CHAPITRE I : CALCUL VECTORIEL

I . VECTEURS, BASE et REPERE

1. Les vecteurs

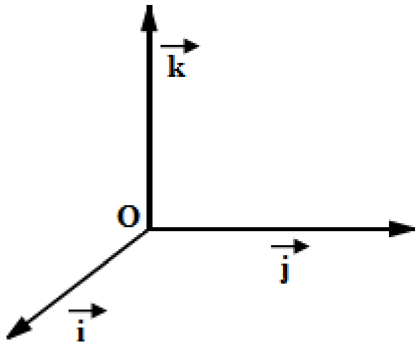
L'espace de la mécanique est l'espace $\boldsymbol{E^3}$, espace affine associé à $\boldsymbol{R^3}$**.** L'espace des vecteurs utilisé est l'espace vectoriel réel euclidien de dimension 3 noté $\boldsymbol{E^3}$**.** Un vecteur sera noté $\vec{u}$ et sa longueur $\|\vec{u}\|$ *norme de* $\vec{u}$. Le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Base

Une base de $\boldsymbol{E^3}$ est un ensemble de trois vecteurs non coplanaires ; nous la noterons $B(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ou B tout simplement.

<u>*Remarque*</u> : Dans le cas d'une base orthonormée directe de vecteurs de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a :

- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$
- $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$
- Les vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ et $\vec{k}$ ***forment un trièdre direct.***



3. Repère

- Un repère de $\boldsymbol{E^3}$est l'ensemble d'un point de $\boldsymbol{E}$ et d'une base de $\boldsymbol{E^3}$. Nous noterons un tel repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ou $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ou R . Les composantes dans le repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'un vecteur $\vec{u}$ sont les composantes (u_1,u_2,u_3) de $\vec{u}$ dans la base $B(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

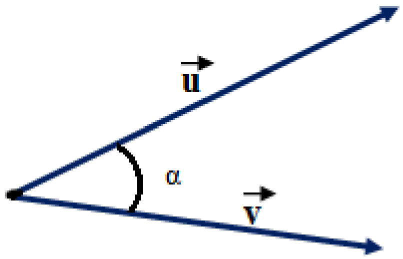
4. Le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (u_1,u_2,u_3) et (v_1,v_2,v_3) dans le repère orthonormé direct $\boldsymbol{R}$ est égal à : $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

- **Expression à partir des composantes des vecteurs** :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})\cdot(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k})\\ &= u_1v_1\vec{i}\cdot\vec{i} + u_2v_2\vec{j}\cdot\vec{j} + u_3v_3\vec{k}\cdot\vec{k}\\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\end{aligned}$$

- **Expression à partir des normes et l'angle formé par les deux vecteurs**



On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \cdot \vec{v})$

NB : Le vecteur unitaire $\vec{e}_{\vec{e}}$ d'un vecteur $\vec{v}$ est : $\vec{e}_{\vec{e}} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

II. LE PRODUIT VECTORIEL

1. Définition

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et soit α l'angle formé par ces deux vecteurs : $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$. Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère orthonormé direct ***R*** est égal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- le vecteur $\vec{0}$ si sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires, ou si $\vec{u} = \vec{v}$ ($\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$)
- le vecteur de longueur $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u} \cdot \vec{v})$, perpendiculaire au plan $(\vec{u}, \vec{v})$ orienté de tel sorte que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ soit direct si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Dans une base orthonormée direct $B(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la définition du produit vectoriel entraine : $\begin{cases} \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k} & \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} & \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j} \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} & \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0} & \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \end{cases}$

  NB : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

- **Expression à partir des composantes des vecteurs** :

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \left(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}\right) \wedge \left(v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}\right) \\ &= u_1 v_1 \vec{i} \wedge \vec{i} + u_1 v_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + u_1 v_3 \vec{i} \wedge \vec{k} + u_2 v_1 \vec{j} \wedge \vec{i} + u_2 v_2 \vec{j} \wedge \vec{j} + u_2 v_3 \vec{j} \wedge \vec{k} \\ &\quad + u_3 v_1 \vec{k} \wedge \vec{i} + u_3 v_2 \vec{k} \wedge \vec{j} + u_3 v_3 \vec{k} \wedge \vec{k} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot \vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Autre façon de l'exprimer :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{vmatrix}$$

- **Expression à partir des normes et l'angle formé par les deux vecteurs**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \sin\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$$

Remarque : Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, l'une au moins des trois propriétés suivantes est vérifiée :

$*\quad \vec{u} = \vec{0}$, $\quad * \quad \vec{v} = \vec{0}$; $\quad * \quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2. **Double produit vectoriel**

Quels soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, les deux propriétés suivantes vérifiées :

$$* \quad \vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \vec{v}.\left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) - \vec{w}.\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$$
$$* \quad \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{v}.\left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right) - \vec{u}.\left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)$$

3. **Le produit mixte**

Définition : Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est la valeur commune des trois produits $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w}$, $\left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) \cdot \vec{u}$, $\left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{v}$ il est noté : $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

On démontre facilement, en utilisant les composantes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $B\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les égalités suivantes :

$$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) \cdot \vec{u}$$

D'après ce qui précède, on a les égalités suivantes :

- $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = u_1\left(v_2w_3 - v_3w_2\right) + u_2\left(v_3w_1 - v_1w_3\right) + u_3\left(v_1w_2 - v_2w_1\right)$
- $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = \left(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right) = -\left(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\right)$

Si $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = 0$, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

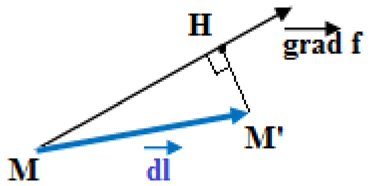
CHAPITRE II : LES OPERATEURS DIFFERENTIELS

I . LE VECTEURS GRADIENT

1. Définition du gradient

Soit une fonction scalaire f($\vec{r}$) définie dans une région de l'espace, nantie des qualités d'une bonne fonction (continuité, dérivabilité, …) comme le sont généralement les grandeurs physiques comme par exemple la température ***T***, l'indice de réfraction ***n***, la masse volumique ***ρ***, …

On définit son gradient entre deux points voisions M et M' tel que $d\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$ par le vecteur $\overrightarrow{grad}(f)$ qui vérifie la relation : $df \;=\; f(M') - f(M) = \overrightarrow{grad}(f)\cdot\overrightarrow{dl}$

	On définit ainsi le vecteur gradient comme suit : - **3 dimensions** : $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ - **2 dimensions** : $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y}$ - **1 dimension** : $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x}$

Exemple : Soit la fonction température définit par : $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$

$$\overrightarrow{gradT} = 2x\overrightarrow{e_x} + 2y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}$$

2. Expression du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

- Coordonnées cylindrique :

$$d\overrightarrow{MM'} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{e_\theta} + dz\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

- Coordonnées sphériques :

$$d\overrightarrow{MM'} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

3. Expression du gradient en fonction de l'opérateur $\vec{\nabla}$

Pour représenter le gradient, on utilise souvent formellement l'opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla) comme s'il s'agissait s'un vecteur :

$$\vec{\nabla} = \vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

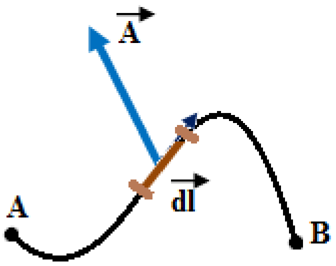
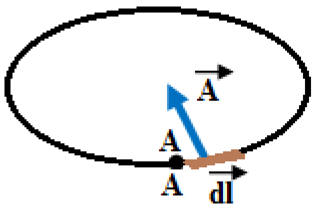
L'opérateur $\vec{\nabla}$ ne prend de sens que lorsqu'on l'applique à une fonction. Ainsi, $\overrightarrow{grad}\, f$ s'écrit en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

<u>Remarque</u> : cet opérateur se comporte comme un vecteur dans les produits scalaires et vectoriels

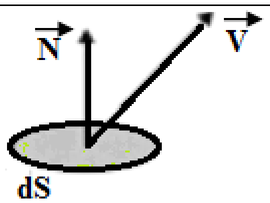
II. CIRCULATION D'UN VECTEUR

Soit $\vec{A}$ un vecteur mobile $\vec{dl}$ un élément de longueur.

<table>
<tr>
<td>On définit la circulation C du vecteur $\vec{A}$ le long de la courbe (A,B) par :
$$C = \int_A^B \vec{A}\cdot\vec{dl}$$

</td>
<td>Sur un contour fermé, la circulation du vecteur $\vec{A}$ s'écrit :
$$C = \oint_{A\to A} \vec{A}\cdot\vec{dl} = 0$$

</td>
</tr>
</table>

III. FLUX D'UN VECTEUR A TRAVERS UNE SURFACE

Soient $d\vec{S}$ un élément de surface ($d\vec{S} = \vec{N}dS$), $\vec{N}$ la normale à cet élément de surface. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>- Le flux élémentaire ($d\phi$) du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers dS est défini par : $d\phi = \vec{V}\cdot\vec{dS} = \vec{V}\cdot\vec{N}dS$
- Le flux (ϕ) du champ de vecteurs $\vec{V}$: $\phi = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{N}dS = \iint_S V.\cos(\theta)dS$</td>
</tr>
</table>

Pour une surface fermée (sphère, ellipsoïde, …) on écrit que le flux est égal à :

$$\phi = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{N} dS$$

IV. DIVERGENCE D'UN VECTEUR

On appelle divergence d'un vecteur $\vec{A}$, le produit scalaire de ce vecteur avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$.

$$\boxed{div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x \vec{e_x} + A_y \vec{e_y} + A_z \vec{e_z} \right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\boxed{div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

V. ROTATIONNEL D'UN VECTEUR

On appelle rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$, le vecteur résultant du produit vectoriel de l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ et du vecteur $\vec{A}$.

