

-
- Puedes usar cualquier teorema o proposición demostrado en clase siempre y cuando especifiques claramente que lo estás usando.
 - Justifica todas tus respuestas y afirmaciones. Redacta tus argumentos de la manera más clara posible, no es necesario que utilices símbolos lógicos.
-

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	Total
Puntos	2	8	8	13	3	5	3	42
Puntaje								

Nombre: José Alfredo Arce Arce

En lo sucesivo, fijemos una base ortonormal $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Además, fijemos el volumen V que cumple que $V(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = 1$. Recordemos que en clase definimos las *funciones coordenadas* asociadas a la base β como:

$$X(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle$$

$$Y(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle$$

$$Z(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle$$

Sea Q la forma cuadrática:

$$-\frac{17X^2}{32} - \frac{5X}{16}\sqrt{3}Y - \frac{21X}{8}Z - \frac{27Y^2}{32} + \frac{7Y}{8}\sqrt{3}Z - \frac{17Z^2}{8}$$

Sea $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

El objetivo es simplificar la forma cuadrática Q y deducir qué tipo de superficie cuádrica es la superficie $Q(\vec{v}) = 1$.

1. (2 Puntos) Encuentra una transformación lineal y autoadjunta T tal que para todo vector \vec{v} se cumple que:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = Q(\vec{v})$$

Las siguientes dos preguntas (preguntas 2 y 3) son dos maneras distintas de encontrar los valores propios de T . Valen la misma cantidad de puntos y puedes hacer cualquiera de las dos:

2. (a) (2 Puntos) Encuentra un vector \vec{v}_1 tal que $T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$
 Esto implica que λ_1 es un valor propio de T y que \vec{v}_1 es un vector propio.
 (b) (2 Puntos) Encuentra una base ortonormal $\gamma = \{\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3\}$ tal que \vec{z}_1 es paralelo a \vec{v}_1 .
 (c) (2 Puntos) Calcula la matriz $[T]_\gamma$
 (d) (2 Puntos) Calcula el polinomio característico de T a partir de la matriz $[T]_\gamma$
3. (8 Puntos) Calcula el polinomio característico de T a partir de la matriz $[T]_\beta$
4. (a) (3 Puntos) Encuentra los tres valores propios de T : λ_1 , λ_2 y λ_3
 (b) (3 Puntos) Encuentra tres vectores propios correspondientes a los tres valores propios de T :

$$T(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1$$

$$T(\vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$T(\vec{v}_3) = \lambda_3 \vec{v}_3$$

- (c) (1 Pt) Verifica que los tres vectores anteriores son ortogonales y obtén una base ortonormal δ a partir de ellos.
- (d) (4 Puntos) Calcula la matriz $[T]_\delta$
Sean $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ las coordenadas en la base δ .
- (e) (2 Puntos) Expresa Q en las coordenadas $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$.
5. (3 Puntos) ¿Qué tipo de superficie cuádrica es la superficie dada por $Q(\vec{v}) = 1$? ¿elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas?
6. (5 Puntos) Esboza las intersecciones de la superficie anterior con los planos $P_{\tilde{X}=0}$, $P_{\tilde{Y}=0}$ y $P_{\tilde{Z}=0}$.
7. (3 Puntos) Sea T una transformación autoadjunta con forma cuadrática asociada:

$$\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX^2 + bY^2 + cZ^2$$

.

Dado un ángulo α , sean:

$$\begin{aligned}\vec{z}_{1\alpha} &= \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{2\alpha} &= -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2 \\ \vec{z}_{3\alpha} &= \vec{w}_3\end{aligned}$$

y sea $\gamma_\alpha := \{z_{1\alpha}, z_{2\alpha}, z_{3\alpha}\}$ la base ortonormal que se obtiene de la base β al rotar \vec{w}_1 y \vec{w}_2 un ángulo α . Sean $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ las coordenadas con respecto a la base γ_α , es decir:

$$\begin{aligned}X_\alpha(\vec{v}) &= \langle \cos(\alpha)\vec{w}_1 + \sin(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{1\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Y_\alpha(\vec{v}) &= \langle -\sin(\alpha)\vec{w}_1 + \cos(\alpha)\vec{w}_2, \vec{v} \rangle = \langle z_{2\alpha}, \vec{v} \rangle \\ Z_\alpha(\vec{v}) &= \langle \vec{w}_3, \vec{v} \rangle = \langle z_{3\alpha}, \vec{v} \rangle\end{aligned}$$

Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $a = b$
2. Para todo ángulo α , la forma cuadrática $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle$ en las coordenadas $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ tiene los mismos coeficientes que en las coordenadas X, Y, Z , es decir: $\langle \vec{v}, T(\vec{v}) \rangle = aX_\alpha^2 + bY_\alpha^2 + cZ_\alpha^2$