Dr GUINGANE Toussaint Tilado
Maitre assistant en physique
Université THOMAS SANKARA/UFR-ST

Cour d'électricité 1
CT 24h ; TD 12h

1ere Partie : Électrostatique
2eme Partie : Électrocinétique

Objectifs généraux :

- **Comprendre** les lois de l'électrostatique et de l'électrocinétique (**courant continu)**
- **Appliquer** les lois de l'électrostatique et de l'électrocinétique (**courant continu**)

Connaissances (A retenir)	Compétences (Savoir faire-savoir, attitude)
1ère Partie : Electrostatique ✓ **Énoncer** la loi de Coulomb ✓ **Définir** une ligne de champ électrostatique ✓ **Définir** l'énergie potentielle électrostatique ✓ **Énoncer** le théorème de Gauss; ✓ **Énoncer** les équations locales de l'électrostatique ✓ **Définir** un condensateur	**1ère Partie : Electrostatique** ✓ **Appliquer** la loi de Coulomb pour la résolution de cas pratiques ✓ **Déterminer** les caractéristiques du champ électrostatique créé par une ou plusieurs charge(s) ponctuelle(s) et les distributions continues de charges ✓ **Calculer** le potentiel électrostatique créé par une ou plusieurs charge(s) ponctuelle(s) et les distributions continues de charges ✓ **Calculer** l'énergie potentielle d'interaction d'un système de charges ✓ **Appliquer** le théorème de Gauss pour la résolution de cas pratiques (fil rectiligne, plan, sphère et cylindre)

Connaissances (A retenir)	Compétences (Savoir faire-savoir, attitude)
	✓ **Calculer** la capacité de condensateurs (plan, sphérique et cylindrique)
2ième Partie : Electrocinétique ✓ **Énoncer** les lois de l'électrocinétique (courant continu) ✓ **Définir** la puissance et l'énergie électrique	**2ième Partie : Electrocinétique** ✓ **Appliquer** les lois de l'électrocinétique aux circuits linéaires en courant continu ✓ **Appliquer** les formules pour le calcul de la puissance et l'énergie électrique,

Contenu :

1ère Partie

- ✓ Champ et potentiel électrostatiques : Charge électrique, Distribution de charges, Étude des interactions électriques entre corps chargés, des lois qui les régissent et les applications associées, Champ électrostatique, Théorème de Gauss, Potentiel électrostatique, Énergie électrostatique
- ✓ Conducteurs en équilibre : Systèmes de conducteurs en équilibre, Conducteur en équilibre électrostatique, Influence électrostatique, condensateurs

2ième Partie

- ✓ Circuits linéaires en courant continu : Lois d'association des dipôles. Résolution de problèmes d'un réseau linéaire

Table de matière :

Électrostatique :

Électrocinétique :

Introduction générale

L'univers = une succession d'assemblages

Ces assemblages sont dus à des interactions :

Forces de gravitation (dues à la masse)	la plus familière et la plus visuelle longue portée ($1/r^2$), faible intensité (dues à la masse) toujours attractive
Forces électromagnétiques (dues à la charge)	longue portée ($1/r^2$), forte intensité (10^{40} fois plus que la gravitation) attractive ou répulsive
Forces nucléaires (dues au noyau)	faible portée ($^{1}/_{r^7}$) 2 types : forte et faible physique nucléaire

Introduction générale

Les forces électromagnétiques sont responsables de presque tous les phénomènes qui se produisent à notre échelle

- **L'électrostatique :** interaction entre corps chargés :

- au repos → électrostatique
- en mouvement uniforme → magnétostatique
- en mouvement quelconque → électromagnétique

- **L'électrocinétique :** étude du mouvement des porteurs de charge libres qui se déplacent sous l'action d'un **champ électrostatique** et donnent ainsi naissance à un **courant électrique**.

Chapitre 1 : Champ électrostatique

Connaissances	Compétences
-**Énoncer** la loi de Coulomb ; -**Définir** une ligne de champ électrostatique	- **Appliquer** la loi de Coulomb pour la résolution de cas pratiques - **Déterminer** les caractéristiques du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Introduction

L'électrostatique traite de l'interaction des charges électriques au repos placées dans le vide.
Le champ électrique est appelé champ électrostatique s'il est invariant dans le temps,

1) Charges électriques

- Dans tout phénomène physique intervient **un « objet »** dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse.

En électrostatique, l'objet est **une charge**, mesurée en **coulomb (C)** dans le système international.

- Il existe deux types de charge électrique ; les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent. Les unes sont dites « **positives** » et sont mesurées par un nombre **positif**, les autres sont dites « négatives » et sont mesurées par un nombre négatif.
- Toute charge est multiple de la charge élémentaire : **$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C**
- Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :
- **les électrons** : (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux

  Charge : **$q_e = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C**

  Masse : **$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg**
- ***les protons*** : (H^+)

  Charge : **$q_p = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C**

  Masse : **$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ kg**

- Ainsi que **les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs** qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

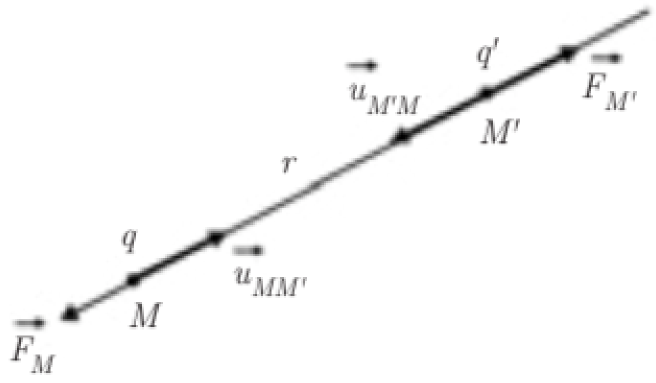
- **les charges ponctuelles :** supposées sans dimension, ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique
- **les distributions continues de charge :** hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale ***dq***, à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

- **linéique sur un fil :** $\lambda = \frac{dq}{dl}\ [C.m^{-1}]$
- **surfacique (ou superficielle) sur une surface :** $\sigma = \frac{dq}{ds}\ [C.m^{-2}]$
- **volumique dans un volume :** $\rho = \frac{dq}{dv}\ [C.m^{-3}]$

2) Loi de Coulomb

Soit deux charges q et q' placées en M et M' et distantes de r. Ces charges peuvent être positives ou négatives, mais dans le cas de la figure, nous supposerons qu'elles sont de même signe.



Cette loi s'écrit : $\vec{F}_{M'} = K\frac{qq'}{r^2}\overrightarrow{u_{MM'}}$ Où $\boldsymbol{\vec{F}_M = K\frac{qq'}{r^2}\overrightarrow{u_{M'M}}}$

Avec $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 S.I$

$\overrightarrow{u_{MM'}}$ est le vecteur unitaire porté par le support de MM', orienté de M vers M', (on dit dans le sens qui va de la cause vers l'effet).

La loi de Coulomb permet de déterminer la force $\overrightarrow{F'}_M$ exercée par *q* sur *q'*, ou encore la Force $\vec{F}_M$ exercée par *q'* sur *q*, ces deux forces étant égales et opposées, conformément au principe de l'action et la réaction.

3) Champ électrostatique

a) Cas d'une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge électrique $\mathbf{q_1}$ dans une région de l'espace suffit à rayonné un champ électrostatique dont l'intensité dépend de cette charge.

Si la charge $\mathbf{q_1}$ est située en A, elle rayonne en un point M situé à une distance r, le champ

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{AM^2}\vec{u}$$

- $\vec{E}(M)$ Est le champ électrostatique exprime en Volt par mètre ($V.m^{-1}$)
- $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$ Vecteur unitaire qui donne la direction du champ électrostatique

Figure : Signe de la charge et sens du champ électrostatique

Si la charge source est positive, le **champ électrostatique est centrifuge**.
Si la charge source est négative, le **champ électrostatique est centripète**.

- Ainsi, si une charge **q_2** est située en M, elle subit la force électrostatique :

- $\vec{F}_{1/2} =$

Remarque :

- Le champ et la force électrostatiques sont des grandeurs vectorielles définies par quatre caractéristiques : **le point d'application ; la direction ; le sens et le module ou intensité.**

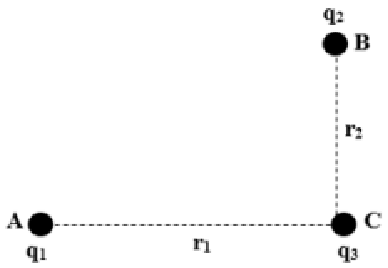
b) Cas d'un système de charges ponctuelles (distribution discrète)

Lorsque *n* charges ponctuelles existent simultanément en des points *M1*, *M2*,. . . ,*Mn* , le principe de superposition permet d'écrire :

$$\vec{E}(M) =$$

Exercice d'application

Trois charges q1, q2 et q3 sont disposées selon la figure ci-dessous . Calculer la force résultante appliquée sur la charge q3.



On donne :

$q_1 = +1{,}5.10^{-1}C, \; q_2 = -0{,}5.10^{-3}C, \; q_3 = +0{,}2.10^{-3}C, \; AC = 1{,}2m, \; BC = 0{,}5\,m$

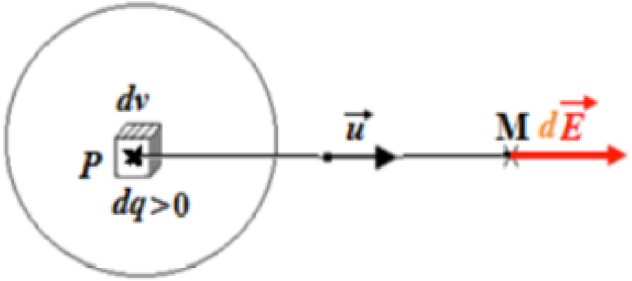
Corrigé

c) Cas d'une distribution continue de charge

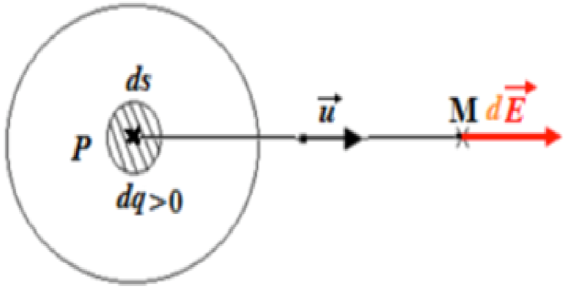
- Pour une distribution continue de charges, un petit élément (*dv*,*ds* ,*dl*) portant la charge dq crée en un point M un champ électrostatique élémentaire $\overrightarrow{dE}$.
- $\vec{E} = \int \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$
- L'intégrale doit être etendue à tout l'espace occupé par la charge.

<u>**Distribution volumique de charges**</u>

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dv}{PM^2} \vec{u}$$



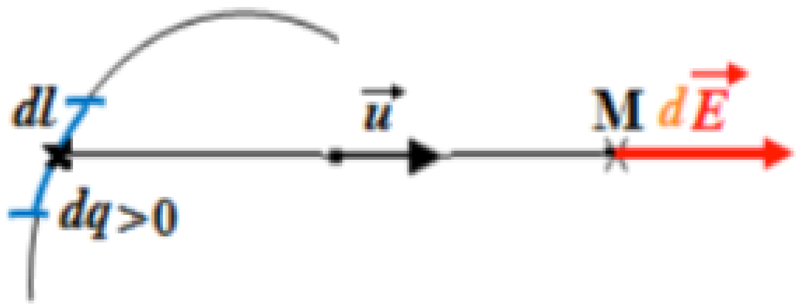
<u>**Distribution surfacique de charges**</u>



$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds}{PM^2} \vec{u}$$

Distribution linéique de charges

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{PM^2}\vec{u}$$



Le **principe de superposition** s'applique aussi dans le cas des **distributions continues de charges**.

4) Symétries et invariances

La connaissance **des symétries et invariances** que présentent les sources permettent de déduire certaines caractéristiques du champ résultant.

