

Duale Hochschule Baden-Württemberg Mannheim

## Studienarbeit

# Konstruktion eines kryptographischen Verfahrens basierend auf Reed-Solomon-Codes und Diskussion möglicher Angriffsmethoden

**Studiengang Informatik**

**Studienrichtung Cyber Security**

Verfasser(in):	Roman Wetenkamp
Matrikelnummer:	5533869
Kurs:	TINF20CS1
Studiengangsleiter:	Prof. Dr. Konstantin Bayreuther
Wissenschaftliche(r) Betreuer(in):	Prof. Dr. Reinhold Hübl
Bearbeitungszeitraum:	18.10.2022 – 18.04.2023
Version:	6. Januar 2023

# Ehrenwörtliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel “*Konstruktion eines kryptographischen Verfahrens basierend auf Reed-Solomon-Codes und Diskussion möglicher Angriffsmethoden*” selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich versichere zudem, dass die eingereichte elektronische Fassung mit der gedruckten Fassung übereinstimmt.

Ort, Datum

Roman Wetenkamp

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Thematische Übersicht . . . . .	2
<b>2 Codierungstheorie</b>	<b>3</b>
2.1 Übermittlung von Informationen . . . . .	3
2.2 Problemstellung und Zielsetzung . . . . .	5
2.3 Kanalcodierung . . . . .	5
2.3.1 Grundbegriffe . . . . .	6
2.3.2 Noisy Channels Coding Theorem . . . . .	9
2.4 Finitfeldarithmetik . . . . .	10
2.4.1 Gruppen . . . . .	10
2.4.2 Körper . . . . .	12
2.4.3 Polynome . . . . .	15
<b>3 Lineare fehlerkorrigierende Codes für kryptographische Zwecke</b>	<b>16</b>
3.1 Reed-Solomon-Codes . . . . .	18
3.1.1 Duale Codes . . . . .	20
3.1.2 Kontroll- und Generatormatrizen . . . . .	20
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>21</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Fortlaufend ergänzte Übersicht über relevante und abgegrenzte Teilgebiete der Informationstheorie . . . . .	2
2.1	Gegenstand der Codierungstheorie (nach [7, S. 1]) . . . . .	5
2.2	Vereinfachte Darstellung eines Information Transmission System (ITS) (nach [4, S. 3]) . . . . .	6
2.3	Visualisierung der Kugelinterpretation (nach [9]) . . . . .	8

# Abkürzungsverzeichnis

<b>BSC</b>	Binary Symmetric Channel
<b>EDV</b>	Elektronische Datenverarbeitung
<b>ITS</b>	Information Transmission System
<b>RSC</b>	Reed-Solomon-Codes

# 1 Einleitung

„The lesson here is that it is insufficient to protect ourselves with laws;  
we need to protect ourselves with mathematics.“  
– BRUCE SCHNEIER in [1]

In einer Welt, in der so viele Daten wie nie zuvor übertragen werden, digitale Kriegsführung und *Nation-state-attacks* nicht mehr bloß Gegenstand dystopischer Science-Fiction-Literatur, sondern Alltag sind, steigt die Relevanz kryptographischer Verfahren, die es ermöglichen, die Vertraulichkeit und Integrität schützenswerter Daten selbst unter der Annahme, dass Angreifenden nahezu unbegrenzte Ressourcen zur Verfügung stehen, sicherzustellen.

Das Forschungsgebiet der *Post-Quanten-Kryptographie* [vgl. 2] hat die Entwicklung kryptographischer Systeme zum Gegenstand, die selbst mit den durch Quantentechnologie anzunehmenden Rechenleistungssteigerungen nicht gebrochen werden können. Ein aussichtsreicher Kandidat dafür ist das *McEliece*-Kryptosystem, das auf linearen, fehlerkorrigierenden Codes basiert. Jene Verbindung der Codierungstheorie und Kryptographie ist Gegenstand dieser Arbeit: Basierend auf dem McEliece-Kryptosystem soll ein aufbauender Ansatz von HARALD NIEDERREITER betrachtet werden, der im Vergleich zum McEliece-Kryptosystem nicht auf *Goppa*-, sondern auf *Reed-Solomon*-Codes basiert und dadurch zwar bessere Rechenzeiten erreicht, jedoch vermutlich auch an Sicherheit einbüßt.

Diese Arbeit stellt zunächst die theoretischen Hintergründe der Codierungstheorie für kryptographische Zwecke dar, bevor basierend darauf die Arbeiten von MC ELIECE und NIEDERREITER analysiert und für die Entwicklung eines eigenen Kryptosystems genutzt werden. Auf jenes Verfahren werden abschließend Methoden der Kryptoanalyse unter Einbeziehung der Arbeit von SIDELNIKOV und SHESTAKOV angewandt, um Aussagen über die Sicherheit des Verfahrens treffen zu können.