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\vec{e_x} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \wedge \left(A_x \vec{e_x} + A_y \vec{e_y} + A_z \vec{e_z} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e_z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e_x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e_y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e_z}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.}$$

VI. LE LAPLCIEN

Le Laplacien d'une fonction f est la divergence du gradient de cette fonction. C'est un scalaire, on le note : $\nabla^2 f$ ou Δf . L'opérateur Laplacien est noté : Δ.

$$div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$$

- **En coordonnées cartésiennes f(x,y,z)** :

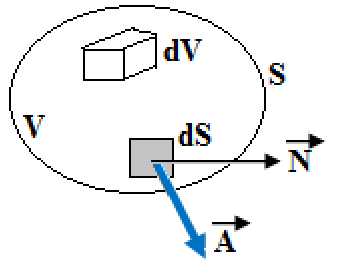
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **En coordonnées cylindriques f(ρ,Θ,z)**

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

VII. THEOREME DE GREEN-OSTROGRADSKY

Selon le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux total de tout vecteur $\vec{A}$ à travers une surface S entourant le volume V est tel que :



$$\iint_S \vec{A}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)dV = \iiint_V div\vec{A}.dV$$

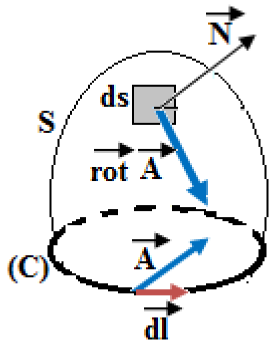
Exemple : $T(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2$

$$\vec{\nabla}T = 2x\vec{e_x} + 2y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$$

$$\oiint_S \vec{\nabla}T.dS = \iiint_V \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}T\right)dV = \iiint_V 5dV = 5V$$

VIII. LE THEOREME DE STOKES

Soit S une surface ouverte s'appuyant sur le contour fermé (C) et limité par lui.



$$\oint_{(C)} \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\cdot\vec{ds}\right) = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}\cdot\vec{N}ds$$

Si $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\, f \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{0}$

La formule de Stockes peut être considérer comme une relation de définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

IX. RELATIONS DE BASE

f et p étant des fonctions scalaires, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fp) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p + p\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = (\overrightarrow{\text{grad}}\,f)\cdot\vec{A} + f\,\text{div}\,\vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$$

$$\text{rot}(f\vec{A}) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \Delta f$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

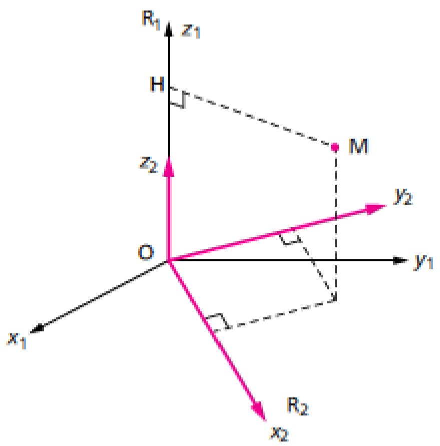
CHAPITRE III : LES REPERES EN MECANIQUE

INTRODUCTION

L'objet de la mécanique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les actions qui les déterminent et les conséquences qui en résultent.

Le mouvement se définit comme le changement de position d'un corps par rapport à un repère d'espace, changement s'effectuant au cours du temps. Ainsi, l'association des deux notions fondamentales *espace* et *temps* en mécanique classique introduit la notion de mouvement.

La description d'un mouvement suppose la présence d'un observateur qui devrait être muni d'un horloge et d'un solide de référence auquel sera généralement lié un système orthogonal.



I. LES REFERENTIELS

1. Mesure du temps.

La mesure du temps suppose implicitement une orientation du temps du passé vers le futur. Pour être complet, la mesure du temps exige le choix d'une origine. Celle-ci sera prise conventionnellement à un instant donné de l'évolution du phénomène étudié. Il apparait donc naturel d'adopter comme instant initial, l'instant pour lequel l'état du système est connu. Les instants ultérieurs correspondent alors à l'évolution du système vers le futur où le mouvement est encore inconnu. On mesure le temps à l'aide d'une horloge.

2. Les référentiels et les repères

Il est utile de préciser la signification de ces notions, souvent mélangées.

- **Référentiel**

Une expérience se déroule dans un système matériel rigide qui constitue le référentiel. Ce peut être l'amphithéâtre où se déroule ce cours, un train, un avion …la lune … .L'observateur est couramment lié à ce référentiel, mais ce n'est pas obligatoire.

- **Repère**

Pour repérer un mobile dans un référentiel, il faut définir une origine fixe, et trois axes fixes dans ce référentiel. Ils constituent le repère lié au référentiel. Les axes ne sont pas forcément orthogonaux, mais ils ne doivent pas être coplanaires afin de pouvoir étudier des mouvements à 3 dimensions, cas le plus général.

a. Le repère d'espace

Un repère d'espace est toujours lié à un observateur qui définit un système de trois axes de coordonnées à savoir ***Ox, Oy, Oz*** en associant *4 points suffisamment petits d'un espace affine Euclidien à 3D* ou *4 étoiles lointaines*. Un des point est pris comme origine O du repère et est associé à une base formée de 3 vecteurs $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_k}\right)$ ou $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On le note:

$$R = \left(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_k}\right) \text{ ou } R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$$

b. Les différents types de repères d'espace

Le repère de ***Copernic*** est le repère d'espace qui à pour origine le soleil et qui est dirigé vers trois étoiles lointaines fixes. Dans ce repère, les directions soleil-étoiles doivent etre orthogonales 2 à 2. Le repère de Copernic est le repère de référence.

Tous les autres repère se déduisent du repère de Copernic par des transformations géométriques qui sont appelées déplacements (translation, rotation, …). Il existe deux types de référentiels :

- **Les référentiels galiléens**

Ce sont des repères pour lesquels l'espace est homogène et isotrope, et le temps est uniforme (absolu). Ils ont une accélération nulle dans le repère de Copernic (translation ou rotation uniforme).

- **Les repères relatifs**

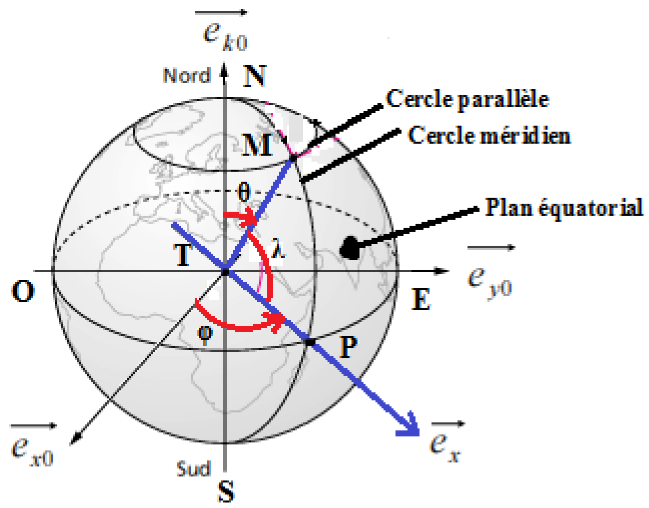
Ce sont des référentiels qui peuvent avoir des mouvements accélérés ou des rotations finies par rapport au repère de Copernic qui est un repère de référence.

c. Les repères terrestres

Les repères terrestres sont des repères d'espace qui sont établis à partir de points fixes sur la terre (mur d'un laboratoire, montagne, poteau, …).

d. Le repère géocentrique

C'est un repère qui à pour origine le centre de la terre et dont les axes sont parallèles à ceux du repère de Copernic. On le note : $\left(T, \overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$



- On appelle plan méridien ou cercle méridien, le cercle passant par un point situé à la surface de la terre et dont le diamètre est l'axe des pôles (N-S).
- On appelle cercle parallèle, le cercle passant par le point M et qui est parallèle au plan de l'équateur.

<u>Coordonnées géométriques d'un point situé à la surface de la terre.</u>

- On appelle ***longitude*** ou ***azimut*** d'un point, l'angle du demi méridien contenant M par rapport au demi () méridien contenant x_0. C'est l'angle **φ** que fait la projection de $\overrightarrow{TM}$ sur le plan équatorial avec $\overrightarrow{e_{x0}}$: $\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_x})$.
- On appelle latitude λ, le complémentaire de la co-latitude $\theta = (\overrightarrow{e_{z0}}, \overrightarrow{TM})$: $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$

  $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 0$ correspond au plan équatorial.

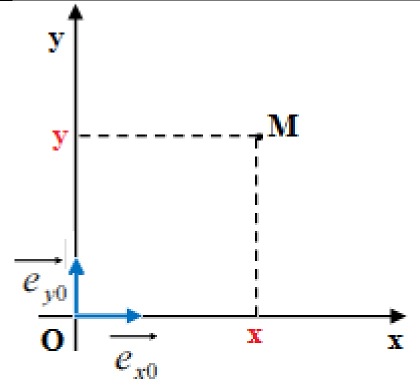
II. DETERMINATION DES COMPOSANTES D'UN VECTEUR

Bien que purement technique, la détermination des composantes d'un vecteur est capitale pour traduire les lois physiques de nature vectorielle.

1. Système usuel de coordonnées

Pour quantifier les mesures, le plus évident consiste à prendre un système d'axes orthonormé lié au repère qui permettra de déterminer les composantes du mouvement (position, vitesse, …) et des forces. Mais ce n'est pas la seule possibilité. De nombreux problèmes sont plus simples en utilisant un système de coordonnées cylindrique, sphérique …
Dans tous les cas il faudra définir une origine et 3 vecteurs unitaires qui définiront les directions des axes. Ces vecteurs constituent la base.
Attention, cette origine et les vecteurs ne sont pas forcément fixe par rapport au repère. Tout ceci s'éclairera plus tard.

