

- 
- Contesta las preguntas en las hojas blancas que se te darán. Indica claramente el número de problema e inciso. No es necesario que copies la pregunta.
  - Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques claramente que lo estás usando.
  - Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible, no es necesario que utilices símbolos lógicos.
- 

Pregunta	1	2	3	Total
Puntos	5	2	24	31
Puntaje				

Nombre: Juan Andrés Murillo Herrera

En lo sucesivo, fijemos una base ortonormal  $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ . Además, fijemos el volumen  $V$  que cumple que  $V(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = 1$ .

1. (5 Puntos) Sea  $T$  una transformación lineal. Sea  $M = [T]_\beta$  la matriz de  $T$  en la base  $\beta$ . Demuestra que  $M$  satisface  $M^T = M$  (es decir, es una matriz simétrica) si y solo si:

$$\langle v, T(w_1) \rangle = \langle T(v), w_1 \rangle$$

$$\langle v, T(w_2) \rangle = \langle T(v), w_2 \rangle$$

$$\langle v, T(w_3) \rangle = \langle T(v), w_3 \rangle$$

2. (2 Puntos) Exhibe una transformación lineal  $T$  tal que  $T^3 = 0$  y tal que  $T^2 \neq 0$ . Calcula la matriz de  $T$  y su dilatación.
3. Considera la transformación lineal  $T$  tal que su matriz  $[T]_\beta$  es la matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 6 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{17}{4} \end{bmatrix}$$

- (a) (2 Puntos) Encuentra un vector  $\vec{v}_1 \neq 0$  tal que  $T(\vec{v}_1) = 5\vec{v}_1$
- (b) (2 Puntos) Encuentra un vector  $\vec{v}_2 \neq 0$  tal que  $T(\vec{v}_2) = 6\vec{v}_2$
- (c) (2 Puntos) Encuentra un vector  $\vec{v}_3 \neq 0$  tal que  $T(\vec{v}_3) = 4\vec{v}_3$
- (d) (3 Puntos) Demuestra que los tres vectores anteriores son ortogonales
- (e) (2 Puntos) Encuentra una base ortonormal  $\gamma$  a partir de los vectores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ . Denotemos dicha base por  $\gamma := \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$
- (f) (2 Puntos) Encuentra la matriz  $[T]_\gamma$
- (g) (2 Puntos) Calcula la dilatación de  $T$
- (h) (2 Puntos) Considera la transformación  $R$  tal que:

$$R(\vec{w}_1) = \vec{z}_1$$

$$R(\vec{w}_2) = \vec{z}_2$$

$$R(\vec{w}_3) = \vec{z}_3$$

Encuentra la matriz de  $R$  en la base  $\beta$ .

- (i) (2 Puntos) Demuestra que  $R$  es una isometría
- (j) (3 Puntos) Encuentra la transformación inversa de  $R$
- (k) (2 Puntos) Calcula  $R^{-1} \circ T \circ R$