- Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques cláramente que lo estás usando.
- Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible, no es necesario que utilices símbolos lógicos.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos	2	8	8	13	3	5	3	42
Puntaje								

Nombre:Juan Andrés Murillo Herrera

En lo sucesivo, fijemos una base ortonormal $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Además, fijemos el volumen V que cumple que $V(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = 1$. Recordemos que en clase definimos las *funciones coordenadas* asociadas a la base β como:

$$X(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_1 \rangle$$
$$Y(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_2 \rangle$$
$$Z(\vec{v}) = \langle v, \vec{w}_3 \rangle$$

Sea Q la forma cuadrática:

$$-\frac{X^2}{8} - \frac{3X}{4}Y - \frac{XZ}{2}\sqrt{6} - \frac{5Y^2}{8} - \frac{Z^2}{4}$$

Sea $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

El objetivo es simplificar la forma cuadrática Q y deducir qué tipo de superficie cuádrica es la superficie $Q(\vec{v}) = 1$.

1. (2 Puntos) Encuentra una transformación lineal y autoadjunta T tal que para todo vector $\vec{v}$ se cumple que:
$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = Q(\vec{v})$$

   Las siguientes dos preguntas (preguntas 2 y 3) son dos maneras distintas de encontrar los valores propios de T. Valen la misma cantidad de puntos y puedes hacer cualquiera de las dos:

2. (a) (2 Puntos) Encuentra un vector $\vec{v}_1$ tal que $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$
   Esto implica que λ_1 es un valor propio de T y que $\vec{v}_1$ es un vector propio.
   (b) (2 Puntos) Encuentra una base ortonormal $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$ tal que $\vec{z}_1$ es paralelo a $\vec{v}_1$.
   (c) (2 Puntos) Calcula la matríz $[T]_\gamma$
   (d) (2 Puntos) Calcula el polinomio característico de T a partir de la matriz $[T]_\gamma$

3. (8 Puntos) Calcula el polinomio característico de T a partir de la matriz $[T]_\beta$

4. (a) (3 Puntos) Encuentra los tres valores propios de T: λ_1, λ_2 y λ_3
   (b) (3 Puntos) Encuentra tres vectores propios correspondientes a los tres valores propios de T:
$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$$
$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$$
$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$$

(c) (1 Pt) Verifica que los tres vectores anteriores son ortogonales y obtén una base ortonormal δ a partir de ellos.

(d) (4 Puntos) Calcula la matríz $[T]_\delta$
Sean $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ las coordenadas en la base δ.

(e) (2 Puntos) Expresa Q en las coordenadas $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$.

5. (3 Puntos) ¿Qué tipo de superficie cuádrica es la superficie dada por $Q(\vec{v}) = 1$? ¿elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas?

6. (5 Puntos) Esboza las intersecciones de la superficie anterior con los planos $P_{\tilde{X}=0}$, $P_{\tilde{Y}=0}$ y $P_{\tilde{Z}=0}$.

7. (3 Puntos) Sea T una transformación autoadjunta con forma cuadrática asociada:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

.

Dado un ángulo α, sean:

$$\begin{aligned} \vec{z}_{1\alpha} &= \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{2\alpha} &= -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{3\alpha} &= \vec{w}_3 \end{aligned}$$

y sea $\gamma_\alpha := \{z_{1\alpha}, z_{2\alpha}, z_{3\alpha}\}$ la base ortonormal que se obtiene de la base β al rotar $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$ un ángulo α. Sean $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ las coordenadas con respecto a la base γ_α, es decir:

$$\begin{aligned} X_\alpha(\vec{v}) =& \langle \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{1\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Y\alpha(\vec{v}) =& \langle -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{2\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Z_\alpha(\vec{v}) =& \langle \vec{w}_3, \vec{v} \rangle = \langle z_{3\alpha}, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $a = b$
2. Para todo ángulo α, la forma cuadrática $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle$ en las coordenadas $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ tiene los mismos coeficientes que en las coordeandas X, Y, Z, es decir: $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX_\alpha^2 + bY_\alpha^2 + cZ_\alpha^2$