## 1.1 Thematische Übersicht

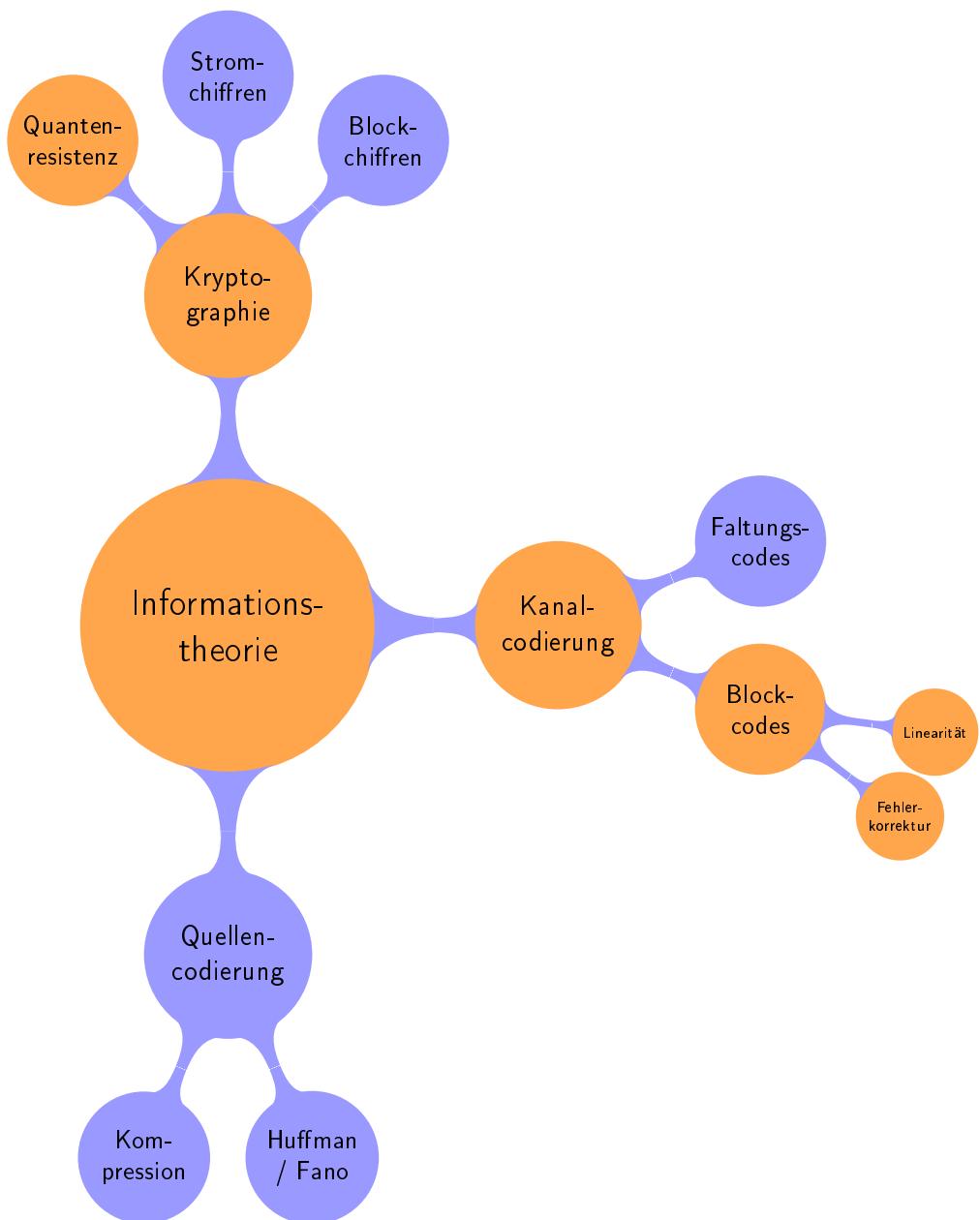


Abbildung 1.1: Fortlaufend ergänzte Übersicht über relevante und abgegrenzte Teilgebiete der Informationstheorie

<a

# 2 Codierungstheorie

Da im Rahmen dieser Arbeit ein kryptographisches Verfahren entwickelt wird, das auf Elementen der Codierungstheorie basiert, wird diese nun zunächst in Definitionen und Hintergründen dargestellt.

## 2.1 Übermittlung von Informationen

Sowohl in der Kryptographie, als auch in der Codierungstheorie fungieren **Nachrichten**, die über mit bestimmten Eigenschaften behafte **Kanäle** übertragen werden, als die Objekte der Anschauung.

### Definition 1

Eine **Nachricht**  $m$  sei definiert als eine endliche Folge von Zeichen  $a_i \in \Sigma$ , wobei  $\Sigma$  eine endliche Menge von Zeichen (genannt **Alphabet**) bezeichnet.

$$m = \langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n : a_i \in \Sigma$$

Ein typisches Alphabet sind die Zeichen der *ASCII*-Kodierung, mit denen nahezu alle Worte und Sätze der natürlichen englischen Sprache gebildet werden können [vgl. 3]. Dieses Alphabet besteht nun nicht aus Zeichen der natürlichen Sprache, sondern aus 7 Bit langen Zahlenwerten, was die Anwendung von Codes oder kryptographischen Verfahren ermöglicht. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass Zeichen stets in einem Zahlenformat repräsentiert werden.

Die Definition einer informationstheoretischen Nachricht impliziert eine Autorenschaft, folglich muss jeder Nachricht eine Partei (ein natürliche Person, ein System oder ein Dienst) zugeordnet werden können, die im Folgenden als **Sender**<sup>1</sup> der Nachricht bezeichnet wird. Wird diese Nachricht nun über einen Kanal an eine andere Partei übertragen, so nennen wir

---

<sup>1</sup>Da sich die Anwendung der modernen Kryptographie sehr überwiegend mit dem Austausch von verschlüsselten Nachrichten zwischen Systemen und nicht unmittelbar zwischen natürlichen Personen befasst, wird hier die männliche Form verwendet (Sender = Dienst/System).

diese den **Empfänger**. Entgegen der in der Kryptographie üblichen *Alice-Bob-Notation* wird in dieser Arbeit diese Terminologie beibehalten, um an den codierungstheoretischen Hintergrund anzuknüpfen.

Ein **Kanal** bezeichne ein Medium zur Datenübertragung wie beispielsweise einen elektrischen Leiter, einen Lichtwellenleiter oder die Luft für eine drahtlose Verbindung. Es gibt Kanäle, die Informationen **digital** übertragen, also als diskrete Binärwerte, und im Gegensatz dazu Kanäle, die fortlaufend und stetig Signale übertragen [vgl. 4, S. 1]. **Rauschen** bezeichne nicht-deterministische Daten, die Nachrichten bei einer Übertragung über einen Kanal unbeabsichtigt hinzugefügt werden und so die Nachricht verändern, sie folglich mit **Fehlern** versetzen [vgl. 5, S. 1].

## Definition 2

Ein **Kanal**  $K$  mit der Menge der Eingabewerte  $I$  und der Menge der Ausgabewerte  $J$  sei definiert als Matrix

$$K_{ij} = \Pr(j \mid i) \quad i \in I, j \in J$$

wobei  $\Pr(j \mid i)$  definiert sei als die Wahrscheinlichkeit für die Ausgabe  $j$  unter der Bedingung  $i$ .

Sofern mindestens ein Koeffizient der Matrix  $i \neq j$  einen Wert  $> 0$  aufweist, ist der Kanal **rauschend** [vgl. 6, S. 73f.].

## Beispiel 1

Ein **Binary Symmetric Channel (BSC)**  $\Gamma$  mit einer Bitfehlerwahrscheinlichkeit  $e$  ist definiert durch

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{00} & \Gamma_{01} \\ \Gamma_{10} & \Gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix}$$

Dass ein Kanal eine Nachricht ohne Rauschen überträgt, ist zwar ein erstrebenswerter Zustand, praktisch jedoch aufgrund der Physik nicht zu erreichen. Jede physische Datenübertragung verläuft nicht fehlerfrei, weshalb die Beziehung  $m = m'$  daher nur in einem theoretischen Idealfall gilt. Diese Feststellung liefert die Begründung für die Beschäftigung mit der Codierungstheorie.

