hw3

30/3/2020

```r
set.seed(20200316) #created at date

# assigning number of excercises
(people_3quest <- sample(x = c("Luis","Roman","Sant","Sof"),replace = F, size = 2)) #people with 3 ques
```

```
## [1] "Sof"  "Luis"
```

```r
# assinging excersises
number_ex <- 1:10 #excercises
cat("\nEjercicios Luis: ")
```

```
##
## Ejercicios Luis:
```

```r
(ex_luis <- sample(x = number_ex, replace = F, size = 3))
```

```
## [1] 2 3 6
```

```r
number_ex <- number_ex[! number_ex %in% ex_luis] #removing questions

cat("\nEjercicios Roman: ")
```

```
##
## Ejercicios Roman:
```

```r
(ex_roman <- sample(x = number_ex, replace = F, size = 2))
```

```
## [1] 5 4
```

```r
number_ex <- number_ex[! number_ex %in% ex_roman] #removing questions

cat("\nEjercicios Sant: ")
```

```
##
## Ejercicios Sant:
```

```r
(ex_sant <- sample(x = number_ex, replace = F, size = 2))
```

```
## [1] 10  8
```

```r
number_ex <- number_ex[! number_ex %in% ex_sant] #removing questions

cat("\nEjercicios Sof: ")
```

```
##
## Ejercicios Sof:
```

```
(ex_sof <- number_ex)
```

```
## [1] 1 7 9
```

Ejercicio 4

Sea $t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$. Mostrar que $|t_i| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}$.

Demostración

1. Supongamos tamaño de muestra n arbitraria pero fija.
2. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_n \geq x_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
3. Supongamos que $\bar{x}_{n-1} = 0$ sin pérdida de generalidad.

Por un lado tenemos que

$$\bar{x}_n = \frac{x_n + \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_n}{n}.$$

Por otro lado se tiene

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 - \frac{2}{n} x_i x_n + \frac{x_n^2}{n^2}) + (x_n - \frac{x_n}{n})^2}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} s_{n-1}^2 + \frac{1}{n^2} x_n^2.$$

Por simplicidad en el álgebra, tomemos $\beta = \frac{n-2}{n-1} s_{n-1}^2$ y $\alpha = \frac{1}{n^2}$.

Definamos

$$g(\bar{x}, s^2) = \frac{x_n - \bar{x}}{s^2}.$$

Por hipotesis y al tener n fija, tenemos que

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}_n}{s_n^2} \leq \frac{x_n - \bar{x}_n}{s_n^2} = g(\bar{x}, s^2).$$

Pero al tener n fia se ve que

$$g(\bar{x}, s^2) = \frac{x_n - \bar{x}_n}{s_n^2} = \frac{\frac{n-1}{n} x_n}{\sqrt{\frac{n-2}{n-1} s_{n-1}^2 + \frac{1}{n^2} x_n^2}} = g(x_n).$$

Notemos que

$$\sup_{x_n} g(x_n) = \lim_{x \to \infty} g(x_n) = \frac{\frac{n-1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$$

Ya que g no posee PCE, pero es monotonamente creciente después del 0 y está acotada superiormente, por tanto su supremo existe y es el límite. An+alogamente para el ínfimo, ya que es monótonamente decreciente después del 0 y está acotada inferiormente. Por lo tanto concluímos que

$$|t_i| < \frac{n-1}{\sqrt{n}}.$$

Específicamente, vemos que si $n \leq 10$ entonces $|t_i| < \frac{10-1}{\sqrt{10}} < \frac{10-1}{\sqrt{9}} = 3$.

Ejercicio 5

Ejercicio 5a. Encontrar el RIQ para una v.a. normal.

Para encontrar el *rango intercuantíl* de una v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, se ve que

$$\mathbb{P}[x \leq \kappa_{0.25}] = 0.25 \iff \frac{\kappa_{0.25} - \mu}{\sigma} = -0.675 \iff \kappa_{0.25} = \mu - 0.675\sigma.$$

Como la distribución de X es simétrica al rededor de μ, se sigue que $\kappa_{0.75} = \mu + 0.675\sigma$.

Entonces tenemos que el $\text{RIQ}(X) = \kappa_{0.75} - \kappa 0.25 = 1.35\sigma$.

Ejercicio 5b. Determinar la constate c tal que el RIQ sea un estimador consistente de σ

Si hacemos $c = 1.35$, vemos que $\text{RIQ}(X)/c = \sigma$. Por lo que de esta manera tendremos un estimador consistente para σ.