Chapitre1: Champ électrostatique

L'électrostatique traite de l'interaction des charges électriques au repos placées dans le vide. Le champ électrique est appelé champ électrostatique s'il est invariant dans le temps.

I. Loi de Coulomb

1. Charges électriques

La charge électrique que l'on note ''q'' est une grandeur qui rend compte des interactions électromagnétiques entre particules aussi bien que la masse ''m'' rend compte des interactions gravitationnelles.

La charge électrique d'un corps représente la quantité d'électricité portée par ce corps. Cette charge est un multiple de la charge élémentaire.

$$q = n \cdot e \text{ avec } q \text{ en coulomb (C) et } e = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

Pour un électron $q = -e$ et pour un proton $q = +e$

a. Charges ponctuelles

C'est un corps électrisé de dimensions assez petites de telle sorte qu'il peut être assimilé à un point dans l'espace. Dans le cas contraire on a une distribution continue de charges.

b. Distribution continue de charges

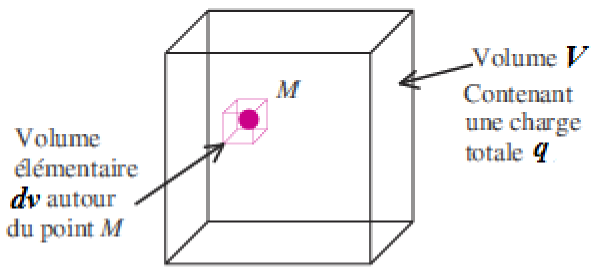
- **Distribution volumique de charges**

On considère un volume v qui contient toute la charge q.

Un élément de volume $d\tau$ contient une portion notée dq de la charge q.

La densité volumique de charge ρ représente la charge par unité de volume soit $\rho(M) = \dfrac{dq}{d\tau} \Rightarrow q = \int_\tau \rho d\tau$.

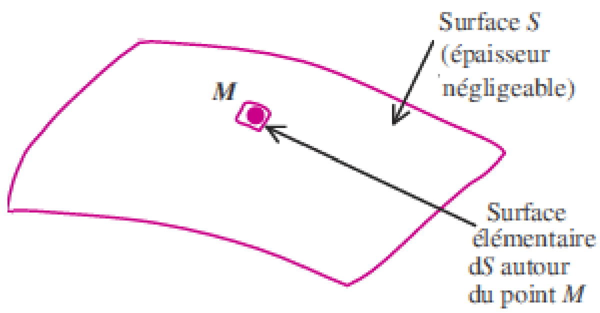
La ***densité volumique*** ρ s'exprime en $C.m^{-3}$.



- **Distribution surfacique de charges**

Soit une surface S qui porte une charge q. dS un élément de cette surface porte la charge dq.

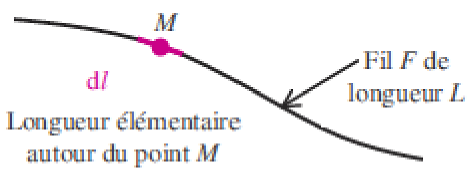
La densité surfacique de charge notée σ et définie par l'expression $\sigma(M) = \dfrac{dq}{dS} \Rightarrow q = \int_S \sigma dS$ représente la charge par unité de surface. La densité surfacique σ s'exprime en $C.m^{-2}$.



- **Distribution linéique de charges**

Considérons une ligne L qui porte la charge q. dl une portion de la ligne porte la charge dq.

La densité linéique ou linéaire de charge notée λ et définie par $\lambda(M) = \dfrac{dq}{dl} \Rightarrow q = \int_L \lambda dl$ représente la charge par unité de longueur. La densité linéique λ s'exprime en $C.m^{-1}$.

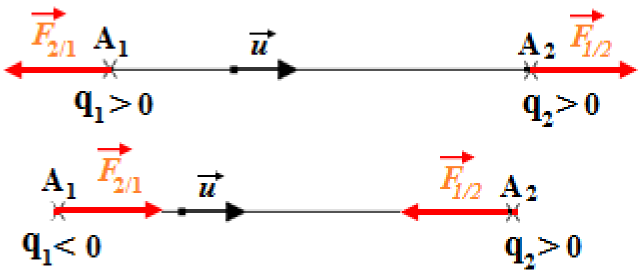


2. Loi de coulomb

Soit deux charges q_1 *et* q_2 *placées dans le vide respectivement aux points* A_1 *et* A_2*. Pour un observateur au repos, la charge* q_1 *exerce sur* q_2 *une force* $\vec{F}_{1/2}$ *appliquée au point* A_2*, portée par la droite* (A_1A_2) *et inversement proportionnelle au carrée de la distance qui les sépare.*

De même q_2 exerce sur q_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ appliquée au point A_1.

Cette force est *attractive si les charges sont de signe contraire et répulsive si elles sont de même signe.*



L'expression vectorielle s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\cdot\vec{u}$$

avec le vecteur unitaire qui est donné par la formule $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\right\|}$

Le principe des actions réciproques : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Le module de la force électrostatique est donné par l'expression :

$$F_{1/2} = F_{2/1} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}$$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ S.I$ est le coefficient de proportionnalité

et $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\ S.I$ est la permittivité électrique du vide.

Remarque : *la loi de coulomb est une loi empirique et c'est le principe fondamental de l'électrostatique.*

II. Champ électrostatique

1. Définition

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrostatique et soit M un point de la région. On place successivement au point M des charges de même signe $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

On constate que ces charges sont soumises à des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ de même support et de même sens telle que l'on ait :

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \vec{C}st$$

Cette constante sera notée $\vec{E}$ et définira le champ électrostatique.

$$\vec{F}_1 = q_1\cdot\vec{E}, \quad \vec{F}_2 = q_2\cdot\vec{E} \quad ,\dots, \quad \vec{F}_n = q_n\cdot\vec{E},$$

$\vec{E}$ s'exprime en newton par coulomb ($N.C^{-1}$).

On dit qu'il existe un champ électrostatique dans une région de l'espace si une charge électrique placée dans cette région est soumise à une force électrostatique.

2. Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

Soit une charge $\mathbf{q_1}$ placée en un point A de l'espace. La charge $\mathbf{q_1}$ crée un champ électrostatique en un point **M** dans cette région de l'espace.

Pour déterminer ce champ, on place au point M une charge passive $\mathbf{q_2}$ qui va subir une force électrostatique $\vec{F}_{1/2}$.

Principe de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

Définition du champ électrostatique au point M : $\vec{F}_{1/2} = q_2 \cdot \vec{E}(M)$

On en déduit l'expression du champ électrostatique au point M :

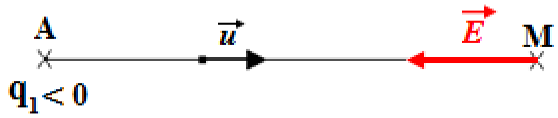
$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{1/2}}{q_2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q_1}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \frac{q_1}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

avec le vecteur unitaire qui est donné par la formule $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|}$

Si la charge source est positive, le champ électrostatique est centrifuge.

Si la charge source est négative, le champ électrostatique est centripète.



- Les charges électriques sont les sources de champ électrostatique.
- La charge qui est soumise à la force est appelée charge passive et celle qui crée le champ est appelée charge active.

<u>**Remarque**</u> **:** le champ et la force électrostatiques sont des grandeurs vectorielles définies par quatre caractéristiques : le point d'application ; la direction ; le sens et le module ou intensité.

