TEORIA STEROWANIA 2
Sprawozdanie z laboratorium nr 1
Portrety fazowe

Roman Nowak, WEAIiIB, Automatyka i Robotyka

17 marca 2024

Spis treści

1. Cel ćwiczenia

Ćwiczenie polegało na wyznaczeniu oraz wyrysowaniu na wykresach w programie Matlab portretów fazowych dla obiektów określonych następującym równaniem stanu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

oraz równaniem wyjść:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Dla różnych macierzy A_{2x2}, dobranych w taki sposób, aby otrzymać wszystkie z typów portretów fazowych, przedstawionych w tabeli nr 1.

Tab. 1 - Różne rodzaje portretów fazowych w zależności od wartości własnych macierzy A.

Wyznacznik	Wartości własne	Typ portretu
różny od 0	rzeczywiste, różne, jednakowego znaku	węzeł
	rzeczywiste, przeciwnych znaków	siodło
	zespolone, sprzężone, niezerowe	ognisko
	urojone, sprzężone	środek
	rzeczywiste, równe, niezerowe, jeden wektor własny	węzeł zdegenerowany
	rzeczywiste, równe, niezerowe, dwa wektory własne	gwiazda
równy 0	rzeczywiste, jedna równa 0	-
	zerowe	-
	A = 0	-

Źródło: [1]

Dodatkowo należy przedstawić porównać je z portretami dla postaci kanonicznych - Jordana, tych macierzy oraz rozważyć dane typy portretów również dla układów niestabilnych.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z różnymi typami możliwych typów portretów fazowych dla układów dynamicznych oraz przeanalizowanie wpływu wartości macierzy A, na ich postać.

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Przygotowanie macierzy

Jako macierze A, w celu zamodelowania układów i wyrysowania portretów fazowych, zostały przyjęte przykładowe macierze ze skryptu [1]. Dla uzyskania pozostałych, nie zawartych jako przykłady w podręczniku, użyto kodu w Matlabie:

```
function [A, Ak] = example_matrix(poles)
    % param: poles - Bieguny, zadane wartosci wlasne
    [num, den] = tfdata(zpk(0, poles, 1, 1));

    A = tf2ss(num{1}, den{1});  % Macierz A
    Ak = jordan(A);  % Postac kanoniczna
end
```

Skrypt ten, oblicza wartości macierzy A oraz macierzy dla niej kanonicznej (macierz Jordana), na podstawie podanych wartości własnych. Wiedząc, że w przypadku gdy bieguny znajdują się po lewej stronie płaszczyzny zespolonej, układ jest stabilny, a gdy po prawej, nie, można znaleźć również przykładowe macierze dla niestabilnych układów danych typów.

2.2. Przygotowanie wykresów

Do przygotowania wykresów został użyty skrypt w programie Matlab:

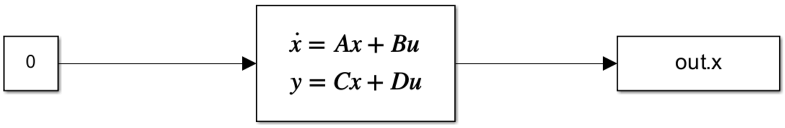
```
function [] = draw_phase()
    global A x0
    T=6;
    [w, J] = eig(A);
    figure; hold on; grid on;
    a = 0 : pi/20 : 2*pi; X1 = [cos(a); sin(a)];
    X2 = X1 ./ [max(abs(X1)); max(abs(X1))]; M = size(X2, 2);

    for i = 1:M
        x0 = X2(:, i);
        puste = sim('model.slx', T);
        x = puste.x.signals.values;
        % Strzalki na portrecie fazowym
        quiver(x(:,1), x(:,2), gradient(x(:, 1)), gradient(x(:, 2)), "k");
        % Portret fazowy
        plot(x(:, 1), x(:,2), 'k-');
        % Wektory wlasne - strzalki
        quiver(0, 0, w(1, 1), w(2,1), 'r', "LineWidth", 3);
        quiver(0, 0, w(1, 2), w(2,2), 'r', "LineWidth", 3);
        % Zbiory rownowagi - policzone wedlug rownania Ax = [0; 0]
        plot(0, 0, "go", "MarkerSize", 7, "MarkerFaceColor", "g")

        title(['lambda(A) = [', num2str(J(1,1)), ',', num2str(J(2,2)), ']'
    ]);
        xlabel('x1'); ylabel('x2');
    end
end
```

Program ten wielokrotnie wywołuje w pętli, dla różnych wartości początkowych symulacje układu zamodelowanego w Simulinku. Jego funkcjonalność to stworzenie portretu fazowego dla macierzy A i układu zamodelowanego w Simulinku (rys. 1). Funkcje *quiver* zastosowano w celu zaznaczenia kierunku trejektorii fazowych za pomocą strzałek. Kierunki otrzymywane są za pomocą obliczania gradientów. Dodatkowo na wykres nakładane są wektory własne macierzy A. Są one wyrysowywane na **czerwono**. Oprócz tego na **zielono**, oznaczono zbiory / punkty równowagi, będące rozwiązaniem równania:

$$0 = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$



Rys. 1 - Model układu w Simulinku, stworzony przez wykorzystanie bloku *State-Space*.

2.3. Prezentacja wyników

2.3.1. Węzeł asymptotycznie stabilny

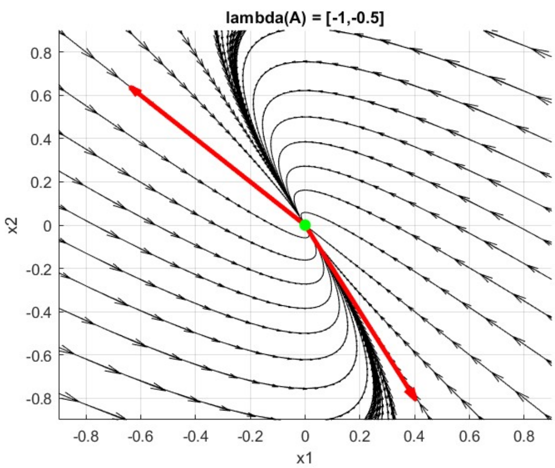
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.5$

Macierz A:

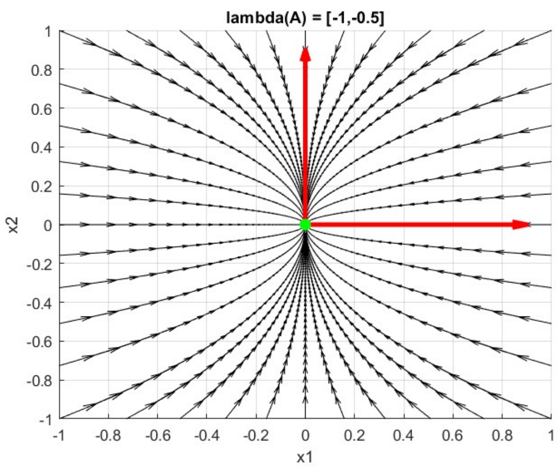
$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$



Rys. 2 - Portret fazowy. Obserwując zwroty strzałek, można zaobserwować, że układ dąży do stabilnego, jedynego punktu równowagi w punkcie $(0,0)$.



Rys. 3 - Portret dla postaci kanonicznej macierzy. Dzięki takiemu przekształceniu, portret nie ulega odkształceniu.

2.3.2. Siodło

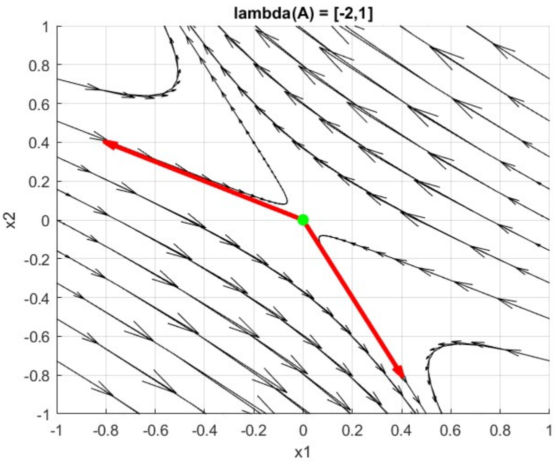
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

Macierz A:

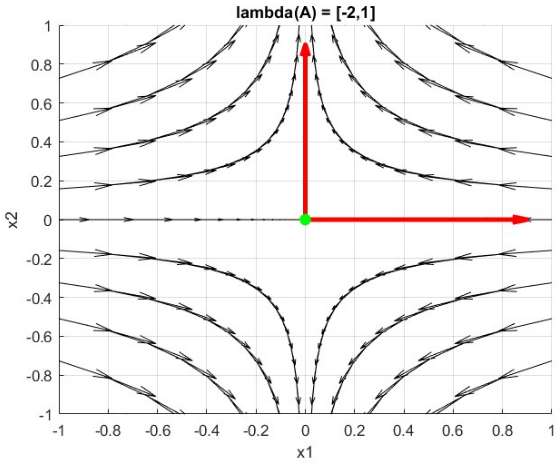
$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rys. 4 - Portret fazowy. Obserwując zwroty strzałek, można zaobserwować, że układ ma jeden, niestabilny punkt równowagi w punkcie $(0,0)$.



Rys. 5 - Portret dla postaci kanonicznej macierzy. Wektory własne prostopadłe do siebie i równoległe do osi.

2.3.3. Ognisko stabilne

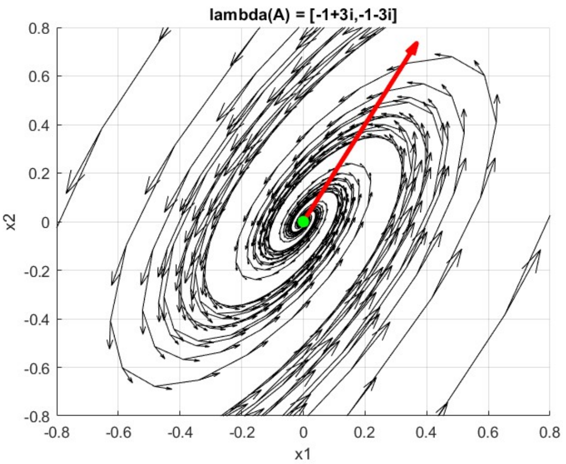
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = -1 + 3j, \lambda_2 = -1 - 3j$

Macierz A:

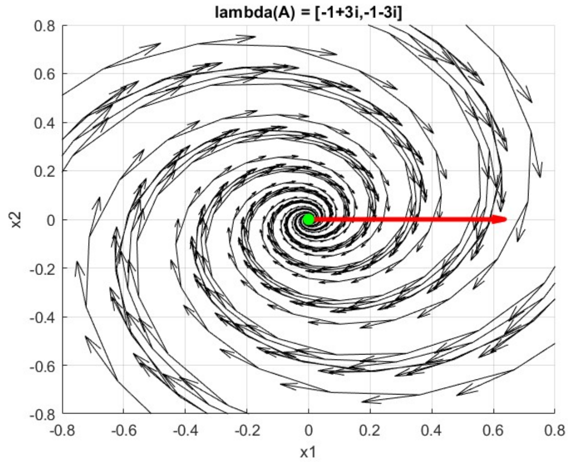
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$



Rys. 6 - Portret fazowy. Stabilny punkt równowagi w $(0,0)$.



Rys. 7 - Portret dla postaci kanonicznej macierzy A jest symetryczny względem punktu $(0,0)$.

2.3.4. Środek

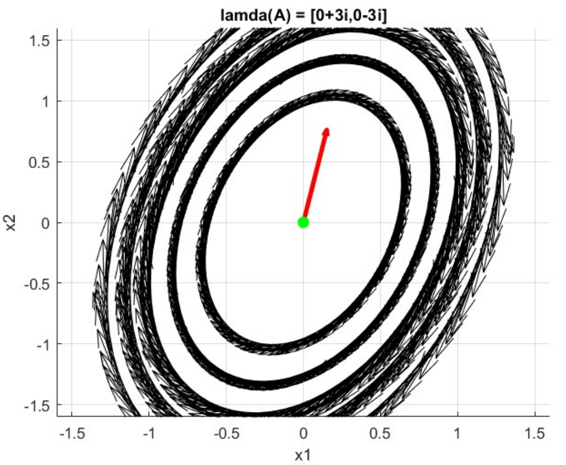
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = -3j, \lambda_2 = 3j$

Macierz A:

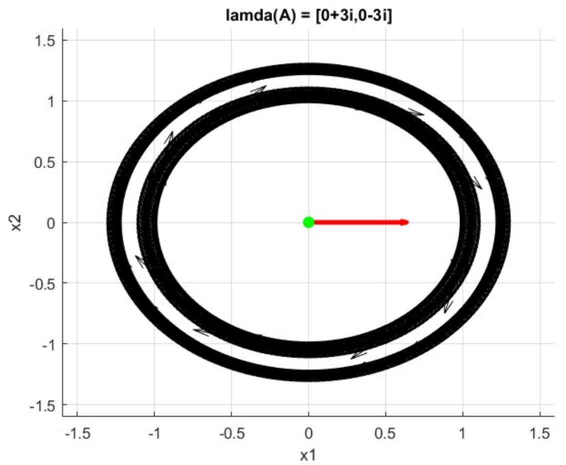
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 8 - Trajektorie fazowe tworzą zamknięte eliptyczne orbity, okrążające punkt $(0,0)$.



Rys. 9 - Dla postaci kanonicznej, trajektorie tworzą okręgi.

2.3.5. Węzeł zdegenerowany stabilny

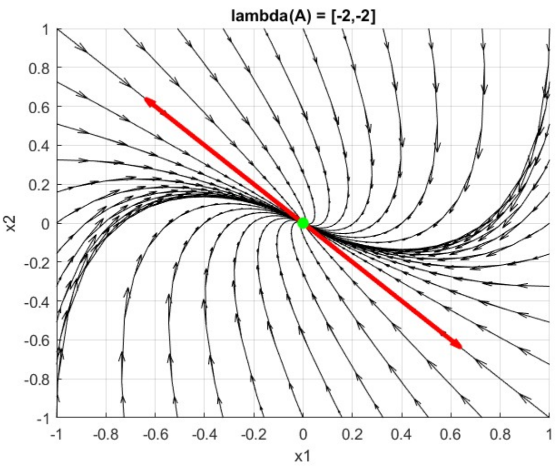
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Jeden liniowo niezależny wektor własny.

Macierz A:

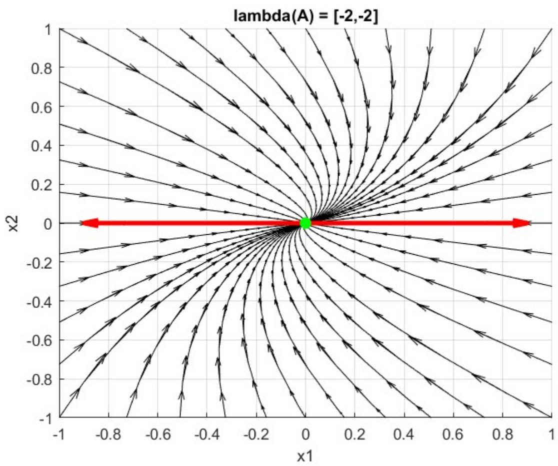
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Rys. 10 - Portret fazowy. Układ dąży do stanu w punkcie $(0,0)$.



Rys. 11 - Portret dla postaci kanonicznej macierzy. Wektory własne równoległe z osią x.

2.3.6. Węzeł zdegenerowany niestabilny

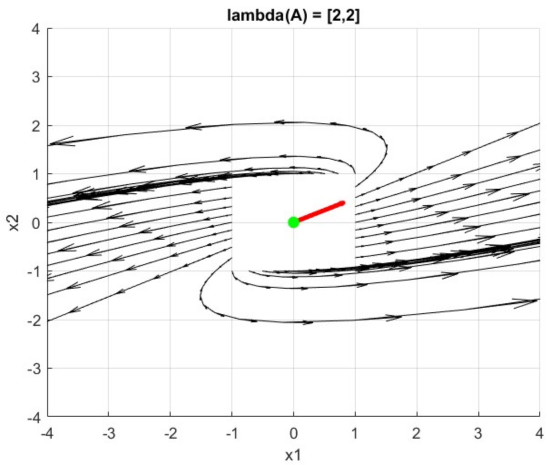
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Jeden liniowo niezależny wektor własny.

Macierz A:

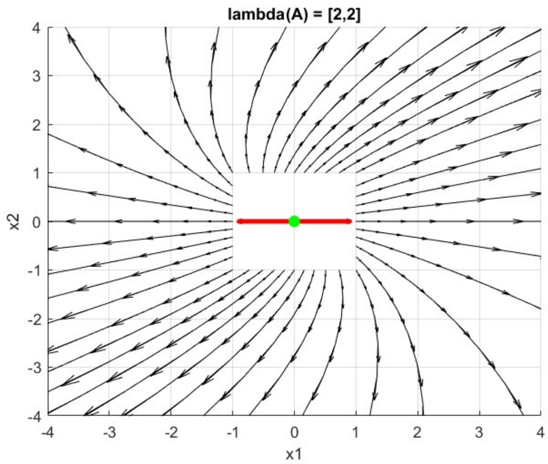
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Rys. 12 - Dzięki zwrotom strzałek, zaznaczonym na portrecie fazowym, można zauważyć, że układ jest niestabiny - dla każdego z punktów początkowych, wartości zmiennych stanu oddalają się od jedynego, niestabilnego punktu równowagi w $(0,0)$.



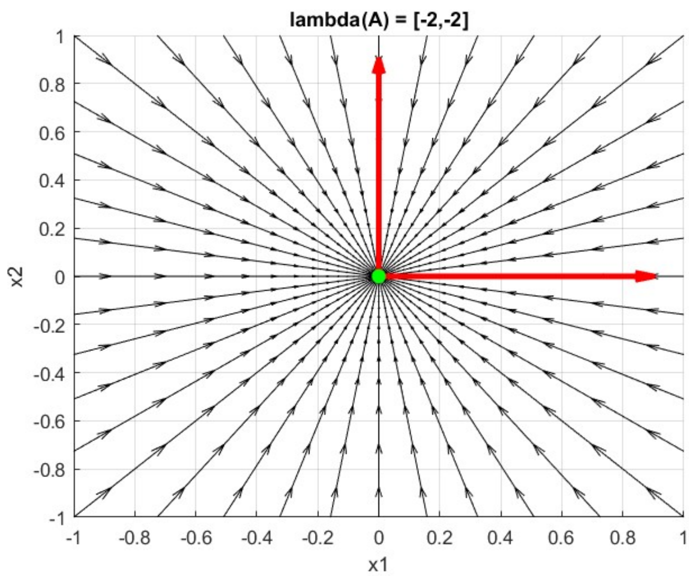
Rys. 13 - Portret dla postaci kanonicznej macierzy.

2.3.7. Gwiazda stabilna

Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Dwa liniowo niezależne wektory własne.

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



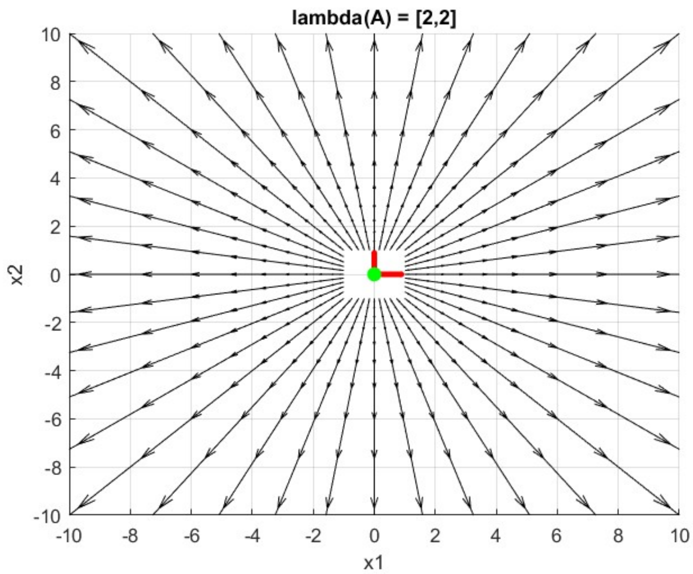
Rys. 14 - W przypadku gwiazdy, zmienne stanu po prostych dążą do stabilnego punktu równowagi w $(0,0)$.

2.3.8. Gwiazda niestabilna

Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Dwa liniowo niezależne wektory własne.

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Rys. 15 - Gwiazda niestabilna. Strzałki skierowane są na zewnątrz punktu $(0,0)$.

2.3.9. Jedna z wartości własnych zerowa

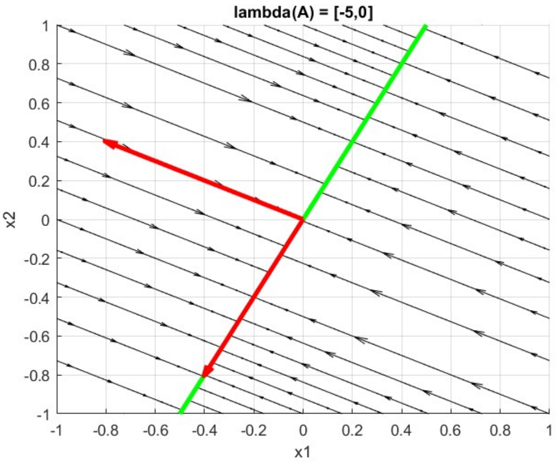
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 0$.

Macierz A:

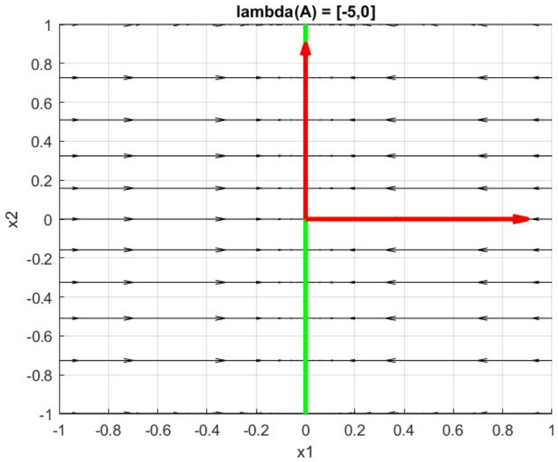
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 16 - Układ dąży do jednego z nieskończenie wielu punktów równowagi, znajdujących się na prostej $x2 = 2 \cdot x1$.



Rys. 17 - Zbiór równowagi to prosta $x1 = 0$.

2.3.10. Obie wartości własne zerowe

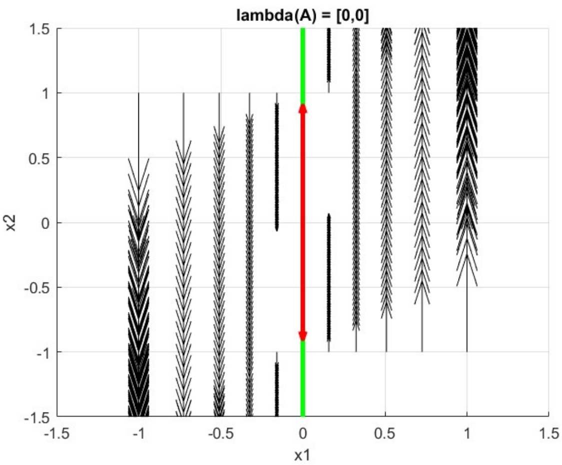
Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Macierz A:

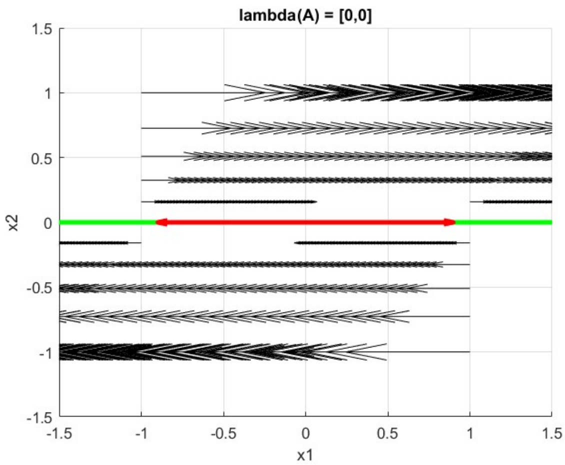
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna macierzy A:

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 18 - Portret fazowy. Zbiór równowagi na prostej $x1 = 0$.



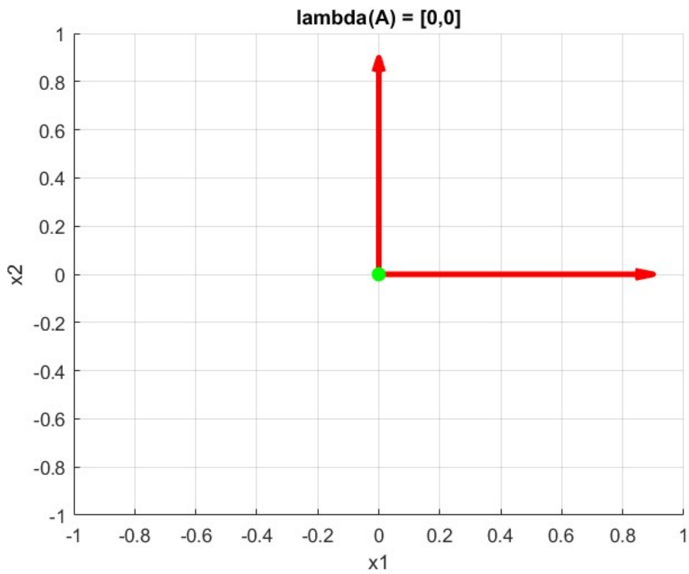
Rys. 19 - Portret fazowy dla postaci kanonicznej. Zbiór równowagi na prostej $x2 = 0$.

2.3.11. Zerowa macierz A

Wartości własne analizowanego układu: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Macierz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Rys. 20 - Portret fazowy. Wszystkie możliwe stany układu z zerową macierzą A, zawierają się w punkcie $(0,0)$.

3. Wnioski

- Ważnym aspektem ćwiczenia było dokładne zapoznanie się z rodzajami portretów fazowych oraz ich cechami charakterystycznymi.
- Stabilność układu dynamicznego zależy od położenia biegunów transmitancji na płaszczyźnie zespolonej. Jeśli choć jeden z nich ma dodatnią wartość rzeczywistą, stabilność jest tracona - tak jak w 2.3.2..
- W przypadku, gdy przynajmniej jeden z biegunów jest równy 0, układ ma nieskończenie wiele punktów równowagi - tak jak w 2.3.9. i 2.3.10..
- Zerowe części rzeczywiste biegunów, przy niezerowych częściach urojonych, objawiają się obecnością niegasnących oscylacji układ jest na granicy stabilności - tak jak w 2.3.4..
- Bieguny transmitacji operatorowej są równe wartościom własnym macierzy A.
- Stabilność układu, można ocenić na podstawie analizy jego portretu fazowego, zwracając uwagę na kierunek strzałek. W ten sposób można też odnaleźć zbiory równowagi.
- Przejście do postaci kanonicznej macierzy A, wpływa na wygląd portretu fazowego dla układu. Dzięki temu portret jest „wyrównywany” - pozbywamy się odkształcenia, a wektory własne ustawiają się zgodnie z osiami x i y.
- W przypadku gdy układ ma zerową macierz A, jedyne możliwe wartości stanu to 0, wszystkie trajektorie fazowe zawierają się więc w punkcie $(0,0)$. Dlatego portret fazowy wydaje się być pustym wykresem.
- W analizowanych przypadkach punkt $(0,0)$ zawsze był jednym z punktów równowagi układu. Jest to spowodowane zerową wartością drugiej części równania stanu ($B \cdot u$).

Literatura

[1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, *Teoria sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*, 2015, wyd. 2 poprawione.