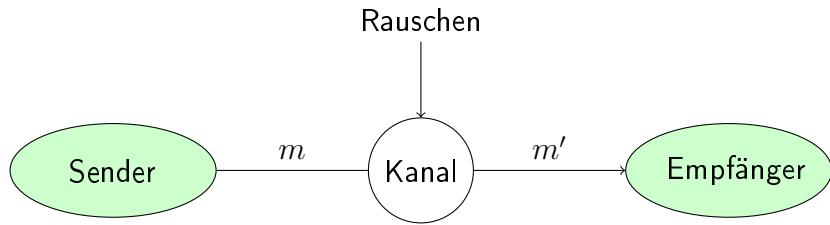


Abbildung 2.1: Gegenstand der Codierungstheorie (nach [7, S. 1])

## 2.2 Problemstellung und Zielsetzung

Da die Datenübertragung über eine Vielzahl von Kanälen eben nicht fehlerfrei verläuft, liegt es nahe, die Daten so zu übertragen, dass fehlende Bits aus dem Rest der Nachricht erschlossen werden können, wie es zum Beispiel bei natürlicher Sprache der Fall ist. Unsere Worte enthalten häufig Buchstaben, die nicht zwingend erforderlich sind, um das gemeinte Wort zu erkennen [vgl. 5, S. 3].

Überträgt man diese Erkenntnis auf Nachrichten einer beliebigen Sprache, so lassen sich auch im allgemeinen Fall durch das Hinzufügen von redundanten Informationen Nachrichten erzeugen, deren Informationsgehalt sich auch nach der Übermittlung nicht verringert hat. Ein spezieller Typ dieser Verfahren wird als **fehlerkorrigierende Codes** bezeichnet [vgl. 5, S. 3]. Diese Codes sind dem Gebiet der **Kanalcodierung** zuzurechnen, die das Ziel hat, die Qualität der Übertragung auf verlustbehafteten Kanälen sicherzustellen. Sie grenzt sich ab von der **Quellencodierung**, die Verfahren bündelt, welche die Transformation der zu versendenden Daten zum Ziel hat, beispielsweise zur Kompression und Redundanzverringerung [vgl. 8, S. 1]. Der Fokus dieser Arbeit liegt dabei auf der Kanalcodierung, da die betrachteten kryptographischen Verfahren auf ihr basieren.

## 2.3 Kanalcodierung

Die Relevanz der Frage, wie möglichst viele Übertragungsfehler in einer Datenübertragung vermieden oder korrigiert werden können, stieg mit der Verbreitung von EDV-Systemen und nicht zuletzt dem Internet rasant an [vgl. 4, S. 209]. Populäre Beiträge der Grundlagenforschung wie jener von HAMMING sind daher auch trotz ihres einige Dekaden umspannenden Alters Fundament der folgenden Definitionen.

### 2.3.1 Grundbegriffe

Um Codier- und Decodervorgänge beschreiben zu können, ist eine Erweiterung und Präzisierung der Abbildung 2.1 erforderlich. Die Zuordnung eines Codewortes  $c$  zu einer Nachricht  $m$  wird als **Codierung** (der Nachricht) bezeichnet.

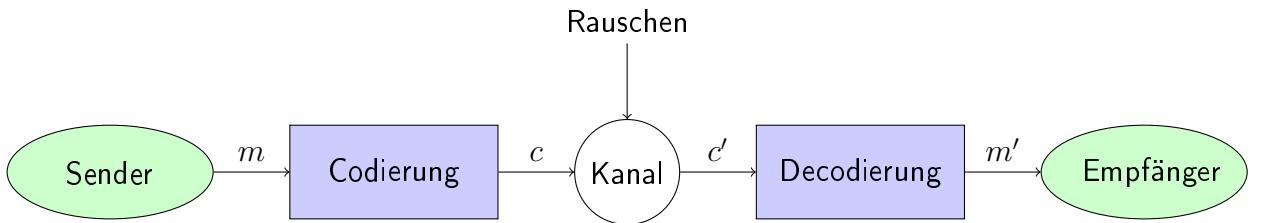


Abbildung 2.2: Vereinfachte Darstellung eines ITS (nach [4, S. 3])

#### Definition 3

Sei  $A$  ein Alphabet und  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann sei  $A^n$  die Menge aller  $n$ -Tupel der Form  $A^n = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in A\}$ .

Ein **Blockcode**  $C$  der Länge  $n$  über dem Alphabet  $A$  ist definiert als  $C \subseteq A^n$ , wobei  $|C| > 0$  gelten muss.

Ist  $m = |C|$  und  $B$  mit  $|B| < m$  die Menge zu codierender Informationseinheiten über einem Alphabet  $A'$ , so ist jede injektive Abbildung  $f: B \rightarrow C$  eine **Codierfunktion** [vgl. 8, S. 10].

Neben Blockcodes können auch sogenannte **Faltungscodes** zur Fehlerkorrektur verwendet werden. Hierbei werden die Informationen nicht unabhängig voneinander blockweise codiert, sondern über Schieberegister in Abhängigkeit zueinander, wodurch sich eine bessere Performanz im Gegensatz zu Blockcodes ergibt [vgl. 10, S. 752]. Der Ansatz, Daten blockweise oder als Datenstrom über Schieberegister zu codieren, weist Parallelen zur kryptographischen Unterscheidung zwischen Block- und Stromchiffren auf. Der Fokus dieser Arbeit wird aufgrund der kryptographischen Bedeutung auf Blockcodes liegen.

Als Maß der Qualität einer Übertragung beziehungsweise der Verfälschung einer Nachricht durch Rauschen, aber auch für die Unterscheidbarkeit von Codeworten, bietet sich die **Hamming-Distanz** an.

**Definition 4**

Seien  $a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \in A^n$  und  $A$  ein Alphabet, so ist die **Hamming-Distanz**  $d$  von zwei Codeworten  $a$  und  $b$  definiert als die Anzahl der abweichenden Stellen in  $a$  und  $b$ :

$$d(a, b) = |\{i \mid 1 \leq i \leq n, a_i \neq b_i\}|$$

Des Weiteren sei die **Minimaldistanz** eines Blockcodes  $C$  mit  $|C| > 1$  definiert als

$$d(C) = \min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$$

[vgl. 8, S. 11] [vgl. 11, S. 105] [vgl. 9, S. 155].