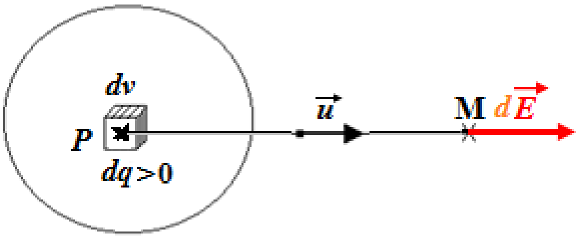
3. Champ électrostatique crée par une distribution continue de charge

Pour une distribution continue de charges, un petit élément $(d\tau, dS, dl)$ portant la charge dq crée en un point M un champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\tau} \frac{dq}{r^2} .\vec{u}$$

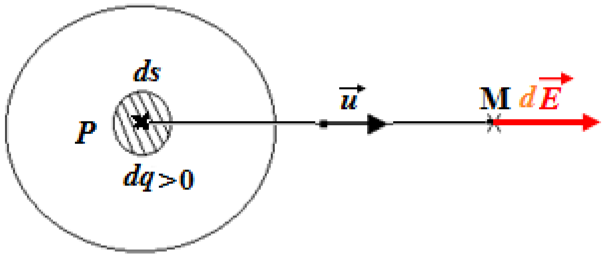
L'intégrale doit être étendue à tout l'espace occupé par la charge.

a. Distribution volumique de charges



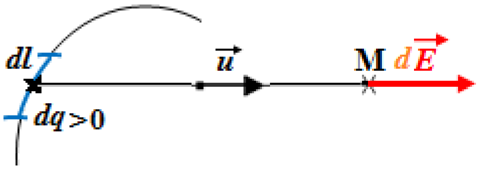
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{PM^2}.\vec{u}$$

b. Distribution surfacique de charges



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{PM^2}.\vec{u}$$

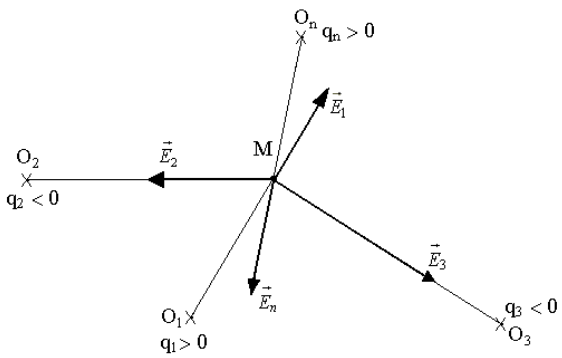
c. Distribution linéique de charges



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda dl}{PM^2}.\vec{u}$$

4. Principe de superposition

Considérons un ensemble de charges q_i placées en des points O_i. Chacune des charges q_i crée au point M un champ électrostatique $\vec{E}_i$ dont l'expression est donnée par : $\vec{E}_i = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{O_iM^2}\cdot\vec{u}_i$



Le champ résultant $\vec{E}(M)$ crée par l'ensemble des charges est la somme vectorielle des champs individuels : c'est le principe de superposition.

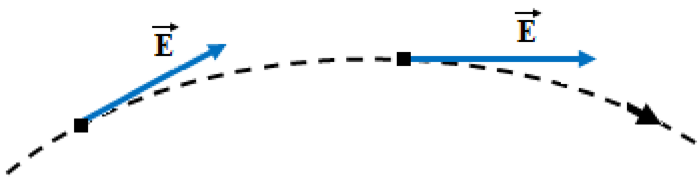
$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n$

Si q est la charge placée au point M, elle est soumise à la force $\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + ... + q\vec{E}_n$ soit

$\vec{F}(M) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$

5. Lignes de champ

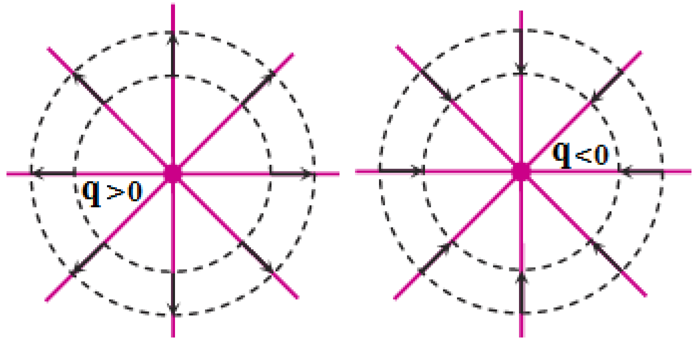
Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ associé à ce point.



La ligne de champ est orientée dans le sens du champ c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants.

Les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en point P sont des droites passant par le point P. On dit que le champ électrostatique produit par une charge électrique est radial.

Les lignes de champ sont divergentes si la charge est positive et convergentes si la charge est négative.



FIN

Chapitre 2: Potentiel électrostatique

I. Potentiel électrostatique

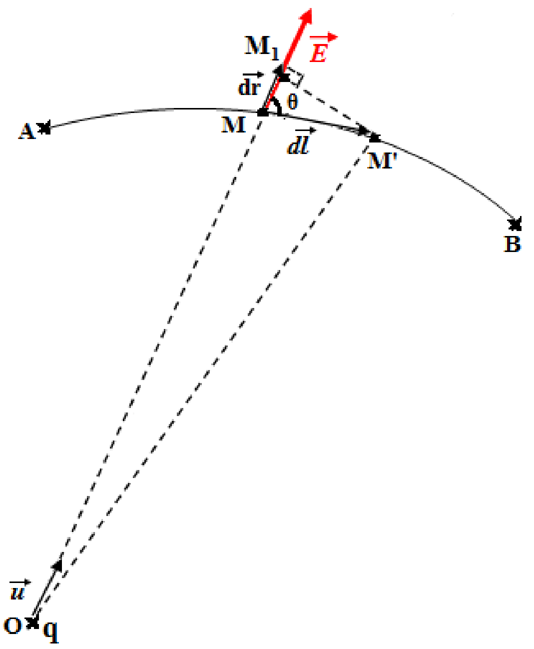
1. Définition

Le potentiel électrostatique noté V est une fonction dont la différentielle est égale à l'opposé de la circulation du champ électrostatique : $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$

Remarque : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée est nulle soit :

$$\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^A dV = -(V_A - V_A) = 0$$

2. Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle



La charge q crée au point M le champ $\vec{E}$

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl}$$

$$\vec{u}.\vec{dl} = \|\vec{u}\|.\|\vec{dl}\|.cos(\vec{u};\vec{dl}) = dl\,cos(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{MM_1}{MM'} = \frac{dr}{dl}$$

$$\vec{u}.\vec{dl} = dl\cdot\frac{dr}{dl} = dr$$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr \Rightarrow V(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r^2}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste$$

Le potentiel est une grandeur scalaire définie à une constante additive près. La constante sera souvent choisie de telle sorte que le potentiel soit nul à l'infini c'est-à-dire $V(r \to +\infty) = 0$

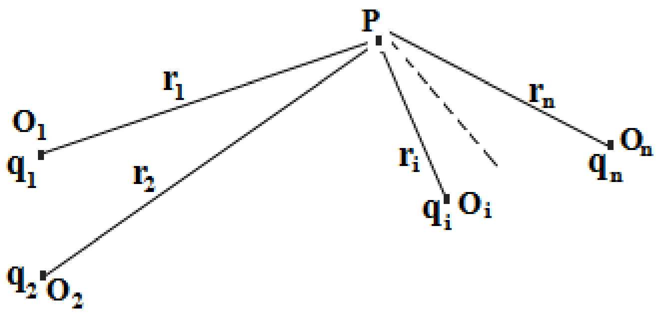
Pour une charge ponctuelle $V(r \to +\infty) = 0 + cste = 0 \Rightarrow cste = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

L'unité du potentiel est le volt (V).

3. Potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges ponctuelles

Le potentiel créé en un point P par un ensemble de n charges ponctuelles q_i placées respectivement aux distances r_i de P est la somme scalaire des différents potentiels créés par chacune des charges au point P :

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + Cte$$



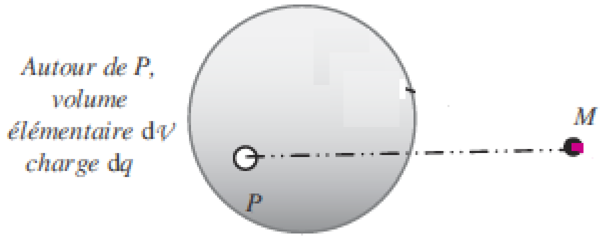
4. Potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charges

Pour une distribution continue de charges, un petit élément $(d\tau, dS, dl)$ portant la charge dq crée en un point M un potentiel électrostatique élémentaire dV. Le potentiel créé par toutes les charges au point M est donc :

$$V(M) = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} + cste,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace occupée par les charges.

