

UNIVERSITE OUAHIGOUYA

.....
**Unité de Formation et de Recherche en
Sciences et Technologie**



BURKINA FASO

.....
Unité Progrès Justice

COURS D'ELECTRICITE

Harouna KABORE Cours d'électricité L1S1/ST-UOHG

Harouna KABORE

Enseignant en Physique Appliquée

Spécialité : Énergétique

Mail: haroukab@gmail.com ; Cel: 70 08 19 07

PLAN DU COURS

PREMIERE PARTIE : ELECTRICITE GENERALE

Chapitre 1 : Electrostatique

Chapitre 2 : Dipôles électrocinétiques, courant continu et Circuits linéaire

Chapitre 3 : Les Régimes transitoires d'un courant électrique

Chapitre 4 : Le régime variable sinusoïdalement forcé

OBJECTIF GENERAL :

Ce cours est destiné à fournir aux étudiants les outils fondamentaux qui leur permettront d'analyser le fonctionnement des systèmes électriques (s'approprier des notions de base de l'électricité)

OBJECTIFS SPECIFIQUES :

A la fin de la séance l'étudiant doit être capable de :

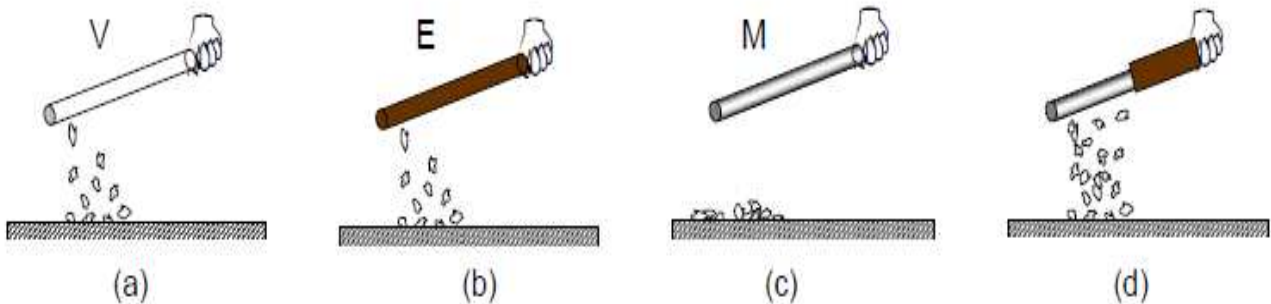
- Maîtriser des phénomènes électriques
- Comprendre les lois de base ;
- Déterminer les paramètres caractéristiques du fonctionnement d'un appareil électrique.
- Etre capable de décrire par le concept de champ électrostatique l'action à distance exercée par une charge et de prévoir l'action d'une charge ponctuelle sur une autre charge.

CHAPITRE I : ELECTROSTATIQUE

Nous allons étudier, dans ce chapitre, l'interaction électrique, qui fait intervenir le concept de charge électrique. L'électrostatique est la partie de l'électricité qui ne fait intervenir que des charges fixes.

I. Généralité sur l'électrostatique

I.1- Electrification par frottement (triboélectricité). frotter avec un drap en soie ou en laine



Figures I. 1

- Une tige en verre bien sèche, frottée à l'aide d'un morceau de drap en soie ou en laine, tenue à la main, attire de petits morceaux de papier (figure I.1.a). On dit que le verre a été *électrisé*, ce phénomène est appelé *électrisation* et la discipline de la physique qui traite de tels phénomènes est l'*électricité*.
- On obtient le même résultat si on remplace la tige en verre par un bâton d'ébonite (caoutchouc durci) et si on répète la même opération (figure I.1.b).
- Si on essaie d'électriser, comme précédemment, une tige métallique, en cuivre par exemple, on n'obtient aucun résultat (figure I.1.c). La tige en métal, tenue à la main, n'exerce aucune force sur les morceaux de papier.
- Par contre si on tient, par l'intermédiaire d'un manche en bois, la tige métallique électrisée, on constate que des forces d'attraction se produisent sur toute la surface du métal (figure I.1.d).

Interprétation de ces expériences

Cette propriété, est due à l'existence de *charges électriques q* .

Dans le cas du verre et de l'ébonite, ces expériences montrent que les charges restent localisées sur la partie frottée et ne se répandent pas sur toute la surface du matériau. Le verre et l'ébonite sont des *isolants électriques*.

Par contre les charges dues à l'électrisation se déplacent dans les métaux et s'écoulent vers la terre à travers le corps de l'expérimentateur. C'est la raison pour laquelle on ne constate aucun effet de

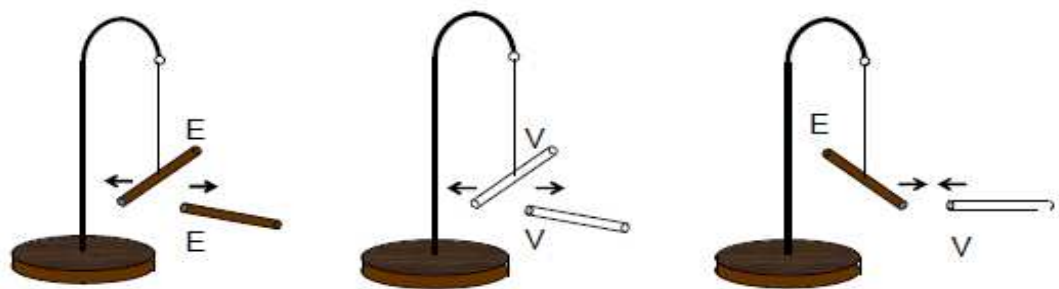
l'électrisation dans l'expérience de la figure I.1.c. Les métaux sont des corps **conducteurs d'électricité**.

Dans la quatrième expérience, le manche en bois, qui est un isolant, empêche l'écoulement des charges électriques. Néanmoins celles-ci se répandent sur toute la surface du métal.

I.2- Les deux types d'électricité

Suspendons, au fil des pendules, un bâton d'ébonite ou une tige de verre dont une extrémité a été électrisée par frottement.

Approchons de cette extrémité la partie électrisée, par la même méthode, d'un second bâton d'ébonite. L'interaction de ces parties électrisées se traduit par une répulsion.



Figures I.2 Répulsion et attraction entre corps électrisés

Dans une troisième expérience, on met en présence l'extrémité électrisée du bâton d'ébonite et celle de la tige de verre électrisée. Il en résulte, à présent, une attraction.

Ces expériences mettent en évidence deux types d'électricité :

La première apparaît dans le verre : **c'est l'électricité vitreuse** à laquelle on a attribué arbitrairement un **signe positif**.

La seconde se manifeste dans l'ébonite et d'autres résines : **c'est l'électricité résineuse** ; on lui a attribué un **signe négatif**.

En outre, ces expériences montrent que : deux corps chargés d'une électricité de même signe, positive ou négative, se repoussent ; par contre ils s'attirent s'ils portent des charges de signes contraires.

Un corps qui n'est pas chargé est **neutre**.

II. Loi de Coulomb

II.1. Charges électriques

Les résultats des expériences précédentes ont amené les savants à introduire le concept de *charge électrique* confirmé par les travaux de Coulomb et surtout par la découverte de l'électron en 1881

par Joseph J. Thomson. La charge électrique, qui caractérise le phénomène d'électrisation, ne peut être dissociée de la matière. Elle existe sous deux formes, qualifiées de *positive* et de *negative*.

Les expériences précédentes permettent d'énoncer la loi suivante: « *Deux charges électriques de même signe positif ou négatif, se repoussent ; par contre elles s'attirent si elles sont de signes contraires.* »

La charge électrique que l'on note " q " est une grandeur qui rend compte des interactions électromagnétiques entre particules aussi bien que la masse " m " rend compte des interactions gravitationnelles.

La charge électrique d'un corps représente la quantité d'électricité portée par ce corps. Cette charge est un multiple de la charge élémentaire.

$$q = n \cdot e \text{ avec } q \text{ en coulomb (C) et } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Pour un électron $q = -e$ et pour un proton $q = +e$

➤ Charges ponctuelles

C'est un corps électrisé de dimensions assez petites de telle sorte qu'il peut être assimilé à un point dans l'espace. Dans le cas contraire on a une distribution continue de charges.

➤ Distribution continue de charges

• Distribution volumique de charges

On considère un volume v qui contient toute la charge q .

Un élément de volume $d\tau$ contient une portion notée dq de la charge q .

La densité volumique de charge ρ représente la charge par unité de volume soit

$$\rho(M) = \frac{dq}{d\tau} \Rightarrow q = \int_{\tau} \rho d\tau.$$

La **densité volumique** ρ s'exprime en $C.m^{-3}$.

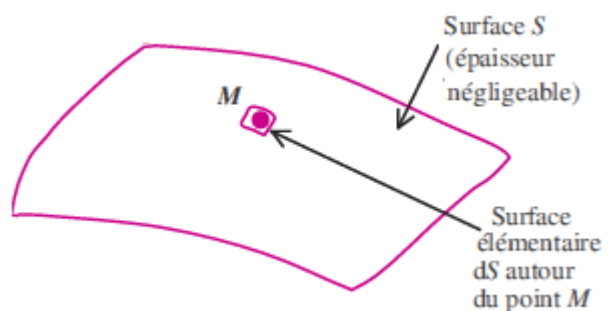
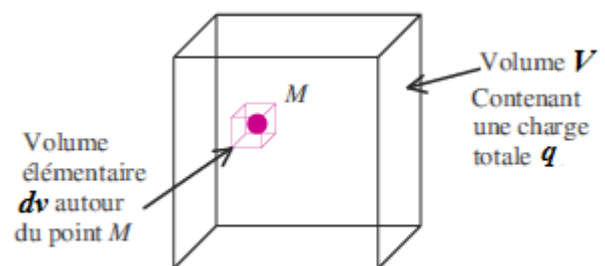
• Distribution surfacique de charges

Soit une surface S qui porte une charge q . dS un élément de cette surface porte la charge dq .

La densité surfacique de charge notée σ et définie

par l'expression
$$\sigma(M) = \frac{dq}{dS} \Rightarrow q = \int_S \sigma dS$$

représente la charge par unité de surface. La



densité surfacique σ s'exprime en $C.m^{-2}$.

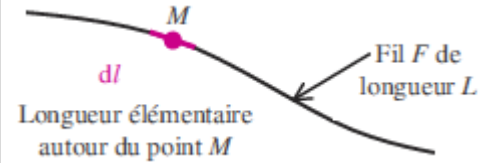
- **Distribution linéique de charges**

Considérons une ligne L qui porte la charge q . dl une portion de la ligne porte la charge dq .

La densité linéique ou linéaire de charge notée λ et définie

par $\lambda(M) = \frac{dq}{dl} \Rightarrow q = \int_L \lambda dl$ représente la charge par unité de

longueur. La densité linéique λ s'exprime en $C.m^{-1}$.

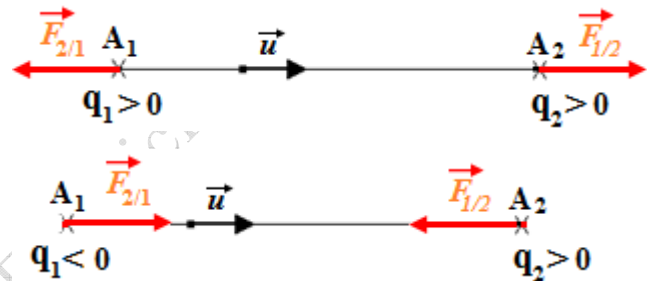


II.2. Loi de coulomb

Soit deux charges q_1 et q_2 placées dans le vide respectivement aux points A_1 et A_2 . Pour un observateur au repos, la charge q_1 exerce sur q_2 une force $\vec{F}_{1/2}$ appliquée au point A_2 , portée par la droite $(A_1 A_2)$ et inversement proportionnelle au carrée de la distance qui les sépare.

De même q_2 exerce sur q_1 une force $\vec{F}_{2/1}$ appliquée au point A_1 .

Cette force est attractive si les charges sont de signe contraire et répulsive si elles sont de même signe.



L'expression vectorielle s'écrit :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}$$

avec le vecteur unitaire qui est donné par la formule $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{\|\overrightarrow{A_1 A_2}\|}$

Le principe des actions réciproques : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

Le module de la force électrostatique est donné par l'expression :

$$F_{1/2} = F_{2/1} = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 S.I \text{ est le coefficient de proportionnalité}$$

et $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} S.I$ est la permittivité électrique du vide.

Remarque : la loi de coulomb est une loi empirique et c'est le principe fondamental de l'électrostatique.

III. Champ électrostatique

III.1. Définition

Considérons une région de l'espace où règne un champ électrostatique et soit M un point de la région. On place successivement au point M des charges de même signe $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

On constate que ces charges sont soumises à des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ de même support et de même sens telle que l'on ait :

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \vec{C}_{st}$$

Cette constante sera notée \vec{E} et définira le champ électrostatique.

$$\vec{F}_1 = q_1 \cdot \vec{E}, \quad \vec{F}_2 = q_2 \cdot \vec{E}, \quad \dots, \quad \vec{F}_n = q_n \cdot \vec{E},$$

\vec{E} s'exprime en newton par coulomb (N.C⁻¹).

On dit qu'il existe un champ électrostatique dans une région de l'espace si une charge électrique placée dans cette région est soumise à une force électrostatique.

III.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Soit une charge q_1 placée en un point A de l'espace. La charge q_1 crée un champ électrostatique en un point M dans cette région de l'espace.

Pour déterminer ce champ, on place au point M une charge passive q_2 qui va subir une force électrostatique $\vec{F}_{1/2}$.



Principe de Coulomb :

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

Définition du champ électrostatique au point M : $\vec{F}_{1/2} = q_2 \cdot \vec{E}(M)$

On en déduit l'expression du champ électrostatique au point M :

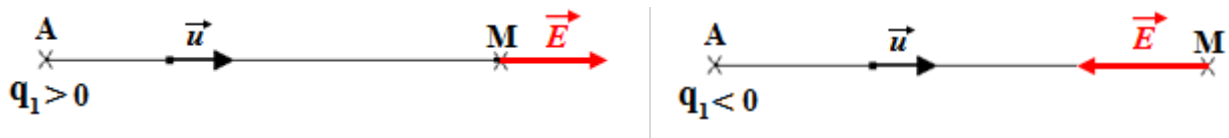
$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{1/2}}{q_2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \frac{q_1}{AM^2} \cdot \vec{u}$$

avec le vecteur unitaire qui est donné par la formule $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$

Si la charge source est positive, le champ électrostatique est centrifuge.

Si la charge source est négative, le champ électrostatique est centripète.



- Les charges électriques sont les sources de champ électrostatique.
- La charge qui est soumise à la force est appelée charge passive et celle qui crée le champ est appelée charge active.

Remarque : le champ et la force électrostatiques sont des grandeurs vectorielles définies par quatre caractéristiques : le point d'application ; la direction ; le sens et le module ou intensité.

