Національний Технічний Університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів та систем

Чисельні методи

Лабораторна робота №3

Розв’язання нелінійних рівнянь

Зміст

1 Теоретичні відомості

Знаходження коренів рівнянь за допомогою чисельних методів складається з двох етапів:

1)Відокремлення коренів: знаходження сукупності проміжків, кожен з яких містить один з коренів рівняння.

2) Уточнення коренів: знаходження приблизного значення коренів із заданою точністю ε.

Розглядається рівняння

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

де $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, та $a_n > 0$, для якого потрібно знайти його дійсні корені x^*.

Перший етап виконується із використанням теорем, які допомагають виділити межі розташування додатніх та від'ємних коренів та знайти проміжки, що містять ці корені.

Теорема про границі усіх (комплексних) коренів рівняння.

Нехай $A = \max|a_i|$, i=0,…,n-1; $B = \max|a_i|$, i=1,…,n.

Тоді всі (комплексні) корені рівняння (1) лежать у кільці

$$\frac{|a_0|}{B+|a_0|} \le |x^*| \le \frac{|a_n| + A}{|a_n|}$$

Теорема про верхню межу додатніх коренів.

Нехай $A = \max\limits_i |a_i|$, $a_i < 0$;

$$m = \max i : a_i < 0.$$

Тоді $R = 1 + \sqrt[n-m]{\frac{A}{a_n}}$ - верхня межа додатніх коренів :

$$\forall x^* \le R, f(x^*) = 0 .$$

Цю ж теорему можна застосувати для визначення нижньої межі додатніх коренів заміною x:= $1/y$; тоді $\forall x^* \ge \frac{1}{R_y}$. Заміна знаку x:= - y дозволяє обмежити від'ємні корені.

Теорема Гюа про наявність комплексних коренів. Якщо $\exists$ k: 1 < k < n $a_k^2 < a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, то рівняння має хоча б одну пару комплексноспряжених коренів.

Теорема Штурма про чередування коренів.

Нехай $f(x)=P_n(x)$-поліном без кратних коренів. Утворимо послідовність многочленів:

$f_0 = f(x)$;

$f_1 = f'(x)$;

$f_{i+1} = -[f_{i-1} \bmod f_i]$, i=1,…,n-1

- кожний наступний многочлен є залишком від ділення двох попередніх многочленів, взятим з протилежним знаком.

Стверджується, що кількість дійсних коренів полінома $f_0(x)$ на довільному відрізку [a; b] дорівнює різниці між кількістю змін знаку у цій послідовності при x = a та x = b.

Другий етап передбачає застосування одного з нижченаведених методів до кожного з проміжків, отриманих на першому етапі.

Метод бісекції.
Дано: кінці інтервалу **a** та **b**, точність **ε** . На кожному кроці інтервал ділять навпіл:

$$c := (a + b) / 2,$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

Метод хорд.
Вхідні дані аналогічні тим, що використовуються методом бісекції. Проводиться січна до графіку функції. Точкою перетину її з віссю абсцис ділять інтервал:

$$c := (a*f(b) - b*f(a)) / (f(b) - f(a)),$$

та залишають той підінтервал, до якого належить корінь.

