	3	99	70	94	68	15	41	42	39	37	63	98	90	39	02	13	31	28	57	04	71
24	1	46	83	38	25	95	40	21	72	26	34	58	25	56	52	45	72	46	39	11	83
	2	03	61	25	42	16	39	74	44	96	30	67	94	13	57	19	60	50	92	32	76
	3	79	90	53	35	95	98	07	41	37	70	76	40	84	01	83	51	92	09	96	40
25	1	39	63	35	04	73	06	64	23	51	49	51	30	39	04	65	86	02	25	79	91
	2	47	07	84	31	61	19	31	53	28	27	94	19	43	81	23	68	87	39	43	38
	3	88	94	20	80	98	86	18	52	63	98	95	10	05	79	42	66	98	25	72	78

Таблиця А.1 (закінчення)

№	C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
26	1	53	66	97	48	47	72	16	86	12	59	77	51	53	97	32	03	35	51	07	98
	2	49	54	61	06	34	03	25	84	28	97	63	33	15	60	81	14	85	97	51	97
	3	08	29	49	13	79	34	16	14	85	75	65	86	30	26	92	16	29	69	52	09
27	1	66	15	95	33	28	76	47	13	26	51	62	86	29	63	51	08	97	16	75	82
	2	44	40	20	26	18	65	94	99	34	46	08	53	62	03	86	42	32	34	07	10
	3	34	69	96	15	84	96	24	82	65	51	16	61	43	37	87	61	02	81	60	88
28	1	79	20	41	93	24	28	35	08	62	42	70	96	63	66	11	51	15	87	34	32
	2	90	50	93	33	39	80	94	93	13	54	82	44	75	23	38	51	51	73	11	65
	3	68	81	13	83	99	77	35	14	64	69	46	07	72	91	40	11	23	87	57	36
29	1	93	39	81	20	14	71	71	18	96	34	83	64	67	97	51	67	74	35	33	90
	2	57	32	49	29	23	90	92	47	29	49	35	22	40	68	43	55	39	66	25	36
	3	53	60	52	20	57	04	87	83	40	21	26	97	05	27	78	28	69	70	27	98
30	1	20	63	21	60	83	16	67	23	82	92	11	35	53	63	08	62	68	95	98	60
	2	68	76	09	73	03	87	54	73	57	81	23	29	96	44	42	80	12	09	55	47
	3	54	66	34	59	81	42	73	01	38	71	13	58	99	22	84	55	61	90	80	71

ДОДАТОК Б

Таблиця Б.1 – Середньомісячна температура міст світу

№	Місто	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII I	IX	X	XI	XII
1	Оулу (Фінляндія)	-13	-11	-4	+3	+11	+15	+17	+15	+10	+3	-3	-9
2	Атланта (США)	+5	+7	+12	+16	+21	+24	+26	+26	+23	+17	+12	+7
3	Рованіемі (Фінляндія)	-11	-11	-6	-1	+4	+10	+13	+11	+7	+1	-5	-9
4	Нуук (Данія)	-8	-8	-8	-4	+1	+4	+7	+7	+4	-1	-4	-7
5	Гус-Бей (Канада)	-18	-16	-10	-2	+5	+11	+15	+14	+9	+2	-4	-14
6	Цзямусі (Китай)	-23	-19	-9	+3	+11	+17	+20	+18	+12	+2	-11	-21
7	Ґранд-Прері (Канада)	-15	-12	-6	0	+7	+13	+16	+14	+8	+2	-5	-10
8	Градец-Кралове (Чехія)	-3	-2	+3	+10	+15	+18	+20	+20	+16	+9	+5	0
9	Даланзадгад (Монголія)	-12	-9	-2	+6	+14	+19	+22	+20	+14	+5	-3	-10
10	Ланьчжоу (Китай)	-5	-1	+6	+12	+17	+20	+23	+22	+16	+11	+3	-4
11	Оттава (Канада)	-13	-10	-2	+5	+11	+14	+18	+20	+16	+9	-1	-9
12	Каунас (Литва)	-6	-5	0	+6	+13	+16	+17	+17	+12	+7	+2	-2
13	Сувалки (Польща)	-4	-4	0	+6	+12	+15	+17	+16	+12	+7	+1	-2
14	Урумчі (Китай)	-13	-11	-1	+11	+18	+23	+25	+24	+18	+9	-2	-10

Таблиця Б.1 (закінчення)