- : $\vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\vec{e}_z$
- En coordonnées cylindriques : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$
- : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi$

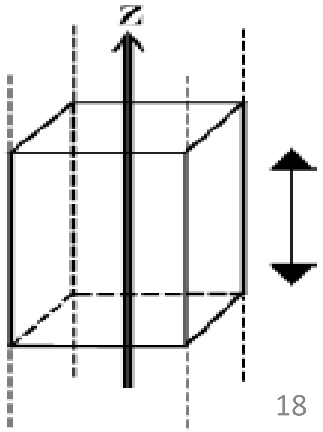
La considération des **symétries et invariances** d'une distribution va permettre de simplifier cette expression de $\vec{E}(M)$ et donc de simplifier le calcul d'intégrales.

a) Invariances

- Les invariances permettent **d'éliminer des coordonnées dont dépendent le champ électrostatique** en un point M.
- Il y a invariance lorsque la vue de la distribution est identique en un point M et un point M' (M'obtenu par translation ou par rotation depuis M), ou bien si le champ électrostatique calculé en M et en M'est identique.

Exemples : Cas du cylindre infini

- **Invariance par translation selon un axe :** Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution), alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement. Si cet axe est Oz (système de cordonnées cartésiennes ou polaires), alors les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la cordonnée z :



$$\vec{E}(M) = E_x(x,y)\vec{e}_x + E_y(x,y)\vec{e}_y + E_z(x,y)\vec{e}_z$$ **Coordonnées cartésiennes**

Ou

$$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta)\vec{e}_z$$ **Coordonnées cylindriques**

- **Invariance par rotation autour d'un axe** : Si la distribution admet un axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci, alors le champ électrostatique ne doit pas non plus subir de changement. Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, les composantes du champ électrostatique ne dépendront pas de la coordonnées θ (système de coordonnées cylindriques ou sphériques):

$$\vec{E}(M) = E_r(r,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,z)\vec{e}_z$$ **Coordonnées cylindriques**

Ou

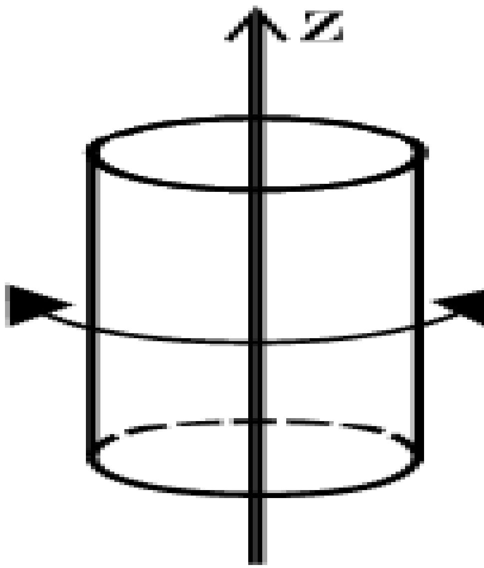
$$\vec{E}(M) = E_r(r,\varphi)\vec{e}_r + E_\theta(r,\varphi)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\varphi)\vec{e}_\varphi$$ **Coordonnées sphériques**

- **Invariance par translation et par rotation autour d'un axe** :

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta + E_z(r)\vec{e}_z$$ **Coordonnées cylindriques**

Ou

$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r + E_\theta(r)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r)\vec{e}_\varphi$$ **Coordonnées sphériques**



Exemple : Cas de la sphère

Dans une distribution sphérique, il y a invariance par rotations autour du point O, centre de la sphère, **on s'affranchit des coordonnées θ et φ** . Mais cette distribution n'est pas invariante par translation suivant r, car on ne voit pas la même distribution en se déplaçant suivant un rayon : si on prend un point M à l'intérieur de la sphère, il est entouré de charges alors qu'un point M' situé sur le même rayon mais en périphérie de la sphère ne voit que des charges en dessous de lui. En dehors de la sphère, le champ électrostatique dépendant de la distance aux charges, celui-ci ne serait pas le même à proximité de la sphère et très loin d'elle.

b) Symétries et antisymétries

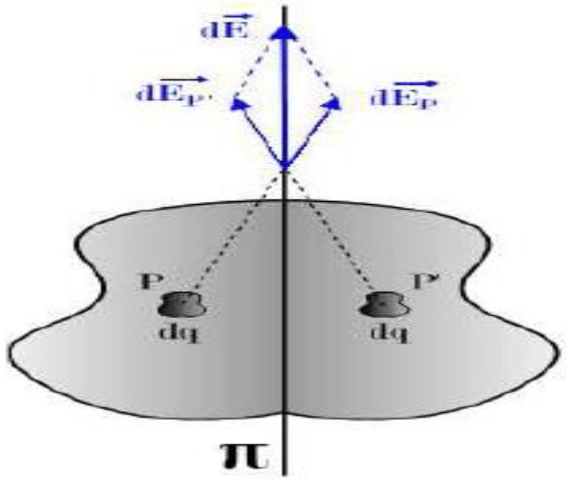
Les symétries et antisymétries permettent **d'éliminer des composantes du champ électrostatique**.

En effet, un principe appelé **principe de Curie** dit que les symétries **des causes** (que sont les charges, sources de l'électrostatique) doivent se retrouver **dans les effets** (que sont le champ et le potentiel électrostatiques) : la symétrie de la distribution de charge se retrouvera dans l'expression du champ électrostatique.

- Plan de symétrie

Cas général : Si la distribution admet un plan de symétrie π alors le champ appartient nécessairement à ce plan.

En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge dq créé en M le champ $\overrightarrow{dE_p}$ et son symétrique par rapport à π, situé en P' qui porte aussi la charge dq crée en M le champ $\overrightarrow{dE_{p'}}$. La somme de $\overrightarrow{dE_p}$ **et** $\overrightarrow{dE_{p'}}$ donne le vecteur $\overrightarrow{dE}$ contenu dans π.



Le champs E est dans le plan de symétrie.

Exemple du fil infini

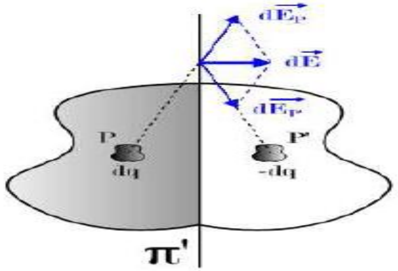
Le plan π$_1$ $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution (le fil), le champ $\overrightarrow{dE}$ doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composante selon $\vec{e}_z$ Le plan **π$_2$** $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$est lui aussi un plan de symétrie pour la distribution, le **champ** $\overrightarrow{dE}$ doit être contenu dans ce plan : il ne peut donc pas avoir de composantes selon $\vec{e}_\theta$ Donc le champ $\overrightarrow{dE}$ n'a qu'une seule composante suivant $\vec{e}_r$ et s'écrit : $\overrightarrow{dE}(M) = dE_r(M)\vec{e}_r$

-Plan d'antisymétrie

Cas général

Si la distribution admet un plan d'antisymétrie π' alors le champ est nécessairement orthogonal à ce plan.

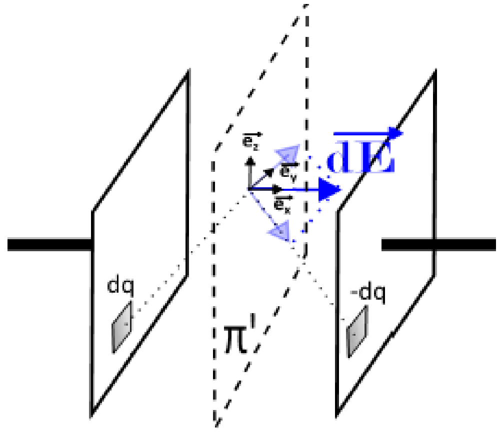
En effet, l'élément infinitésimal de la distribution situé en P qui porte la charge **dq** créé en **M** le champ $\overrightarrow{dE_p}$ son symétrique par rapport à π' , situé en P' porte lui, la charge **–dq**, il créé en **M** le champ $\overrightarrow{dE_{p'}}$. La somme de $\overrightarrow{dE_p}$ **et** $\overrightarrow{dE_{p'}}$ donne un vecteur $\overrightarrow{dE}$orthogonal au plan π'.



Exemple : cas du condensateur

Le plan π' est un plan d'antisymétrie pour le condensateur car les charges portées par ses deux plaques sont opposées. Ainsi, l'addition des champs élémentaires créés par une portion de surface de chaque plaque, donne un champ perpendiculaire à **π'** $\left(\vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

Si on utilise des coordonnées cartésiennes, on élimine avec cette antisymétrie les composantes suivant $\vec{e}_y$ **et** $\vec{e}_z$. Le champ s'écrit : $\overrightarrow{dE}(M) = dE_x(M)\vec{e}_x$



5) Lignes de champ électrostatique

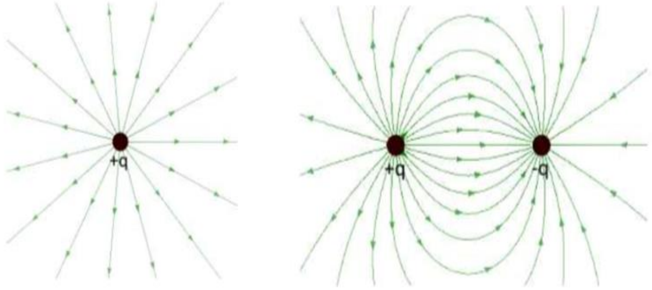
De manière générale, la représentation d'un champ vectoriel fait appel à la notion de ***ligne de champ***. La présence d'un champ électrostatique est difficile à visualisé. Grâce aux lignes de champ, on a une idée de la cartographie du champ électrostatique dans une région de l'espace.

Le champ est continuellement **tangent** à des courbes appelées **lignes de champ**. Ces lignes sont orientées par le sens du champ.

- **Définition** : Une **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrostatique, en chaque point de celle- ci, le champ électrostatique est tangent.

La valeur du champ électrostatique peut varier le long d'une **ligne de champ**, les lignes de champ permettent donc que de connaitre la **direction du champ**.

Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champ sont serrées, plus le champ électrostatique est intense



On observe que **le champ est radial et centrifuge si la charge est positive**. Évidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

Le système formé par les deux charges ponctuelles de signe opposé, **q et –q**, s'appelle un doublet électrostatique. La cartographie du champ montre que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer.

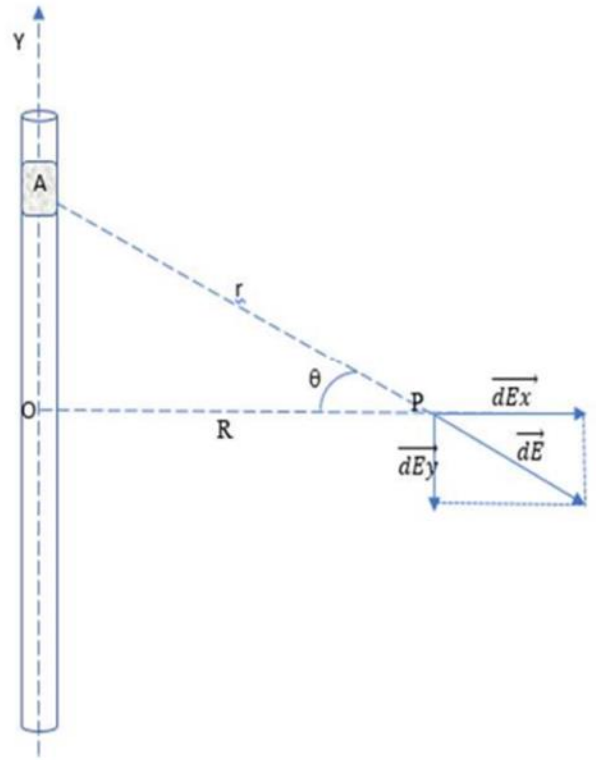
Équation : La définition des lignes de champ nous permet d'affirmer qu'un élément de longueur $\overrightarrow{dM}$ le long d'une ligne de champ est parallèle au champ $\vec{E}$. L'équation différentielle (vectorielle) d'une ligne de champ est donc : $\overrightarrow{dM} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

Nous obtiendrons la ligne de champ issue d'un point initial donné par intégration de cette équation différentielle. Par exemple, en coordonnées cartésiennes, nous écrirons :

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z}$$

6) Calcul du champ électrostatique par la méthode intégrale :

