Національний Технічний Університет України
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Кафедра автоматизації проектування енергетичних процесів та систем

Чисельні методи

Лабораторна робота №4
Інтерполяційні поліноми

Зміст

1 Теоретичні відомості

Інтерполяція - в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини по наявному дискретному набору відомих значень.

Нехай маємо n значень x_i, кожному з який відповідає своє значення y_i. Потрібно знайти таку функцію F, що

$$F(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n. \tag{1}$$

При цьому x_i називаються вузлами інтерполяції; пари $(x_i,\ y_i)$ – точками даних; функцію $F(x)$ – інтерполянтом.

Інтерполянти, як правило, будуються у вигляді лінійних комбінацій деяких елементарних функцій:

$$y = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \Phi_k(x),$$

де $\Phi_k(x)$ – фіксовані лінійно незалежні функції; $c_0,\ldots,c_n$ – не визначені поки що коефіцієнти.

З умови (1) отримуємо систему $n+1$ рівнянь відносно коефіцієнтів c_k:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\, \Phi_k(x_i) = y_i,\ i = 0,\ldots,n.$$

В якості системи лінійно незалежних функцій $\Phi_k(x)$ частіше за все обирають: степеневі функції $\Phi_k(x) = x^k$ (в цьому випадку $F = P_n(x)$ – поліном ступеня n); тригонометричні функції.

Поліном Лагранжа.

Будемо шукати інтерполяційний поліном у вигляді

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\ . \tag{2}$$

Звідси отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{gathered} c_0 + c_1 x_0 + \ldots + c_n x_0^{\,n} = y_0 \\ \ldots \\ c_0 + c_1 x_n + \ldots + c_n x_n^{\,n} = y_n \end{gathered}$$

Ця система має єдиний розв’язок, а отже і інтерполяційний поліном вигляду (2) також єдиний. Форм запису його існує багато.

Лагранж запропонував наступну форму поліному, в основі якої лежить базис поліномів Лагранжа $l_k(x)$ ступеня n:

$$l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = k \end{cases}.$$

Поліноми Лагранжа мають вигляд:

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_n)}\ . \tag{3}$$

Тоді поліном $P_n(x)$ набуде вигляду:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\ . \tag{4}$$

Цей поліном має ступінь не вищу за n та $P_n(x_i) = y_i$. Формулу (4) називають формулою Лагранжа. Кількість арифметичних дій для обчислення за (4) пропорційна n^2.

Поліном Ньютона.

При використанні інтерполяційного поліному Ньютона застосовується поняття роздільної різниці:

роздільна різниця першого роду: $y(x_i, x_j) = \dfrac{y(x_i) - y(x_j)}{x_i - x_j}$, роздільна різниця другого роду $y(x_i, x_j, x_k) = \dfrac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$ і т.д.

Якщо $y(x) = P_n(x)$ – поліном ступеню n, то для нього перша роздільна різниця $P(x,x_0)$ – поліном n-1 ступеню, друга роздільна різниця $P(x,x_0,x_1)$ – поліном n-2 ступеню і т.д., так що (n+1)-а роздільна різниця дорівнює нулю.

Із визначення роздільних різниць отримуємо:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x, x_0)$$

$$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1)P(x, x_0, x_1)$$

$$P(x, x_0, x_1) = P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)P(x, x_0, x_1, x_2)$$

...

Звідси отримуємо формулу для $P_n(x)$:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)P(x_0, x_1, x_2) + ... + \\ + (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})P(x_0, x_1, ..., x_n) \tag{5}$$

Якщо $P_n(x)$ – інтерполяційний поліном для функції $y(x)$, то його роздільні різниці співпадають із роздільними різницями функції. Тоді можна записати:

$$F(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})\, y(x_0, x_1, ..., x_k)$$

Частіше використовують поліном Ньютона у формі Горнера (перед цим необхідно обчислити всі роздільні різниці):

$$F(x) = y(x_0) + (x - x_0)[\, y(x_0, x_1) + (x - x_1)[\, y(x_0, x_1, x_2) + ...]] \tag{6}$$

Обчислення $F(x)$ для кожного x потребує n множень та $2n$ додавань або віднімань.

Сплайн-інтерполяція.

Розглянемо спеціальний випадок кусково-поліноміальної інтерполяції, коли між будь-якими сусідніми вузлами інтерполяції функція інтерполюється кубічним поліномом (кубічна сплайн-інтерполяція). Його коефіцієнти на кожному інтервалі визначаються з умов сполучення у вузлах:

$F(x_i) = y_i$, (7)

$F'(x_i - 0) = F'(x_i + 0)$, (8)

$F''(x_i - 0) = F''(x_i + 0)$, $i = 1,…, n$-1. (9)

Крім того, на границях при $x = x_0$ та $x = x_n$ встановлюються умови $F''(x_0) = 0$, $F''(x_n) = 0$.