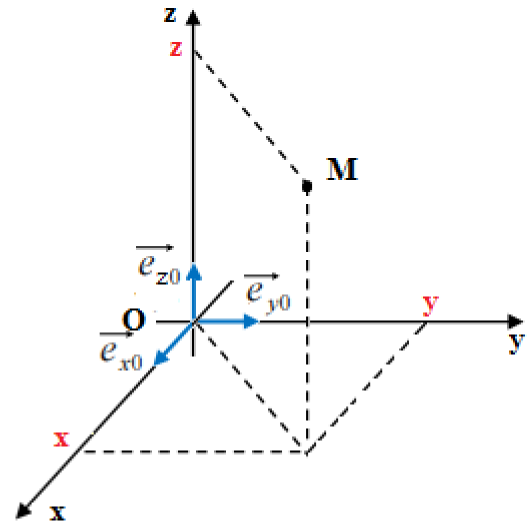
a. Coordonnées cartésiennes



Dans le plan x,o,y, défini par 2 axes rectangulaires Ox, Oy, la position d'un point M est déterminée par x et y qui sont deux nombres algébriques appelés coordonnées cartésiennes de M ou composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_{x0}} + dy\overrightarrow{e_{y0}}$$

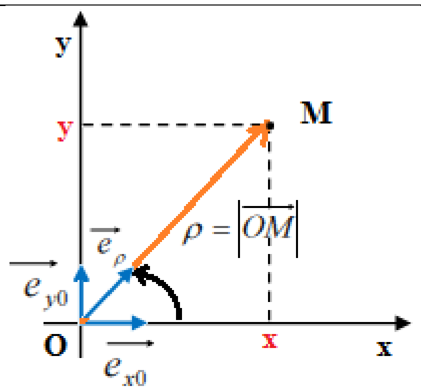


Dans l'espace ordinaire de dimension trois, la position de M sera déterminée en adjoignant aux deux précédentes x et y une troisième qui mesure la cote du point M et qui est noté z.

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

b. Coordonnées polaires



Si le problème étudié possède une symétrie de révolution autour d'un point O, il est commode d'utiliser les coordonnées polaires (ρ,φ).

$\rho = |\overrightarrow{OM}|$ = distance O à M

$\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{OM})$. En notant $\overrightarrow{e_\rho}$ le vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{OM}$, on à : $\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho})$

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = \rho(\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}})$ avec $\overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}$

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}}$ $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$

En élevant les deux expressions de $\overrightarrow{OM}$ au carré et en les égalant on a :

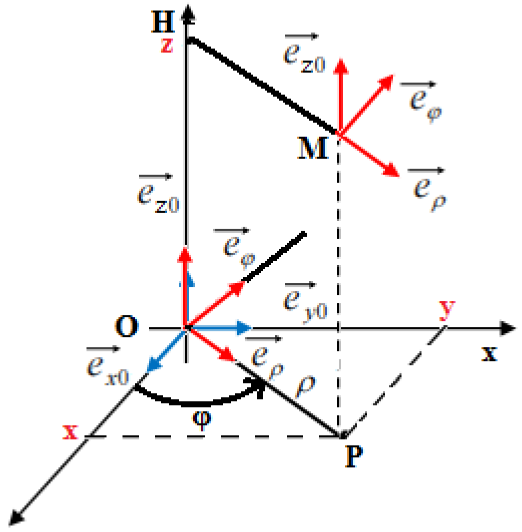
$$\overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \Rightarrow \rho^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho\sin\varphi}{\rho\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left(y/x \right)$$

c. Coordonnées cylindrique

Lorsque le problème étudié présente une symétrie de révolution autour d'un axe, les coordonnées cylindriques sont les plus indiquées. On détermine la position d'un point M dans l'espace (dimension 3) en associant aux deux coordonnées polaires *(ρ,φ)* et une troisième *z* qui fixe la côte du point M.

(ρ,φ,z) sont donc les coordonnées cylindriques du point M



Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_{z0}})$:

$\overrightarrow{e_\rho} = \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_{z0}}$;

$\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_{z0}} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$; $\qquad \overrightarrow{e_{z0}} = \overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$

Dans la base $(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}})$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} \quad (1)$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_{z0}})$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

Or

$$\varphi = (\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho}) \text{ et } \rho\overrightarrow{e_\rho} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_{z0}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} \quad (2)$$

(1)=(2) $\Leftrightarrow$

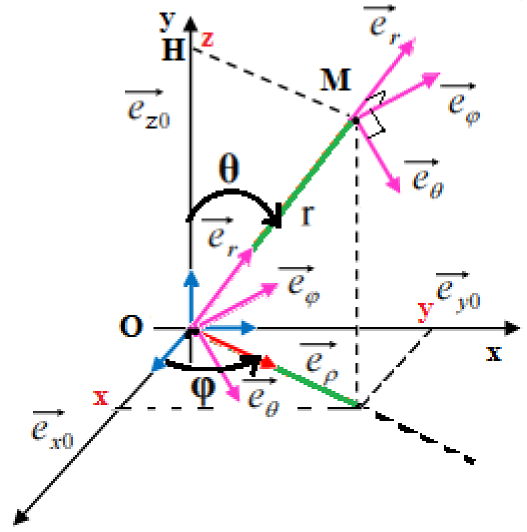
$$x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} = \rho\cos\varphi\overrightarrow{e_{x0}} + \rho\sin\varphi\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + z^2 \\ \overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases}$$

d. Coordonnées sphérique

Lorsque le problème étudié présente une symétrie sphérique autour d'un point O, il est commode de repérer les points de l'espace par un système de coordonnées sphérique ***(r, θ, φ).***

$\boldsymbol{r}$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ou distance de O à M, $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\varphi}$ sont deux angles qui fixent la position du rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.



Dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$:

$\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$;

$\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\varphi} \wedge \overrightarrow{e_r}$; $\quad \overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$

Dans la base $\left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} \quad (1)$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ on a : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$

$$\varphi = \left(\overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_\rho}\right) \quad , \quad \theta = \left(\overrightarrow{e_{z0}}, \overrightarrow{OM}\right)$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_{z0}} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\rho} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_\rho} = \cos\varphi\,\overrightarrow{e_{x0}} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_{y0}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\overrightarrow{e_r}\\ &= r\sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_{x0}} + r\sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_{y0}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{e_{z0}}\end{aligned}$$

(2)

(1)=(2) $\Leftrightarrow$

$$x\overrightarrow{e_{x0}} + y\overrightarrow{e_{y0}} + z\overrightarrow{e_{z0}} = r\sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_{x0}} + r\sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_{y0}} + r\cos\theta\,\overrightarrow{e_{z0}}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ \overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

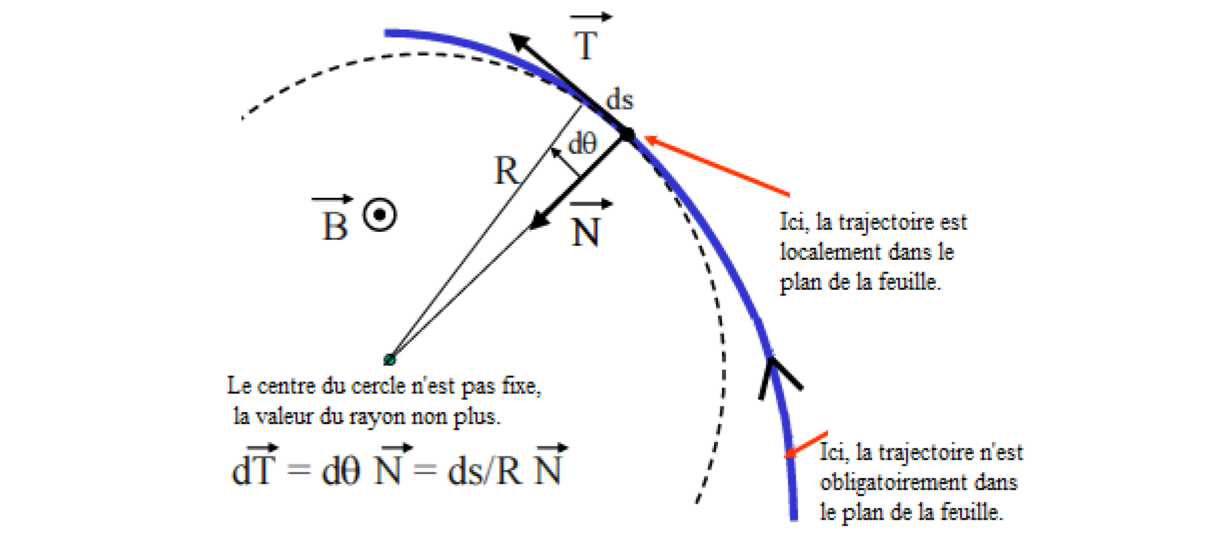
$$x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad r\sin\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

e. Coordonnées curvilignes ou repère de Frenet.

Le repère de Frenet est un repère local uniquement défini à partir des caractéristiques de la trajectoire C au point M. Certaines relations et propriétés s'expriment très simplement dans ce repère.

A un instant donné, il est toujours possible de définir un **plan osculateur** qui contient localement la trajectoire C du point.