**Beispiel 2**

Seien  $A = \{0, 1\}$  und  $n = 5$ . Dann ist  $A^n = \{\langle 0, 0, 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle, \dots, \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle\}$ . Dann gilt für einen Blockcode  $C$ :

- $C = A^n \rightarrow d(C) = 1$
- $C = \{\langle 0, 0, 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 0, 0, 1, 0 \rangle, \dots, \langle 1, 0, 0, 0, 0 \rangle\} \rightarrow d(C) = 2$
- $C = \{\langle 0, 1, 0, 1, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1, 0, 1 \rangle\} \rightarrow d(C) = 5$

Wenn die Werte einer Codierungsfunktion im Bildbereich weit verstreut sind, der Code also eine große Minimaldistanz aufweist, werden die einzelnen Codeworte unterscheidbar. Folglich ergibt sich aus der Minimaldistanz ein relevantes Kriterium für die Eigenschaft eines Codes, **fehlererkennend** oder sogar **fehlerkorrigierend** zu sein. Sie beeinflusst, wie viele Fehler erkannt beziehungsweise korrigiert werden können [vgl. 9, S. 155].

HAMMING nutzt für seine Argumentation in [9] eine geometrische Betrachtung:

**Definition 5**

Sei  $B$  eine Kugel mit Radius  $r \geq 2$  und Mittelpunkt  $x \in A^n$ . Dann liegen alle  $a_i \in A^n$  mit  $d(a_i, x) = r$  auf der Kugeloberfläche von  $B$ . Sei  $C \subseteq A^n$  nun ein Blockcode mit  $d(C) = r$  und  $x \in C$ . Dann liegen alle  $c \in (C \setminus \{x\})$  auf der Kugeloberfläche oder außerhalb der Kugel  $B$ .

**Bemerkung 1**

Ein Punkt  $a_j \neq x$  mit  $d(a_j, x) < r$  unterscheidet sich in weniger als  $r$  Stellen von  $x$ ) liegt nicht auf der Kugeloberfläche und kann folglich kein fehlerfreies Codewort sein. Ein Code  $C$  mit Minimaldistanz 2 ist damit **fehlererkennend** für maximal ein falsch übertragenes Zeichen (notiert: „1-fehlererkennend“).

Ferner ist ein Code  $C'$  mit Minimaldistanz 3 **fehlerkorrigierend**: Sei  $a_r$  ein gültiges Codewort mit einer Minimaldistanz von 3 zu allen anderen Codeworten in  $C'$ . Für ein in einer Stelle abweichendes Wort  $a_f$  gilt folglich  $d(a_r, a_f) = 1$ , aber  $\forall a_i \in C' \setminus \{a_r, a_f\} : d(a_i, a_f) > 1$ . Damit lässt sich  $a_f$  eindeutig  $a_r$  zuordnen, wodurch sich der Fehler korrigieren lässt und  $C'$  **1-fehlerkorrigierend** ist [vgl. 9, S. 155f.].

Die Eigenschaft eines Codes, fehlererkennend oder fehlerkorrigierend zu sein, ist skalierbar:

**Definition 6**

Seien  $c, c' \in C; c \neq c'$  Codeworte eines Blockcodes  $C \in A^n$ ,  $\epsilon \in \mathbb{N}$ ,  $B_e(c) = \{x \in A^n \mid d(x, c) \leq \epsilon\}$  und  $B_e(c')$  analog  $B_e(c') = \{x \in A^n \mid d(x, c') \leq \epsilon\}$ .

Dann ist  $C$   $\epsilon$ -**fehlerkorrigierend**, wenn  $\forall c, c' \in C : B_e(c) \cap B_e(c') = \emptyset$  gilt [vgl. 8, S. 12f.].

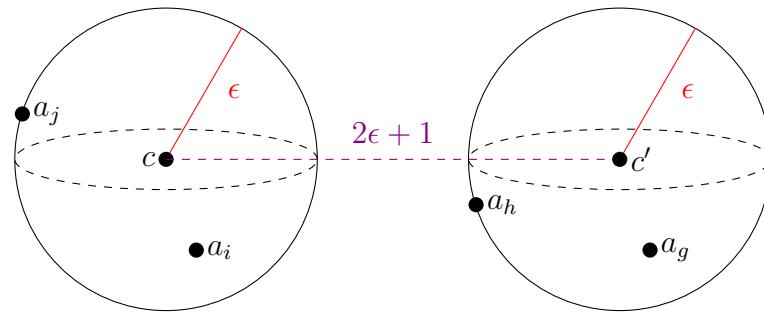


Abbildung 2.3: Visualisierung der Kugelinterpretation (nach [9])

**Bemerkung 2**

Ein Blockcode  $C$  ist  $\epsilon$ -fehlerkorrigierend, wenn  $d(C) \geq 2 \cdot \epsilon + 1$  gilt [vgl. 8, S. 12f.].

**Definition 7**

Sei  $c \in C$  Codewort eines Blockcodes  $C \in A^n$  und  $B_t(c) = \{x \in A^n \mid d(x, c) \leq t\}$  die zu

$c$  gehörige Kugel mit allen Elementen aus  $A^n$ , die höchstens  $t$  entfernt sind.

Dann ist  $C$   **$t$ -fehlererkennend**, wenn  $\forall c \in C : B_t(c) \cap (C \setminus \{c\}) = \emptyset$ , die Kugel um  $c$  also keine anderen Codeworte enthält [vgl. 8, S. 13].

### Bemerkung 3

Ein Blockcode  $C$  ist  $t$ -fehlererkennend, wenn  $d(C) \geq t + 1$  gilt [vgl. 8, S. 13].

### Beispiel 3

Sei  $A = \{0, 1\}$  und  $A^3 = \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \dots, \langle 1, 1, 1 \rangle\}$ . Ferner sei  $C \in A^3$  ein Blockcode für Nachrichten der Form  $m = \langle m_1, m_2 \rangle$  mit der Codierfunktion  $f: M \rightarrow C, \langle m_1, m_2 \rangle \mapsto \langle m_1, m_2, ((m_1 + m_2) \bmod 2) \rangle$ .

Für die Nachricht  $x = \langle 0, 1 \rangle$  ergibt sich also  $f(x) = \langle 0, 1, 1 \rangle$ .

Dann ist  $C = \{\langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle\}$ . Daraus folgt  $d(C) = 2$ . Damit ist  $C$  1-fehlererkennend, da  $2 = 1 + 1$ , aber nicht fehlerkorrigierend, da  $2 \not\geq 2 \cdot 1 + 1$  gilt.

