

Tarea IX

Román Contreras

27 de mayo de 2018

0.1. Superficies cuadráticas y el teorema espectral para operadores autoadjuntos

Sea $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base ortonormal y T una transformación lineal.

Recordemos que en clase definimos las *funciones coordenadas* asociadas a la base β como:

$$\begin{aligned} X : \text{Vec}_{\mathcal{O}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \langle v, \vec{w}_1 \rangle \\ Y : \text{Vec}_{\mathcal{O}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \langle v, \vec{w}_2 \rangle \\ Z : \text{Vec}_{\mathcal{O}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \langle v, \vec{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} X(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_1 \rangle \\ Y(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_2 \rangle \\ Z(\vec{v}) &= \langle v, \vec{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

Al igual que todas las funciones que toman valores reales, las funciones coordenadas pueden ser sumadas y multiplicadas, tanto unas con otras, como con números reales. En particular, expresiones como $X^2 + XY$, o $XY - YZ$, tienen sentido, y definen nuevas funciones que toman valores reales.

Definición 0.1. Una forma cuadrática Q (en tres variables) es una expresión de la forma:

$$aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$$

Dicha expresión define una función de $\text{Vect}_{\mathcal{O}}$ en \mathbb{R} . Usualmente no haremos distinción entre la expresión y la función que define. En ocasiones también escribiremos $Q(\vec{v})$ para referirnos a $(aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2)(\vec{v})$.

En clase demostramos la siguiente proposición.

Proposición 0.1. Sea $aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$ una forma cuadrática. Entonces existe una transformación lineal T , que es autoadjunta, y tal que para todo vector \vec{v} se cumple que:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = (aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2)(\vec{v})$$

Más aún, la matriz de la transformación T en la base β está dada por:

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & d & \frac{e}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}$$

Dada una transformación lineal y autoadjunta T , a la forma cuadrática que resulta de la expresión $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle$ le llamaremos la *forma cuadrática asociada a T* .

Definición 0.2. Dada una forma cuadrática, $Q = aX^2 + bXY + cXZ + dY^2 + eYZ + fZ^2$, la superficie cuádrica asociada a la forma cuadrática es el conjunto de todos los puntos que tales que $Q(\vec{v}) = 1$, es decir:

$$\{\vec{v} \in \text{Vect}_{\mathcal{O}} \mid Q(\vec{v}) = 1\}$$

Definición 0.3. El plano coordenado $P_{X=k}$ con $k \in \mathbb{R}$ es el plano perpendicular a la recta generada por el vector \vec{w}_1 y que intersecta dicha recta en el punto $k\vec{w}_1$. Alternativamente lo podemos describir como el conjunto:

$$\begin{aligned} P_{X=k} &:= \{\vec{v} \mid \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle = k\} \\ &= \{k\vec{w}_1 + \lambda\vec{w}_2 + \mu\vec{w}_3 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Es decir, $P_{X=k}$ es el conjunto de todos los vectores cuya primera coordenada es c .

Análogamente podemos definir los planos $P_{Y=k}$ y $P_{Z=k}$.

Por el teorema espectral, toda forma cuadrática es equivalente a una de la forma $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ en alguna base β , por lo que basta clasificar estas formas cuadráticas y sus superficies cuádricas asociadas.

Existen tres casos diferentes:

0.2. El caso $a, b, c > 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matriz diagonal con valores propios a, b, c . Asumamos además que todos estos valores propios son positivos.

Ejercicio 0.1. Demuestra que existe una constante $K > 0$ tal que la intersección de $P_{Z=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es un punto. Es decir, demuestra que existe un único vector $\vec{v} = x\vec{w}_1 + y\vec{w}_2 + z\vec{w}_3$ que simultáneamente satisface $\langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle = K$ y que $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 1$.

Ejercicio 0.2. Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:

1. Si $|k| > K$, entonces es vacía,
2. si $|k| = K$, entonces es un único punto,
3. si $|k| < K$, entonces es una elipse.

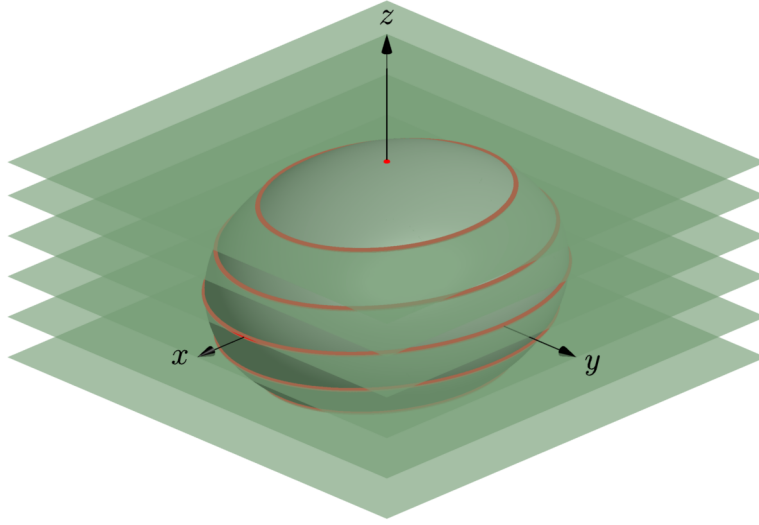


Figura 1: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k , y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} + \frac{z^2}{2} = 1$

0.3. El caso $a, b > 0$ pero $c < 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matriz diagonal con valores propios a, b, c . Asumamos además que a y b son positivos, pero c es negativo.