Trois vecteurs unitaires sont alors définis de la manière suivante :

$\vec{T}$: tangent à la trajectoire C, donc dans le plan osculateur, orienté dans le sens du mouvement

$\vec{N}$: normal à $\vec{T}$ et donc à la trajectoire C, lui aussi dans le plan osculateur. Il est défini par la relation, maintenant classique, de la différentielle d'un vecteur unitaire qui tourne dans un plan: $d\vec{T} = d\theta.\vec{N}$

En définissant l'abscisse curviligne s, distance mesurée sur la trajectoire à partir d'une origine quelconque, et R le rayon de courbure de C au point M, l'angle $d\theta$ peut s'écrire $ds = R.d\theta$ d'où la définition plus classique :

$$\frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds} \quad \text{définition de } \vec{N}.$$

$\vec{N}$ *est dirigé vers la concavité de la courbe: par exemple si C est un cercle,* $\vec{N}$ *est dirigé vers son centre.*

$\vec{B}$ est le vecteur binormal, qui respecte: $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$.

$\vec{B}$ est normal au plan osculateur puisqu'il est normal à $\vec{T}$ et $\vec{N}$, qui sont tous les deux dans le plan osculateur.

f. Déplacement élémentaire

Soit M un point de l'espace affine. On appelle système de coordonnées dans l'espace affine tout mode de définition d'un point *M* de cet espace en fonction de n scalaires $\boldsymbol{q_i}$ qu'on appelle *coordonnées curvilignes du point M*.

$$\overrightarrow{OM} = q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3$$

Coord Cart : $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$; Coord Cylin : $\overrightarrow{OM}(\rho, \varphi, z)$; Coord Sph: $\overrightarrow{OM}(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} q_1 = x & \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_x} \\ q_2 = y & \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_y} \\ q_3 = z & \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = \rho & \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_\rho} \\ q_2 = \varphi & \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_\varphi} \\ q_3 = z & \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_z} \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 = r & \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_r} \\ q_2 = \theta & \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_\theta} \\ q_3 = \varphi & \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_\varphi} \end{cases}.$$

On appelle déplacement élémentaire de M, la variation $d\overrightarrow{OM}$:

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_3} dq_3$$

Posons : $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = h_i \cdot \overrightarrow{e_i}$; $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur unitaire et $h_i = \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \right|$ est appelé ***facteur métrique.***

Exemple : $\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{c} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{array} \right.$

$$q_1 = r \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \left| \begin{array}{c} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \right| = 1; \qquad h_1 = h_r = 1$$

$$q_2 = \theta \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \left| \begin{array}{c} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} \right| = r; \qquad h_2 = h_\theta = r \;;$$

$$q_3 = \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \left| \begin{array}{c} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \right| = r\sin\theta; \qquad h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$$

$$d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \overrightarrow{e_1} + h_2 dq_2 \overrightarrow{e_2} + h_3 dq_3 \overrightarrow{e_3}$$

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{e_r} + r d\theta \overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi \overrightarrow{e_\varphi}$$

- **Produit de 2 déplacements élémentaires**

Le produit de deux déplacements élémentaires est une surface.

$$dS_1 = h_2 dq_2 \cdot h_3 dq_3 = r d\theta \cdot r\sin\theta d\varphi = r^2 \sin\theta . d\theta d\varphi$$

$$dS_2 = h_1 dq_1 \cdot h_3 dq_3 = dr \cdot r\sin\theta d\varphi = r\sin\theta . dr d\varphi$$

$dS_3 = h_1 dq_1 \cdot h_2 dq_2 = dr \cdot r \sin\theta d\varphi = r.drd\theta$

- **Produit de trois déplacements élémentaires**

Le produit de trois déplacements élémentaires est un volume.

$dV = h_1 h_2 .h_3 .dq_1 dq_2 dq_3 = r^2 \sin\theta .drd\theta d\varphi$

<u>**Exercice**</u> :

1. Reprendre le calcul pour coordonnées cylindriques et cartésiennes.
2. On considère le vecteur $\vec{F}$ définit par $\vec{F} = (8xy - 3z^2)\overrightarrow{e_{x0}} + (4x^2 - 3z^2)\overrightarrow{e_{y0}} - 6z(x-y)\overrightarrow{e_{z0}}$. Calculer $d\vec{F}$, dS_2 , dS_3 , dV .

<u>CHAPITRE</u> IV : CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

La cinématique consiste à analyser le mouvement de "points" sans se préoccuper des causes de ce mouvement. Nous ne parlerons donc pas ici des forces ou des lois de Newton. Ce chapitre est purement mathématique.

L'espace sera supposé euclidien et isotrope, c'est à dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions. D'autre part, en mécanique classique, le temps est considéré comme absolu; il ne dépend pas du repère.

La position d'un point est généralement donnée dans un référentiel physique: le laboratoire, la terre, le soleil, l'observateur … Un repère lui est attaché, et un système de coordonnées est défini pour décrire le mouvement.

Il est bien clair que deux observateurs placés dans des repères en mouvement l'un par rapport à l'autre ne percevront pas le même mouvement. Lorsqu'une bille tombe verticalement dans un train, le passager va observer une droite, tandis que la vache à terre va contempler une parabole!

I. CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

1. Définition

Notons $\overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M compté à partir de l'origine O d'un référentiel .

- La vitesse de M par rapport à R est le vecteur suivant not $\vec{V}(M/R)$ ou encore $\vec{V}=\vec{V}(M/R)=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R$.

L'expression par rapport à R, signifie : *pour un observateur lié au référentiel R pour lequel les vecteurs de base sont fixes et donc indépendant du temps*.

- L'accélération du point M par rapport à R est le vecteur noté $\vec{a}(M/R)$, ou $\vec{\gamma}(M/R)$, ou $\vec{\Gamma}(M/R)$ ou plus brièvement $\vec{a}$, ou $\vec{\gamma}$, ou $\vec{\Gamma}$.

$$\vec{a}(M/R)=\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}/R=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/R$$

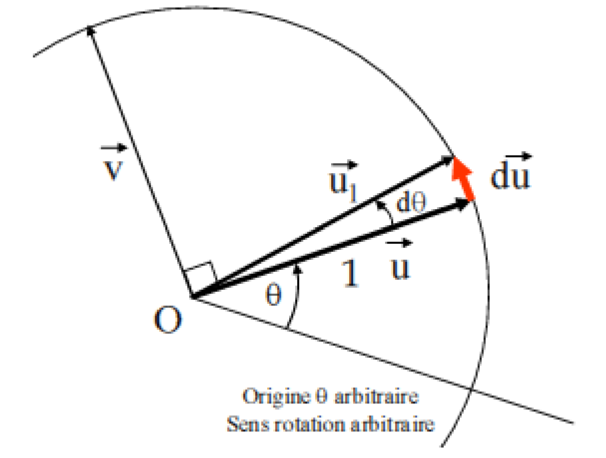
2. Différentielle d'un vecteur et dérivée

En mécanique, la différentielle d'un vecteur est à la base de très nombreux développements. La différentielle d'une grandeur, c'est simplement la modification engendrée par l'évolution d'un paramètre: changement du temps, mais aussi d'une longueur, d'un angle …
En d'autres termes c'est très exactement ce qu'il faut ajouter à la grandeur initiale pour obtenir la nouvelle.

Il est souvent commode d'exprimer un vecteur $\vec{U}$ par $\vec{U}=l\vec{u}$ Où l est un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur unitaire.

$\vec{u}$ précise la direction de $\vec{U}$, il n'a pas de dimension, et son module est égal à 1. Lorsque l et (ou) $\vec{u}$ varient, on a : $d\vec{U}=dl\vec{u}+ld\vec{u}$.

dl caractérise la variation du module du vecteur et $d\vec{u}$ la variation de la direction du vecteur.

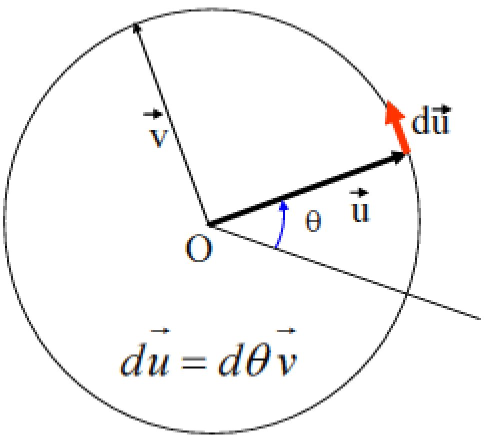
 	$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire, on : $\vec{u}^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{u}d\vec{u} = 0$. Le produit scalaire est nul, ce qui signifie que $\vec{u}$ est perpendiculaires $d\vec{u}$. La direction de $\vec{u}$ est repérée par un angle θ. Lorsque θ augmente de θ à $\theta + d\theta$ ce vecteur $\vec{u}$ devient $\vec{u_1}$.

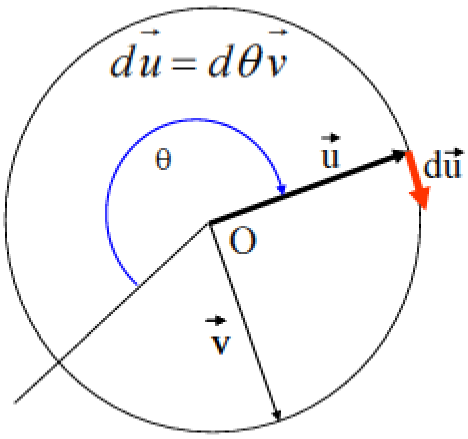
Rappelons que la différentielle de $\vec{u}$ notée $d\vec{u}$ c'est ce qu'il faut ajouter à $\vec{u}$ pour obtenir $\vec{u_1}$.

