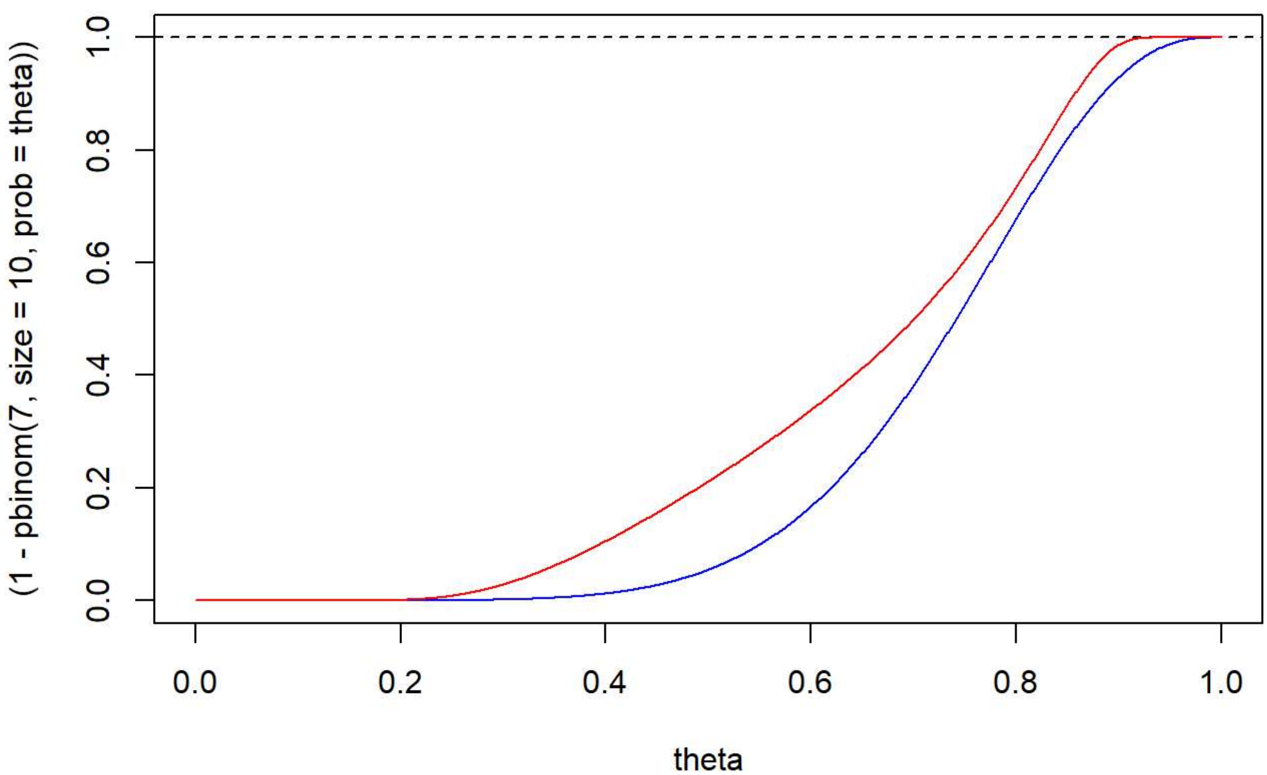
Tarea 2

Santiago, Sofía, Román, Luis

24/2/2020

Ejercicio 2

```
theta <- seq(0, 1, .001)
plot(theta, (1 - pbinom(7, size =  10, prob = theta)), type = "l", col = "blue")
abline(h = 1, col = "black", lty = 2)
lines(theta, (1 - pnorm(7, mean = 10 * theta, sd = 10 * theta * (1- theta))), type = "l", col =
"red")
```



