MESURES ET INCERTITUDES
CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Toute grandeur (physique par exemple), mesurée ou calculée, est nécessairement entachée d’erreur. Il est impossible d’effectuer des mesures ou des calculs rigoureusement exacts. La physique travaille donc continuellement avec des approximations.

Pour prendre conscience du degré d’approximation, on fait l’estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d’incertitudes.

1.Erreur

Une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou de vrai, ou qui est considéré comme tel. Il n’est possible de parler d’erreur que si l’on a à disposition une valeur de référence que l’on peut considérer comme vraie.

1.1 Les composantes de l’erreur

Une erreur possède deux composantes, à savoir une composante **aléatoire** et une composante **systématique**.

- **Une erreur aléatoire** est une erreur qui prend une valeur différente lors de chaque mesure. L’erreur aléatoire est liée aux conditions opératoires. Elle peut être réduite en augmentant le nombre d’observations.

Exemples de causes d’erreurs aléatoires :

•Mesure du temps avec un chronomètre; l’erreur vient du temps de réaction de l’expérimentateur au démarrage et à l’arrêt du chronomètre. Comme ce temps de réaction n’est pas toujours le même, la valeur mesurée peut être surévaluée ou sous-évaluée.

- Fluctuations des paramètres physiques de l'environnement (température, pression, humidité de l'air...).

- Erreur de mise au point lors de la formation d'une image sur un écran

- **Une erreur systématique** est une erreur qui prend la même valeur (inconnue) lors de chaque mesure.

Exemples de causes d’erreurs systématiques

- Mauvais réglage du zéro d’un appareil (balance par exemple) ;

- Vieillissement des composants ;

L’erreur systématique d’un résultat de mesure peut être réduite par l’application d’une correction.

Dans la pratique, différentes méthodes sont utilisées pour détecter et évaluer ces erreurs, comme par exemple :

- mesurer la même grandeur avec un instrument différent ;

- mesurer la même grandeur avec des méthodes différentes ;

- mesurer un même mesurande dans des laboratoires différents.

Remarque :

une erreur donnée peut, suivant les conditions, apparaître comme systématique ou aléatoire. Considérons par exemple le cas de l’erreur de parallaxe :

si l’opérateur se place toujours sous le même angle par rapport à la perpendiculaire à la graduation de l’appareil de mesure, il introduira une erreur systématique dans ses lectures.

Par contre, s’il se place de manière aléatoire par rapport à la perpendiculaire à la graduation, l’erreur de parallaxe sera aléatoire.

1.2Erreur absolue

Considérons une grandeur physique G dont on cherche à connaître la valeur. La mesure de cette grandeur donne un résultat approché G_a alors que la valeur exacte est G_e

L'écart entre la valeur mesurée (valeur approchée) et la valeur que l'on considère comme vraie (valeur exacte) est appelé erreur absolue que l'on note δG

$$\delta G = G_a - G_e$$

Cette erreur absolue est, en général, inconnue puisque G_e est, en général, inconnue.

1.3 Erreur relative

Par définition, l'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue par la valeur exacte : $\dfrac{\delta G}{G_e}$

Elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu.

Elle est généralement exprimée en % (pour cent).

2. Incertitudes

Lorsqu’on mesure la distance entre deux points, l’intervalle de temps qui sépare deux évènements, ou la masse d’un corps…, on ne sait pas quelle est la valeur exacte de la grandeur mesurée.

On ne dispose donc pas de valeur de référence lors de la plupart des mesures physiques. Toutefois, il est possible d’estimer «l’erreur» commise qu’on appelle de façon plus appropriée incertitude.

2.1 Incertitude absolue

L'erreur absolue est, en général, inconnue. Partant des caractéristiques de l'appareil utilisé et de la méthode utilisée, on peut toujours s'assurer que l'erreur commise ne dépasse pas une valeur limite absolue appelée incertitude absolue de la grandeur G désignée par ΔG

$$|\delta G| \leq \Delta G$$

L’incertitude absolue ΔG est l’erreur absolue maximale que l’on est susceptible de commettre dans l’évaluation de G

L'incertitude absolue doit généralement être exprimée avec un seul chiffre significatif.

Elle ne doit jamais comporter plus de deux chiffres significatifs.

On arrondira toujours le résultat déterminé pour ΔG par excès pour ne pas sous-estimer l'incertitude réelle.