Il est évident sur la figure que si $d\theta$ est petit, $d\vec{u}$ possède les caractéristiques suivantes:

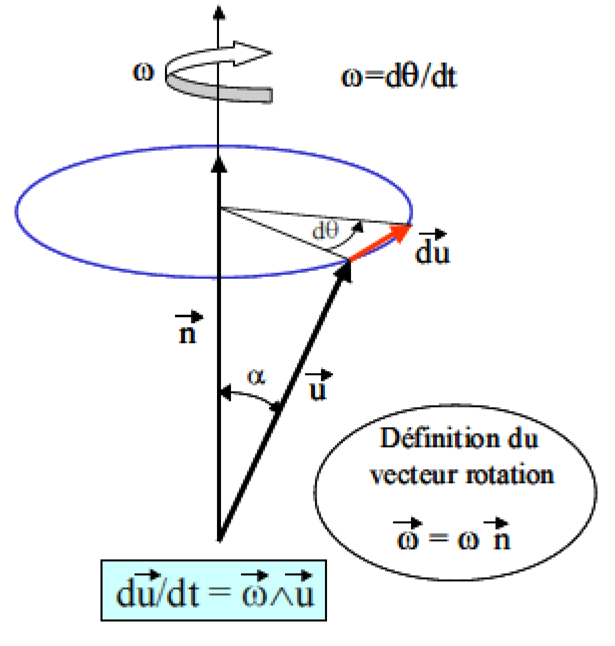
- il est porté par la tangente au cercle, et il est donc perpendiculaire à $\vec{u}$
- son sens est suivant les θ croissants
- le rayon du cercle étant égal à 1, son module est égal à $1.d\theta$

En définissant le vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ obtenu par rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens des θ croissants, $d\vec{u}$ s'écrit finalement: $d\vec{u} = d\theta\vec{v}$.





Nous retenons donc, très important, que ***dans un plan*** **:** $d\vec{u} = d\theta\vec{v}$**,** $\vec{u}$ ***vecteur unitaire,*** **mouvement dans un plan,** $\vec{v}$ étant un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ obtenu par rotation de $\vec{u}$ de $\frac{\pi}{2}$ **dans le sens des** θ **croissants.**



La différentielle étant connue, le calcul d'une dérivée quelconque est trivial. En mécanique, la plus communément rencontrée est la dérivée par rapport au temps qui s'écrira donc:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \omega.\vec{v} \text{ avec } \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ représente la vitesse de rotation que l'on appelle ω. Son unité est le radian par seconde et elle n'est pas forcément constante!

On définit alors le vecteur rotation $\vec{\omega}$, perpendiculaire au plan de rotation, dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon ce qui permet d'écrire : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$

3. **Expressions de $\overrightarrow{OM}$ (*position*), $\vec{V}$ (*vitesse*), $\vec{\Gamma}$ (*accélération*) dans les différents systèmes de coordonnées.**

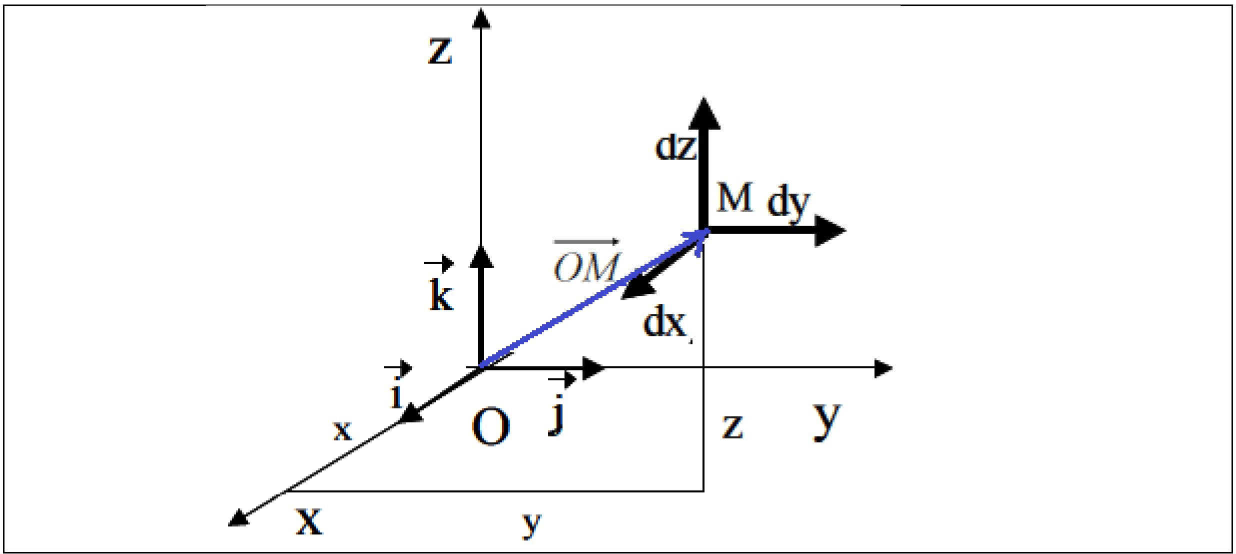
a. **Coordonnées cartésiennes**

C'est le système que l'on utilise par défaut, lorsqu'on n'a pas d'idée particulière sur la symétrie du système proposé.

Dans ce système les vecteurs unitaires, fixes dans le repère: leurs direction sens et module sont donc invariants.

Position du point M : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$



Vitesse : $\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dfrac{dx}{dt}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{dy}{dt}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z}$

$\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ Dans cette expression les composantes du vecteur vitesse sont : $V_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$; $V_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$; $V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$.

Accélération:

$\vec{\Gamma}(M/R) = \dfrac{d\vec{V}(M/R)}{dt}$. En procédant de la même manière que pour le calcul de $\vec{V}$ on a :

$d\vec{V} = dV_x\overrightarrow{e_x} + dV_y\overrightarrow{e_y} + dV_z\overrightarrow{e_z}$. En dérivant ce déplacement élémentaire on obtient l'accélération.

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\overrightarrow{e_x} + \frac{dV_y}{dt}\overrightarrow{e_y} + \frac{dV_z}{dt}\overrightarrow{e_z} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_z}$$

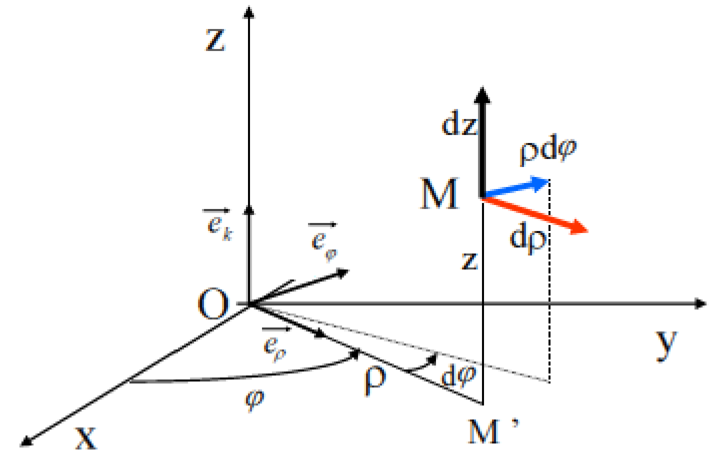
$$\vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_z} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$$

b. Coordonnées cylindriques

Ces coordonnées particularisent un axe: ici, et souvent, ce sera Oz. Elles seront fréquemment utilisées lorsqu'il existe une rotation autour d'un axe.
Ce système s'appuie sur un système orthonormé Oxyz fixe dans le repère.

Position du point M : $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + dz\overrightarrow{e_z}$



Projection de M sur Oxy

ρ : distance à l'axe, varie généralement de 0 à $+\infty$, mais il est possible traiter un problème avec $-\infty < \rho < +\infty$;

φ : azimut varie de 0 à 2π ;

z : hauteur varie de $-\infty$ à $+\infty$

<u>Vitesse</u> : $\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dfrac{d\rho}{dt}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dfrac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_\varphi} + \dfrac{dz}{dt}\overrightarrow{e_z} = V_\rho\overrightarrow{e_\rho} + V_\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + V_x\overrightarrow{e_z}$

$\vec{V}(M/R) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$ Dans cette expression les composantes du vecteur vitesse sont : $V_\rho = \dfrac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$; $V_\varphi = \rho\dfrac{d\varphi}{dt} = \rho\dot{\varphi}$; $V_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z}$.

En posant $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \omega$ on a : $V_\varphi = \rho\dfrac{d\varphi}{dt} = \rho.\omega$. $\rho.\omega$ porte le nom de **vitesse orthoradiale (nommée V_φ),** orientée suivant une direction perpendiculaire au rayon. A ne pas confondre avec la vitesse tangentielle, qui est justement $\vec{V}$

<u>Accélération</u>:

Pour calculer l'accélération nous procédons par dérivation de la vitesse $\vec{V}$ on a :

$$\vec{\Gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}$$

$$d\vec{V}(M/R) = d\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}d\overrightarrow{e_\rho} + d\rho.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.d\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.\dot{\varphi}d\overrightarrow{e_\varphi} + d\dot{z}\overrightarrow{e_z} \quad .$$

En tenant compte du fait que : $d\overrightarrow{e_\rho} = d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$ et $d\overrightarrow{e_\varphi} = -d\varphi\overrightarrow{e_\rho}$, on a :

$$\begin{aligned} d\vec{V}(M/R) &= d\dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \dot{\rho}.d\varphi\overrightarrow{e_\varphi} + d\rho.\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} + \rho.d\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi} - \rho.\dot{\varphi}d\varphi\overrightarrow{e_\rho} + d\dot{z}\overrightarrow{e_z} \\ &= (d\dot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}d\varphi)\overrightarrow{e_\rho} + (\dot{\rho}.d\varphi + d\rho.\dot{\varphi} + \rho.d\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + d\dot{z}\overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{1}{dt}(d\dot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}d\varphi)\overrightarrow{e_\rho} + \frac{1}{dt}(\dot{\rho}.d\varphi + d\rho.\dot{\varphi} + \rho.d\dot{\varphi})\overrightarrow{e_\varphi} + \frac{d\dot{z}}{dt}\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{\Gamma}(M/R)=\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}=\left(\frac{d\dot{\rho}}{dt}-\rho.\dot{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{e_\rho}+\left(\dot{\rho}.\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\rho}{dt}.\dot{\varphi}+\rho.\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\right)\vec{e_\varphi}+\frac{d\dot{z}}{dt}\vec{e_z}$$