Ejercicio 4

La hipotesis nula es $H_0 : \mu_d -? = \mu_a$ vs $H_a : \mu_d \neq \mu_a$

```
antes <- c(90, 83, 105, 97, 110, 78)
despues <- c(97, 80, 110, 93, 123, 84)
SIGN.test(antes, despues,paired = T, alternative = "less", conf.level = .9)
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
##
##  Dependent-samples Sign-Test
##
## data:  antes and despues
## S = 2, p-value = 0.3438
## alternative hypothesis: true median difference is less than 0
## 90 percent confidence interval:
##  -Inf  3.1
## sample estimates:
## median of x-y
##          -5.5
##
## Achieved and Interpolated Confidence Intervals:
##
##                   Conf.Level L.E.pt U.E.pt
## Lower Achieved CI     0.8906   -Inf    3.0
## Interpolated CI       0.9000   -Inf    3.1
## Upper Achieved CI     0.9844   -Inf    4.0
```

```
wilcox.test(antes, despues, paired = TRUE, exact = TRUE, alternative = "less", conf.level = .9,
 conf.int = .9)
```

```
##
##  Wilcoxon signed rank test
##
## data:  antes and despues
## V = 3, p-value = 0.07813
## alternative hypothesis: true location shift is less than 0
## 90 percent confidence interval:
##  -Inf -0.5
## sample estimates:
## (pseudo)median
##             -5
```

El valor p de la prueba del signo es .3438 y el intervalo de confianza es de (-inf, 3.1) El valor p de la prueba del rango con signo es .07813 y el intervalo de confianza es de (-inf, -.5). El supuesto que se debe hacer es que la muestra es pareada.

Ejercicio 5

- Cantidad **mediana** de sueño es de 7,5 hrs, con d.est de 1.5 hrs.
- El 5% de la población duerme 6 o menos.
- El otro 5% duerme 9 o más hrs.
- n = 8.

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
# data
X <- c(7.2,8.3,5.6,7.4,7.8,5.2,9.1,5.8)
n <- length(data)
# kable(as.array(data),col.names = c("Horas de sueno"))
# quantiles
q_vec <- c(0.05,0.5,0.95)

# empirical quantiles
empq_vec <- c(6,7.5,9)

#alpha
alpha <- 0.05
```

Determinar si los mexicanos duermen menos hoy que lo que hicieron en el pasado. Probarse las hipótesis para los cuantiles 0.05, 0.5 y 0.95.

Solución:

Como se quiere determinar si los mexicanos duermen **menos** que hoy, se hará una prueba de hipótesis para los cuantíles concernientes con la prueba de hipótesis

$$\mathcal{H}_0 : \kappa_p \leq k_p^0.$$

Forma con el valor de K

```
cat("Pruebas de hipótesis para Kp")
```

```
## Pruebas de hipótesis para Kp
```

```
for(i in 1:3)
{
  cat(paste("\n\n Para p = ",toString(i), sep = " "))
  # find k
  K <- sum(ifelse(X - empq_vec[i] > 0, 1, 0))
  cat(paste("\nEl valor de K es",toString(K), sep = " "))

  # find s
  fails <- sum( (pbinom(q = 0:n,size = n,prob = 1 - q_vec[i]) < alpha)) #pbinom y de cumulative
 dist, number of fails
  s <- n - fails
  cat(paste("\nEl valor de s es",toString(s), sep = " "))

  #test Hip
  test <- ifelse(K <= (n - s),'cierta','falsa')
  cat(paste("\n La prueba de hipótesis es",test, sep = " "))
}
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
##
##
##  Para p =  1
## El valor de K es 5
## El valor de s es 1
##  La prueba de hipótesis es falsa
##
##  Para p =  2
## El valor de K es 3
## El valor de s es 1
##  La prueba de hipótesis es falsa
##
##  Para p =  3
## El valor de K es 1
## El valor de s es 1
##  La prueba de hipótesis es falsa
```

Forma con la estadistica de orden X_{s}

