Національний Технічний Університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів та систем

Чисельні методи

Лабораторна робота №2

Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) ітераційними методами. Метод простої ітерації. Метод Зейделя

Зміст

1 Теоретичні відомості

Ітераційними методами є такі, що навіть у припущенні, що обчислення ведуться без округлень, дозволяють отримати розв'язок системи лише із заданою точністю. До таких методів відносяться метод простої ітерації (метод Якобі) та метод Зейделя.

Будемо розглядати системи вигляду

$$Ax = b, \quad (1)$$

де A $(n \times n)$ - матриця системи, b - вектор правої частини, x - вектор розв'язку.

Метод простої ітерації.

Систему $Ax = b$ приводять до вигляду

$$x = Cx + d, \quad (2)$$

де C - деяка матриця, для якої виконується

$$\alpha = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \alpha = \max_j \sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| < 1 \text{ або } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 < 1 \quad (3)$$

d - вектор-стовпець.

Умова (3) буде виконана, якщо матриця А є матрицею з діагональною перевагою, для якої $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ або $|a_{jj}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Розглянемо спосіб зведення (1) до (2). Запишемо (1) у розгорнутій формі:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i = 0, i = \overline{1,n} \quad (4)$$

Якщо $a_{ii} \neq 0$ для всіх i, то можна (4) зобразити у вигляді

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i = \overline{1, n} \quad (5)$$

Звідси отримуємо значення елементів матриці C та вектору d:

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \qquad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \ i = \overline{1, n}$$

Запишемо розв'язок у матричному вигляді. Нехай матрицю A задано у вигляді:

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де A_1 – нижня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю; D – діагональна матриця з a_{ii} на головній діагоналі; A_2 – верхня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю. За припущенням $a_{ij} \neq 0$ для всіх i, існує D^{-1}. Тоді зображенню у формі (5) відповідає

$$x = -D^{-1} A_1 x - D^{-1} A_2 x + D^{-1} b$$

або

$$x = -D^{-1} (A_1 + A_2) x + D^{-1} b \,.$$

Якщо матриця А не забезпечує виконання (3), тобто не є матрицею з діагональною перевагою, її приводять до такої за допомогою еквівалентних перетворень.

Виходячи з довільного вектора $x^{(0)}$ (можна взяти вектор b, або вектор b, поділений на діагональ матриці A) будують ітераційний процес:

$$x^{(k+1)} := Cx^{(k)} + d$$

або

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} (A_1 + A_2) x^{(k)} + D^{-1} b$$

Критерій закінчення ітераційного процесу:

$$\max_j |x_j^{k+1} - x_j^k| < \varepsilon \,.$$

Метод Зейделя.

Цей метод – модифікація методу простої ітерації. В цьому методі вже знайдені компоненти беруть у правій частині співвідношення з (n+1)-го наближення, а інші – з n-го наближення:

$$x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b}{a_{ii}},\ i = \overline{1, n}.$$

Або у матричному вигляді:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} A_1 x^{(k+1)} - D^{-1} A_2 x^{(k)} + D^{-1} b .$$

Умови застосування методу Зейделя, критерій закінчення ітерацій такі самі, як для методу простої ітерації.

2 Завдання

Якщо матриця не є матрицею із діагональною перевагою, привести систему до еквівалентної, у якій є діагональна перевага (письмово). Можна, наприклад, провести одну ітерацію метода Гауса, скомбінувавши рядки з метою отримати нульовий недіагональний елемент у стовпчику. Розробити програму, що реалізує розв’язання за ітераційним методом, який відповідає заданому варіанту. Обчислення проводити з з кількістю значущих цифр m = 6. Для кожної ітерації розраховувати нев’язку $\boldsymbol{r = b - Ax}$**,** де $\boldsymbol{x}$ - отриманий розв’язок.

Розв’язати задану систему рівнянь за допомогою програмного забезпечення Mathcad. Навести результат перевірки: вектор нев’язки $\boldsymbol{r = b - Ax_m}$**,** де $\boldsymbol{x_m}$ - отриманий у Mathcad розв’язок.

Порівняти корені рівнянь, отримані у Mathcad, із власними результатами за допомогою методу середньоквадратичної похибки.

3 Варіанти завдань

Система має вигляд (1). Метод розв’язання визначається так: метод простої ітерації для парних варіантів та метод Зейделя для непарних варіантів.