- fil infini

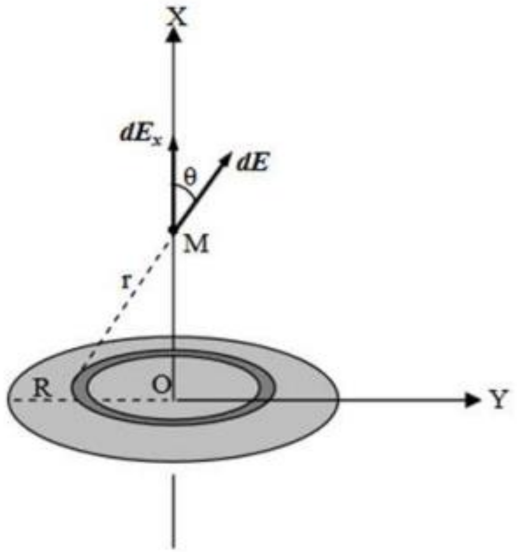


- Disque chargé

Soit un disque de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité surfacique $\sigma > 0$

1) Calculer le champ électrique E(M) en un point quelconque M sur l'c

2) On fait tendre R vers l'infini. En déduire l'expression du champ E(M)



Corrigé

Chapitre 2 : Potentiel électrostatique

Connaissances	Compétences
- **Définir** potentielle électrostatique - **Définir** l'énergie potentielle électrostatique	- **Calculer** le potentiel électrostatique créé par une ou plusieurs charge(s) ponctuelle(s); - **Calculer** le potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges ; - **Calculer** l'énergie potentielle d'interaction d'un système de charges

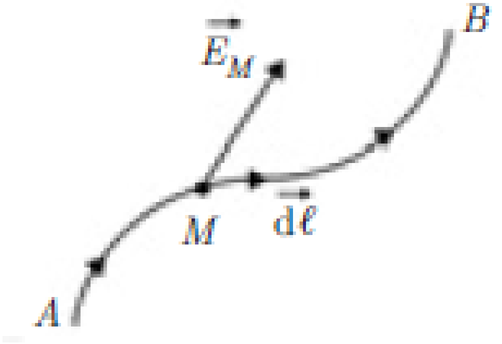
Introduction

Nous allons définir dans ce chapitre une grandeur scalaire intimement lié au champ électrostatique : **le potentiel électrostatique**. Cette grandeur permet de caractériser le champ électrostatique et est parfois plus simple à exploiter. De plus, ce potentiel sera relié, par l'intermédiaire du travail de la force de Coulomb, **à l'énergie potentielle électrostatique** ce qui lui donnera toute **sa signification physique**.

1°) Circulation du champ électrostatique

Soit un parcours *AB* orienté de *A* vers *B*. **La circulation** du champ $\vec{E}_M$ sur un élément de parcours dl s'écrit :

$\boldsymbol{dC = \vec{E}_M.\vec{dl}}$ $\boldsymbol{C_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{E_M}.\vec{dl}}$



La circulation du champ $\vec{E}$ ne dépend que des positions des points A et B, elle est donc **indépendante du chemin suivi** : **on dit que la circulation du champ** *E* **est conservative**.

Ou, par équivalence : La **circulation du champ électrostatique** sur un contour (courbe fermée) est nulle : $\boldsymbol{\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0}$

2°) Potentiel électrostatique

a) Définition

La circulation du champ électrostatique étant conservative, nous pouvons définir, indépendamment du chemin suivi pour calculer la circulation du champ de A à B, on peut définir une grandeur scalaire V telle que : $\int_A^B \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{B}) = -\Delta\boldsymbol{V}$ avec $\Delta\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A})$. Ou encore $\vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = -\boldsymbol{dV}$

Cette grandeur V est appelée **potentiel électrostatique** et s'exprime en Volt.

Le champ électrostatique et son potentiel sont donc relies par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V(r)$

Cette relation est appelée relation locale entre le champ et le potentiel.

Elle est vérifiée en chaque point de l'espace ou le champ et le potentiel électrostatiques peuvent être définis. Elle permet également de déterminer le potentiel lorsque le champ électrostatique est connu et réciproquement.

On a trois expressions possibles du gradient suivant le système de coordonnées choisi :

- **En coordonnées** $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$
- **En coordonnées** $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$
- **En coordonnées** $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; E_\theta = -\frac{\partial V}{r\partial\theta}; E_\varphi = -\frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}$

- **Remarque** :

La différence de potentiel n'est autre que la tension que l'on connait en électricité.

b) Champ de gradient

- La circulation élémentaire du champ est $\vec{E}.\overrightarrow{dr} = -dV(\vec{r})$, et : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$
- Ainsi, l'expression du potentiel V (M) (s'annulant à l'infini) créée par une charge ponctuelle q en O est : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

- **Remarque :**

1°) le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique
2°) le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels décroissants

3°) le champ électrostatique s'exprime également en V/m : $E = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{U}{d}$

4°) La seule présence d'une charge ponctuelle **q** en un point A permet de définir deux propriétés en un point M de l'espace environnant :
- une propriété vectorielle, **le champ électrostatique.**
- une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près).

- et **une relation entre les deux propriétés**.

c) Expression du potentiel

- Ensemble de charges ponctuelles

Pour des charges qi placées en des points Pi :

$V(M) =$

- Distribution volumique de charges

$V(M) =$

- Distribution surfacique de charges

$V(M) =$

- Distribution linéique de charges

$V(M) =$

3) Surfaces équipotentielles

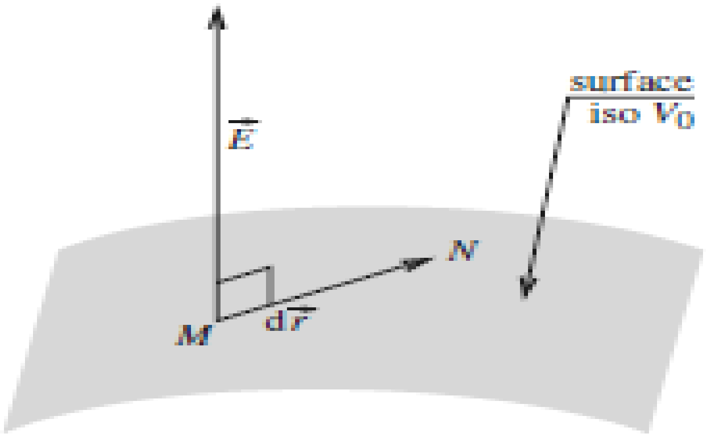
a) Définition

Une surface équipotentielle, de potentiel V_0, est définie par l'équation **V(M) = $\mathbf{V_0}$**. Deux surfaces équipotentielles correspondant à des potentiels distincts ne peuvent pas avoir d'intersection.

b) Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Considérons deux points très proches appartenant à une même surface équipotentielle de potentiel $\mathbf{V_0}$. Notons M le premier, le second, noté N, étant obtenu à partir de celui-ci par un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$ d'orientation quelconque dans le plan tangent en M à la surface équipotentielle.

Par définition du potentiel $\boldsymbol{V(N)} = \boldsymbol{V(M)} - \boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dr}}$, et par définition de la surface **V (N) = V (M)** . D'ou $\boldsymbol{\vec{E}.\overrightarrow{dr}} = \mathbf{0}$. Le champ électrostatique est donc normal à la surface équipotentielle($\vec{E} \perp \overrightarrow{dl}$)



4) Énergie potentielle d'interaction électrostatique

a) Énergie potentielle d'une charge placée dans un champ

Ainsi, ce champ de force est un champ de gradient et, à ce titre, la force électrostatique est une force conservative : son travail entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi. En effet, le travail élémentaire est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle : $\vec{f}.\overrightarrow{dM} = q\vec{E}.\overrightarrow{dM} = -d\varepsilon_p$ **avec** $\vec{F} = q\vec{E}$

Le travail de la force électrostatique entre A et B est : $W_{AB} = -\varepsilon_{p(B)} + \varepsilon_{p(A)} = -\Delta\varepsilon_p = -q(V_B - V_A)$

b) Énergie potentielle d'interaction

L'énergie potentielle d'interaction est l'énergie qu'il faut fournir à un système de deux charges ponctuelles situées initialement à l'infini pour les rapprocher à une distance r_{12} l'une de l'autre.

- Considérons tout d'abord le cas de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en interaction dans le vide, à la distance r_{12} l'une de l'autre. On peut considérer que la charge q_1 est plongée dans le potentiel électrostatique créé par q_2

$$E_p = q_1V_2 = q_2V_1 = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

- Considérons maintenant le cas de N charges ponctuelles qi en interaction dans le vide, à la distance rij l'une de l'autre. De manière générale on écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{\text{couples }(i,j)} \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i} \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge qi, à savoir :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0\, r_{ij}}$$

Cela donne

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0\, r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0\, r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0\, r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

On rappelle que $\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j<i} u_{ij} + \sum_{i,j>i} u_{ij}$ ce qui donne lorsque $u_{ij} = u_{ji}$:

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j<i} u_{ij}$$

c) Energie d'une distribution continue de charges

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en petits éléments de charges élémentaires dq, le calcul du travail s'effectue selon la nature de la distribution de charges comme suit :

Distribution volumique

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau$$

avec ρ est la distribution volumique

Distribution surfacique :

$$W = \frac{1}{2}\iint_{S} \sigma V dS$$

avec σ est la distribution superficielle

Distribution linéique :

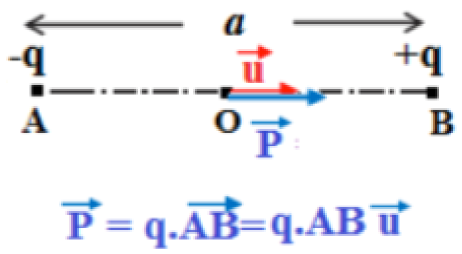
$$W = \frac{1}{2}\int_{C} \lambda . V . dl$$

avec λ est la distribution linéique

5) Dipôle électrostatique

a) Définition

- On appelle dipôle électrostatique un système de deux charges ponctuelles de signe contraire et égal en valeur absolue (**- q** au point A et **+ q** au point B). Les charges sont situées à une distance ***a*** l'une de l'autre. La distance ***a*** est très petite par rapport à la distance ***r*** à laquelle on étudie le champ et le potentiel électrostatiques crées par les deux charges.



- On appelle **moment électrique dipolaire** le vecteur $\vec{p} = q\overrightarrow{AB} = qa\vec{u}$. L'unité du moment dipolaire est le coulomb-mètre (C.m) mais on utilise une autre unité plus petite qui est le **Debye (D)** $1D = \frac{1}{3}10^{-29}C.m$

b) Potentiel crée à grande distance par un dipôle électrostatique

Le potentiel électrostatique crée par le dipôle au point M est donné par le principe de superposition :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right)$$

Il faut maintenant exprimer le potentiel en fonction de la distance OM = r et de l'angle θ.
Pour cela, **il faut donc exprimer rA et rB en fonction r et de l'angle θ.**

(Compléter)

c) Champ électrostatique crée à grande distance par un dipôle électrostatique

On utilise la relation locale entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ en coordonnées polaires. Dans l'expression du potentiel ci-dessus, les deux variables sont : r et θ.

