

TEORIA STEROWANIA 2
Sprawozdanie z laboratorium nr 6
Systemy dyskretne



Roman Nowak, WEAlIB, Automatyka i Robotyka

26 maja 2024

Spis treści

1. Cel ćwiczenia	2
2. Przebieg ćwiczenia	2
2.1. Zadanie 1	2
2.2. Zadanie 2	4
2.3. Zadanie 3	7
2.4. Zadanie 4	9
3. Wnioski	11

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi własnościami układów dynamicznych dyskretnych.

Żeby to osiągnąć należy wykonać kilka zadań, podanych w skrypcie [1]

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Zadanie 1

Zamodelować w Simulinku system opisany równaniem 1 z macierzami A, B oraz C. Na wejście systemu podłączyć ekstrapolator rzędu zerowego. Obliczyć macierze $A^+B^+C^+$ odpowiadające systemowi określone przez 2 przy podanym parametrze h . Przeanalizować zachowanie układu dyskretno-ciągłego w zależności od h .

Układ ciągły opisany jest równaniami:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C(x) \end{cases} \quad (1)$$

Równania rekurencyjne, opisujące układ dyskretny:

$$\begin{cases} \dot{x}^+(i+1) = A^+x^+(i) + B^+u^+(i) \\ y^+(i) = C^+(i) \end{cases} \quad (2)$$

Podane przez prowadzącego macierze, o których mowa w poleceniu:

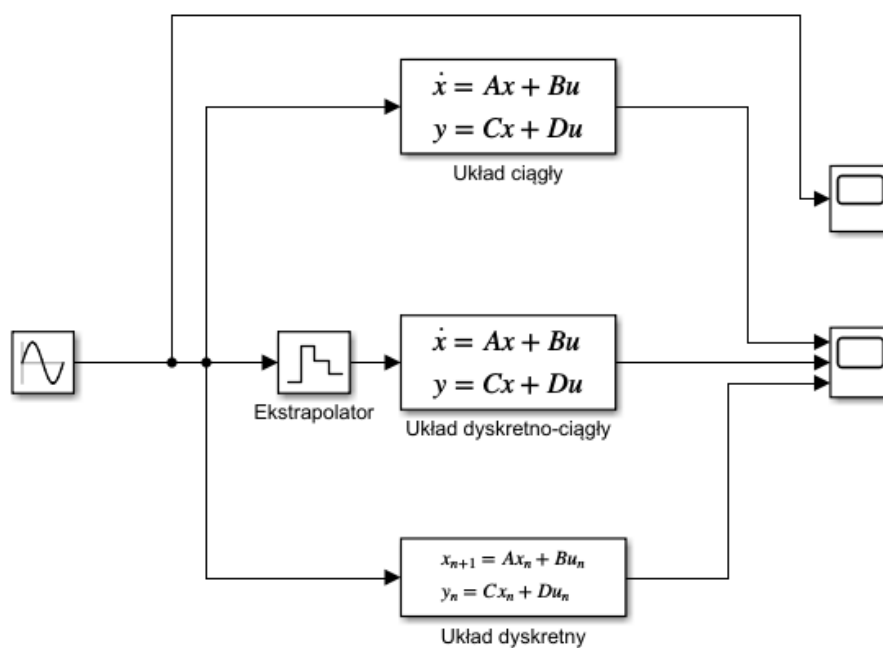
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W pierwszej kolejności należy obliczyć wartości macierzy ze wzoru (2). W tym celu wykorzystujemy wzory:

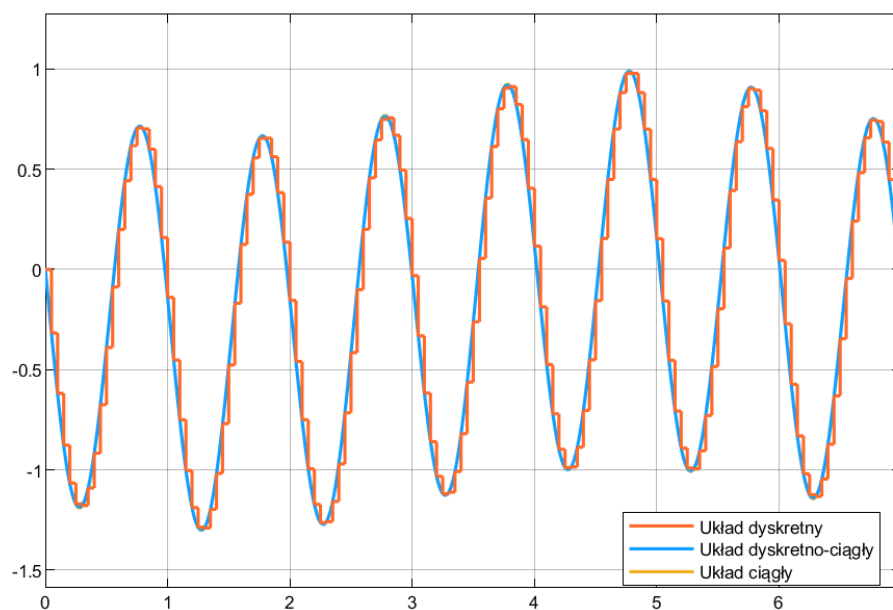
$$A^+ = e^{At} = Pe^{Jh}P^{-1} \quad (3)$$

$$B^+ = \int_0^h e^{At} dt \quad (4)$$

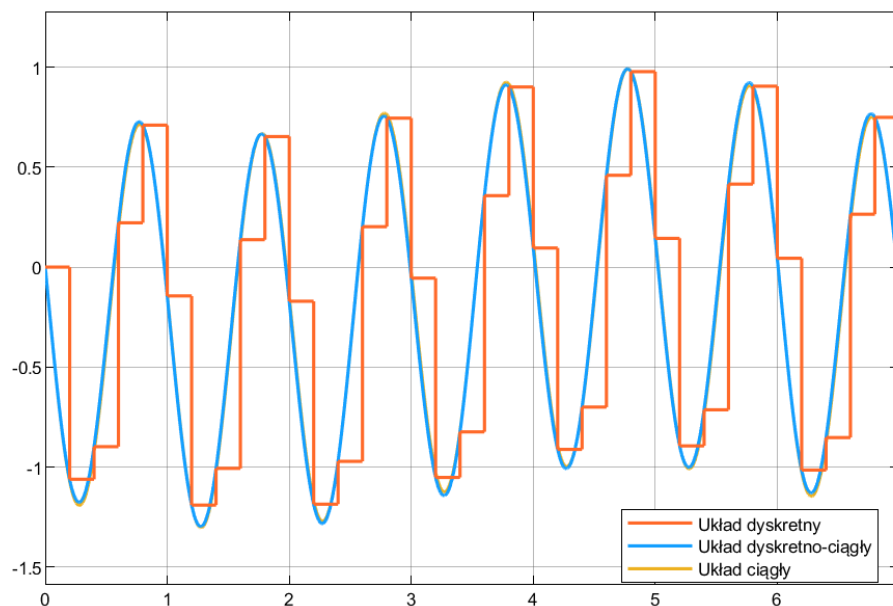
$$C^+ = C \quad (5)$$



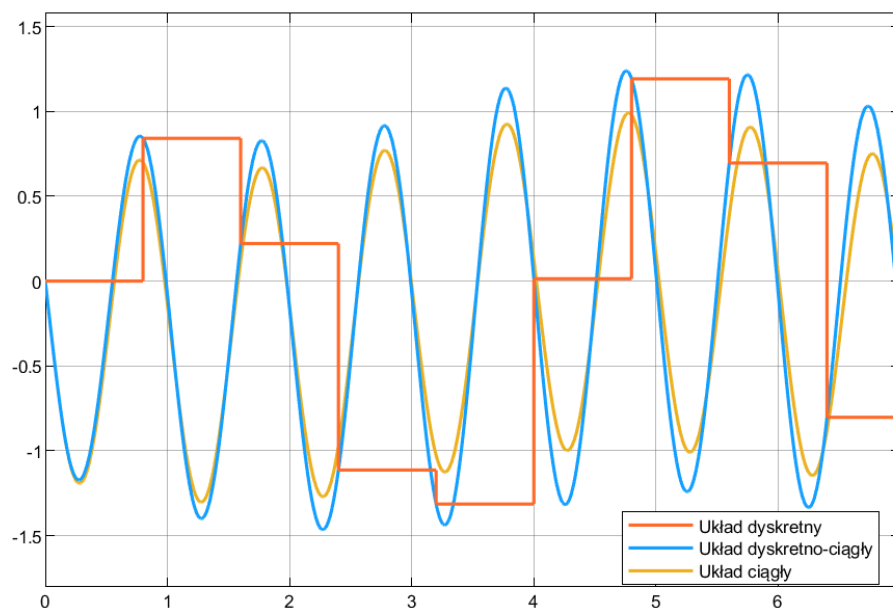
Rys. 1 - Układy ciągły, dyskretny i dyskretno-ciągły, zamodelowane w Simulinku



Rys. 2 - Wynik działania symulacji dla $h=0.05$.