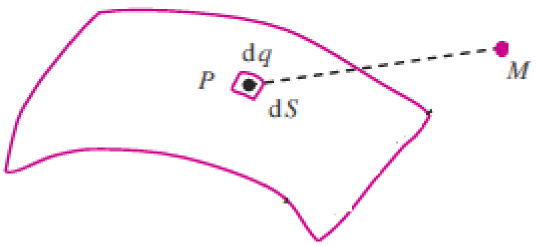
a. Distribution volumique de charges



$$dq = \rho d\tau$$

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho d\tau}{r} + Cste}$$

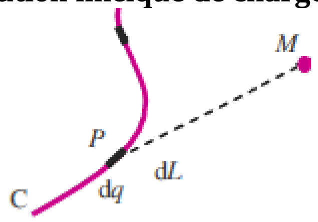
b. Distribution surfacique de charges



$$dq = \sigma dS$$

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma dS}{r} + Cste}$$

c. Distribution linéique de charges



$$dq = \lambda dl$$

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\lambda dl}{r} + Cste}$$

5. Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

Soit (E_x, E_y, E_z) les composantes du champ électrostatique dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (dx, dy, dz) les composantes du vecteur $d\vec{l}$ dans cette base.

La relation différentielle $\vec{E}\cdot\vec{dl} = -dV$ s'explicite de la manière suivante :
$(E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z)(dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = -dV$ soit $E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV$

On en déduit que : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

En coordonnées cartésiennes, on appelle gradient d'une fonction V le champ de vecteur définie par

$$\overrightarrow{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

Le champ électrostatique s'écrit alors : $E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z\right]$ soit sous la forme condensée:

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)}$$ quel que soit le système de coordonnées

Cette dernière relation est appelé relation locale entre le champ et le potentiel.
Elle est vérifiée en chaque point de l'espace où le champ et le potentiel électrostatiques peuvent être définis. Elle permet également de déterminer le potentiel lorsque le champ électrostatique est connu et réciproquement.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x};\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y};\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r};\quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial \theta};\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Remarque : on constate que :

- *Le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique*
- *Le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.*
- *Le champ électrostatique s'exprime également en V/m :*

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x}\left(\frac{V}{m}\right)$$

3. Surface équipotentielle et lignes de champ électrostatique

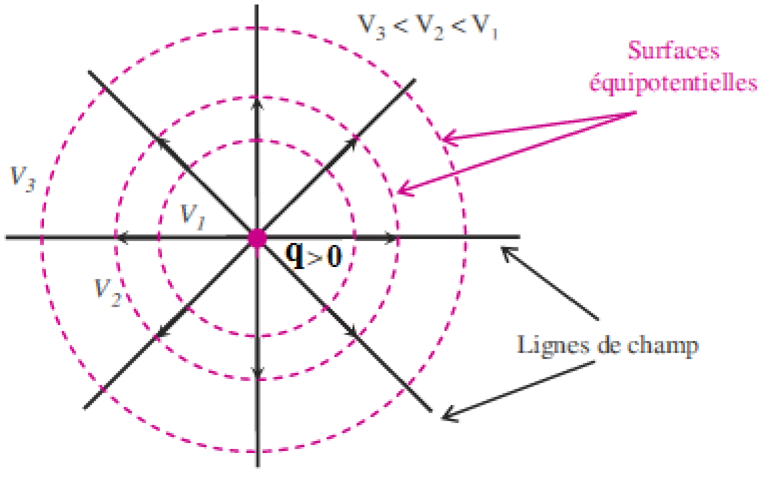
- **Surface équipotentielle**:

Une surface équipotentielle correspond à l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel. Elle est donc définie par : **V(M) = constante**.

- Les lignes de champ électrostatique sont normales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Pour une *charge ponctuelle* **q**, les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge.

Les lignes de champ radiales sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles et dirigées vers les potentiels décroissants.



II. Energie électrostatique

1. Energie électrostatique d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique

Une charge placée dans un champ électrostatique en un point ***M*** où le potentiel est ***V(M)*** , possède l'énergie électrostatique ou énergie potentielle électrique : ***E_P (M) = q. V(M).***

2. Energie d'un système de charges ponctuelles

Soient $\boldsymbol{q_1}$ **,** $\boldsymbol{q_2}$**, …,** $\boldsymbol{q_n}$ des charges électriques placées respectivement aux points A_1, $A_2 \ldots A_n$. Chaque charge est soumise à l'action du champ électrostatique crée par toutes les autres.

On amène dans l'espace vide la charge q_1, de l'infini où le potentiel est nul, au point A_1 où le potentiel est également nul puisqu'il n'y pas d'autre charges.

L'opérateur ne fournit donc aucune énergie ou travail lors de cette opération

$$E_p = q_1 V(A_1) \text{ avec } V(A_1) = 0 \text{ soit } E_{p_1} = W_{1,op} = 0$$

On amène q_2 de l'infini au point A_2 où règne le potentielle V_2 crée par la charge q_1 placée au point A_1

$V(A_2) = V_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$ avec $r_{12}=A_1A_2$. La charge q_2 acquiert l'énergie

$$E_{p_2} = W_{2,op} = q_2 V(A_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

La charge q_1 étant au point A_1 et la charge q_2 au point A_2, on amène la charge q_3 de l'infinie au point A_3 où le potentiel est créé par les charges q_1 et q_2.

$$V(A_3) = V_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} \text{ avec } r_{13}=A_1A_3 \text{ et } r_{23}=A_2A_3$$

La charge q_3 acquiert donc l'énergie

$$E_{p_3} = W_{3,op} = q_3 V(A_3) = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

L'énergie acquise par l'ensemble des charges est :

$$E_p = W_{op} = \sum_{i=1}^{3} E_{p_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$$

Soit $$E_p = W_{op} = \sum_{i=1}^{3} E_{p_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

De manière générale on écrit :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Remarque :

Lorsqu'un opérateur déplace une charge d'un point I (initial) vers un point F (final), les vitesses initiale et finale étant nulles, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

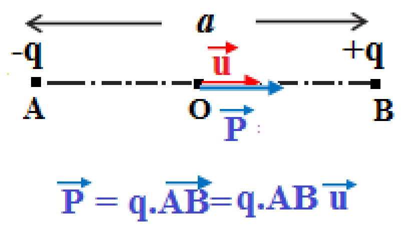
$$E_c(finale) - E_c(initiale) = W\left(\vec{F}_{app}\right) = W_{IF}\left(\vec{F}_{élect}\right) + W_{op} = 0 \text{ soit}$$

$$W_{op} = -W_{IF}\left(\vec{F}_{élect}\right) = E_P(finale) - E_P(initiale)$$

III. Application au dipôle électrostatique

1. Définition

- On appelle dipôle électrostatique un système de deux charges ponctuelles de signe contraire et égal en valeur absolue (**- q** au point A et **+ q** au point B). Les charges sont situées à une distance ***a*** l'une de l'autre. La distance ***a*** est très petite par rapport à la distance ***r*** à laquelle on étudie le champ et le potentiel électrostatiques créés par les deux charges.