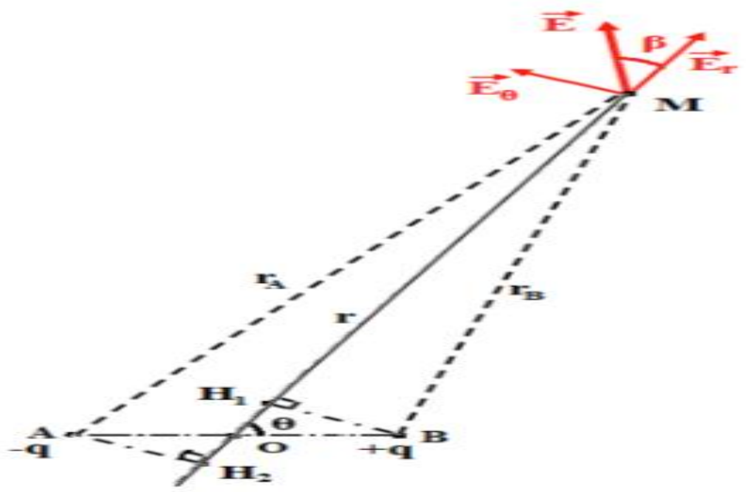
Composante radiale E_r

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2r}{r^4}\right) = \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}; E_r = \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Composante tangentielle E_θ

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{\partial}{\partial \theta}(\cos(\theta)) = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\sin(\theta)) = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3};\ E_\theta = \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

- Expression du champ

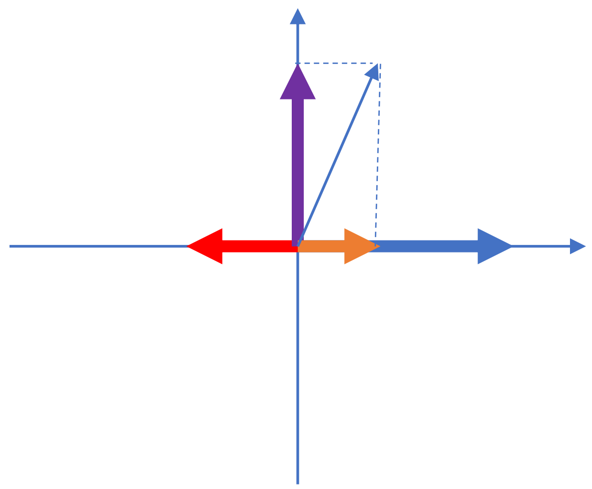


Exercice d'application

Trois charges électriques ponctuelles qA , qB et qC sont placées aux points A(a,0), B (0 ,a) et C(-a,0) respectivement. On donne : qA = q = 2.10-9C, qB = -2q, qC = 2q et a= 5 cm.

1. Calculer le potentiel électrique V créé par ces trois charges au point O.
2. Déterminer le champ électrique E créé au point O. Représenter qualitativement E.
3. En déduire la force électrostatique F exercée sur une charge q ' = (q ' = −q)placée en O.
4. Avec quelle énergie cinétique minimale doit on lancer de l'infini la charge q 'pour qu'elle atteigne le point O ?
5. Calculer l'énergie interne U du système constitué par ces quatre charges.

Corrigé(Compléter)



4. Conservation de l'énergie totale :

$$\Delta E_C = -\Delta E_P$$

$$\frac{1}{2}m v_f^2 - \frac{1}{2}m v_i^2 = -\left[E_{Pf} - E_{Pi}\right]$$

$$0 - E_{Ci} = -\left[E_{Pf} - 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = E_{Pf}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = -q' V_0 = -(-q)\frac{kq}{a}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = \frac{kq^2}{a}$$

A.N :

$$E_{Ci} = 7.2\times 10^{-7}\ \mathrm{J}$$

Chapitre 3 : Théorème de Gauss

Connaissances	Compétences
- **Énoncer** le théorème de Gauss - **Énoncer** les équations locales de l'électrostatique	- **Appliquer** le théorème de Gauss pour la résolution de cas pratiques (fil rectiligne, plan, sphère et cylindre)

Introduction

Ce chapitre sera consacré **au théorème de Gauss** qui permet un calcul plus aisé **du champ électrostatique** à condition que les symétries de la distribution soient suffisantes.

1) Flux du champ électrostatique

a) Définition

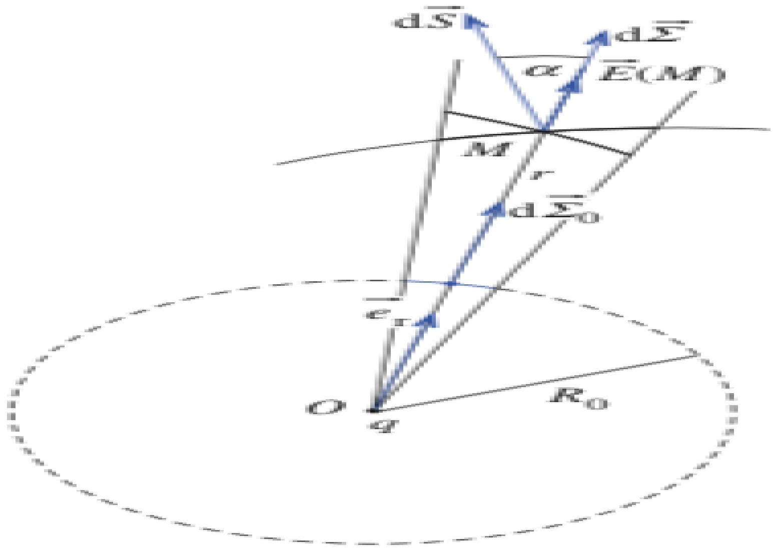
Soit $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique créé en M par une certaine distribution de charges D. Le flux élémentaire de $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M})$ à travers $\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}(\boldsymbol{M})$ est le scalaire $\boldsymbol{d\emptyset}$ défini par : $\boldsymbol{d\emptyset} = \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}).\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}(\boldsymbol{M})$

Le flux de $\vec{E}(M)$ à travers une surface (S) s'obtient par intégration de $d\emptyset$ sur (S) : $\emptyset = \int \boldsymbol{d\emptyset}$

b) Flux créé par une charge ponctuelle

La charge ponctuelle q placée en O, crée en M le champ $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}}{\boldsymbol{r^2}}$ dont le flux à travers $\overrightarrow{dS}(M)$ est : $\boldsymbol{d\emptyset} = \frac{\boldsymbol{q}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}.\overrightarrow{\boldsymbol{ds}}(\boldsymbol{M})}{\boldsymbol{r^2}}$ **Pour interpréter le produit scalaire** $\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}.\overrightarrow{\boldsymbol{ds}}$

Considérons la **surface d'aire** $\boldsymbol{d\sum}$, projeté de dS sur un plan orthogonal à $\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$ **.** $d\sum$ représente également l'aire découpée sur une sphère de centre O et de **rayon r=OM** par un cône de sommet O et qui s'appuie sur le contour définissant dS.



Donc nous pouvons écrire : $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{ds} = ds\cos\alpha = d\Sigma$ **soit** $d\phi = \frac{qd\Sigma}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Considérons maintenant une sphère de rayon R_0 , centrée en O . Le cône de sommet O qui s'appuie sur le contour de dS découpe sur cette sphère une pastille d'aire $d\Sigma_0$ telle que $\frac{d\Sigma_0}{R_0^2} = \frac{d\Sigma}{r^2}$ Finalement $d\phi = \frac{qd\Sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2}$

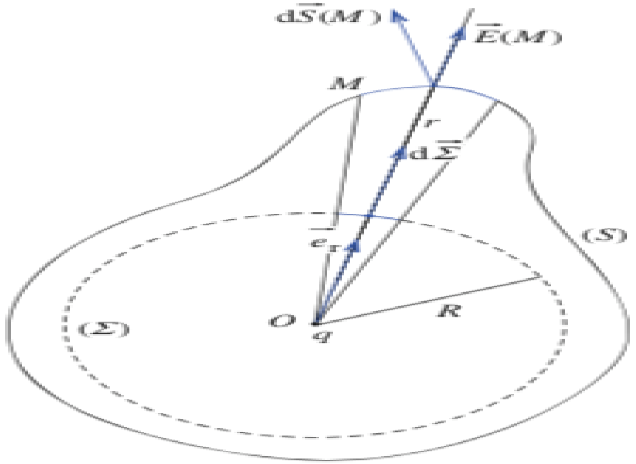
c) Flux à travers une surface fermée contenant la charge

Soit (S) une surface fermée entourant la charge q placée en O et Σ la sphère de centre O et de rayon R .

Le flux élémentaire du champ créé par la charge q à travers $\overrightarrow{dS}(M)$ est : $d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{dS}(M)}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma}{R^2}$

Où $d\Sigma$ est l'élément de surface découpé, sur la sphère Σ de centre O et de rayon R , par le cône de sommet O s'appuyant sur le contour de dS .
Par intégration sur (S), il vient :

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



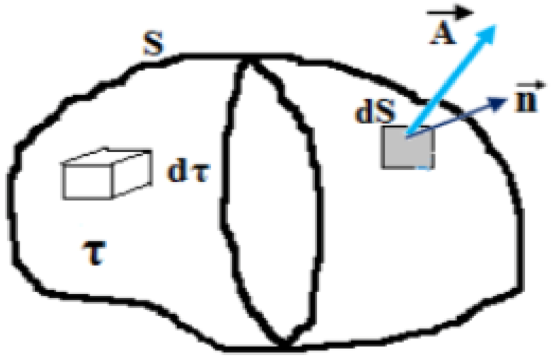
Le flux (sortant) du champ crée par une charge q , à travers une surface fermée (S) contenant cette charge, est : $\boldsymbol{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

Remarque : Le flux du champ crée par une charge q , à travers une surface fermée (S) ne contenant pas de charge, est nul : $\boldsymbol{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{dS}}{r^2} = 0}$

d) Théorème de Green-Ostrogradsky

Ce théorème peut être considéré comme une définition de la divergence d'un champ de vecteur. Selon le théorème de **Green-Ostrogradsky**, le flux total de tout vecteur A à travers une surface S entourant le volume τ est égal à **la divergence du vecteur A** dans le volume τ : τ étant un volume limité par une surface fermée S on a :

$$\boldsymbol{\phi = \oint \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \int div(\vec{A})d\tau \Rightarrow d\phi = div(\vec{A})d\tau}$$

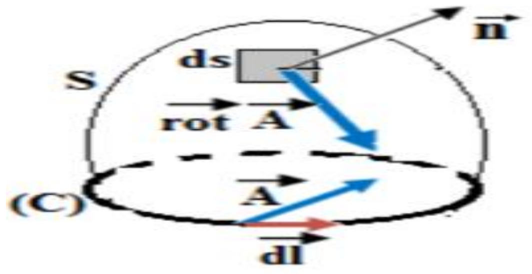


- La divergence donne la différence entre le flux sortant et le flux entrant :

- Si $div(A) \succ 0$ alors les lignes de champ s'écartent ou « divergent »
- Si $div(A) \prec 0$ alors les lignes de champ « convergent »
- Si $div(A) = 0$ alors les lignes de champ sont parallèles ; on dit aussi qu'il y a conservation du flux du champ de vecteur A.

2) Théorème de stokes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de **son rotationnel** à travers cette surface.



S étant une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé (C) et limité par lui on peut écrire :

$$C = \oint \vec{A}.\vec{dl} = \int \overrightarrow{rot}(\vec{A})\vec{n}.dS \Rightarrow dC = \overrightarrow{rot}(\vec{A})\vec{n}dS$$

Le théorème de stokes peut être considérer comme une relation de définition du rotationnel d'un champ de vecteur

3) Théorème de Gauss

Ce théorème permettra un calcul plus aisé à condition que les symétries de la distribution soient suffisantes.

Énoncé

Le flux du vecteur champ électrostatique *E* à travers une surface fermée *S* est égal au quotient par ε_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la surface S.

$\boldsymbol{\phi} =$

Remarque :

La surface S est une surface purement géométrique appelé surface de Gauss. Son choix se fait arbitrairement mais de façon judicieuse ce qui permet un calcul facile et rapide du champ électrostatique en tout point de l'espace. La surface passera par le point où l'on souhaite calculer l'expression du champ électrostatiques.

On choisit :

- ***une surface sphérique*** *si le système chargé présente une symétrie sphérique*
- ***une surface cylindrique*** *si le système chargé présente une symétrie cylindrique ou s'il est filiforme*

4) Équations locales de l'électrostatique

- **Forme différentielle du théorème de Gauss**

Soit une surface fermée S entourant une distribution continue de charge de densité ρ en un point quelconque. Soit τ le volume limité par cette surface ***S***.

Le flux du champ *E* à travers cette surface est : $\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS$

Le théorème de **Green-Ostrogradsky** permet d'écrire : $\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS = \int div(\vec{E})d\tau$

Si *Qint* est la charge totale intérieure au volume τ avec la densité ρ on a : $Q_{int} = \int \rho d\tau$

Le théorème de Gauss $\phi = \oint \vec{E}.\vec{n}dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ devient $\int div(\vec{E})d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho d\tau$

D'ou $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Cette relation signifie que les charges électriques sont les sources du champ électrostatique.

- *Si* $\rho > 0 \rightarrow div(\vec{E}) > 0$ *et les lignes de* ***champ*** *, par contre*
- *si* $\rho < 0 \rightarrow div(\vec{E}) < 0$ *et les lignes de* ***champ*** .