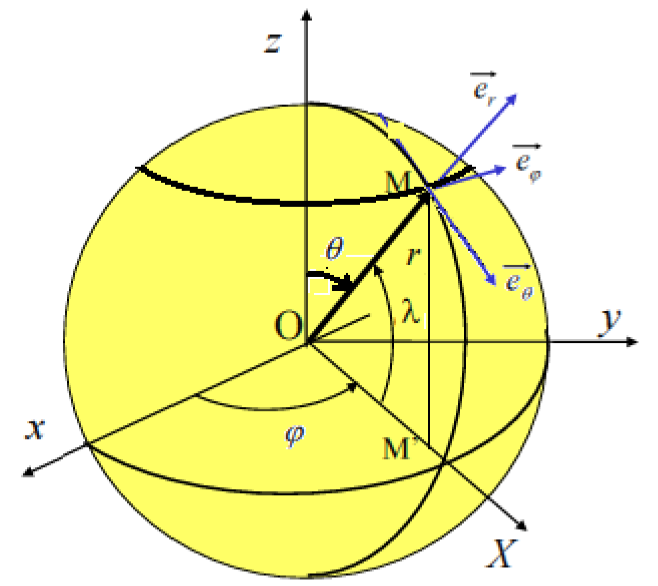
$$\vec{\Gamma}(M/R)=\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}=\left(\ddot{\rho}-\rho.\dot{\varphi}^2\right)\vec{e_\rho}+\left(2\dot{\rho}.\dot{\varphi}+\rho.\ddot{\varphi}\right)\vec{e_\varphi}+\ddot{z}\vec{e_z}$$

c. Coordonnées sphérique

Ces coordonnées, comme les cylindriques particularisent un axe, z en général, et seront utilisées lorsque le système étudié présente un ou plusieurs axes de rotation.
Aucun des vecteurs unitaires de la base n’est fixe dans le repère, ils dépendent tous de la position du point M.
Ce système s’appuie lui aussi sur un système orthonormé Oxyz fixe dans le repère.

Position du point M : $\overrightarrow{OM}=r\vec{e_r}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM}=dr\vec{e_r}+rd\theta\vec{e_\theta}+r\sin\theta d\varphi\vec{e_\varphi}$



r: distance à l'axe, varie généralement de 0 à $+\infty$, mais il est possible traiter un problème avec $-\infty<\rho<+\infty$;

φ : longitude varie de 0 à 2π ;

θ : co-latitude varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$

<u>Vitesse</u> : $\vec{V}(M/R)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R=\frac{dr}{dt}\vec{e_r}+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}+r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}=V_r\vec{e_r}+V_\theta\vec{e_\theta}+V_\varphi\vec{e_\varphi}$

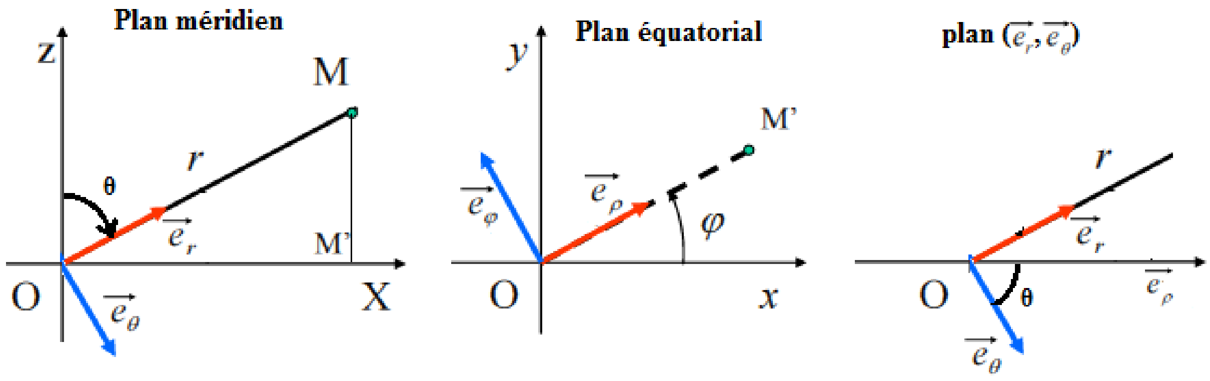
$\vec{V}(M/R)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}+r\sin\theta.\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$ Dans cette expression les composantes du vecteur vitesse sont : $V_r=\dot{r}$; $V_\theta=r\dot{\theta}$; $V_\varphi=r\sin\theta.\dot{\varphi}$.

<u>Accélération</u>:

Pour calculer l’accélération nous procédons par dérivation de la vitesse $\vec{V}$ on a :

$$\vec{\Gamma}(M/R)=\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{V}(M/R)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/R=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}+r\sin\theta.\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$$

$$d\vec{V}(M/R)=d\dot{r}\vec{e_r}+\dot{r}d\vec{e_r}+\left(dr.\dot{\theta}+r.d\dot{\theta}\right)\vec{e_\theta}+r\dot{\theta}d\vec{e_\theta}+$$
$$\left(dr.\dot{\varphi}\sin\theta+r\cos\theta d\theta.\dot{\varphi}+r\sin\theta d\dot{\varphi}\right)\vec{e_\varphi}+r\sin\theta.\dot{\varphi}d\vec{e_\varphi}$$



En tenant compte du fait que : $d\vec{e_\rho}=d\varphi\vec{e_\varphi}$; $d\vec{e_\varphi}=-d\varphi\vec{e_\rho}$; $d\vec{e_r}=d\theta\vec{e_\theta}$; $d\vec{e_\theta}=-d\theta\vec{e_r}$, et que $\vec{e_\rho}=\cos\theta\vec{e_\theta}+\sin\theta\vec{e_r}$ on a :

$$\vec{\Gamma}(M/R)=\left(\ddot{r}-r.\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e_r}+\left(r\ddot{\theta}+2\dot{r}.\dot{\theta}-r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\vec{e_\theta}$$
$$+\left(2\dot{r}.\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+r\sin\theta\ddot{\varphi}\right)\vec{e_\varphi}$$

d. Coordonnées curvilignes, ou repère de Frenet.

La position est par définition confondue avec l'origine du système : $\vec{ds}=ds\vec{T}$

Vitesse :

Le vecteur $\vec{T}$ étant tangent à la trajectoire, dans le sens du déplacement, la vitesse s'écrit de manière évidente: $\vec{V}=\frac{ds}{dt}\vec{T}$ soit avec $V=\frac{ds}{dt}$ qui représente la vitesse et qui est toujours >0.

$\vec{V}$ n'a donc qu'une composante, qui est la vitesse tangentielle.

NB : la distance totale parcourue entre t$_1$ *et t*$_2$ *se déduit immédiatement de* $V=\frac{ds}{dt}$.

$$ds=V.dt \quad \text{et} \quad s=\int_{t_1}^{t_2}V.dt$$

Accélération :

La variation de vitesse s'écrit aisément: $d\vec{V}=dV\vec{T}+Vd\vec{T}$

D'où l'accélération, $\vec{\Gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}.\frac{ds}{dt}$ et, en utilisant la définition de $\vec{N}$ pour exprimer $d\vec{T}$, c'est-à-dire $\frac{\vec{\mathrm{N}}}{R} = \frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds}$ on a:

$$\vec{\Gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N}$$

$\frac{dV}{dt}$ ***est l'accélération tangentielle et*** $\frac{V^2}{R}$ ***est l'accélération normale.***

<u>Rayon de courbure</u> : On définit le rayon de courbure **ρ** de la trajectoire par :

$$\rho = \frac{|V|^3}{\left\|\vec{V} \wedge \vec{\Gamma}\right\|}$$

II. EXEMPLES

1. Mouvement rectiligne

Un mouvement rectiligne est un mouvement d'un point matériel M sur une droite OX (O étant l'origine des abscisses).

La position du mobile M est définie à l'instant t par son abscisse $x = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

Le vecteur vitesse est porté par la droite OX et son module est : $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

Le vecteur accélération est aussi porté par la droite OX et son module est : $a = \Gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

<u>Cas particuliers</u> :

- le mouvement est dit uniforme si la vitesse est constante : ***V=cte***
- le mouvement est uniformement varié si l'accélération est constante : $a = cte$
- Une double intégraton de laccélération donne l'équation horaire du mouvement :

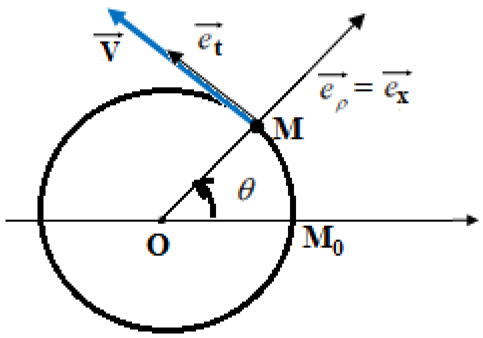
$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = at + \dot{x}_0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}_0\,\mathrm{t} + \mathrm{x}_0$$

$$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{2}at^2 + V_0\,\mathrm{t} + \mathrm{x}_0$$

On appelle ***hodographe*** de pôle O, le lieu des points H tels que $\overrightarrow{OH} = \vec{V}$.