```
cat("Pruebas de hipótesis para Kp")
```

```
## Pruebas de hipótesis para Kp
```

```
for(i in 1:3)
{
  cat(paste("\n\n Para p = ",toString(i), sep = " "))
  # find s
  fails <- sum( (pbinom(q = 0:n,size = n,prob = 1 - q_vec[i]) < alpha)) #pbinom y de cumulative
 dist, number of fails
  s <- n - fails
  cat(paste("\nEl valor de s es",toString(s), sep = " "))

  #find X(s)
  Xs <- X[s+1]  #s can start from cero
  cat(paste("\nEl valor de X(s) es",toString(Xs), sep = " "))
  cat(paste("\nEl valor de kp es",toString(empq_vec[i]), sep = " "))


  #test Hip
  test <- ifelse(Xs <= empq_vec[i],'cierta','falsa')
  cat(paste("\n La prueba de hipótesis es",test, sep = " "))
}
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
##
##
##  Para p =  1
## El valor de s es 1
## El valor de X(s) es 8.3
## El valor de kp es 6
##  La prueba de hipótesis es falsa
##
##  Para p =  2
## El valor de s es 1
## El valor de X(s) es 8.3
## El valor de kp es 7.5
##  La prueba de hipótesis es falsa
##
##  Para p =  3
## El valor de s es 1
## El valor de X(s) es 8.3
## El valor de kp es 9
##  La prueba de hipótesis es cierta
```

Ejercicio 6

A una muestra de tres niñas y cinco niños se les dan instrucciones sobre cómo armar un lego. Luego se les pide armar el lego una y otra vez hasta que lo hagan correctamente. El número de repeticiones necesarias para una terminación correcta son 1,2, y 5 para las niñas, y 4,8,9,10 y 12 para los niños. Encontrar el p−valor de la alternativa que en promedio las niñas aprenden la actividad más rápido que los niños, y encontrar el intervalo de confianza estimado de la diferencia $\theta = M_Y - M_X$ con un coeficiente de confianza al menos igual a 0.85, usando la prueba de la mediana.

```
na<-c(1,2,5)
no<-c(4,8,9,10,12)
n<-length(na)
m<-length(no)
N<-n+m
names(na) <- rep("x",n)
names(no) <- rep("Y",m)
```

Primero encontremos el p-value de $H_0 : M_Y = M_X$ $H_0 : M_Y < M_X$ en promedio las niñas aprenden más rápido que los niños.

Tenemos dos muestras aleatorias independientes, entonces podemos usar el Mann-whitney test.

Sacamos los rangos para ambos grupos

```
(w <- sort(c(na,no)))
```

```
##  x  x  Y  x  Y  Y  Y  Y
##  1  2  4  5  8  9 10 12
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
(Rw <- rank(w,ties.method = "average"))
```

```
## x x Y x Y Y Y Y
## 1 2 3 4 5 6 7 8
```

Ahora obtenemos la suma de los rangos de cada grupo

```
Rw[names(Rw) == "x"]
```

```
## x x x
## 1 2 4
```

```
(Tx <- sum(Rw[names(Rw) == "x"]))
```

```
## [1] 7
```

```
(T1<-Tx-n*(N+1)/2)/sqrt(n*m/(N*(N-1))*sum(Rw^2) - n*m*(N+1)^2/(4*(N-1)))
```

```
## [1] -1.937926
```

```
(pval <- 1-pnorm(T1))
```

```
## [1] 1
```

No rechazamos con un p-value de 1 y un nivel de confianza de 0.05

Ahora agámoslo con funciones

```
wilcox.test(x=na,y=no,alternative = "greater",
            paired = FALSE, exact = TRUE, correct = FALSE,
            conf.int = TRUE, conf.level = 0.85,
             digits.rank = Inf)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test
##
## data:  na and no
## W = 1, p-value = 0.9821
## alternative hypothesis: true location shift is greater than 0
## 85 percent confidence interval:
##   -8 Inf
## sample estimates:
## difference in location
##                     -7
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

Notemos que el p-value es grande, entonces no rechazamos la hipótesis nula, es decir, la mediana de las niñas es mayor que la de los niños.