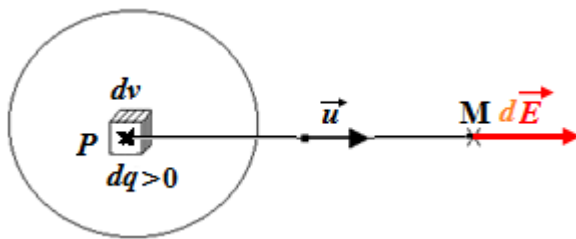
III.3. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charge

Pour une distribution continue de charges, un petit élément $(d\tau, dS, dl)$ portant la charge dq crée en un point M un champ électrostatique élémentaire $d\vec{E}$.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{u}$$

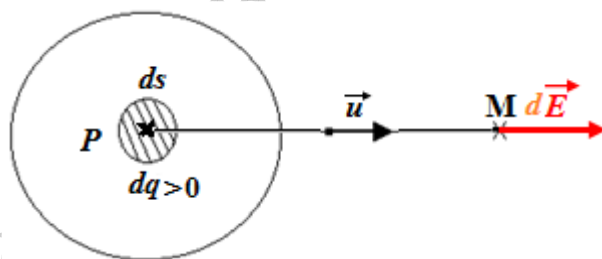
L'intégrale doit être étendue à tout l'espace occupé par la charge.

➤ Distribution volumique de charges



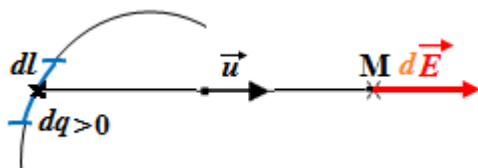
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

➤ Distribution surfacique de charges



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

➤ Distribution linéique de charges

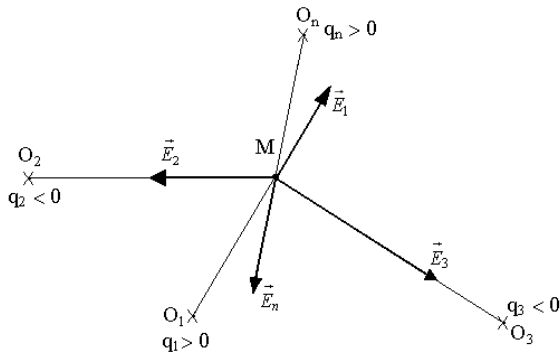


$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{PM^2} \cdot \vec{u}$$

III.4. Principe de superposition

Considérons un ensemble de charges q_i placées en des points O_i . Chacune des charges q_i crée au point M un champ électrostatique \vec{E}_i dont l'expression est donnée par :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{O_i M^2} \cdot \vec{u}_i$$



Le champ résultant $\vec{E}(M)$ créé par l'ensemble des charges est la somme vectorielle des champs individuels : c'est le principe de superposition.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

Si q est la charge placée au point M, elle est soumise à la force

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M) = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_2 + \dots + q\vec{E}_n \quad \text{soit}$$

$$\vec{F}(M) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

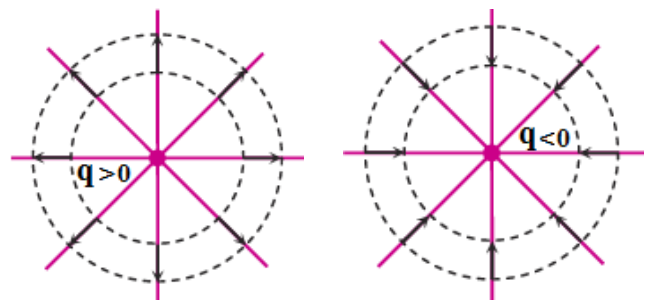
III.5. Lignes de champ

Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ électrostatique \vec{E} associé à ce point.

La ligne de champ est orientée dans le sens du champ c'est-à-dire dans le sens des potentiels décroissants.

Les lignes de champ produites par une charge ponctuelle placée en point P sont des droites passant par le point P. On dit que le champ électrostatique produit par une charge électrique est radial.

Les lignes de champ sont divergentes si la charge est positive et convergentes si la charge est négative.



IV. Potentiel électrostatique

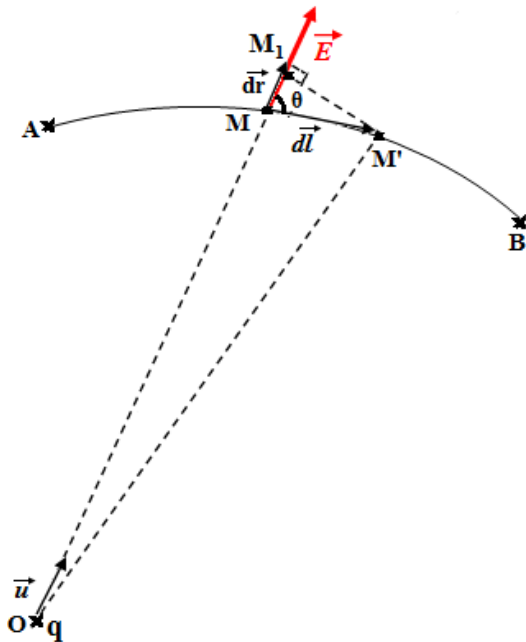
IV.1. Définition

Le potentiel électrostatique noté V est une fonction dont la différentielle est égale à l'opposé de la circulation du champ électrostatique : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

Remarque : la circulation du champ électrostatique le long d'une courbe fermée est nulle soit :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^A dV = -(V_A - V_A) = 0$$

IV.2. Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle



La charge q crée au point M le champ \vec{E}

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{u} \cdot d\vec{l} = \|\vec{u}\| \cdot \|d\vec{l}\| \cdot \cos(\vec{u}; d\vec{l}) = dl \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{MM_1}{MM'} = \frac{dr}{dl}$$

$$\vec{u} \cdot d\vec{l} = dl \cdot \frac{dr}{dl} = dr$$

$$dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \Rightarrow V(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

Le potentiel est une grandeur scalaire définie à une constante additive près. La constante sera souvent choisie de telle sorte que le potentiel soit nul à l'infini c'est-à-dire $V(r \rightarrow +\infty) = 0$

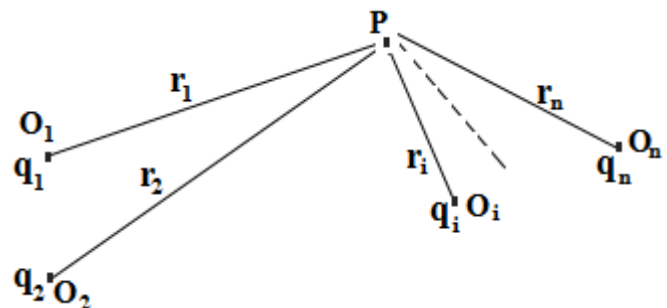
Pour une charge ponctuelle $V(r \rightarrow +\infty) = 0 + cste = 0 \Rightarrow cste = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

L'unité du potentiel est le volt (V).

IV.3. Potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges ponctuelles

Le potentiel créé en un point P par un ensemble de n charges ponctuelles q_i placées respectivement aux distances r_i de P est la somme scalaire des différents potentiels créés par chacune des charges au point P :

$$V(P) = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + Cte$$



IV.4. Potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charges

Pour une distribution continue de charges, un petit élément $(d\tau, dS, dl)$ portant la charge dq crée en un point M un potentiel électrostatique élémentaire dV . Le potentiel créé par toutes les charges au point M est donc :

$$V(M) = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} + cste ,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace occupée par les charges.

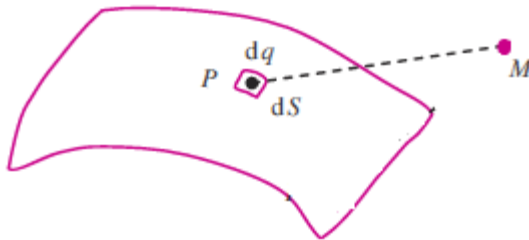
➤ Distribution volumique de charges



$$dq = \rho d\tau$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho d\tau}{r} + Cste$$

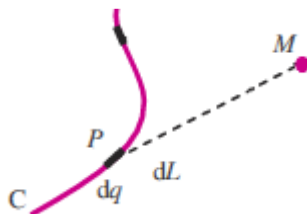
➤ Distribution surfacique de charges



$$dq = \sigma dS$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r} + Cste$$

➤ Distribution linéique de charges



$$dq = \lambda dl$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r} + Cste$$

IV.5. Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

Soit (E_x, E_y, E_z) les composantes du champ électrostatique dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et (dx, dy, dz) les composantes du vecteur $d\vec{l}$ dans cette base.

La relation différentielle $\vec{E} \cdot d\vec{l} = -dV$ s'explicite de la manière suivante :

$$(E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z)(dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = -dV \text{ soit } E_x dx + E_y dy + E_z dz = -dV$$

$$\text{On en déduit que : } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cartésiennes, on appelle gradient d'une fonction V le champ de vecteur définie par

$$\overrightarrow{\text{grad}}(V) = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

Le champ électrostatique s'écrit alors : $E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = -\left[\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right]$ soit sous la forme condensée:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \text{ quel que soit le système de coordonnées}$$

Cette dernière relation est appelé relation locale entre le champ et le potentiel.

Elle est vérifiée en chaque point de l'espace où le champ et le potentiel électrostatiques peuvent être définis. Elle permet également de déterminer le potentiel lorsque le champ électrostatique est connu et réciproquement.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{r \partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Remarque : on constate que :

- *Le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique*
- *Le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.*
- *Le champ électrostatique s'exprime également en V/m :*

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \left(\frac{V}{m} \right)$$

IV.6 Invariances et symétries

Le principe du Curie affirme que « Lorsque les causes d'un phénomène possèdent des éléments de symétrie, ces éléments de symétrie se retrouvent dans les effets. »

En électrostatique, les symétries des distributions de charges (causes) se retrouvent dans le champ et le potentiel électriques (effets). Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie d'une distribution de charges, on pourra connaître celles du champ électrostatique associé. Ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ électrostatique.

IV.6.1. Invariances

1. Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un axe noté (Oz), le champ et le potentiel seront indépendants de la coordonnée cartésienne z .
2. Si une distribution de charges est invariante pour toute translation parallèle à un plan noté (Oxy), le champ et le potentiel ne dépendront que de la coordonnée cartésienne z .
3. Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation autour d'un axe noté (Oz), le champ et le potentiel seront indépendants de la coordonnée cylindrique φ . Le problème est dit à symétrie de révolution.
4. Si une distribution de charges possède les invariances (1) et (3), le champ et le potentiel ne dépendront que de la coordonnée cylindrique ρ . Le problème est dit à symétrie cylindrique.
5. Si une distribution de charges est invariante pour toute rotation d'axe passant par un point noté O, le champ et le potentiel ne dépendront que de la coordonnée sphérique r . Le problème est dit à symétrie sphérique.

IV.6.2 Symétries

- Plan de symétrie Π : si S admet un plan de symétrie Π , alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.
- Plan d'antisymétrie Σ : si S admet un plan antisymétrie Σ , alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

IV.7. Surface équipotentielle et lignes de champ électrostatique

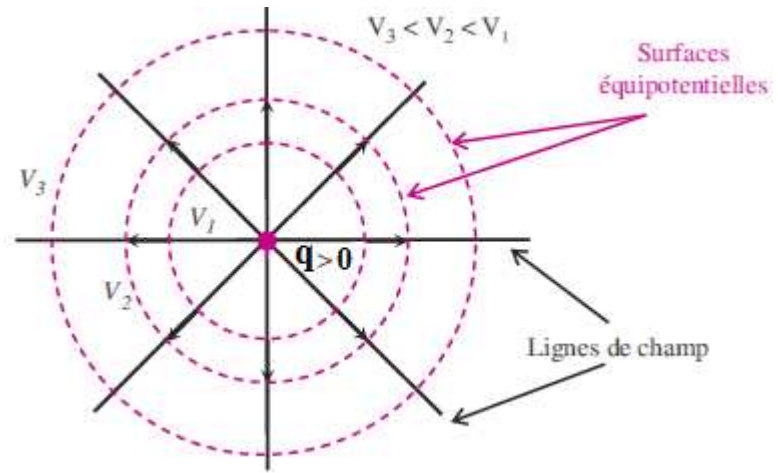
- **Surface équipotentielle:**

Une surface équipotentielle correspond à l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel. Elle est donc définie par : $V(M) = \text{constante}$.

- Les lignes de champ électrostatique sont normales aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Pour une charge ponctuelle q , les surfaces équipotentiellles sont des sphères centrées sur la charge.

Les lignes de champ radiales sont perpendiculaires aux surfaces équipotentiellles et dirigées vers les potentiels décroissants.



V. Energie électrostatique

V.1. Energie électrostatique d'une charge ponctuelle dans un champ électrostatique

Une charge placée dans un champ électrostatique en un point M où le potentiel est $V(M)$, possède l'énergie électrostatique ou énergie potentielle électrique : $E_P(M) = q \cdot V(M)$.

V.2. Energie d'un système de charges ponctuelles

Soient q_1, q_2, \dots, q_n des charges électriques placées respectivement aux points A_1, A_2, \dots, A_n . Chaque charge est soumise à l'action du champ électrostatique créé par toutes les autres.

On amène dans l'espace vide la charge q_1 , de l'infini où le potentiel est nul, au point A_1 où le potentiel est également nul puisqu'il n'y pas d'autre charges.

L'opérateur ne fournit donc aucune énergie ou travail lors de cette opération

$$E_p = q_1 V(A_1) \text{ avec } V(A_1) = 0 \text{ soit } E_{p1} = W_{1,op} = 0$$

On amène q_2 de l'infini au point A_2 où règne le potentielle V_2 créée par la charge q_1 placée au point A_1

$$V(A_2) = V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \text{ avec } r_{12} = A_1 A_2. \text{ La charge } q_2 \text{ acquiert l'énergie}$$

$$E_{p2} = W_{2,op} = q_2 V(A_2) = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

La charge q_1 étant au point A_1 et la charge q_2 au point A_2 , on amène la charge q_3 de l'infinie au point A_3 où le potentiel est créé par les charges q_1 et q_2 .

$$V(A_3) = V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \text{ avec } r_{13}=A_1A_3 \text{ et } r_{23}=A_2A_3$$

La charge q_3 acquiert donc l'énergie

$$E_{p_3} = W_{3,op} = q_3 V(A_3) = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

L'énergie acquise par l'ensemble des charges est :

$$E_p = W_{op} = \sum_{i=1}^3 E_{p_i} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

$$\text{Soit } E_p = W_{op} = \sum_{i=1}^3 E_{p_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

De manière générale on écrit :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Remarque :

Lorsqu'un opérateur déplace une charge d'un point I (initial) vers un point F (final), les vitesses initiale et finale étant nulles, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

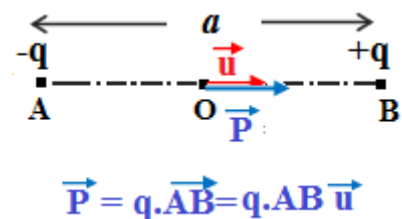
$$E_c(\text{finale}) - E_c(\text{initiale}) = W(\vec{F}_{app}) = W_{IF}(\vec{F}_{elect}) + W_{op} = 0 \text{ soit}$$

$$W_{op} = -W_{IF}(\vec{F}_{elect}) = E_p(\text{finale}) - E_p(\text{initiale})$$

VI. Application au dipôle électrostatique

VI.1. Définition

- On appelle dipôle électrostatique un système de deux charges ponctuelles de signe contraire et égal en valeur absolue ($-q$ au point A et $+q$ au point B). Les charges sont situées à une distance a l'une de l'autre. La distance a est très petite par rapport à la distance r à laquelle on étudie le champ et le potentiel électrostatiques créés par les deux charges.