Welches Potenzial von fehlerkorrigierenden Codes für das zugrundeliegende Problem ausgeht, verdeutlicht das folgende Theorem:

### 2.3.2 Noisy Channels Coding Theorem

SHANNON konnte 1948 zeigen, dass es für einen binären, symmetrischen und rauschenden Kanal (BSC) Codes gibt, bei der die auftretende Fehlerwahrscheinlichkeit beliebig klein wird, solange sich die Datenrate der Übertragung unterhalb der Kapazität eines Kanals befindet.

#### Theorem 1

Sei  $C$  die **Kapazität** eines binären, rauschenden Kanals,  $n$  die Länge uniformer Codeworte,  $P(E)$  die Fehlerwahrscheinlichkeit und  $D$  die Datenübertragungsrate, wobei  $D < C$ . Dann gilt

$$P(E) \leq 2^{-n \cdot e(D)}$$

wobei  $e(D)$  eine vollständig von Kanalparametern abhängige positive Funktion, genannt **Fehlerexponent**, ist.

Folglich ist es möglich, Datenübertragungsvorgänge unter der Wahl einer geeigneten Datenübertragungsrate und einer Codierung nahezu fehlerfrei umzusetzen, völlig unabhängig von der Länge der zu übertragenden Nachricht. Es folgt auch, dass sich die Fehleranzahl nicht linear zur Fehleranfälligkeit (angegeben durch die Kapazität) des Kanals verhält [vgl. 4, S. 209ff.].

## 2.4 Finitfeldarithmetik

Viele der in der Praxis häufig eingesetzten Codierfunktionen basieren auf der Arithmetik in endlichen Körpern und *Galois*-Feldern, die im Folgenden eingeführt werden.

Ausgangspunkt der Definition von endlichen Körpern ist nach LIDL UND NIEDERREITER die algebraische Struktur der **Gruppe**.

### 2.4.1 Gruppen

#### Definition 8

Sei  $G$  eine Menge und  $\circ$  eine binäre Relation  $\circ : G \times G \rightarrow G$  mit folgenden Eigenschaften:

1. **Assoziativität:**

$$\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) \Leftrightarrow (a \circ b) \circ c$$

2. **Existenz eines neutralen Elements:**

$$\exists e \in G, \forall a \in G : a \circ e \Leftrightarrow e \circ a \Leftrightarrow a$$

3. **Existenz inverser Elemente:**

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} \Leftrightarrow a^{-1} \circ a \Leftrightarrow e$$

Dann ist  $(G, \circ)$  eine **Gruppe**.

Gilt für eine Gruppe zudem  $\forall a, b \in G : a \circ b \Leftrightarrow b \circ a$ , so ist sie **kommutativ**, auch bezeichnet als **abelsch** [vgl. 12, S. 2].

#### Beispiel 4

Gegeben seien die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und eine binäre Relation.

- $(\mathbb{Z}, +)$ , wobei  $+$  die Addition bezeichne, ist eine **abelsche Gruppe**, da die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Assoziativität:

Seien  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt mit dem Distributivgesetz der Addition  $a+(b+c) \Leftrightarrow a+b+c \Leftrightarrow (a+b)+c$

2. Existenz eines neutralen Elements:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x+0 \Leftrightarrow 0+x \Leftrightarrow x$$

3. Existenz inverser Elemente:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists -x \in \mathbb{Z} : x+(-x) = 0$$

4. Kommutativität:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a+b \Leftrightarrow b+a$$

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ , wobei  $\cdot$  die Multiplikation bezeichne, ist keine Gruppe, da die inversen Elemente zu Elementen von  $\mathbb{Z}$  nicht Teil von  $\mathbb{Z}$  sind.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \cdot \frac{1}{x} = 1, \text{ aber } \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$$

### Definition 9

Eine multiplikative Gruppe ist **zyklisch**, sofern

$$\exists a \in G, \forall b \in G, \exists j \in \mathbb{Z} : b = a^j$$

Dann ist  $a$  ein **Generator** der multiplikativen Gruppe<sup>2</sup>  $G$  [vgl. 12, S. 3f.]. Die Gruppe ist durch  $G = \langle a \rangle$  hinreichend beschrieben.

**Kryptographische Bedeutung** Zu Gruppen existieren einige mathematische Probleme, die sich für kryptographische Verfahren anbieten. MYASNIKOV, USHAKOV UND SHPILRAIN stellen in [13] kryptographische Protokolle dar, die beispielsweise auf dem *Konjugationssuchproblem* nicht-kommutativer Gruppen basieren:

Für zwei Elemente  $u, v \in G$  einer Gruppe  $G$  soll mindestens ein  $x \in G$  gefunden werden, sodass  $u^x = v$  gilt. Ist kein anderer Algorithmus für dieses Problem für die Gruppe  $G$  bekannt, so lässt sich  $x \rightarrow u^x$  als Einwegfunktion auffassen und so ein kryptographisches

---

<sup>2</sup>Wird zu einer Gruppe keine binäre Relation angegeben, handelt es sich implizit um eine multiplikative Verknüpfung.

Protokoll konstruieren [vgl. 13, S. 37f.].

Abhängig davon, ob eine Gruppe abelsch ist oder nicht, lassen sich unterschiedliche Such- oder Entscheidungsprobleme zur Konstruktion kryptographischer Verfahren verwenden, die in [13] dargestellt, aber in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden.

## 2.4.2 Körper

### Definition 10

Ein **Ring**  $(R, +, \circ)$  ist eine nicht-leere Menge  $R$  mit den zwei auf ihr definierten binären Relationen, notiert durch  $+$  und  $\circ$ , für die gilt:

- $R$  ist abelsche Gruppe bezüglich der Operation  $+$
- Die Operation  $\circ$  ist assoziativ, folglich gilt

$$\forall a, b, c \in R : (a \circ b) \circ c \Leftrightarrow a \circ (b \circ c)$$

- Das Distributivgesetz gilt, also ist

$$\forall a, b, c \in R : (a \circ (b + c)) \Leftrightarrow (a \circ b + a \circ c) \wedge ((b + c) \circ a) \Leftrightarrow (b \circ a + c \circ a)$$

Ein Ring ist **kommutativ**, wenn die Operation  $\circ$  kommutativ ist. Ferner ist ein Ring ein **Divisionsring**, falls  $(R \setminus \{0\}, \circ)$  eine Gruppe bildet [vgl. 12, S. 13][vgl. 14, S. 1f.].

