MECANIQUE DU POINT

Dr Oumar BAILOU

Spécialité : Énergétique, Thermique et Génie des Procédés,
Laboratoire de physique chimie et l'Environnement
Mail : oumar.bailou@aims-senegal.org ; Tel : 79 66 59 84

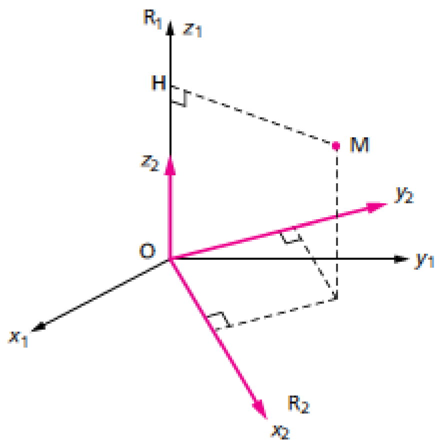
CHAPITRE I : REPERAGE D'UN POINT MATERIEL

Introduction

L'objet de la mécanique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les actions qui les déterminent et les conséquences qui en résultent.

Le mouvement se définit comme le changement de position d'un corps par rapport à un repère d'espace, changement s'effectuant au cours du temps. Ainsi, l'association des deux notions fondamentales *espace* et *temps* en mécanique classique introduit la notion de mouvement.

La description d'un mouvement suppose la présence d'un observateur qui devrait être muni d'une horloge et d'un solide de référence auquel sera généralement lié un système orthogonal.



I- Les referentiels

1- Mesure du temps.

La mesure du temps suppose implicitement une orientation du temps du passé vers le futur. Pour être complet, la mesure du temps exige le choix d'une origine. Celle-ci sera prise conventionnellement à un instant donné de l'évolution du phénomène étudié. Il apparait donc naturel d'adopter comme instant initial, l'instant pour lequel l'état du système est connu. Les instants ultérieurs correspondent alors à l'évolution du système vers le futur où le mouvement est encore inconnu. On mesure le temps à l'aide d'une horloge.

2- Les référentiels et les repères

Il est utile de préciser la signification de ces notions, souvent mélangées.

- **Référentiel**

Une expérience se déroule dans un système matériel rigide qui constitue le référentiel. Ce peut être l'amphithéâtre où se déroule ce cours, un train, un avion …la lune …. L'observateur est couramment lié à ce référentiel, mais ce n'est pas obligatoire.

- **Repère**

Pour repérer un mobile dans un référentiel, il faut définir une origine fixe, et trois axes fixes dans ce référentiel. Ils constituent le repère lié au référentiel. Les axes ne sont pas forcément orthogonaux, mais ils ne doivent pas être coplanaires afin de pouvoir étudier des mouvements à 3 dimensions, cas le plus général.

a- Le repère d'espace

Un repère d'espace est toujours lié à un observateur qui définit un système de trois axes de coordonnées à savoir ***Ox, Oy, Oz*** en associant *4 points suffisamment petits d'un espace affine Euclidien à 3D* ou *4 étoiles lointaines*. Un des points est pris comme origine O du repère et est associé à une base formée de 3 vecteurs $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_k}\right)$ ou $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On le note:

$$R = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_k}\right) \text{ ou } R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$

b- Les différents types de repères d'espace

Le repère de ***Copernic*** est le repère d'espace qui à pour origine le soleil et qui est dirigé vers trois étoiles lointaines fixes. Dans ce repère, les directions soleil-étoiles doivent etre orthogonales 2 à 2. Le repère de Copernic est le repère de référence.

Tous les autres repères se déduisent du repère de Copernic par des transformations géométriques qui sont appelées déplacements (translation, rotation, …). Il existe deux types de référentiels:

- **Les référentiels galiléens**

Ce sont des repères pour lesquels l'espace est homogène et isotrope, et le temps est uniforme (absolu). Ils ont une accélération nulle dans le repère de Copernic (translation ou rotation uniforme).

- **Les repères relatifs**

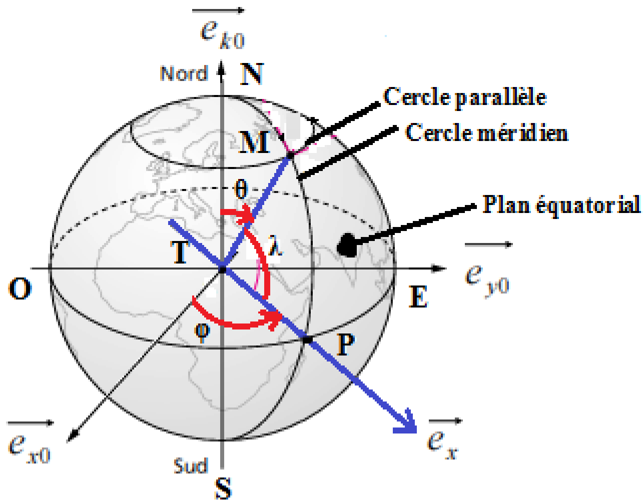
Ce sont des référentiels qui peuvent avoir des mouvements accélérés ou des rotations finies par rapport au repère de Copernic qui est un repère de référence.

c- Les repères terrestres

Les repères terrestres sont des repères d'espace qui sont établis à partir de points fixes sur la terre (mur d'un laboratoire, montagne, poteau, …).

d- Le repère géocentrique

C'est un repère qui à pour origine le centre de la terre et dont les axes sont parallèles à ceux du repère de Copernic. On le note : $\left(T, \overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$



- On appelle plan méridien ou cercle méridien, le cercle passant par un point situé à la surface de la terre et dont le diamètre est l'axe des pôles (N-S).
- On appelle cercle parallèle, le cercle passant par le point M et qui est parallèle au plan de l'équateur.

<u>Coordonnées géométriques d'un point situé à la surface de la terre</u>.

- On appelle ***longitude*** ou ***azimut*** d'un point, l'angle du demi méridien contenant M par rapport au demi () méridien contenant x_0. C'est l'angle **φ** que fait la projection de $\overrightarrow{TM}$ sur le plan équatorial avec $\overrightarrow{e_{x0}}$: $\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_x})$.
- On appelle latitude λ, le complémentaire de la co-latitude $\theta = (\overrightarrow{e_{z0}}, \overrightarrow{TM})$: $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$

  $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 0$ correspond au plan equatorial.

II- Determination des composantes d'un vecteur

Bien que purement technique, la détermination des composantes d'un vecteur est capitale pour traduire les lois physiques de nature vectorielle.

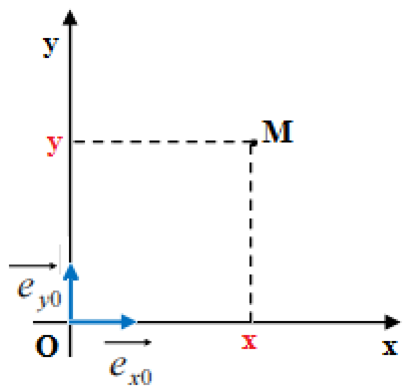
1- Système usuel de coordonnées

Pour quantifier les mesures, le plus évident consiste à prendre un système d'axes orthonormé lié au repère qui permettra de déterminer les composantes du mouvement (position, vitesse, …) et des forces. Mais ce n'est pas la seule possibilité. De nombreux problèmes sont plus simples en utilisant un système de coordonnées cylindrique, sphérique …

Dans tous les cas il faudra définir une origine et 3 vecteurs unitaires qui définiront les directions des axes. Ces vecteurs constituent la base.

Attention, cette origine et les vecteurs ne sont pas forcément fixe par rapport au repère. Tout ceci s'éclairera plus tard.

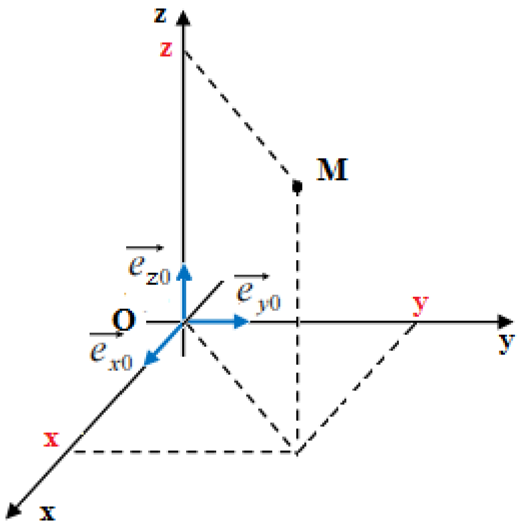
a- Coordonnées cartésiennes



Dans le plan x,o,y, défini par 2 axes rectangulaires Ox, Oy, la position d'un point M est déterminée par x et y qui sont deux nombres algébriques appelés coordonnées cartésiennes de M ou composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_{x0}} + dy\overrightarrow{e_{y0}}$$

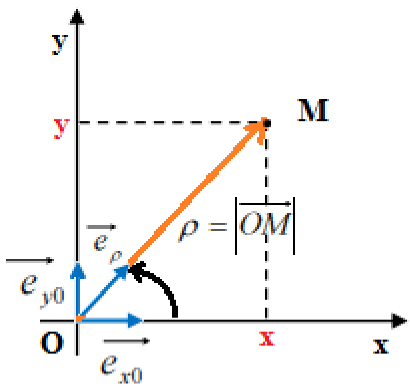


Dans l'espace ordinaire de dimension trois, la position de M sera déterminée en adjoignant aux deux précédentes x et y une troisième qui mesure la cote du point M et qui est noté z.

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

b- Coordonnées polaires



Si le problème étudié possède une symétrie de révolution autour d'un point O, il est commode d'utiliser les coordonnées polaires *(ρ,φ)*.

$\rho = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ = distance O à M

$\varphi = \left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{OM}\right)$. En notant $\overrightarrow{e_\rho}$ le vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{OM}$, on à : $\varphi = \left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho}\right)$

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = \rho\left(\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}\right)$ avec $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}$

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}}$ $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$

En élevant les deux expressions de $\overrightarrow{OM}$ au carré et en les égalant on a :

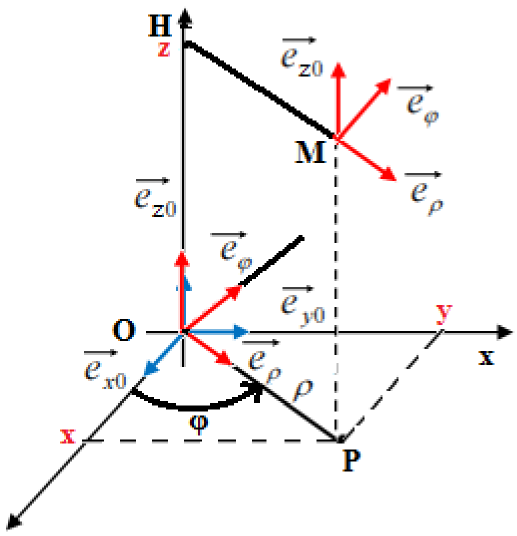
$$\overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{OM}^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

c- Coordonnées cylindrique

Lorsque le problème étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe, les coordonnées cylindriques sont les plus indiquées. On détermine la position d'un point M dans l'espace (dimension 3) en associant aux deux coordonnées polaires *(ρ,φ)* et une troisième *z* qui fixe la côte du point M.