Будемо шукати кубічний поліном у вигляді:

$$F_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \; i = 1,..., n-1. \tag{10}$$

Тоді $F_i(x_i) = a_i$, $F'_i(x_i) = b_i$, $F''_i(x_i) = c_i$. Для виконання умови неперервності: $F_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$. Звідси отримуємо формули для обчислення коефіцієнтів сплайну, підставивши (10) у рівняння (7), (8), (9) (тут $h_i = x_i - x_{i-1}$).

$$a_i = y_i$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}$$

$$b_i = \frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

Якщо врахувати, що $c_1 = c_{n+1} = 0$, то обчислення коефіцієнтів c можна провести за допомогою методу прогону для трьохдіагональної матриці.

Метод прогону (100balov.com/data/bib/Dijscijplinij/KMD/Metod**_progony.doc)**

Більшість технічних задач зводиться до розв'язування систем ЛАР, в яких матриці містять багато нульових елементів, а ненульові елементи розміщені за спеціальною структурою (стрічкові квазітрикутні матриці).

Задачі побудови інтерполяційних сплайнів, різницевих методів розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь зводяться до розв'язування систем ЛАР з трьохдіагональною матрицею А. В матриці А всі елементи, що не лежать на головній діагоналі і двох сусідніх паралельних діагоналях, дорівнюють нулю.

В загальному вигляді такі системи записують так:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \tag{1}$$
$$1 \le i \le n\ ;\ a_1 = 0\ ;\ c_n = 0$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 & = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 & = d_2 \\ \quad a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 & = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ \quad a_ix_{i-1} + b_ix_i + c_ix_{i+1} & = d_i \\ \quad a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = d_{n-1} \\ \quad a_nx_{n-1} + b_nx_n & = d_n \end{cases} \tag{2}$$

Вибір найбільшого елемента при виключенні невідомих за методом Гауса в таких системах робити не можна, оскільки перестановка рядків руйнує структуру матриці. Найчастіше для розв'язку системи з трьохдіагональною матрицею використовують метод прогону, який є частковим випадком методу Гауса.

<u>Прямий хід прогону</u> (алгоритм прямого ходу методу Гауса).

Кожне невідоме x_i виражається через x_{i+1} з допомогою прогоночних коефіцієнтів A_i та B_i

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i\ ;\ i = \overline{1, n} \tag{3}$$

Наприклад, з першого рівняння системи (2) знайдемо

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} \\ x_1 &= A_1x_2 + B_1 \end{aligned}\right\},\ \text{звідки}\quad \begin{aligned} A_1 &= -\frac{c_1}{b_1} \\ B_1 &= \frac{d_1}{b_1} \end{aligned} \tag{4}$$

З другого рівняння системи (3) виразимо x_2 через x_3, замінюючи x_1 формулою (3) або (4)

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 = d_2$$

Звідси знайдемо

$$x_2 = \frac{d_2 - c_2x_3 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2},\quad \text{або}\quad x_2 = A_2x_3 + B_2$$

$$A_2 = -\frac{c_2}{a_2A_1 + b_2}\ ;\quad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2},\ \text{беручи за}\quad e_2 = a_2A_1 + b_2$$

Запишемо:

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2};\qquad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{e_2}$$

Аналогічно для кожного і прогоночні коефіцієнти з рівняння $x_i = A_ix_{i+1} + B_i$ мають вигляд:

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}\ ;\quad B_i = \frac{d_i - a_iB_{i-1}}{e_i} \tag{5}$$

$$e_i = a_i A_{i-1} + b_i\ ; \quad i = \overline{1, n}$$

При цьому враховуючи, що $a_1 = c_n = 0$, приймаємо

$$A_0 = 0; B_0 = 0. \qquad (6)$$

В розгорнутому вигляді формула (5) буде мати вигляд формули (7). Значення прогоночних коефіцієнтів можна одержати і таким шляхом. В рівнянні (3) понизимо індекс на одиницю та підставимо значення xi-1 в i-е рівняння системи (1)

$$x_{i-1} = A_{i-1} \cdot x_i + B_{i-1}$$

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \Rightarrow a_i (A_{i-1} x_i + B_{i-1}) + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$x_i = \frac{d_i - c_i x_{i+1} - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = -\frac{c_i}{a_i A_{i-1} + b_i} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{a_i A_{i-1} + b_i} = A_i x_{i+1} + B_i \qquad (7)$$

Обернений хід прогонки (аналог оберненого ходу методу Гауса).

Він полягає в послідовному обчисленні невідомих xi. Спочатку знаходять x_n. Для цього формулу (7) запишемо при i = n (враховуючи, що Cn = 0)

$$x_n = -\frac{c_n}{a_n A_{n-1} + b_n} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{a_n A_{n-1} + b_n} = B_n$$

Долі використовуючи формулу (3) знаходимо послідовно всі невідомі x_{n-1}, x_{n-2}, … , x_1.