Ein Ring beinhaltet folglich eine Gruppe, jedoch auch eine Operation, die nicht notwendigerweise die Anforderungen an eine Gruppe erfüllt. Da beispielsweise der Menge  $\mathbb{Z}$  inverse Elemente bezüglich der Multiplikation fehlen, so ist  $(\mathbb{Z}, +, \circ)$  dennoch ein Ring, wenn auch kein Divisionsring.

### Definition 11

Ein kommutativer Divisionsring wird als **Feld** oder **Körper** bezeichnet [vgl. 12, S. 13].

Um nun endliche Körper und *Galois-Felder* definieren zu können, ist das Konzept der **Restklasse** unabdingbar, das nun zunächst wieder auf Ringen definiert wird.

**Definition 12**

Sei  $R$  ein Ring. Dann ist  $J$  ein **Unterring** von  $R$ , falls  $J$  abgeschlossen ist unter beiden Operationen  $+$  und  $\circ$  [vgl. 12, S. 13].

**Bemerkung 4**

Abgeschlossenheit bezeichnet hier, dass das Ergebnis der Operation auf zwei beliebigen Elementen des Rings ein Element ergibt, das wiederum Element des Rings ist.

**Definition 13**

Ferner ist  $J$  ein **Ideal** von  $R$ , falls  $J$  ein Unterring von  $R$  ist und

$$\forall a \in J, r \in R : ((ar \in J) \wedge (ra \in J))$$

gilt [vgl. 12, S. 13].

Gilt  $I = (a)$  für ein  $a \in I$ , so ist  $I$  ein von  $a$  erzeugtes **Hauptideal**.

**Bemerkung 5**

Ein Ideal ist nun nicht mehr nur bezüglich eigenen Elementen und beiden Operationen abgeschlossen, sondern in Bezug auf die Multiplikation auch bezüglich Elementen des übergeordneten Rings.

**Definition 14**

Sei  $R$  eine Restklasse,  $a \in R$  und  $J$  ein Ideal von  $R$ . Die **Restklasse** von  $a \bmod J$  sei definiert als Menge aller Elemente der Form  $a + c \in R, \forall c \in J$  [vgl. 12, S. 13][vgl. 14, S. 10]:

$$[a] = a + J = \{a + c \in R : c \in J\}$$

**Bemerkung 6**

Zwei Elemente  $a, b \in R$  sind *kongruent* modulo  $J$ , wenn sie Elemente der gleichen Restklasse bezüglich  $J$  sind, geschrieben  $a \equiv b \bmod J$ .

Auch auf Restklassen lassen sich die Operationen eines Rings anwenden:

$$(a + J) + (b + J) = (a + b) + J$$

$$(a + J) \circ (b + J) = ab + J$$

**Bemerkung 7**

Durch diese beiden Operationen auf Restklassen entsteht ein Ring, der als **Restklassenring** bezeichnet und mit  $R/J$  notiert wird [vgl. 12, S. 13f.] [vgl. 14, S. 10].

**Beispiel 5**

Ein klassisches Beispiel für einen auf diese Weise entstandenen Restklassenring ist  $\mathbb{Z}/(p)$ ,  $p \in \mathbb{P}$ , wobei  $\mathbb{P}$  die Menge aller Primzahlen bezeichnet. Hier ist  $(p)$  ein durch  $p$  generiertes Hauptideal. Dieser Ring ist ein Feld, wie in [12] bewiesen wird und aufgrund der endlichen Anzahl an Elementen **finit**. Die Elemente sind beschrieben durch

$$\{[0] = 0 + (n), [1] = 1 + (n), \dots\}$$

Der Restklassenring  $\mathbb{Z}/(3)$  enthält die Elemente  $[0], [1]$  und  $[2]$ .

Für *Galois-Felder* wird nun lediglich noch eine spezieller Abbildungstyp zwischen Ringen benötigt:

**Definition 15**

Eine Abbildung  $\phi: R \rightarrow S$ , wobei  $R$  und  $S$  Ringe sind, ist ein **Homomorphismus**, falls

$$\forall a \in R \wedge \forall b \in S : \quad \phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad \wedge \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

[vgl. 12, S. 14] [vgl. 14, S. 8]

**Definition 16**

Sei  $p \in \mathbb{P}$ . Dann sei  $\mathbb{F}_p$  die Menge  $\{0, 1, \dots, p - 1\}$  und  $\phi: \mathbb{Z}/(p) \rightarrow \mathbb{F}_p$  eine homomorphe Abbildung, die jeder Restklasse aus  $\mathbb{Z}/(p)$  das entsprechende Element der Menge  $\mathbb{F}_p$  zuordnet.  $\mathbb{F}_p$  wird dann als **Galois-Feld** der Ordnung  $p$  bezeichnet [vgl. 12, S. 15].

**Beispiel 6**

Beispiele für endliche Körper sind:

- $\mathbb{F}_2 = \{[0], [1]\}$
- $\mathbb{F}_3 = \{[0], [1], [2]\}$ , beispielsweise  $\{0, 1, -1\}$

Neben *Galois-Feldern*, die auf diese Weise erzeugt wurden, bilden auch alle Primzahlpotenzen  $p^f, p \in \mathbb{P}$  und  $f \in \mathbb{N}$  jeweils einen endlichen Körper.

**Theorem 2**

Für jede Primzahlpotenz  $p^f, p \in \mathbb{P}$  und  $f \in \mathbb{N}$  gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen endlichen Körper  $K$  mit  $|K| = p^f$ .

Die durch Primzahlpotenzen entstandenen endlichen Körper basieren nun nicht bloß auf den Restklassen des Unterkörpers  $\mathbb{F}_p$ , sondern werden mit **Polynomen** erweitert.

### 2.4.3 Polynome

# 3 Lineare fehlerkorrigierende Codes für kryptographische Zwecke

Mithilfe der vorgestellten Polynome soll nun eine Klasse von Blockcodes betrachtet werden, zu der auch *Reed-Solomon-Codes* und *Goppa-Codes*, die beiden Codes aus den Verfahren von NIEDERREITER und MC ELIECE, zählen. Diese Klasse wird als **lineare Codes** bezeichnet.

