Praktikum 11

Dirk Wilhelm, Simon Stingelin

06.02.2023

Inhaltsverzeichnis

1 Numerische Methoden für Systeme

1.1 Lernziele

Im vorliegenden Praktikum sollen folgende Lernziele erreicht werden:

- Den Unterschied zwischen konservativen Diskretisierungsverfahren und nicht konservativen Verfahren erklären können, sowie das Verhalten dieser Verfahren insbesondere für physikalische Stabilitätsprobleme verstehen.
- Für die Lösung eines Differentialgleichungssystems das am besten geeignete Verfahren aussuchen können.
- Verschiedene explizite und implizite Diskretisierungsverfahren für Differentialgleichungssysteme implementieren können.
- Das Netwon-Verfahren zur Lösung eines Systems im Rahmen der Zeitschrittintegration implementieren können.

1.2 Theorie

Der Numeriktheorieteil ist in der Vorlesung im Kapitel 3.4 (vgl. Skript) dargestellt. In Natur und Technik treten bei viele Vorgänge Stabilitätsprobleme auf. So wird z.B. die Strömung über einen Tragflügel bei Verkehrsflugzeugen ab einem bestimmten Punkt instabil und geht vom laminaren zum turbulenten Zustand über. Dieser Umschlagpunkt kann mit Hilfe von numerischen Simulationen gefunden werden. Oder die Ausbreitung von Viren in der Bevölkerung (z.B. Corona-Viren) folgt einem Exponentialgesetz als Lösung von Differentialgleichungen. Wenn der Exponent grösser als 1 ist, steigt die Anzahl der infizierten Personen exponentiell an, wenn er kleiner als 1 ist nimmt die Zahl exponentiell ab.

Andere Stabilitätsprobleme treten zum Beispiel beim harmonischen Oszillator auf, der sich sehr gut für die prinzipielle Untersuchung von Stabilitätsproblemen eignet. Im vorliegenden Projekt sollen die Bewegungsgleichungen eines harmonischen Oszillators numerisch gelöst werden.

Wichtig bei der Modellierung ist, dass das Stabilitätsverhalten vom numerischen Verfahren richtig beschrieben wird.

1.3 Verständnisfragen

1. Was verstehen Sie unter einem konservativen numerischen Verfahren?
2. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren ist "nahezu" konservativ. Was bedeutet das? Worauf müssen Sie achten, wenn Sie das Runge-Kutta-Verfahren für die Lösung von Stabilitätsproblemen einsetzen wollen.

1.4 Aufgaben

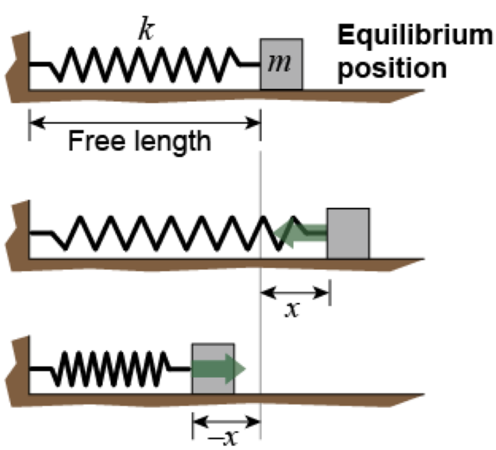
Wir betrachten einen einfachen harmonischen Oszillator bestehend aus einer Masse, die mit einer Feder verbunden ist und sich auf einer Platte bewegen kann (s. Bild unten). Die Bewegung der Masse wird durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{\tilde{k}}{m}\,x(t) - \frac{\tilde{r}}{m}\,\frac{dx(t)}{dt} = -k\,x(t) - r\,\frac{dx(t)}{dt}$$

mit Federkonstante $k = \tilde{k}/m$ und Reibungskonstante $r = \tilde{r}/m$ (wobei die Reibung proportional zur Geschwindigkeit angenommen wird). Diese Differentialgleichung 2. Ordnung kann in ein DGL-System erster Ordnung überführt werden:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} &= -k\,x(t) - r\,y(t)\end{aligned}$$

Für $r > 0$ ist dieses System stabil, d.h. die Reibung dämpft die Bewegung.



Wir wollen dieses DGL-System mit der Anfangsbedingung

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 0$$

lösen.

1. Wir betrachten den Fall $k = 0.5,\ r = 0.2$. Implementieren Sie das **klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** zur Lösung des DGL-Systems. Verwenden Sie einen geeigneten Zeitschritt und integrieren Sie bis zu $t = 50$. Plotten Sie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, die auf m bezogene Energie $E(t)/m = 1/2(k\,x(t)^2 + y(t)^2)$, sowie das zweidimensionale Phasendiagramm $x(t), y(t)$.

2. Wir betrachten nun den Fall $k = 0.5,\ r = -0.0005$. Dieser Fall ist leicht instabil. Lösen Sie das DGL-System wieder mit dem klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung. Verwenden Sie den Zeitschritt $h = 1$ und integrieren Sie bis $t = 500$. Plotten Sie die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ und $E(t)/m$. Was fällt Ihnen bei der Energie auf? Verwenden Sie nun einen kleineren Zeitschritt h. Plotten Sie wieder $E(t)/m$. Wie verändert sich der qualitative Verlauf der Energie? Können Sie das erklären?

3. Lösen Sie den Fall aus 2. mit $k = 0.5, r = -0.0005$ nun mit der **impliziten Mittelpunktregel**:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= f(x_k + h/2, y_k + h/2 \cdot r_1) \\
y_{k+1} &= y_k + h\,r_1\ .
\end{aligned}
$$

   Hierbei sind y_k, y_{k+1} Vektoren z.B. mit $y_k = (x(t_k), y(t_k))^T$, und f ist eine vektorwertige Funktion. Da die erste Gleichung nur implizit gegeben ist, muss in jedem Zeitschritt ein (lineares) Gleichungssystem gelöst werden. Gegen Sie die Rechenvorschrift für das Zeitschrittverfahren an. Verwenden Sie zuerst $h = 1$. Plotten Sie wieder die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ und $E(t)/m$. Was fällt Ihnen bei der Energie auf?

1.5 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen (Matlab- / Python-Files und Praktikumsbericht) bis spätestens vor dem nächsten Praktikum ab.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - `Anleitung Praktikum 11`