(ρ,φ,z) sont donc les coordonnées cylindriques du point M



Dans la base $\left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} \quad (1)$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

Or $\varphi = \left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho}\right)$ et $\rho\overrightarrow{e_\rho} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}$

Dans la base $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$:

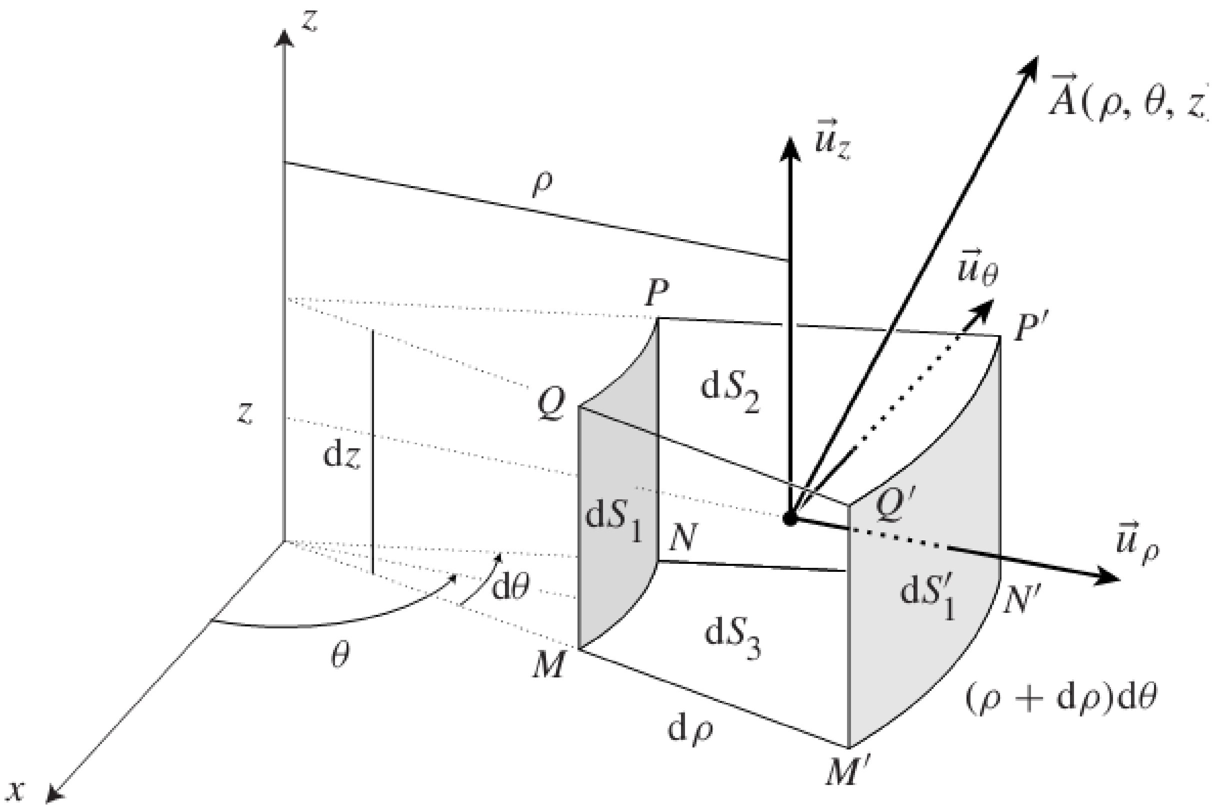
$\overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_{z0}}$;

$\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_{z0}} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$; $\quad \overrightarrow{e_{z0}} = \overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_{z0}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

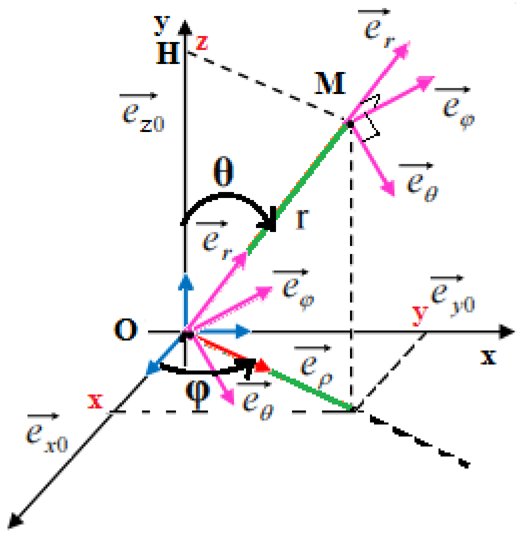
$$(1) = (2) \Leftrightarrow x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} = \rho\cos\phi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\phi\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + z^2 \\ \overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases}$$



d- Coordonnées sphérique

Lorsque le problème étudié présente une symétrie sphérique autour d'un point O, il est commode de repérer les points de l'espace par un système de coordonnées sphérique ***(r, θ, φ).***
r désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ ou distance de O à M, ***θ*** et ***φ*** sont deux angles qui fixent la position du rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Dans la base $(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}})$ on a :
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$ (1)

Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ on a : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho})$, $\theta = (\overrightarrow{e_{z0}}, \overrightarrow{OM})$

$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_{z0}} + \sin\theta\overrightarrow{e_\rho}$ et $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}$

Dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$: $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$$= r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}} + r\cos\theta\overrightarrow{e_{z0}}$$

$\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$;

(2)

$\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r}$; $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$

(1)=(2) $\Leftrightarrow$

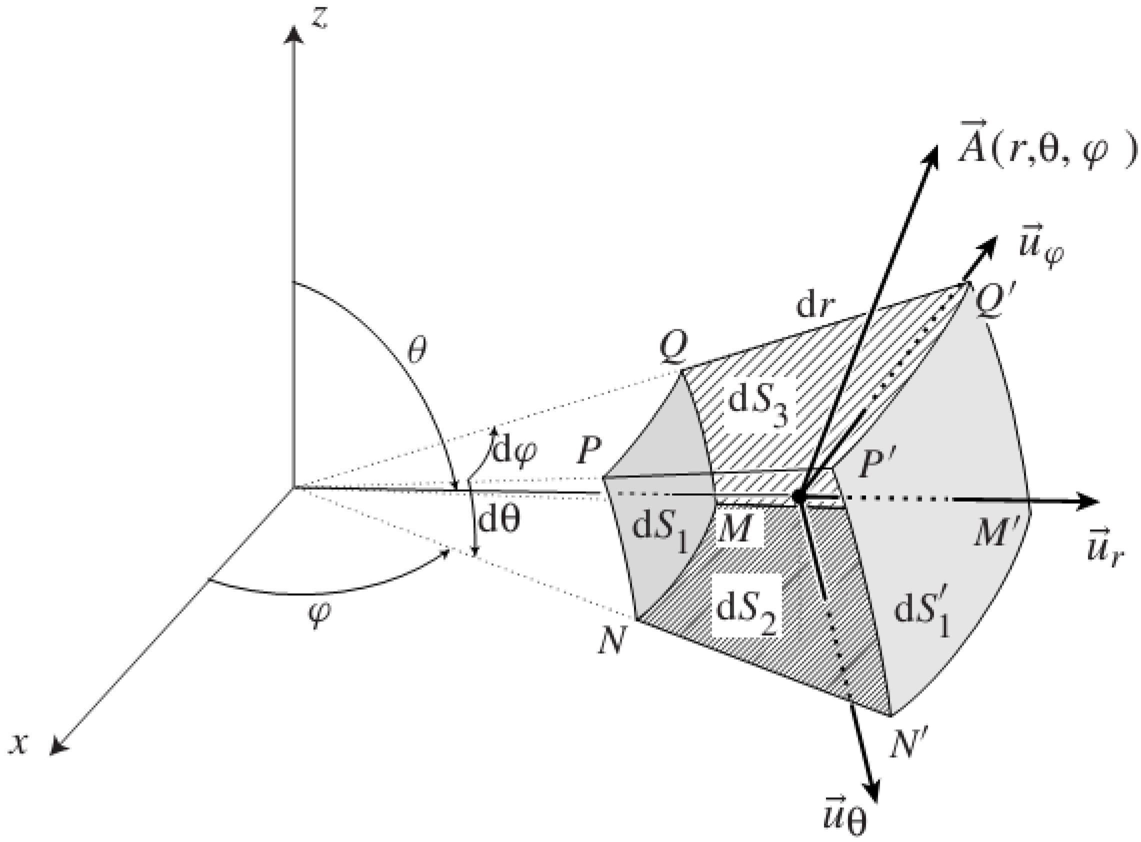
$$x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} = r\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + r\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}} + r\cos\theta\overrightarrow{e_{z0}}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{y}}{x}\right)$$

$$x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

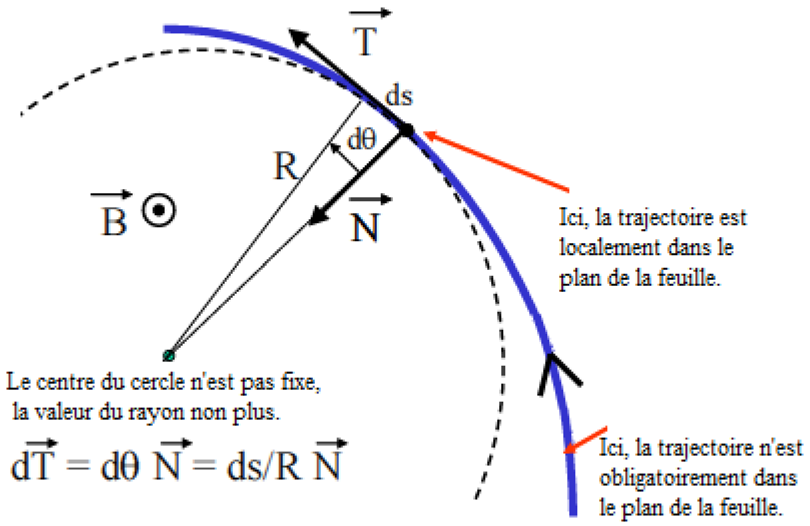
$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$



e- Coordonnées curvilignes ou repère de Frenet.

Le repère de Frenet est un repère local uniquement défini à partir des caractéristiques de la trajectoire C au point M. Certaines relations et propriétés s'expriment très simplement dans ce repère.

A un instant donné, il est toujours possible de définir un **plan osculateur** qui contient localement la trajectoire C du point.



Trois vecteurs unitaires sont alors définis de la manière suivante :

$\vec{\mathrm{T}}$: tangent à la trajectoire C, donc dans le plan osculateur, orienté dans le sens du mouvement

$\vec{\mathrm{N}}$: normal à $\vec{\mathrm{T}}$ et donc à la trajectoire C, lui aussi dans le plan osculateur. Il est défini par la relation, maintenant classique, de la différentielle d'un vecteur unitaire qui tourne dans un plan : $d\vec{\mathrm{T}} = d\theta.\vec{\mathrm{N}}$

En définissant l'abscisse curviligne s, distance mesurée sur la trajectoire à partir d'une origine quelconque, et *R* le rayon de courbure de C au point M, l'angle $d\theta$ peut s'écrire $ds = R.d\theta$ d'où la définition plus classique :

$$\frac{\vec{\mathrm{N}}}{R} = \frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds} \quad \text{définition de } \vec{\mathrm{N}}.$$

$\vec{\mathrm{N}}$ *est dirigé vers la concavité de la courbe: par exemple si C est un cercle,* $\vec{\mathrm{N}}$ *est dirigé vers son centre.*

$\vec{\mathrm{B}}$ est le vecteur binormal, qui respecte: $\vec{\mathrm{B}} = \vec{T} \wedge \vec{N}$.