El intervalo de confianza para $\theta = M_Y - M_X$ es

Ejercicio 8 Al principio del semestre los estudiantes de nuevo ingreso fueron divididos en dos grupos. A un grupo se le enseñó econometría usando métodos no paramétricos, donde todos los estudiantes progresaron de un estado al siguiente al mismo tiempo, siguiendo las direcciones del profesor. El segundo grupo les enseñaron métodos no paramétricos de manera individual, donde cada estudiante progresaba de acuerdo a su propio ritmo, bajo la supervisión del profesor. Al final del año se aplicó un examen, con los siguientes resultados: Primer grupo: 227, 55, 184, 174, 176, 234, 147, 194, 252, 194, 88, 248, 149, 247, 161, 206, 16, 99, 171, 89 Segundo grupo: 209, 271, 63, 19, 14, 151, 184, 127, 165, 235, 53, 151, 171, 147, 228, 101, 292, 99, 271, 179. a. Probar la hipótesis nula de que no hay diferencia en los dos métodos contra la alternativa de que las dos medianas son diferentes.

```
G1 <- c(227, 55, 184, 174, 176, 234, 147, 194, 252, 194, 88, 248, 149, 247, 161, 206, 16, 99, 17
1, 89)
G2 <- c(209, 271, 63, 19, 14, 151, 184, 127, 165, 235, 53, 151, 171, 147, 228, 101, 292, 99, 271
, 179)

#Wilcoxon Test
wilcox.test(G1,G2,paired = F,alternative = "two.sided")
```

```
## Warning in wilcox.test.default(G1, G2, paired = F, alternative =
## "two.sided"): cannot compute exact p-value with ties
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  G1 and G2
## W = 215, p-value = 0.6948
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Esto quiere decir que no tenemos evidencia para rechazar Ho, con una confianza del 95% decimos que no hay diferencia entre los métodos.

b. Probar la hipótesis nula de igualdad de varianzas contra la alternativa de que la varianza de la segunda población es mayor que la varianza de la primera población

```
datos <- data.frame(resultados = c(G1,G2), prueba = factor(c(rep(1,length(G1)),rep(2,length(G
2)))))
conover_test(resultados ~ prueba, data=datos, alternative= "less")
```

```
##
##  Asymptotic Two-Sample Conover-Iman Test
##
## data:  resultados by prueba (1, 2)
## Z = -0.86629, p-value = 0.1932
## alternative hypothesis: true ratio of scales is less than 1
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

Con esta prueba analizamos el radio de las varianzas (grupo 1 entre grupo 2). La prueba nos dice que no hay evidencia para rechar Ho: var(G1) = Var(G2).

```
wilcox.test(x=na,y=no,alternative = "greater",
            paired = FALSE, exact = TRUE, correct = FALSE,
            conf.int = TRUE, conf.level = 0.85,
             digits.rank = Inf)$conf.int
```

```
## [1]  -8 Inf
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.85
```

Ejercicio 7

```
pinturaa <- c(2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14)
pinturab <- c(1, 5, 7, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20)
pintura <- c()
for (i in 1:10){
  if (pinturaa[i] > pinturab[i]){
    pintura[i] = "A"
  }
  else{
    pintura[i] = "B"
  }

}
rango <- 1:9
sample(c(0,1), 10, replace = T)
```

```
##  [1] 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0
```

```
wilcox.test(x = c(1), y = c(2,3,4,5,6,7,8,9,10), paired = F, alternative = 'less', conf.level =
.95 )
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test
##
## data:  c(1) and c(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
## W = 0, p-value = 0.1
## alternative hypothesis: true location shift is less than 0
```

Como podemos notar, si existe diferencia significativa entre la pintura a y la pintura b

Ejercicio 9

Ocho voluntarios fueron reclutados para probar la eficacia de usar un telescopio en un rifle. Se cree que el uso del telescopio aumentará los puntajes en un rango de tiro. Para probar esto, los ocho voluntarios se les pidió usar un rifle en un rango de tiro, tanto con un telescopio en la mira como sin telescopio en la mira de los rifles, usando un

