

Задача Е. Города

Задача Е. Города

- Разбор задачи — Роман Коробков

Постановка задачи

- Дано взвешенное дерево T , в котором n листьев, и степень каждой внутренней вершины ≥ 3 .
- За один запрос можно узнать $d(u, v)$ — кратчайшее расстояние между u и v .
- Нужно найти центры дерева, а также сказать является какой-либо центр медианой для листьев (при его удалении количество листьев в каждой из компонент не превышает $n/2$).
- Необходимо сделать это за $\lceil \frac{7N}{2} \rceil$ запросов.

Радиусы и центры

- Пусть v - вершина с номером 1. Найдем вершину s с наибольшим расстоянием от v , t с наибольшим расстоянием от s . $d(s, t)$ — диаметр, а искомые центры лежат на пути от v до s .
- $f(u) = (d(s, u) + d(s, v) - d(u, v))/2$ — расстояние от s до вершины u , лежащей на пути sv .
- Вершины u , для которых $\max(f(u), \text{diam} - f(u))$ минимально — центры.
- Таким образом за $2 \cdot n - 3$ запроса можно найти радиус дерева r .

Решение задачи

- Пусть $X = \{u \mid d(s, u) + d(s, v) - d(u, v) = 2 \cdot r\}$.
 X - множество листов, которые подвешены к центру.
- Если $d(s, x_1) + d(s, x_2) - d(x_1, x_2) > 2 \cdot r$, то x_1 и x_2 будут находиться в разных компонентах связности, после удаления центра.
- Пусть $R(a, b) = 1$, если a и b лежат в одной компоненте, и 0 иначе.
- Переформулируем нашу задачу: есть n цветных шаров, необходимо узнать есть ли среди них более $n/2$ шаров одного цвета, используя функцию R .

Решение задачи

- Научимся решать такую задачу за $\lceil \frac{3N}{2} \rceil$ запросов.
- Заведём A , B .
- Рассмотрим элементы в любом порядке. Если текущий элемент равен последнему элементу в A , то добавим его в B . Иначе добавим его в A , а затем последний элемент из B переложим в A .
- Заметим, что все элементы B равны последнему элементу A , и только этот элемент может встречать более $n/2$ раз. Пусть его цвет c

Решение задачи

- Затем будем делать следующее, пока в A есть элементы:
- Если в A последний элемент имеет цвет c , то удалим два последних элемента из A . Иначе удалим последний элемент из A и B .
- Если после всех операций в B остались элементы, то цвет c встречается более $n/2$ раз.
- Суммарное количество запросов
 $(n - 1) + (n - 2) + n + \lceil \frac{n}{2} \rceil < \lceil \frac{7n}{2} \rceil$