$\vec{\mathrm{B}}$ est normal au plan osculateur puisqu'il est normal à $\vec{\mathrm{T}}$ et $\vec{\mathrm{N}}$, qui sont tous les deux dans le plan osculateur.

f- Déplacement élémentaire

Soit M un point de l'espace affine. On appelle système de coordonnées dans l'espace affine tout mode de définition d'un point *M* de cet espace en fonction de n scalaires $\boldsymbol{q_i}$ qu'on appelle *coordonnées curvilignes du point M.*

$$\overrightarrow{OM} = q_1\vec{e_1} + q_2\vec{e_2} + q_3\vec{e_3}$$

Coord Cart : $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$; Coord Cylin : $\overrightarrow{OM}(\rho, \varphi, z)$; Coord Sph: $\overrightarrow{OM}(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} \mathrm{q}_1 = x & \vec{\mathrm{e}_1} = \vec{\mathrm{e}_x} \\ \mathrm{q}_2 = y & \vec{\mathrm{e}_2} = \vec{\mathrm{e}_y} \\ \mathrm{q}_3 = z & \vec{\mathrm{e}_3} = \vec{\mathrm{e}_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{q}_1 = \rho & \vec{\mathrm{e}_1} = \vec{\mathrm{e}_\rho} \\ \mathrm{q}_2 = \varphi & \vec{\mathrm{e}_2} = \vec{\mathrm{e}_\varphi} \\ \mathrm{q}_3 = z & \vec{\mathrm{e}_3} = \vec{\mathrm{e}_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{q}_1 = r & \vec{\mathrm{e}_1} = \vec{\mathrm{e}_r} \\ \mathrm{q}_2 = \theta & \vec{\mathrm{e}_2} = \vec{\mathrm{e}_\theta} \\ \mathrm{q}_3 = \varphi & \vec{\mathrm{e}_3} = \vec{\mathrm{e}_\varphi} \end{cases}.$$

On appelle déplacement élémentaire de M, la variation $d\overrightarrow{OM}$:

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_3}dq_3$$

Posons : $\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = h_i \cdot \overrightarrow{e_i}$; $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur unitaire et $h_i = \left|\dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\right|$ est appelé ***facteur métrique.***

Exemple : $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{c} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$

$$q_1 = r \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\left|\begin{array}{c} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}\right| = 1; \qquad h_1 = h_r = 1$$

$$q_2 = \theta \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\left|\begin{array}{c} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}\right| = r; \qquad h_2 = h_\theta = r \ ;$$

$$q_3 = \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\left|\begin{array}{c} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}\right| = r\sin\theta; \qquad h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$$

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_3}dq_3 = h_1 dq_1 \overrightarrow{e_1} + h_2 dq_2 \overrightarrow{e_2} + h_3 dq_3 \overrightarrow{e_3}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

- **Produit de 2 déplacements élémentaires**

Le produit de deux déplacements élémentaires est une surface.

$$dS_1 = h_2 dq_2 \cdot h_3 dq_3 = rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta . d\theta d\varphi$$

$$dS_2 = h_1 dq_1 \cdot h_3 dq_3 = dr \cdot r\sin\theta d\varphi = r\sin\theta . drd\varphi$$

$$dS_3 = h_1 dq_1 \cdot h_2 dq_2 = dr \cdot rd\theta = r.drd\theta$$

- **Produit de trois déplacements élémentaires**

Le produit de trois déplacements élémentaires est un volume.

$$dV = h_1 h_2 . h_3 . dq_1 dq_2 dq_3 = r^2 \sin\theta . drd\theta d\varphi$$

Exercice d'application

1. Reprendre le calcul pour coordonnées cylindriques et cartésiennes.
2. On considère le vecteur $\vec{F}$ définit par $\vec{F} = (8xy - 3z^2)\overrightarrow{e_{x0}} + (4x^2 - 3z^2)\overrightarrow{e_{y0}} - 6z(x - y)\overrightarrow{e_{z0}}$.

   Calculer $d\vec{F}$, dS_2 , dS_3 , dV .

CHAPITRE II : CINEMATIQUE DU POINT

La cinématique, tout comme le cinéma, a pour origine le mot grec « kinhma» qui signifie « mouvement ». La cinématique est en effet la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps en fonction du temps, en faisant abstraction des forces à l'origine de ces mouvements.

I- Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps

Pour décrire plus simplement les mouvements d'un corps, on assimile souvent ce dernier à un point qu'on nomme point matériel. En fait un corps matériel peut être assimilé à un point s'il ne roule pas sur lui-même et si ses dimensions caractéristiques sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt. Notons enfin qu'un point matériel est un point géométrique dont la position peut être parfaitement définie par trois coordonnées seulement.

1- Repérage d'un point dans l'espace

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide S supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le référentiel d'étude R.

Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un repère orthonormé direct, soit un point origine particulier au solide S (souvent on prend le centre de gravité de S) et 3 axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou systèmes de coordonnées peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.

Un bon schéma est la clef de la résolution de tout problème de mécanique. Comme l'objectif est de décrire ici des mouvements dans l'espace, il est particulièrement important de savoir faire des dessins en perspective, et de savoir réaliser des projections adéquates selon des plans bien choisis. C'est ce qui sera détaillé dans la présentation des systèmes de coordonnées.

a- Le système de coordonnées cartésiennes

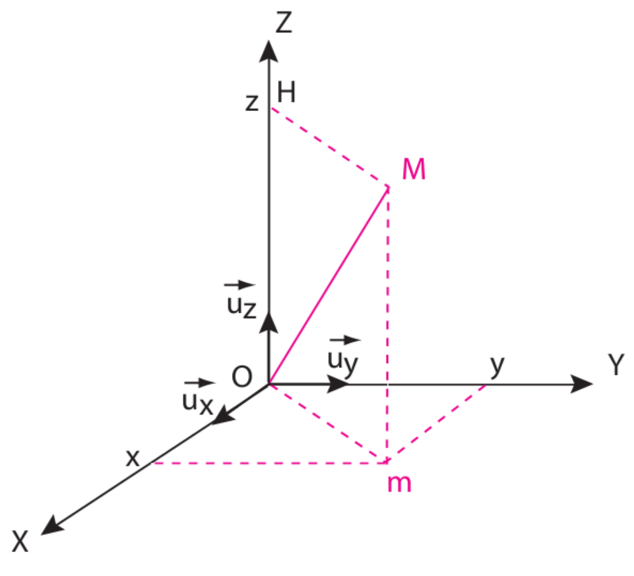
On considère un repère constitué de trois axes X, Y, Z rattachés à un point origine O caractéristique du solide de référence (R) évoqué plus haut. À ce repère on associe une base orthonormée directe $\left(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$. Les vecteurs $\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ sont alors les vecteurs unitaires des axes OX, OY et OZ respectivement.

Remarque : À un instant donné, on note la position du point M par le vecteur $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$

Qui s'appelle le vecteur position. On note également les coordonnées cartésiennes x, y et z du point M qui sont définies par la relation suivante : $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z$

Les coordonnées x, y et z sont des grandeurs algébriques positives ou négatives.

Dessin : Pour représenter ce système de coordonnées, on marque d'abord le point matériel M. Ensuite on projette ce point M sur l'axe OZ : on obtient alors le point H de coordonnée z sur l'axe OZ. On projette M orthogonalement dans le plan (OX, OY) en traçant une parallèle à l'axe OZ passant par M : on obtient alors le point m. On trace alors les droites passant par M et parallèles aux axes OX et OY : les intersections de ces droites avec les axes OX et OY donnent les coordonnées x et y du point M, figure 1.



Représentation du système de coordonnées cartésiennes dans le repère $\left(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$ cas du point M de coordonnées (x, y, z), et du vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$

Figure 1 : Système de coordonnées cartésiennes

b- Le système de coordonnées cylindriques

La position du point M est ici définie dans un repère $\left(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$. On introduit ici la base $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$orthonormée directe, associée aux coordonnées cylindriques (ρ, φ, z).

DESSIN : Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note H et M les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OY) respectivement. Le point H a pour cote z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ. On note Om = ρ et l'angle entre l'axe OX et Om est appelé φ, figure 2.

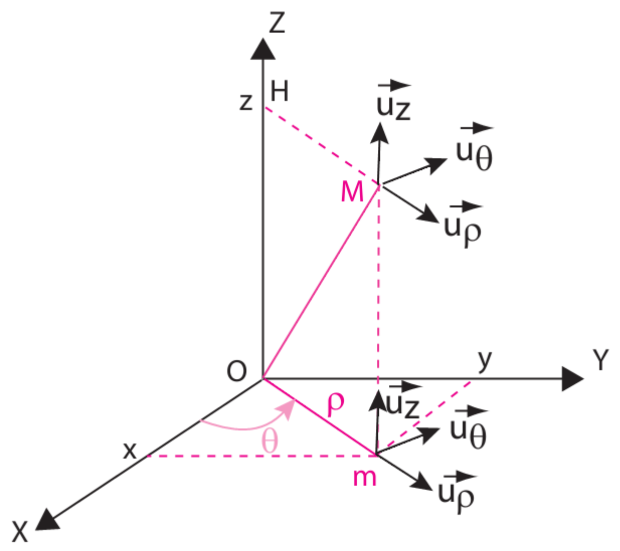
Les vecteurs de cette base sont définis comme suit :

1. $\vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{\rho}$ dans le plan (OX, OY) ; $\vec{u}_\rho$ est appelé vecteur radial ;
2. $\vec{u}_\varphi$ est obtenu par rotation de +π/2 dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$, dans le plan OX, OY). $\vec{u}_\varphi$ est appelé vecteur orthoradial ;
3. $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur de l'axe OZ, identique à celui du repère associé aux coordonnées cartésiennes.

À noter que ce repère n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel R. Le repère cylindrique est associé au point M, c'est donc un repère local mobile. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$

Les coordonnées cylindriques sont définies comme suit : θ est une distance donc toujours positive ; la cote zest une valeur algébrique (positive ou négative) ; l'angle φ est orienté dans le sens (+) défini en imaginant une rotation de l'axe OX vers l'axe OY.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées cylindriques décrivent les intervalles suivants : $\rho \in [0;+\infty[$, $\varphi \in [0;2\pi]$et $z \in]-\infty;+\infty[$



Représentation du système de coordonnées cylindriques dans le repère $\left(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$: cas du point M de coordonnées (ρ, φ, z), et du vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.

Figure 2 : Système de coordonnées cylindriques

Remarques :

- Si le mouvement a lieu dans le plan (OX, OY), il n'est pas nécessaire d'utiliser la cote z. On utilise alors les coordonnées polaires (ρ, angle polaire φ). Ainsi, les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires auxquelles on ajoute la cotez : on parle parfois de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires ;
- Lorsqu'on dérive un vecteur par rapport à son angle polaire, on obtient un vecteur directement perpendiculaire (formant un angle de + 90° dans le sens trigonométrique). Ainsi, dans les systèmes cylindrique et polaire, on a : $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}=\vec{u}_\varphi$ et $\dfrac{d^2\vec{u}_\rho}{d\varphi^2}=\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}=-\vec{u}_\rho$

c- Le système de coordonnées sphériques

La position du point M est ici définie dans un repère $\left(O,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$. On introduit ici la base $\left(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi\right)$orthonormée directe, associée aux coordonnées sphériques (r, θ, φ).

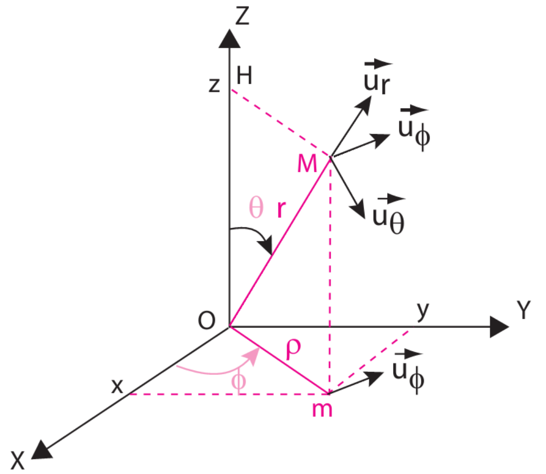
Dessin : Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note H et m les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OY) respectivement. Le point H a pour cote z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ (Figure 3).

- La distance entre O et M est notée r, soit r=OM ;
- l'angle entre l'axe OZ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est noté θ et est appelé colatitude ;

- l'angle entre l'axe OX et Om est noté φ et est appelé longitude.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées sphériques décrivent les intervalles suivants : $r \in [0;+\infty[$, $\theta \in [0;\pi]$ et $\varphi \in [0;2\pi]$

Les coordonnées sphériques et les vecteurs de la base sphérique sont représentés dans la figure ci-dessous. À noter que le repère sphérique n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel R. Le repère sphérique est associé au point M, c'est donc un repère local mobile. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit dans la base sphérique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r$



Représentation du système de coordonnées sphériques dans le repère $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ cas du point M de coordonnées (r, θ, φ), et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r$.

Figure 3 : Système de coordonnées sphériques

Pour comprendre les orientations relatives des vecteurs de la base sphérique, il est important de faire des représentations dans des plans judicieusement choisis. Une représentation en vue aérienne dans le plan (OX, OY) permet de comprendre l'orientation du vecteur $\vec{u}_\varphi$ notamment par rapport aux vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ (Figure 4).

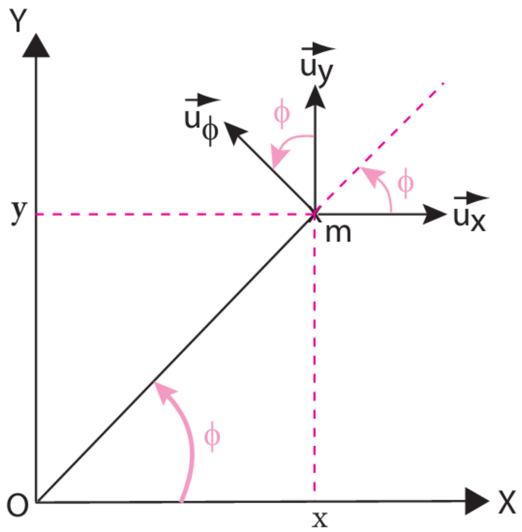


Figure 4 : Vue du plan (OX, OY)

On peut également représenter une vue dans le plan (Om, OZ) pour comprendre l'orientation du vecteur $\vec{u}_\theta$ (Figure 5). Le vecteur $\vec{u}_\varphi$ est représenté avec une croix dans un cercle car il est perpendiculaire au plan de la figure, orienté comme « entrant dans le plan ».