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

patrón alternado aleatorio entre ambos. Los resultado fueron:

¿Las miras telescópicas resultan en puntajes más altos?

a. Usar una prueba basada sólo en rangos. Encontrar el p-valor en tres formas diferentes:

1. encontrar el p-valor exacto, (2) Usar la aproximación normal sin corrección por continuidad y (3) Usar la aproximación normal con la corrección de continuidad.

```
w<-c(96, 93, 89, 88, 85, 83, 80, 77)
z<-c(92, 92, 89, 96, 82, 79, 80, 78)
dif<-w-z
```

1. p-value exacto

```
wilcox.test(w,z,alternative = "two.sided",
            paired = FALSE, exact = TRUE, correct = FALSE,
            conf.int = TRUE, conf.level = 0.85,
             digits.rank = Inf)
```

```
## Warning in wilcox.test.default(w, z, alternative = "two.sided", paired =
## FALSE, : cannot compute exact p-value with ties
```

```
## Warning in wilcox.test.default(w, z, alternative = "two.sided", paired =
## FALSE, : cannot compute exact confidence intervals with ties
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test
##
## data:  w and z
## W = 33.5, p-value = 0.8745
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
## 85 percent confidence interval:
##  -4.000026  5.999965
## sample estimates:
## difference in location
##              0.1889773
```

(2)Usar la aproximación normal sin corrección por continuidad ¿cómo se le deja la normal sin que se corrija? Me sale igual que con p-value exacto

```
wilcox.test(w,z,alternative = "two.sided",
            paired = FALSE, exact = FALSE, correct = FALSE,
            conf.int = TRUE, conf.level = 0.85,
             digits.rank = Inf)
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
##
##  Wilcoxon rank sum test
##
## data:  w and z
## W = 33.5, p-value = 0.8745
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
## 85 percent confidence interval:
##  -4.000026  5.999965
## sample estimates:
## difference in location
##              0.1889773
```

(3)Usar la aproximación normal con la corrección de continuidad

```
wilcox.test(w,z,alternative = "two.sided",
            paired = FALSE, exact = FALSE, correct = TRUE,
            conf.int = TRUE, conf.level = 0.85,
             digits.rank = Inf)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  w and z
## W = 33.5, p-value = 0.9161
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
## 85 percent confidence interval:
##  -4.999976  6.000022
## sample estimates:
## difference in location
##              0.1889773
```

b)Usar una prueba basada en normalidad. FALTA ESTA

```
shapiro.test(dif)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  dif
## W = 0.83885, p-value = 0.07329
```

Tiene un p-value mayor a 0.05, entonces no rechazamos H_0.

c)Usar una prueba de aleatorización tipo Fisher

```
#fisher.test(w, z, alternative = "two.sided") la veremos en clase
```

d)Encontrar un intervalo de confianza para la mejora en el puntaje obtenida usando una mira telescópica

```
library(gmodels)
```

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

```
## Warning: package 'gmodels' was built under R version 3.6.2
```

```
mejora<-dif
ci(mejora, confidence=0.95)
```

```
## Warning in ci.numeric(mejora, confidence = 0.95): No class or unkown class.
## Using default calcuation.
```

```
##   Estimate   CI lower   CI upper Std. Error
##   0.375000  -2.876358   3.626358   1.375000
```

Tenemos que el intervalo es [-2.876358, 3.626358]

Ejercicio 10

- 12 escenarios para contar muertos por epidemia por cada medicamento.

```
# data
medA <- c(41,8,65,28,11,15,73,54,7,50,59,24)
medB <- c(38,14,41,31,8,18,48,32,7,37,42,48)
escen <- 1:12
data <- data.frame(x = cbind(escen,medA,medB))

kable(data, col.names = c("Escenario","Meidicina A","Medicina B"))
```

