TEORIA STEROWANIA 2

Sprawozdanie z laboratorium nr 2

Częstotliwościowe kryteria stabilności

Roman Nowak, WEAIiIB, Automatyka i Robotyka

1 kwietnia 2024

Spis treści

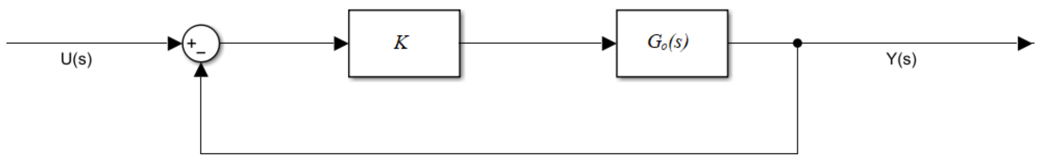
1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie polega na wykorzystaniu jednego z częstotliwościowych kryteriów stabilności - kryterium Nyquista, do zbadania układów:

a) Czwartego rzędu bez opóźnienia

b) Pierwszego rzędu z opóźnieniem

w zamkniętym układzie regulacji z regulatorem proporcjonalnym (rys. 1).



Rys. 1 - Zamknięty układ regulacji.

Celem ćwiczenia jest zastosowanie kryterium do określenia przedziału wzmocnienia K, dla którego każdy z układów jest stabilny.

Twierdzenie Nyquista
Źródło: [1]

Układ zamknięty (rys. 1), który:

- Jest sterowalny i obserwowalny oraz wszystkie jego sygnały są skalarne;
- Stopień licznika transmitancji opisującej układ po otwarciu (przecięciu pętli sprzężenia zwrotnego), jest mniejszy od stopnia mianownika, równego n;
- Wielomian charakterystyczny - mianownik transmitancji nie ma zer na osi urojonej;
- Wielomian charakterystyczny posiada m pierwiastków (z krotnościami), o częściach rzeczywistych dodatnich,

jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\underset{-\infty\leq\omega\leq\infty}{\Delta} arg(1+G_o(j\omega)) = 2m\pi \quad (1)$$

Gdzie $G_o(j\omega)$ to transmitancja widmowa układu otwartego.

Dzięki kryterium Nyqiusta możemy więc na podstawie transmitancji układu otwartego wnioskować o stabilności układu zamkniętego.

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Układ czwartego rzędu bez opóźnienia

Transmitancja $G_o(s)$ badanego układu

$$G_o(s) = \frac{s+1}{0,01s^4 + 0,5s^3 + 3s^2 - 10s + 10} \tag{2}$$

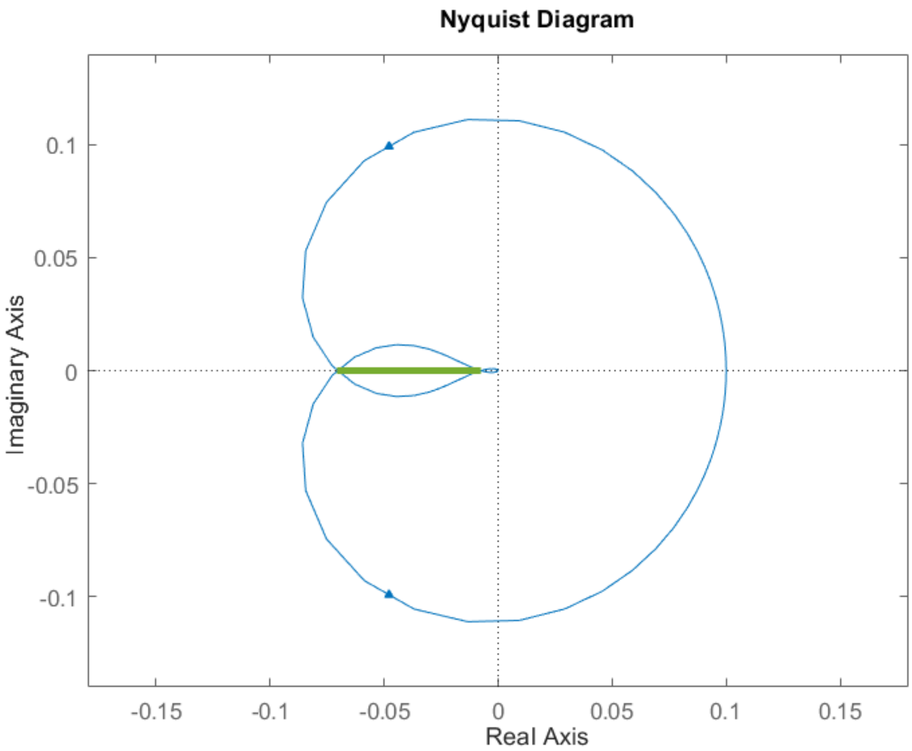
Do obliczenia wartości wzmocnień krytycznego użyto programu w Matlabie:

```
clear;
licz = [1 1];
mian = [0.01 0.5 3 -10 10];
Go = tf(licz, mian);

Gz = feedback(Go, 1);
% Bieguny ukladu otwartego
Go_poles = pole(Go)
is_stable = isstable(Gz)

syms s w real
% Transmitancja operatorowa jako funkcja symboliczna
Go_s(s) = (s + 1) / (0.01 * s^4 + 0.5 * s^3 + 3 * s^2 - 10 * s + 10);
% Transmitancja widmowa
Gw = Go_s(1j*w);
% Czesc rzeczywista transmitancji widmowej
P(w) = real(Gw);
% Czesc urojona transmitancji widmowej
Q = imag(Gw);
% Wartosci pulsacji, w jakich Q jest rowne zero
w0 = solve(Q == 0);
% Wartosci P, dla ktorych Q == 0
zero_points = double(P(w0));
% Pozstawienie tylko unikalnych pierwiastkow po lewej stronie osi urojonej
zero_points = unique(zero_points(zero_points < 0));
% Wzmocnienia krytyczne
k_kryt1 = - 1 / zero_points(1)
k_kryt2 = - 1 / zero_points(2)
```

Szukamy zbioru wartości wzmocnień K, dla których układ zamknięty jest stabilny. W pierwszym kroku sprawdzane są bieguny układu otwartego. Dwa z nich są niestabilne. Wobec tego, dzięki wzorowi (1), wiemy, że zmiana fazy w układzie $\frac{1}{K} + \frac{G(j\omega)}{K}$ na przedziale $\omega \in (-\infty; \infty)$ musi wynosić 4π, żeby układ był stabilny. Oznacza to, że wektor zaczepiony w punkcie $(-\frac{1}{K}, 0)$ powinien wykonać dwa pełne obroty, kiedy jego koniec wodzi po linii charakterystyki amplitudowo-fazowej. Po wyrysowaniu charakterystyki Nyquista (rys. 5), widać że taki przedział istnieje i jest ograniczony.



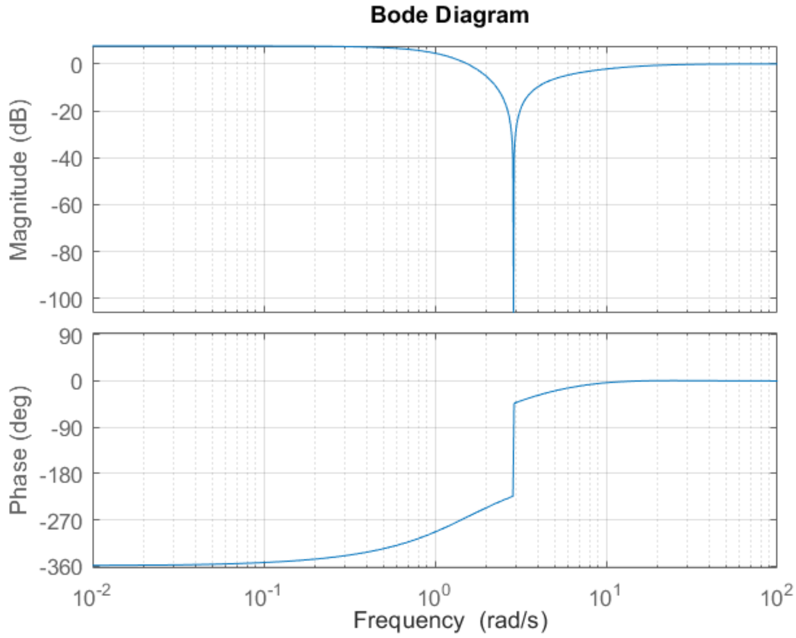
Rys. 2 - Charakterystyka amplitudowo-fazowa dla transmitancji $G_o(j\omega)$ (dla $\omega \in (-\infty; \infty)$). Zieloną linią zaznaczono przedział wartości $-\frac{1}{K}$, dla których układ zamknięty jest stabilny.

Następnie wyznaczane są miejsca zerowe, w których wykres charakterystyki przecina oś urojoną. W ten sposób uzyskujemy dokładne wartości wzmocnień krytycznych i przedział stabilności:

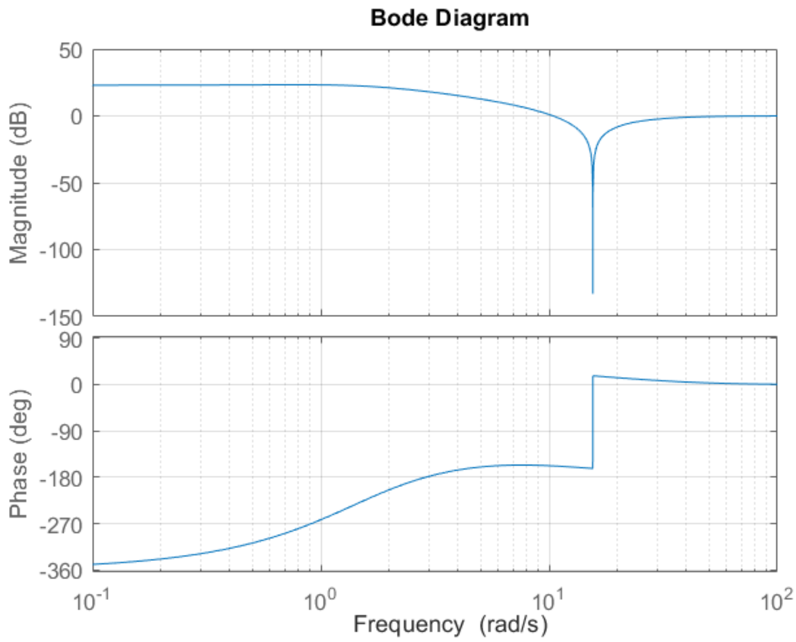
$$K \in (14,1369; 130,8631)$$

.

Na koniec wyrysowano charakterystyki Bodego, dla transmitancji $1 + K \cdot G_o(j\omega)$, dla K bliskich wzmocnieniom krytycznym.



Rys. 3 - Charakterystyki Bodego, dla $K = 14,137$. Całkowita zmiana fazy dla $\omega \in (0;\infty)$, zgodnie z oczekiwaniami jest równa 2π, co oznacza, że układ jest stabilny.



Rys. 4 - Charakterystyki Bodego, dla $K = 130,863$. Całkowita zmiana fazy dla $\omega \in (0;\infty)$, zgodnie z oczekiwaniami jest równa 2π, co oznacza, że układ jest stabilny.

Kolejnym sposobem na weryfikacje uzyskanych wyników, może być znalezienie wartości wzmocnień krytycznych w inny sposób. Na przykład, przy wykorzystaniu Matlab'owej funkcji *margin*, w celu odnalezienia dolnej granicy przedziału oraz funkcji *isstable* i iteracyjnego sprawdzania stabilności układu zamkniętego dla kolejnych wartości wzmocnienia, dopóki nie zostanie odnaleziona górna granica przedziału.

```
[k_kryt1,~] = margin(Go_s)
licz1 = k_kryt1 .* licz;
Go_s = tf(licz1, mian);
figure;
nyquist(Go_s, plotoptions);

step = 0.01;
for k = k_kryt1 + step : step : 150
    licz2 = k .* licz;
    Go_s = tf(licz2, mian);
    if isstable(feedback(Go_s, 1)) == 0
        k_kryt2 = k - step
        break
    end
end
```

Wyznaczony w ten sposób przedział stabilności to

$$K \in \langle 14.1376; 130.8576 \rangle$$

Wartości, wyznaczone za pomocą obu metod są do siebie bardzo zbliżone.

2.2. Układ z opóźnieniem

Transmitancja $G_o(s)$ badanego układu

$$G_o(s) = \frac{4e^{-0,5s}}{s+1} \tag{3}$$

Do obliczenia wartości wzmocnień krytycznego użyto programu w Matlabie:

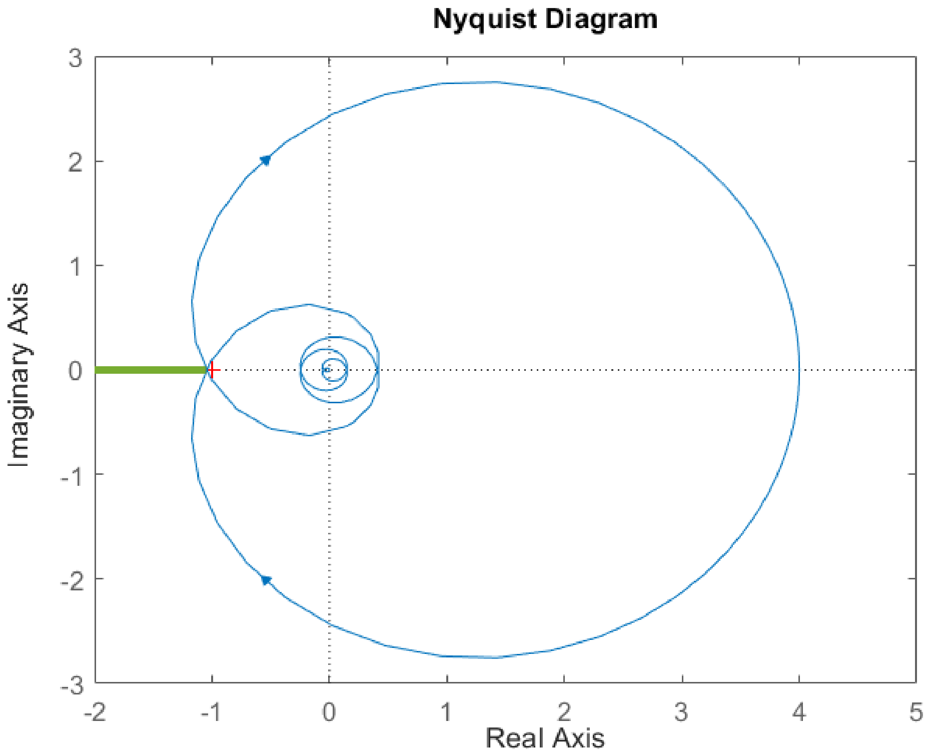
```
clear;
[del_licz, del_mian] = pade(0.5, 5);
licz = [0 4];
mian = [1 1];
[licz, mian] = series(licz, mian, del_licz, del_mian);
Go = tf(licz, mian);

Gz = feedback(Go, 1);
is_Go_stable = isstable(Go)  % otwarty stabilny
is_Gz_stable = isstable(Gz)

syms s w real
Go_s(s) = (4 * exp(-0.5 * s)) / (s + 1);
Gw = Go_s(1j*w);
P(w) = real(Gw);
Q = imag(Gw);
% Matlab nie daje rady znalezc rozwiazania symbolicznie
% Rozwiazanie numeryczne
w0 = vpasolve(Q == 0, w, -4);
zero_point = double(P(w0));

k_kryt = - 1 / zero_point;
```

Dla układu z opóźnieniem, aby układ zamknięty był stabilny, wykres charakterystyki Nyquista układu otwartego, nie może obejmować punktu $(-1,0)$. Innymi słowy, sumaryczna zmiana fazy układu $1+G_o$, musi być równa 0.



Rys. 5 - Charakterystyka amplitudowo-fazowa dla transmitancji $G_o(j\omega)$ (dla $\omega \in (-\infty;\infty)$). Zieloną linią zaznaczono przedział wartości $-\frac{1}{K}$, dla których układ zamknięty jest stabilny.

Obliczony przedział stabilności:

$$K \in (-\infty; 0.9517)$$

3. Wnioski

- Za pomocą kryterium Nyquista, można, analizując przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego, łatwo ocenić stabilność układu zamkniętego.
- Aby to było możliwe, konieczna jest wiedza o liczbie biegunów niestabilnych transmitancji układu otwartego.
- Sumaryczną zmianę fazy, można ocenić na podstawie charakterystyki Nyquista, jednak najwyraźniej jest ona widoczna na fazowej charakterystyce Bodego.
- Zastosowanie kryterium Nyquista jest dokładną, ale nie jedyną możliwością wyznaczenia przedziału wzmocnienia, dla którego układ zamknięty jest stabilny. Inną opcją jest wykorzystanie Matlab'a i znalezienie rozwiązania iteracyjnie. Możnaby było również obliczyć wartość wzmocnień krytycznych na podstawie charakterystyk Bodego.
- Układ zamknięty z opóźnieniem jest stabilny wtedy i tylko wtedy, kiedy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej, nie obejmuje punktu $(-1;0)$.

Literatura

[1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, *Teoria sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*, 2015, wyd. 2 poprawione.