- On appelle moment électrique dipolaire le vecteur $\vec{p} = q\vec{AB} = qa\vec{u}$

L'unité du moment dipolaire est le coulomb-mètre (C.m) mais on utilise une autre unité plus petite qui est le Debye (D) $1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} C.m$

VI.2. Potentiel crée à grande distance par un dipôle électrostatique

Le potentiel électrostatique créé par le dipôle au point M

$$\text{est } V(M) = V_A(M) + V_B(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} \right)$$

Nous voulons exprimer le potentiel en fonction de la distance $OM = r$. Il faut donc exprimer r_A et r_B en fonction r .

Comme $OM \gg a$ ($AB=a$), on assimile les triangles BMH_1 et AMH_2 à des triangles isocèles.

On a donc: $H_1M = BM = r_B$

Et $H_2M = AM = r_A$

$$\blacksquare \quad r_A = H_2M = H_2O + OM = H_2O + r$$

$$\cos(\theta) = \frac{OH_2}{OA} = \frac{OH_2}{\frac{a}{2}} \quad \text{soit } OH_2 = \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

$$H_2M = r + \frac{a}{2} \cos(\theta) \quad \text{soit } r_A = r + \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

▪ De même :

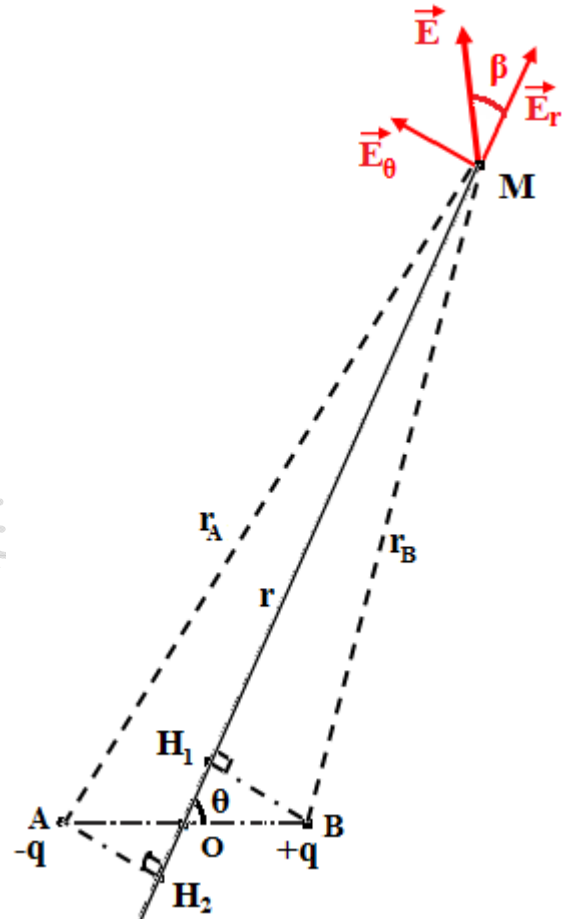
$$OM = OH_1 + H_1M \quad \text{ou } H_1M = OM - OH_1$$

$$\text{Soit : } r_B = H_1M = r - OH_1 \quad \text{avec } \cos \theta = \frac{OH_1}{OB} = \frac{OH_1}{\frac{a}{2}}, \quad \Rightarrow \quad OH_1 = \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

$$\text{D'où : } r_B = r - OH_1 = r - \frac{a}{2} \cos(\theta)$$

$$r_A - r_B = \left(r + \frac{a}{2} \cos(\theta) \right) - \left(r - \frac{a}{2} \cos(\theta) \right) = a \cos(\theta)$$

$$r_A - r_B = a \cos(\theta)$$



$$r_A \cdot r_B = \left(r + \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) \cdot \left(r - \frac{a}{2} \cos(\theta)\right) = r^2 - \left(\frac{a}{2} \cos(\theta)\right)^2$$

Or: $a \ll r \Rightarrow a^2 \ll r^2$ et $\forall \theta, \cos(\theta) \leq 1 \Rightarrow \cos^2(\theta) \leq 1$

On déduit donc que : $\frac{a^2}{4} \cos^2(\theta) \leq r^2$ soit que $r_A \cdot r_B \approx r^2$

$$\text{Finalement : } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{a \cos(\theta)}{r^2} \right) = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V(M) = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ou encore

$$V(M) = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

avec $p = qa$

VI.3. Champ électrostatique crée à grande distance par un dipôle

On utilise la relation locale entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$ en coordonnées polaires.

Dans l'expression du potentiel ci-dessus, les deux variables sont : r et θ .

- Composante radiale E_r :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{r^3} \right) = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} ;$$

$$E_r = \frac{2p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Composante orthoradiale E_θ :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos(\theta)) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-\sin(\theta)) = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- Expression du champ :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta .$$

$$\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \quad \text{ou} \quad \|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2(\theta)}$$

- Calculons l'angle $\beta = (\vec{E}_r; \vec{E})$:

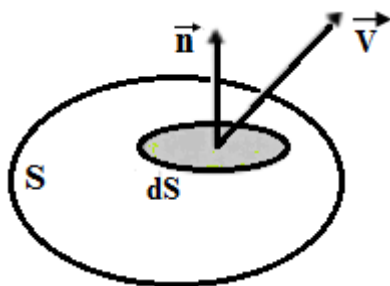
$$tg(\beta) = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin(\theta)}{2\cos(\theta)} \text{ soit } tg(\beta) = \frac{1}{2}tg(\theta)$$

VII. Eléments d'analyse vectorielle

VII.1. Flux d'un champ de vecteur à travers une surface

VII.1.1 Définition

Soit une surface quelconque S et dS un élément de cette surface. \vec{n} est un vecteur unitaire normale à l'élément de surface. Le vecteur élément de surface s'écrit : $d\vec{S} = \vec{n}dS$.



- Le flux élémentaire ($d\phi$) du champ de vecteurs \vec{V} à travers dS est défini par : $d\phi = \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V} \cdot \vec{n}dS$

- Le flux (ϕ) du champ de vecteurs \vec{V} :

$$\phi = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS = \int_S V \cos(\theta)dS$$

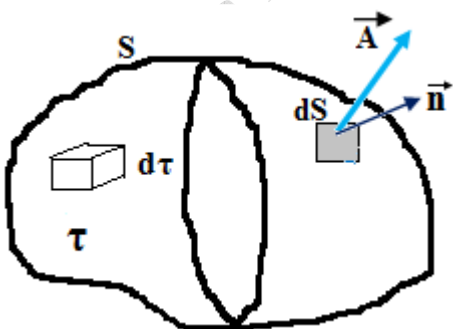
Pour une surface fermée (sphère, ellipsoïde, ...) on écrit que le flux est égal à :

$$\phi = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS$$

VII.1.2 Théorème de Green-Ostrogradsky

Ce théorème peut être considéré comme une définition de la divergence d'un champ de vecteur

Selon le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux total de tout vecteur \vec{A} à travers une surface S entourant le volume τ est égal à la divergence du vecteur \vec{A} dans le volume :



τ étant un volume limité par une surface fermée S on a :

$$\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_\tau \text{div}(\vec{A})d\tau$$

$$\Rightarrow d\phi = \text{div}(\vec{A})d\tau$$

La divergence donne la différence entre le flux sortant et le flux entrant :

- Si $\text{div}(\vec{A}) > 0$ alors les lignes de champ s'écartent ou « divergent »

- Si $\text{div}(\vec{A}) < 0$ alors les lignes de champ
« convergent »
- Si $\text{div}(\vec{A}) = 0$ alors les lignes de champ sont parallèles

On appelle divergence d'un vecteur \vec{A} , le produit scalaire de ce vecteur avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z :$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

VII.2. Circulation d'un champ de vecteur

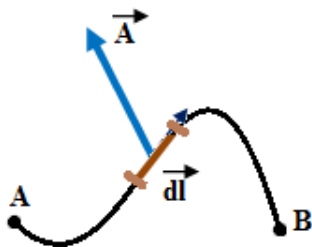
VII.2.1. Définition

Soit \vec{A} un vecteur mobile et $d\vec{l}$ un élément de longueur.

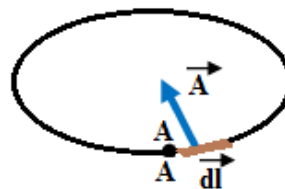
On définit la circulation C du vecteur \vec{A} Sur un contour fermé, la circulation du \vec{A} le long de la courbe (AB) par :

vecteur \vec{A} s'écrit :

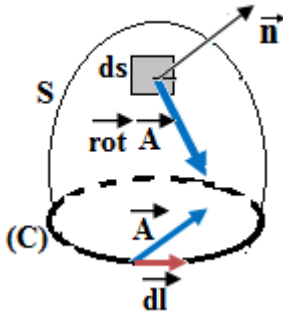
$$C = \int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



$$C = \oint_{A \rightarrow A} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



VII.2.2 Théorème de Stokes



S étant une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé (C) et limité par lui on peut écrire:

$$C = \oint_C \vec{A} d\vec{l} = \int_S \text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS \Rightarrow dC = \text{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

Si $\text{rot}(\vec{A}) \neq \vec{0}$ le champ vectoriel possède une composante tournante.

Le théorème de Stokes peut être considéré comme une relation de définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

VIII. Théorème de Gauss

VIII.1. Enoncé

Le flux du vecteur champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au quotient par ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la surface.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

Remarque : la surface S est une surface purement géométrique appelé surface de Gauss. Son choix se fait arbitrairement mais de façon judicieuse ce qui permet un calcul facile et rapide du champ électrostatique en tout point de l'espace.

On choisit :

- une surface sphérique si le système chargé présente une symétrie sphérique
- une surface cylindrique si le système chargé présente une symétrie cylindrique ou s'il est filiforme

VIII.2. Equations locales de l'électrostatique

VIII.2.1. Forme différentielle du théorème de Gauss

Soit une surface fermée S entourant une distribution continue de charge de densité ρ en un point quelconque. Soit τ le volume limité par cette surface S .

Le flux du champ \vec{E} à travers cette surface est : $\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$.

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire : $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{\tau} \text{div}(\vec{E}) d\tau$

Si Q_{int} est la charge totale intérieure au volume τ avec la densité ρ on a : $Q_{int} = \int_{\tau} \rho d\tau$

Le théorème de Gauss $\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ dévient $\int_{\tau} \text{div}(\vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau$ soit

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette relation signifie que les charges électriques sont les sources du champ électrostatique.

VIII.2.2. Forme différentielle de la circulation du champ électrostatique

La circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé quelconque est nulle :

$$\oint_{(c)} \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire $\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot \vec{n} dS$ or $\oint_{(C)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ soit $\int_S \vec{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 0$

soit que :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Cette relation signifie que les lignes de champ électrostatiques ne se referment pas sur elles même.

VIII.2.3. Equation de Poisson

Exprimons en termes de potentiel le théorème de Gauss en coordonnée cartésiennes, soit:

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Or selon la relation locale entre champ et potentiel on a :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V) \quad \text{soit : } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{\partial V}{\partial x} \right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial V}{\partial y} \right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial V}{\partial z} \right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\text{La relation } \text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ devient } -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

soit

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{quel que soit le système de coordonnées.}$$

Les charges électriques sont les sources du potentiel électrostatique

Remarque: en l'absence de charge $\rho = 0$ on a:

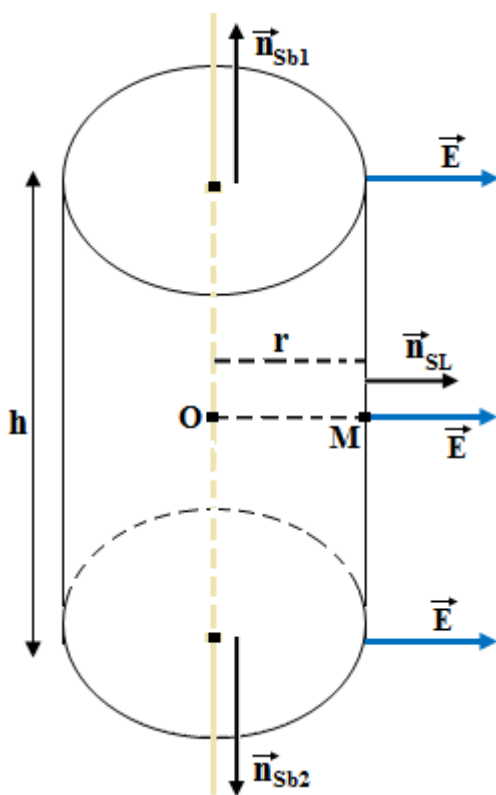
- $\text{div}(\vec{E}) = 0$ c'est l'équation d'isotropie, même propriété du milieu en toute direction en un point
- $\Delta V = 0$ c'est l'équation de *Laplace*

IX. Applications

IX.1. Fil rectiligne infinie portant une densité linéique $\lambda > 0$

- Calculer le champ électrostatique en un point M situé à la distance r du fil
- Déduire le potentiel électrostatique sachant que $V(r_0)=0$

a. Calcul du champ électrostatique



• Enoncé du théorème de Gauss

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

• Nature de la surface de Gauss

Cylindre fermé de rayon r , de hauteur h (égale à la longueur du fil) et dont l'axe coïncide avec le fil.

Remarque : Un cylindre a trois surfaces : deux surfaces de base et une surface latérale.

• Flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss

Le flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss est le flux à travers les 3 surfaces du cylindre :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{Sb1} dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{n}_{Sb2} dS_{b2} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{n}_L dS_L$$

$$\vec{n}_{Sb1} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{Sb1} = 0 \quad \vec{n}_{Sb2} \perp \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{Sb2} = 0$$

$$\vec{n}_{SL} // \vec{E} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n}_{SL} = E \cdot S_{SL}$$

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_L} E \cdot dS_L$$

E étant un vecteur constant, on a :

$$\int_{S_L} E \cdot dS_L = E \int_{S_L} dS_L = E \cdot S_L$$

$$\phi = \phi_{SL} = E \cdot S_L = E \cdot 2\pi r h \quad \text{soit} \quad \phi = 2\pi r h E$$

• Charges intérieures à la surface de Gauss

Les charges intérieures à la surface de Gauss sont situées sur une longueur du fil identique à la hauteur h du cylindre : $\lambda = \frac{Q_{int}}{h} \Rightarrow Q_{int} = \lambda h$

- **Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$\text{Soit : } \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \vec{n}_{SL}$$

- b. Potentiel électrostatique crée au point M**

Relation locale entre champ et potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$

Comme le champ électrostatique est radial (dirigé suivant le rayon), on a la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E(r) dr$$

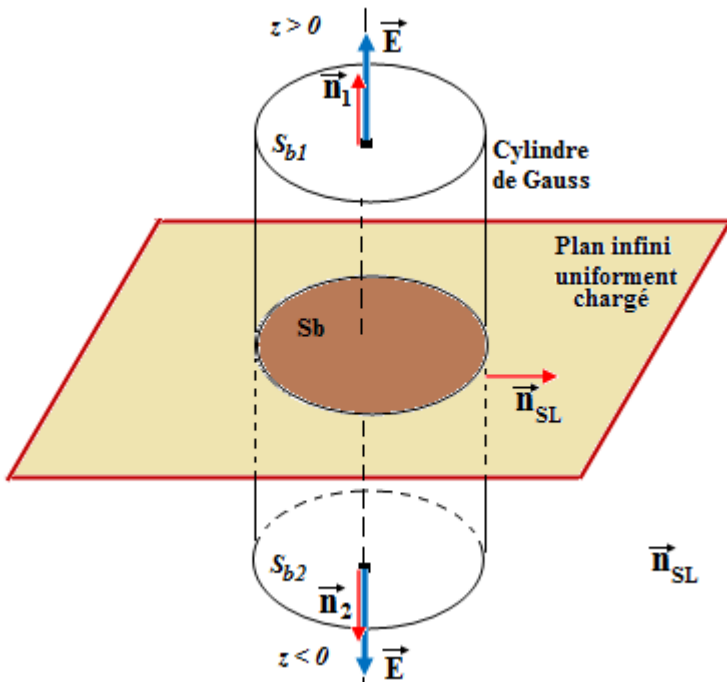
$$\text{soit } V = -\int E(r) dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} \quad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + cste$$

- **Détermination de la constante**

$$V(r_0) = 0 \Rightarrow -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) + cste = 0 \text{ soit } cste = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$$

$$\text{et finalement : } V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right).$$

IX.2. Champ électrostatique crée par un plan uniformément chargé de densité surfacique $\sigma > 0$



- **Enoncé du théorème de Gauss**

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

- **Nature de la surface de Gauss**

Cylindre de hauteur h et de rayon r .