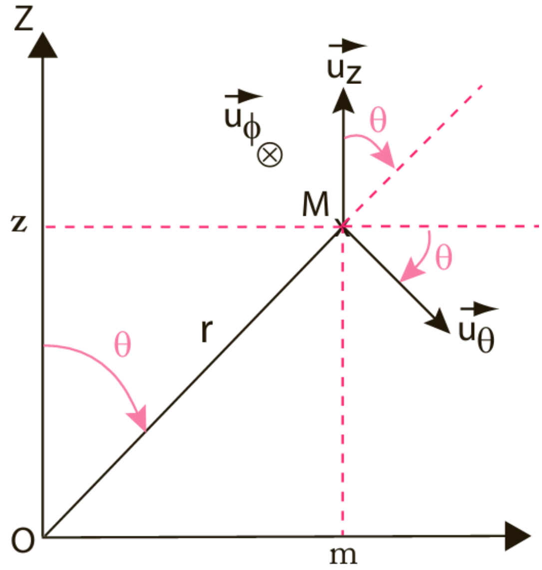


Figure 5 : Vue du plan (Om, OZ)

Remarque : Les coordonnées sphériques se rapprochent des coordonnées géographiques utilisées pour représenter un point à la surface du globe terrestre ; la colatitude θ est en fait l'angle complémentaire de la latitude géographique (complément à 90°), la latitude étant définie dans l'intervalle [– π/2, π/2], avec la latitude Nord définie dans le domaine [0, π/2] et la latitude Sud dans le domaine [–π/2, 0] ; la longitude géographique varie dans l'intervalle [–π, π], avec la longitude Ouest dans le domaine [– π, 0] et la longitude Est dans [0, π].

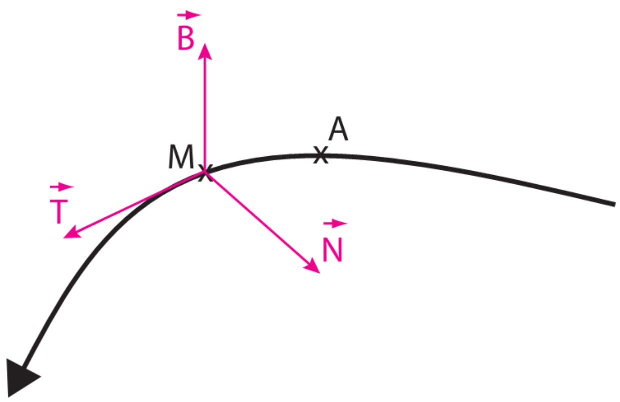
d- Le repère local de Frenet

Un autre repère local appelé repère de Frenet, peut être utilisé pour décrire la position d'un point M. Il est représenté sur une courbe qui, par définition, correspond à l'ensemble des positions prises par le point Mau cours d'une trajectoire quelconque.

Sur cette courbe on fixe une origine A et un sens pris en général positif dans le sens du mouvement. La position du point M sur la courbe est alors repérée par la donnée de son abscisse dite curviligne et notées(M) : cette abscisse correspond en fait à la longueur de l'arc orienté AM.

On fait l'hypothèse que lorsque l'arc de cercle AM est infiniment petit, la courbe peut être considérée comme inscrite dans un plan appelé alors plan osculateur. Dans ce cas, on définit un repère local dit de Frenet avec une base orthonormée directe $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ où $\vec{T}$ est le vecteur tangent à la courbe au point M (pour simplifier le formalisme, le sens $\vec{T}$ est en général pris dans le sens du mouvement), le vecteur $\vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe ($\vec{N}$ définit alors la normale principale à la courbe), et le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{N}$ et $\vec{T}$ et tel que le trièdre $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ soit direct ($\vec{B}$ définit alors la binormale à la courbe). À noter que $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont inscrits dans le plan osculateur de la courbe lorsque M est très proche de A. La base $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ est mobile et suit le mouvement de M sur la courbe.

Pour déterminer un rayon de courbure, on prend deux points M et M'proches sur une courbe, on trace les tangentes à la courbe en ces points, puis on trace les perpendiculaires à ces tangentes (aux points M et M') vers la concavité de la courbe : l'intersection de ces droites donne le centre de courbure noté C et le rayon de courbure noté R_c est tel que CM = R_c



Représentation du repère local de Frenet avec la base $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ orthonormée directe associée. La position deMsur la courbe orientée est donnée par son abscisse curvilignes(M) comptée à partir de l'origineA.

Figure 6 : Système de représentation de Frenet

L'arc de cercle séparant les points M et M′ a une longueur notée ds, et l'angle interceptant cet arc de cercle vaut da. Géométriquement on peut retrouver les relations suivantes :

$ds = R_c d\alpha$ et $\frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$

2- Repérage d'un point dans le temps

La géométrie dans l'espace ne suffit pas à décrire les mouvements en mécanique. Il est nécessaire d'introduire la notion d'évènement décrivant un phénomène instantané. On dit qu'on établit une chronologie lorsqu'on sait classer une succession d'évènements.

Un phénomène physique se décrit donc par le lieu où il se produit mais aussi par l'instant où il se produit.

La mécanique classique repose sur une hypothèse essentielle : le temps est considéré comme absolue t universel. Ceci signifie que la notion de temps est indépendante du référentiel et du mouvement. Ainsi un intervalle de temps entre deux évènements est le même quel que soit l'observateur et quel que soit le mouvement de l'observateur. À noter que cette hypothèse a été remise en cause par les théories d'Einstein, notamment en ce qui concerne les mouvements se produisant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière : ces théories ont ouvert la voie à une nouvelle forme de mécanique, la mécanique quantique. D'autre part, le temps est aussi considéré comme irréversible, monotone et croissant : cette hypothèse implicite repose sur le principe de causalité qui postule qu'un effet ne peut être antérieur à sa cause.

Au fil des siècles, la notion de temps et sa mesure ont beaucoup évolué en fonction des avancées technologiques et des progrès scientifiques. Basée d'abord sur la période de rotation de la Terre, puis sur celle de la rotation de la Terre autour du soleil, la notion de temps repose maintenant sur des mesures réalisées avec des horloges atomiques.

Pour décrire le mouvement dans l'espace, on a défini un repère avec une origine : cette origine peut correspondre à un observateur fixe ou mobile, le repère étant considéré comme fixe ou local se déplaçant avec le point M respectivement. De même, pour décrire un mouvement dans le temps, il est nécessaire de définir une origine des temps : un temps t_0 ou $t = 0$ s, à partir duquel on pourra définir une chronologie d'évènements liés au mouvement du point M. On a indiqué plus haut que l'observateur à partir duquel on repère le mouvement du point matériel M, était considéré comme le référentiel (R). Il faut noter que dans certains cas, il est d'usage de considérer ce référentiel d'étude du mouvement comme étant l'association du repère géométrique dans l'espace et du repère chronologique dans le temps. Ce type de définition « élargie » du référentiel sera utilisé dans la suite de ce cours de mécanique.

II- La vitesse du point matériel M

1- Définition de la vitesse

Dans le référentiel d'étude (R), la position d'un point M est repérée à tout instant par son vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

À l'instant t_1, le vecteur position de M est noté r_1, à l'instant t_2 (postérieur à t_1), ce vecteur est noté r_2. On appelle le vecteur déplacement le vecteur $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Entre ces deux instants successifs t_1 et t_2, la vitesse moyenne (notée $\vec{v}_m$) est définie par le rapport de son vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ par l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$

Ainsi on écrit : $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$

La vitesse instantanée de M à l'instant t correspond en fait à la limite de ce rapport lorsque Δt tend vers zéro : par définition, on peut dire que la vitesse instantanée correspond en fait à la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ du point matériel M : $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une vitesse est un rapport d'une longueur par un temps, elle s'exprime donc en mètre par seconde ($m.s^{-1}$).

À noter qu'il est important de préciser par rapport à quel référentiel la vitesse est définie. On écrit alors par exemple : $\vec{v} = \vec{v}_R(M) = \left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$

Le référentiel R est indiqué en indice : on a donc ici l'expression de la vitesse du point M dans le référentiel R. Dans ce référentiel, les axes liés à ce référentiel sont considérés comme fixes, donc ne dépendant pas du temps.

Remarques :

- La définition d'un vecteur donne en fait trois informations en une : elle indique la direction, le sens et la norme du vecteur. À noter aussi que le vecteur vitesse d'un point M est toujours tangent (au point M) à la courbe décrite par le point Mau cours de son mouvement ;
- On utilise en cinématique la notation de Newton qui consiste à marquer toute dérivation d'un vecteur ou d'une grandeur par rapport au temps, avec un point au-dessus de ce vecteur ou grandeur. Ainsi, on note : $\left(\frac{dx}{dt} = \dot{x}\right)$ et $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\right)$

2- Expressions de la vitesse instantanée

a- En coordonnées cartésiennes

On a vu plus haut que le vecteur position du point M dans le repère cartésien $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ lié au référentiel R s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y + z.\vec{u}_z$

Lorsqu'on dérive ce vecteur par rapport au temps pour obtenir la vitesse instantanée, on rappelle une règle élémentaire de dérivation d'une somme de produits, en marquant les dérivées avec la notation « primée » : $(fg + hk)' = f'.g + f.g' + h'k + h.k'$

On applique cette même règle en dérivant le vecteur position OM par rapport au temps (avec la notation de Newton, « pointée ») : $\vec{v}_R = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y + \dot{z}.\vec{u}_z$

b- En coordonnées cylindriques

L'objectif ici est d'exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs $\left(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$ de la base du repère cylindrique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel R qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur position a été écrit précédemment : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur vitesse instantanée du point M dans R et dans la base du repère cylindrique : $\vec{v}_R = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z}.\vec{u}_z$

Notons d'abord que dans le référentiel d'étude R, le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$ évoluent avec le temps. Ainsi on peut écrire $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$. On utilise la méthode mathématique suivante, basée sur le fait qu'on peut diviser et multiplier un rapport par la même quantité :

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi}.\dot{\varphi}$$

Or, on a vu plus haut que lorsqu'on dérive un vecteur (ici $\vec{u}_\rho$) par son angle polaire (ici φ), on obtient un vecteur directement perpendiculaire (ici $\vec{u}_\varphi$). Ainsi on a : $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = \vec{u}_\varphi$

On obtient alors l'expression de la vitesse instantanée du point M dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$:

$$\vec{v}_R = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z$$

c- En coordonnées sphériques

On veut exprimer ici le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$ de la base du repère sphérique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel R qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O. Les vecteurs $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ se déplacent avec le point M, donc ils dépendent du temps, et donc les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps ne sont pas nulles. Écrire la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps, revient à déterminer le mouvement du point M lorsque ses trois coordonnées r, θ et φ évoluent avec le temps.

On peut simplifier la résolution de ce problème en décomposant ce mouvement en trois parties : i) un mouvement de M lorsque r varie (à θ et φ constants), ii) un mouvement de M lorsque θ varie (à r et φ constants), iii) un mouvement de M lorsque φ varie (à r et θ constants).

i) R varie de dr, à θ et φ constants

Le point M se déplace alors suivant la droite OM de vecteur directeur $\vec{u}_r$ (voir Figure 3).

On peut alors écrire le vecteur déplacement sur cette droite : $\vec{A} = dr.\vec{u}_r$

La vitesse instantanée de M se déplaçant ainsi, peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur cette droite OM, le vecteur $\vec{u}_r$ est fixe) :

$$\vec{v}_1(M) = \frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r$$

ii) θ varie de dθ, à r et φ constants

Le point M se déplace alors sur un cercle de centre O, de rayon r et inscrit dans le plan (Om, OZ), comme représenté sur la figure 7.

