Exercice 1
Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ **2.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x}}{x^2-2x+1}$ **3.** $\lim_{x\to+\infty}(2^x+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2
Considérer la fonction suivante

$$f(x) := \begin{cases} x^{x^2} & x>0 \\ 1 & x\leqslant 0\end{cases}$$

1. Déterminer si f est continue en 0.
2. Calculer la dérivée de f pour $x\neq 0$.
3. Déterminer si f est dérivable en 0.

Exercice 3
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sur quels ensembles elles sont prolongeables par continuité.

1. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f(x)=\sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ **4.** $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Exercice 4
Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $\cos x\cdot\exp x$ à l'ordre 3 **2.** $\left(\ln(1+x)\right)^2$ à l'ordre 4
3. $\dfrac{\operatorname{sh} x-x}{x^3}$ à l'ordre 6 **4.** $\exp\big(\sin(x)\big)$ à l'ordre 4
5. $\sin^6(x)$ à l'ordre 9 **6.** $\ln\big(\cos(x)\big)$ à l'ordre 6
7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 **8.** $\tan x$ à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)
9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3 **10.** $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6

Exercice 5
Écrire sous forme d'expression algébrique

1. $\sin(\arccos x)$, **2.** $\cos(\arcsin x)$, **3.** $\cos(2\arcsin x)$,
4. $\sin(\arctan x)$, **5.** $\cos(\arctan x)$, **6.** $\sin(3\arctan x)$.

Exercice 6
Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)=\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

En déduire une expression de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et calculer $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

Exercice 7
1. Soit $f\in\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}\ell\in\mathbb{R}$.
   Montrer que f est dérivable en 0.
2. Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}L\in\mathbb{R}$.
   Montrer que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$.

Exercice 8
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{C})$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. f est lipschitzienne.
2. f' est bornée.