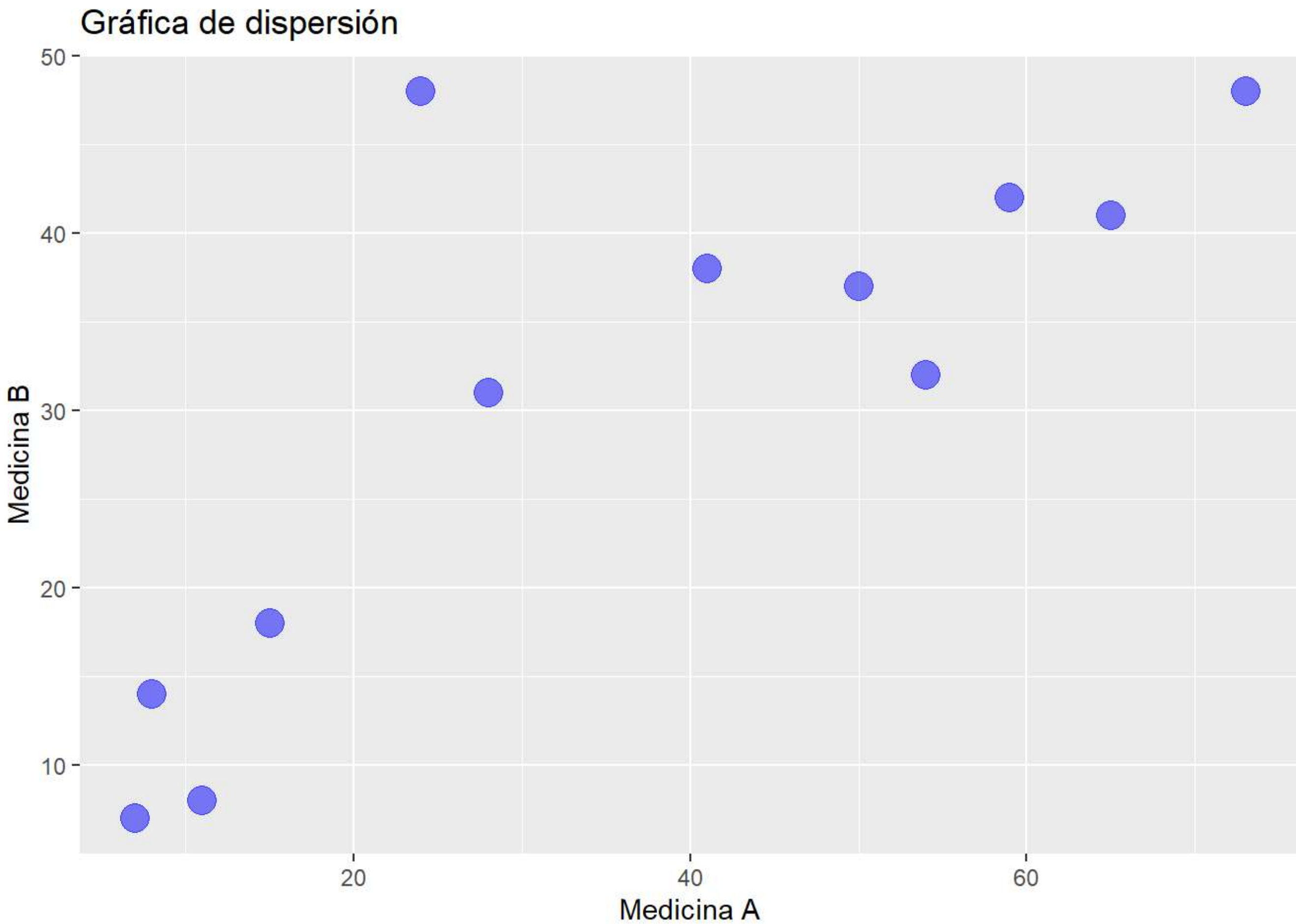
Escenario	Meidicina A	Medicina B
1	41	38
2	8	14
3	65	41
4	28	31
5	11	8
6	15	18
7	73	48
8	54	32
9	7	7
10	50	37
11	59	42
12	24	48