Für die Definition linearer Codes ist eine Wiederholung der algebraischen Struktur des **Vektorraums** notwendig. In [15] ist folgende Definition zu finden:

## Definition 17

Sei  $K$  ein Körper. Eine Menge  $V$  mit einer additiven Verknüpfung

$$+: V \times V \rightarrow V; \quad \langle v, w \rangle \mapsto v + w$$

und einer Skalarmultiplikation

$$\cdot: K \times V \rightarrow V; \quad \langle \lambda, v \rangle \mapsto \lambda \cdot v$$

heißt  **$K$ -Vektorraum**, sofern

- $(V, +)$  ist **abelsche Gruppe**
- Die Skalarmultiplikation ist sowohl bezüglich des Skalars als auch der Komponente distributiv und assoziativ, ferner existiert ein neutrales Element. So muss  $\forall \lambda, \mu \in K, v, w \in V$  gelten:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$$

$$1 \cdot v = v$$

[vgl. 15, S. 95]

Vektorräume beinhalten folglich Vektoren beliebiger Dimension, deren Komponenten addiert und mit Skalaren multipliziert werden können. Für die Definition linearer Codes ist es erforderlich, Primzahlkörper  $\mathbb{F}_{q^n}$  als Vektorräume aufzufassen.

### Theorem 3

Endliche Körper  $\mathbb{F}_q^n$  bilden  $\mathbb{F}_q$ -Vektorräume.

*Beweis.* Es bietet sich an, induktiv vorzugehen:

- **Annahme:**  $\mathbb{F}_q^n$  bildet einen Vektorraum  $V(q, n)$ .
- **Induktionsanfang:** Zu zeigen ist, dass  $\mathbb{F}_q^1$  die Forderungen eines Vektorraums erfüllt.
  - Die Forderung danach, dass  $(\mathbb{F}_q, +)$  eine abelsche Gruppe bildet, folgt unmittelbar aus der Körperdefinition.
  - Die Forderungen nach Distributivität und Assoziativität der Skalarmultiplikation bzw. Addition folgen direkt aus der Ringeigenschaft, da  $\lambda, \mu, v \in \mathbb{F}_q^1$ .
  - Die Existenz eines neutralen Elements bezüglich der Skalarmultiplikation ergibt sich daraus, dass gemäß Definition  $q \geq 2 > 1 \Rightarrow 1 \in \mathbb{F}_q$  gilt.
- **Induktionsschritt**  $1 \rightarrow n$ : Sei die komponentenweise Addition induktiv definiert als

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$

und die Skalarmultiplikation als

$$k \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2, \dots, k \cdot v_n)$$

. Alle obigen Forderungen folgen damit induktiv und  $\mathbb{F}_q^n$  ist ein  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum.

□

### Definition 18

Ein **Untervektorraum**  $W$  eines Vektorraums  $V$  ist eine Teilmenge  $W \subset V$ , sofern gilt:

- $W \neq \emptyset$
- $v, w \in W : v + w \in W$
- $v \in W, \lambda \in K : \lambda \cdot v \in W$

[vgl. 15, S. 96]

### Definition 19

Sei  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper,  $|K| = q$ . Dann ist ein Blockcode  $C$  ein **linearer Code** mit dem Alphabet  $\mathbb{F}_q$  und Länge  $n$ , falls die Menge  $C$  ein **Untervektorraum** von  $\mathbb{F}_{q^n}$  ist [vgl. 8, S. 29].

Folglich beschreibt ein linearer Code Tupel der Länge  $n$  mit Komponenten aus  $\mathbb{F}_q$ . Ferner stellt die Untervektorraum-Eigenschaft sicher, dass die Addition von Codeworten und die Multiplikation eines Codewortes mit einem Skalar aus dem übergeordneten endlichen Körper  $\mathbb{F}_q$  weiterhin valide Codeworte erzeugt. Dies ist eine elementare Eigenschaft linearer Codes.

Eine Subklasse der linearen Codes sind die **zyklischen Codes**.

### Definition 20

Ein  $k$ -dimensionaler Untervektorraum  $C$  von  $\mathbb{F}_q^n$  ist dann ein **zyklischer Code**, wenn

$$\forall \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle \in C : \quad \langle a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \rangle \in C$$

gilt [vgl. 5, S. 42].

Ein linearer Code ist folglich dann zyklisch, falls zu jedem Codewort auch das Codewort Teil des Codes ist, das durch eine zyklische Verschiebung entsteht. Ein solcher Code ist beispielsweise der *Reed-Solomon-Code*, der Gegenstand des nächsten Abschnitts ist.

## 3.1 Reed-Solomon-Codes

Die grundlegende Idee von linearen zyklischen Codes über Polynomen besteht darin, Fehler über Interpolation zu korrigieren. Bildlich gesehen soll also ein Codewort konstruiert werden, dessen einzelnen Komponenten entlang einer interpolierbaren Abbildung aufgereiht sind. Sollte nun ein Übertragungsfehler die Lage eines Punktes (also einer Komponente) verändern, so ist die korrekte Lage durch die anderen Punkte jedoch hinreichend bestimmt und kann korrigiert werden.

**Idee** Eine Nachricht der Länge  $k$  in Form eines Elementes eines endlichen Körpers  $\mathbb{F}_q^k$  kann als Polynom aufgefasst werden, indem die entsprechenden Komponenten der Nachricht die Koeffizienten des Polynoms bilden. Werden nun  $n$  paarweise verschiedene Stützstellen aus dem dem Code zugrundeliegenden Körper  $\mathbb{F}_q^n$  ausgewählt, so ergibt die Auswertung des Polynoms an den jeweiligen Stützstellen die Komponenten eines betrachteten Codewortes.

Durch bereits  $k$  Komponenten des Codewortes ist das Polynom hinreichend bestimmt, sodass  $n - k$  Punkte, die nicht auf dem Polynom liegen, als Fehler erkannt und korrigiert werden können.

### Definition 21

Sei  $u = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle \in \mathbb{F}_q^n$ , wobei  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : u_i \neq u_j$ . Dann ist  $a = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \in \mathbb{F}_q^n$  ein Codewort eines **Reed-Solomon-Codes**  $C$  mit Länge  $n$ , Dimension  $k$  und Minimaldistanz  $d$ , falls gilt:

$$C = \{a \mid a_i = f(u_i), \deg f(x) < k, f \in \mathbb{F}_q^n[x]\}$$

[vgl. 16, S. 9]

### Beispiel 7

Sei  $a = \langle 0, 1, 2, 1 \rangle \in \mathbb{F}_7^4$ . Dann ist  $f(X) = 0 + 1 \cdot X + 2 \cdot X^2 + 1 \cdot X^3 \in \mathbb{F}_7[X]$  ein dazugehöriges Polynom.