Rys. 3 - Wynik działania symulacji dla $h=0.2$.



Rys. 4 - Wynik działania symulacji dla $h=0.8$. Łatwe do zaobserwowania zjawisko aliasingu.

2.2. Zadanie 2

Przeanalizować zachowanie się schematów różnicowych dla macierzy systemu ciągłego:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

w zależności od wielkości h i porównać rozwiązanie numeryczne z rozwiązaniem analitycznym układu ciągłego w czasie.

Analizowane będą trzy różne schematy różnicowe:

- Eulera z krokiem w przód: $x^+(i+1) = x^+(i) + h\dot{x}^+(i)$;
- Eulera z krokiem w tył: $x^+(i+1) = x^+(i) + h\dot{x}^+(i+1)$;
- wzór Newtona-Cotesa: $x^+(i+1) = x^+(i) + 0.5h(\dot{x}^+(i) + \dot{x}^+(i+1))$.

Dla układu (1) dla kolejnych metod otrzymamy równania:

$$x^+(i+1) = (I + hA)x^+(i) + hBu^+(i) \quad (6)$$

$$x^+(i+1) = (I - hA)^{-1}x^+(i) + (I - hA)^{-1}hBu^+(i+1) \quad (7)$$

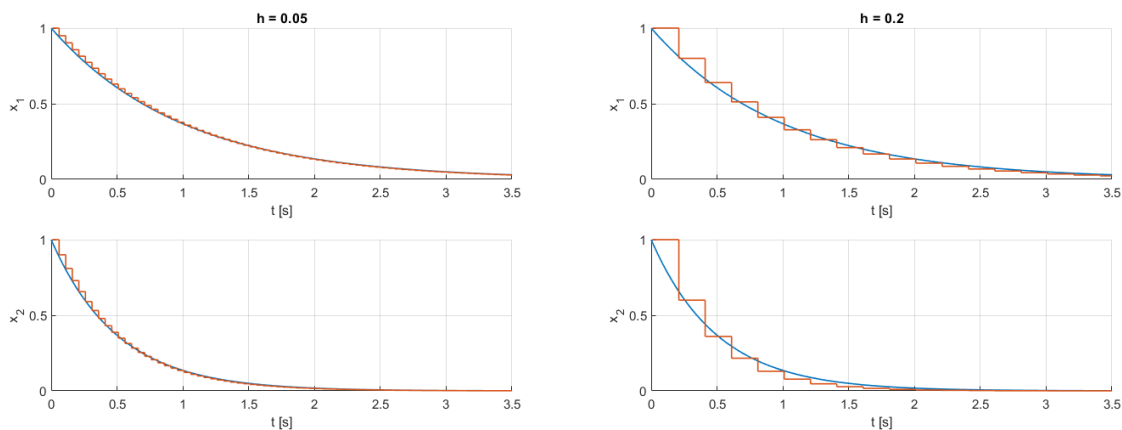
$$x^+(i+1) = (I - 0.5hA)^{-1}(I + 0.5hA)x^+(i) + 0.5(I - 0.5hA)^{-1}B(u^+(i+1) + u^+(i)) \quad (8)$$

W celach porównawczych, w pierwszej kolejności obliczymy analityczne rozwiązanie układu ciągłego 1 z macierzą A. Wynosi ono:

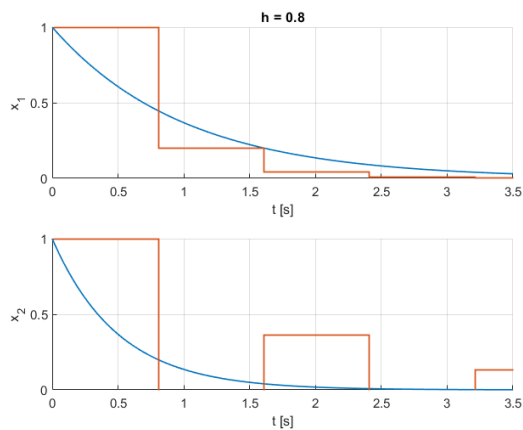
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{-t}x_{01} \\ \dot{x}_2 = e^{-2t}x_{02} \end{cases}$$

Na kolejnych wykresach wyrysowano wartości zmiennych stanu w czasie, dla układu dyskretnego (linia czerwona) o różnych wartościach h oraz ciągłego (linia niebieska).