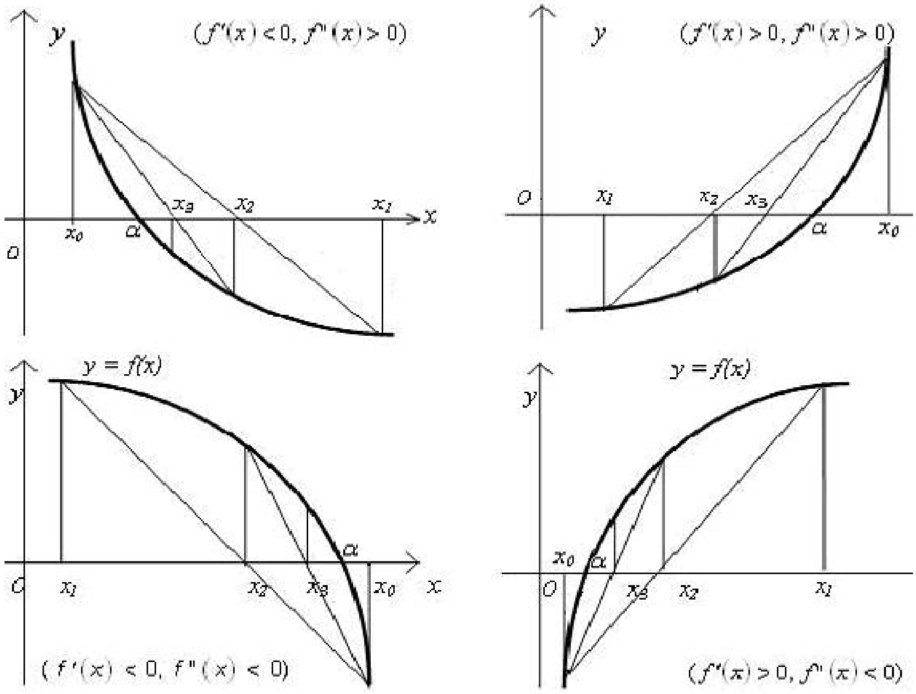

Рис.1.Графічна інтерпретація методу хорд.

Метод Ньютона (дотичних).
Дано: початкове наближення $\mathbf{x_0}$ та точність **ε** . Проводять дотичні до графіку функції, що дає формулу