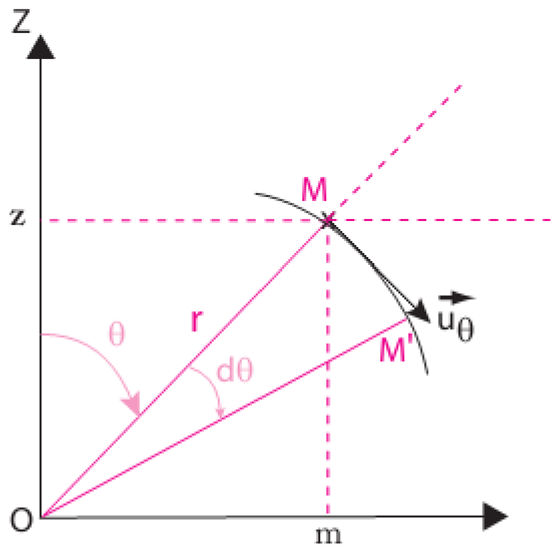


Figure 7 : Mouvement de M quand θ varie (à r et φ constants)

Lorsque θ varie de dθ, le point M parcourt un arc de cercle de longueur r.dθ. Si dθ est infiniment petit, alors M et M'sont très proches : on fait alors l'hypothèse que M et M'sont à la fois sur le cercle et sur la tangente au cercle au point M. Ainsi le vecteur déplacement $\vec{B}$ dans ce cas peut s'écrire :

$\vec{B} = r.d\theta.\vec{u}_\theta$. La vitesse instantanée de M se déplaçant sur ce cercle peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur la tangente au cercle au point M, r et θ sont fixes) : $\vec{u}_\theta$. La vitesse instantanée de M se déplaçant sur ce cercle peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur la tangente au cercle au point M, r et $\vec{u}_\theta$ sont fixes) : $\vec{v}_2(M) = \frac{d\vec{B}}{dt} = r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

iii) φ varie de dθ, à r et θ constants

Le point M se déplace alors sur un cercle de centre H, projection orthogonale du point M sur l'axe OZ (voir Figure 3), de rayon HM=r.sin(θ) et inscrit dans un plan parallèle au plan (OX, OY), de cote O H=r.cos(θ). La figure 8 (en vue aérienne par rapport au plan (OX, OY)) permet de mieux visualiser ce mouvement. Lorsque θ varie de dθ, le point M parcourt un arc de cercle de longueur r.sin(θ).dφ.

Si dφ est infiniment petit, alors M et M'sont très proches : on fait alors l'hypothèse que M et M'sont à la fois sur le cercle et sur la tangente au cercle au point M. Ainsi le vecteur déplacement $\vec{C}$ dans ce cas peut s'écrire : $\vec{C} = r.\sin(\theta).d\varphi.\vec{u}_\varphi$ La vitesse instantanée de M se déplaçant sur ce cercle peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur la tangente au cercle au point M, le vecteur $\vec{u}_\varphi$ est fixe et que sur le cercle, r.sin(θ) est constant également) :

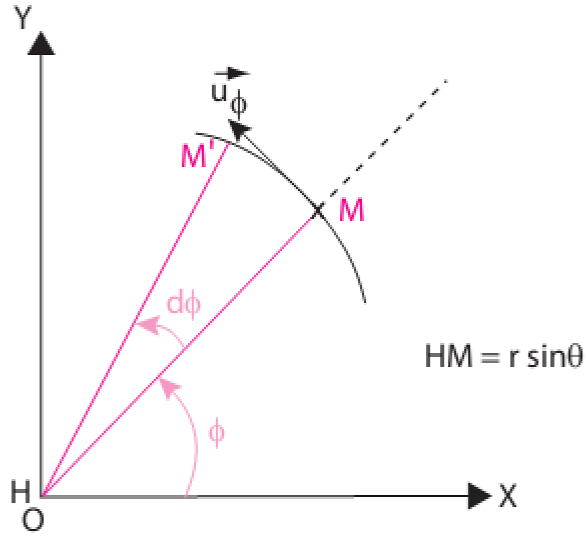


Figure 8 : Mouvement de M quand φ varie (à r et φ constants)

$$\vec{v}_3(M) = \frac{d\vec{C}}{dt} = (r.\sin(\theta))\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

Donc, lorsque les trois coordonnées sphériques du point M varient de manière simultanée, on obtient alors la vitesse instantanée du point M comme suit : $\vec{v}_R(M) = \vec{v}_1(M) + \vec{v}_2(M) + \vec{v}_3(M)$

On obtient alors l'expression suivante : $\vec{v}_R(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + (r\sin(\theta))\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$

d- Dans le repère de Frenet

Sur la figure 9 est représentée la courbe suivie par le point M. La distance entre les points M et M'sur la courbe est notée ds. Si Met M'sont infiniment proches, on peut alors faire l’hypothèse que M et M’sont à la fois sur la courbe et sur la tangente à la courbe au point M (tangente de vecteur directeur unitaire $\vec{T}$). Ainsi le vecteur déplacement peut s’écrire : $\overrightarrow{MM'} = s.\vec{T}$

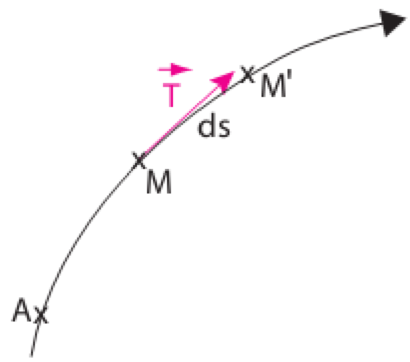


Figure 9 : Trajectoire curviligne suivie par un point M

La vitesse instantanée du point M peut donc s’écrire comme suit, en soulignant que sur la tangente à la courbe au point M le vecteur $\vec{T}$ est fixe : $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}.\vec{T} = \dot{s}.\vec{T}$

III- L’accélération du point matériel M

1- Définition de l’accélération

Dans la plupart des mouvements, la vitesse varie au cours du temps, soit en norme, soit en direction, soit en sens, soit les trois à la fois. On caractérise cette variation par l’accélération $\vec{a}$ du point. On imagine un point M passant d’un point A (atteint à l’instant t_1, avec une vitesse $\vec{v}_1$) à un point B (atteint à l’instant t_2, avec une vitesse $\vec{v}_2$). On peut alors définir l’accélération moyenne (notée

$\vec{a}_m$) du point M entre les positions A et B : $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1}$

L’accélération instantanée de M à l’instant t correspond en fait à la limite de ce rapport lorsque $\Delta t = t_2 - t_1$ tend vers zéro : par définition, on peut dire que l’accélération instantanée correspond en fait à la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et donc à la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps ; on écrit la vitesse instantanée $\vec{a}(t)$ du point matériel M : $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{\overrightarrow{OM}}$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une accélération est un rapport d'une vitesse par un temps, elle s'exprime donc en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$). Tout comme la vitesse, l'accélération est définie par rapport à un référentiel donné que l'on indique par une lettre en indice. L'accélération du point M dans le référentiel R s'écrit donc : $\vec{a} = \vec{a}_R(M) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R$.

2- Expressions de l'accélération

a- En coordonnées cartésiennes

On a vu plus haut l'expression de la vitesse instantanée du point M dans le repère cartésien $\left(O,\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$ lié au référentiel R : $\vec{v}_R = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x}.\vec{u}_x + \dot{y}.\vec{u}_y + \dot{z}.\vec{u}_z$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme de produits, on trouve l'expression de l'accélération instantanée du point M : $\vec{a}_R = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{x}.\vec{u}_x + \ddot{y}.\vec{u}_y + \ddot{z}.\vec{u}_z$

b- En coordonnées cylindriques

On exprime ici le vecteur accélération du point M en fonction des vecteurs $\left(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi,\vec{u}_z\right)$ de la base du repère cylindrique (local au point M) associé au référentiel R qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur vitesse a été écrit précédemment : $\overrightarrow{v_R} = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \dot{z}.\vec{u}_z$

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur accélération instantanée du point M dans R et dans la base du repère cylindrique :

$$\overrightarrow{a_R} = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{\rho}.\vec{u}_\rho + \dot{\rho}.\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho}.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\ddot{\varphi}.\vec{u}_\varphi + \rho.\dot{\varphi}.\dot{\vec{u}}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

Dans le référentiel d'étude R, le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho,\vec{u}_\varphi$ évoluent avec le temps.

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta} = \dot{\theta}\cdot\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta} = -\dot{\theta}\cdot\vec{u}_\rho$$

En effet, lorsqu'on dérive $\vec{u}_\varphi$ par rapport à φ, cela revient à dériver une seconde fois $\vec{u}_\rho$ par rapport à son angle polaire, donc à effectuer deux rotations successives de +π/2 dans le sens trigonométrique : on obtient alors $-\vec{u}_\rho$. On obtient donc l'expression suivante de l'accélération instantanée du point M dans la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\right)$:

$$\overrightarrow{a_R} = \overset{\bullet\bullet}{\overrightarrow{OM}} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right).\vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}.\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right).\vec{u}_\varphi + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

c- Dans le repère de Frenet

On a vu précédemment que la vitesse du point M dans la base mobile de Frenet a pour expression :

$$\vec{v}(M) = \dot{s}.\vec{T}$$

On trouve l'accélération du point M dans cette même base en dérivant par rapport au temps la vitesse instantanée. On écrit donc : $\vec{a}(M) = \dfrac{d\vec{v}(M)}{dt} = \dfrac{d\left(\dot{s}.\vec{T}\right)}{dt} = \ddot{s}.\vec{T} + \dot{s}.\dot{\vec{T}}$

On peut écrire la dérivée de $\vec{T}$ par rapport au temps, sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{T}} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

Comme nous l'avons vu plus haut (voir présentation du repère local de Frenet, nous connaissons les termes de ce produit : $\dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{1}{R_c}$ et $\dfrac{d\vec{T}}{d\alpha} = \vec{N}$

Avec R_c le rayon de courbure et $\vec{N}$ le vecteur normal (tourné vers la concavité de la courbe).

Ainsi, on trouve : $\vec{a}(M) = \ddot{s}.\vec{T} + \dfrac{\dot{s}^2}{R_c}.\vec{N}$

Il y a donc deux composantes de l'accélération : une composante tangentielle (notée a_T (M)) et une composante normale (notée a_N(M)). Leurs expressions sont :

$\vec{a}_T(M) = \ddot{s}$ et $\vec{a}_N(M) = \frac{\dot{s}^2}{R_c}$

Remarque : On utilise parfois la notation suivante : $v = \dot{s}$, où v est une mesure algébrique : positive si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, et négative si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes décroissantes. On écrit donc l'expression de l'accélération comme suit : $\vec{a}(M) = \dot{v}.\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}.\vec{N}$

IV- Exemples

1- Mouvement rectiligne

Un mouvement rectiligne est un mouvement d'un point matériel M sur une droite OX (O étant l'origine des abscisses).

La position du mobile M est définie à l'instant t par son abscisse $x = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

Le vecteur vitesse est porté par la droite OX et son module est : $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

Le vecteur accélération est aussi porté par la droite OX et son module est : $a = \Gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

<u>**Cas particuliers**</u> :

- le mouvement est dit uniforme si la vitesse est constante : ***V=cte***
- le mouvement est uniformement varié si l'accélération est constante : $a = cte$
- Une double intégraton de laccélération donne l'équation horaire du mouvement :

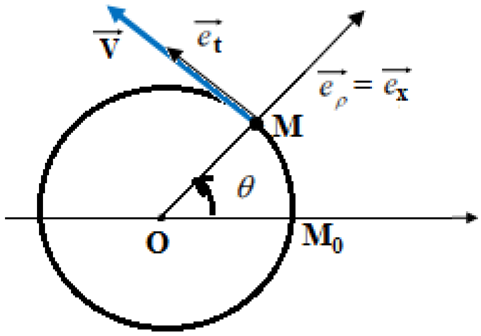
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = at + \dot{x}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}_0\ \mathrm{t} + \mathrm{x}_0$$

$$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{2}at^2 + V_0\ \mathrm{t} + \mathrm{x}_0$$

On appelle ***hodographe*** de pôle O, le lieu des points H tels que $\overrightarrow{OH} = \vec{V}$.

2- Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire est le mouvement d'un point matériel sur une circonférence. Soit O le centre de la circonférence et R son rayon.