- On appelle moment électrique dipolaire le vecteur $\vec{p} = q\vec{AB} = qa\vec{u}$

L'unité du moment dipolaire est le coulomb-mètre (C.m) mais on utilise une autre unité plus petite qui est le Debye (D) $1D = \frac{1}{3}.10^{-29}\,C.m$

2. Potentiel crée à grande distance par un dipôle électrostatique

Le potentiel électrostatique créé par le dipôle au point M est $V(M) = V_A(M) + V_B(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$

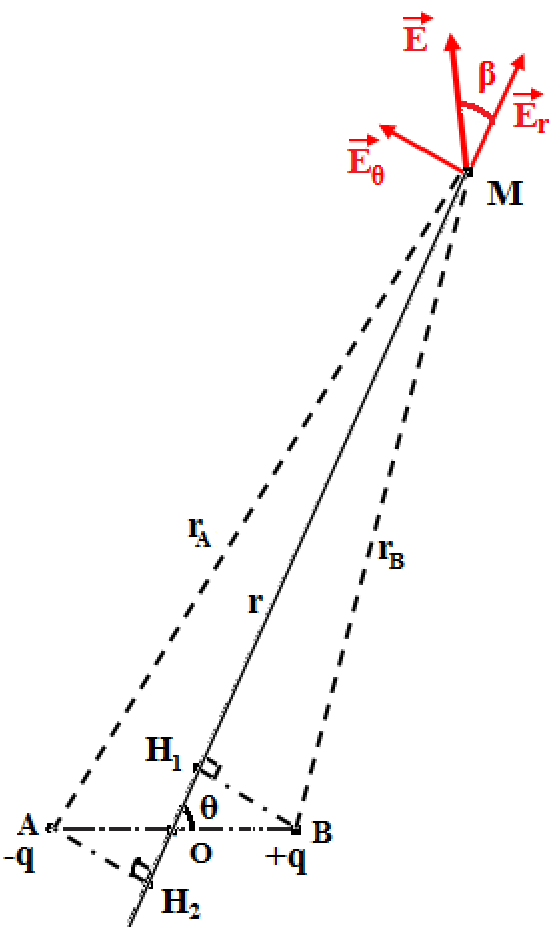
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_A - r_B}{r_B.r_A}\right)$$

Nous voulons exprimer le potentiel en fonction de la distance OM = r. Il faut donc exprimer r_A et r_B en fonction r.

Comme OM $\gg$ *a (AB=a)*, on assimile les triangles ***BMH₁*** et ***AMH₂*** à des triangles isocèles.

On a donc: $H_1M = BM = r_B$

Et $H_2M = AM = r_A$



- $r_A = H_2M = H_2O + OM = H_2O + r$

$cos(\theta) = \frac{OH_2}{OA} = \frac{OH_2}{\frac{a}{2}}$ soit $OH_2 = \frac{a}{2}\cos(\theta)$

$H_2M = r + \frac{a}{2}\cos(\theta)$ soit $r_A = r + \frac{a}{2}\cos(\theta)$

- De même :

OM = OH₁ + H₁M ou H₁M = OM - OH₁

Soit : $r_B = H_1M = r - OH_1$ avec $cos\,\theta = \frac{OH_1}{OB} = \frac{OH_1}{\frac{a}{2}}$, $\Rightarrow$ $OH_1 = \frac{a}{2}cos(\theta)$

D'où : $r_B = r - OH_1 = r - \frac{a}{2}cos(\theta)$

$$r_A - r_B = \left(r + \frac{a}{2}cos(\theta)\right) - \left(r - \frac{a}{2}cos(\theta)\right) = a\,cos(\theta)$$

$$r_A - r_B = a\,cos(\theta)$$

$$r_A \cdot r_B = \left(r + \frac{a}{2}cos(\theta)\right)\cdot\left(r - \frac{a}{2}cos(\theta)\right) = r^2 - \left(\frac{a}{2}cos(\theta)\right)^2$$

Or: $a << r \Rightarrow a^2 << r^2$ et $\forall\theta,\ cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow cos^2(\theta) \leq 1$

On déduit donc que : $\frac{a^2}{4}cos(\theta)^2 \leq r^2$ soit que $r_A.r_B \approx r^2$

Finalement : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_A - r_B}{r_B.r_A}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\,cos(\theta)}{r^2}\right) = \frac{qa\,cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$\boxed{V(M) = \frac{qa\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ ou encore $\boxed{V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ avec $p = qa$

3. Champ électrostatique crée à grande distance par un dipôle

On utilise la relation locale entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ en coordonnées polaires. Dans l'expression du potentiel ci-dessus, les deux variables sont : r et θ.

- Composante radiale E_r :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p\,cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{p\,cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2r}{r^4}\right) = \frac{2p\,cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\ ;$$

$$\boxed{E_r = \frac{2p\,cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

- Composante orthoradiale E_θ :

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}(cos(\theta)) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-sin(\theta)) = \frac{p\,sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{E_\theta = \frac{p\,sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

- Expression du champ :

$$\vec{E} = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta\,.$$

$\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$ ou $\boxed{\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3cos^2(\theta)}}$

- Calculons l'angle $\beta = (\vec{E}_r;\vec{E})$:

$tg(\beta) = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}$ soit $\boxed{tg(\beta) = \frac{1}{2}tg(\theta)}$

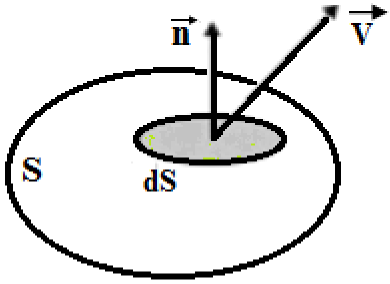
Chapitre 3 : Théorème de gauss dans le vide

I. Eléments d'analyse vectorielle

1. Flux d'un champ de vecteur a travers une surface

1.1 Définition

Soit une surface quelconque S et dS un élément de cette surface. $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normale à l'élément de surface. Le vecteur élément de surface s'écrit : $d\vec{S} = \vec{n}dS$.



- Le flux élémentaire ($d\phi$) du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers dS est défini par : $d\phi = \vec{V} \cdot \vec{dS} = \vec{V} \cdot \vec{n}dS$
- Le flux (ϕ) du champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$\phi = \int_S \vec{V}.\vec{dS} = \int_S \vec{V}.\vec{n}dS = \int_S V\cos(\theta)dS$$

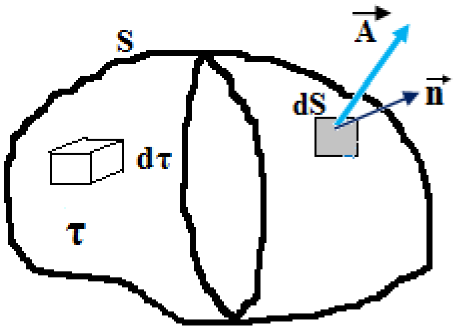
Pour une surface fermée (sphère, ellipsoïde, …) on écrit que le flux est égal à :

$$\phi = \oint_S \vec{V}.\vec{n}dS$$

1.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Ce théorème peut être considérer comme une définition de la divergence d'un champ de vecteur

Selon le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux total de tout vecteur $\vec{A}$ à travers une surface S entourant le volume **τ** est égal à la divergence du vecteur $\vec{A}$ dans le volume:



τ étant un volume limité par une surface fermée S on a :

$$\phi = \oint_S \vec{A}.d\vec{S} = \int_\tau div(\vec{A})d\tau$$

$$\Rightarrow \quad d\phi = div(\vec{A})d\tau$$

La divergence donne la différence entre le flux sortant et le flux entrant :

- Si $div(\vec{A}) \succ 0$ alors les lignes de champ s'écartent ou « divergent »
- Si $div(\vec{A}) \prec 0$ alors les lignes de champ « convergent »
- Si $div(\vec{A}) = 0$ alors les lignes de champ sont parallèles

On appelle divergence d'un vecteur $\vec{A}$, le produit scalaire de ce vecteur avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$:

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$; $\quad div(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(A_x\vec{e_x} + A_y\vec{e_y} + A_z\vec{e_z}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

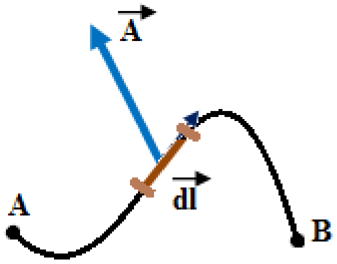
2. Circulation d'un champ de vecteur

2.1 Définition

Soit $\vec{A}$ un vecteur mobile et $\vec{dl}$ un élément de longueur.