Metoda Eulera z krokiem w przód

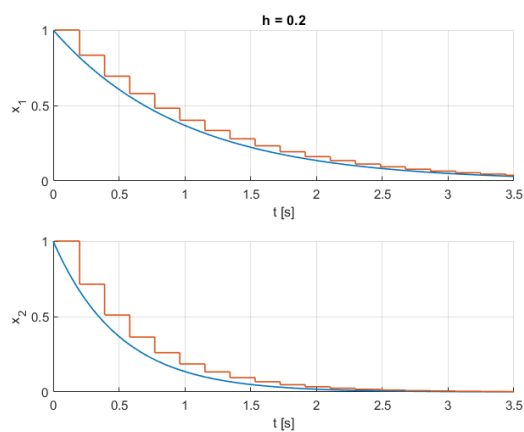
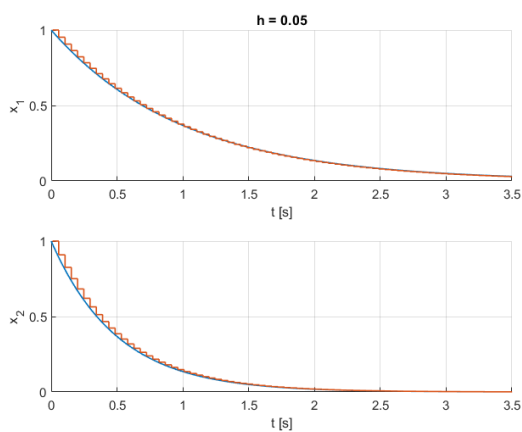


Rys. 5 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.05$. **Rys. 6** - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.2$.

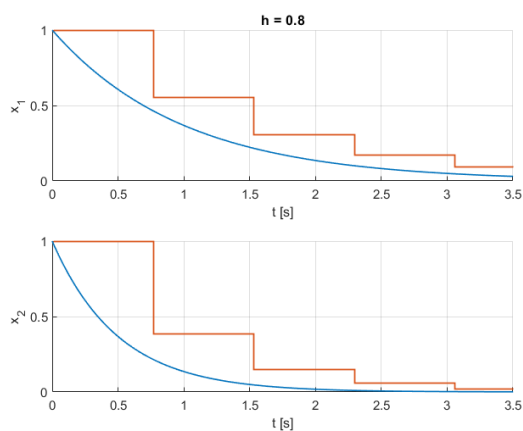


Rys. 7 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.8$.

Metoda Eulera z krokiem w tył

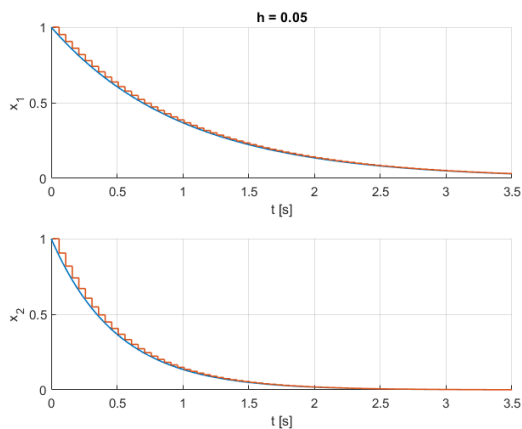


Rys. 8 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.05$. **Rys. 9** - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.2$.