Ejercicio 0.3. Sea k una constante. Demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es una elipse para todo k . Demuestra además que todas estas elipses tienen la misma excentricidad y que la elipse de menor tamaño es la correspondiente a la constante $k = 0$.

Ejercicio 0.4. Demuestra que existe una constante K tal que la intersección de $P_{Y=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q son dos rectas.

Ejercicio 0.5. Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{Y=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:

1. Si $|k| > K$, una hipérbola, que abre en la dirección del eje z
2. si $|k| = K$, dos rectas
3. si $|k| < K$, una hipérbola, que abre en la dirección del eje y .

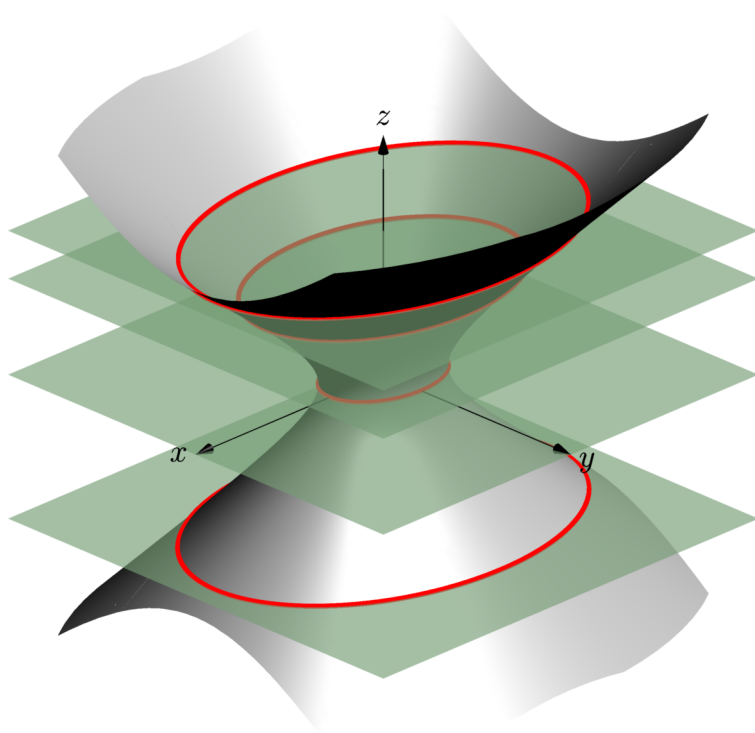


Figura 2: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k , y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

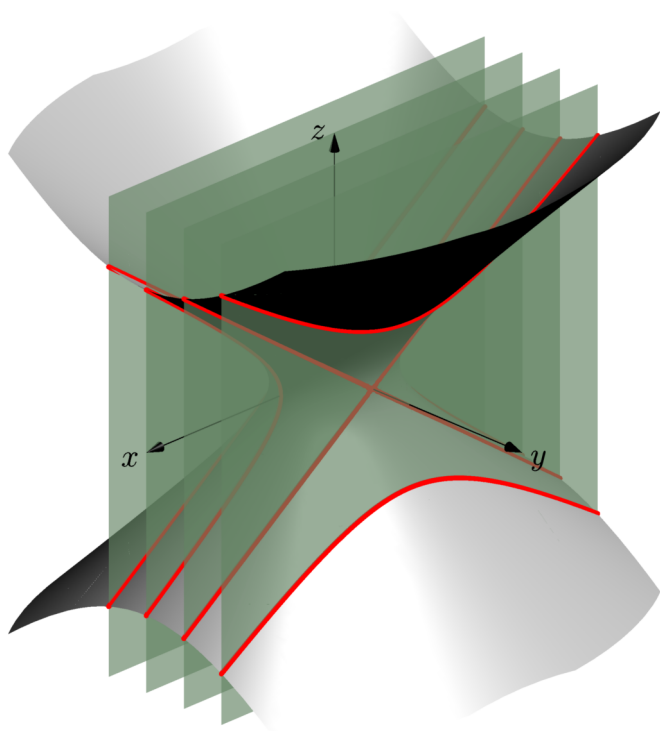


Figura 3: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k , y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} + \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

0.4. El caso $a > 0$ pero $b, c < 0$:

Sea Q una forma cuadrática tal que $Q(\vec{v}) = (aX^2 + bY^2 + cZ^2)(\vec{v})$, es decir, su transformación adjunta asociada T tiene una matriz diagonal con valores propios a, b, c . Asumamos además que a es positivo, pero b y c son negativos.