- Forme différentielle de la circulation du champ électrostatique

La circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé quelconque est nulle:
$\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$

Le théorème de Stokes permet d'écrire $\oint \vec{E}.\vec{dl} = \int \overrightarrow{rot}(\vec{E}).\vec{n}dS$ Or $\oint \vec{E}.\vec{dl} = 0$ soit $\int \overrightarrow{rot}(\vec{E}).\vec{n}dS = 0 \Rightarrow$
$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{0}}$

Cette relation signifie que les lignes de champ électrostatique ne se referment pas sur elles même.

- Équation de Poisson

Exprimons en termes de potentiel le théorème de Gauss en coordonnée cartésiennes, soit:

$$\boldsymbol{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Or selon la relation locale entre champ et potentiel on a :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ Soit : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\ ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial V}{\partial y}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\ ; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial V}{\partial z}\right] = -\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

La relation $div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ devient $-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ou $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Remarque :

Remarque : En l'absence de charge $\rho = 0$ on a : $div(E) = 0$ c'est l'équation d'isotropie (même propriété du milieu en toute direction en un point) et $\Delta V = 0$ c'est l'équation de ***Laplace***

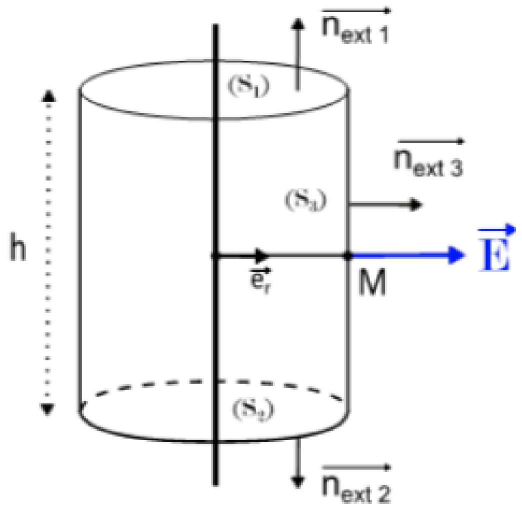
5) Applications du théorème de Gauss

- **Fil rectiligne infinie portant une densité linéique λ > 0**

Calculer le champ électrostatique en un point M situé à la distance r du fil

Résolution

1. On commence toujours par simplifier l'expression du champ électrostatique en éliminant les coordonnées et composantes grâce aux **symétries et invariances**. Nous avons déjà fait ceci, on a toujours : $\vec{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e_r}$
2. Pour pouvoir appliquer ce théorème, il faut choisir une **surface de Gauss appropriée**. Nous allons prendre un cylindre de rayon ***r*** et de hauteur ***h*** centré sur le fil (qui présente d'ailleurs les mêmes invariances que la distribution). Le cylindre de Gauss passe par le point M au niveau duquel on veut calculer le champ électrostatique. **Remarque** : *Un cylindre a trois surfaces : deux surfaces de base et une surface latérale*.
3. On doit maintenant calculer le **flux du champ électrostatique** à travers la surface de Gauss : *Le flux du champ E à travers la surface de Gauss est le flux à travers les 3 surfaces du cylindre :*


$\overrightarrow{n_{ext\ 1}}$
(S_1)
$\overrightarrow{n_{ext\ 3}}$
(S_3)
h
$\vec{E}$
$\vec{e_r}$
M
(S_2)
$\overrightarrow{n_{ext\ 2}}$

Chapitre 4 : Conducteurs électriques et condensateurs

Connaissances	Compétences
- **Définir** un conducteur - **Définir** un condensateur	- **Calculer** la capacité de condensateurs (plan, sphérique et cylindrique)

Introduction

Dans ce chapitre nous **définirons** la notion **de conducteurs à l'équilibre électrostatique** et d'influence électrostatique. Ce qui nous permettra **de parler des condensateurs** qui sont des **composants électriques importants**.

1) Conducteur

Un conducteur est un corps qui possède des particules chargées pouvant se déplacer librement et ainsi conduire le courant électrique :

- Les métaux sont conducteurs car ils possèdent des électrons libres.
- Les électrolytes sont conducteurs car ils possèdent des ions.

2) Propriétés des conducteurs isolés ou en équilibre électrostatique

a) Conducteur isolé ou en équilibre électrostatique

Un conducteur est en équilibre électrostatique si les charges libres de ce conducteur sont en moyenne au repos. Cela aura pour conséquence qu'en tout point intérieur au conducteur, le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul soit $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

En effet, le conducteur étant en équilibre, on a : $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{int}} = \vec{\mathbf{0}}$ Or $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{int}} = \mathbf{q}\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{int}} = \vec{\mathbf{0}} \rightarrow \vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{int}} = \vec{\mathbf{0}}$ $\mathbf{car\ q \neq 0}$

b) Conducteur et potentiel électrostatique

Quand le conducteur est à l'équilibre (plus de mouvement de charges), le champ à l'intérieur de celui-ci est nul. Et d'après ce que l'on a vu précédemment :

$\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{V})$ donc **V= Cte**

Le potentiel est uniforme au sein du conducteur, on dit aussi que**(compléter)**

c) Répartition des charges

Si le champ à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre est nul, on peut montrer que la densité volumique de charge dans le conducteur est nul : $\rho_{int} = 0$ car $div(\vec{E}_{int}) = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} = 0$

Et $\rho_{int} = 0 \rightarrow$: Il y a autant de charges positives que de charges négatives à l'intérieur du conducteur.

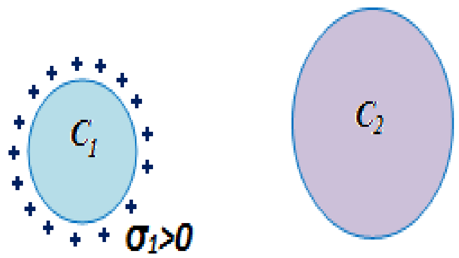
Conclusion *(Compléter):*

Si le conducteur a été préalablement chargé alors **les charges n'ont pu se répartir qu'à la surface du conducteur**. On définit donc une densité surfacique de charge σ.

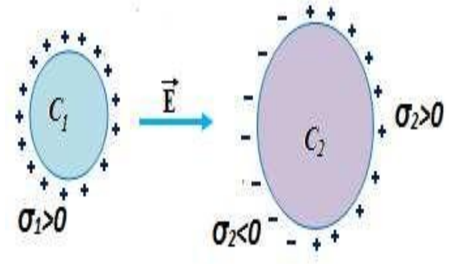
d) Phénomène d'influence de deux conducteurs chargés

- **Influence partielle**

Soit un conducteur ***C2*** isolé, initialement neutre et un conducteur ***C1*** isolé et chargé positivement avec une densité surfacique σ***1 > 0***. Le conducteur ***C2*** se trouve placé dans le champ électrostatique crée par le conducteur ***C1***.



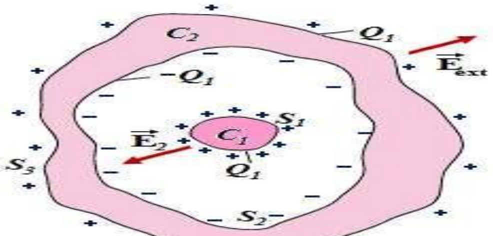
Les charges électriques vont se mouvoir dans le conducteur **C2** : les charges négatives (électrons libres) sont attirées par le champ tandis que les charges positives (ions positifs) sont repoussées. Il apparait sur la surface de **C2**: une densité de charge σ2 < 0 sur la partie faisant face à C1 une densité σ2 > 0 sur la partie opposée. Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de C2.



L'action de C1 sur C2 s'appelle influence électrostatique et elle conduit à une modification de la répartition des charges sur la surface de C2.

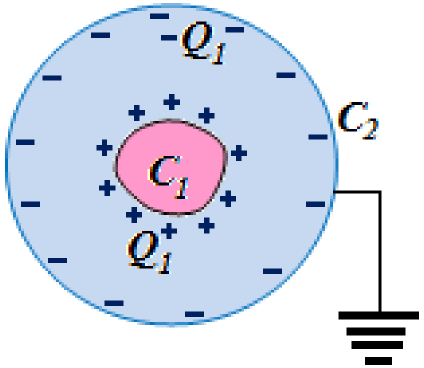
- <u>**Influence totale**</u>

- Il y a influence totale lorsque le conducteur C2 entoure complètement le conducteur C1.
- Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées : **QS1 = −QS2**
  Condition de neutralité électrique de C2 : **QS2 = −QS3** Soit que : **QS1 = −QS2 = QS3**



• **En résumé on peut dire que (A compléter) :**

Remarque (Compléter) :



3) Condensateurs

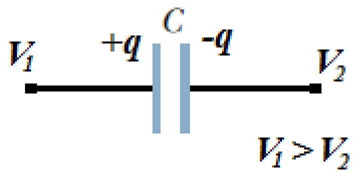
a) Définition (completer)

b) Capacité d'un condensateur

- La charge **Q** d'un condensateur est celle portée par l'armature interne. Si ***V1*** est le potentiel de l'armature interne et ***V2*** celui de l'armature externe, la capacité du condensateur est donnée par la relation suivante : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$
- La capacité d'un condensateur dépend de la géométrie des armatures.
  La capacité se mesure en *farads (F)* mais cette unité est beaucoup trop grande pour les emplois usuels ; on utilise surtout des sous – multiples : *le microfarad (µF):1 µF = 10-6 F, le nanofarad (nF): 1nF =10-9 F* et le *picofarad (pF): 1pF = 10-12 F*.

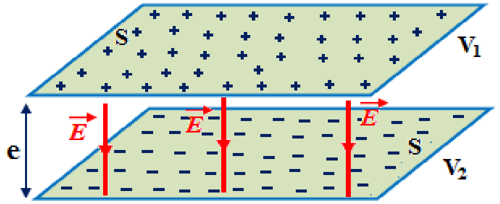
On symbolise le condensateur de la façon suivante :

La capacité d'un condensateur caractérise l'aptitude du condensateur à accumuler des charges électriques sur les armatures lorsqu'il est soumis à une tension (V1-V2).



c) Capacité d'un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux conducteurs plans parallèles de même surface ***S*** et séparés par une distance (**e**). On a montré que le champ électrostatique crée par un plan a pour module $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



- ***Expression de Q***

Première plaque : Densité σ ; $\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

Deuxième plaque : Densité $-\sigma$; $\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$$

Le principe de superposition permet d'écrire : Le champ électrostatique entre les armatures est uniforme et à pour module $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ avec $\sigma = \frac{Q}{S}$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ et } \sigma = \frac{Q}{S} \Longrightarrow Q = \varepsilon_0 . S . E$$

- **Expression de V1 –V2**

D'après la relation local entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$, on a : $E = -\frac{dV}{dx}$ (une dimension)
soit donc : $\int_{V_1}^{V_2} dV = -E\int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow V_1 - V_2 = e.E\ (x_2 - x_1 = e)$

La capacité du condensateur plan est donc : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 SE}{eE} = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ $\quad C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$

- **Remarque :**

Lorsqu'on introduit entre les armatures, par substitution du vide, un diélectrique (mica, céramique, verre,…) de constante diélectrique ε_r on multiplie la capacité à vide du condensateur par un facteur ε_r .

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_r > 1$ On a : $C = \varepsilon \frac{S}{e} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{e} = \varepsilon_r C_0$

ε_0 est la permittivité électrique du vide et ε_r est la permittivité relative du diélectrique.

4) Association de condensateurs

a) Association en série

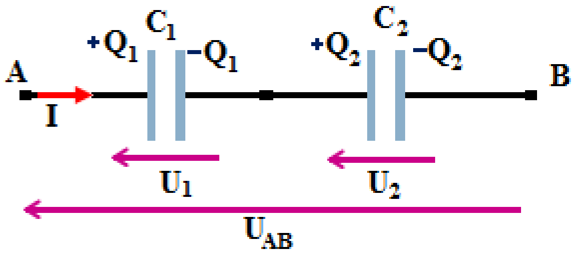
- **Charge Q des armatures**

Toutes les charges des armatures sont identiques en valeur absolue.