№	Місто	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
15	Улан-Батор (Монголія)	-20	-16	-7	+3	+11	+16	+18	+16	+10	+2	-10	-18
16	Рованіемі (Фінляндія)	-12	-11	-6	-1	+6	+12	+15	+12	+7	0	-6	-10
17	Саппоро (Японія)	-4	-4	0	+7	+12	+17	+21	+22	+18	+11	+5	-1
18	Пешавар (Пакистан)	+11	+13	+17	+23	+29	+33	+32	+31	+29	+24	+18	+13
19	Астана (Казахстан)	-17	-17	-10	+3	+13	+18	+20	+18	+12	+3	-7	-14
20	Квебек (Канада)	-13	-11	-5	+3	+11	+16	+19	+18	+12	+6	-1	-9
21	Шеньян (Китай)	-11	-7	+1	+1	+17	+22	+25	+24	+18	+10	+1	-7
22	Бішкек (Киргизія)	-3	-2	+5	+12	+17	+22	+24	+23	+18	+11	+5	0
23	Ейлат (Ізраїль)	+15	+16	+20	+24	+28	+31	+33	+33	+31	+27	+21	+17
24	Регенсбург (Німеччина)	-1	0	+5	+9	+14	+16	+18	+18	+14	+9	+3	0
25	Хорог (Таджикистан)	-6	-4	+3	+10	+15	+19	+23	+23	+18	+11	+4	-2
26	Чанчунь (Китай)	-15	-12	-3	+7	+15	+21	+23	+22	+15	+7	-3	-12
27	Хух-Хото (Китай)	-12	-8	0	+9	+15	+20	+22	+20	+14	+7	-2	-10
28	Колорадо-Спрингс (США)	-2	0	+3	+8	+13	+18	+22	+20	+16	+10	+3	-1
29	Едмонтон (Канада)	-14	-12	-5	+5	+12	+16	+19	+17	+11	+3	-4	-9

30	Тирасполь (Молдова)	-3	-1	+4	+11	+16	+20	+21	+21	+17	+11	+5	0

ДОДАТОК В

Таблиця В.1 – Варіанти базового набору символів

№	A1	A2	A3	A4
1	A	S	D	F
2	Q	W	E	R
3	Z	X	C	V
4	Y	U	I	O
5	H	J	K	L
6	Q	A	Z	W
7	X	C	R	F
8	T	G	B	Y
9	N	U	J	M
10	K	O	L	P
11	Z	S	E	F
12	X	D	R	G
13	C	F	T	H
14	V	G	Y	J
15	B	H	U	K
16	Q	E	T	U
17	W	R	Y	I
18	A	D	G	J
19	S	F	H	K
20	Z	C	B	M
21	Q	S	E	F
22	H	U	K	O
23	S	X	D	C
24	V	G	B	H
25	J	M	K	A
26	D	R	G	Y
27	Q	R	U	P
28	T	I	A	F
29	Z	V	M	L
30	D	F	G	H

A1..A4 – набір символів.

ДОДАТОК Г

Є A_n пунктів постачання і B_m пунктів споживання продукції. Вартість перевезення одиниці продукції з i-го пункту постачання в j-й центр споживання c_{ij} наведена у таблицях. Скласти план перевезень щодо постачання необхідної продукції у пункти споживання, який мінімізуватиме сумарні транспортні витрати. Необхідні дані для індивідуального варіанта потрібно взяти з таблиць, наведених нижче.

Варіант 1 – метод північно-західного кута.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	$1,8$	6	6	32
A_2	1	$5,1$	8	2	42
A_3	$3,5$	6	3	$3,1$	10
A_4	$2,2$	$4,9$	$1,3$	4	16
A_5	3	7	$8,95$	1	10
Потреби	20	38	30	22	

Варіант 2 – метод мінімального елемента.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$2,3$	7	6	8	15
A_2	2	$1,3$	1	$2,5$	55
A_3	$4,9$	4	4	1	12
A_4	2	8	1	4	18
A_5	3	$2,1$	$1,2$	5	17
Потреби	35	37	20	25	

Варіант 3 – евристичний метод Фойгеля.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	$4,1$	6	17
A_2	5	$2,5$	2	3	73
A_3	3	4	3	$4,2$	52
A_4	$5,1$	3	2	7	38
Потреби	37	35	86	22	

Варіант 4 – метод північно-західного кута.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$1,7$	3	4	6	28
A_2	$5,2$	$2,6$	$9,8$	3	27
A_3	3	2	1	4	52
A_4	6	5	$2,5$	7	18
Потреби	32	18	60	15	

Варіант 5 – метод мінімального елемента.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	9	1	3	43
A_2	2	5	5	6	20
A_3	2	5	10	4	30
A_4	3	7	2	6	32
Потреби	18	50	22	35	

