

TEORIA STEROWANIA 2
Sprawozdanie z laboratorium nr 3
Pierwsza metoda Lapunowa



Roman Nowak, WEAliIB, Automatyka i Robotyka

13 maja 2024

Spis treści

1. Cel ćwiczenia	2
2. Przebieg ćwiczenia	3
2.1. Przykład 1	3
2.1.1. Stabilność	3
2.1.2. Obszar przyciągania	5
2.2. Przykład 2	6
2.2.1. Stabilność	6
2.2.2. Obszar przyciągania	7
3. Wnioski	9

1. Cel ćwiczenia

Druga metoda Lapunowa, w przeciwieństwie do pierwszej metody:

- jest w stanie wykazać stabilność nie asymptotyczną
- pozwala na badanie stabilności układu w przypadkach, gdy ten nie poddaje się linearyzacji
- nie wymaga znajomości rozwiązania równania różniczkowego charakteryzującego układ

Z tych powodów okazuje się przydatne, kiedy zawodzi pierwsza metoda. Za pomocą twierdzenia Lapunowa, nie możemy wnioskować o niestabilności układu (choć istnieją twierdzenia, które to umożliwiają).

Dodatkowo można zastosować metodę LaSalle'a, w celu znalezienia estymaty obszaru przyciągania układu.

Ćwiczenie polega na wykorzystaniu II metody Lapunowa do zbadania stabilności, przykładowych nieliniowych systemów dynamicznych. Kolejnym etapem jest zastosowanie zasady LaSalle'a do dalszej analizy układów. Za jego pomocą należy wyznaczyć estymatę obszaru przyciągania (atrakcji) asymptotycznie stabilnych punktów równowagi.

Badane systemy dynamiczne są opisane równaniami stanu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

Dla którego w celu badania stabilności, zostaną wykorzystane dwa podane funkcjonały Lapunowa:

$$V_1(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \quad (2)$$

$$V_2(x) = \frac{x_1^2}{1 - x_1x_2} + x_2^2 \quad (3)$$

Oraz:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases} \quad (4)$$

Z „energetycznym” funkcjonałem Lapunowa:

$$V_3(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \quad (5)$$

2. Przebieg ćwiczenia

2.1. Przykład 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2x_1^2(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) \end{cases}$$

2.1.1. Stabilność

W pierwszej kolejności należy znaleźć punkty równowagi. Otrzymujemy:

$$P_0 = (0; 0)$$

Czyli w łatwy sposób, można zastosować twierdzenie Lapunowa.

W tym celu, należy sprawdzić warunki:

$$V(0) = 0 \quad (6)$$

$$\dot{V}(0) = 0 \quad (7)$$

$$V(x) > 0, \text{ dla } x \neq 0 \quad (8)$$

$$\dot{V}(x) < 0, \text{ dla } x \neq 0 \quad (9)$$

Funkcjonał Lapunowa V_1 (2)

Analizę zaczniemy od funkcjonału (2):

$$V_1(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2$$

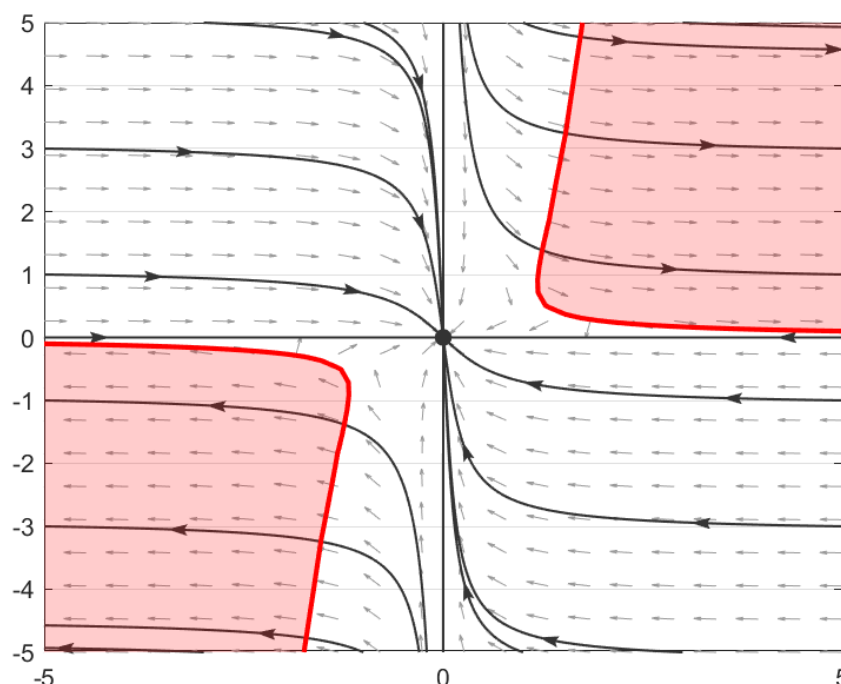
Łatwo można stwierdzić, że warunki (6) oraz (8) są spełnione. Suma kwadratów będzie zawsze dodatnia dla $x \neq 0$ oraz równa 0 dla $x = 0$.

Następnie liczymy pochodną funkcjonału.

$$\dot{V}_1(x) = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2 \quad (10)$$

Po podstawieniu zer do wzoru (10), można stwierdzić prawdziwość warunku (7). Jest on spełniony.

Na wykresie 1 zaznaczono obszar, w którym warunek 9 nie jest spełniony.



Rys. 1 - Portret fazowy systemu, z zaznaczonym obszarem (na czerwono), dla którego pochodna funkcjonału nie jest ujemna.

Można zaobserwować, że istnieje pewne otoczenie punktu równowagi $(0,0)$, dla którego wszystkie warunki (w szczególności (9)) są spełnione. Implikuje to **asymptotyczną stabilność** systemu.

Funkcjonał Lapunowa V_2 (3)

Funkcjonał $V_2(x) = \frac{x_1^2}{1-x_1x_2} + x_2^2$ nie spełnia założeń twierdzenia LaSalle'a. Konkretnie nie jest on określony na całej przestrzeni \mathbb{R}^2 . Nadal możemy jednak zastosować metodę LaSalle'a do znalezienia przybliżonego obszaru przyciągania, jeśli skorzystamy ze zmodyfikowanej wersji twierdzenia. Dzięki temu, wystarczy, aby funkcjonal V_2 , był określony w pewnym niepustym otoczeniu zera Ω . Teraz należy jednak przyjąć dodatkowe założenie - brzegi zbiorów Z_l i zbioru Ω określającego dziedzinę funkcjonału V_2 nie mogą mieć punktów wspólnych.

Z dziedziny funkcjonału V_2 wyłączone są punkty, dla których $x_2 = 1/x_1$.

Punkt równowagi znajduje się w $(0,0)$.

Liczymy pochodną funkcjonału V_2 . Po obliczeniu i uproszczeniu (funkcja `/textitsimplify` w Matlabie), wynosi ona:

$$\dot{V}_2(x) = -2x_1^2 - 2x_2^2 \quad (11)$$

Tak jak w poprzednim przypadku należy sprawdzić prawdziwość warunków wynikających z twierdzenia Lapunowa.

- warunki (6) i (7) są w oczywisty sposób spełnione – wystarczy podstawić zera do wzorów (3) i (11);

- warunek (8), poza zerem jest spełniony dla wszystkich punktów dziedziny funkcjonału – Suma kwadratów;
- warunek (9), jest spełniony poza zerem dla całej przestrzeni R^2 .

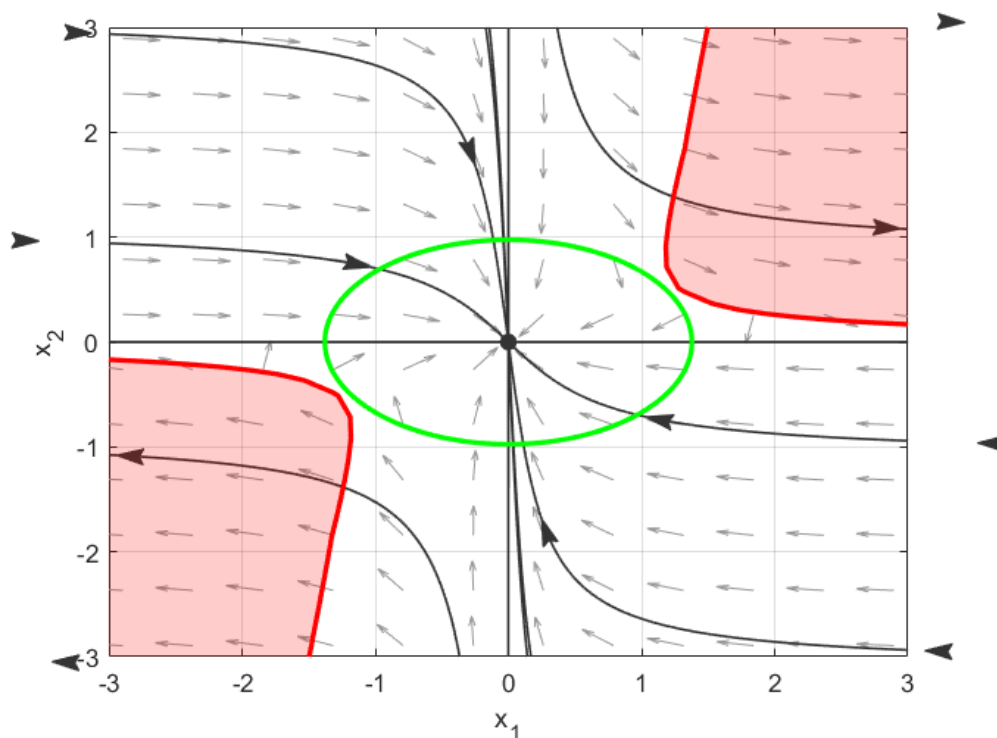
Na mocy twierdzenia Lapunowa, układ jest więc **asymptotycznie stabilny**.

2.1.2. Obszar przyciągania

Funkcjonał Lapunowa V_2 (3)

Do określenia przybliżonego obszaru przyciągania zastosowana zostanie zasada LaSalle'a. Poszukujemy zbioru Z_l wszystkich $x \in R^n$, dla których $V(x) < l$. Sprowadza się to do znalezienia największej wartości l , takiej że warunki twierdzenia Lapunowa są ciągle spełnione. Wartość, tę znaleziono eksperymentalnie, zwiększając ją do osiągnięcia wartości bliskiej maksymalnej, za pomocą wyrysowywania odpowiednich wykresów w Matlabie.

Dobrana wartość: $l = 0.95$

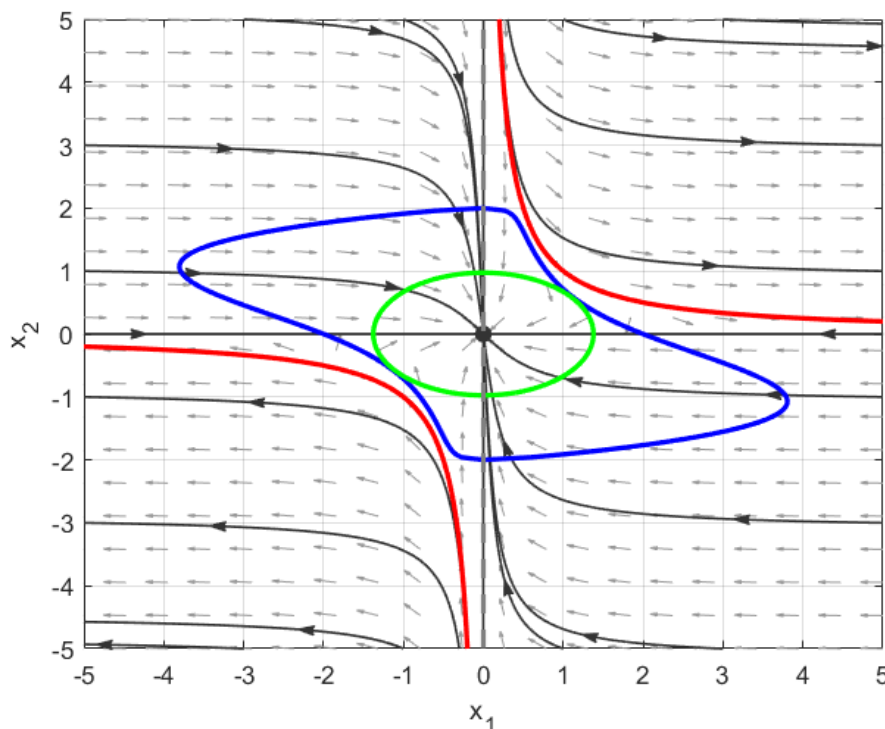


Rys. 2 - Portret fazowy systemu, z zaznaczonym zbiorem Z_l (brzeg na zielono) - estymata obszaru przyciągania. Widać, że jest on pewnym podzbiorem rzeczywistego obszaru przyciągania i że w całym zbiorze Z_l spełnione są warunki wynikające z twierdzenia Lapunowa

Funkcjonał Lapunowa V_2 (3)

Następnie w analogiczny sposób wyznaczamy estymatę obszaru atrakcji, tym razem korzystając z funkcjonału V_2 .

Dobrana wartość: $l = 4$



Rys. 3 - Portret fazowy systemu, z zaznaczonymi obszarami przyciągania. Na zielono - brzeg obszaru wyznaczonego za pomocą V_1 , na niebiesko – za pomocą V_2 . Czerwonym kolorem zaznaczony jest zbiór nie należący do dziedziny funkcjonału V_2 .

Jak można zaobserwować na wykresie (Rys. 3), za pomocą funkcjonału V_2 udało się wyznaczyć, dokładniejszą estymatę obszaru przyciągania. Wykres umożliwia też porównanie wyników z rzeczywistym obszarem przyciągania dla tego układu. Rzeczywisty obszar jest większy niż otrzymane przybliżenia.

2.2. Przykład 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t) + x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

2.2.1. Stabilność

Punkt równowagi znajduje się w $(0,0)$.

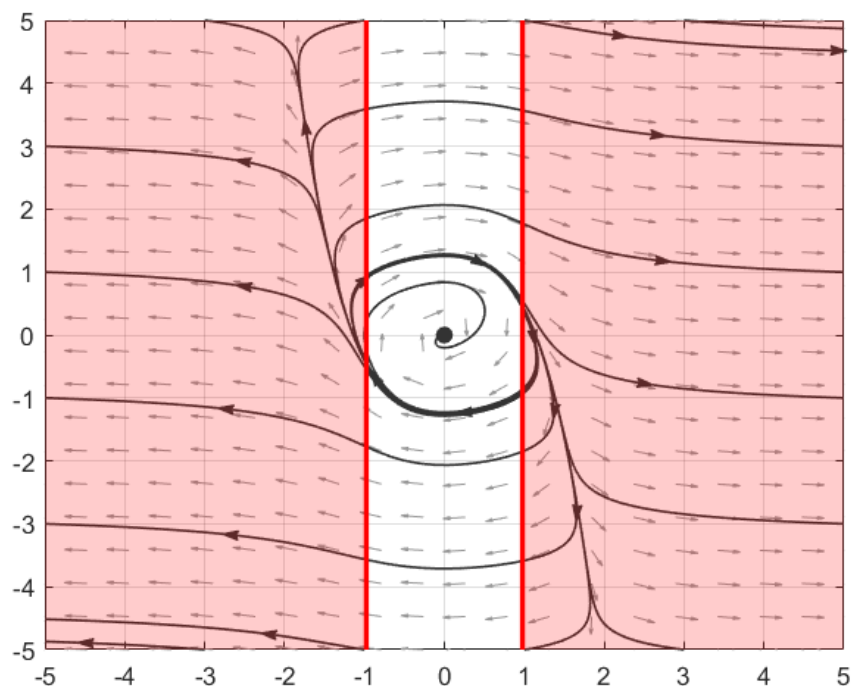
Pochodna funkcjonału:

$$\dot{V}_3(x) = x_1^2(x_1^2 - 1) \quad (12)$$

Należy sprawdzić prawdziwość warunków wynikających z twierdzenia Lapunowa.

- warunki (6) i (7) są w oczywisty sposób spełnione – wystarczy podstawić zera do wzorów (5) i (12);

- warunek (8), poza zerem jest spełniony dla wszystkich punktów dziedziny funkcjonału – Suma kwadratów;
- warunek (9), jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1^2 < 1$. Czyli $x_1 \in (-1; 1)$.



Rys. 4 - Portret fazowy systemu, z zaznaczonym obszarem (na czerwono), dla którego pochodna funkcjonału nie jest ujemna.

Na mocy twierdzenia Lapunowa, układ jest **asymptotycznie stabilny**.

W celu weryfikacji tego wyniku zastosujemy pierwszą metodę Lapunowa – linearyzujemy układ w otoczeniu punktu równowagi $(0,0)$.

Wartości własne zlinearyzowanego układu to:

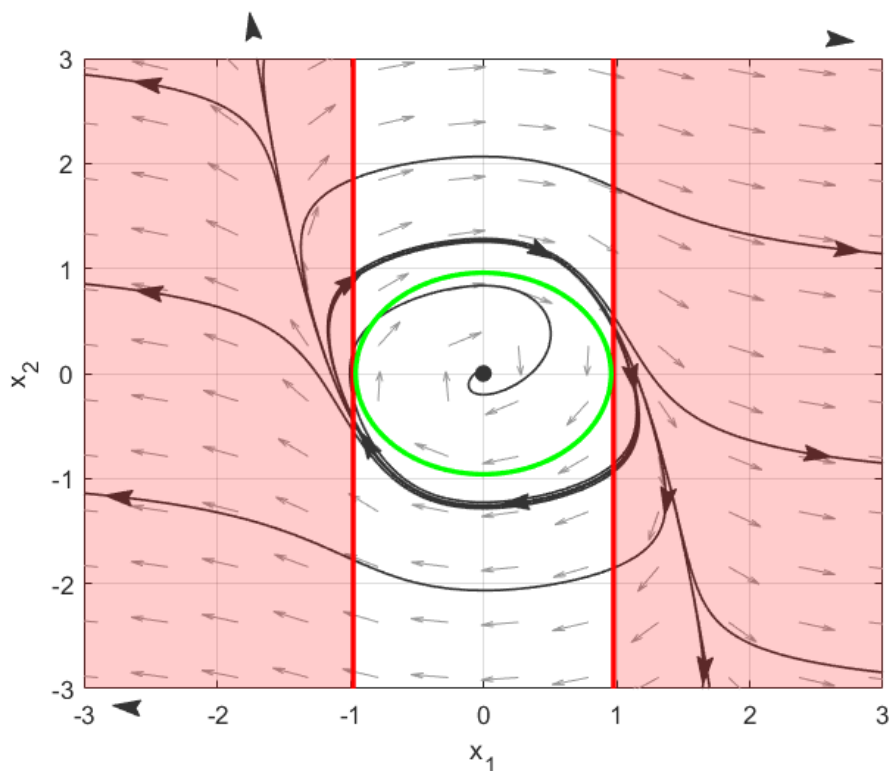
$$\lambda_1 = -0.5000 - 0.8660i; \lambda_2 = -0.5000 + 0.8660i$$

Jest to więc **ognisko stabilne**, co potwierdza uzyskany wcześniej wynik.

2.2.2. Obszar przyciągania

Kolejny raz korzystamy z zasady LaSalle'a:

Dobrana wartość: $l = 0.46$



Rys. 5 - Portret fazowy systemu, z zaznaczonym brzegi przybliżonego obszaru przyciągania (na zielono)

Analizując wykres (Rys. 5), można porównać uzyskaną estymatę z dobrze widocznym, rzeczywistym obszarem przyciągania (wnętrze zbliżonego do elipsy kształtu wykreślonego przez czarne strzałki). Jak widać, udało się uzyskać względnie dokładne przybliżenie.

3. Wnioski

- Druga metoda Lapunowa jest nieskomplikowaną w zastosowaniu metodą określania stabilności układów nieliniowych, która ma pewne zalety w stosunku do pierwszej metody Lapunowa. Za jej pomocą możemy wykazać stabilność nie asymptotyczną – mimo, że żaden z analizowanych przykładów nie pokazał tej możliwości, to jest możliwe. Układ jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli warunek (9) jest spełniony dopiero po zastąpieniu nierówności silnej przez słabą. Ponadto, dzięki drugiej metodzie Lapunowa, możliwe jest badanie stabilności układów nie poddających się linearyzacji.
- Twierdzenie LaSalle’a pozwala na skuteczne wyznaczanie przybliżonych obszarów przyciągania, będących podzbiorami tych rzeczywistych
- To jak dokładną estymatę obszaru atrakcji uda się uzyskać dzięki metodzie LaSalle’a zależy od zastosowanego w tym celu funkcjonału Lapunowa.
- Przy stosowaniu metody LaSalle’a, ważne jest, aby parametr l był możliwie jak największy. Otrzymujemy wtedy lepsze przybliżenie obszaru przyciągania.

Literatura

- [1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, *Teoria sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*, 2015, wyd. 2 poprawione.