Pour une mesure d'intensité, on a trouvé

$$\Delta G = 0{,}1134A$$

On écrira $\Delta G = 0{,}12A$

2.2 Incertitude relative

L’incertitude absolue, lorsqu’elle est considérée seule, n’indique rien sur la qualité de la mesure. Pour juger de cette qualité, il faut comparer l’incertitude absolue à la grandeur mesurée.

Le rapport de ces grandeurs $\frac{\Delta G}{G_a}$ est appelé incertitude relative.

Elle est généralement exprimée en % (pour cent).

Plus l'incertitude relative est petite, plus la précision de la mesure est grande.

En TP, on admet qu'une mesure est satisfaisante lorsque l’incertitude relative ne dépasse pas 5%.

3. Expression des résultats

Après mesures et calculs d'incertitudes, le résultat doit s'exprimer de la façon suivante :

$$G = G_a \pm \Delta G\left(\frac{\Delta G}{G_a}\%\right)$$

en faisant attention au nombre de chiffres significatifs.

Ainsi donner un résultat sous la forme

$$R = 102{,}13 \pm 11\Omega (11\%)$$

n'a aucun sens car les deux chiffres après la virgule sont ridicules compte tenu de l'incertitude. Le bon résultat devrait être plutôt : $R = 102 \pm 11\Omega (11\%)$

4 Calcul d'incertitude

4.1 Incertitude liée à un appareil de mesure

Lorsqu'on mesure une grandeur physique (longueur, temps, masse, température…), on peut considérer, pour simplifier, que l’incertitude absolue correspond à la moitié de la plus petite graduation de l’instrument de mesure utilisé, ou la moitié de l’unité du dernier chiffre indiqué.

Par exemple dans le cas d'une règle précise à $1mm$, l'incertitude absolue est $\Delta X = 0{,}5mm$

Si l’expérimentateur est placé dans de mauvaises conditions pour effectuer la mesure, l’incertitude absolue peut être égale à la plus petite division ou plus.

Cas d’un appareil à aiguille

Suivant le calibre choisi et l’échelle de lecture, la valeur d’une grandeur A est donnée par la relation :

$$A = \frac{calibre}{Echelle} \times n$$

n étant le nombre de graduations

correspondant à la déviation de l'aiguille sur l'échelle choisie.

L'incertitude absolue de mesure de la grandeur A est fonction de la classe de l'appareil.

$$\Delta A = \frac{classe}{Echelle} \times calibre$$

Exemple : détermination de la valeur d'une tension

Voltmètre de classe 2 ; calibre utilisé 3V ; Echelle de lecture 30 divisions ; lecture $n = 24$ divisions.

Cas d’un appareil numérique

L’incertitude absolue de mesure d’une grandeur A est estimée par :

$$\Delta A = \%L + n \times UR$$

L’unité de représentation (UR) est la plus petite valeur que l’affichage numérique peut donner relativement au calibre utilisé. Il faut se reporter à la notice de l’appareil pour connaître

%L et n

4.2 Cas de mesures indirectes

Les mesures effectuées en physique sont le plus souvent indirectes, c'est-à-dire que le résultat final d'une expérience ne consiste pas en la mesure (répétée ou non) d'un seul paramètre, mais de plusieurs grandeurs qui, liées par une loi physique, conduisent au résultat cherché.

Chacune de ces grandeurs a une certaine incertitude; le résultat de l’expérience en comportera aussi une qui dépend des incertitudes individuelles.

Soit A une grandeur dépendant des grandeurs x, y et z. $A = f(x, y, z)$

Estimons l'incertitude absolue de mesure de la grandeur A sachant celle de x, y et z c'est-à-dire

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

La quantité $$\Delta A = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$$

donne une estimation de l’incertitude absolue de mesure de la grandeur A.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de la fonction f

par rapport à x en considérant y et z comme

des constantes.

Quelques cas simples

- Somme/différence

$$y = x \pm y \pm z \text{ , alors } \quad \Delta y = \Delta x + \Delta y + \Delta z$$

Dans une somme/différence, les incertitudes absolues s'additionnent.

•Produit/quotient

$$A = \frac{xy}{z} \quad , \quad \text{alors} \quad \frac{\Delta A}{|A|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|}$$

Dans un produit/quotient, les incertitudes relatives s'additionnent.

Remarque

Dans tous les autres cas (par exemple en présence de relations trigonométriques, de logarithmes, de racines carrées, etc.), la formule donnant ΔA doit être utilisée en calculant toutes les dérivées partielles.

Exemple : la période d’oscillation T d’un pendule simple dépend de sa longueur l :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

En mesurant l et T, on obtient l’accélération de la pesanteur g.