$\theta = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}\right)$; $M_0M = R\theta$ $\quad V = \dfrac{dM_0M}{dt} = R\dot{\theta}$ car R = cte.

$\vec{V} = R\dot{\theta}.\overrightarrow{e_t}$

$\vec{a} = \dfrac{d(R\dot{\theta}\overrightarrow{e_t})}{dt} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_t} + R\dot{\theta}\dfrac{d(\overrightarrow{e_t})}{dt}$ $\qquad \dfrac{d\overrightarrow{e_t}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{e_t}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_t} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho}$ $\qquad \overrightarrow{a_t} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{e_t}$

$\overrightarrow{a_\rho} = \overrightarrow{a_N} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\rho}$ Le mouvement circulaire est dit uniforme si :

$V = cte \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} = cte \quad \Rightarrow \overrightarrow{a_t} = 0$ et $\quad \overrightarrow{a_N} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_N}$.

Chapitre III: DYNAMIQUE DU POINT

La dynamique a pour origine le mot grec «dynamis» qui signifie pouvoir, puissance, force. La dynamique est en effet la partie de la mécanique qui étudie les causes des mouvements des corps que la cinématique nous a permis de décrire.

La dynamique classique ou newtonienne du point matériel permet de mettre en évidence les origines possibles du mouvement d'objets macroscopiques se déplaçant à des vitesses suffisamment faibles par rapport à celle de la lumière. Pour les objets ou particules se déplaçant à très grande vitesse, l'explication des mouvements requiert l'utilisation d'une autre mécanique : la mécanique quantique ou mécanique relativiste.

I- Principes de la dynamique newtonienne

L'ensemble des principes de la mécanique a été formalisé en 1686 par Isaac Newton (1642-1727), dans son ouvrage intitulé Philosophiae naturalis principia mathematica qui est devenu l'un des ouvrages fondamentaux de la physique et a été à l'origine de la mécanique classique dite newtonienne. En fait d'autres savants tels Descartes (1644) ou Galilée (1638) ont grandement contribué à la découverte de ces principes, mais c'est Newton qui a regroupé et formalisé ces principes dans son ouvrage majeur.

1- Corps isolé et référentiel galiléen

Première loi de Newton ou Principe d'Inertie : Tout corps isolé, qui n'est soumis à aucune interaction avec d'autres objets matériels, conserve l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme qu'il possédait auparavant.

Comme tout principe, ce principe d'inertie ne se démontre pas. L'énoncé de ce principe requiert cependant certaines explications et compléments. Tout d'abord, deux corps sont considérés en interaction lorsqu'ils exercent des actions réciproques l'un sur l'autre. Une des lois de la nature fait que cette interaction décroît lorsque la distance entre les deux corps augmente. On dit aussi qu'un corps est isolé lorsqu'il ne subit aucune interaction extérieure.

Le principe d'inertie suppose implicitement l'existence de référentiels privilégiés dans lesquels ce principe est vérifié : on les appelle référentiels d'inertie ou référentiels galiléens. Ainsi dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un corps isolé est rectiligne et uniforme, et ne subit aucune accélération.

Nous verrons dans le chapitre consacré à la mécanique terrestre et céleste, que l'accélération d'un point matériel est la même dans tous les référentiels qui sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Si un point matériel M est isolé dans un référentiel galiléen R, cela signifie qu'il ne subit aucune accélération et donc $\vec{a}(M/R)=\vec{0}$

Si R'est un référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel R, alors on peut écrire : $\vec{a}(M/R')=\vec{0}$ car $\vec{a}(M/R)=\vec{a}(M/R')$. Cela signifie donc que R' est aussi un référentiel galiléen puisque ce même point matériel M ne subit aucune accélération dans R' et est donc isolé. Le principe d'inertie est donc vérifié aussi dans R'.

Théorème : Si R est un référentiel galiléen, tous les référentiels R' en translation rectiligne et uniforme par rapport à R, sont aussi galiléens.

2- Force et masse

Dans le monde qui nous entoure, au cours des situations et expériences de la vie de tous les jours, on a l'intuition de la notion de force. Notre corps ressent les efforts produits pour pousser, soulever ou transporter un objet. La chute libre d'un corps montre qu'il s'exerce sur ce corps une action qui l'attire vers la surface de la Terre. Il existe donc de nombreux exemples concrets de « mise en mouvement » d'objets : ces objets subissent une accélération car ils sont soumis à une ou plusieurs interactions. Ces interactions sont à l'origine des mouvements des corps, et leur définition et description sont à la base de la dynamique newtonienne qui a pour objectif de prévoir le mouvement des corps dans un environnement donné.

Remarque : Il faut aussi noter que ce n'est pas parce qu'un corps est en mouvement rectiligne uniforme, qu'il est forcément isolé ; en effet un corps peut suivre un tel mouvement lorsqu'il est soumis à plusieurs interactions dont les effets se compensent.

Ces interactions, causes des mouvements des corps, peuvent être décrites par une grandeur vectorielle qu'on appelle force. À noter qu'avec la définition de ce vecteur force, on a trois informations en une : en effet, on a la direction, le sens et l'intensité (avec la norme du vecteur) de l'interaction s'exerçant sur un corps.

Newton a élaboré le principe fondamental de la dynamique à partir de la constatation suivante : lorsqu'une action est exercée sur un corps, le mouvement de ce corps est modifié, c'est-à-dire son accélération est modifiée. Ses observations célèbres étaient basées sur la chute libre des objets et l'attraction de la Terre. L'idée d'origine de ce principe consiste à dire que la variation de vitesse d'un corps dans un référentiel galiléen est égale à la force exercée (ou à la somme des forces exercées) sur ce corps rapporté à la masse de ce corps. Comme la variation de vitesse avec le temps correspond à l'accélération définie dans le chapitre consacré à la Cinématique du Point, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique comme suit :

<u>Deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique</u>) : Dans un référentiel galiléen, la force résultante $\vec{F}$ exercée sur un point matériel, de masse m donnée, est égale au produit de la masse du point et de son accélération $\vec{a}$: $\vec{F} = m\vec{a}(M/R)$.

À noter que si plusieurs forces s'exercent sur le point, alors la force résultante $\vec{F}$ est la somme vectorielle de ces forces.

a- La notion de quantité de mouvement

Pour énoncer cette deuxième loi, Newton a en fait introduit une nouvelle notion : celle de la quantité de mouvement. On note donc la quantité de mouvement d'un point M dans le référentiel R comme étant le produit de sa masse et de sa vitesse : c'est donc une grandeur vectorielle et elle s'écrit comme suit : $\vec{p}(M/R) = m\vec{v}(M/R)$

Le principe fondamental de la dynamique revient à dire que la force exercée sur un corps correspond en fait à la variation de la quantité de mouvement de ce corps. En effet, comme $\frac{d\vec{v}}{dt}(M/R) = \vec{a}(M/R)$, on peut donc écrire : $\vec{F} = m\vec{a}(M/R) = m\frac{d\vec{v}}{dt}(M/R) = \frac{d\vec{p}}{dt}(M/R)$

b- La notion de masse

Le principe fondamental de la dynamique fait aussi intervenir une nouvelle grandeur physique fondamentale : la masse. Newton définit la masse comme la quantité de matière contenue dans un corps. Et Newton fait dériver la notion de masse de celle de la force : il énonce ainsi que deux corps de masses différentes m_1 et m_2 soumises à une même force $\vec{F}$, vont acquérir des accélérations différentes dans le rapport de leur masse.

Ainsi, on écrit les relations suivantes : $\vec{F} = m_1 \vec{a}_1$ et $\vec{F} = m_2 \vec{a}_2$.

On a alors la relation suivante : $m_1 \|\vec{a}_1\| = m_2 \|\vec{a}_2\|$ et donc $\frac{m_2}{m_1} = \frac{\|\vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_2\|}$

c- Les unités de la masse, de la force et de la quantité de mouvement

L'unité de la masse est le kilogramme (noté kg) qui est une des unités du Système International (unités S.I.). Le kilogramme (nom d'origine le grave) correspond en fait à la masse d'un cylindre en platine iridié de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut (étalon depuis 1889).

La force étant définie comme le produit de la masse par l'accélération, elle a pour unité S.I. le $kg.m.s^{-2}$. L'unité usuelle pour une force est le newton (noté N) avec 1 N = 1 $kg.m.s^{-2}$. En unités S.I., une quantité de mouvement s'exprime en $kg.m.s^{-1}$.

3- Action et réaction

Dans son ouvrage fondamental Philosophiae naturalis principia mathematica, Newton a établi une troisième loi dite de l'action et de la réaction. Elle s'énonce comme suit :

Troisième loi de Newton (Principe de l'action et de la réaction) : Quand deux corps interagissent, la force $\vec{F}_{1,2}$ exercée par le premier corps sur le second corps est égale en intensité et opposée en sens à la force $\vec{F}_{2,1}$ exercée par le second corps sur le premier corps. On écrit donc : $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$.

Remarque : Si on regarde l'interaction d'une pomme et de la planète Terre, on peut dire que la force exercée par la pomme sur la Terre est égale en intensité à la force exercée par la Terre sur la pomme ! Bien sûr si on considère l'effet de ces forces sur ces deux corps, on sait que l'accélération de la pomme sera bien supérieure à celle de la Terre puisque dans le rapport de leurs masses.

4- Collision entre deux particules

Une collision se produit lorsque deux objets se rencontrent, et qu'il y a un choc. Une collision est un contact physique entre deux corps : ce contact est court et brutal, c'est-à-dire que les forces subies sont en général très intenses et causent des déformations locales qui peuvent être importantes. Quand deux particules entrent en collision, il est important de bien définir le système d'étude : on prend en général le système des deux particules. Ainsi les interactions entre ces deux particules sont des forces intérieures au système et elles répondent au principe de l'action et de la réaction. De plus on se place dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, donc le système est isolé. La quantité de mouvement du système des deux particules est égale à la somme des quantités de mouvement de chacune des particules $\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2\right)$. D'après le principe fondamental de la dynamique on peut écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Donc lors d'un choc entre deux particules, dans un système isolé, il y a conservation de la quantité de mouvement.

Dans un certain nombre de cas, l'énergie cinétique totale du système peut être considérée comme constante, on dit alors que la collision est élastique. En fait il s'agit d'une hypothèse car la collision peut entraîner pour les particules des changements de niveau énergétique. D'autres cas de collision se traduisent par une diminution de l'énergie cinétique totale : l'énergie cinétique se transforme en un autre type d'énergie (échauffement par exemple), on parle alors de collision inélastique.

Dans le cas d'une collision supposée élastique, on peut écrire la conservation de l'énergie cinétique pour les deux particules M_1 (énergies cinétiques E_{c1} et E'_{c1} avant et après le choc respectivement) et M_2 (énergies cinétiques E_{c2} et E'_{c2} avant et après le choc respectivement) : $E_{c1} + E_{c2} = E'_{c1} + E'_{c2}$.

5- Des forces au quotidien

Dans la nature, l'expérience nous révèle l'existence d'actions ou de forces importantes : la chute d'un corps vers la surface de la Terre, un objet immobile sur un sol rugueux incliné par rapport à l'horizontal, la tension d'une corde de part et d'autre d'une poulie.

Comme toujours en physique, ce sont des constatations expérimentales qui ont permis de mettre en évidence ces forces qui font partie de notre quotidien.

a- Le poids et l'attraction gravitationnelle

On considère deux corps A et B de masse respectives m_A et m_B. On note $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire (i.e. $\|\vec{u}_{AB}\| = 1$ de la droite (AB) : il est noté ainsi car il est dans un sens allant du point A vers le point B. d est la distance entre les points A et B. Newton a montré que ces masses ont un pouvoir d'attraction l'une sur l'autre, et ce pouvoir se manifeste par une force d'attraction dite force d'attraction gravitationnelle (ou force de gravitation). On note $\vec{F}_{AB}$ la force d'attraction exercée par le corps A sur le corps B : la première lettre A indique le corps à l'origine de l'attraction et la deuxième lettre B indique le corps qui est attiré (ainsi $\vec{F}_{AB}$ est appliquée au point B et a pour origine le point A).