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k) / f'(x_k) .$$

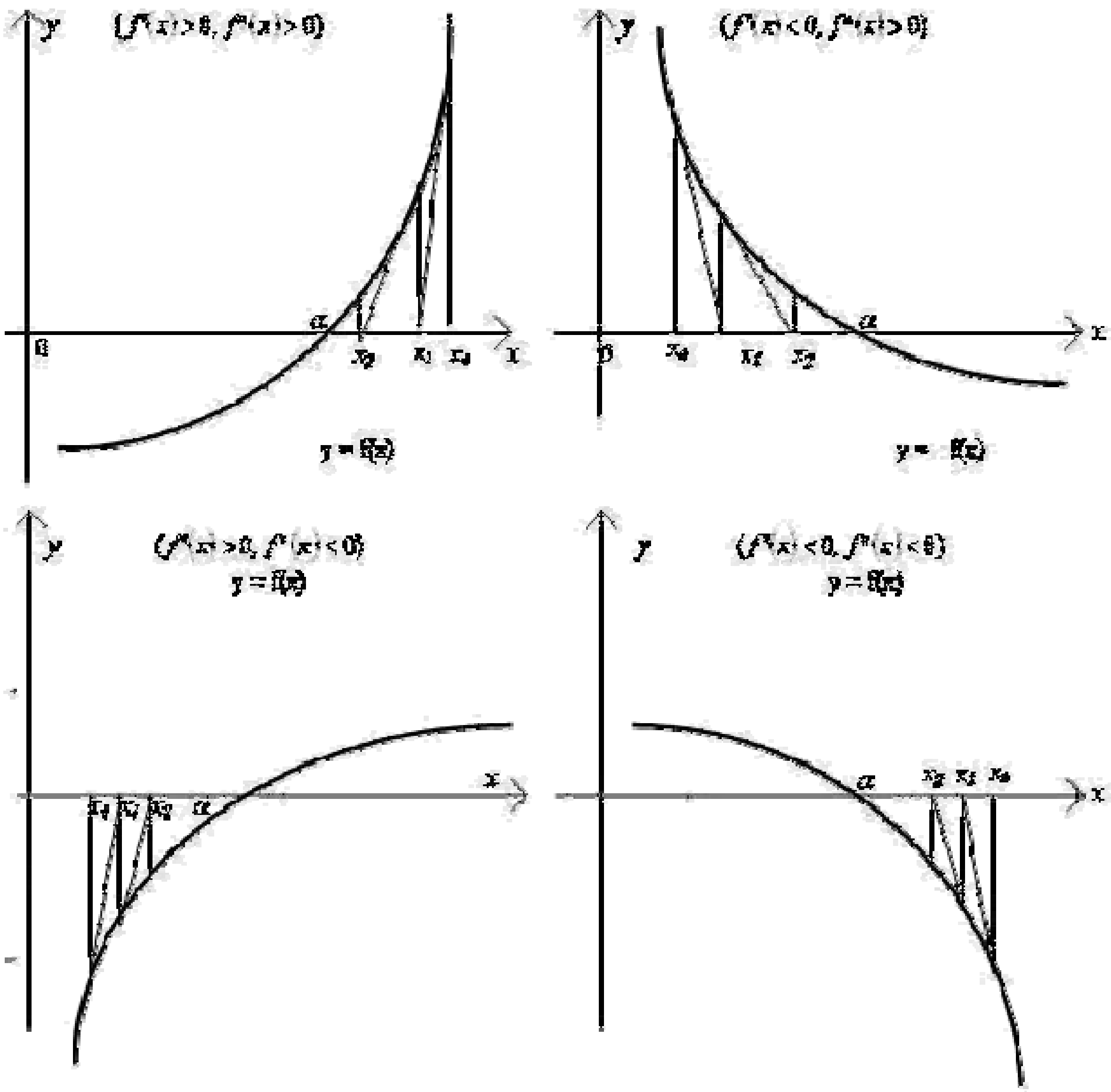

Рис.2.Графічна інтерпретація методу дотичних.

Перевірка існування кореня на відрізку $[a,b]$ здійснюється так:
корінь належить відрізку, якщо $f(a)\cdot f(b)<0$,
якщо $f(a)\cdot f(b)>0$, то відрізок не містить коренів.

2 Завдання

1.Допрограмовий етап: визначити кількість дійсних коренів рівняння, відокремити корені рівняння (письмово) (див. теореми про верхню та нижню границі, Гюа, метод поліномів Штурма). Результатом є висновок: перший корінь належить проміжку […], другий корінь належить проміжку […] і т.д.
2.Програмний етап: уточнити корені рівняння:
2.1.Методом бісекції.
2.2.Методом хорд.
2.3.Методом Ньютона (дотичних).

Критерієм закінчення мають бути нерівності

для методу бісекції (інтервальний метод; a та b - кінці інтервалу)

$$| \mathbf{b - a} | < \varepsilon \text{ та } | \mathbf{f(x_k)} | < \varepsilon$$

для методів хорд та дотичних

$$| \mathbf{x_k - x_{k-1}} | < \varepsilon \text{ та } | \mathbf{f(x_k)} | < \varepsilon$$

3. Порівняти отримані результати, зробити висновки, який метод приводить до меншої кількості ітерацій і чим це зумовлено.

3 Варіанти завдань

Номер варіанту - це молодша цифра Вашого номера у заліковці. Параметр **k** - це молодша цифра номера Вашої групи. Параметр α - старша цифра Вашого номеру у заліковці.

Вигляд рівняння:
$a_5(1+\alpha)\, x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + k\, a_0 = 0$

Примітка 1: поліноми, що розглядаються в даній роботі, обов'язково повинні містити дійсні корені.

Таблиця 1. Варіанти завдань.

№ вар.	Коефіцієнти поліному					
	A5	a4	a3	a2	a1	a0
1	1	-2	-4	0	2	1
2	1	-3	0	7	0	-3
3	0	1	-3	1	-2	-2
4	0	-1	3	0	-2	1
5	2	-3	-1	0	0	3
6	0	0	2	-4	-1	1
7	2	-3	1	2	-4	1
8	1	0	0	3	-2	-1
9	0	1	-2	-9	-3	-1
10	0	-2	1	5	-2	1

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді вихідного рівняння.
- виконання допрограмового етапу, результатом якого повинні бути проміжки, щодо яких проводиться уточнення.
- розв'язок уточнення коренів за методами бісекції, хорд, дотичних у Mathcad
- висновки
- лістинг програми (вхідними даними для цієї програми є координати проміжків $[a_i, b_i]$ та коефіцієнти поліному) та посилання на робочу версію програми.

Примітка 2:При виконанні лабораторних робіт потрібно намагатися створювати універсальні процедури, які можуть бути використані для нелінійних рівнянь будь-якого порядку. Методи рекомендовано реалізувати у вигляді методів класу (об'єкту) «поліном», або у вигляді процедури, до якої передаються

- *посилання на функцію, корінь якої шукається,*

– *межі інтервалу, до якого належить корінь, та точність, з якою треба його знайти.*

5 Література

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
2. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
3. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.