2. Mouvement circulaire

Un mouvement circulaire est le mouvement d'un point matériel sur une circonférence. Soit O le centre de la circonférence et R son rayon.



$$\theta = \left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}\right) ; \quad M_0M = R\theta$$

$$V = \frac{dM_0M}{dt} = R\dot{\theta} \text{ car R = cte.} \quad \vec{V} = R\dot{\theta}.\vec{e_t}$$

$$\vec{a} = \frac{d(R\dot{\theta}\vec{e_t})}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{e_t} + R\dot{\theta}\frac{d(\vec{e_t})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e_t}}{dt} = \frac{d\vec{e_t}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e_\rho}$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e_t} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho} \qquad \vec{a_t} = R\ddot{\theta}\vec{e_t} \qquad \vec{a_\rho} = \vec{a_N} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$$

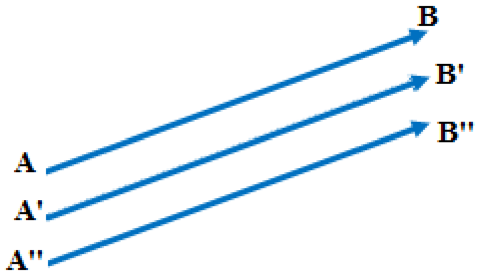
Le mouvement circulaire est dit uniforme si :

$$V = cte \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta} = cte \;\Rightarrow\; \vec{a_t} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a_N} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_N}\,.$$

III. MOUVEMENT D'UN REPERE R' PAR RAPPORT A UN REFERENTIEL R

1. Mouvement de translation (a introduire en L2 ??????)

Le repère d'espace R' a un mouvement de translation par rapport au référentiel R si, au cours du mouvement, les bipoints formés à partir de deux points quelconques A et B de ses points sont équipollents entre eux. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc constant dans R :



$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt}/R = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)/R = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R)$$

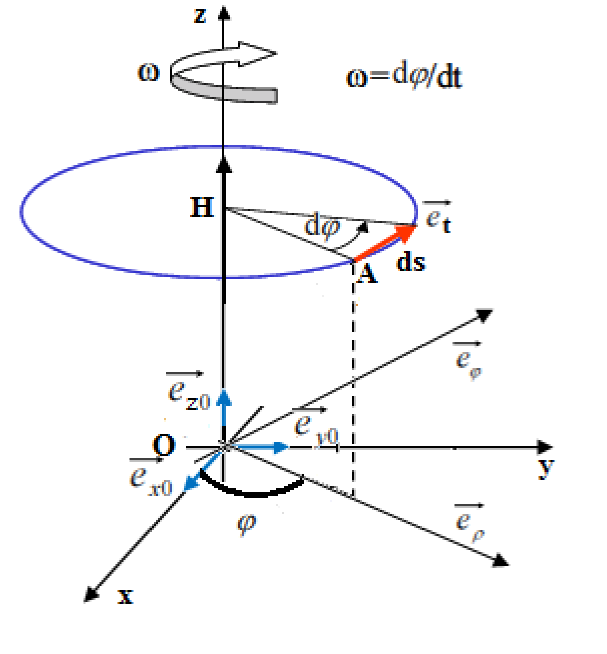
Il en est de même des vecteurs de la base orthonormée du repère R' et l'accélération :

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R)$$

Tous les points de R' ont donc même vitesse et même accélération par rapport à R.

2. Rotation du repère R' par rapport à un axe du référentiel R

Lorsque le repère R' (*repère cylindrique*) tourne autour d'un axe du référentiel R, par exemple *Oz*, un point A fixe dans R', décrit par rapport à R, un cercle de centre H et de rayon HA, H étant la projection de A sur l'axe de rotation Oz. Sa vitesse est :



$$\vec{V}(A/R)=\frac{ds}{dt}\vec{e}_t \;.\; s=HA.\varphi \Rightarrow ds=HAd\varphi$$

d'où

$$\vec{V}(A/R)=\frac{ds}{dt}\vec{e}_t=\frac{d(HA.\varphi)}{dt}\vec{e}_t=HA.\dot{\varphi}\vec{e}_t$$

$$\vec{V}(A/R)=\frac{ds}{dt}\vec{e}_t=HA.\dot{\varphi}\vec{e}_t$$

Cette vitesse est tangente au cercle.

- Tous les points situés sur l'axe (Oz) ont une ***vitesse nulle***.
- Les points O et A appartiennent au repère R'. La vitesse du point A par rapport à R s'écrit aussi : $\vec{V}(A/R)=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OA}=HA.\dot{\varphi}\vec{e}_t$

Le repère R' $\left(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_{z0}\right)$ tourne autour de l'axe (Oz) avec comme vecteur de rotation $\vec{\Omega}$: $\vec{\Omega}=\dot{\varphi}\vec{e}_{z0}$. $\quad \vec{V}(A/R)=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OA}=HA.\dot{\varphi}\vec{e}_t$

$$\begin{vmatrix}0\\HA\dot{\varphi}\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}HA\\0\\OH\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\HA\dot{\varphi}\\0\end{vmatrix}$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{vmatrix}\right)$$

3. Mouvement le plus général de R'/R

a. Champ de vecteur vitesses de R'

Considérons deux points quelconques A et B appartenant à R'. Les mouvements de ces points par rapport à R sont tels que ***le carré de la distance AB*** séparant ces deux points est une constante : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=cte$.

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\right)}{dt}=\frac{d(cte)}{dt}=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\frac{d\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)}{dt}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\left[\vec{V}(B/R)-\vec{V}(A/R)\right]=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{V}(B/R)=\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A/R)$$

Cette relation est la propriété ***d'équiprojectivité*** de la vitesse. Cette propriété d'équiprojectivité permet de montrer que :

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(B/R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BA} = \vec{V}(B/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}. \qquad (\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a})$$

b. Dégré de liberté

On appelle ***dégré de liberté*** d'un système le nombre de paramètres qu'il faut se donner pour connaitre de manière non ambigüe la ***position de ce système***.

Exemple :

- Mouvement d'un point matériel sur une droite : un degré de liberté (l'abscisse x).
- Mouvement d'un point matériel sur un plan : 2 degrés de liberté (x, et y).
- Mouvement d'un point matériel sur une sphère : 3 degrés de liberté (r, θ et φ).

<u>CHAPITRE</u> V : CHANGEMENT DE REFERENTIEL ET COMPOSITION DE MOUVEMENTS

L'intérêt d'introduire les changements de repères est justifié par au moins deux points:

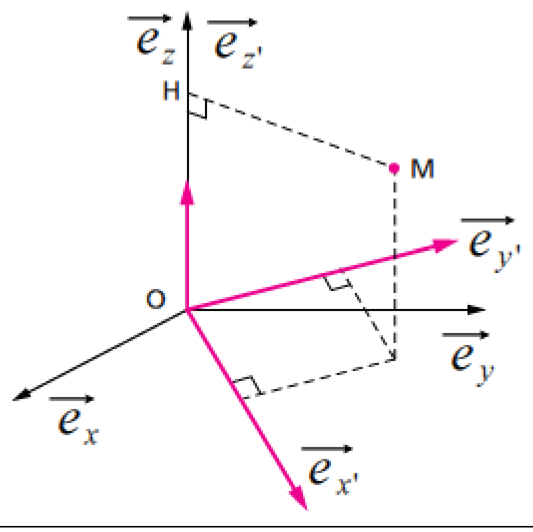
- Un mouvement peut s'avérer très simple dans un repère, lui-même animé d'un mouvement par rapport au repère ou se trouve l'observateur. Le problème est alors scindé en deux parties, ce qui rend son analyse plus simple.
- La relation fondamentale de la dynamique n'est vérifiée que dans une classe de référentiels, les référentiels inertiels, appelés aussi Galiléens. Il faut donc de toute manière s'y raccrocher.

Jusqu'à présent nous avons décris le mouvement d'un point matériel A, par rapport à un référentiel R en introduisant sa vitesse et son accélération par rapport à R.

La question à laquelle nous souhaitons répondre est d'une autre nature : R et R' étant deux référentiels en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre, quelles relations existe-t-il entre les caractéristiques cinématiques, vitesse et accélération, du même point A, relativement à R et R'?

I. VECTEUR ROTATION

En mécanique, les concepts de vitesse et d'accélération sont sont relatifs au référentiel par auquel on analyse le mouvement. Considérons deux référentiels R et R' en mouvement quelconque l'un par rapport à l'autre.



$R=\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$: repère absolu

$R'=\left(O',\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}}\right)$: repère relatif

Ici, ***O = O'***.

Les référentiels R et R' se distinguent que par leurs repères d'espace, lesquels sont définis leurs origines et par trois vecteurs linéairement indépendants qui forment une base du référentiel.

1. Dérivée d'un vecteur

Il est ressorti au chapitre précédent, la nécessité de dériver le vecteur position par rapport au temps et relativement à une base pour obtenir les vecteurs position et accélération. Il importe donc d'établir avant tout développement la relation entre ***un vecteur et sa dérivée*** par rapport au temps relativement à des ***bases de référentiels différents***.