Ejercicio 0.6. Sea k una constante. Demuestra que la intersección de $P_{Z=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es una hipérbola para todo k .

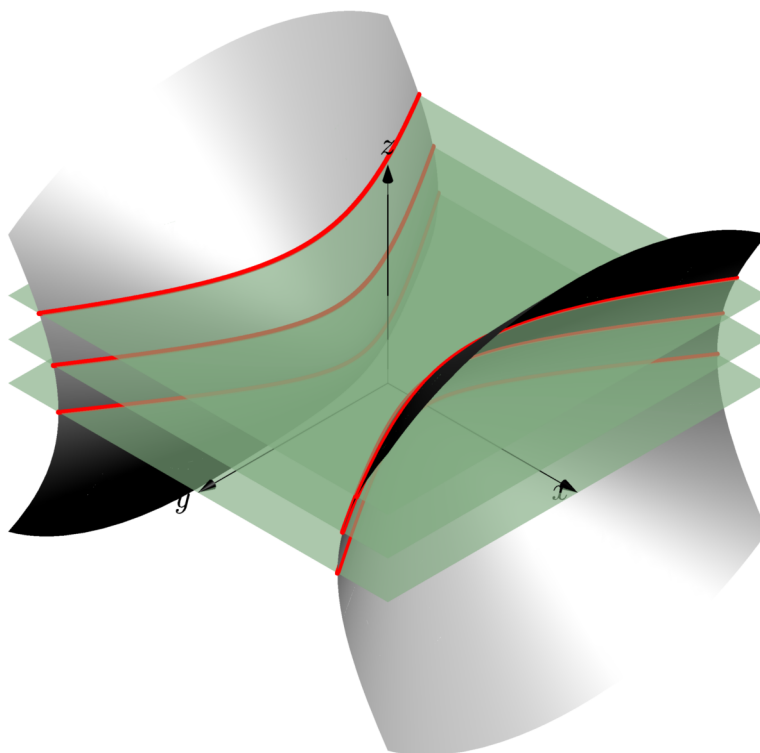


Figura 4: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k , y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} - \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$

Ejercicio 0.7. Demuestra que existe una constante K tal que la intersección de $P_{X=K}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es un punto.

Ejercicio 0.8. Sea k una constante, demuestra que la intersección de $P_{X=k}$ con la superficie cuádrica asociada a Q es:

1. Si $|k| > K$, una elipse.
2. si $|k| = K$, un punto
3. si $|k| < K$ vacía.

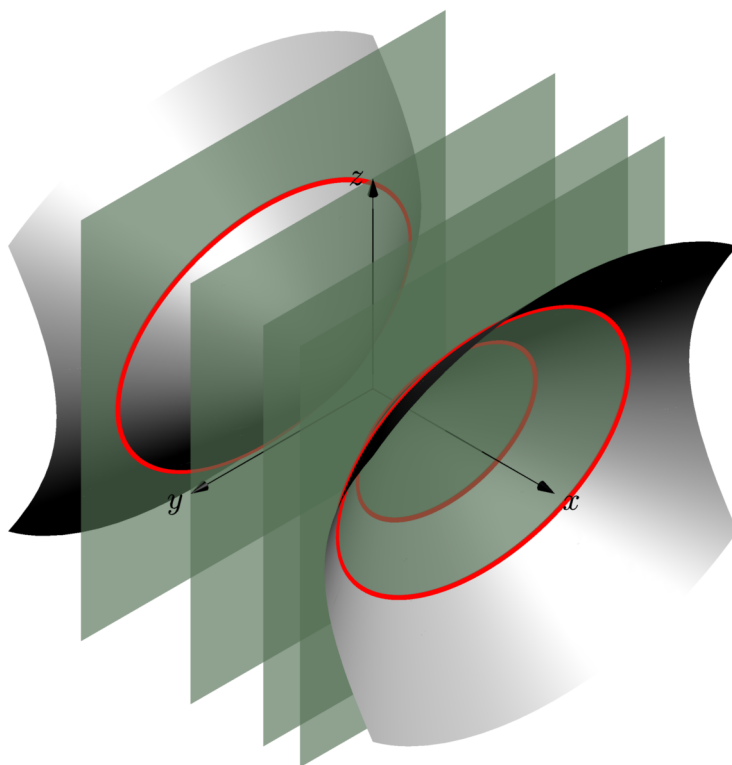


Figura 5: Planos $P_{Z=k}$ para diferentes constantes k , y sus intersecciones con la superficie cuádrica dada por $\frac{x^2}{5} - \frac{3y^2}{10} - \frac{z^2}{2} = 1$