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

Gráfica de dispersión

```
g_ej10_points <- ggplot(data = data, mapping = aes(x = medA, y = medB)) +
                  geom_point(col = "blue", alpha = 0.5, size = 5) + xlab("Medicina A") + ylab("M
edicina B") + ggtitle("Gráfica de dispersión")

g_ej10_points
```



Correlación Spearman y de Kendall

```
rho_s <-  cor(x = data$x.medA,y = data$x.medB,method = "spearman")
tau_k <- cor(x = data$x.medA,y = data$x.medB,method = "kendall")
```

Vemos que la correlación de Spearman ρ, es 0.7880923. Mientras que la correlación de Kendall τ, es 0.6565077.

File failed to load: /extensions/MathZoom.js

TAREA 2 ENP

1.- a) Probar a un nivel $\alpha \leq .10$ la hipótesis nula $H_0: M = 2$ vs $H_a: M > 2$, donde M es la mediana de una población simétrica continua y se extrae la m.a. $\Rightarrow -3, -6, 1, 9, 4, 10, 12$

i) Prueba del signo: Como $H_0: M = 2 \Rightarrow Z_i = X_i - 2 \Rightarrow Z = \{-5, -8, -1, 7, 2, 8, 10\} \therefore Z^+ = 4$ y $Z^- = 3$

Calculamos la $\mathbb{P}(X = 4)$ con $X \sim Bin(7, 1/2)$ que es igual a $.2734$. Como $H_a: M > 2$ (de una cola) entonces el p-value $= .2734 > \{\alpha \mid \alpha \leq .10\} \therefore$ No tenemos evidencia para rechazar $H_0: M = 2$

ii) Prueba de rango Wilcoxon: Ahora observamos $|Z_i| = \{5, 8, 1, 7, 2, 8, 10\}$ y R_i denota el rango de $|Z_i| \Rightarrow \{R_i\} = \{3, 5.5, 1, 4, 2, 5.5, 6\}$ y def $\mathbb{1}(Z_i > 0) = \begin{cases} 1 \text{ si } Z_i > 0, \\ 0 \text{ si } Z_i < 0 \end{cases}$. Entonces el estadístico de Wilcoxon $T^+ = \sum_{i=1}^{7} R_i \mathbb{1}(Z_i > 0) = 4 + 2 + 5 + 6 = 18.5$. Aplicando la prueba en R (wilcox.test) obtenemos un p-value $= .2491 \therefore$ Tampoco rechazamos H_0 //

b) Dar la probabilidad exacta del error tipo I

El error tipo I es: rechazar H_0 dado que es verdadera. Buscamos K_α t.q. $\mathbb{P}(X \geq K_\alpha) \leq \alpha$. Para $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow \sum_{i=[K_\alpha]}^{n} \binom{n}{i} (1/2)^n \leq \alpha = .05 \Rightarrow K_\alpha = 6 \therefore$ la $\mathbb{P}$ exacta del error tipo I $\Rightarrow \alpha^* = 1 - .9921 = .0078$

Al tener empates la prueba de Wilcoxon no nos da el valor exacto.

c) Sobre la base de la m.a. de pares (X, Y). Probar con $\alpha \leq .10$, $H_0: M = 2$ vs $H_a: M \neq 2$, donde M es la mediana de una población con distribución continua y simétrica de diferencias $D = X - Y$

i) Prueba de signo: Como $H_0: M = 2 \Rightarrow Z_i = D_i - 2$. Entonces calculamos $Z^+ = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(Z_i > 0)$, y obtenemos $Z^+ = 4$. Como $n = 8$, nos interesa calcular $\mathbb{P}(X = 4)$ con $X \sim Bin(8, 1/2)$ la cual es $.2734$. Como $H_a\ M \neq 2 \Rightarrow$ es una prueba de dos colas $\therefore$ p-value $= 2 \times .2734 = .5468 \gg \{\alpha \mid \alpha \leq .10\}$