Betrachtet werde nun ein **Reed-Solomon-Code**  $C$  mit Länge  $n = 7$  und Dimension  $k = 4$ :

$$C = \{a \mid a_i = f(u_i), \deg f(x) < 4, f \in \mathbb{F}_7^7[x]\}$$

- Gewählt sind folglich  $n$  paarweise verschiedene Stützstellen, deren Wahlfreiheit in  $\mathbb{F}_7$  lediglich in der Anordnung besteht. Möglich ist beispielsweise  $u = \langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rangle \in \mathbb{F}_7^7$ .

• Auswertung:

Stützstelle $u_i$	0	1	2	3	4	5	6
Auswertung $f(u_i)$	0	4	4	6	2	5	0

- Folglich ergibt sich das Codewort  $c = \langle 0, 4, 4, 6, 2, 5, 0 \rangle \in \mathbb{F}_7^7$ .

Nun wird in der Literatur gelegentlich auch der zu einem **Reed-Solomon-Code duale Code** verwendet:

### 3.1.1 Duale Codes

#### Definition 22

Sei  $C$  ein linearer  $[n, k, d]_q$ -Code mit Länge  $n$ , Dimension  $k$  und Minimaldistanz  $d$  über einem Körper  $\mathbb{F}_q$ . Ferner bezeichne die Operation  $\circ$  das Skalarprodukt über dem Untervektorraum  $\mathbb{F}_q^n$ , das definiert ist durch

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \circ \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle = \langle a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n \rangle$$

Nun ist der zu  $C$  **duale Code**  $C^\perp$  definiert als

$$C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_p^n \mid v \circ c = 0, \forall c \in C\}$$

[vgl. 8, S. 35f.]

Diese Definition mag an die aus der linearen Algebra im Reellen bekannte Definition von Orthogonalität („Rechtwinkligkeit“) erinnern, jedoch lässt sich dies auf die hier betrachteten Körper nicht übertragen, unter Anderem, da es auch **selbstduale** Codes gibt [vgl. 8, S. 36].

#### Bemerkung 8

Der zu einem  $[n, k, d]_q$ -Code  $C$  duale Code  $C^\perp$  ist ein  $[n, n - k, d]_q$ -Code [vgl. 8, S. 36].

Wird ein dualer Code zu einem dualen Code eines linearen Codes  $C$  gebildet, so ist dieser  $C$ , also gilt:

$$((C)^\perp)^\perp = C$$

### 3.1.2 Kontroll- und Generatormatrizen

Da lineare Codes wie gezeigt Vektorräume bilden, ist die Angabe von **Basen** möglich. Durch die Definition der Dualität von Codes zueinander, können **Generator-** und **Kontrollmatrizen** angegeben werden.

#### Definition 23

Sei  $C$  ein linearer  $[n, k, d]_q$ -Code und  $C^\perp$  der duale Code zu  $C$ .

Ferner sei  $(\langle h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1n} \rangle, \langle h_{21}, \dots, h_{2n} \rangle, \dots, \langle h_{(n-k)1}, \dots, h_{(n-k)n} \rangle)$  eine Basis zu  $C^\perp$ .

# Literaturverzeichnis

- [1] B. Schneier, *Applied Cryptography: Protocols, Algorithms and Source Code in C*, 20th anniversary edition. Indianapolis: John Wiley und Sons, 2015, ISBN: 978-1-119-09672-6. Adresse: <https://www.schneier.com/books/applied-cryptography-2preface/> (besucht am 06. 11. 2022).
- [2] D. J. Bernstein, J. Buchmann und E. Dahmen, Hrsg., *Post-Quantum Cryptography*. Heidelberg: Springer, 2009, ISBN: 978-3-540-88701-0.
- [3] V. Cerf, „ASCII format for Network Interchange,“ RFC Editor, RFC 20, Okt. 1969, S. 1–56. DOI: 10.17487/RFC0020.
- [4] M. Borda, *Fundamentals in Information Theory and Coding*, 1. Aufl. Berlin: Springer, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-20347-3.
- [5] J. H. van Lint, *Coding Theory*, Lecture Notes in Mathematics, A. Dold und B. Eckmann, Hrsg. Berlin: Springer, 1973, ISBN: 3-540-06363-3.
- [6] N. L. Biggs, *Codes: An Introduction to Information Communication and Cryptography* (Springer Undergraduate Mathematics Series). London: Springer, 2008, DHBW-Bestand. DOI: 10.1007/978-1-84800-273-9.
- [7] W. Willems, *Codierungstheorie und Kryptographie*. Basel: Birkhäuser, 2008. DOI: 10.1007/978-3-7643-8612-2.
- [8] O. Manz, *Fehlerkorrigierende Codes*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-658-14652-8>.
- [9] R. W. Hamming, „Error detecting and error correcting codes,“ *The Bell system technical journal*, Jg. 29, Nr. 2, S. 147–160, 1950. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x.
- [10] A. Viterbi, „Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems,“ *IEEE Transactions on Communication Technology*, Jg. 19, Nr. 5, S. 751–772, 1971. DOI: 10.1109/TCOM.1971.1090700.
- [11] S. Roman, *Coding and Information Theory* (Graduate Texts in Mathematics). New York: Springer, 1992, Bd. 134, ISBN: 3-540-97812-7.

- [12] R. Lidl und H. Niederreiter, „Algebraic Foundations,“ in *Finite Fields* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications), 2. Aufl., Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1996, S. 1–46, UB-Bestand. DOI: 10.1017/CBO9780511525926.003.
- [13] A. Myasnikov, A. Ushakov und V. Shpilrain, *Group-based Cryptography* (Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona). Basel: Birkhäuser, 2008, DHBW-Bestand. DOI: 10.1007/978-3-7643-8827-0.
- [14] J. M. Howie, *Fields and Galois Theory* (Springer Undergraduate Mathematics Series). London: Springer, 2006, UB-Bestand. DOI: 10.1007/978-1-84628-181-5.
- [15] G. Fischer und B. Springborn, *Lineare Algebra, Eine Einführung für Studienanfänger* (Grundkurs Mathematik), 19. Aufl. Berlin: Springer, 2020. DOI: 10.1007/978-3-662-61645-1.
- [16] C. Mahr, *Zur Codierung von RS-, BCH- und Goppa-Codes* (Fortschritt-Berichte 95). Düsseldorf: VDI-Verlag, 1988, Bd. 10, UB-Bestand (Magazin).