Варіант 6 – евристичний метод Фойгеля.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	2	$4,8$	3	20
A_2	8	4	5	8	30
A_3	$5,5$	2	3	7	27
A_4	5	6	$8,2$	4	23
A_5	$1,8$	9	7	6	30
Потреби	40	30	48	12	

Варіант 7 – метод північно-західного кута.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$6,2$	1	$4,2$	5	17
A_2	2	4	$5,1$	8	20
A_3	5	8	3	4	40
A_4	2	4	9	2	20
A_5	4	$2,75$	2	1	23
Потреби	45	30	25	20	

Варіант 8 – метод мінімального елемента.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	9	4	$7,4$	20
A_2	2	8	5	1	15
A_3	7	$2,2$	1	4	30
A_4	$2,5$	6	10	6	40
Потреби	48	10	35	12	

Варіант 9 – евристичний метод Фойгеля.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$6,3$	$8,6$	1	5	25
A_2	$2,5$	7	5	7	42
A_3	4	5	11	8	40
A_4	1	5	4	5	35
Потреби	44	30	26	42	

Варіант 10 – метод північно-західного кута.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	2	5	7	170
A_2	5	6, 1	2	3	129
A_3	4	4	3	6, 2	115
A_4	8	2	2	7	240
Потреби	117	140	310	87	

Варіант 11 – метод мінімального елемента.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6, 3	8	5	11	12
A_2	4	11	7	9	24
A_3	7	3	5	8	32
A_4	9	5, 5	10	1	32
A_5	5	8	11	5	30
Потреби	60	20	30	20	

Варіант 12 – евристичний метод Фойгеля.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$7,3$	9	3	10	14
A_2	3	10	5	9	30
A_3	7	11	3	2	20
A_4	8	5	9	2	32
A_5	$4,8$	9	10	5	16
Потреби	60	14	20	18	

Варіант 13 – метод північно-західного кута.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$4,2$	10	5	9	17
A_2	5	8	5	9	33
A_3	6	4	4	$7,3$	20
A_4	7	5	11	4	12
A_5	3	11	8	5	20
Потреби	35	22	30	15	

Варіант 14 – метод мінімального елемента.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	$5,1$	8	6	15	310
A_2	7	12	5	9	145
A_3	6	9	2	16	202
A_4	8	3	9	4	180
A_5	$4,5$	9	10	5	73
Потреби	530	120	120	140	

Варіант 15 – евристичний метод Фойгеля.

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	$4,1$	6	79
A_2	5	$2,5$	2	3	73
A_3	3	4	3	$4,2$	52
A_4	$5,1$	3	2	7	38
Потреби	65	47	92	38	

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. В.Д. Ногин. Принятие решений при многих критериях : учебно-методическое пособие / В.Д. Ногин. – СПб. : Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.

2. Лотов А.В. Многокритериальные задачи принятия решений / Лотов А.В., Поспелова И.И. – М. : МАКС Пресс, 2008. – 197 с.

3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій / Зайченко Ю.П. – К. : Видавничий дім «Слово», 2003. – 688 с. – ISBN 966-8407-11-3.

4. Silvano Martello. Knapsack Problems : Algorithms and Computer Implemetations / Silvano Martello, Paolo Toth. – Chichester, England : John Wiley & Sons Ltd., 1990. – 306 p. – ISBN 0-471-92420-2.

5. Онлайн-калькулятор: Задача об упаковке в контейнеры. – Режим доступу : http://www.planetcalc.ru/917/. – Дата доступу : 02.01.2013. – Назва з екрану.

6. Мотузко Ю.О. Теория принятия решений: Учебно-методическое пособие / Мотузко Ю.О. – Запорожье : 2009. – 76 с.

7. Катренко А.В. Теорія прийняття рішень : підручник / Катренко А.В., Пасічник В.В., Пасько В.П. – Київ : Видавнича група BHV, 2009. – 448 с.

8. Шестаков К.М. Курс лекций по специальному курсу «Теория принятия решений и распознавания образов» : Учебное пособие для студентов факультета радиофизики и электроники. – Минск : БГУ, 2005. – 196 с.

9. Бідюк П.І. Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень/ Довгий С.О., Бідюк П.І., Трофимчук О.М., Савенков О.І – К. : Азимут-Україна, 2011. – 608 с.

10. Бідюк П.І. Проектування комп’ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень : Навч. посіб. / Бідюк П.І., Коршевнюк Л.О. –

К. : ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2010. – 340 с.