

- 
- Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques claramente que lo estás usando.
  - Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible, no es necesario que utilices símbolos lógicos.
- 

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos	2	8	8	13	3	5	3	42
Puntaje								

Nombre: Carlos Alberto Gómez Correa

En lo sucesivo, fijemos una base ortonormal  $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ . Además, fijemos el volumen  $V$  que cumple que  $V(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = 1$ . Recordemos que en clase definimos las *funciones coordenadas* asociadas a la base  $\beta$  como:

$$X(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_1 \rangle$$

$$Y(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_2 \rangle$$

$$Z(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_3 \rangle$$

Sea  $Q$  la forma cuadrática:

$$\frac{49X^2}{128} - \frac{73X}{192}\sqrt{3}Y + \frac{41X}{32}Z + \frac{161Y^2}{384} - \frac{YZ}{96}\sqrt{3} + \frac{Z^2}{32}$$

Sea  $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ .

El objetivo es simplificar la forma cuadrática  $Q$  y deducir qué tipo de superficie cuádrica es la superficie  $Q(\vec{v}) = 1$ .

1. (2 Puntos) Encuentra una transformación lineal y autoadjunta  $T$  tal que para todo vector  $\vec{v}$  se cumple que:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = Q(\vec{v})$$

Las siguientes dos preguntas (preguntas 2 y 3) son dos maneras distintas de encontrar los valores propios de  $T$ . Valen la misma cantidad de puntos y puedes hacer cualquiera de las dos:

2. (a) (2 Puntos) Encuentra un vector  $\vec{v}_1$  tal que  $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$   
 Esto implica que  $\lambda_1$  es un valor propio de  $T$  y que  $\vec{v}_1$  es un vector propio.  
 (b) (2 Puntos) Encuentra una base ortonormal  $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$  tal que  $\vec{z}_1$  es paralelo a  $\vec{v}_1$ .  
 (c) (2 Puntos) Calcula la matriz  $[T]_\gamma$   
 (d) (2 Puntos) Calcula el polinomio característico de  $T$  a partir de la matriz  $[T]_\gamma$
3. (8 Puntos) Calcula el polinomio característico de  $T$  a partir de la matriz  $[T]_\beta$
4. (a) (3 Puntos) Encuentra los tres valores propios de  $T$ :  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$   
 (b) (3 Puntos) Encuentra tres vectores propios correspondientes a los tres valores propios de  $T$ :

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$$

- (c) (1 Pt) Verifica que los tres vectores anteriores son ortogonales y obtén una base ortonormal  $\delta$  a partir de ellos.
- (d) (4 Puntos) Calcula la matriz  $[T]_\delta$   
Sean  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$  las coordenadas en la base  $\delta$ .
- (e) (2 Puntos) Expresa  $Q$  en las coordenadas  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ .
5. (3 Puntos) ¿Qué tipo de superficie cuádrica es la superficie dada por  $Q(\vec{v}) = 1$  ? ¿elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas?
6. (5 Puntos) Esboza las intersecciones de la superficie anterior con los planos  $P_{\tilde{X}=0}$ ,  $P_{\tilde{Y}=0}$  y  $P_{\tilde{Z}=0}$ .
7. (3 Puntos) Sea  $T$  una transformación autoadjunta con forma cuadrática asociada:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

.

Dado un ángulo  $\alpha$ , sean:

$$\begin{aligned}\vec{z}_{1\alpha} &= \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{2\alpha} &= -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{3\alpha} &= \vec{w}_3\end{aligned}$$

y sea  $\gamma_\alpha := \{z_{1\alpha}, z_{2\alpha}, z_{3\alpha}\}$  la base ortonormal que se obtiene de la base  $\beta$  al rotar  $\vec{w}_1$  y  $\vec{w}_2$  un ángulo  $\alpha$ . Sean  $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$  las coordenadas con respecto a la base  $\gamma_\alpha$ , es decir:

$$\begin{aligned}X_\alpha(\vec{v}) &= \langle \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{1\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Y_\alpha(\vec{v}) &= \langle -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{2\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Z_\alpha(\vec{v}) &= \langle \vec{w}_3, \vec{v} \rangle = \langle z_{3\alpha}, \vec{v} \rangle\end{aligned}$$

Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $a = b$
2. Para todo ángulo  $\alpha$ , la forma cuadrática  $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle$  en las coordenadas  $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$  tiene los mismos coeficientes que en las coordenadas  $X, Y, Z$ , es decir:  $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX_\alpha^2 + bY_\alpha^2 + cZ_\alpha^2$