Tarea IV

Román Contreras

21 de marzo de 2018

1. Volumen orientado

1.1. Algunas propiedades del volumen

En lo que sigue, fijemos una base ortonormal $\beta = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ y asumamos que el volumen satisface

$$V(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) = 1$$

además de ser multineal y alternante.

Usando la base ortonormal identificaremos un vector con sus coordenadas dadas por la base β, es decir:

Si $\vec{v} = a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 + c\vec{w}_3$ escribiremos simplemente $\vec{v} = (a, b, c)$, así mismo, al utilizar el volumen, para que la notación sea mas compacta, escribiremos las coordenadas de un vector de manera vertical, es decir: $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Además, las coordenadas de $\vec{v}$ se pueden recuperar con los productos interiores:

$$\begin{aligned} a =& \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle \\ b =& \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle \\ c =& \langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle \end{aligned}$$

Recuerda que en clase demostramos que

$$\begin{aligned} V\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} =& gA\begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix} + -hA\begin{pmatrix} a & d \\ c & f \end{pmatrix} + iA\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix} \\ =& g(bf - ec) - h(af - cd) + i(ae - db) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.1. *Demuestra que*

$$\begin{aligned} V\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} =& a(ei - hf) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ =& -d(bi - hc) + e(ai - cg) - ah - bg) \end{aligned}$$

Ejercicio 1.2. *Definamos el volumen de tres vectores*

$$\begin{aligned}\vec{v} =&(a, b, c)\\ \vec{w} =&(d, e, f)\\ \vec{z} =&(g, h, i)\end{aligned}$$

mediante la fórmula:

$$V(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) = V \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = g(bf - ec) - h(af - cd) + i(ae - db)$$

.

En clase demostramos algunas de las propiedades que cumple el volumen así definido. Demuestra las propiedades que faltaban, es decir, es lineal en las últimas dos entradas, y es alternante.

Ejercicio 1.3. *Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ tres vectores. Demuestra que si los tres vectores son linealmente dependientes entonces $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 0$.*

Ejercicio 1.4. *Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dos vectores linealmente independientes. Argumenta por qué debe existir al menos un vector $\vec{z}$ tal que $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{z}) \neq 0$.*

Ejercicio 1.5. *Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dos vectores linealmente independientes. Usando el ejercicio anterior, demuestra que para cada número real $r \in \mathbb{R}$ existe al menos un vector $\vec{z}$ tal que $V(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{z}) = r$.*

Ejercicio 1.6. *Demuestra que*

$$V \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.7. *Sean $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ tres vectores dados por:*

$$\begin{aligned}\vec{v} =&(a, b, c)\\ \vec{w} =&(d, e, f)\\ \vec{z} =&(g, h, i)\end{aligned}$$

Demuestra que:

$$\begin{aligned}\vec{V}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z})w_1 =&(ei - fh)\vec{v} + (ch - bi)\vec{w} + (bf - ce)\vec{z}\\ \vec{V}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z})w_2 =&(di - fg)\vec{v} + (ai - cg)\vec{w} + (af - cd)\vec{z}\\ \vec{V}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z})w_3 =&(dh - eg)\vec{v} + (ah - bg)\vec{w} + (ae - bd)\vec{z}\end{aligned}$$

En particular, demuestra que si $V(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) \neq 0$, entonces los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ se pueden expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$.

Ejercicio 1.8. *Demuestra que si $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ son tres vectores tales que $V(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) \neq 0$ entonces cualquier otro vector es combinación lineal de esos tres vectores.*