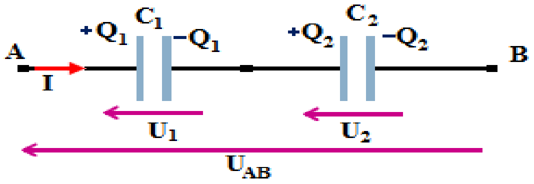
Considérons le montage ci-contre constitué de deux condensateurs ***C1*** et ***C2*** montés en série.

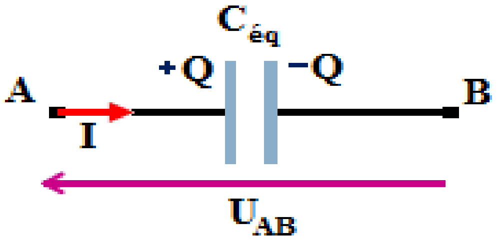
On a : *I=I1=I2* et *UAB=U1+U2*

La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire : *It = I1t = I2t* ou encore Q = *Q1* = *Q2*



- Capacité équivalente





$$U_{AB} = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Longrightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$Q = C_{eq} U_{AB} \Longrightarrow U_{AB} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$U_{AB} = U_{AB} \Leftrightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}} \Leftrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- **Généralisation**

Pour *n* condensateurs en série on a : $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$

b) Association en parallèle

- **Charge du condensateur**

Pour le montage ci-contre les deux condensateurs ***C1*** et ***C2*** montés en parallèles.

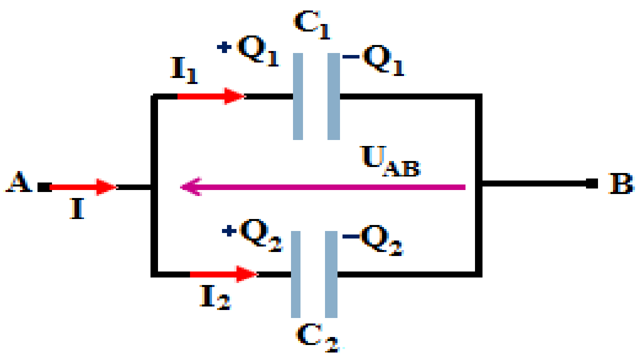
On a :*UAB=U1=U2* et *I=I1+I2*

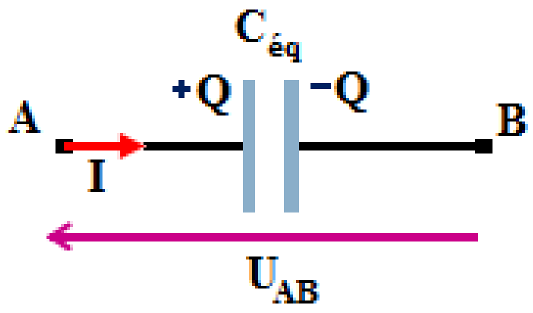
La définition de la quantité d'électricité permet d'écrire :

I=I1+I2 ⇔ *It=I1t+I2t*⇔ *Q = Q1 + Q2*

- **Capacité équivalente**

Q=Q1+Q2=C1·UAB+C2·UAB   (1)





- $Q = C_{éq} \cdot U_{AB}$ (2)

- Les équations (1) et (2) étant identiques on a : $C_{éq} = C_1 + C_2$

Généralisation : Pour n condensateurs en parallèle on a : $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$

Exemple 1 :
Un condensateur de capacité de 2 µF et un condensateur de capacité de 3 µF sont montés en série.
a) Quelles est la capacité équivalente ?
b) Une d.d.p de 500 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs et la d.d.p aux bornes de chacun d'entre eux.

Exemple 2 :
Un condensateur de capacité de 5 nF et un condensateur de capacité de 10 nF sont montés en série.
a) Quelles est la capacité équivalente ?
b) Une d.d.p de 1000 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs et la d.d.p aux bornes de chacun d'entre eux.

Corrigés

Exemple 1

Exemple 2

Chapitre 5 : Méthodes de résolution des circuits en courant continu

Connaissances	Compétences
	- **Appliquer** les lois de l'électrocinétique aux circuits linéaires en courant continu

Introduction

Ce chapitre sera l'occasion **de définir** les lois de l'électrocinétique qui permettent **de déterminer les tensions et les courants dans un circuit quelconque.**

1) Lois de Kirchhoff

a) Terminologie des circuits

Un *dipôle* est un élément de circuit relié au reste du circuit par deux bornes.

Une *branche* est un ensemble de dipôles reliés par des fils de connexion et disposés en série c'est-à-dire que chaque borne d'un dipôle n'est reliée qu'à un seul autre dipôle. L'ensemble des éléments d'un circuit électrique est appelé un *réseau*.

Un *nœud* est un point où se rejoignent au moins deux branches.

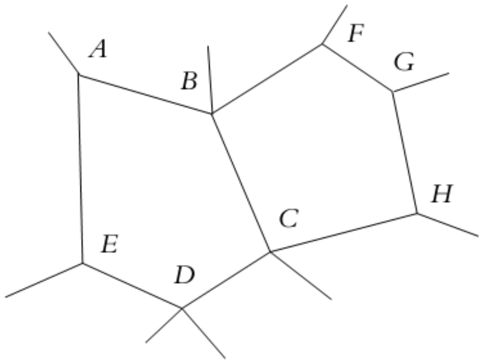
Une *maille* est un ensemble de branches se refermant sur elles-mêmes.

On a représenté une portion de circuit. Les fils dont une extrémité est libre sur le schéma sont en fait reliés à une partie du réseau non représentée.

AB, BC, CD, DE, EA, BF, FG, GH et HC sont des branches.

A, B, C, D, E, F, G et H sont des nœuds.

ABCDEA, BFGHCB et ABFGHCDEA sont des mailles

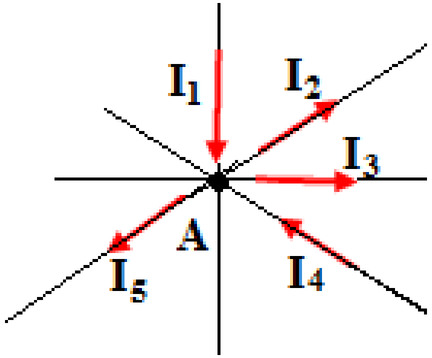


Partie d'un circuit électrique

b) Loi des nœuds

Dans l'A.R.Q.S., l'intensité est la même en tout point d'une branche du circuit. Cela signifie qu'il n'y a pas d'accumulation de charges en un point du circuit.

La loi des nœuds traduit alors le fait qu'en un nœud il ne peut y avoir accumulation de courant.



Nœud A du circuit

- *La somme algébrique des courants qui convergent en un nœud est nulle*. D'ou **I1+ I4 - I2 - I3 - I5=0**

Généralisation au cas où n branches arrivent sur le nœud N : $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k I_k = 0$

avec εk = 1 si l'intensité Ik est orientée vers le nœud N et εk = −1 si l'intensité Ik est orientée depuis le nœud N.

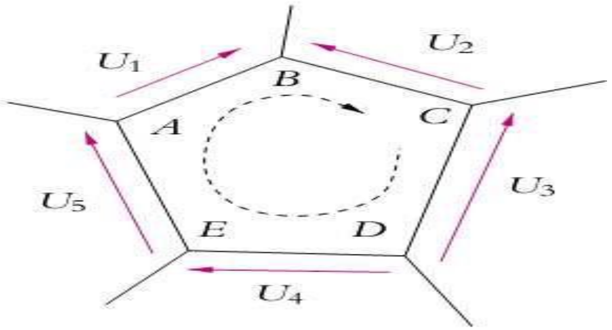
- *La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent*. **I1+ I4 = I2 + I3 + I5 soit** ∑*Ientrant* = ∑*Isortant*

c) Loi des mailles

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille comportant n branches est nulle : $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k U_k = 0$

avec εk = 1 si la tension Uk est dans le sens positif choisi et εk = −1 si la tension Uk est dans le sens opposé au sens positif choisi.

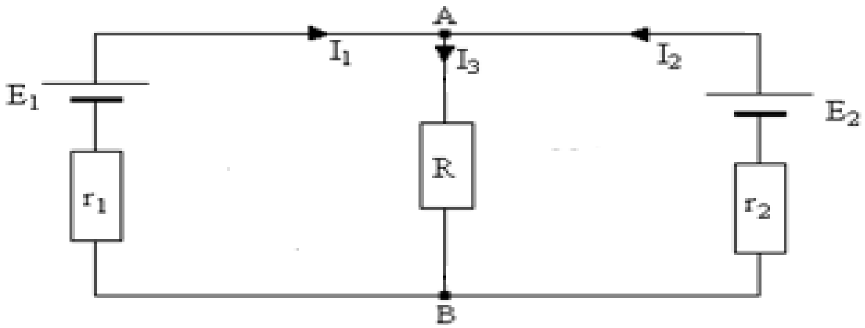


Maille à cinq branches

En pratique, on choisit un sens positif représenté par la flèche en pointillés et on obtient la relation suivante : **U1 −U2 −U3 +U4 +U5 =0**

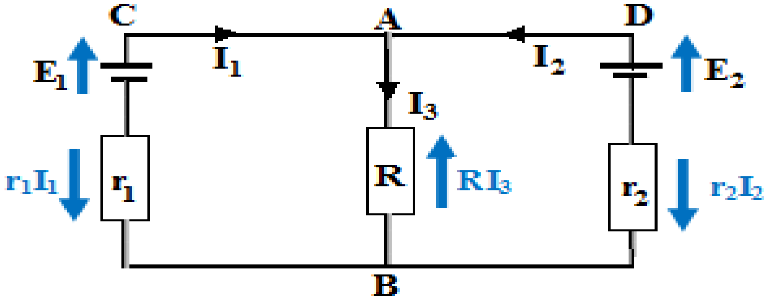
• Application 1

Calculer les courants I1, I2 et I3 ainsi que la tension UAB aux bornes de la résistance R du circuit ci- dessous. On donne : *E1=6V; E2=12V; r1=1Ω; r2=2Ω et R=10Ω*



Résolution

1) En fonction de l'orientation du courant dans chaque branche, représentons la tension aux bornes des différents dipôles en utilisant les conventions générateur et récepteur.



2) Application des lois de Kirchhoff Loi des nœuds :

nœud A *I3 =I1+I2*

Loi des mailles :

Maille1 ABCA *E1 −RI3 −r1I1 =0* ou *I*1 +10*I*3 =6

Maille2 DBCD *E1 −E2 −r1I1 +r2I2 =0* ou *I1−2I2=−6*

On obtient un système d'équations :

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_1 + 10I_3 = 6 \\ I_1 - 2I_3 = -6 \end{cases}$$

3) Résolution du système d'équations

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ I_1 + 10I_3 = 6 \\ I_1 - 2I_3 = -6 \end{cases}$$

En remplaçant I_3 dans les équations (2) et (3)

$$\begin{cases} 11I_1 + 10I_2 = 6 \\ I_1 - 2I_2 = -6 \end{cases}$$

4) Solutions du système d'équation : *I1 =−1.5A ; I2 =2.25A* et *I3 =0.75A ; UAB =R·I3 =7.5V*

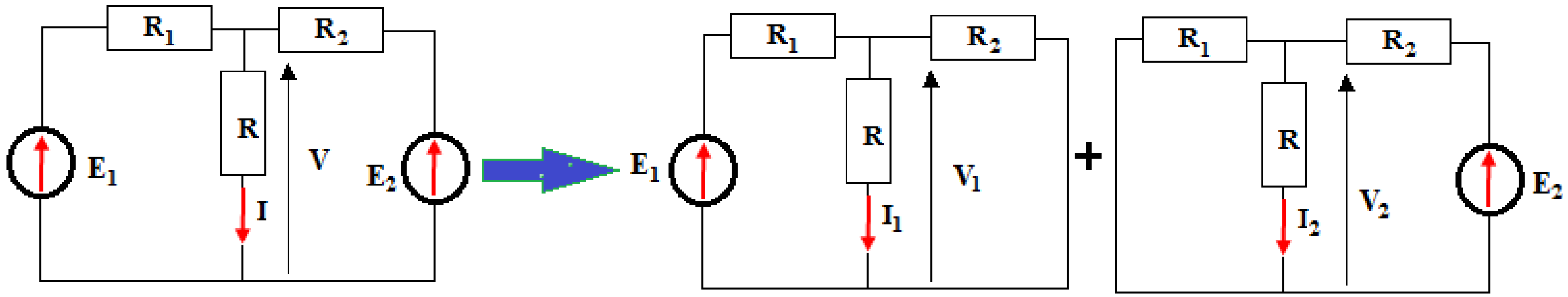
Remarque *: le signe négatif (-) de I1 signifie que sur cette branche le sens réel du courant est contraire à celui imposé sur le schéma. Sur cette branche, le générateur 1 (E1) se comporte comme un récepteur.*

2) Théorème de superposition

Il découle directement des propriétés de linéarité. Ce théorème s'applique donc aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs.

a) Énoncé

Dans un réseau linéaire alimenté par plusieurs sources indépendantes, l'intensité du courant circulant dans une branche (respectivement la tension entre 2 points) est la somme algébrique des intensités des courants (respectivement des tensions) dues à chaque source dans cette branche, les autres sources autonomes étant rendues passive.