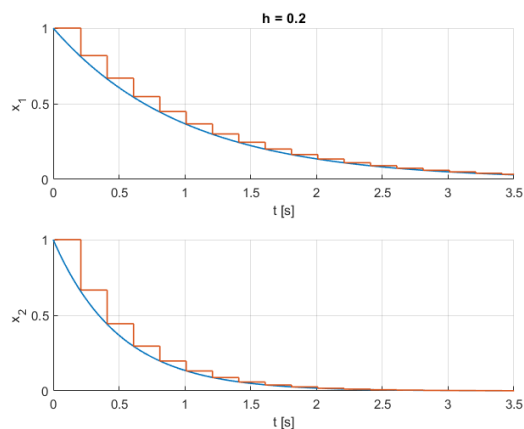


Rys. 10 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.8$.

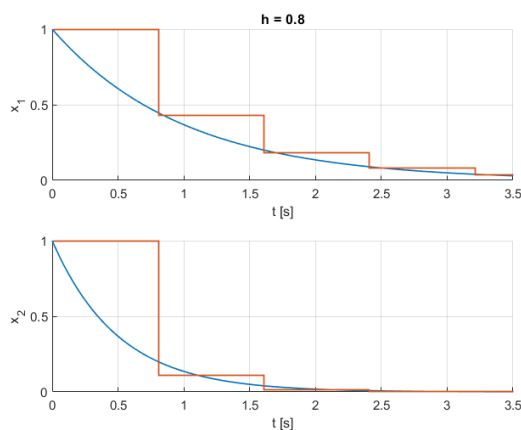
Wzór Newtona-Cotesa



Rys. 11 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.05$.



Rys. 12 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.2$.



Rys. 13 - Zmienne stanu w czasie, dla $h = 0.8$.

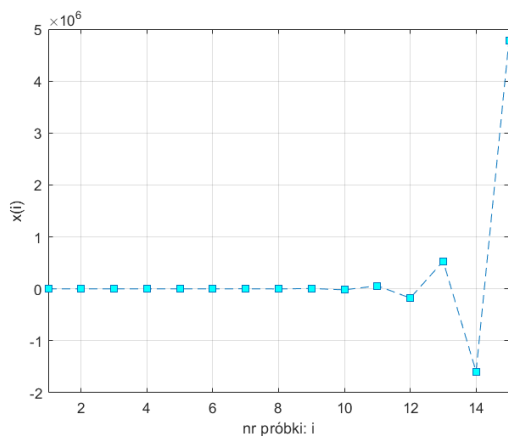
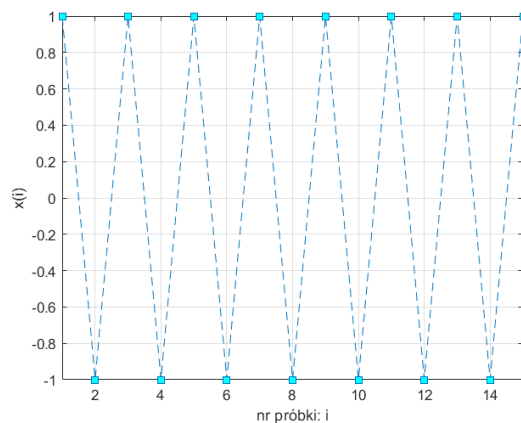
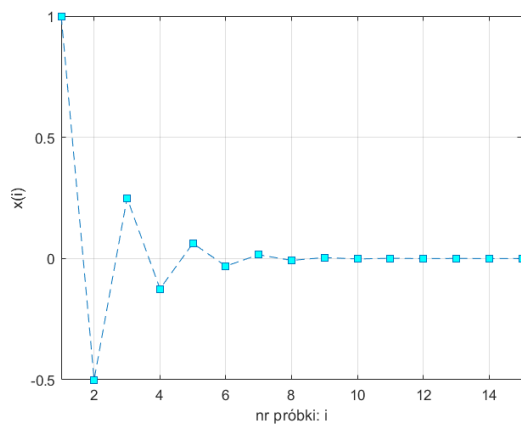
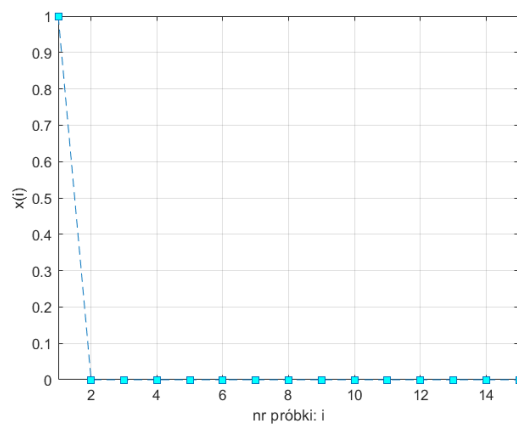
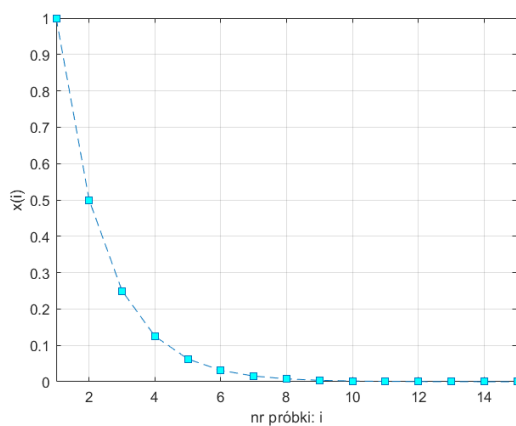
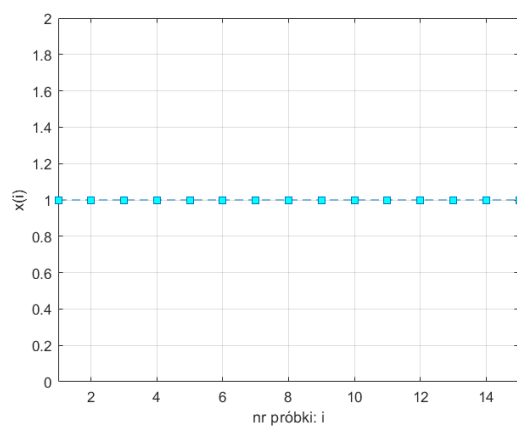
2.3. Zadanie 3