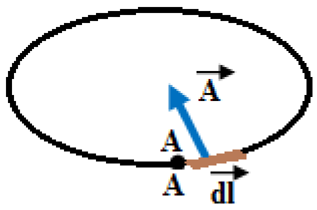
On définit la circulation C du vecteur $\vec{A}$ le long de la courbe (AB) par :

$$C = \int_A^B \vec{A}\cdot\vec{dl}$$

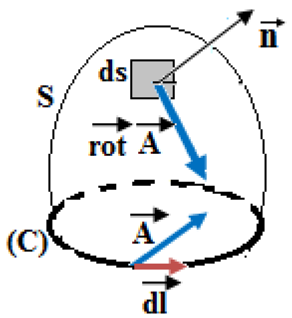


Sur un contour fermé, la circulation du vecteur $\vec{A}$ s'écrit :

$$C = \oint_{A\to A} \vec{A}\cdot\vec{dl}$$



2.2 Théorème de Stokes



S étant une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé (C) et limité par lui on peut écrire:

$$C = \oint_C \vec{A}\vec{dl} = \int_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\vec{n}dS \Rightarrow dC = \overrightarrow{rot}(\vec{A}).\vec{n}dS$$

Si $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ le champ vectoriel possède une composante tournante.

Le théorème de stokes peut être considérer comme une relation de définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

II. Théorème de Gauss

1. Enoncé

Le flux du vecteur champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la surface.

$$\phi = \oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

<u>Remarque</u> : la surface S est une surface purement géométrique appelé surface de Gauss. Son choix se fait arbitrairement mais de façon judicieuse ce qui permet un calcul facile et rapide du champ électrostatique en tout point de l'espace.

On choisit :

- *une surface sphérique si le système chargé présente une symétrie sphérique*
- *une surface cylindrique si le système chargé présente une symétrie cylindrique ou s'il est filiforme*

2. Equations locales de l'électrostatique

2.1 Forme différentielle du théorème de Gauss

Soit une surface fermée S entourant une distribution continue de charge de densité ρ en un point quelconque. Soit **τ** le volume limité par cette surface ***S***.

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers cette surface est : $\phi = \oint_S \vec{E}.\vec{n}dS$.

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire : $\oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \int_\tau div(\vec{E})d\tau$

Si Q_{int} est la charge totale intérieure au volume $\boldsymbol{\tau}$ avec la densité ρ on a : $Q_{int} = \int_\tau \rho d\tau$

Le théorème de Gauss $\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ dévient $\int_\tau div(\vec{E})d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\tau \rho d\tau$ soit

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Cette relation signifie que les charges électriques sont les sources du champ électrostatique.

2.2 Forme différentielle de la circulation du champ électrostatique

La circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé quelconque est nulle :

$$\boxed{\oint_{(c)} \vec{E}d\vec{l} = 0}.$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire $\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{l} = \int \overrightarrow{rot}(\vec{E}).\vec{n}dS$ or $\oint_{(C)} \vec{E}.d\vec{l} = 0$ soit $\int_S \overrightarrow{rot}(\vec{E}).\vec{n}dS = 0$ soit que :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}}$$

Cette relation signifie que les lignes de champ électrostatiques ne se referment pas sur elles même.

2.3 Equation de Poisson

Exprimons en termes de potentiel le théorème de Gauss en coordonnée cartésiennes, soit:

$$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Or selon la relation locale entre champ et potentiel on a :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ soit : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\ ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\ ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial V}{\partial z}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

La relation $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ devient $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ou $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit

$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ quel que soit le système de coordonnées.

Les charges électriques sont les sources du potentiel électrostatique

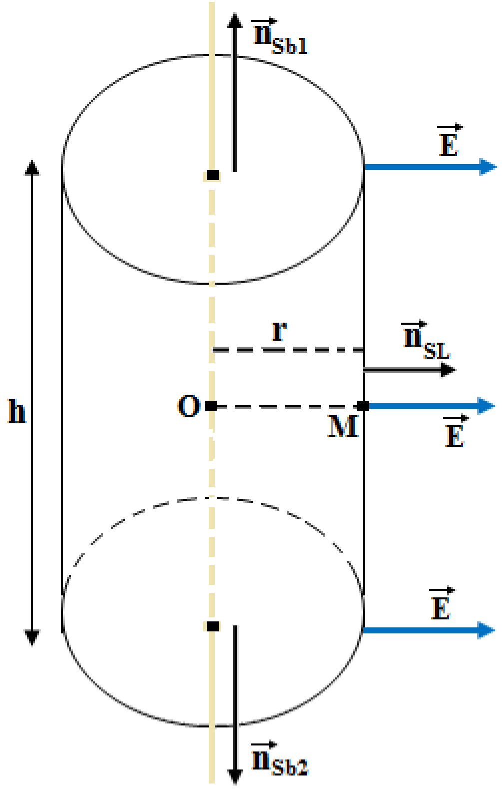
<u>Remarque</u>**:** en l'absence de charge $\rho = 0$ on a:

- $div(\vec{E}) = 0$ c'est l'équation d'isotropie, même propriété du milieu en toute direction en un point
- $\Delta V = 0$ c'est l'équation de ***Laplace***

III. Applications

1. **Fil rectiligne infinie portant une densité linéique λ > 0**
   a. Calculer le champ électrostatique en un point M situé à la distance r du fil
   b. Déduire le potentiel électrostatique sachant que $V(r_0)=0$

a. Calcul du champ électrostatique



- **Enoncé du théorème de Gauss**

$$\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- **Nature de la surface de Gauss**

Cylindre fermé de rayon ***r***, de hauteur ***h*** (égale à la longueur du fil) et dont l'axe coïncide avec le fil.

Remarque *: Un cylindre a trois surfaces : deux surfaces de base et une surface latérale.*

- **Flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss**

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss est le flux à travers les 3 surfaces du cylindre :

$$\phi = \oint_S \vec{E}.\vec{n}dS = \int_{S_{b1}} \vec{E}.\vec{n}_{Sb1}dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E}.\vec{n}_{Sb2}dS_{b2} + \int_{SL} \vec{E}.\vec{n}_L dS_L$$

$$\vec{n}_{Sb1} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}_{Sb1} = 0 \qquad \vec{n}_{Sb2} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}_{Sb2} = 0$$

$$\vec{n}_{SL} \,//\, \vec{E} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{n}_{SL} = E\cdot S_{SL}$$

$$\phi = \int_S \vec{E}.\vec{n}dS = \int_{S_L} E.dS_L$$

E étant un vecteur constant, on a :

$$\int_{S_L} E.dS_L = E\int_{S_L} dS_L = E\cdot S_L$$

$$\phi = \phi_{SL} = E.S_L = E.2\pi rh \quad \text{soit} \quad \phi = 2\pi rhE$$

- **Charges intérieures à la surface de Gauss**

Les charges intérieures à la surface de Gauss sont situées sur une longueur du fil identique à la hauteur ***h*** du cylindre : $\lambda = \frac{Q_{int}}{h} \Rightarrow Q_{int} = \lambda h$

- **Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad\Leftrightarrow\quad 2\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Soit : $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.\vec{n}_{SL}$

b. Potentiel électrostatique crée au point M

Relation locale entre champ et potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

Comme le champ électrostatique est radial (dirigé suivant le rayon), on a la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E(r)dr$$