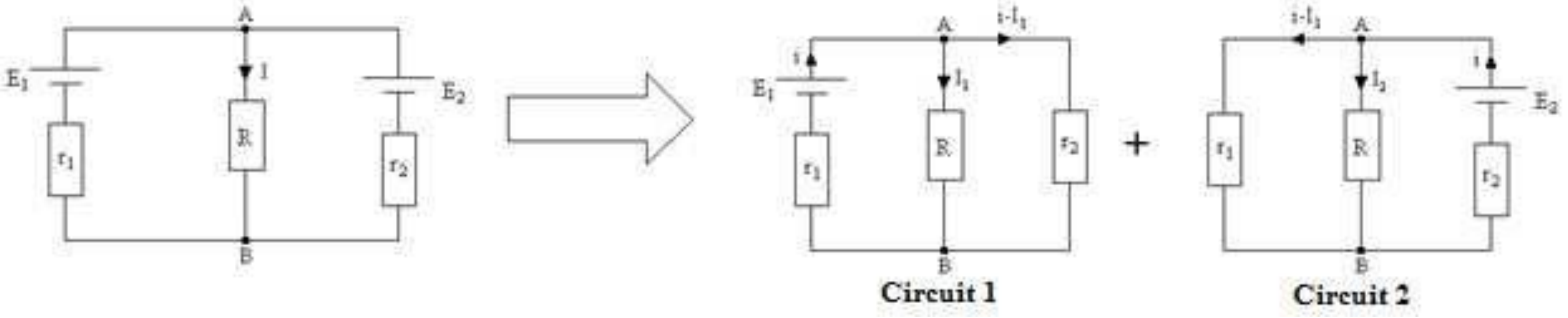
Remarque : *Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.*

b) Application 2

Calculer l'intensité du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

Résolution

Le circuit de l'exercice d'application 1 peut être transformé selon le schéma ci-dessous.



En appliquant la loi du diviseur de tension aux circuits 1 et 2, on peut calculer la tension V par le théorème de superposition.

$$V_1 = \frac{R \parallel r_2}{(R \parallel r_2) + r_1} . E_1 = \frac{5/3}{5/3 + 1} . 6 = \frac{15}{4} V$$

$$V = V_1 + V_2 = 15/2 = 7{,}5\ V$$

La loi d'Ohm permet de calculer l'intensité du courant : $\boldsymbol{I = \frac{V}{R} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75\ A}$

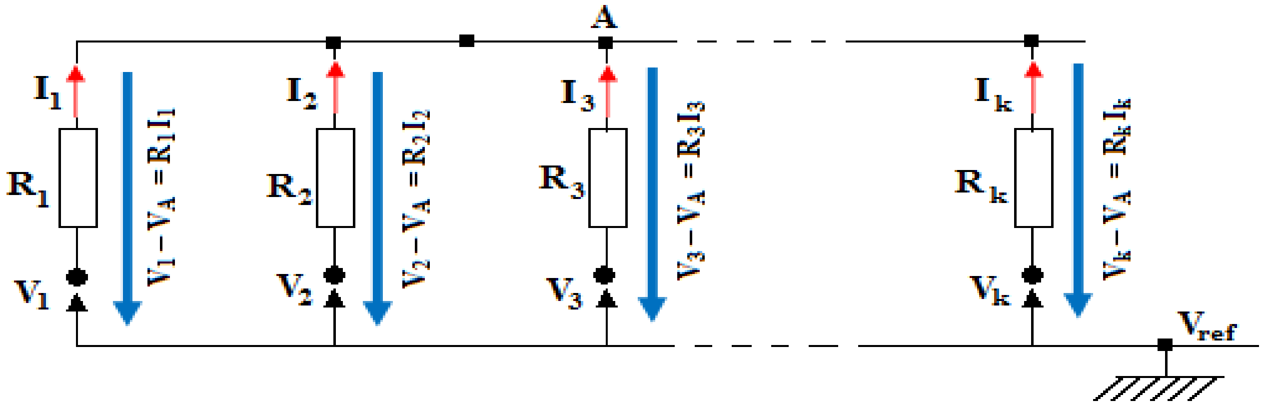
Remarque

(R // r2) et (R // r1) désignent respectivement la résistance équivalente de R et r2 et R et r1.

3) Théorème de Millman

On considère un nœud **A** d'un circuit auquel aboutissent *k* branches et vers lequel convergent tous les courants ***Ik*** des *k* branches.

Les potentiels ***Vi*** des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un *même potentiel de référence* ***Vref***. ***Ri*** est la résistance de la branche *i* et ***Gi*** sa conductance. On veut calculer le potentiel au point A en fonction des ***Ri*** et ***Vi***.



Loi des nœuds en termes de potentiels

La loi des nœuds au point ***A*** s'écrit : $\sum_{i=1}^{k} I_i = I_1 + I_2 + \cdots + I_k = 0$ Or $I_k = \frac{V_k - V_A}{R_k}$

Soit encore $\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$

A partir de l'équation précédente on peut écrire que : $V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} + \cdots + \frac{V_k}{R_k}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots . + \frac{1}{R_k}}$ Ou $V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{V_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}}$

Remarque :

Le théorème de Millman n'est qu'une façon particulière d'exprimer la loi des nœuds.

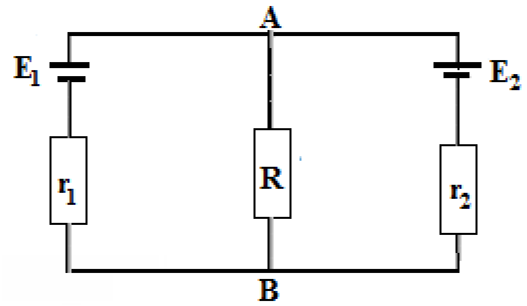
Lorsque le circuit comporte des générateurs de tension et de courant, le théorème de Millman s'écrit : $V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{E_i}{R_i} + I_{Ni}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}}$

Application 3

Calculer les courants I1, I2 et I3 ainsi que la tension UAB aux bornes de la résistance R du circuit de l'application1.On donne :*E1=6V; E2=12V; r1=1Ω; r2=2Ù et R=10Ω*

Résolution

1) Calcul du potentiel au point A On prend le point B comme origine des potentiels (***VB =Vref***). On a donc : ***E1 =6V; E2 =12V et VB=0*** V :



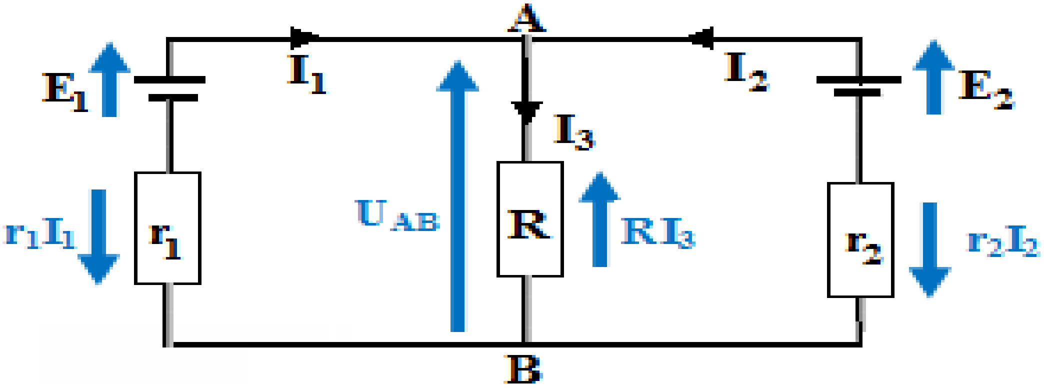
Le potentiel du point A se calcule en appliquant le théorème de Millman

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{r_1}+\frac{E_2}{r_2}+\frac{0}{R}}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{R}} \qquad \text{AN} : V_A = \frac{\frac{6}{1}+\frac{12}{2}+\frac{0}{10}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}} = 7{,}5V$$

2) Calcul de la tension UAB : *U AB =VA −VB =7.5V*

3) Calcul des courants I1, I2 et I3 à partir de la loi d'Ohm

En tenant compte de l'orientation du courant dans chaque branche, on représente la tension aux bornes des différents dipôles en utilisant les conventions générateur et récepteurs.



Pour la branche contenant R : $U_{AB} = V_A - V_B = R.I_3 = 7{,}5V \Rightarrow I_3 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75A$

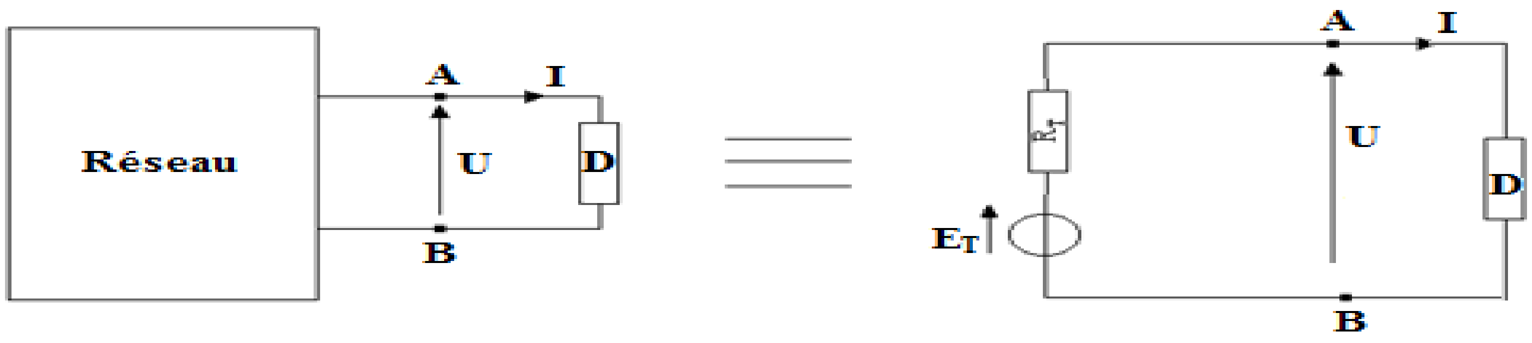
Pour la branche contenant E_1 : $U_{AB} = E_1 - r_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{r_1} = \frac{6-7{,}5}{1} = -1{,}5A$

Pour la branche contenant E_2 : $U_{AB} = E_2 - r_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{r_2} = \frac{12-7{,}5}{2} = 2{,}25A$

4) Théorème de Thevenin

a) Enoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par un générateur de tension de f.é.m. ET et de résistance interne RT.