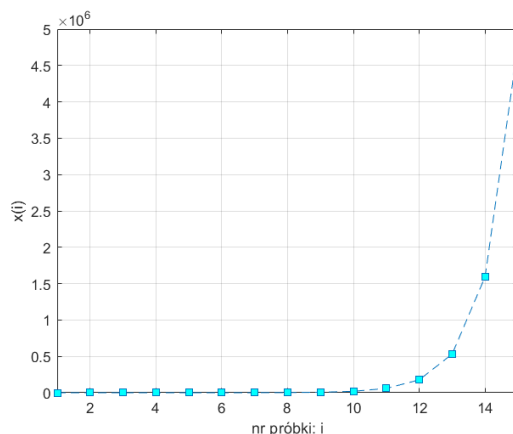
Przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego:

$$x(k+1) = \lambda x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

w zależności od parametru λ

$$\lambda < -1, \lambda = -1, \lambda \in (-1, 0), \lambda = 0, \lambda \in (0, 1), \lambda = 1, \lambda > 1$$

Rys. 14 - $\lambda < -1$; $\lambda = -3$.Rys. 15 - $\lambda = -1$.Rys. 16 - $\lambda \in (-1, 0)$; $\lambda = -0.5$.Rys. 17 - $\lambda = 0$.Rys. 18 - $\lambda \in (0, 1)$; $\lambda = 0.5$.Rys. 19 - $\lambda = 1$.

Rys. 20 - $\lambda > 1$; $\lambda = 3$.

2.4. Zadanie 4

Napisać dwa programy w Matab-ie, obliczające wartość i -tego wyrazu ciągu Fibonacciego (gdzie i jest dowolną liczbą naturalną większą od 2). Jeden stosujący sposób rekurencyjny, drugi zaś korzystający z podanego wzoru (10). Porównać szybkość działania obu programów, dla różnych wartości i . Sprawdzić punkt stały odwzorowania.

Wzór na i -ty wyraz ciągu ma postać:

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i \right) \quad (10)$$

Rekurencyjną metodę obliczania n -tego elementu ciągu Fibonacciego, realizuje funkcja:

```

1 function f = fibonacci_rec(n)
2     % Sprawdzenie czy n jest nieujemna liczba całkowita
3     if n < 0 || mod(n,1) ~= 0
4         error('Wejście musi być liczba naturalna!');
5     end
6
7     if n == 0
8         f = 0;
9     elseif n == 1
10        f = 1;
11    else
12        % Rekurencyjne wywołanie funkcji
13        f = fibonacci_rec(n-1) + fibonacci_rec(n-2);
14    end
15 end

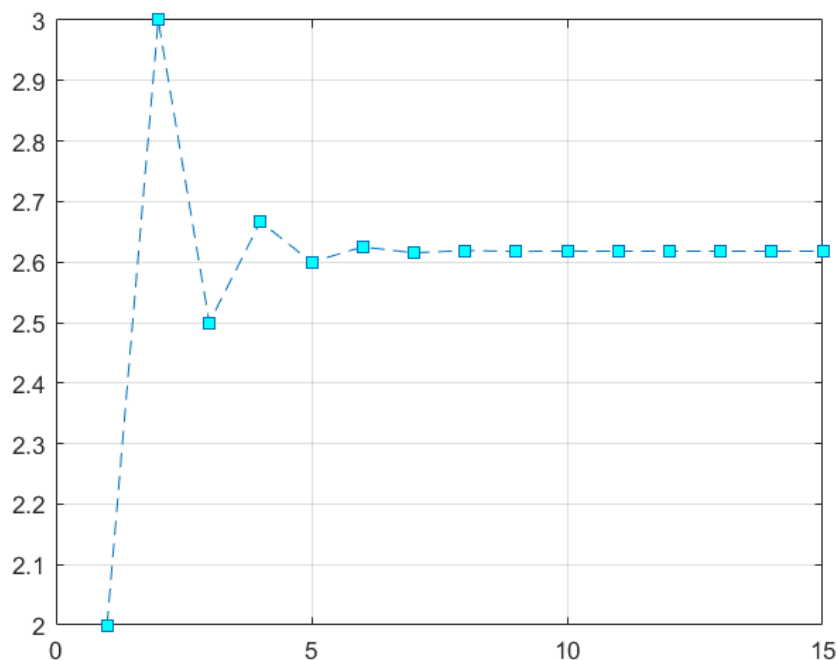
```

Tab. 1 - Czasy wykonywania się obliczeń, dla obu metod obliczania n -tego wyrazu ciągu Fibonacciego.

n	metoda rekurencyjna	wzór (10)
10	0.0034	0.0027
25	0.0205 s	0.0034
40	15.7548 s	0.0047

Punkt stały odwzorowania, będziemy mogli zaobserwować na wykresie funkcji:

$$F(n) = 1 + \frac{1}{\frac{x_{i+1}}{x_i}} \quad (11)$$



Rys. 21 - Odwzorowanie 11.

Jak widać na wykresie, punkt stały, jest nieco większy od 1.6. W przybliżeniu można przyjąć, że wynosi od ok. 2.61.

3. Wnioski

- System dyskretny w czasie można opisać za pomocą równań rekurencyjnych. Możemy się z nimi spotkać nie tylko przy opisie układów sterowania działających na próbkowanych wartościach wejściowych i wyjściowych, ale też na przykład przy obliczeniach numerycznych – rozwiązywaniu równań różniczkowych
- Dobór okresu próbkowania jest bardzo istotny przy dyskretyzacji układów ciągłych. Zbyt często próbkowany sygnał wpływa na zwiększenie złożoności obliczeniowej. Znacznie gorsze efekty, może mieć jednak zbyt niski okres próbkowania. Kiedy nie spełnia on założeń twierdzenia o próbkowaniu, powstaje zjawisko aliasingu, które można łatwo zaobserwować na Rys. 4. Mimo, że próbkujemy sygnał o większej częstotliwości, próbki odpowiadają również sinusoidzie o częstotliwości mniejszej.
- Zwiększenie okresu próbkowania negatywnie wpływa na dokładność i niezawodność numerycznych rozwiązań równań różniczkowych dla każdej z metod. Jednak najlepiej, również dla dużych okresów działała metoda, oparta na wzorze Newtona-Cotesa.
- Analizowany w zadaniu trzecim układ dyskretny jest stabilny dla $\lambda \in (-1, 1)$. Dla $\lambda = -1$, znajduje się na granicy stabilności.
- Wyznaczanie wartości wyrazów ciągu Fibonacciego, za pomocą analitycznego wzoru, jest wydajniejsze od metody rekurencyjnej i charakteryzuje się złożonością niższego rzędu, co szczególnie dobrze widać przy dużych wartościach n .

Literatura

- [1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, *Teoria sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*, 2015, wyd. 2 poprawione.