- **Calcul du flux du champ \vec{E} à travers la surface de Gauss**

$$\begin{aligned} \phi &= \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_{b2} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{n}_{SL} dS_L \end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie, le champ est porté par l'axe du cylindre, d'où :

$$\vec{E} \perp \vec{n}_{SL} \Rightarrow \int_{S_L} \vec{E} \cdot \vec{n}_{SL} dS_L = 0 \quad \text{et}$$

$$\phi = \int_{S_{b1}} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 dS_{b1} + \int_{S_{b2}} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_{b2} = \int_{S_{b1}} E \cdot dS_{b1} + \int_{S_{b2}} E \cdot dS_{b2}$$

E étant un vecteur constant, on a :

$$\phi = E \int_{S_{b1}} dS_{b1} + E \int_{S_{b2}} dS_{b2} = E \cdot S_{b1} + E \cdot S_{b2} \quad \text{or} \quad S_{b1} = S_{b2} = S_b$$

$$\phi = E \cdot S_b + E \cdot S_b = 2E \cdot S_b$$

- **Charges intérieures à la surface de Gauss**

$$\sigma = \frac{Q_{int}}{S_b} \Rightarrow Q_{int} = \sigma \cdot S_b$$

- **Application du théorème de Gauss**

$$\phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E \cdot S_b = \frac{\sigma \cdot S_b}{\epsilon_0} \quad \text{soit :} \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

CHAPITRE 2: DIPÔLES ELECTRODINAMIQUES- COURANT CONTINU ET CIRCUITS LINEAIRES

I- Dipôles électrodynamiques passifs et actifs

I.1- Caractéristique d'un dipôle passif ou actif

En **régime continu**, le courant et la tension sont constants dans le temps.

Un **dipôle** est un composant électrique qui comporte deux bornes A et B.

La **caractéristique tension-courant** d'un dipôle AB est la courbe $I=f(U)$ représentant les variations de l'intensité I du courant à travers le dipôle AB sous la tension U .

- Un **dipôle passif** est un dipôle dont la caractéristique tension courant passe par l'origine $I=U=0$ (il transforme l'Energie électrique en Energie calorifique). Exemple : conducteur ohmique, ampoule.

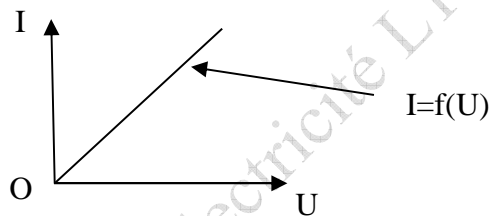


Figure. 1- Caractéristique d'un dipôle passif

- Un **dipôle actif** a une caractéristique tension – courant qui ne passe pas par l'origine. Ce sont des convertisseurs d'Energie. On peut les classer en deux catégories : générateur qui transforme l'énergie non électrique en énergie électrique et les récepteurs qui transforment l'énergie électrique en énergie non électrique. Exemple : pile, photopile, dynamo (dipôles générateurs)



Figure. 2- Photographie de piles

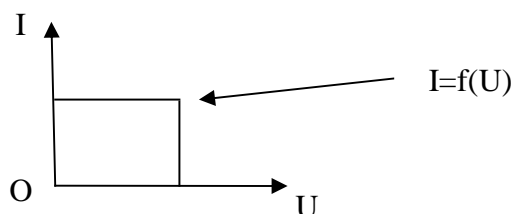
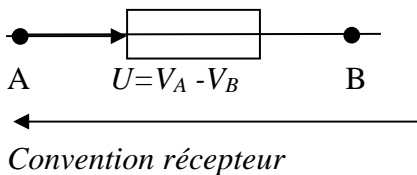


Figure. 3- Caractéristique d'un dipôle actif

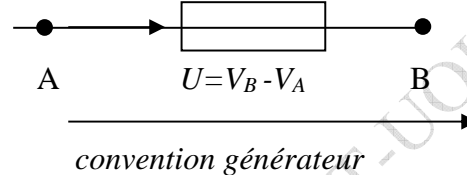
La convention d'orientation de l'intensité I et de la tension U dépend de la nature du dipôle :

- **Dipôle passif** : convention récepteur : le courant entre par la borne positive et ressort par la borne négative.
- **Dipôle actif** : convention générateur : le courant entre par la borne négative et ressort par la borne positive.

$I = I_{A \rightarrow B}$ (dipôle passif)



$I = I_{A \rightarrow B}$ (dipôle actif)



Analyse énergétique d'un dipôle

- Un dipôle passif consomme toujours de l'énergie électrique de puissance $P = (V_A - V_B)I_{A \rightarrow B} > 0$
- Un dipôle passif se comportant en générateur, fournit de l'énergie électrique au circuit connecté à ses bornes $P = (V_A - V_B)I_{A \rightarrow B} = -(V_B - V_A)I_{A \rightarrow B} < 0$

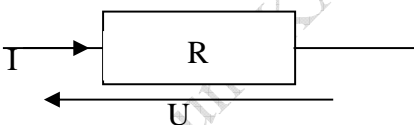
I.2- Les dipôles linéaires

On peut reconnaître un dipôle linéaire à travers la relation affine reliant la tension U et le courant I traversant ce dipôle. Le dipôle linéaire a alors une caractéristique tension – courant qui est portion de droite.

Les dipôles linéaires couramment utilisés sont :

• Un dipôle passif linéaire

Le conducteur chimique ou résistance qui est un dipôle passif linéaire vérifiant la loi d'Ohm.



$$U = RI \Leftrightarrow I = GU$$

R est la résistance, G la conductance avec $G = \frac{1}{R}$

Exemple dans le cas d'un conducteur filiforme et homogène de longueur ℓ et de section S , à température constante, la résistance R peut être calculée par la relation :

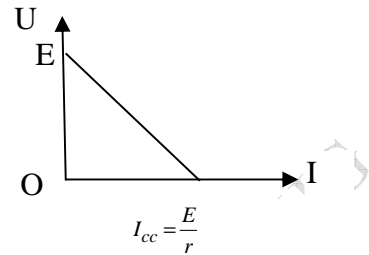
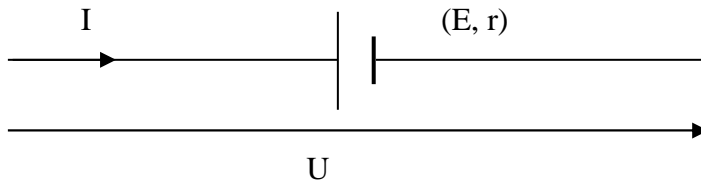
$R = \rho \frac{\ell}{S}$ où ρ est la résistivité du conducteur. L'inverse de ρ donne la conductivité :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = G \frac{\ell}{S}.$$

• Un dipôle actif linéaire

Un dipôle actif linéaire en fonctionnement générateur (en convention générateur : une pile par exemple), source de tension ou de courant, est caractérisé par un courant de court-circuit I_0 et une tension U_0 en circuit ouvert appelé force électromotrice (f.é.m) E :

Représenter un schéma de générateur de tension.



L'équation de la droite est :

$$U = E - \frac{E}{I_{cc}} I$$

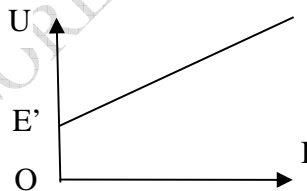
Avec $r = \frac{E}{I_{cc}}$

On a :

$$U = E - rI \Leftrightarrow I = I_{cc} - GU \text{ où } G = \frac{1}{r}$$

Avec : E : f.e.m, r : résistance interne, I_{cc} : courant de court-circuit

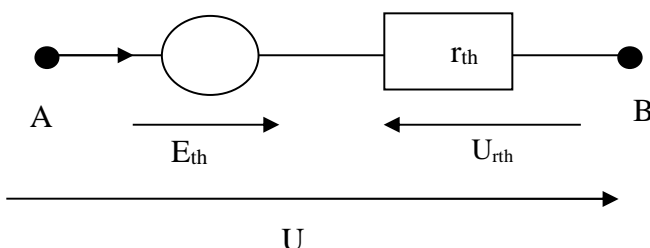
Un dipôle actif en fonctionnement récepteur (moteur par exemple) est caractérisé par une force contre électromotrice (f.c.é.m) E' et une résistance interne r' : $U = E' + r'I \Leftrightarrow I = \frac{U - E'}{r'}$



I.3- Interprétation des modèles équivalents d'un dipôle linéaire par les générateurs de Thévenin et de Norton

Un dipôle actif linéaire peut être représenté par :

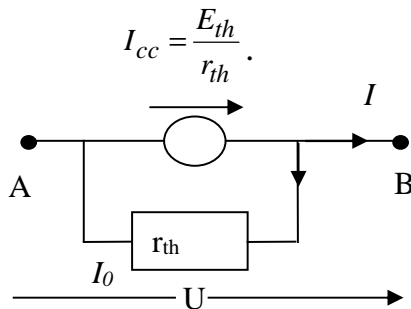
- un générateur de tension (générateur de Thévenin) de force électromotrice ou f.e.m E_{th} et de résistance interne r_{th} .



$$U = E_{th} - r_{th} I$$

Tout réseau électrique linéaire composé de dipôles linéaires (comprenant des générateurs de tension) peut être modélisé selon le modèle équivalent de Thévenin comme générateur de tension de f.é.m E_{th} et de résistance interne r_{th} alimentant la charge AB entre ses deux bornes.

- Un générateur de courant (générateur de Norton) de courant électromoteur ou c.é.m



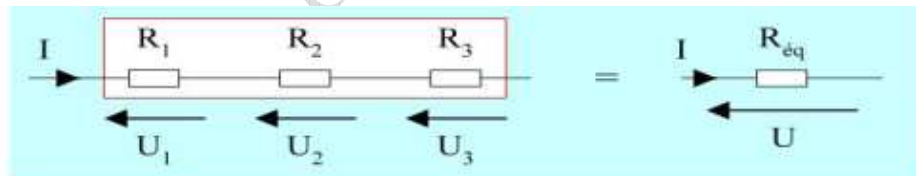
$$I = I_{cc} - I_0 = \frac{E_{th}}{r_{th}} - \frac{U}{r_{th}} = \frac{E_{th} - U}{r_{th}}$$

Tout réseau électrique linéaire composé de dipôles linéaires (dont des générateurs de courant) peut être modélisé selon le modèle équivalent de Norton comme étant constitué d'un générateur de courant de c.é.m I_{cc} et de résistance interne r_{th} alimentant la charge AB entre ses deux bornes.

II . Association de dipôles

II.1- Résistance équivalente d'un groupement de résistances

- Association en série :

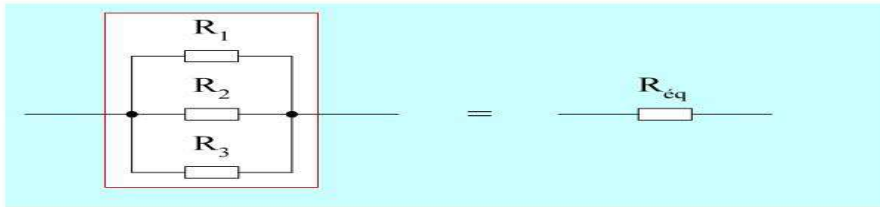


Loi des branches : $U = U_1 + U_2 + U_3$
 Loi d'Ohm : $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$ et $U_3 = R_3 I$
 Il vient : $U = (R_1 + R_2 + R_3) I = R_{eq} I$

En série, les résistances s'additionnent : $R_{eq} = \sum_i R_i$

Les tensions s'ajoutent d'où : $R_{eq} = \sum_i R_i$

- Association en parallèle ou dérivation :



En parallèle, les conductances s'additionnent :

$$G_{eq} = \sum_i G_i \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Cas particulier de deux résistances :

$$R_{eq} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Les intensités de courant s'ajoutent d'où : $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$

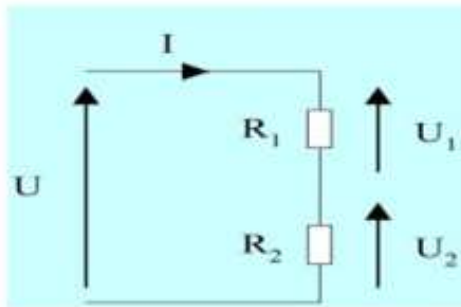
II.2- Groupement de générateur

- *Association en série* : on considère le modèle équivalent de Thévenin des divers générateurs et on additionne les f.é.m.
- *Association en parallèle ou dérivation* : on fait intervenir le modèle de Norton pour les générateurs et on additionne les f.c.è.m.

III- Étude des circuits linéaires

III.1- Diviseur de tension – Diviseur de courant

• Pont diviseur de tension



$$\begin{aligned} U_1 &= R_1 I \\ U_2 &= R_2 I \\ U &= U_1 + U_2 = (R_1 + R_2) I \end{aligned}$$

La tension est proportionnelle à la résistance.
d'où :

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Formule générale :

$$U_i = \frac{R_i}{\sum_i R_i} U$$

Le montage diviseur de tension permet de diviser une tension U en autant de tensions U_i qu'il y a de résistances en série R_i .

