

- 
- Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques claramente que lo estás usando.
  - Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible.
- 

Pregunta	1	2	3	Total
Puntos	2	8	13	23
Puntaje				

Nombre: Ricardo Karim Abdelarrague

Considera la forma cuadrática dada por la expresión:

$$Q((X, Y, Z)) = \frac{X^2}{2} + \frac{3\sqrt{3}XZ}{2} + \frac{Y^2}{2} - \frac{3YZ}{2} + \frac{Z^2}{2}$$

Sea  $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ .

El objetivo es simplificar la forma cuadrática  $Q$ .

1. (2 Puntos) Encuentra una transformación lineal y autoadjunta  $T$  tal que para todo vector  $\vec{v}$  se cumple que:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = Q(\vec{v})$$

Recuerda que la transformación  $T$  arriba mencionada, tiene como matriz a la matriz simétrica correspondiente a  $Q$ .

2. (a) (2 Puntos) Encuentra un vector  $\vec{v}_1$  tal que  $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$   
Esto implica que  $\lambda_1$  es un valor propio de  $T$  y que  $\vec{v}_1$  es un vector propio.
- (b) (2 Puntos) Encuentra una base ortonormal  $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$  tal que  $\vec{z}_1$  es paralelo a  $\vec{v}_1$  (Sugerencia: Aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt al vector  $\vec{v}_1$  y a algunos otros dos vectores de la base canónica  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  )
- (c) (2 Puntos) Calcula la matriz de la transformación  $T$  en la base  $\gamma$
- (d) (2 Puntos) Calcula el polinomio característico de  $T$  a partir de su matriz en la base  $\gamma$
3. (a) (3 Puntos) Encuentra los tres valores propios de  $T$ :  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$
- (b) (3 Puntos) Encuentra tres vectores propios correspondientes a los tres valores propios de  $T$ :

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$$

- (c) (1 Pt) Verifica que los tres vectores anteriores son ortogonales y obtén una base ortonormal  $\delta$  a partir de ellos.
- (d) (4 Puntos) Calcula la matriz de  $[T]$  en la base  $\delta$   
Sean  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  las coordenadas en la base  $\delta$ .
- (e) (2 Puntos) Expresa  $Q$  en las coordenadas  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ .