TEORIA STEROWANIA 2
Sprawozdanie z laboratorium nr 3
Pierwsza metoda Lapunowa

Roman Nowak, WEAIiIB, Automatyka i Robotyka

18 kwietnia 2024

Spis treści

1. Cel ćwiczenia

Pierwsza metoda Lapunowa pozwala na wnioskowanie o stabilności układów nieliniowych w otoczeniu punktów równowagi na podstawie badania stabilności układów zlinearyzowanych. W przeciwieństwie do drugiej metody Lapunowa, wymaga znajomości rozwiązania równania różniczkowego charakteryzującego układ, ma więc ograniczone zastosowanie, jest jednak stosunkowo łatwa w użyciu.

Ćwiczenie polega na wykorzytaniu pierwszej metody Lapunowa, do analizy stabilności kilku przykładowych układów nieliniowych drugiego rzędu:

- Układu mechanicznego, składającego się z masy i „nieliniowej" sprężyny;
- Wahadła tłumionego;
- Układu opisanego układem równań Van der Poola.

W ramach ćwiczenia, dla każdego z przykładów należy:

- Zamodelować układ w Simulinku i wykreślić dla niego portret fazowy
- Znaleźć punkty równowagi i zbadać ich stabilność

Celem ćwiczenia jest nauka i utrwalenie korzystania z narzędzia do badania stabilności układów nieliniowych, jakim jest pierwsza metoda Lapunowa, poprzez wykorzystanie do jej realizacji środowiska Matlab.

2. Przebieg ćwiczenia

Dla wszystkich poniższych układów stworzono odpowiednie modele w Simulinku, symulujące systemy. Dzięki temu możliwe było zastosowanie funkcji z ćwiczenia nr 1 (po koniecznych poprawkach) do rysowania portretów fazowych. Jak okazało się w trakcie realizacji ćwiczenia, funkcja ta nie zawsze zwraca estetyczne i czytelne wykresy (problemy występują szczególnie kiedy gdy występuje więcej niż jeden punkt równowagi). Z tego powodu, w tych przypadkach, w których poprawiało to czytelność rysunków, zamiast niej zastosowano funkcję *plotpp*, dostępną jako dodatek do Matlaba.

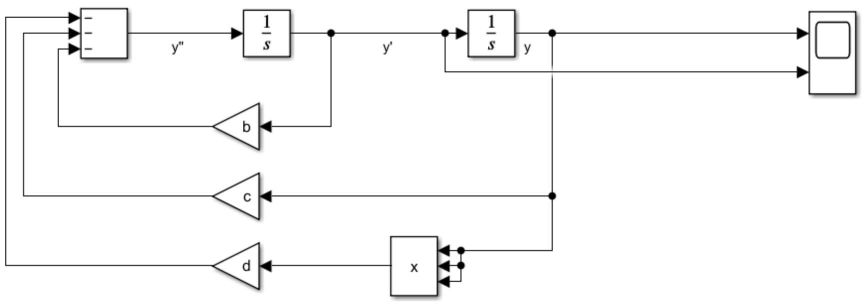
2.1. Układ mechaniczny

Pierwszym z analizowanych układów jest układ mechaniczny składający się z masy i „nieliniowej” sprężyny z tłumieniem proporcjonalnym do prędkości ruchu. Jest on opisany równaniem (1)

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) + dy^3(t) = 0 \tag{1}$$

Gdzie:

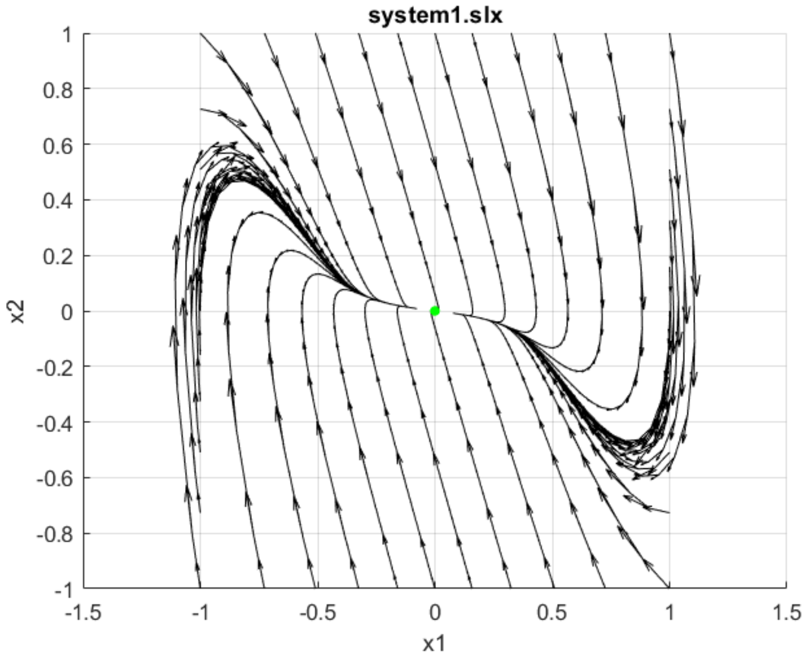
- y - odchylenie drgającej masy od położenia równowagi;
- b - współczynnik tarcia;
- c i d - współczynniki nieliniowości sprężyny.



Rys. 1 - Równanie (1) zamodelowane w Simulinku.

2.1.1. Przykład 1 - Węzeł stabilny, sprężyna twarda

Wartości współczynników: $b = 3, c = 0.3d = 2$. Wartość $d > 0$ oznacza, że mamy do czynienia ze sprężyną twardą.



Rys. 2 - Portret fazowy układu nieliniowego. Na zielono oznaczono punkt równowagi.

W celu obliczenia punktów równowagi oraz sprawdzenia ich stabilności wykorzystano kod w Matlabie:

```
function [eigs, A, bal_points] = lapunov_stab(eqn)
    % Rozbicie na uklad rownan pierwszego rzedu
    V = odeToVectorField(eqn)
    V = matlabFunction(V,'vars',{'t','Y'})
    syms t y1 y2 real
    V = V(t, [y1 y2]);
    % Punkty rownowagi
    bal_points = solve(V == 0);
    bal_points = double([bal_points.y1, bal_points.y2]);
    % Zaznaczenie punktow na wykresie
    hold on;
    plot(bal_points(:, 1), bal_points(:,2), 'go', "MarkerFaceColor","g", "
   MarkerSize", 4);
    hold off;
    % Jakobian punktow rownowagi
    J(y1, y2) = jacobian(V);
    A = zeros(2, 2, size(bal_points, 1));
    for i = 1 : size(bal_points, 1)
        point_J = J(bal_points(i, 1), bal_points(i, 2));
        % wartosci wlasne
        eigvals = eig(point_J);
        eigs(:,i) = double(eigvals);
        % Macierz A ukladu zlinearyzowanego
        A(:,:,i) = double(point_J);
    end
end
```

W pierwszym kroku równanie drugiego rzędu opisujące układ, przekształcane jest w układ dwóch równań pierwszego rzędu (równania stanu). Następnie przyrównujemy prawe strony równań do 0 i w ten sposób otrzymujemy współrzędne punktów równowagi. Liczymy macierze

Jakobiego i podstawiamy do nich współrzędne punktów, otrzymując macierze A układów zlinearyzowanych. Funkcja, w celu zbadania stabilności, zwraca jeszcze wartości własne macierzy A - bieguny układów zlinearyzowanych w punktach równowagi.

W ten sposób obliczono, że istnieje jeden punkt równowagi:

$$P_0 = (0,0)$$

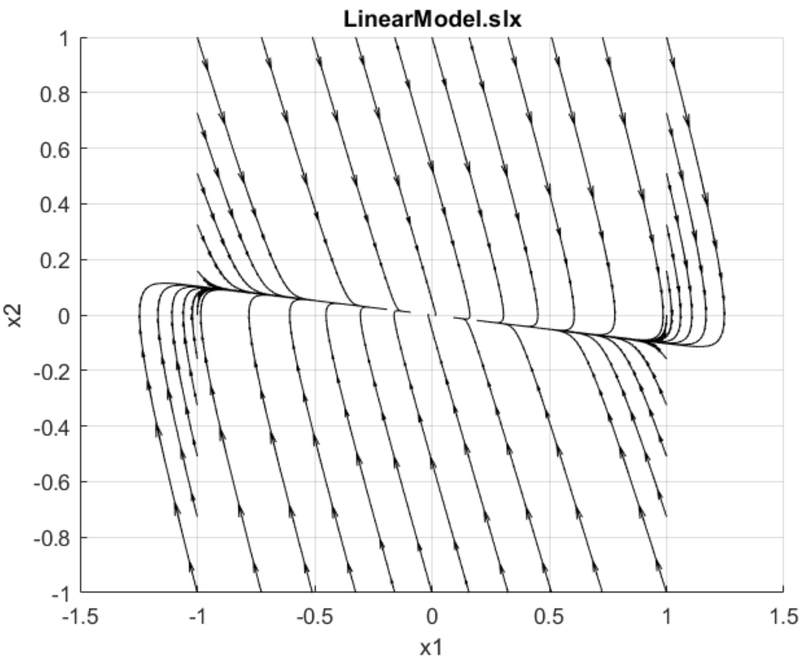
Wartości własne układu zlinearyzowanego to:

$$\lambda_1 = -2.8964;\ \lambda_2 = -0.1036$$

Są one ujemne, więc układ zlinearyzowany jest stabilny, czyli układ nieliniowy w otoczeniu punktu równowagi jest stabilny. Na podstawie wartości własnych możemy oczekiwać, że portret fazowy układu zlinearyzowanego w postaci:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

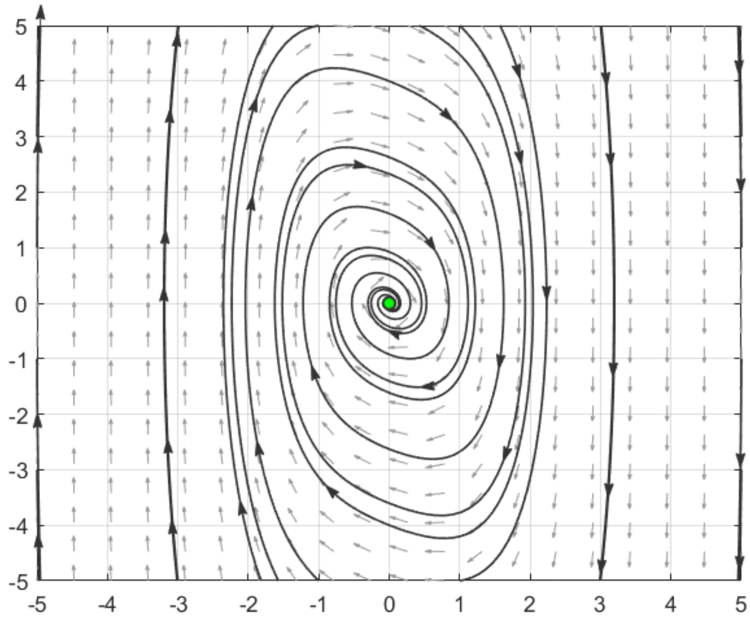
Jest węzłem stabilnym. Zweryfikujmy to rysując go.



Rys. 3 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w punkcie $P_0 = (0,0)$ - węzeł stabilny.

2.1.2. Przykład 2 - Ognisko stabilne, sprężyna twarda

Wartości współczynników: $b = 0.5, c = 1.5d = 2$.



Rys. 4 - Portret fazowy układu nieliniowego. Na **zielono** oznaczono punkt równowagi.

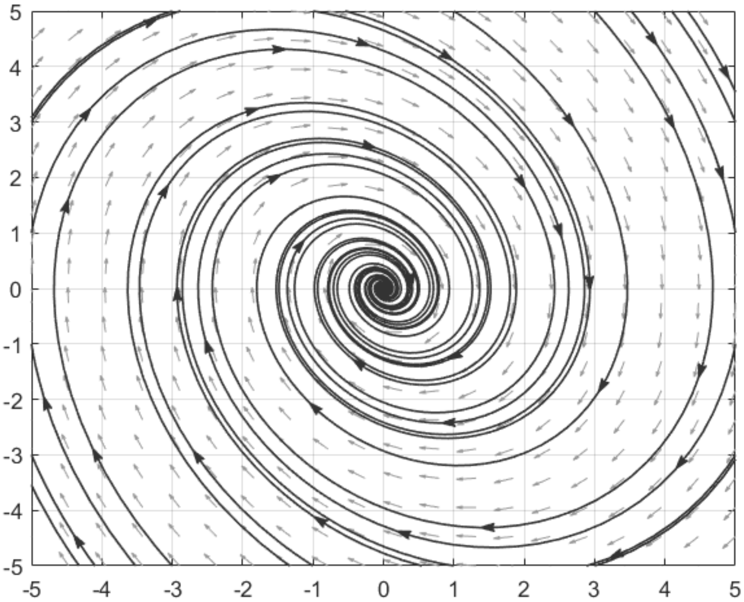
Istnieje jeden punkt równowagi:

$$P_0 = (0,0)$$

Wartości własne układu zlinearyzowanego to:

$$\lambda_1 = xxx;\ \lambda_2 = xxxx$$

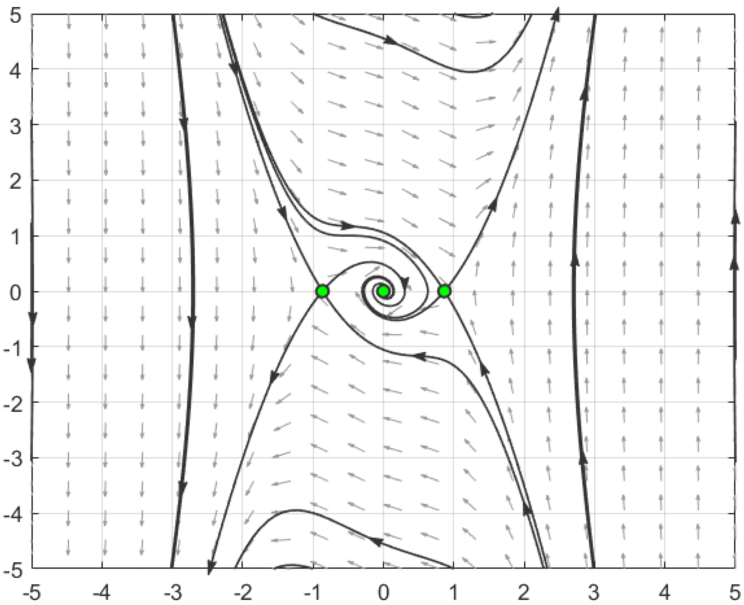
Są one ujemne, więc układ zlinearyzowany jest stabilny, czyli układ nieliniowy w otoczeniu punktu równowagi jest stabilny. Na podstawie wartości własnych możemy oczekiwać, że portret fazowy układu zlinearyzowanego to ognisko stabilne.



Rys. 5 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w punkcie $P_0 = (0, 0)$ - ognisko stabilne.

2.1.3. Przykład 3 - Sprężyna miękka

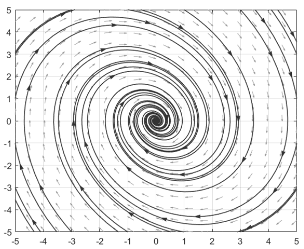
Wartości współczynników: $b = 0.5, c = 1.5, d = -2$. Wartość $d < 0$ oznacza, że mamy do czynienia ze sprężyną miękką.



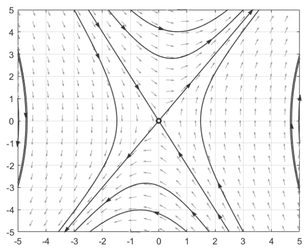
Rys. 6 - Portret fazowy układu nieliniowego.

Przyglądając się portretowi fazowemu dla układu ze sprężyną miękką, można zaobserwować, że występują 3 punkty równowagi (na wykresie zaznaczone na **zielono**):

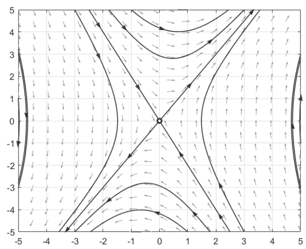
$$P_0 = (0,0);\ \lambda_1 = -0.2500 - 1.1990i;\ \lambda_2 = -0.2500 + 1.1990i$$
Ognisko stabilne
$$P_1 = (-0.866,0);\ \lambda_1 = -2.0000;\ \lambda_2 = 1.5000$$
Siodło - punkt niestabilny
Siodło - punkt niestabilny
$$P_2 = (0.866,0);\ \lambda_1 = -2.0000;\ \lambda_2 = 1.5000$$
Siodło - punkt niestabilny



Rys. 7 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_0. - ognisko stabilne



Rys. 8 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_1. - siodło



Rys. 9 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_2. - siodło

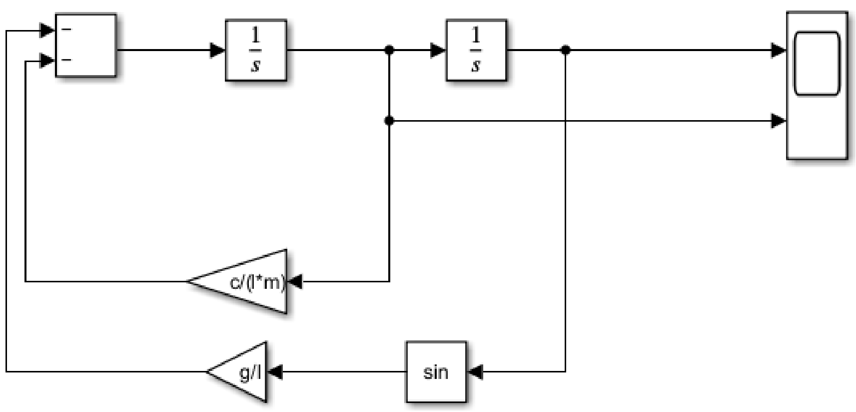
2.2. Wahadło

Kolejny układ to wahadło tłumione. Jest on opisany równaniem (3)

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l}\sin y(t) + \frac{c}{lm}\dot{y}(t) = 0 \tag{3}$$

Gdzie:

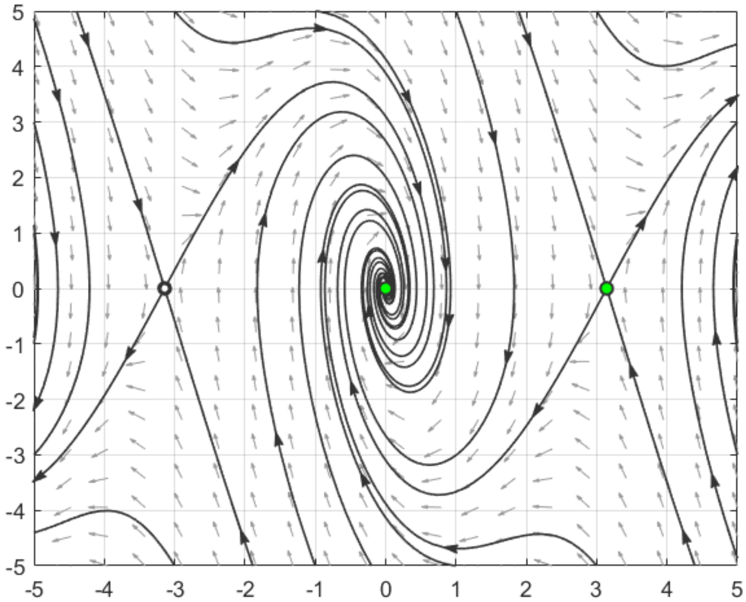
- g - współczynnik przyśpieszenia ziemskiego;
- l - długość wahadła;
- c - masa wahadła;
- m - współczynnik tłumienia.



Rys. 10 - Równanie (3) zamodelowane w Simulinku.

2.2.1. Przykład 1 - Ognisko stabilne

Wartości współczynników: $g = 9.81, m = 0.5 l = 1, c = 0.9$.

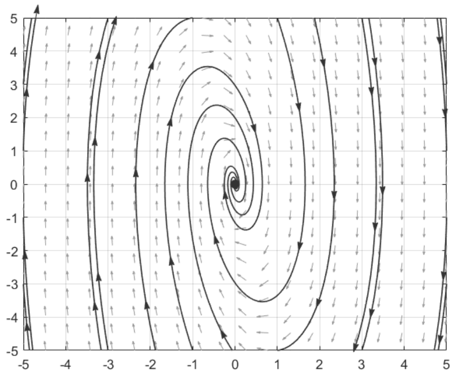


Rys. 11 - Portret fazowy układu nieliniowego. Na zielono oznaczono analizowane punkty równowagi.

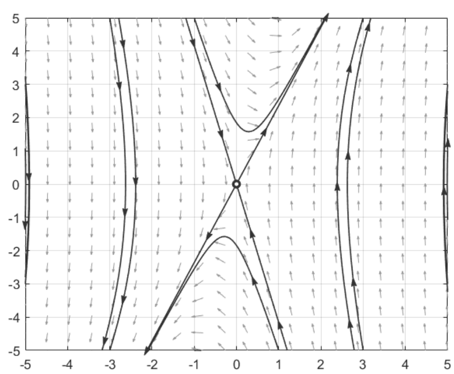
Z powodu występowania okresowej funkcji *sin* w tym układzie, ma on nieskończenie wiele puntów równowagi. Portret fazowy powtarza się z okresem 2π. Dlatego punktów równowagi będziemy szukali w dla zakresu $x_1 \in \langle 0; 2\pi \rangle$. W tym celu należy zmodyfikować funkcję *lapunow_stab* w sekcji odpoweiedzialnej za liczenie punktów równowagi.

```
% Punkty rownowagi
bal_y2 = 0;  % Bo y1' = y2
[bal_y1, param, cond] = solve(subs(V(2),y2,bal_y2) == 0, y1, '
    ReturnConditions', true)
assume(cond);
sol_param = solve(0<=bal_y1, bal_y1<2*pi, param);
bal_y1 = unique(subs(bal_y1, sol_param));
bal_points = double([bal_y1, ones(length(bal_y1),1) * bal_y2]);
eigs = zeros(2, size(bal_points,1));
```

$$P_0 = (0,0);\ \lambda_1 = -0.9 - 3i;\ \lambda_2 = -0.9 + 3i$$
Ognisko stabilne
$$P_1 = (-0.866, 0);\ \lambda_1 = -4.1588;\ \lambda_2 = 2.3588$$
Siodło - punkt niestabilny



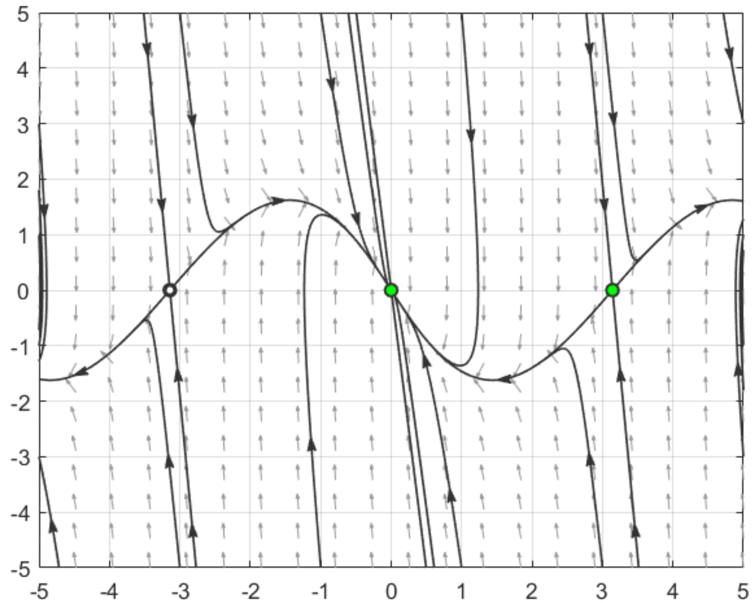
Rys. 12 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_0. - ognisko stabilne



Rys. 13 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_1. - siodło

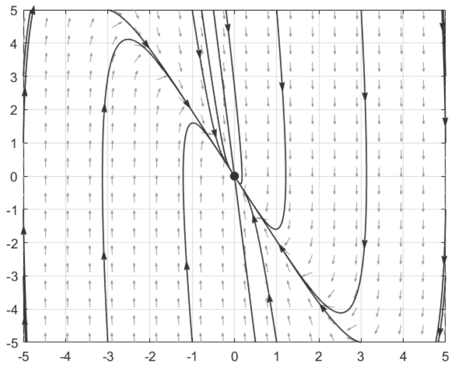
2.2.2. Przykład 2 - Węzeł stabilny

Wartości współczynników: $g = 9.81, m = 0.5 l = 0.5, c = 3$.

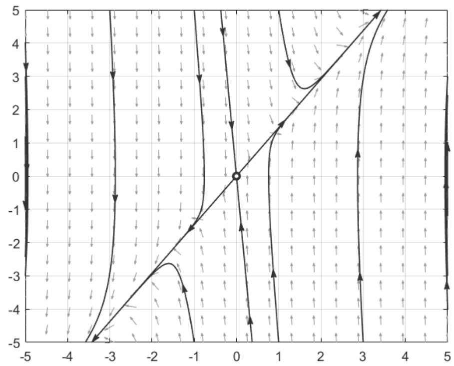


Rys. 14 - Portret fazowy układu nieliniowego. Na zielono oznaczono analizowane punkty równowagi.

$$P_0 = (0,0);\ \lambda_1 = -10.0472;\ \lambda_2 = -1.9528$$
Węzeł stabilny
$$P_1 = (\pi,0);\ \lambda_1 = -13.4579;\ \lambda_2 = 1.4579$$
Siodło - punkt niestabilny



Rys. 15 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_0. - węzeł stabilny

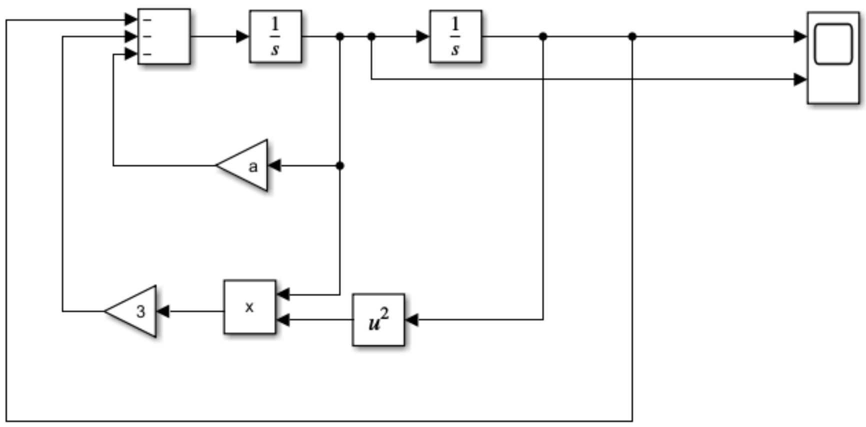


Rys. 16 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w P_1. - siodło

2.3. Układ Van der Poola

Ostatni system opisany jest układem równań Van der Poola:

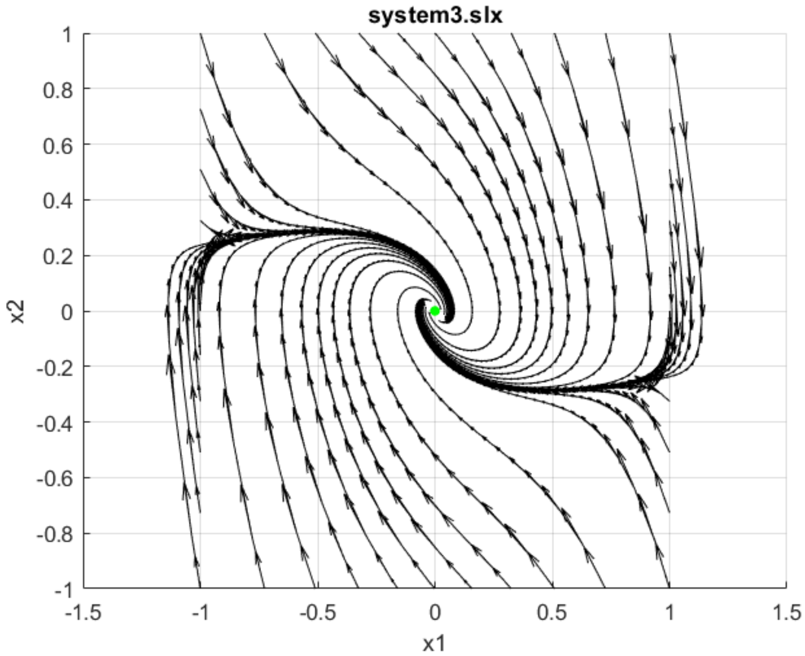
$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = y_2(t) - y_1^3(t) - ay_1(t) \\ \dot{y_2}(t) = -y_1(t) \end{cases} \tag{4}$$



Rys. 17 - Równania Van der Poola zamodelowane w Simulinku.

2.3.1. Przykład 1 - Ognisko stabilne

Wartości współczynników: $a = 1$.

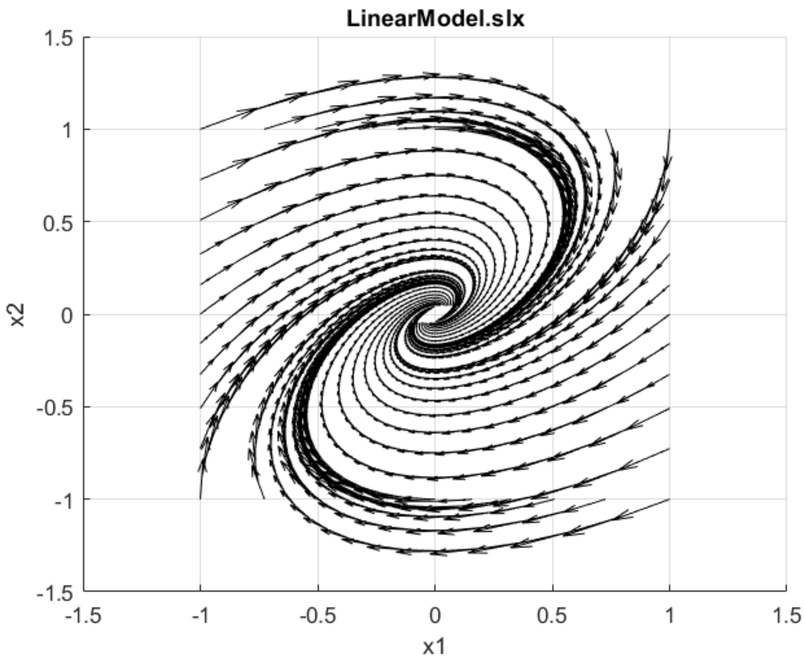


Rys. 18 - Portret fazowy układu nieliniowego

Istnieje jeden punkt równowagi:

$$P_0 = (0,0)$$

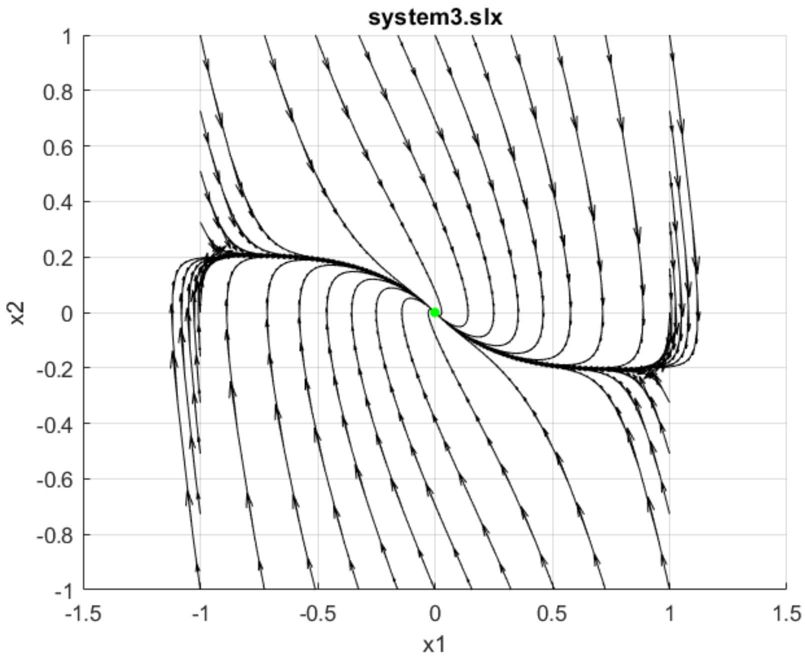
Wartości własne układu zlinearyzowanego to: $\lambda_1 = -0.5000 - 0.8660i$; $\lambda_2 = -0.5000 + 0.8660i$. Jest to ognisko stabilne.



Rys. 19 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w punkcie $P_0 = (0,0)$ - ognisko stabilne.

2.3.2. Przykład 2 - Węzeł zdegenerowany stabilny

Wartości współczynników: $a = 2$.

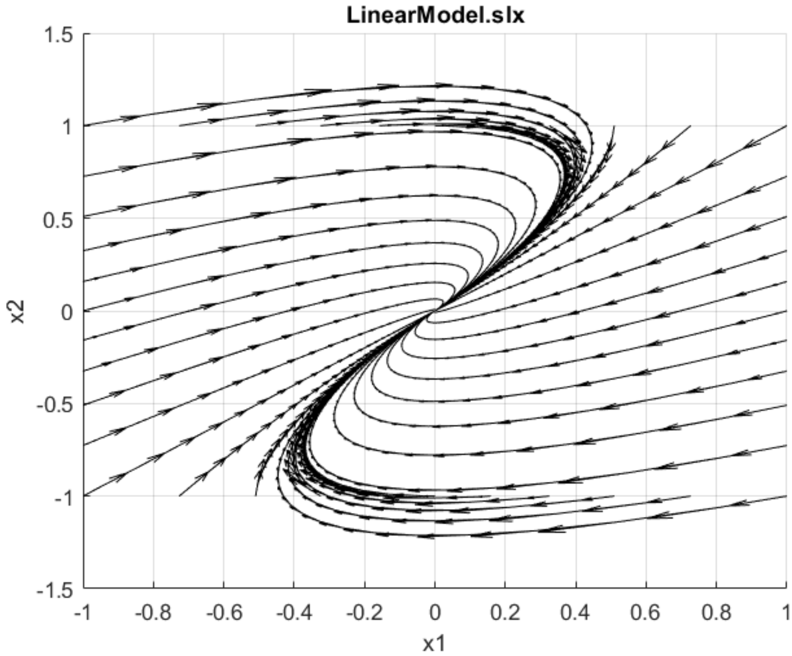


Rys. 20 - Portret fazowy układu nieliniowego

Istnieje jeden punkt równowagi:

$$P_0 = (0,0)$$

Wartości własne układu zlinearyzowanego to: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Jest to węzeł zdegenerowany stabilny.



Rys. 21 - Portret fazowy układu zlinearyzowanego w punkcie $P_0 = (0,0)$ - węzeł zdegenerowany stabilny.

3. Wnioski

- Pierwsza metoda w Lapunowa jest skutecznym i wygodnym sposobem na badanie stabilnośći układów nieliniowych. Niestety ma ona ograniczone zastosowanie, ponieważ wymaga znajomości rozwiązania równania różniczkowego układu.

- Matlab dysponuje szerokim zakresem dostępnych funkcji i dodatków, warto wykorzystać je w celu sprawdzenia poprawności działania napisanych przez siebie funkcji, lub zastąpienia ich w przypadkach, kiedy nie są one wystarczająco dobre.

- Wartości współczynników układów dynamicznych wpływają nie tylko na ich stabilność, ale także na rodzaj punktów równowagi układu, a nawet, tak jak w przypadu układu mechanicznego ze sprężyną na ich liczbę.

- Wartości własne układów liniowych, można wykorzystać nie tylko w celu oceny stabilności, ale również do stwierdzenia rodzaju portretu fazowego.

- Zwiększając wartość tłumienia w ukladzie, który ma punkt równowagi typu ognisko stabilne, można doprowadzić do układu z punktem równowagi typu węzeł. Tak było w przypadku wahadła oraz w przypadku układu mechanicznego ze sprężyną.

Literatura

[1] Jerzy Baranowski, Krystyn Hajduk, Adam Korytowski, Wojciech Mitkowski, Andrzej Tutaj, *Teoria sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*, 2015, wyd. 2 poprawione.