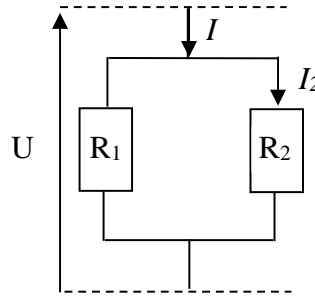
• Diviseur de courant

Cas particulier de deux résistances :

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

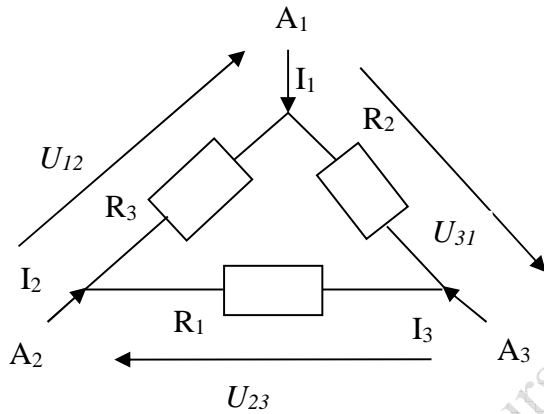
$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Formule générale :
$$I_i = \frac{G_i}{\sum_i G_i} I$$



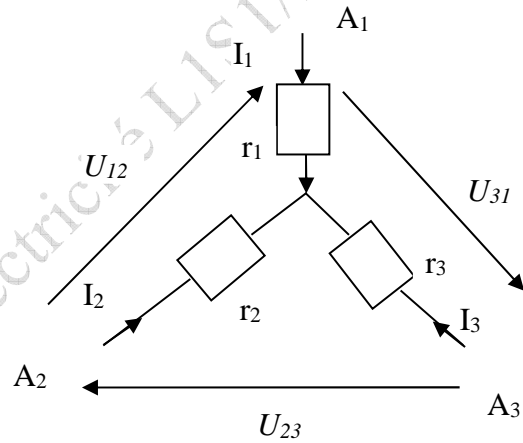
III.2- Transformation Triangle-étoile (ou transformation de Kennelly)

Considérons une connexion en étoile des 3 résistances r_1, r_2, r_3 convergeant en un seul nœud et 3 résistances R_1, R_2 et R_3 formant une maille triangulaire A, B, C. Les deux circuits sont équivalents si les valeurs de leurs résistances sont liées par les relations indiquées ci-dessous.



$$r_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$r_2 = \frac{R_3 R_1}{R_3 + R_2 + R_1}$$



$$r_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Cette équivalence signifie que l'on remplace dans un réseau électrique les résistances R_1, R_2 et R_3 connecté en triangle par les résistances r_1, r_2, r_3 connectée en étoiles sans que ni les tensions U_{12}, U_{23}, U_{31} ni les courants i_1, i_2, i_3 ne soient modifiés. Cette propriété permet de simplifier en diminuant le nombre de maille d'une unité.

Une maille en étoile peut se transformer en maille triangle équivalente :

$$R_1 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_2}, R_2 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_3}, R_3 = \frac{r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3}{r_1}$$

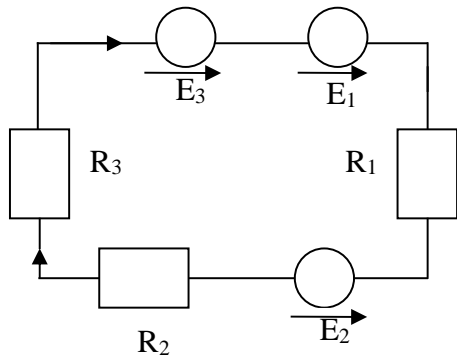
III.3- Expression du courant dans un circuit à une maille

L'expression du courant i circulant dans une maille comportant des sources de tension de f.e.m E_i et des résistances R_i est fournie par la loi de Pouillet.

Loi de Pouillet : Dans un circuit en série, l'intensité du courant est égale au quotient de la somme des forces électromotrices et des forces contre électromotrices par la somme totale des résistances du circuit.

$$I = \frac{\sum_i \varepsilon_i E_i}{\sum_i R_i} (\varepsilon_i = +1 \text{ pour } E_i \text{ dirigé selon } I, \text{ sinon } \varepsilon_i = -1).$$

Exemple :



$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

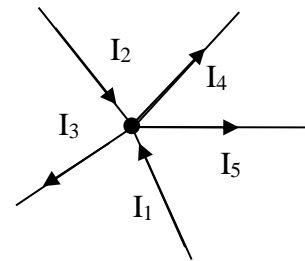
III.4- Expression du courant dans un circuit à plusieurs mailles : Loi de Kirchhoff

▪ Loi des nœuds

En rappel : La somme algébrique des intensités des courants arrivant et partant d'un nœud est nulle.

$$\sum_i \varepsilon_i I_i = 0 \quad (\varepsilon_i = +1 \text{ pour } I_i \text{ orienté vers le nœud sinon } \varepsilon_i = -1)$$

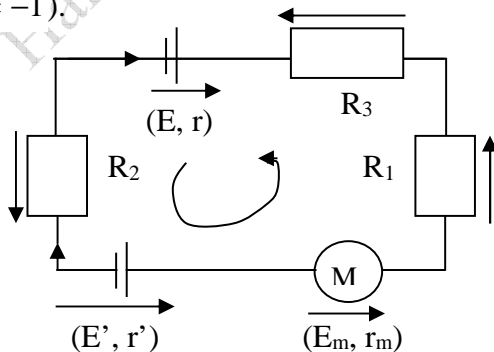
Exemple : $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$



▪ Loi des mailles

En rappel : La somme algébrique des tensions le long d'une maille parcourue dans un sens donné (les tensions fléchées dans le sens de parcours de la maille n'étant pas affectées du même signe que celles fléchées en sens inverse) est nulle.

$$\sum_i \varepsilon_i U_i = 0 \quad (\varepsilon_i = +1 \text{ pour une tension } (U_i) \text{ orientée selon le sens de parcours de la maille, sinon } \varepsilon_i = -1).$$



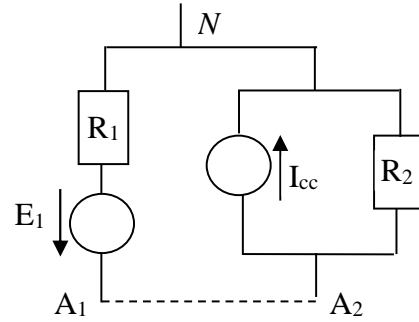
$$-E + rI + R_3I + R_2I + R_1I + E_m + r_mI + E' - r'I = 0$$

III.5- Théorème de Millman

Théorème de Millman : les divers branches issues du nœud N aboutissent à une ligne de masse, soit:

$$V_N = \frac{\sum \varepsilon_i \frac{E_i}{R_i} + \sum \varepsilon_i I_{cci}}{\sum_i \frac{1}{R_i}}$$

($\varepsilon_i = +1$ si E_i ou I_{cci} dirigé vers N, sinon $\varepsilon_i = -1$)



III.6- Superposition de divers états électriques d'un circuit

Théorème d'Helmholtz de superposition des états électriques

- L'intensité de courant circulant dans une branche d'un circuit linéaire est la somme des intensités produites par chaque source supposée seule, les autres sources étant éteintes.
- La tension aux bornes d'un dipôle est la somme des tensions produites par chaque source supposée seule.

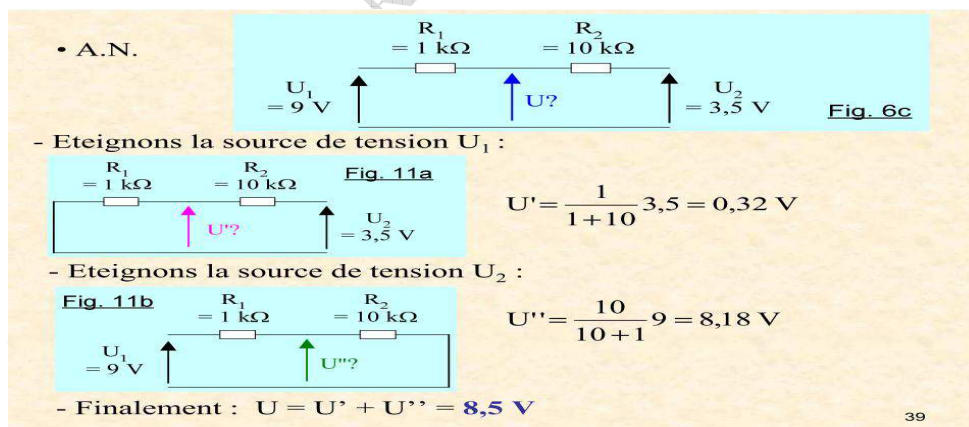
En rappel :

- Une source de tension éteinte correspond à un simple fil conducteur (court-circuit de la source).
- Une source de courant éteinte correspond à un interrupteur ouvert (coupe-circuit).

N.B.

- Eteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil (source de tension nulle).
- Eteindre une source de courant revient à l'ôter du circuit (source de courant nul).

Exemple :



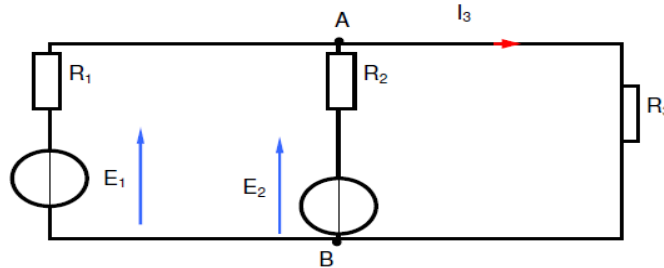
IV- Théorèmes en courant continu

IV.1- Théorème de superposition

IV.1.1- Enoncé

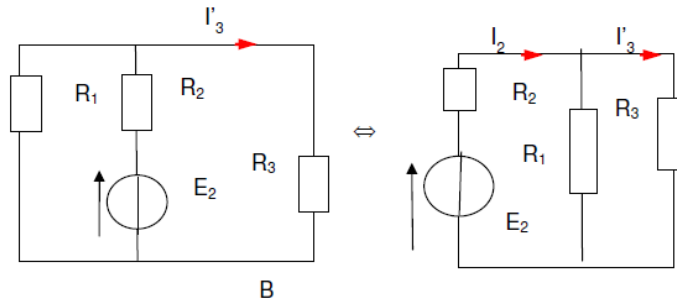
Dans un circuit, l'intensité du courant dans une branche est égale à la somme algébrique des intensités des courants produits dans cette branche par chaque générateur supposé seul, les autres étant réduits à leur résistance interne.

IV.1.2- Application



IV.1.3- Première étape

On considère la branche contenant R_3 parcourue par un courant d'intensité I'_3 lorsque le générateur 2 est actif, les autres étant passivés



On cherche I'_3

R_1 et R_3 en parallèle sont remplacées par leur résistance équivalente laquelle est en série avec R_2 . Le générateur idéal de f.e.m E_2 débite donc sur une résistance $(R_2 + R_{eq13})$

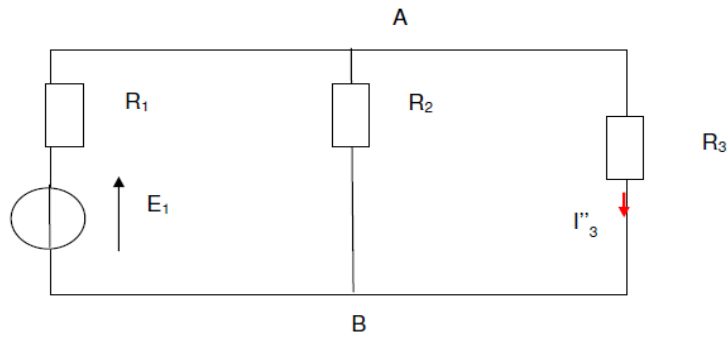
D'après la loi de Pouillet, l'intensité du courant circulant dans R_2 est :
$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2}}$$

Par application du diviseur d'intensité, on en déduit :

$$I'_3 = I_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3}, I'_3 = 500/350 = 1,43 \text{ A}$$

IV.1.4- Deuxième étape

On considère la branche contenant R_3 parcourue par un courant d'intensité I''_3 lorsque le générateur 1 est actif, les autres étant passivés



Soit I_1 circulant dans R_1 :
$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$$

Les calculs permettent d'obtenir I''_3

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \quad I''_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad I''_3 = 2000/350 = 5,71 \text{ A}$$

IV.1.5- Application du théorème de superposition

Les intensités I'_3 et I''_3 étant fléchées dans le même sens

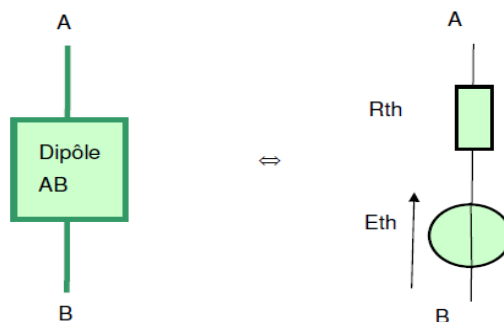
$$I_3 = I'_3 + I''_3 \quad I_3 = \frac{500}{350} + \frac{2000}{350} + \frac{2500}{350} = 7,14 \text{ A}$$

IV.2- Théorème de Thévenin

IV.2.1- Enoncé du théorème

Un dipôle AB peut être remplacé par un dipôle équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{th} et de résistance interne R_{th} .

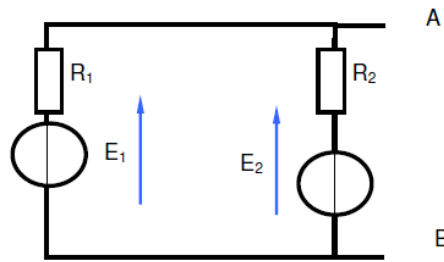
E_{th} est égale à la tension U_{AB} à vide du dipôle c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à des éléments externes R_{th} est la résistance vue entre A et B lorsque toutes les sources sont passivées.



Le dipôle de Thévenin est plus simple que le dipôle AB et est équivalent au dipôle AB. Ceci signifie que si le dipôle de Thévenin est relié à un dipôle de charge, les tensions et intensités dans ce dipôle de charge auront les valeurs qu'elles avaient avant le remplacement du dipôle par un dipôle de Thévenin.

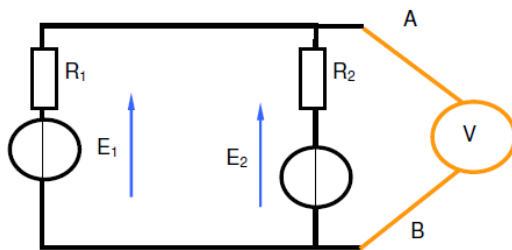
IV.2.2- Vérification expérimentale du théorème.

On considère le dipôle suivant :



$$E_1 = 200 \text{ V}, E_2 = 100 \text{ V}, R_1 = 5 \Omega, R_2 = 10 \Omega$$

➤ On mesure la tension U_{ABO} existant entre A et B

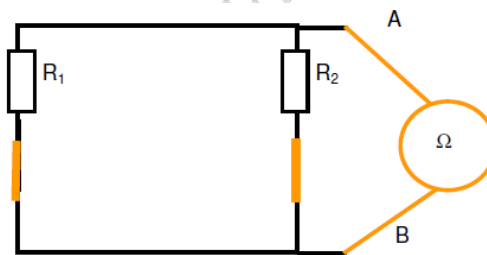


$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{200 - 100}{5 + 10} = 6,67 \text{ A}$$

$$U_{AB} = E_2 + R_2 I \Rightarrow U_{AB} = 100 + 10 \times 6,67 = 166,7 \text{ V}$$

$$U_{ABO} = 166,7 \text{ V}$$

➤ On mesure à l'aide d'un ohmmètre la résistance entre A et B lorsque les générateurs sont passivés.