ET est la tension mesurée à vide entre A et B

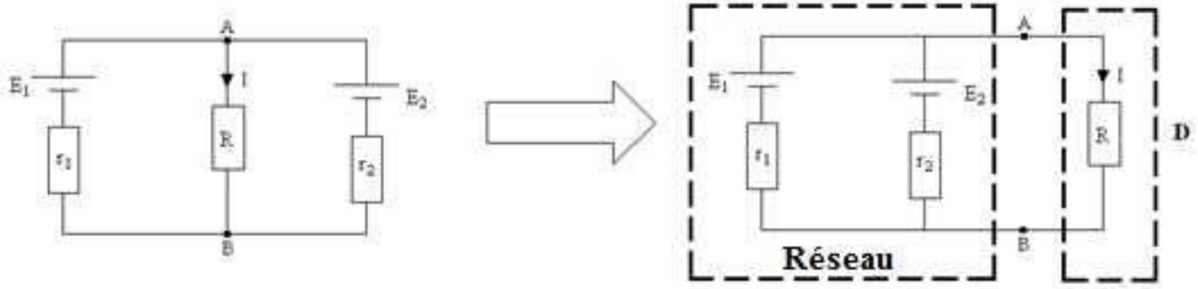
RT est la résistance mesurée entre A et B quand D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont remplacés par leurs résistances internes (les f.é.m. sont remplacées par des courts-circuits et les sources de courant sont enlevées et toute branche qui en contenait une reste ouverte)

b) Application 4

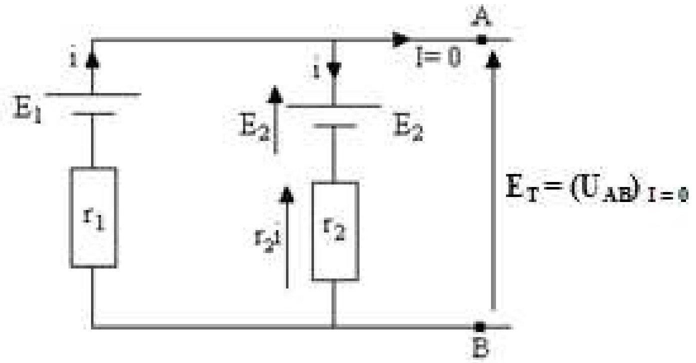
Calculer l'intensité du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

Résolution

Le circuit de l'exercice de l'application 1 peut être transformé selon le schéma ci-dessous.



1) Calcul de la tension de Thevenin



Pour calculer la tension de Thevenin on peut utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous

- **Loi de Kirchhoff**

La loi d'additivité des tensions donne : $E_T = E_2 + r_2\, i$

Appliquons la loi des mailles au circuit série: $(r_2 + r_1).i = E_1 + E_2$ soit $i = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}$

$E_T = E_2 + r_2.\left(\frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2}\right) = \frac{E_2.r_1 + E_1.r_2}{r_1 + r_2}$ AN $E_T = 8V$

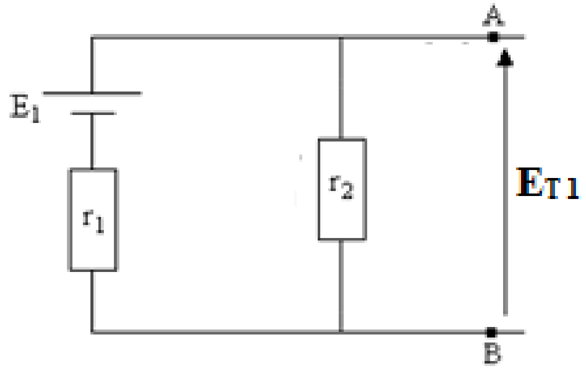
- **Théorème de Millman**

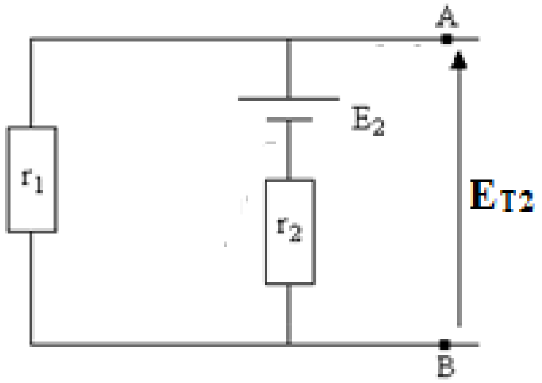
Le théorème de Millman appliqué au point A en prenant le point B comme référence des potentiels donne :

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1 + r_2} \quad AN\ V_A = \frac{12+12}{3} = 8V$$

- **Théorème de superposition**

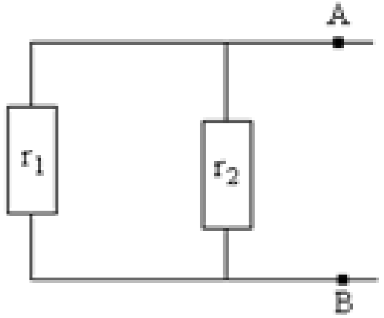
En appliquant la loi du diviseur de tension aux circuits 1 et 2, on peut calculer la tension de Thévenin par le théorème de superposition.





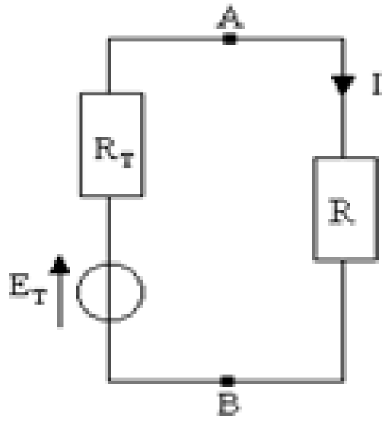
$E_{T1} = \frac{r_2}{r_2+r_1} E_1$ et $E_{T2} = \frac{r_1}{r_2+r_1} E_2$ soit $E_T = E_{T1} + E_{T2} = \frac{r_2 E_1 + r_1 E_2}{r_1+r_2}$

2) Calcul de la résistance de Thevenin



Les deux résistances sont montées en parallèle donc $R_T = \frac{r_1 . r_2}{r_1+r_2}$ $AN\ R_T = \frac{2}{3}\Omega$

3) Générateur de Thevenin

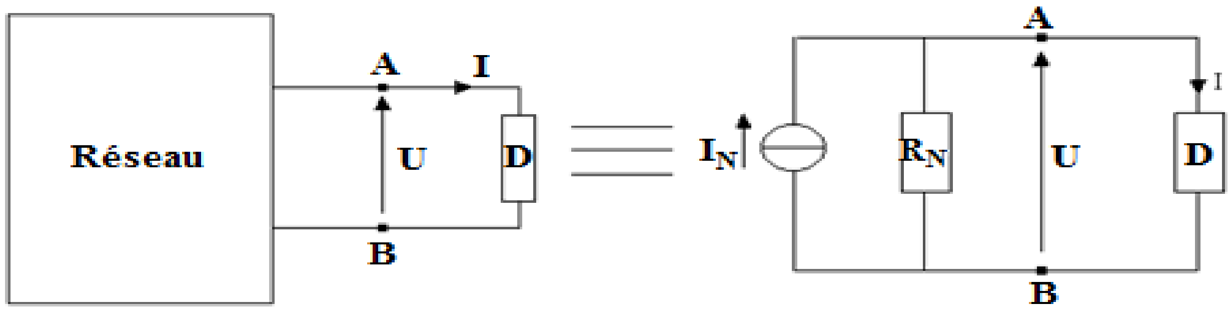


En appliquant la loi des mailles au générateur de Thevenin, on peut calculer le courant qui traverse la résistance ***R*** on obtient : $I = \frac{E_T}{R_T+R}$ $\quad AN : I = 0,75A$

5) Théorème de Norton

a) Énoncé

Un réseau linéaire, vu entre deux bornes A et B, peut être remplacé par une source de courant d'intensité IN et de résistance interne RN.



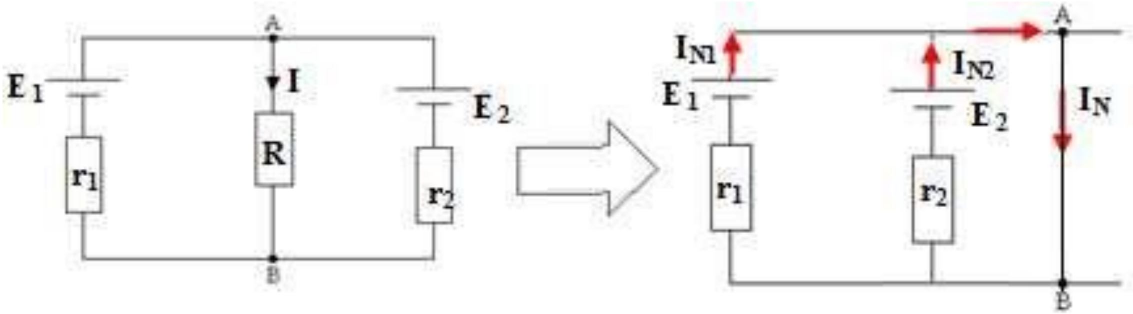
IN est le courant de court-circuit entre A et B

RN est la résistance mesurée entre A et B lorsque le dipôle D est retiré du circuit et que tous les générateurs du réseau sont passives (remplacés par leurs résistances internes).

b) Application 5

Calculer l'intensité I du courant qui circule entre A et B dans la résistance R de l'application 1.

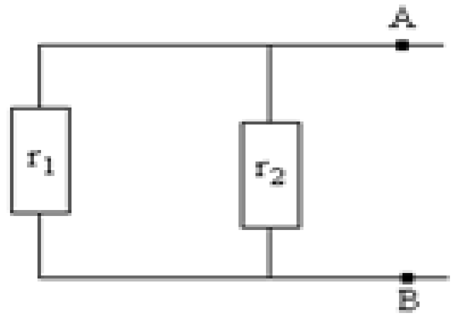
1) Calcul du courant de Norton



Sur chaque branche nous pouvons déterminer le courant de Norton **IN1 et IN2.**

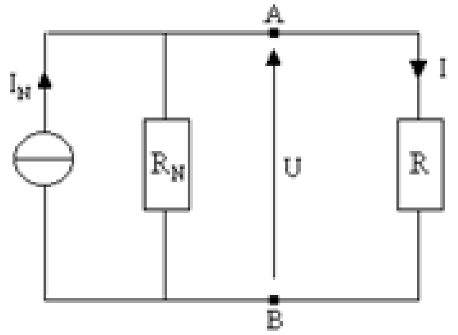
$I_N = I_{N1} + I_{N2}$ et $I_N = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}$ soit $I_N = \frac{E_1 r_1 + E_2 r_2}{r_1 r_2}$ AN : $I_N = I_1 + I_2 = 12A$

2) Calcul de la résistance de Norton



Les deux résistances sont montées en parallèle donc $R_N = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ $AN : R_N = \frac{2}{3}\Omega$

3) Générateur de Norton

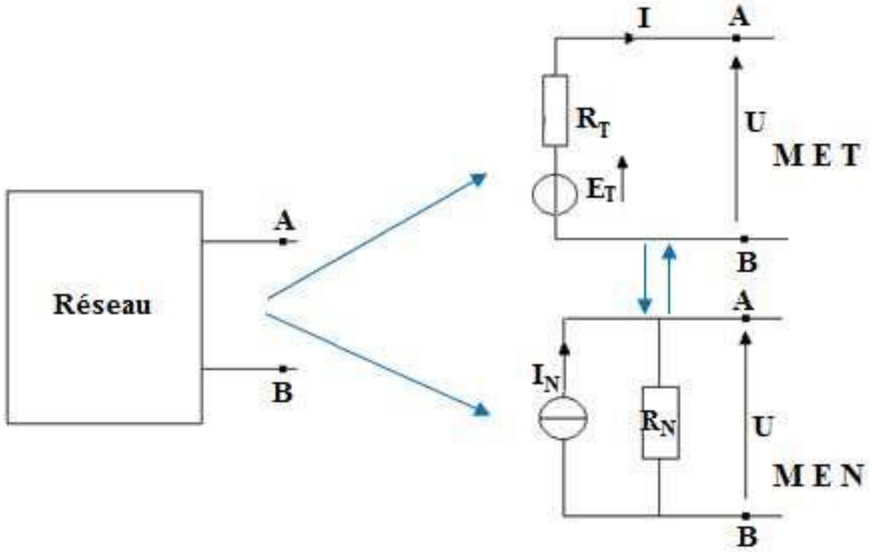


En appliquant la loi du diviseur de courant au circuit équivalent on obtient : $I = \frac{R_N}{R_N+R} I_N$

AN I=0 ,75 A

Remarque

Le théorème de Norton est la transformation duale du théorème de Thevenin.
La connaissance d'un modèle équivalent permet la déduction immédiate du modèle dual car RN = RT et *ET =RT ·IN*



La source de tension (E_T,R_T) est remplacée par une source de courant (I_N ,R_N) $I_N = \frac{E_T}{R_T} = \frac{E_T}{R_T} = E_T G_N$

Merci de votre aimable attention