№ вар.	Матриця системи A	Вектор правої частини b
1-4	$\begin{pmatrix} 5,18+\alpha & 1,12 & 0,95 & 1,32 & 0,83 \\ 1,12 & 4,28-\alpha & 2,12 & 0,57 & 0,91 \\ 0,95 & 2,12 & 6,13+\alpha & 1,29 & 1,57 \\ 1,32 & 0,57 & 1,29 & 4,57-\alpha & 1,25 \\ 0,83 & 0,91 & 1,57 & 1,25 & 5,21+\alpha \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,25k,\ k = №вар - 1$	$\begin{pmatrix} 6,19+\beta \\ 3,21 \\ 4,28-\beta \\ 6,25 \\ 4,95+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,35k,\ \ k = №вар - 1$
5-9	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 0,75+\alpha \\ 2,25 & 1,32 & 4,58+\alpha & 0,49 \\ 5,31 & 6,28+\alpha & 0,98 & 1,04 \\ 9,39+\alpha & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,5k,\ k = №вар - 5$,	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 6,47+\beta \\ 2,38 \\ 10,48+\beta \end{pmatrix}$ $\beta = 0,5k$, $k = №вар - 5$
10	$\begin{pmatrix} 2,12 & 0,42 & 1,34 & 0,88 \\ 0,42 & 3,95 & 1,87 & 0,43 \\ 1,34 & 1,87 & 2,98 & 0,46 \\ 0,88 & 0,43 & 0,46 & 4,44 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11,172 \\ 0,115 \\ 0,009 \\ 9,349 \end{pmatrix}$

11-15	$\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 8,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,2k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$	$\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0,2k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 11$
16	$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,9 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5,5 & 7,0 & 6,0 & 5,5 \\ 7,0 & 10,5 & 8,0 & 7,0 \\ 6,0 & 8,0 & 10,5 & 9 \\ 5,5 & 7 & 9 & 10,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 6,59 & 1,28 & 0,79 & 1,195 & -0,21 \\ 0,92 & 3,83 & 1,3 & -1,63 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 5,77 & 2,1 & 1,483 \\ 1,285 & 0,16 & 2,1 & 5,77 & -18 \\ 0,69 & -1,68 & -1,217 & 9 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,36 \\ 3,89 \\ 11,04 \\ -0,27 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3,81 & 0,25 & 1,28 & 1,75 \\ 2,25 & 1,32 & 5,58 & 0,49 \\ 5,31 & 7,28 & 0,98 & 1,04 \\ 10,39 & 2,45 & 3,35 & 2,28 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,21 \\ 8,97 \\ 2,38 \\ 12,98 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 6,92 & 1,28 & 0,79 & 1,15 & -0,66 \\ 0,92 & 3,5 & 1,3 & -1,62 & 1,02 \\ 1,15 & -2,46 & 6,1 & 2,1 & 1,483 \\ 1,33 & 0,16 & 2,1 & 5,44 & -18 \\ 1,14 & -1,68 & -1,217 & 9 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,72 \\ 3,87 \\ 13,8 \\ -1,08 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 7,03 & 1,22 & 0,85 & 1,135 & -0,81 \\ 0,98 & 3,39 & 1,3 & -1,63 & 0,57 \\ 1,09 & -2,46 & 6,21 & 2,1 & 1,033 \\ 1,345 & 0,16 & 2,1 & 5,33 & -12 \\ 1,29 & -1,23 & -0,767 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2,1 \\ 0,84 \\ 2,58 \\ 11,96 \\ -1,47 \end{pmatrix}$
22-25	$\begin{pmatrix} 8,30 & 2,62+\alpha & 4,10 & 1,90 \\ 3,92 & 8,45 & 8,78-\alpha & 2,46 \\ 3,77 & 7,21+\alpha & 8,04 & 2,28 \\ 2,21 & 3,65-\alpha & 1,69 & 6,99 \end{pmatrix}$ $\alpha = 0,2k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 22$	$\begin{pmatrix} -10,65+\beta \\ 12,21 \\ 15,45-\beta \\ -8,35 \end{pmatrix}$ $\beta = 0,2k,\ k = \text{№}\mathit{вар} - 22$

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі;
- вихідну систему рівнянь;
- письмовий етап приведення матриці до діагональної переваги (якщо таке необхідно);
- проміжні результати та кінцевий результат;
- результати перших трьох та останньої ітерацій методу, на кожній ітерації потрібно навести вектор нев'язки
- копія розв'язку задачі у Mathcad; вектор нев'язки для цього розв'язку;
- порівняння власного розв'язку та розв'язку, отриманого у Mathcad за допомогою середньоквадратичної похибки;

Посилання на робочу версію програми, лістинг програми.

5 Література

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
2. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
3. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.
5. Кузнецов В.М., Жданова О.Г., Галицька І.Є. Методи розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь та їх систем. Проблема власних значень. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни „Числові методи". „Політехніка", НТУУ „КПІ", 2001.