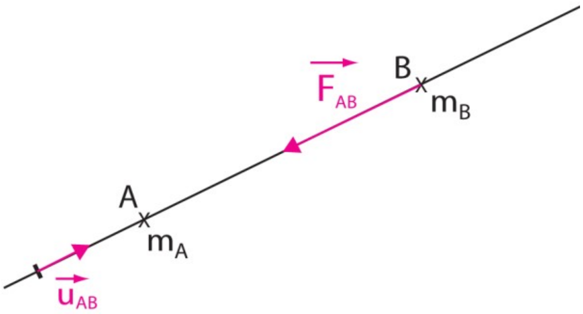


Figure 1 : Force d'attraction gravitationnelle

D'après les observations et théories de Newton, la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_{AB}$ est donc proportionnelle aux deux masses m_A et m_B, et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant m_A et m_B, soit d^2. La constante de proportionnalité est notée G : elle est appelée constante universelle de gravitation et vaut $G = 6{,}672.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$. Cette force a pour origine le point Bet est dirigée vers le point A : elle est donc de sens opposé au vecteur unitaire $\vec{u}_{AB}$. Ainsi on peut écrire :

$$\vec{F}_{AB} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_{AB}$$

À la surface de la Terre, tout corps pesant subit une force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre. Cette force attire les corps vers la surface de la Terre. On l'appelle le poids $\vec{P}$. On considère un corps M (assimilable au point M) de masse m, situé à une distance d de la surface de la Terre telle que d est très petite devant le rayon de la Terre R_T (soit $d \ll R_T$).

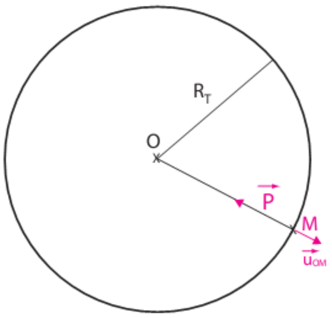


Figure 2 : Poids $\vec{P}$ d'un objet M de masse m attiré par la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T, de centre de gravité O et de masse M_T.

Le poids $\vec{P}$ est une force d'attraction gravitationnelle et peut donc s'écrire :

$$\vec{P} = -G\frac{m_A m_B}{R_T^2}\vec{u}_{OM}$$

Dans cette expression, on peut séparer les termes liés à la Terre et ceux liés au corps M.

Ainsi on peut écrire : $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g} = -G\frac{M_T}{R_T^2}\vec{u}_{OM}$

$\vec{g}$ rend compte alors de l'attraction gravitationnelle de la Terre. Si on considère que le corps M est en chute libre vers la surface de la Terre, on écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué au corps M : $\vec{P} = m\vec{a}$ et donc on obtient : $\vec{g} = \vec{a}$.

Ainsi $\vec{g}$ correspond à l'accélération d'un corps en chute libre due à l'attraction gravitationnelle de la Terre ; on appelle aussi $\vec{g}$ l'accélération gravitationnelle.

b- Réaction des supports et forces de frottement

Lorsqu'un solide se déplace sur une surface, ce solide appuie sur cette surface tant qu'il est en contact avec elle. Il exerce donc une force $\vec{F}$ sur la surface. D'après le principe de l'action et de la réaction, la surface exerce également une force $\vec{R}$ sur le solide, telle que $\vec{F} = -\vec{R}$. Cette force $\vec{R}$ est appelée réaction du support. Lorsqu'on lance un corps solide sur un plan horizontal, on observe une diminution progressive de la vitesse de ce corps, qui finit par s'arrêter. Ce corps est donc freiné par une force dite de frottement qui s'oppose au mouvement. Lorsqu'on considère les frottements, la réaction $\vec{R}$ du support est en fait la somme vectorielle de deux forces : une force $\vec{R}_N$ normale à la surface, une force $\vec{R}_T$ tangente à la surface ($\vec{R}_T$ correspond à la force de frottement).

On peut alors considérer deux cas : le cas où le solide est immobile, on parle de frottement statique ; le cas où le solide est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$,on parle de frottement dynamique. Dans le cas statique (Figure 3a), on introduit le coefficient de frottement statique noté μ_s qui correspond au rapport des composantes normale et tangentielle de la réaction du support :

Soit $\frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} = \tan(\alpha) = \mu_s$, ou encore $\|\vec{R}_T\| = \mu_s \|\vec{R}_N\|$

Dans le cas dynamique (Figure 3b), on introduit le coefficient de frottement dynamique noté μ_d qui s'écrit comme pour le coefficient statique : Soit $\frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} = \tan(\beta) = \mu_d$, ou encore

$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$

Dans tous les cas, on a toujours : $\mu_d < \mu_s$

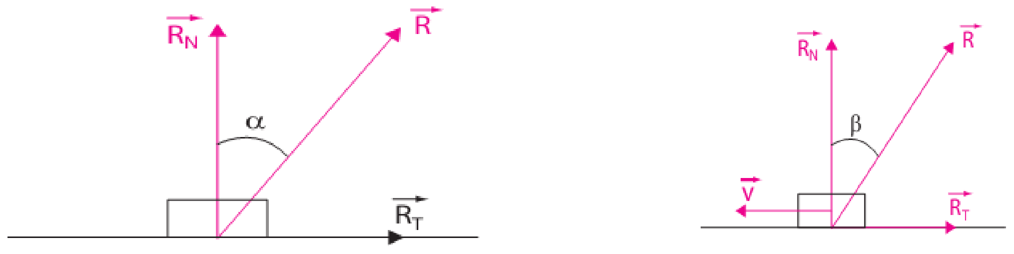


Figure 3 : a) Cas du frottement statique **b)** Cas du frottement dynamique

On constate que le support ne présente pas les mêmes frottements selon que le corps solide est immobile ou en mouvement. La composante tangentielle de la réaction du support est plus importante dans le cas statique, et il faut exercer une force au moins égale en intensité et opposée en sens pour mettre le corps solide en mouvement. Dans le cas dynamique, μ_d est fonction de la nature et de l'état de la surface (rugosité, bosses, trous...).

c- Tension d'une corde

Soit un solide auquel on a attaché une corde. Lorsqu'on tire sur la corde, on dit que la corde est sous tension.

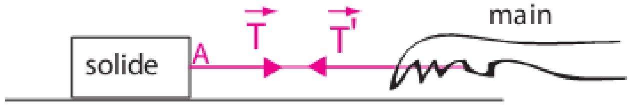


Figure 4 : Tension d'une corde

La corde tire sur l'objet avec une force $\vec{T}$ parallèle à la corde au point d'attache A, dirigée de l'objet vers la corde. La corde relie deux solides, l'objet et la main. La corde tire donc sur les deux solides avec une force de même intensité. On peut écrire : $\vec{T} = \vec{T}'$, où $\vec{T}'$est la force par laquelle la corde tire sur la main.

II- Travail et énergie

Dans cette partie sont présentées d'autres méthodes permettant d'étudier les mouvements d'un point matériel. Ces méthodes font appel à un principe différent de ceux évoqués dans la partie précédente : le principe de la conservation de grandeurs physiques, notamment l'énergie. Ces méthodes permettent la résolution des équations du mouvement dans des cas particuliers qui seront développés.

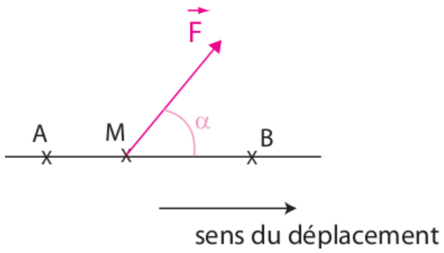
1- Travail d'une force

a- Définition

En 1686, Gottfried Leibniz a proposé de caractériser l'effet d'une force par une grandeur scalaire appelée travail de la force. Ainsi le travail d'une force $\vec{F}$ constante au cours d'un déplacement d'un point A vers un point B(distance AB=d) se définit comme suit

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\vec{d} = \left\|\vec{F}\right\|.\left\|\vec{d}\right\|\cos(\alpha)$$

α correspond à l'angle entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$. Deux cas de figures se présentent alors : le travail est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative.



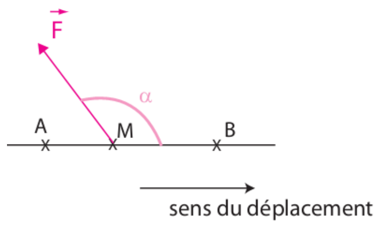


Figure 5 a) :Travail moteur de $\vec{F}$ **b)** Travail résistant de $\vec{F}$

Lorsque la force $\vec{F}$ est exercée dans le sens du mouvement (Figure 5a), on dit que le travail de $\vec{F}$ est moteur car il contribue au déplacement du point M. Lorsque la force $\vec{F}$ est exercée dans le sens opposé au mouvement (Figure 5b), on dit que le travail de $\vec{F}$ est résistant car il s'oppose au déplacement de M.

Remarque : Du fait des propriétés du produit scalaire, lorsqu'une force s'exerce perpendiculairement au déplacement (i.e. $\vec{F} \perp \vec{d}$), on dit qu'une telle force « ne travaille pas », c'est-à-dire que son travail est nul. Deux exemples de forces importantes sont concernées par cette propriété : **1)** les forces de gravitation exercées sur un corps en rotation autour d'un point avec la force exercée toujours radiale et donc perpendiculaire au vecteur déplacement tangent à la trajectoire circulaire ; **2)** la réaction du support dans le cas où il n'y a pas de frottement, est toujours perpendiculaire au support et donc ne travaille pas.

b- Cas général

Traitons maintenant du cas plus général où le point M ne se déplace pas de façon rectiligne mais sur une courbe quelconque, avec une force $\vec{F}$ (exercée sur le point M) qui peut varier au cours du temps le long de la trajectoire. On peut décomposer le chemin suivi par le point M en petits déplacements élémentaires tels que $\Delta\vec{r}_i$ entre deux points M_i et M_{i+1} suffisamment proches pour considérer que la force $\vec{F}$ est constante sur $\Delta\vec{r}_i$ (voir figure 6).

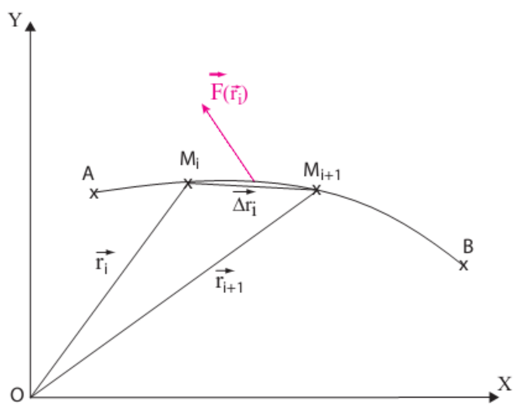


Figure 6 : Travail d'une force : cas général

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ sur le déplacement M_iM_{i+1} peut être écrit ainsi : $\delta W_i = \vec{F}\left(\vec{r}_i\right).\Delta\vec{r}_i$

Le travail total de $\vec{F}$ sur la trajectoire entre les points A et B correspond donc à la somme des travaux élémentaires, comme suit : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \delta W_i = \vec{F}.\vec{d} = \sum_i \vec{F}\left(\vec{r}_i\right).\Delta\vec{r}_i$

Si on prend des déplacements élémentaires très petits jusqu'à devenir des infinitésimaux notés $d\vec{r}$, alors la somme discrète (S) peut être remplacée par une somme continue (sous forme d'intégrale), comme suit : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right)=\int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}\right).d\vec{r}$

2- Forces conservatives et énergie potentielle

Certaines forces possèdent une propriété caractéristique importante concernant le calcul de leur travail. C'est le cas de la force d'attraction gravitationnelle qui est présentée ici comme exemple de ces forces particulières.

a- Travail de la force d'attraction gravitationnelle

Calculons le travail du poids d'un corps (assimilé au point M) de masse m, qui suit une trajectoire quelconque, entre un point A (de cote ou altitude z_A) et un point B(de cote ou altitude z_B), comme représenté sur la figure 7.