Entonces no tenemos evidencia para rechazar H_0.

ii) Prueba de Wilcoxon: Ahora aplicamos la prueba "wilcox.test" análoga al ejercicio anterior con el estadístico de Wilcoxon $T^+ = \sum_{i=1}^{8} R_i \mathbb{1}(Z_i > 0) = 19.5$. Obtenemos un p-value $= .8885$

Por lo tanto tampoco rechazamos H_0 //

d) Dar la $\mathbb{P}$ exacta del error tipo I

En i) Buscamos K_α con $\alpha = .05$ t.q. $\mathbb{P}(X \geq K_\alpha) \leq \alpha \Rightarrow K_\alpha = 6 \Rightarrow \sum_{i=6}^{n} \binom{n}{i} (1/2)^n = \alpha^* = .0351$ $\mathbb{P}$ exacta del error tipo 1

De la misma forma que en b), como tenemos empates Wilcoxon test no nos da el valor exacto.

e) Dar el intervalo de confianza a la prueba en c).

Para la prueba de Wilcox el IC del 95% en "R" nos arroja $(-5.49, 11.49)$ para la mediana

3: Probar que la estadística de Wilcoxon $T^+ - T^-$ basada en un conjunto de obs ($\neq 0$) $X_1, \dots, X_n$ puede ser escrita de la forma: $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} sgn(X_i + X_j)$ donde $sgn(x) = I(x>0) - I(x<0)$

Como vimos en el ej. 1 el estadístico $T^+ = \sum_{i=1}^{n} R|X_i| \mathbb{1}(X_i>0)$ y $T^- = \sum_{i=1}^{n} R|X_i| \mathbb{1}(X_i<0)$

Sabemos que si $X_i > 0 \Rightarrow |X_i| = X_i$ y si $X_i < 0 \Rightarrow |X_i| = -X_i$. Como $R(X_i)$ es el rango de la obs. X_i y $X_i \neq 0 \; \forall_i \Rightarrow T^+ - T^- = \sum_{i=1}^{n} R|X_i| \mathbb{1}(X_i>0) - \sum_{i=1}^{n} R|X_i| \mathbb{1}(X_i<0) = \sum_{i=1}^{n} R|X_i| (\mathbb{1}(X_i>0) - \mathbb{1}(X_i<0))$
$= \sum_{i=1}^{n} R|X_i| sgn(X_i)$ Lo cual equivale a la suma de los rangos con el signo original de X_i. Es decir, si $R|X_i| = m$ y $sgn(X_i) = -1 \Rightarrow$ el sumando sería $-m$. Por otro lado, $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} sgn(X_i + X_j) = sgn(X_1+X_1) + sgn(X_1+X_2) + \dots + sgn(X_1+X_n) + sgn(X_2+X_2) + \dots + sgn(X_2+X_n) + \dots + sgn(X_n+X_n)$ cada sumando vale $\{-1, 0, 1\}$ y en total son $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ que coincide con $\sum_{i=1}^{n} R|X_i|$ omitiendo el $sgn(X_i)$. Entonces para el caso que todas las observaciones tuvieran el mismo signo $\therefore T^+ - T^- = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} sgn(X_i + X_j)$. Para el caso contrario, vemos que dentro de la suma $\sum sgn(X_i+X_j)$ podremos encontrar subconjuntos $\equiv R|X_i| sgn(X_i)$ pues si $R|X_i| = m$ habría m términos $sgn(X_i+X_j)$ con el mismo signo de $sgn(X_i)$ pues si $R|X_i| > R|X_j| \Rightarrow sgn(X_i+X_j) = sgn(X_i)$
Entonces $\sum sgn(X_i+X_j)$ equivale a n subconjuntos que forman cada elem. de $\sum R|X_i| sgn(X_i)$

Por lo tanto, se probó que $T^+ - T^- = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} sgn(X_i + X_j)$ //