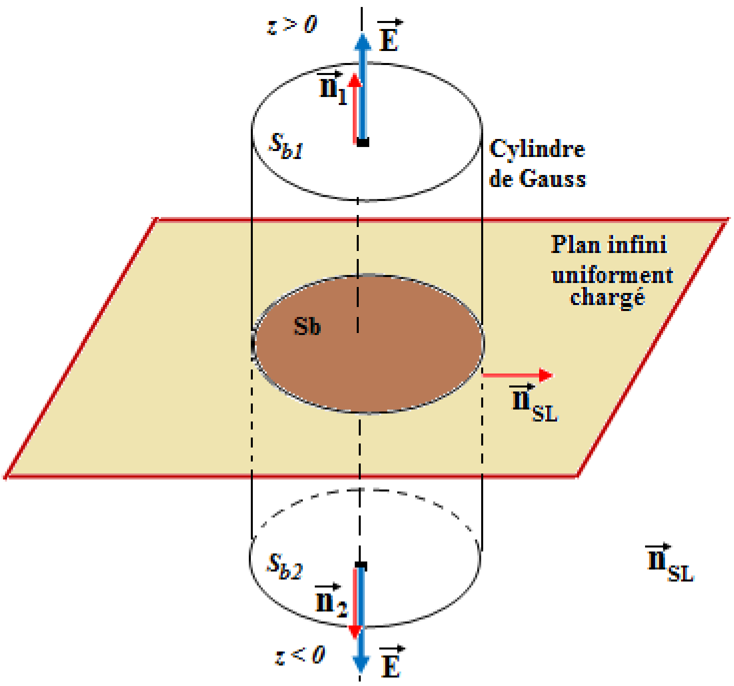
soit $V = -\int E(r)dr = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dr}{r}$ $\qquad V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r) + cste$

- **Détermination de la constante**

$$V(r_0) = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r_0) + cste = 0 \text{ soit } cste = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r_0)$$

et finalement : $V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r) + \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln(r_0) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$.

2. Champ électrostatique crée par un plan uniformément chargé de densité surfacique σ >0



- **Enoncé du théorème de Gauss**

$$\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

- **Nature de la surface de Gauss**

Cylindre de hauteur ***h*** et de rayon ***r***.

- **Calcul du flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface de Gauss**

$$\phi = \oint_S \vec{E}.\vec{n}dS$$

$$= \int_{S_{b1}} \vec{E}.\vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E}.\vec{n}_2 dS_{b2} + \int_{SL} \vec{E}.\vec{n}_{SL} dS_L$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe du cylindre, d'où :

$$\vec{E} \perp \vec{n}_{SL} \Rightarrow \int_{SL} \vec{E}.\vec{n}_{SL} dS_L = 0 \quad \text{et}$$

$$\phi = \int_{S_{b1}} \vec{E}.\vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E}.\vec{n}_2 dS_{b2} = \int_{S_{b1}} E.dS_{b1} + \int_{S_{b2}} E.dS_{b2}$$

E étant un vecteur constant, on à :

$$\phi = E\int_{S_{b1}} dS_{b1} + E\int_{S_{b2}} dS_{b2} = E.S_{b1} + E.S_{b2} \qquad \text{or} \qquad S_{b1} = S_{b2} = S_b$$

$$\phi = E.S_b + E.S_b = 2E.S_b$$

- **Charges intérieures à la surface de Gauss**

$$\sigma = \frac{Q_{int}}{S_b} \Rightarrow Q_{int} = \sigma.S_b$$

- **Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E.S_b = \frac{\sigma.S_b}{\varepsilon_0} \quad \text{soit :} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

<u>Chapitre</u> 4 : Les conducteurs électriques et les condensateurs

I. Les conducteurs et isolants électriques

1. Définitions

a. Les conducteurs

Dans les ***matériaux conducteurs*** (exemple des métaux), les électrons des couches atomiques périphériques sont faiblement liés aux noyaux. L'agitation thermique favorise l'ionisation des atomes et conduit à l'existence d'un gaz d'électrons « libres ». Ces électrons « libres » sont susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'acquérir une vitesse moyenne:

$$<\vec{v}>=\mu\cdot\vec{E} \quad (\mu \text{ étant la mobilité des porteurs libres})$$

La densité (nombre d'électrons libres par unité de volume) est l'un des paramètre clés qui gouverne le caractère conducteur d'un matériaux. Dans les métaux usuels (cuivre, aluminium...) la densité ***n*** est de l'ordre de $\boldsymbol{10^{27}}$ électrons par unité de volume ($\boldsymbol{n = 10^{27}.m^{-3}}$). Dans le cas des conducteurs ioniques, c'est la densité d'ions « libres » et leur mobilité qui définit le caractère conducteur.

b. Les isolants

Dans les ***matériaux isolants*** (*diélectriques*), les électrons sont solidement liés aux atomes. La densité d'électrons libres est quasi-nulle. Parmi les matériaux isolants, on peut citer *les matières plastiques, le verre, la paraffine, le papier ou encore le bois*.

c. Les semi-conducteurs

Entre ces les conducteurs et les isolants, il existe des matériaux dits ***semi-conducteurs*** dont la densité de porteurs libres est typiquement dans la gamme de 10^{17} à 10^{23} m^{-3} . Dans les matériaux semi-conducteurs, la densité ***n*** dépend fortement de leurs taux de dopage (Si, Ge, GaAs...). Le dopage d'un semi-conducteur permet d'augmenter la densité des porteurs libres.

2. Equilibre d'un conducteur

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges libres de ce conducteur sont en moyenne au repos. *Cela aura pour conséquence qu'en tout point intérieur au conducteur, le champ $\vec{E}_{int}$ est nul.*

En effet, le conducteur étant en équilibre, on : $\vec{F}_{int}=\vec{0}$,

$$\text{or} \quad \vec{F}_{int}=q\cdot\vec{E}_{int}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{int}=\vec{0} \text{ car } q\neq 0.$$

De même, de la forme différentielle du théorème de Gauss, $div(\vec{E})=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, on déduit que :

$$div(\vec{E}_{int})=\frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0}=0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{int}=0$$

<u>Conclusion</u> *: Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et le champ électrique à l'intérieur y est toujours nul.*

Deux cas peuvent se présenter suivant que le corps est ***neutre*** ou ***chargé***.

- **Corps conducteur neutre**
  - On a : $\rho_{int}=0$ (en volume) ou $\sigma=0$ (en surface)

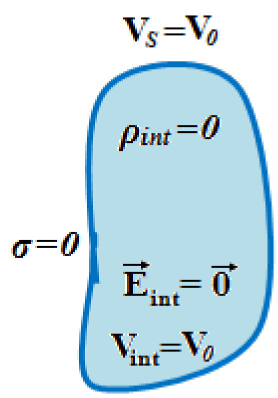
$$\text{De } \vec{E}_{int}=\vec{0} \quad \text{on a} \quad \vec{E}_{int}=-\overrightarrow{grad}V_{int}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad V_{int}=Cte=V_0$$

- Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel et la surface qui la limite est au même potentiel.

V= Cte : *Les lignes de champ électrostatique sont normales à cette surface*

- D'âpres le théorème de Gauss, a l'extérieur du corps on a : $\phi = \oint_S \vec{E}_{ext}.\vec{n}dS = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ (car $\sigma = \rho = 0$) $\Rightarrow$ $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$.

Le champ est nul à l'extérieur du corps.



- **Corps conducteur chargé**

La condition d'équilibre des porteurs de charge entraîne toujours :

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ d'où $\rho_{int} = div\vec{E}_{int} = \vec{0}$ d'une part et $V_{int} = Cte = V_0$ d'autre part.

Le conducteur étant chargé avec une densité volumique de charge nulle ($\rho_{int} = 0$), sa charge ne peut se répartir que sur sa surface, celle-ci est une surface équipotentielle ($V_{int} = Cte = V_0$).

$\rho_{int} = 0$ $\Rightarrow$: *Il y a autant de charges positives que de charges négatives à l'intérieur du conducteur.*

La fonction potentielle est continue à la traversée d'une surface chargée ou non.

- Les conditions de passage du champ $\vec{E}$ à travers la surface permet d'écrire que :

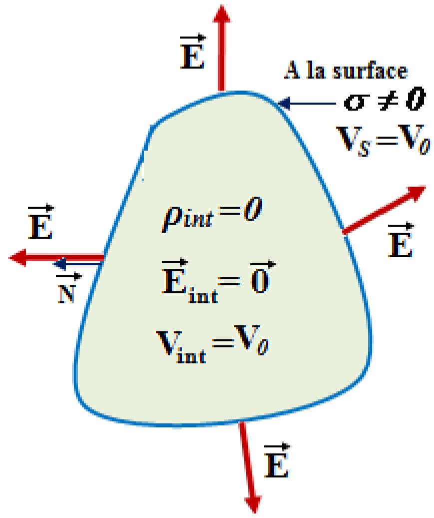
$$\vec{E}_{Text} = \vec{E}_{T\,int} = \vec{0}$$

On déduit qu'au voisinage de la surface, le champ $\vec{E}$ ne peut être que normal à la surface.

- $\vec{E}$ étant normal, on a :

$$\left(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int}\right)\cdot \vec{N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ $\vec{N}$ étant le vecteur unitaire de la normale sortante.

$$\vec{E}_{int} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}$$

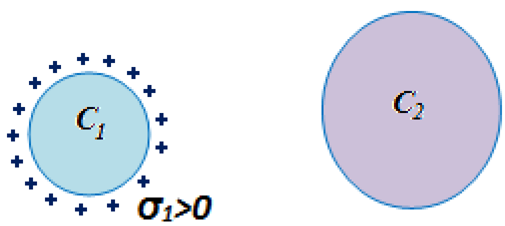


- Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur; - Si $\sigma < 0$, le champ est dirigé vers l'intérieur.

3. Phénomène d'influence de deux conducteurs chargés

a. Influence partielle

Soit un conducteur C_2 isolé, initialement neutre et un conducteur C_1 isolé et chargé positivement avec une densité surfacique $\sigma_1>0$. Le conducteur C_2 se trouve placé dans le champ électrostatique crée par le conducteur C_1.



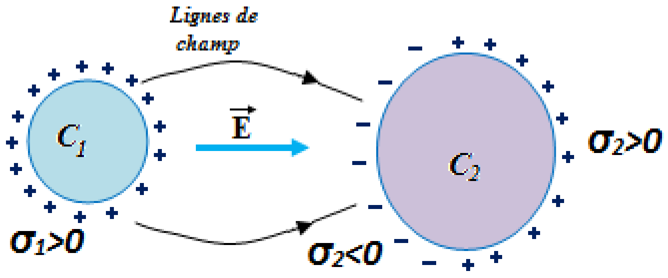
Il apparaît sur la surface de C_2:

- une densité de charge $\sigma_2 < 0$ sur la partie faisant face à C_1

- une densité $\sigma_2 > 0$ sur la partie opposée.

Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de C_2.

L'action de C_1 sur C_2 s'appelle influence électrostatique et elle conduit à une modification de la répartition des charges sur la surface de C_2.



Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure: elles partent de C_1 perpendiculaires à la surface et aboutissent à C_2 également perpendiculaires à la surface.

b. Influence totale

Il y a influence totale lorsque le conducteur C_2 entoure complètement le conducteur C_1.

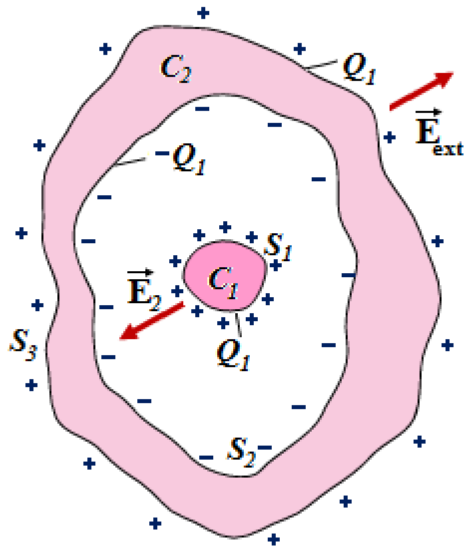
Il y a correspondance totale entre les charges de la surface S_1 de C_1 et la surface interne S_2 de C_2.

On peut alors écrire:

$$Q_1 = \int_{S_1} \sigma_1 dS_1 = -\int_{S_2} \sigma_2 dS_2$$

- *Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées :* $Q_{S_1} = -Q_{S_2}$
- *Condition de neutralité électrique de* C_2 : $Q_{S_2} = -Q_{S_3}$

Soit que : $Q_{S_1} = -Q_{S_2} = Q_{S_3}$

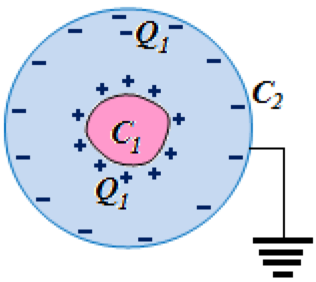


<u>En résumé on peut dire que</u> :

- *Dans la partie massive de* C_1*:* $\vec{E}_1 = \vec{0}$
- *La surface* S_1 *de* C_1 *porte la charge* $Q_1 > 0$ *et crée un champ* $\vec{E}_2$
- *La surface interne* S_2 *de* C_2 *porte la charge* $-Q_1$
- *Dans la partie massive de* C_2*:* $\vec{E}_1 = \vec{0}$
- *Apparition de la charge* $+Q_1$ *sur la surface externe* S_3 *pour assurer la neutralité de* C_2.
- *A l'extérieur de* C_2*, le champ* $\vec{E}_{ext}$ *est celui créé par la seule charge* Q_1 *portée par la surface externe de* C_2.

<u>Remarque</u> **:**

Si on relie la surface extérieure du conducteur C_2 à la Terre par un fil conducteur, toutes les charges positives qui s'y trouvent s'écoulent vers la Terre.



4. Capacité d'un conducteur en équilibre

a. Définition

Considérons un conducteur isolé dans le vide. Si on lui communique successivement les charges Q_1, Q_2, …, Q_n, il prend successivement les potentiels V_1, V_2, …, V_n et on constate que le rapport $\frac{Q_1}{V_1}, \frac{Q_2}{V_2}, \ldots, \frac{Q_n}{V_n}$ est constant.

Ce rapport est appelé par définition la capacité du conducteur ; $C = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \ldots = \frac{Q_n}{V_n}$

La capacité dépend de la forme et des dimensions du conducteur.

La capacité se mesure en *farads (F)* mais cette unité est beaucoup trop grande pour les emplois usuels; on utilise surtout des sous - multiples:

le microfarad (µF):1 µF = 10^{-6} F, le nanofarad (nF): 1nF =10^{9}F et le *picofarad (pF): 1pF = 10^{-12} F.*

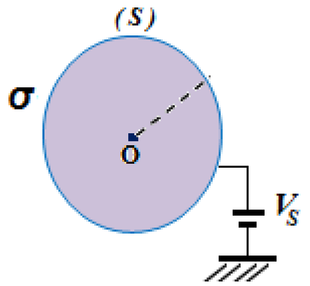
b. Capacité d'un conducteur sphérique de rayon R, isolé dans l'espace

*Soit une sphère de centre O et de rayon **R** portant la charge **Q**.*

Supposons que la sphère soit portée au potentiel V_S .

A la surface de la sphère : $V_S = V(O) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Capacité du conducteur sphérique : $C = \frac{Q}{V_S} = \frac{Q \cdot 4\pi\varepsilon_0 R}{Q} = 4\pi\varepsilon_0 R$



Remarque:

La Terre étant considérée comme un conducteur isolé sphérique de rayon ***R=6400 km***, sa capacité est: ***C=710 pF*** .

II. Les condensateurs

1. Définition

On appelle condensateur l'ensemble de deux conducteurs placés dans des conditions d'influence totale. Les deux conducteurs C_1 et C_2 constituent les armatures du condensateur. C_1 est l'armature interne et C_2 l'armature externe.