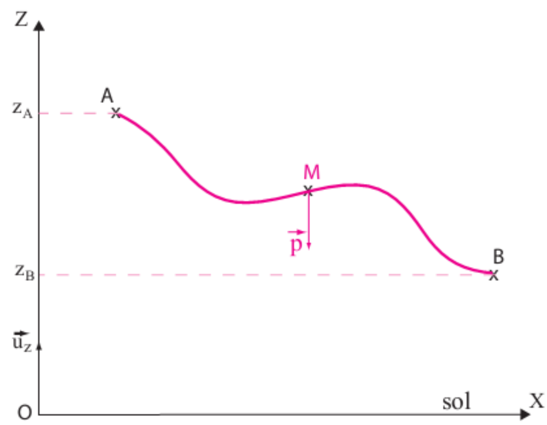


Figure 7 :Travail de la force d'attraction gravitationnelle

Le poids $\vec{P}$ est orienté selon $-\vec{u}_z$, et s'écrit : $\vec{P}=m\vec{g}=-m\left\|\vec{g}\right\|\vec{u}_z$.

Par définition, le travail de la force de gravitation exercée sur le point M entre les points A et B, peut s'écrire : $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)=\int_A^B \vec{P}.d\vec{r}=\int_A^B -m\left\|\vec{g}\right\|\vec{u}_z.d\vec{r}$

On introduit $d\vec{r}$ dans l'expression du travail énoncée plus haut, et comme les vecteurs $\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z$ sont orthogonaux deux à deux, il ne reste que la composante selon $\vec{u}_z$ dans le produit scalaire sous l'intégrale. Ainsi, on obtient :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)=\int_A^B \vec{P}.d\vec{r}=\int_A^B -m\left\|\vec{g}\right\|\vec{u}_z.d\vec{r}=\int_A^B -m\left\|\vec{g}\right\|.dz=-m\left\|\vec{g}\right\|\left(z_B-z_A\right)$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- $z_A > z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$ est positif et donc moteur dans la chute de M ;
- $z_A < z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$ est négatif, résistant et s'oppose au mouvement de chute de M ;
- $z_A = z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$, le poids ne « travaille » pas.

Mais dans tous les cas, on trouve une propriété importante de ce travail : il ne dépend que de la position de M au départ A et à l'arrivée B du mouvement. Ainsi ce travail ne dépend pas du chemin parcouru. On dit alors que la force d'attraction gravitationnelle est conservative.

Les forces conservatives : Une force est conservative si, lorsque le point d'application de la force se déplace d'une position A à une position B, le travail de cette force est indépendant de la trajectoire suivie par le point pour aller de A à B.

Remarque : Le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul car les points de départ et d'arrivée sont identiques ; on écrit alors : $\oint \vec{F}.d\vec{r}=0$, avec $\oint$ symbole d'une intégrale sur un contour fermé.

b- Énergie potentielle gravitationnelle

Puisque le travail du poids ne dépend que des positions initiale et finale du mobile, on peut introduire une fonction qui ne dépend que de la position du mobile. Cette fonction est appelée énergie potentielle et se note E_p.

On peut donc écrire la relation suivante :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)=\int_A^B \vec{P}.d\vec{r}=\int_A^B -m\left\|\vec{g}\right\|\vec{u}_z.d\vec{r}=\int_A^B -m\left\|\vec{g}\right\|.dz=-m\left\|\vec{g}\right\|\left(z_B-z_A\right)=-\left[E_p\left(B\right)+E_p\left(A\right)\right].$$

On voit ici que l'énergie potentielle est définie à travers sa variation entre deux positions données. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près. On fixe cette constante en choisissant un point de référence (où l'énergie potentielle est nulle).

On définit donc l'énergie potentielle gravitationnelle comme suit : $E_p(z) = m.\|\vec{g}\|.z + E_0$

où E_0 est une constante définie à partir des conditions initiales (on peut par exemple choisir de fixer que l'énergie potentielle est nulle quand z= 0, et avoir $E_0 = 0$).

<u>**Énergie potentielle**</u> : Puisque le travail d'une force conservative ne dépend que des positions initiale et finale du corps en mouvement, on peut introduire une fonction énergie potentielle, notée E_p, qui ne dépend que de la position du corps, telle que :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}\right).d\vec{r} = -\left[E_p(B) + E_p(A)\right]$$

$E_p(A)$ et $E_p(B)$ sont les énergies potentielles du point M aux positions A et B respectivement.

<u>**Théorème**</u> : Le travail d'une force conservative est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle du point matériel.

Remarques :

- Le signe « moins » dans l'expression du travail de la force conservative en fonction de la variation d'énergie potentielle est purement arbitraire, et est utilisé principalement pour des simplifications d'écriture notamment pour l'énergie potentielle gravitationnelle ;
- La force conservative dérive en fait de l'énergie potentielle suivant la relation suivante qui fait intervenir l'opérateur mathématique vecteur gradient :

$$\vec{F} = -\left[\frac{dE_P}{dx}.\vec{u}_x + \frac{dE_P}{dy}.\vec{u}_y + \frac{dE_P}{dz}.\vec{u}_z\right] = -\overrightarrow{grad}\left(E_p\right)$$

Cette expression de $\vec{F}$ en fonction du gradient de l'énergie potentielle Ep est bien sûr valable dans tous les systèmes de coordonnées ; il faut alors se reporter aux expressions du gradient dans les systèmes cylindrique et sphérique.

c- Puits et barrière de potentiel

On considère ici le mouvement unidirectionnel d'une particule M de masse m, sous l'action d'une force conservative $\vec{F}$, dans un référentiel galiléen R. Si ce mouvement est réalisé suivant un axe OX de coordonnées x, on peut écrire la relation entre la force appliquée et l'énergie potentielle dont dérive cette force : $F(x) = -\dfrac{dE_P}{dx}$

$E_p(x)$ est a priori quelconque et peut présenter des extrema (minima et maxima) comme illustré dans la figure 8.

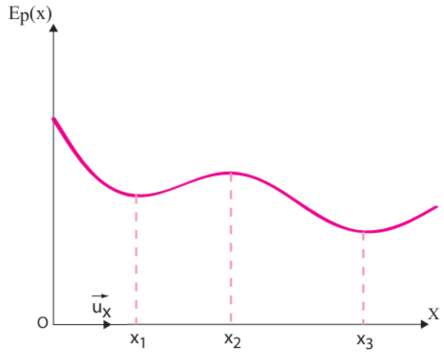


Figure 8 : Courbe d'une énergie potentielle en fonction d'un paramètre x

Par définition de la dérivée, $\dfrac{dE_P}{dx}$ donne la pente de la tangente à la courbe de $E_p(x)$. Aux points extrêmes de cette courbe (minima et maxima), la pente de la tangente est nulle, donc $F(x) = 0$. En ces points, la force appliquée à la particule M est nulle ; donc si on libère la particule, elle reste en équilibre en ce point extremum. Ainsi les extrema d'énergie potentielle sont les positions d'équilibre de la particule.

Les régions de l'espace où l'énergie potentielle possède un minimum sont appelées des puits de potentiel (équilibre stable en x_1 et x_3 sur la figure 8). Les régions de l'espace où l'énergie potentielle possède un maximum sont appelées barrières de potentiel (équilibre instable en x_2 sur la figure 8). En équilibre stable, il existe une force qui « ramène » la particule vers sa position. En équilibre instable au contraire, la force éloigne la particule de sa position.

3- Théorème de l'énergie cinétique et énergie mécanique

a- Définition de l'énergie cinétique

Leibniz a montré que l'effet d'une force pouvait être caractérisé par le travail de cette force mais aussi par ce qu'il a appelé « la force vive » correspondant en fait au double d'une énergie dite cinétique. Il convient maintenant de rappeler comment on trouve l'expression de cette énergie cinétique, notamment à partir du cas de la chute libre d'un corps. On peut montrer qu'un corps en chute libre depuis une hauteur h atteint une vitesse au sol $\left\|\vec{v}_s\right\| = \sqrt{2\left\|\vec{g}\right\| h}$, ce qui donne $\frac{1}{2}\left\|\vec{v}_s\right\|^2 = \left\|\vec{g}\right\| h$

En multipliant par masse, on obtient : $\frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_s\right\|^2 = m\left\|\vec{g}\right\| h = \left\|\vec{P}\right\| h$. On voit alors que l'effet d'une force peut se mesurer par son travail, mais aussi par une énergie dite cinétique, exprimée en joules comme le travail.

Remarque : Comme la vitesse du point M est une grandeur définie dans un référentiel donné, l'énergie cinétique est aussi une quantité relative à ce référentiel donné.

b- Théorème de l'énergie cinétique

Étudions le mouvement d'un point M de masse m, mobile dans un référentiel galiléen R, sous l'action d'une force quelconque $\vec{F}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

De plus, par définition, on a : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, donc $d\vec{r} = \vec{v}dt$.

Le travail de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B est donc :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}\right).d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}.\left(\vec{v}dt\right) = \int_A^B m\left(\vec{v}d\vec{v}\right)$$

Complément mathématique

Il convient alors de faire un calcul différentiel simple pour avancer dans cette démonstration du théorème de l'énergie cinétique.

Ainsi on peut écrire la différentielle du produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ par lui-même :

$d\left(\vec{v}.\vec{v}\right) = 2\vec{v}d\vec{v}$ or $\vec{v}.\vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2$, donc : $m.\left(\vec{v}.d\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}m\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

On peut donc écrire le travail de la force $\vec{F}$ comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}m\left\|\vec{v}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_B\right\|^2 - \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_A\right\|^2$$

On obtient donc l'expression suivante : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_B\right\|^2 - \frac{1}{2}m\left\|\vec{v}_A\right\|^2$.

Théorème : Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux positions est égale au travail de la force résultante appliquée entre ces deux positions.

Remarque : Quand plusieurs forces sont appliquées, on fait la somme vectorielle de ces forces ; et cette somme est la force résultante.

c- Cas des forces conservatives

On considère un point M mobile dans un référentiel galiléen et soumis à l'action d'une force résultante conservative $\vec{F}$. Alors le théorème de l'énergie cinétique implique :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or pour une force conservative, on peut écrire le travail comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = -\left[E_p(B) - E_p(A)\right]$$

On peut donc écrire : $-\left[E_p(B) - E_p(A)\right] = E_c(B) - E_c(A)$

On arrive alors à la relation suivante : $E_c(A) + E_p(A) = E_p(B) + E_c(B)$

On peut définir alors une nouvelle grandeur correspondant à la somme des énergies cinétique et potentielle : cette grandeur a la dimension d'une énergie, elle est appelée énergie mécanique et se note E_m.

Énergie mécanique : On appelle énergie mécanique du point M, la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives qui lui sont appliquées.

La relation établie plus haut peut donc s'écrire simplement en introduisant la notion d'énergie mécanique : $E_m(A) = E_m(B)$

Théorème : Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un point soumis à des forces conservatives se conserve. L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante du mouvement.

Remarques :

- On voit ici l'origine de l'expression « force conservative », qui vient du fait que l'énergie mécanique associée se conserve ;
- La loi de conservation de l'énergie mécanique est aussi appelée intégrale première du mouvement car elle ne fait intervenir que des dérivées premières.

d- Cas des forces non conservatives

Lorsqu'il existe une force $\vec{F}_{NC}$ non conservative, en plus des forces conservatives de résultante $\vec{F}_C$, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right)+W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)=E_c\left(B\right)-E_c\left(A\right)$$

Or, le travail des forces conservatives peut s'écrire comme la variation d'énergie potentielle ; on obtient donc la relation suivante : $W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right)-\left[E_p\left(B\right)-E_p\left(A\right)\right]=E_c\left(B\right)-E_c\left(A\right)$

On obtient donc : $\Delta E_m = E_m\left(B\right)-E_m\left(A\right)=W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$

<u>Théorème</u> : Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.

Remarque : Les forces de frottement sont typiquement des forces non conservatives : en effet leur travail dépend fortement du chemin suivi. À noter aussi que ces forces exercent un travail résistant qui s'oppose au mouvement. Ainsi la présence de forces de frottement conduit à une diminution de l'énergie mécanique.

Bibliographie

- Physique : tout-en-un pour la licence, Cours, applications et exercices corrigés, Lurent Gautron, Dunod, Paris, 2010 ;
- **CAPES de Sciences physiques**, TOME 1 – physique, cours et exercices, N. Billy, J. Desbois, M.-A. Duval, M. Elias, P. Monceau, A. Plaszczynski, M. Toulmonde, Belin, 3[e] édition, Paris Octobre 2004.
- **Mécanique du point**, Michel Henry Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans) Agrégé de physique et Nicolas Delorme Maître de conférences à l'université du Maine (Le Mans)