

---

# Praktikum 10

Christoph Kirsch

06.02.2023

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>(Diagonal-)implizite Runge-Kutta-Verfahren</b>	<b>1</b>
1.1	Lernziele	1
1.2	Theorie	1
1.3	Aufträge	2
1.4	Abgabe	2

---

## 1 (Diagonal-)implizite Runge-Kutta-Verfahren

### 1.1 Lernziele

- Sie implementieren zwei implizite Runge-Kutta-Verfahren, unter Verwendung der Programmstruktur aus dem Praktikum 7.
- Sie testen Ihre Programme an einfachen Modellproblemen und wenden sie schliesslich auf ein komplexeres Problem an, um die numerischen Lösungen zu vergleichen.

### 1.2 Theorie

In diesem Praktikum betrachten wir **diagonal-implizite**  $s$ -stufige **Runge-Kutta-Verfahren** mit einem Butcher-Tableau der Form

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & & & \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad (1)$$

In einem solchen **DIRK-Verfahren** können die Stufengleichungen nacheinander gelöst werden, weil in der  $j$ -ten Stufe die Steigungen  $r_1, r_2, \dots, r_{j-1}$  bereits bekannt sind (vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 2).

## 1.3 Aufträge

1. ( $s = 1$ ) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWP's mit der impliziten Mittelpunktsregel:

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Verwenden Sie dafür dieselbe Programmstruktur wie für das implizite Euler-Verfahren im Praktikum 7.

2. Testen Sie Ihr Programm aus 1. anhand des Modellproblems  $y' = -4y$ ,  $y(0) = 1$ , mit Endstelle  $x_n = 1$  und  $n = 10$  Schritten. Vergleichen Sie die Werte  $y_k$  der numerischen Lösung mit den Werten der exakten Lösung,  $y(x_k)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ .
3. ( $s = 2$ ) Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines AWP's mit der impliziten Trapezregel:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

4. Testen Sie Ihr Programm wie in 2.
5. Lösen Sie mit Ihren Programmen aus 1. und 3. das Anfangswertproblem

$$y' + \frac{x^2}{y} = 0, \quad y(0) = -4.$$

Berechnen Sie für  $x_n = 2$  und  $n = 3^j$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , jeweils die absoluten Fehler an der Endstelle. Bestimmen Sie grafisch die Konvergenzordnung der beiden Verfahren.

## 1.4 Abgabe

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis spätestens vor dem nächsten Praktikum 10 ab.

### Downloads:

- PDF-Dokumentation:
  - Anleitung Praktikum 10