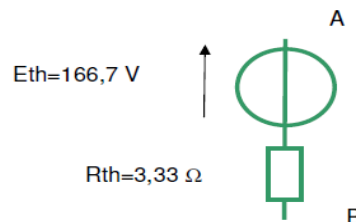


$$R_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

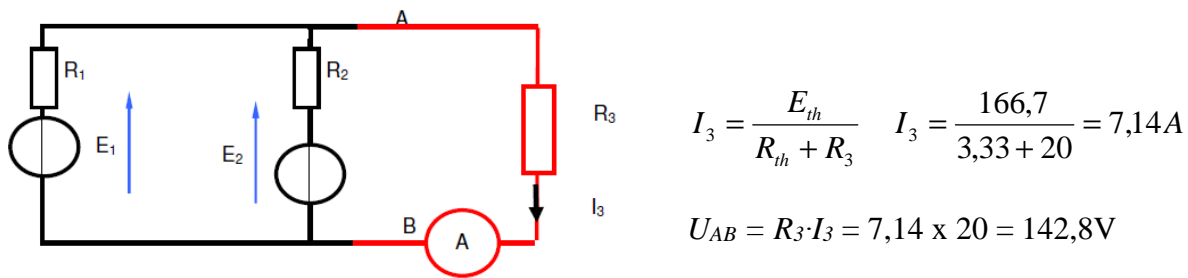
$$R_{AB} = \frac{5 \times 10}{5 + 10} = 3,33 \Omega$$

$$R_{AB} = 3,33 \Omega$$

➤ D'après le théorème de Thévenin, le dipôle AB peut être remplacé par un dipôle de Thévenin



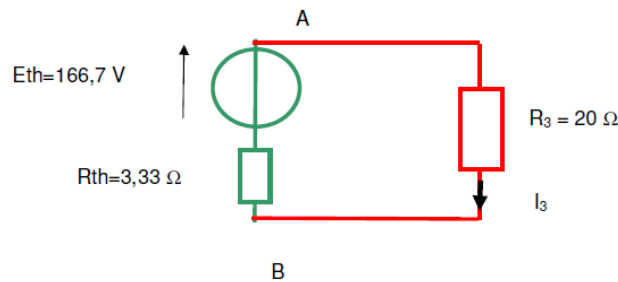
➤ On relie le dipôle à une résistance R_3 ($R_3 = 20 \Omega$)



L'intensité indiquée par l'ampèremètre est $I_3 = 7,14 A$

Un voltmètre placé entre A et B indiquerait $U_{AB} = 142,8 V$

➤ **Le théorème est vérifié**



Si le dipôle de Thévenin alimentait la résistance R_3 , celle-ci serait parcourue par un courant d'intensité $I_3 = 7,14 A$ et la tension U_{AB} serait égale à $142,8 V$

Conclusion :

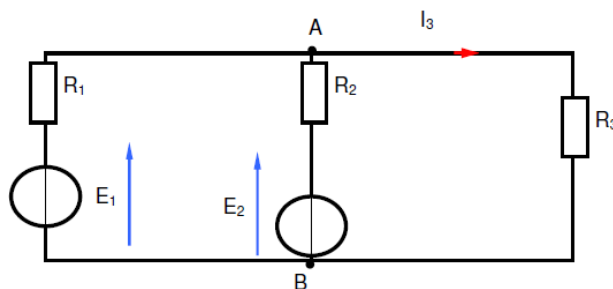
L'intensité dans R_3 et la tension aux bornes de R_3 ont même valeur si R_3 est reliée au dipôle AB ou au dipôle de Thévenin qui le remplace

Remarque :

Ne pas confondre U_{ABO} , tension à vide du dipôle et U_{AB} , tension en charge du dipôle AB (lorsque la charge R_3 est connectée)

IV.2.3- Application

On résout l'exercice précédemment traité en appliquant le théorème de Thévenin

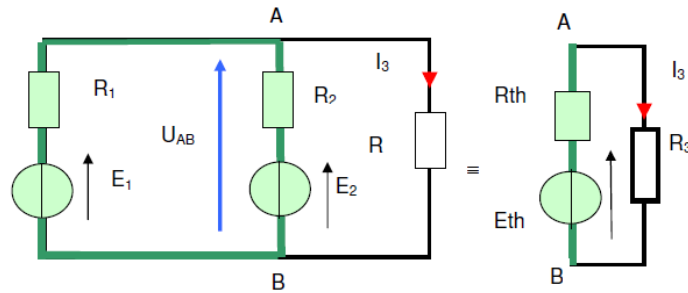


On recherche l'intensité du courant dans R_3

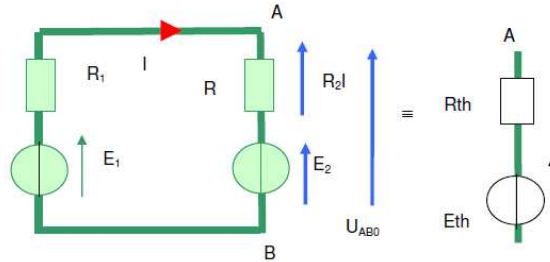
➤ **Première étape - Choix du dipôle remplacé par un dipôle de Thévenin**

On considère que le circuit est constitué de deux dipôles AB :

- celui de gauche, représenté en trait épais, sera remplacé par un dipôle de Thévenin
- celui de droite, la charge, sera alimenté par le générateur de Thévenin



➤ **Deuxième étape : on détermine E_{th}**



On cherche la tension U_{AB0} existant entre A et B lorsque le dipôle n'est pas relié à R_3 .

R_1 et R_2 sont maintenant parcourus par un courant de même intensité I .

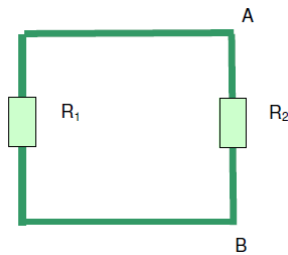
L'application de la loi de Pouillet permet d'écrire $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$

$$U_{AB0} = E_2 + R_2 I \text{ or } E_{th} = U_{AB0}$$

$$E_{th} = E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}, E_{th} = 100 + 10(200 - 100)/(5 + 10) = 166,7 \text{ V}$$

➤ **Troisième étape**

On reprend le dipôle et on le passive (on va réduire les générateurs de tension à leur résistance)



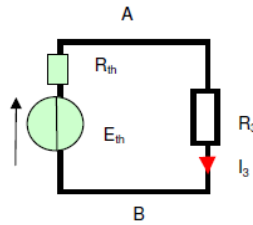
Si on place entre A et B un ohmmètre, il mesurera la résistance équivalente à R_1 et R_2 en parallèle.

C'est la résistance « vue de AB » $R_{th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$,

$$R_{th} = 5 \times 10 / 15 = 3,33 \Omega$$

➤ **Dernière étape**

On reprend le schéma équivalent au circuit. Le dipôle de Thévenin alimente la résistance R_3



$$I_3 = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_3} = \frac{E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}{R_{th} + R_3}$$

$$I_3 = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_3} = \frac{E_2(R_1 + R_2) + R_2(E_1 - E_2)}{(R_1 + R_2)(R_{th} + R_3)}$$

$$I_3 = E_{th}/(R_{th} + R_3) \quad I_3 = 166,7/(3,33+20) = 7,14 \text{ A}$$

IV.3- Théorème de Norton

IV.3.1- Générateur de tension et générateur de courant

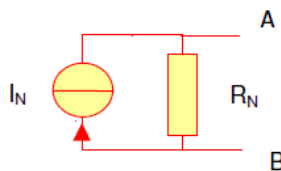
Le dipôle de Thévenin est un générateur de tension ; il applique une tension au dipôle placé entre ses bornes. Le générateur de tension idéal appliquerait une tension constante quel que soit le dipôle branché entre ses bornes.

Le dipôle de Norton est un générateur de courant. Il fait circuler un courant d'intensité déterminée dans le dipôle placé entre ses bornes. Le générateur de courant idéal ferait circuler un courant d'intensité constante quel que soit le dipôle branché entre ses bornes.

Les premiers générateurs étaient des générateurs de tension ; les générateurs de courant sont beaucoup plus récents. Néanmoins les deux ont une réalité physique et il existe des alimentations que l'on peut piloter soit en tension, soit en intensité.

IV.3.2- Définition du dipôle de Norton

Le dipôle de Norton est un générateur débitant un courant d'intensité I_N et présentant une résistance R_N ; il est représenté ainsi :

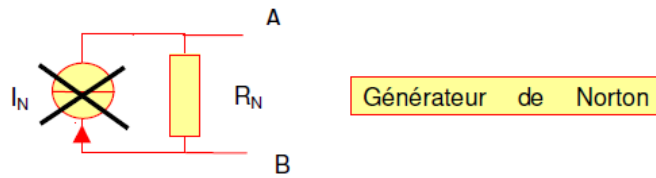


Dipôle de Norton

La tension existant à vide $U_{AB(0)}$ existant entre ses bornes A et B est égale à $R_N I_N$

$$U_{AB(0)} = R_N I_N$$

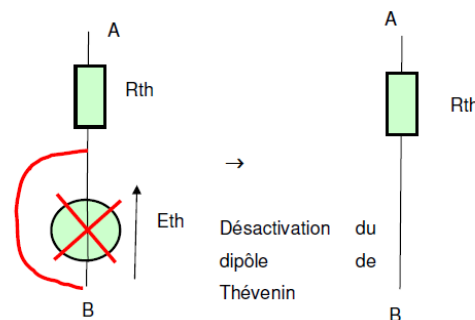
La résistance « vue de AB » est celle qui est mesurée entre A et B lorsque le générateur d'intensité est désactivé, c'est-à-dire lorsque l'on supprime la source d'intensité. Elle est égale à R_N .



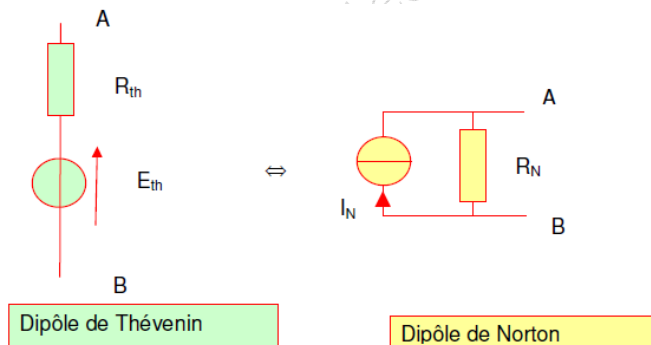
Remarque :

Il faut bien voir la différence entre la désactivation d'un dipôle de Thévenin et la désactivation d'un dipôle de Norton.

Désactiver un dipôle de Thévenin, c'est supprimer la source de tension E_{th} et la remplacer par un fil de résistance nulle.



IV.3.3- Equivalence entre un dipôle de Thévenin et un dipôle de Norton

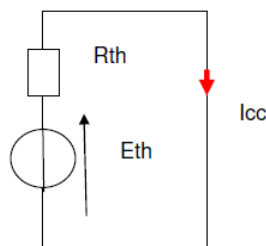


L'équivalence impose que la tension à vide existant entre A et B ait même valeur dans les deux cas, c'est-à-dire : $E_{th} = R_N I_N$

Il faut aussi que la résistance « vue de AB » ait même valeur, ce qui implique $R_{th} = R_N$

Il faut donc que $E_{th} = R_{th} I_N$ et donc que $I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$

On constate que I_N doit être égale à l'intensité de court-circuit du dipôle de Thévenin.



$$I_{CC} = \frac{E_{th}}{R_{th}} \quad I_A = I_{CC} = \frac{E_{th}}{R_{th}}$$

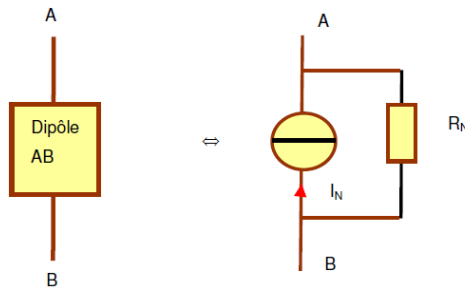
En résumé :

Si les dipôles de Thévenin et de Norton sont équivalents : $R_N = R_{th}$, $I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$

Un dipôle AB peut être remplacé par un dipôle équivalent de Norton, de courant I_N et de résistance interne R_N .

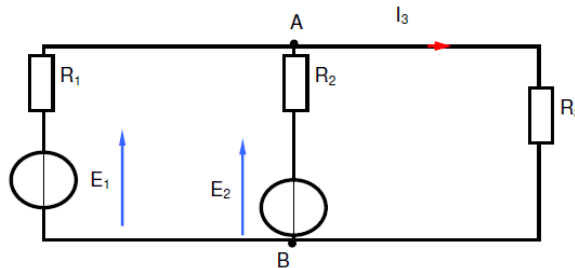
I_N est égale à l'intensité de court-circuit du dipôle AB

R_N est la résistance vue entre A et B lorsque toutes les sources sont passivées



IV.3.4- Application

On traite le même exercice que précédemment.

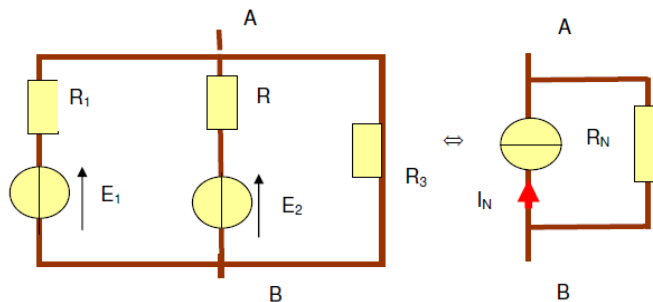


➤ Première étape

On définit le dipôle que l'on va remplacer par un dipôle de Norton.

Nous allons refaire le même exercice que précédemment mais nous n'allons pas remplacer le même dipôle par un dipôle de Norton.

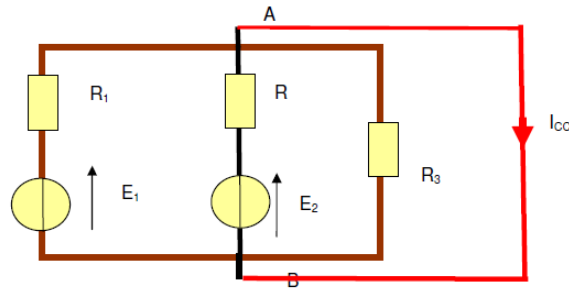
Ce dipôle est représenté en trait épais et en y ajoutant deux petites barres, qui ne changent rien au problème, on voit mieux le dipôle AB que l'on va remplacer par un générateur de Norton.



➤ Deuxième étape:

On détermine I_N du dipôle de Norton

Pour cela on établit un court-circuit entre A et B et on calcule l'intensité de court-circuit I_{cc} du courant.