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

L'incertitude absolue sur g est obtenue à partir des incertitudes absolues sur l et T :

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right| \Delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right| \Delta T = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta l + \frac{2l}{T^3} \Delta T \right)$$

De manière simplifiée, on pourra utiliser les incertitudes relatives

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T}$$

4.3 Cas d’une série de mesures indépendantes

Des mesures d’une grandeur sont indépendantes si la grandeur est mesurée par des expérimentateurs différents et ce, en utilisant des instruments de mesures différents.

Si l’on mesure plusieurs fois un même phénomène avec un appareil de mesure suffisamment précis, on obtiendra à chaque fois un résultat différent x_i

Le but de répéter un grand nombre de fois (N fois) la mesure du même paramètre est d'obtenir une estimation aussi précise que possible de la vraie valeur cherchée x_0

Le meilleur estimateur de la vraie valeur x_0

est la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des N résultats

individuels x_i

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

La variance V de la série de mesures est la moyenne arithmétique des carrés des écarts par rapport à la moyenne.

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Finalement, la précision avec laquelle on détermine x_0 est donnée par l'écart type σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

L’écart type caractérise la dispersion des résultats autour de la moyenne. Plus l’écart type est petit moins les résultats sont dispersés et plus les mesures sont correctes.

Le résultat de la mesure est finalement donné sous la forme :

$$\bar{x} \pm \sigma \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \% \right)$$

5. Chiffres significatifs

En science, lorsqu’on fait la mesure d’une grandeur, on ne conserve que les chiffres qui sont utiles, c’est-à-dire les chiffres qui sont en accord avec la précision de l’instrument de mesure utilisé.

On entend par chiffres significatifs d’un résultat de mesure, un ensemble de chiffres dont on est certain, plus le dernier qui peut être estimé, c’est le chiffre douteux.

Notation scientifique

La notation (ou écriture) scientifique est une représentation d’un nombre réel sous la forme d’un produit de deux facteurs.

Le premier facteur est un nombre décimal dont la valeur absolue de la partie entière est un chiffre compris entre 1 et 9. Le second facteur est une puissance entière de 10.

Exemple : T = 298 K s’´ecrit en notation scientifique $2{,}98.10^2\,K$

Notation ingénieur

La notation ingénieur consiste `à exprimer un nombre réel sous la forme $x.10^n$

, où *x* est un nombre dont la valeur absolue est comprise entre 1 et 999

et n est un entier multiple de 3

Exemple : $U = 0,045$ V

s'écrit en notation ingénieur $U = 45.10^{-3}$

Nombre de chiffres significatifs d’un résultat numérique

Dans un résultat numérique, tous les chiffres, autre que zéro sont **systématiquement** significatifs.

Les zéros sont significatifs lorsqu’ils se trouvent entre d’autres chiffres ou à leur droite ; on ne tient pas compte de la puissance de 10 éventuellement

Exemples :

3,2 contient 2 chiffres significatifs ;

3,20 contient 3 chiffres significatifs ;

0,32 contient 2 chiffres significatifs ;

3200 contient 4 chiffres significatifs, $3,2.10^2$ contient 2 chiffres significatifs et $3,20.10^2$ contient 3 chiffres significatifs

Un nombre entier naturel est considéré comme possédant un nombre illimité de chiffres significatifs ; il en est de même de son inverse.

Chiffres significatifs et opérations

Le nombre de décimales et/ou de chiffres significatifs des données d'un calcul a une influence sur les chiffres significatifs que l'on conserve dans le résultat :

Addition et soustraction :

Dans le cas de l’addition et de la soustraction on considère que la réponse ne doit pas comporter plus de **décimales** que la valeur qui en a le moins.

Exemple : 4,82 ; 2 décimales

+ 5,12685 ; 5 décimales

+ 6,725716 ; 6 décimales

+ 9,125 ; 3 décimales

= 25,797566

On gardera 2 décimales dans la réponse : 25,80.

Multiplication et division :

Dans le cas de la multiplication et de la division, on conserve autant de **chiffres significatifs** dans la réponse que la valeur qui en a le moins.

Exemple : 5,621 ; 4 chiffres significatifs

$\times$ 4,5147 ; 5 chiffres significatifs

= 25,3771287

On gardera 4 chiffres significatifs dans la réponse : 25,38.

Le résultat de la multiplication $36{,}54 \times 58{,}4 = 2133{,}936$ doit être arrondi à $2{,}13.10^3$ car la donnée la moins précise (58,4) contient trois chiffres significatifs.