Praktikum 9

Christoph Kirsch

06.02.2023

Inhaltsverzeichnis

1	Explizite mehrstufige Runge-Kutta-Verfahren	
	1.1	Lernziele
	1.2	Theorie
	1.3	Aufträge
	1.4	Abgabe

1 Explizite mehrstufige Runge-Kutta-Verfahren

1.1 Lernziele

- Sie implementieren einige explizite mehrstufige Runge-Kutta-Verfahren auf einem Rechner, unter Verwendung der Programmstruktur aus dem Praktikum 7.
- Sie testen Ihre Programme an einfachen Modellproblemen und wenden sie schliesslich auf ein komplexeres Problem an, um die numerischen Lösungen zu vergleichen.

1.2 Theorie

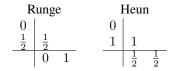
In diesem Praktikum betrachten wir explizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\frac{c \mid \mathbf{A}}{\mid \mathbf{b} \mid} = \begin{array}{c|cccc}
c_1 & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} \\
\hline
\mid b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array} \tag{1}$$

Bemerkung: Bei expliziten Verfahren ist es üblich, die Nulleinträge auf der Hauptdiagonale und auf den oberen Nebendiagonalen der Matrix A des Butcher-Tableaus nicht aufzuschreiben.

1.3 Aufträge

- 1. Schreiben Sie die Verfahren (1) in Standardform auf (s. auch Übungsblatt 8).
- 2. (s=2) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit den Verfahren



Verwenden Sie dafür dieselbe Programmstruktur wie für das Euler-vorwärts-Verfahren im Praktikum 7, wobei Sie einfach noch eine zweite Steigung berechnen.

- 3. Testen Sie Ihre Programme aus 2. anhand des Modellproblems y' = -4y, y(0) = 1, mit Endstelle X = 1 und N = 10 Schritten. Vergleichen Sie die Werte y_i der numerischen Lösung mit den Werten der exakten Lösung, $y(x_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, 10\}$.
- 4. (s = 4) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWPs mit dem klassischen vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren (RK4):

Verwenden Sie dieselbe Programmstruktur wie in 2., wobei Sie einfach noch zwei weitere Steigungen berechnen.

- 5. Testen Sie Ihr Programm wie in 3.
- 6. Lösen Sie mit Ihren Programmen aus 2. und 4. das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x^2}{y} = 0$$
, $y(0) = -4$.

Berechnen Sie für X=2 und $N=3^j, j\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, jeweils die absoluten Fehler an der Endstelle $(y(2)=-4\sqrt{\frac{2}{3}})$.

7. (optional) Der Rechenaufwand für ein explizites s-stufiges Runge-Kutta-Verfahren mit $N \in \mathbb{N}$ Schritten ist einfach sN (Anzahl der Auswertungen der rechten Seite f der gDgl). Ein explizites RK-Verfahren mit s>1 Stufen ist also s-mal aufwändiger als das einstufige Euler-vorwärts-Verfahren aus dem Praktikum 7. Der globale Fehler nimmt aber für grössere s viel schneller ab mit N als der Aufwand zunimmt, weshalb mehrstufige RK-Verfahren zumindest für grosse Probleme (wo die Auswertung von f teuer ist) sehr lohnenswert sind.

Überzeugen Sie sich davon, indem Sie für das einstufige Euler-vorwärts-Verfahren aus dem Praktikum 7 und für die drei in diesem Praktikum implementierten mehrstufigen RK-Verfahren ein sog. *Genauigkeits-Aufwand-Diagramm* für das AWP aus 6. erstellen, d. h. den globalen Fehler ("Genauigkeit") gegen den Rechenaufwand in einer doppelt logarithmischen Darstellung aufzeichnen.

Bemerkung: Die "Genauigkeits"-Achse wird in diesen Diagrammen üblicherweise invertiert, weil ein kleinerer globaler Fehler eine grössere Genauigkeit bedeutet.

2

1.4 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum 9 ab.

Downloads:

- PDF-Dokumentation:
 - Anleitung Praktikum 9