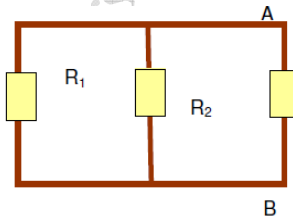
La résistance R_3 , court-circuitée, n'est parcourue par aucun courant. Pour le calcul de I_{cc} , on peut la retirer. L'application du théorème de superposition, bien adapté ici, ou des lois de Kirchhoff, permet de déterminer I_{cc} .

$$I_{cc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \text{ donc } I_N = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}, I_N = 40 + 10 = 50 \text{ A}$$

➤ **Troisième étape :**

Détermination de R_N

Les générateurs sont passivés : ce sont des générateurs de tension, ils sont réduits à leur résistance interne



$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_N = 20/7 \, \Omega, R_N = 2,86 \, \Omega$$

On remarque que cette résistance n'a pas la même valeur que R_{th}

➤ **Dernière étape :**

Retour au schéma équivalent

La tension aux bornes du générateur de Norton est $U_{AB} = R_N I_N$

$$U_{AB} = 50 \times 20 / 7 = 1000 / 7 = 142,86 \text{ V}$$

Or cette tension est celle qui existe entre A et B c'est à dire aux bornes de R_3

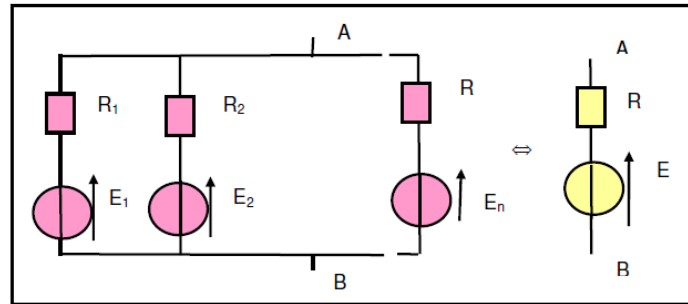
$$U_{AB} = R_3 \cdot I_3; I_3 = U_{AB} / R_3; I_3 = 1000 / (7 \times 20) = 50 / 7 = 7,14 \text{ A}$$

IV.4- Théorème de Millman

IV.4.1- Démonstration

Cette démonstration est proposée en exercice

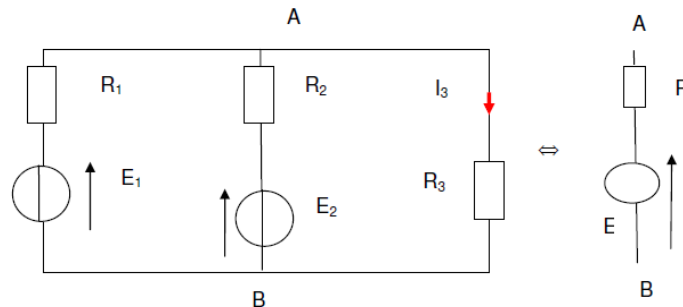
IV.4.2- Enoncé du théorème



Le dipôle AB constitué de n générateurs en parallèle est équivalent à un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \text{ et } R = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

IV.4.3- Application



On applique le théorème en prenant $E_3 = 0$

$$E = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$E = 1000/7 \text{ V}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}, R = 2,86 \Omega$$

$$U_{AB} = E = R_3 \cdot I_3 \text{ d'où } I_3 = 7,14 \text{ A}$$

IV.5- Résolution d'un problème d'électrocinétique

Nous avons vu les principaux théorèmes applicables en électrocinétique. Quel théorème utiliser dans la pratique ?

La réponse à cette question n'est pas facile. En fait dans les exercices, c'est souvent en utilisant à la fois plusieurs théorèmes que l'on arrive le plus rapidement au résultat.

S'il s'agit de déterminer toutes les tensions et intensités dans un circuit, il faut utiliser les lois de Kirchhoff, établir un système d'équations et le résoudre.

S'il s'agit de déterminer une intensité ou une tension il est conseillé d'utiliser les théorèmes.

On utilise assez souvent conjointement les théorèmes de Norton et de superposition surtout lorsque le circuit comporte plusieurs éléments en parallèle. On peut aussi utiliser dans ce cas le théorème de Millmann.

La seule utilisation du théorème de superposition est assez lourde.

Dans tous les autres cas, l'association du théorème de Thévenin et/ou du théorème de superposition et de la loi de Pouillet conduit à des solutions rapides.

Il faut aussi penser à la transformation de dipôles de Thévenin en dipôles de Norton et vice versa.

CHAPITRE 3 : LES REGIMES TRANSITOIRES

I- Relation courant – tension aux bornes d'un condensateur ou d'une bobine et puissance consommée

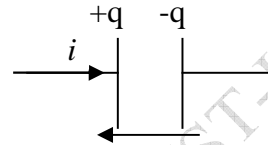
Pour des états électriques « lentement » variables, les lois établies en régime stationnaire (chapitre précédent) peuvent être appliquée au régime quasi-stationnaire, et donc au régime transitoire.

I.1- Condensateur

Capacité : C, en Farad (F)

$$U = \frac{q}{C}; \quad i = \frac{dq}{dt} = \frac{C du}{dt}$$

Convention récepteur



q charge de l'armature d'entrée du courant. $i > 0$ si q augmente (charge) et $i < 0$ si q diminue (décharge). La puissance consommée par un condensateur a pour expression :

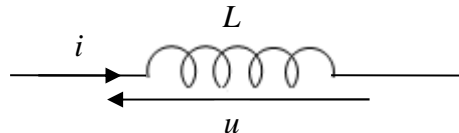
$$P = ui = \frac{dE_e}{dt} = cu \frac{du}{dt} \quad \text{avec} \quad E = \frac{1}{2} C u^2 \text{ (Energie électrique emmagasinée dans le condensateur).}$$

I.2- Bobine pure

Inductance L, en Henry (H)

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad P = \frac{dE_m}{dt} \quad \text{avec} \quad E_m = \frac{1}{2} L i^2 \text{ (Energie magnétique emmagasinée dans la bobine)}$$

Convention récepteur



NB : La continuité de l'Energie électrique E_e ou magnétique E_m se traduit par la continuité de la tension $u = \frac{q}{C}$ aux bornes du conducteur et la continuité de l'intensité i circulant dans la bobine.

I.3- Groupement de condensateur et de bobine

$$\text{Groupement série : } \frac{1}{C_{eq}} = \sum_k \frac{1}{C_k} \quad \text{et} \quad L_{eq} = \sum_k L_k$$

$$\text{Groupement parallèle : } C_{eq} = \sum_k C_k \quad \text{et} \quad \frac{1}{L_{eq}} = \sum_k \frac{1}{L_k}$$

II- Régimes transitoires d'un circuit RC ou RL

II.1- Echelon de tension ou de courant

Un échelon de tension (ou de courant) est un signal électrique $X(t)$ produit par une source pure de tension (ou de courant), tel que :

$$\begin{cases} X=0 & \text{pour } t < 0 \\ X=X_0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

II.2- Charge d'un condensateur d'un circuit R-C en réponse à un échelon de tension

- *Conditions initiales* : condensateur non chargé et interrupteur K fermé à $t = 0$.

La continuité de la tension (ou de la charge) donne : $u(0^+) = u(0^-) = 0$

- **Réponse en tension ou en courant**

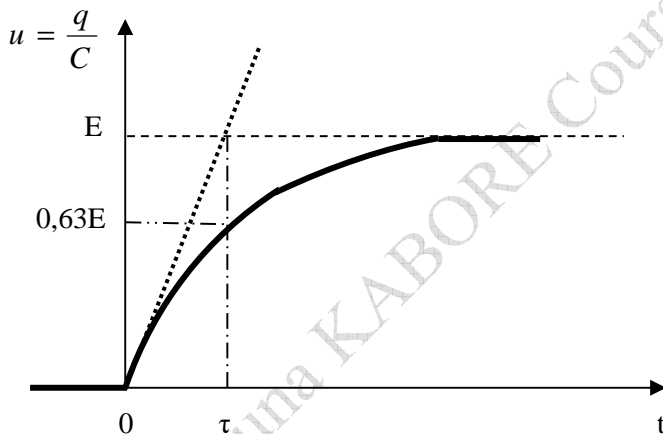
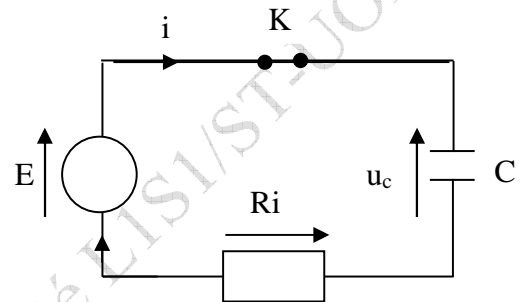
$$E = u + Ri = u + RC \frac{du}{dt} \quad (\text{Loi des mailles})$$

Avec $\tau = RC$ (constante de temps ou temps de relaxation).

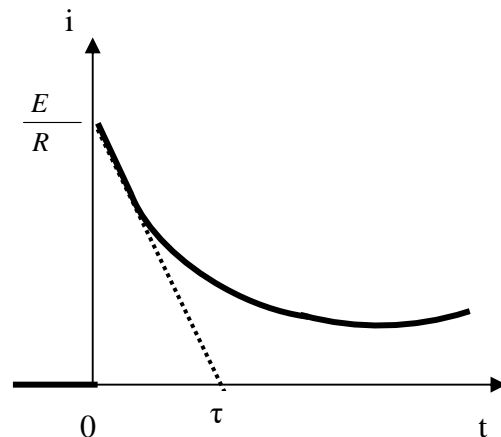
$$\text{Soit : } \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

La solution à cette équation s'écrit : $u(t) = E + Ke^{-t/\tau}$ avec $u(0) = 0$ soit :

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



Continuité de $u(t)$ en $t=0$



Discontinuité de $i(t)$ en $t=0$.

II.3- Bilan énergétique d'une opération de charge

- **Bilan de puissance**

$$E = u + Ri, \text{ en multipliant par } i = C \frac{du}{dt}$$

$$Ei = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right) = P_{\text{effet Joule}} + P_{\text{Condensateur}}$$

- **Bilan énergétique global**

En multipliant les deux membres du bilan de puissance par dt et en intégrant entre $t=0$ et $t=\infty$

Energie dissipée par effet joule

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}, \Rightarrow W_J = \int_0^\infty R \left(\frac{E}{R} e^{-t/\tau} \right)^2 dt, \Rightarrow W_J = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} CE^2, \text{ avec}$$

$$\tau = RC$$

$$W_J = \int_0^T Ri^2 dt = RI^2 T \text{ Effet joule}$$

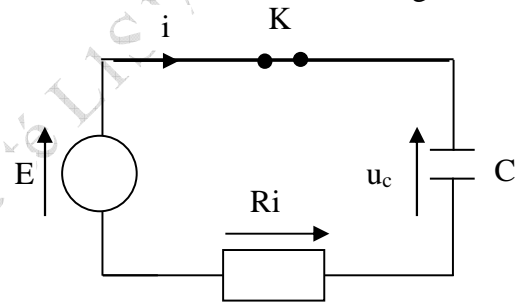
$$\text{Energie emmagasinée par le condensateur } E_c = \frac{1}{2} CE^2$$

II.4- Régime libre d'un circuit R, C

Il s'agit du régime d'évolution du circuit R, C, en l'absence de source, lors de la décharge du condensateur initialement chargé ($u(0) = E$).

$$u + Ri = 0 \Rightarrow u + \tau \frac{du}{dt} = 0$$

$$u(t) = Ee^{-t/\tau}, i = C \frac{du}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau} \leq 0, \text{ car générateur.}$$



II.5- Etablissement d'un courant dans une bobine d'un circuit R.L en réponse à un échelon de tension

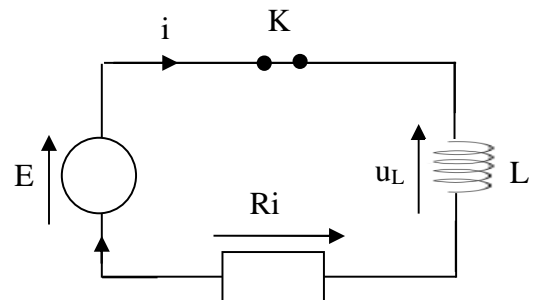
- **Conditions initiale** : L'interrupteur K ouvert à $t < 0$, est fermé à $t = 0$; la continuité du courant dans la bobine se traduit par : $i(0^+) = i(0^-) = 0$

- **Expression de $i(t)$** : $E = Ri + u = Ri + L \frac{di}{dt}$,

avec $\tau = \frac{L}{R}$ (constante de temps)

soit : $i + \tau \frac{di}{dt} = \frac{E}{R}$ de solution $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$

et $u(t) = Ee^{-t/\tau}$



Les graphes de $i(t)$ et $u(t)$ sont analogues au cas du circuit R, C en permutant les rôles de i et de u .

- **Bilan énergétique instantané**

En multipliant les deux membres de l'équation $E = Ri + L \frac{di}{dt}$ par idt :

$$\underbrace{Eidt}_{\text{Energie totale}} = \underbrace{Ri^2 dt}_{\text{Energie consommée}} + \underbrace{Lidi}_{\text{Energie magnétique}} = \underbrace{Ri^2 dt}_{\text{Energie consommée}} + d\left(\frac{1}{2} Li^2\right)$$

Energie totale
fournie au
circuit R-L

Energie
consommée
par la
résistance R

Energie
magnétique
stockée
par la bobine

Lorsque le régime est établi (régime continu), l'énergie magnétique maximale consommée par le circuit est alors $E_m^{\max} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R} \right)^2$.

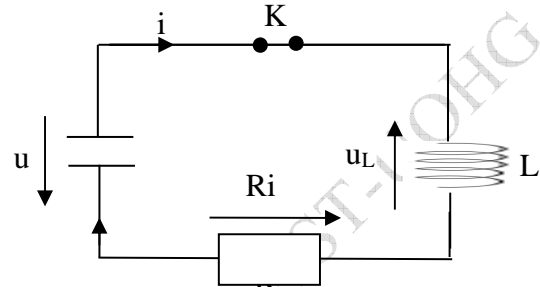
III- Régime libre d'un circuit R-L-C série

III.1- Caractéristique d'un circuit R, L, C série en régime libre

- Equation différentielle linéaire (du 2nd ordre)

$$u + Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$u = \frac{q}{c} \Rightarrow q = cu, i = c \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = c \frac{d^2u}{dt^2}$$



Soit:

$$RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \quad \text{soit :} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$$

On en déduit de cette équation que le circuit RLC se comporte comme un oscillateur harmonique amorti.

➤ Pulsation propre de l'oscillateur : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

➤ Coefficient d'amortissement : $\lambda = \frac{R}{2L}$

➤ Facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

L'équation différentielle du système peut alors s'écrire

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

III.2- Régime apériodique, critique ou pseudo-périodique d'un circuit RLC

- Equation caractéristique de l'oscillateur est : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

avec $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ de discriminant réduit $\Delta' = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1 \right)$

- En régime apériodique : $\Delta' > 0$, $\lambda > \omega_0$ (amortissement élevé) ou $Q_c < \frac{1}{2}$.