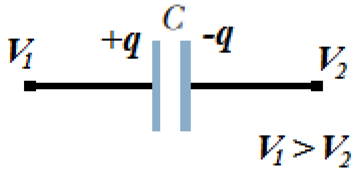
2. Capacité d'un condensateur

La charge **Q** d'un condensateur est celle portée par l'armature interne. Si V_1 est le potentiel de l'armature interne et V_2 celui de l'armature externe, la capacité du condensateur est donnée par la relation suivante : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$

La capacité d'un condensateur dépend de la géométrie des armatures.

On symbolise le condensateur de la façon suivante :

La capacité d'un condensateur caractérise l'aptitude du condensateur à accumuler des charges électriques sur les armatures lorsqu'il est soumis à une tension (V_1-V_2).

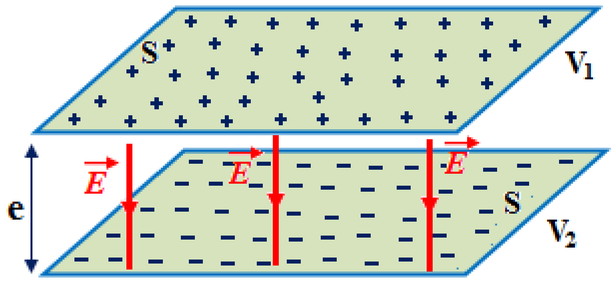


3. Capacité d'un condensateur

a. Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux conducteurs plans parallèles de même surface ***S*** et séparés par une distance (***e***).

On a montré que le champ électrostatique crée par un plan a pour module $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



- ***Expression de Q***

- Première plaque : Densité σ ; $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$
- Deuxième plaque : Densité $-\sigma$; $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

Le principe de superposition permet d'écrire : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$

Le champ électrostatique entre les armatures est uniforme et à pour module $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ avec $\sigma = \frac{Q}{S}$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{Q}{S} \quad \Rightarrow \quad Q = \varepsilon_0 \cdot S \cdot E$$

- ***Expression de $V_1 - V_2$***

D'après la relation local entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, on a :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \text{ (une dimension) soit donc : } \int_{V_1}^{V_2} dV = -E\int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow V_1 - V_2 = e \cdot E \quad (\boldsymbol{x_2 - x_1 = e})$$

La capacité du condensateur plan est donc :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot E}{e \cdot E} = \varepsilon_0 \frac{S}{e} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

<u>Remarque</u>: Lorsqu'on introduit entre les armatures, par substitution du vide, un diélectrique (mica, céramique, verre,…) de constante diélectrique ε_r on multiplie la capacité à vide du condensateur par un facteur ε_r.

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{avec } \varepsilon_r > 1 \text{ on a:} \quad C = \varepsilon \frac{S}{e} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e} = \varepsilon_r C_0$$

ε_0 est la permittivité électrique du vide et ε_r est la permittivité relative du diélectrique.

III. Association de condensateurs

1. Association en série

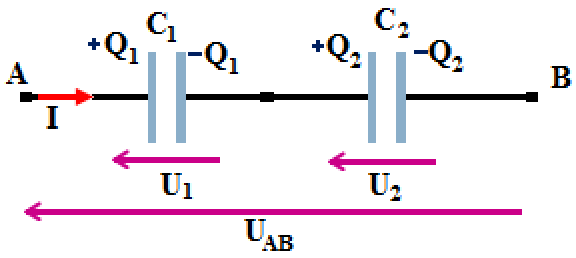
- **Charge Q des armatures**

Considérons le montage ci-contre constitué de deux condensateurs $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ montés en série.

On a : $I = I_1 = I_2$ et $U_{AB} = U_1 + U_2$

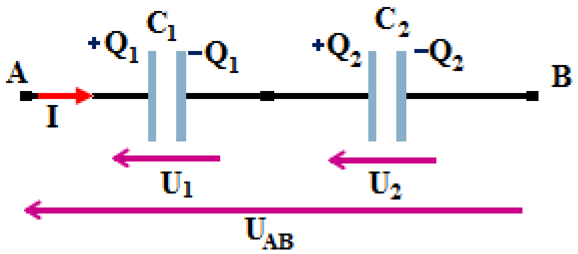
La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire :

$I \cdot t = I_1 \cdot t = I_2 \cdot t$ ou encore $Q = Q_1 = Q_2$

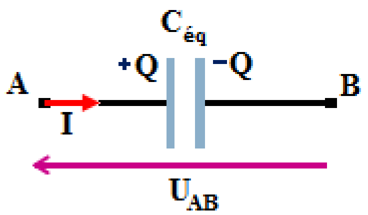


Toutes les charges des armatures sont identiques en valeur absolue.

- **Capacité équivalente**



$U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$ (1)



$Q = C_{éq} \cdot U_{AB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_{éq}}$ (2)

$U_{AB} = U_{AB}$ (équation (1) = (2)) $\Leftrightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{éq}} \Rightarrow \frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

<u>Généralisation</u> : Pour *n* condensateurs en série on a : $\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

2. Association en parallèle

- **Charge du condensateur**

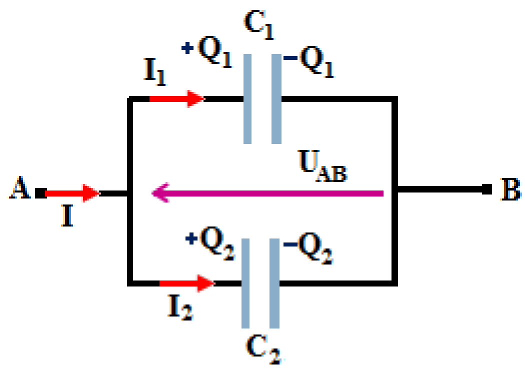
Pour le montage ci-contre les deux condensateurs $\boldsymbol{C_1}$ et $\boldsymbol{C_2}$ montés en parallèles.

On a : $U_{AB} = U_1 = U_2$ et $I = I_1 + I_2$

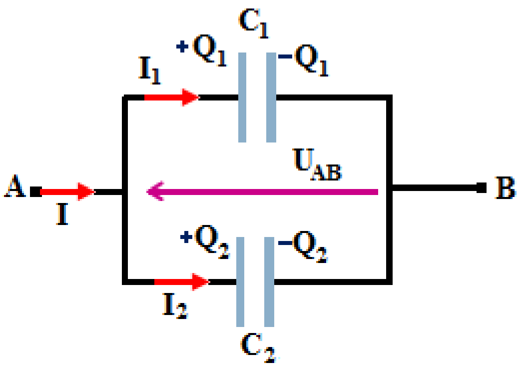
La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire :

$I = I_1 + I_2 \Leftrightarrow I \cdot t = I_1 \cdot t + I_2 \cdot t \Leftrightarrow$

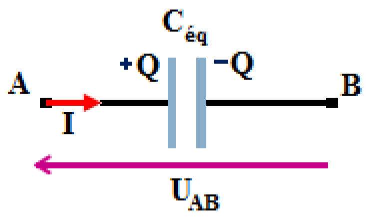
$Q = Q_1 + Q_2$ (1)



- **Capacité équivalente**



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U_{AB} + C_2 \cdot U_{AB} \quad (1)$$



$$Q = C_{éq} \cdot U_{AB} \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) étant identiques on a : $C_{éq} = C_1 + C_2$

<u>Généralisation</u> : Pour n condensateurs en parallèle on a : $C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

3. Energie d'un condensateur

Un condensateur est un réservoir d'énergie électrostatique. Un condensateur emmagasine de l'énergie lors de sa charge et se comporte comme un récepteur. Ensuite le condensateur se comporte comme un générateur en restituant l'énergie préalablement emmagasinée.

L'énergie stockée dans un condensateur est donnée par l'expression :

$$E_{él} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2$$