Майже у всіх задачах, що приводять до розв’язку системи (2) з трьохдіагональною матрицею, забезпечується умова переважання діагональних коефіцієнтів

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|$$

Це забезпечує існування єдиного розв’язку та достатню стійкість методу прогону відносно похибок заокруглення.

Для запису коефіцієнтів a_i, b_i, та прогоночних коефіцієнтів A_{i-1}, B_{i-1} використати один і той же масив.

Кубічна сплайн-інтерполяція в MathCad Для цього використовується

- interp(s,x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і в кубічними сплайнами;
    - s — вектор других похідних, створений одній з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
    - x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
    - y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
    - t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів — векторну змінну s. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (x,y).

- lspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів линийного сплайну;
- pspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайну;
- cspline(x,y) — вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайну;
- x, y — вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу. Приклад сплайн-інтерполяції наведений в лістингу 1.

Листинг 1. Кубічна сплайн-інтерполяція

$x := (0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)^T$

$y := (4.1\ 2.4\ 3\ 4.3\ 3.6\ 5.2\ 5.9)^T$

$s := cspline(x, y)$

$A(t) := interp(s, x, y, t)$

Інтерполюючи функція виведена на рис.1.

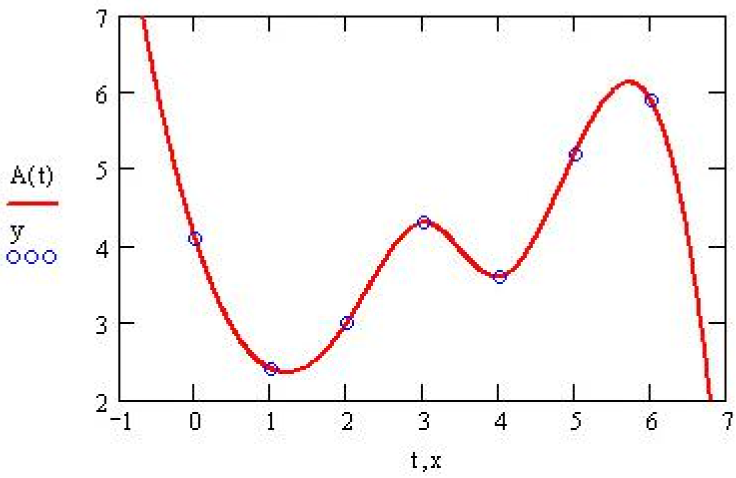

Рис.1. *Сплайн-інтерполяція до лістінгу 1*

2 Завдання

Створити програму, яка для заданої функції по заданим точкам будує інтерполяційний поліном $P_n(x)$ у формі Лагранжа або Ньютона, а також здійснює інтерполяцію кубічними сплайнами.

Програма має розраховувати значення похибки $\varepsilon = | P_n(x) - y(x) |$, для чого потрібно вивести на графік із кроком (графік можна будувати допоміжними засобами, наприклад, у Mathcad), меншим у 5-6 разів, ніж крок інтерполяції, відповідні значення поліному та точної функції. Якщо похибка дуже мала, застосувати масштабування.

Знайти кубічний інтерполяційний сплайн для заданої функції у Mathcad. Вивести графік результатів.

3 Варіанти завдань

№	Функція $y(x)$	Вузли інтерполяції x_i
1-10	$\sin(\frac{\alpha}{2} \cdot x) + \sqrt[3]{x \cdot \alpha}$	-5+*k*, -3+*k*, -1+*k*, 1+*k*, 3+*k*; *k* = №*вар* – 1
11-20	$\frac{1}{2} x \cdot \cos(\alpha \cdot x)$	-6+*k*, -4+*k*, -2+*k*, 0+*k*, 2+*k*; *k* = №*вар* – 11
21-25	$\frac{x^2}{15} + \cos(x + \alpha)$	-6+*k*, -4+*k*, -2+*k*, 0+*k*, 2+*k*; *k* = 2*(№*вар* – 21)

α – остання цифра номеру групи. Якщо номер варіанту кратний 2, то потрібно робити інтерполяцію методом Ньютона, інакше – методом Лагранжа.

4 Вимоги до звіту

Звіт має містити:

- постановку задачі у вигляді заданої функції (із графіком) та значень точок даних у вузлах інтерполяції;
- вигляд поліному Лагранжа або Ньютона (за варіантом);

- порівняльний графік функції та інтерполяційного поліному;
- сплайни (коефіцієнти сплайнових інтерполяційних поліномів);
- порівняльний графік функції та сплайн-інтерполяції;
- розв'язок інтерполяції сплайнами у Mathcad (із наведенням порівняльних графіків);
- лістинг програми.

5 Література

1. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.:іл.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М., Наука, 1989.
3. Волков Е.А., Численные методы. М., Наука, 1987.
4. Демидович В.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.Наука, 1986.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1., М., Наука, 1966; Т.2., М., Физматгиз, 1960.