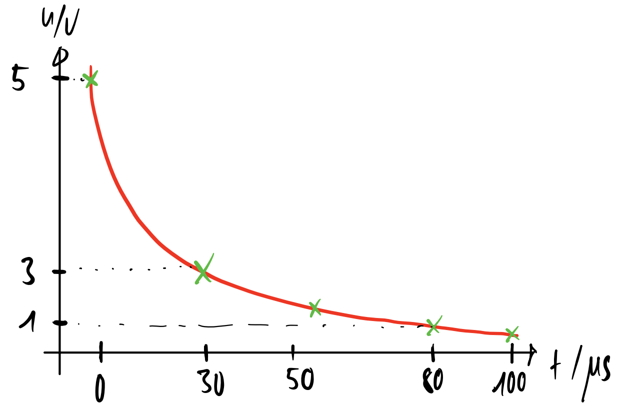
Aufgabe 2

1) Skizze Entladekurve RC-Netzwerkkondensator



Zusammenhang von Spannung U_c und Ladung Q:

$$U_c(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad (1)$$

Wie gross ist die Entladestromstärke?

$$I(t) = \frac{-U_c(t)}{R} = \frac{-Q(t)}{RC} \qquad (2)$$

Die Stromstärke hängt von der Ladungsänderung ab:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t) \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt die ODE der Entladung:

$$\boxed{\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC} \cdot Q(t) \iff \dot{U}_c(t) = -\frac{1}{RC} \cdot U_c(t)}$$

Lösen der ODE ergibt die Formel für zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung U_c beim Entladen:

$$\boxed{U_c(t) = U_{c0} \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}}$$

2) Problem: Wir haben eine Exponentialfunktion drin. Deshalb logarithmieren wir auf beiden Seiten:

$$\ln(\vec{U}_c) = \ln\left(U_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(\vec{U}_c) = \underbrace{\ln(U_0)}_{=a_1 \; = x_0} - \underbrace{\frac{1}{RC}}_{=\tau \; = x_1} \cdot t$$

Durch das logarithmieren können die beiden Faktoren auseinandergenommen werden und die Gleichung wird linear

Normiertes Fehlerquadrat:

$$\left\| \left(a_1 - \tau \cdot \vec{t}\right) - \ln(\vec{U}_c) \right\|_2^2 \longrightarrow \min!$$

Auf Form $\|A\vec{x} - \vec{b}\|_2^2 \rightarrow \min!$ bringen:

$$\left\| \tau \cdot \vec{t} - \ln(\vec{U}_c \cdot U_0) \right\|_2^2 \longrightarrow \min!$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \tau \quad , \quad \vec{A} = \vec{t} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.03 \\ 0.05 \\ 0.08 \\ 0.1 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \ln(\vec{U}_c / U_0) = \begin{pmatrix} \ln(5.0/5.0) \\ \ln(2.94/5.0) \\ \ln(1.73/5.0) \\ \ln(1.01/5.0) \\ \ln(0.6/5.0) \end{pmatrix}$$

Nun lösen mit der Normalengleichung (in python)

$$A^T A \cdot \vec{x} - A^T \vec{b} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -0.0 & -0.03 & -0.05 & -0.08 & -0.1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} -0.0 \\ -0.03 \\ -0.05 \\ -0.08 \\ -0.1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\tau}_{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} -0.0 & -0.03 & -0.05 & -0.08 & -0.1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \ln(5.0/5.0) \\ \ln(2.94/5.0) \\ \ln(1.73/5.0) \\ \ln(1.01/5.0) \\ \ln(0.6/5.0) \end{pmatrix}}_{b} = 0$$

Das lösen der Normalengleichung in Python ergibt:

$$\tau = 20655.65835$$

$$C = 484.12884 nF$$

$\Rightarrow$ Problem dieser Lösung: Für U_0 wird ein Messpunkt verwendet, was die Kurve abfälschen kann. Deshalb alternativ einen angenäherten Wert nehmen. Matrizen lauten wie folgt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \ln(U_0) \\ \tau \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \vec{U_c} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 2.94 \\ 1.73 \\ 1.01 \\ 0.6 \end{pmatrix} \qquad A = (1, -\vec{t}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.0 \\ 1 & -0.03 \\ 1 & -0.05 \\ 1 & -0.08 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.0 & -0.03 & -0.05 & -0.08 & -0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -0.0 \\ 1 & -0.03 \\ 1 & -0.05 \\ 1 & -0.08 \\ 1 & -0.1 \end{pmatrix}}_{A^TA := \begin{bmatrix} 5.00e+00 & -2.60e-04 \\ -2.60e-04 & 1.98e-08 \end{bmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \ln(U_0) \\ \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.0 & -0.03 & -0.05 & -0.08 & -0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5.0 \\ 2.94 \\ 1.73 \\ 1.01 \\ 0.6 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Das Lösen mittels cholesky-Zerlegung in python ergibt:

$$\tau = 21139.02$$

$$C = 473.0588\,nF$$

$$U_0 = 5.1875\,V$$