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad u(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t}$$

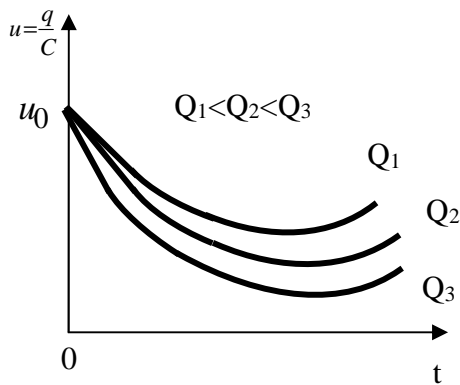
- En régime critique : $\Delta' = 0$ et $\lambda = \omega_0$ ou $Q_c = \frac{1}{2}$ et $u(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$
- En régime pseudo-périodique : $\Delta' < 0$ et $\lambda < \omega_0$ (amortissement faible) ou $Q_c > \frac{1}{2}$

$$r = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\Omega \text{ avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ (pseudo pulsation) soit : } u(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

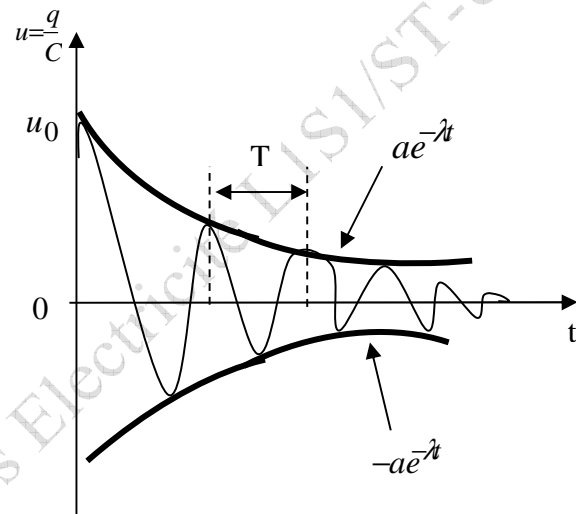
L'amortissement des oscillations est alors caractérisé par le décrément logarithmique :

$$\delta = \lambda T = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \ln \left[\frac{u(t)}{u(t+T)} \right]$$

- Aspect graphique



Régime apériodique



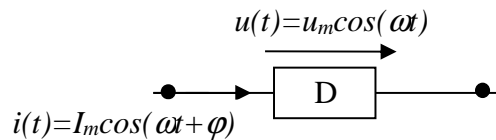
Régime pseudo-périodique

CHAPITRE 4 : REGIME VARIABLE SINUSOÏDALEMENT FORCÉ D'UN CIRCUIT R-L-C

I- Représentation complexe des grandeurs électriques

I.1- Tension et courant

En régime sinusoïdal, la tension $u(t) = U_m \cos(\omega \cdot t)$ (avec un U_m l'amplitude du signal et ω sa pulsation) aux bornes d'un dipôle passif D est représentée par la grandeur complexe $\underline{u} = U_m e^{j\omega t}$, tel que u est la partie réelle de \underline{u} ($u = \text{Re}(\underline{u})$).



$$\text{Avec : } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (T \text{ période, } f \text{ fréquence})$$

Le courant $i(t) = I_m \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ (avec φ déphasage de i par rapport à u), circulant dans le dipôle D, s'écrit alors en notation complexe : $\underline{i} = I_m e^{j\omega t}$ avec $I_m = I_m e^{j\varphi}$ (amplitude complexe) ou simplement $\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

I.2- Impédance et admittance complexes d'un dipôle passif

L'impédance et l'admittance complexe d'un dipôle passif D sont définies par la loi d'Ohm : $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ ou $\underline{i} = \underline{Y} \underline{u}$ tel que $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$, \underline{Z} étant l'impédance du dipôle et \underline{Y} son admittance complexe. La connaissance de \underline{Z} et de \underline{Y} permet d'obtenir les expressions de I_m et φ .

$$\underline{I}_m = \frac{U_m}{\underline{Z}} = \underline{Y} U_m \quad I_m = \frac{U_m}{|\underline{Z}|} = |\underline{Y}| U_m \quad \varphi = -\arg \underline{Z} = \arg \underline{Y}$$

Rappel : soit un complexe $\underline{Z} = a + jb \Rightarrow$, en notation exponentielle : $\underline{Z} = r e^{j\theta}$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\theta = \arg \underline{Z} = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

I.3- Dipôle fondamentaux R,L,C

$$\text{On a } \underline{i} = I_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Bobine

$$u_L = L \frac{di}{dt} = jL\omega I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = jL\omega \underline{i} \Rightarrow \underline{Z}_L = \frac{U}{\underline{i}} = jL\omega \text{ (impédance imaginaire)}$$

Condensateur

$$i_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = j\omega C u_c \text{ car } (u = u_m e^{j\omega t}) \Rightarrow \underline{Z}_c = \frac{u_c}{i_c} = \frac{1}{j\omega C} \text{ (impédance imaginaire)}$$

Résistance

$$\underline{u}_R = Ri \Rightarrow \underline{Z}_R = R \text{ (impédance réelle)}$$

NB :

- Les impédances de dipôles passifs en régime sinusoïdal forcé s'associent en parallèle et en série comme des résistances.
- Les diviseurs de tension ou de courant dans un circuit linéaires en régime sinusoïdal sont aussi modélisés comme en régime stationnaire (courant continu).

II- Puissance moyenne en régime sinusoïdal

Tension ou intensité efficace en régime

• Cas d'un régime périodique quelconque

La puissance instantanée $p(t)$, consommée par un dipôle en régime variable, a pour expression :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \text{ soit } p = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \text{ dans le cas d'une résistance.}$$

La puissance moyenne P , en régime périodique, consommée par un dipôle D pendant une période T

$$\text{est définie par : } P = \frac{1}{T} \int p(t) dt$$

Définition : L'intensité efficace I et la tension efficace U sont les valeurs de l'intensité et de la tension en régime continu qui produirait le même effet joule dans une résistance qu'en régime périodique (pendant une période T) :

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \Rightarrow \frac{U^2}{R} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u(t)^2}{R} dt \quad \text{et} \quad U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt \quad \text{D'où :}$$

$$RI^2 = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt$$

• Dans le cas du régime sinusoïdal, tel que $u(t) = U_m \cos \omega t$, on a :

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} U_m^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} U_m^2 \int_0^T \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} U_m^2 \quad \text{D'où : } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Et de même, on trouve : } I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

➤ Facteur de puissance

- Le facteur de puissance d'un dipôle D en régime sinusoïdal est égal à $\cos \varphi$, φ étant de déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.
- La **puissance moyenne** P , consommée dans le dipôle D est liée au facteur de puissance par la relation :

$$P = p(t) = UI \cos \varphi = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$$

L'unité de la puissance moyenne est le Watt (W)

Par exemple : $P = 0$ pour une bobine idéale ou un condensateur idéal car $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\cos \varphi = 0$.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) U_m I_m dt$$

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \cos^2 \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \omega t \sin \varphi = \cos \varphi \left[\frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \right] - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \sin \varphi$$

D'où :

$$P = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} t \cos \varphi \right]_0^T U_m I_m = \frac{1}{2} \frac{T}{T} U_m I_m \cos \varphi = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi$$

- La **puissance réactive** : C'est la puissance associée aux éléments réactifs, qui est une mesure de l'énergie dépensée dans l'établissement des champs magnétiques (éléments inductifs) et des champs électriques (éléments capacitifs).

$$P_r = U \cdot I \cdot \sin \varphi = \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi$$

L'unité de la puissance réactive est le Volt-Ampère-Réactif (VAR).

- La **puissance apparente** : C'est la puissance fournie à la charge sans tenir compte des effets du facteur de puissance de celle-ci. Elle est égale au produit de la tension efficace appliquée et du courant efficace passant dans la charge.

$$P_a = U \cdot I = \frac{U_m I_m}{2}$$

L'unité de la puissance apparente est le Volt-Ampère (VA)

On a :

$$P_r^2 + P^2 = P_a^2 \text{ et } \tan \varphi = \frac{P_r}{P}$$

➤ Puissance complexe

Elle est définie par $\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{u} \underline{i}^*$, \underline{i}^* étant le complexe conjugué de \underline{i} avec $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ ou $\underline{i} = \underline{Y} \underline{u}$. La puissance moyenne est alors donnée par : $P = \Re e(\underline{p})$ soit $P = I^2 \Re e(\underline{Z})$ ou $P = U^2 \Re e(\underline{Y})$

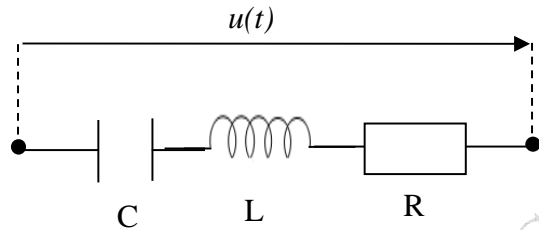
III- Impédance d'un circuit R, L, C

Considérons un circuit série composé d'une résistance, d'une bobine et d'une capacité en régime sinusoïdale. La tension aux bornes de ce circuit s'écrit :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} - \frac{j}{C\omega}\underline{i}$$

$$\text{soit : } \underline{u}(t) = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right] \underline{i}$$

$$\text{et } \underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$$



Cette loi d'Ohm entre l'intensité traversant le circuit et la tension à ses bornes permet d'identifier l'impédance complexe du circuit :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

où R est la résistance du circuit et $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ sa réactance. \underline{Z} a :

- **pour module** $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ et

- **pour argument** $\varphi = \arg Z$ avec : $\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$;

Cette impédance complexe rassemble toutes les données qui fixent le comportement du circuit : son module donne le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité et son argument donne l'avance de phase de l'intensité sur la tension.

IV- Variation de l'impédance complexe avec la fréquence - La résonance

La dépendance de \underline{Z} vis-à-vis de ω (et donc de la fréquence) est liée à sa partie imaginaire $j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$.

- **Une inductance pure** à une impédance $jL\omega$ qui introduit une avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ de l'intensité par rapport à la tension (et cela indépendamment de ω). Mais son module varie, lui, avec la fréquence. Ainsi pour de faible fréquence $L\omega \rightarrow 0$ et l'inductance se comporte comme un court-circuit (sans réactance) et pour des fortes fréquence $L\omega \rightarrow \infty$, l'inductance est un coupe-circuit (force réactance).
- **Une capacité pure**, a une impédance en $-\frac{j}{C\omega}$. Elle introduit donc un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$ de l'intensité sur la tension. Dans ce cas le module de l'impédance tend vers ∞ pour les basses

fréquences et vers 0 pour les hautes fréquences. Une capacité est un coupe-circuit à basse fréquence et un court-circuit à haute fréquence.

Le module de l'impédance a pour minimum R c'est-à-dire lorsque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$.

La fréquence de résonance est la fréquence $\omega = \omega_0$ à laquelle ce minimum est atteint. Dans ce cas l'influence de l'inductance contrebalance exactement celle de la capacité, et, pour une tension d'alimentation fixée aux bornes du circuit, l'intensité dans ce dernier est maximale. En plus, comme

$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$; à la résonance, le déphasage entre l'intensité et la tension s'annule :

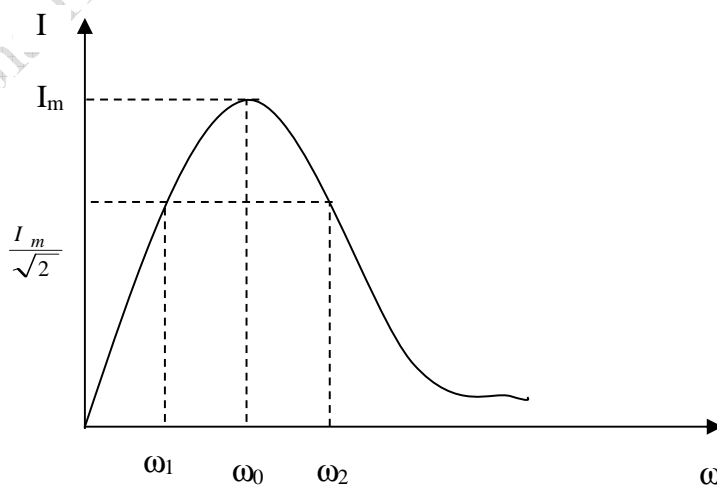
$$\tan\varphi = \frac{L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R} = 0$$

Le circuit RLC se comporte alors comme une simple résistance R : c'est l'état de fonctionnement optimum de celui-ci.

A la résonance $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1$. Cette résonance peut être plus ou moins aiguë. Elle se traduit alors par un pic d'intensité (en fonction de ω) plus ou moins prononcée.

L'acuité de la résonance est illustrée par un coefficient caractéristique du circuit : le facteur le surtension ou facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ où $\Delta\omega$ est l'écart entre les 2 fréquences ω_1 et ω_2 , qui encadrent ω_0 , et pour lesquelles l'intensité n'est plus égale qu'à sa valeur efficace c'est à $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

On montre alors que $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}$.



V- Représentation géométrique d'un circuit R, L, C en régime sinusoïdal : construction de Fresnel.

Reconsidérons le circuit R, L, C du paragraphe 3 et prenons cette fois-ci l'intensité comme origine des phases $i(t) = I_m \cos(\omega \cdot t)$.

L'équation fondamentale du régime sinusoïdal de ce circuit s'écrit :

$$R\dot{i} + jL\omega\dot{i} - \frac{j}{C\omega}\dot{i} = \underline{u}(t) \text{ soit : } RI_m e^{j(\omega t)} + L\omega I_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{C\omega} I_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R(t) + \underline{u}_L(t) + \underline{u}_C(t)$$

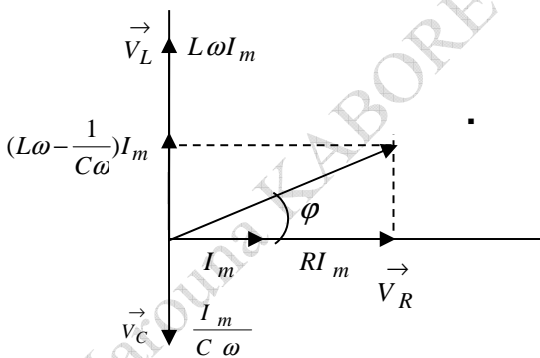
Cette dernière relation peut être interprétée comme une égalité vectorielle. $\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_L + \vec{V}_C$ où les \vec{V} sont les vecteurs d'un plan (xoy) et qui ont pour modules et pour angle polaire.

$$|\vec{V}_R| = RI_m \text{ et } (\vec{Ox}, \vec{V}_R) = \omega t$$

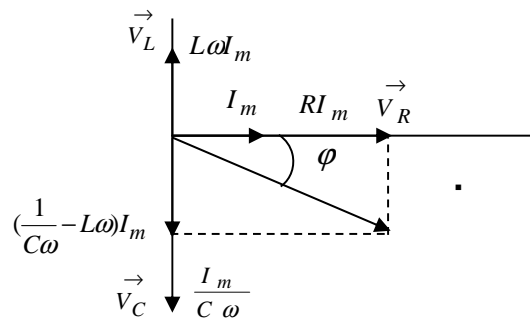
$$|\vec{V}_L| = L\omega I_m \text{ et } (\vec{Ox}, \vec{V}_L) = \omega t + \frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{V}_C| = \frac{I_m}{C\omega} \text{ et } (\vec{Ox}, \vec{V}_C) = \omega t - \frac{\pi}{2}$$

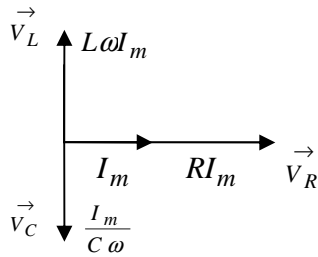
En se basant sur ces conditions, la construction vectorielle permettant d'avoir \vec{v} représentant la tension total \underline{u} à partir de \vec{v}_R , \vec{v}_C et \vec{v}_L est appelé représentation de fresnel. Celle-ci se présente comme suit :



$$I_m L\omega > \frac{I_m}{C\omega} : \text{circuit inductif}$$



$$I_m L\omega < \frac{I_m}{C\omega} : \text{circuit capacitif}$$



$$I_m L\omega = \frac{I_m}{C\omega} : \text{circuit résonnant}$$

Application : Dans le cas de 2 tensions quelconque de même fréquence :

$$u_1 = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La tension résultante $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ est tel que :

$$U_m = U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \text{ et } \tan \varphi = \frac{U_{1m} \sin \varphi_1 + U_{2m} \sin \varphi_2}{U_{1m} \cos \varphi_1 + U_{2m} \cos \varphi_2}$$

Bibliographie

- ✚ BEAUVILLAIN R., Circuits électriques et électroniques, vol. 1, Paris : Technique et Documentation (Lavoisier), 1985. 273 p.
- ✚ BEAUVILLAIN R., Circuits électriques et électroniques, vol.2, Paris : Technique et Documentation (Lavoisier), 1986. 226 p.
- ✚ MILSANTF., Exercices et problèmes d'électricité, Ellipses ; S. Clément, Petit manuel d'électronique,
- ✚ Précis d'Electricité,
- ✚ Physique tout en un,