Considérons deux repères $R=\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ et $R'=\left(O,\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}}\right)$ et un vecteur $\vec{u}$ défini dans les deux repères par :

$$\begin{cases}\vec{u}=x\overrightarrow{e_x}+y\overrightarrow{e_y}+z\overrightarrow{e_z} & \text{dans le repére R}\\ \vec{u}=x'\overrightarrow{e_{x'}}+y'\overrightarrow{e_{y'}}+z'\overrightarrow{e_{z'}} & \text{dans le repère R'}\end{cases}$$

On a : $\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R=\dot{x}\overrightarrow{e_x}+\dot{y}\overrightarrow{e_y}+\dot{z}\overrightarrow{e_z}$ et $\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R'=\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}}+\dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}}+\dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}$

Pour $\vec{u}=x'\overrightarrow{e_{x'}}+y'\overrightarrow{e_{y'}}+z'\overrightarrow{e_{z'}}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}}{dt}/R&=\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}}+x'\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}/R+\dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}}+y'\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}/R+\dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}+z'\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}/R\\&=\dot{x}'\overrightarrow{e_{x'}}+\dot{y}'\overrightarrow{e_{y'}}+\dot{z}'\overrightarrow{e_{z'}}+x'\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}/R+y'\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}/R+z'\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}/R\\&=\frac{d\vec{u}}{dt}/R'+x'\frac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}/R+y'\frac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}/R+z'\frac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}/R\end{aligned}$$

En notant $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de R' par rapport à R, on peut écrire à partir des résultats du ***paragraphe I*** du chapitre précédent ($\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{u}$) que :

$\left(\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}}\right)$ étant une base de R' ;
$\dfrac{d\overrightarrow{e_{x'}}}{dt}/R=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{x'}}$; $\dfrac{d\overrightarrow{e_{y'}}}{dt}/R=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{y'}}$; $\dfrac{d\overrightarrow{e_{z'}}}{dt}/R=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{z'}}$;

d'où : $\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R=\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R'+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{x'}}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{y'}}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{e_{z'}}=\dfrac{d\vec{u}}{dt}/R'+\vec{\Omega}\wedge\left(\overrightarrow{e_{x'}}+\overrightarrow{e_{y'}}+\overrightarrow{e_{z'}}\right)$

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt}/R=\frac{d\vec{u}}{dt}/R'+\vec{\Omega}\wedge\vec{u}}$$

Notons que le terme complémentaire $\vec{\Omega}\wedge\vec{u}$ provident de la modification de direction de la direction des vecteurs unitaires de ***R'***. $\vec{\Omega}=\vec{\Omega}(R'/R)$ est appelé vecteur vitesse de rotation de ***R'*** par rapport à ***R***.

Remarques :

- $\vec{\Omega}(R'/R)=-\vec{\Omega}(R/R')$
- Si $\vec{u}$ est fixe dans R', c'est le cas des vecteurs unitaires de R' on a :

$$\frac{d\vec{u}}{dt}/R' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}}{dt}/R = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$$

- Le vecteur $\vec{\Omega}$ admet les mêmes dérivées dans les deux repères R et R’. En effet on a :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R' + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \quad \text{or} \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} = \vec{0} \quad \text{d'où:} \quad \boxed{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R'}$$

2. Composition des vecteurs vitesses de rotation

Soient deux point A et B appartenant à un repère $\mathbf{R_2}$ en rotation par rapport au référentiel $\mathbf{R_1}$ lui-même en rotation par rapport au référentiel $\mathbf{R_0}$. Notons $\vec{\Omega}(R_2/R_0)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R_1)$ respectivement les vecteurs vitesses de rotation de $\mathbf{R_2}$ par rapport aux référentiels $\mathbf{R_0}$ **et** $\mathbf{R_1}$.

On a : $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$ et $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/R_1 = \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{AB}$

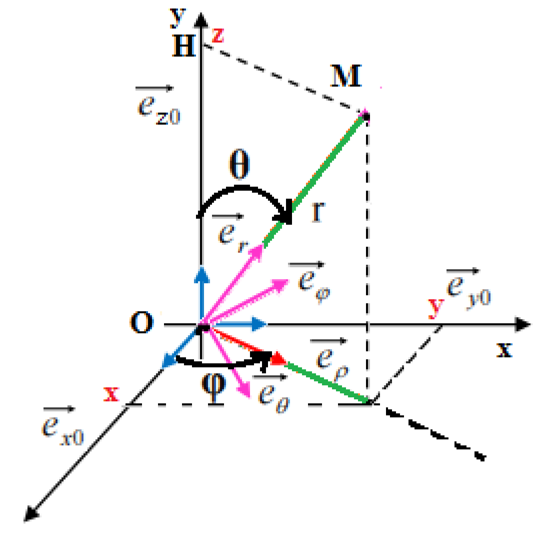
D’autre part, on a également : $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/R_0 = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/R_1 + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$ d’où:

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}/R_0 = \vec{\Omega}(R_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} &= \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \left(\vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\right) \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Ce qui permet d’écrire que:

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \left(\vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\right)}$$

<u>Aplication: cas du repère sphérique</u>.



$R_0 = \left(O, \overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$: repère absolu

$R_1 = \left(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$: repère cylindrique

$R_2 = \left(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$: repère sphérique

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z0}}$$

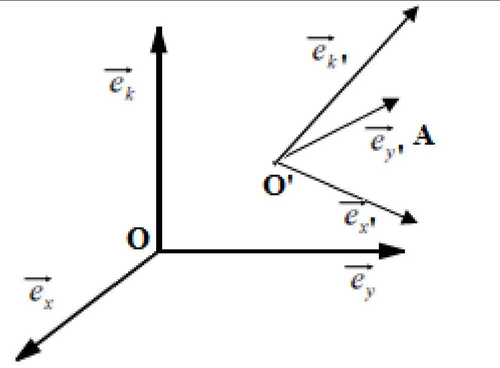
$$\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\boxed{\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_{z0}} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_\varphi}}$$

Le vecteur de rotation résultant est la somme des deux vecteurs de rotation : rotation autour de $\overrightarrow{e_{z0}}$ pour former le repère cylindrique, et rotation autour de $\overrightarrow{e_{\varphi}}$ pour former le repère sphérique.

II. COMPOSITION DES VITESSES

1. Loi de composition des vitesses



Soit R et R' deux repères quelconque d'origines respectives O et O'. Quelque soit le mouvement de l'un par rapport à l'autre, pour un point A quelconque on à :

$$\vec{V}(A/R) = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}/R \quad \text{et} \quad \vec{V}(A/R') = \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R'$$

En soustrayant ces deux expressions on peut écrire :

$$\vec{V}(A/R) - \vec{V}(A/R') = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}/R - \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R' \text{ . Posons } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

$$\vec{V}(A/R) - \vec{V}(A/R') = \frac{d\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}\right)}{dt}/R - \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R' = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R + \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R - \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R'$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/R = \vec{V}(O'/R) \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R' = \vec{V}(A/R')$$

$$\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R = \frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R' + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A} = \vec{V}(A/R') + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

D'où: $\vec{V}(A/R) - \vec{V}(A/R') = \vec{V}(A/R') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A} - \vec{V}(A/R')$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

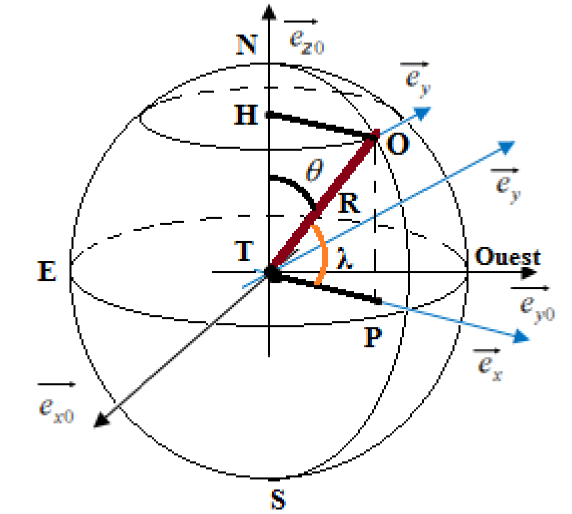
$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R') + \overrightarrow{V_e} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'A}$$

La vitesse $\overrightarrow{V_e}$ est appelée ***vitesse d'entrainement.*** C'est la vitesse du point A invariablement lié à R'.

Remarque : Dans le cas particulier d'un mouvement de *translation uniquement* (*pas de rotation*), on a : $\vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_e} = \vec{V}(O'/R)$. La vitesse d'entrainement du point A est égale à la vitesse de l'origine du repère R'. Elle est donc indépendante de la position du point A.

2. Application : conditions idéale pour le lancement d'un satellite.

Soit $R=\left(T,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_{zo}}\right)$ le référentiel terrestre invariablement lié à la terre. Désignons $R_g=\left(T,\overrightarrow{e_{x0}},\overrightarrow{e_{y0}},\overrightarrow{e_{z0}}\right)$ le référentiel géocentrique qui a pour origine le centre T de la terre et des axes parallèles à ceux du repère de Copernic R_0 (lié au soleil et à trois étoiles lointaines).



Soit O un point de la surface de la terre immobile dans **R** et situé à la latitude **λ**. La vitesse de O par rapport à $\boldsymbol{R_g}$ est :

$$\vec{V}(O/R_g)=\vec{V}(O/R)+\vec{V}_e$$

Or $\vec{V}(O/R)=\vec{0}$ car O est immobile dans R.

$$\vec{V}_e(O)=\vec{V}(T/R_g)+\vec{\Omega}(R/R_g)\wedge\overrightarrow{TO}$$

De même $\vec{V}(T/R_g)=\vec{0}$ car T est origine de $\boldsymbol{R_g}$

$$\vec{V}_e(O)=\vec{\Omega}(R/R_g)\wedge\overrightarrow{TO}$$

$\vec{\Omega}=\dot{\Omega}\overrightarrow{e_{z0}}$ et $\overrightarrow{TO}=R.\sin\theta\overrightarrow{e_x}+R.\cos\theta\overrightarrow{e_{z0}}$.

$$\Rightarrow\vec{\Omega}(R/R_g)\wedge\overrightarrow{TO}=\dot{\Omega}\overrightarrow{e_{z0}}\wedge\left(R.\sin\theta\overrightarrow{e_x}+R.\cos\theta\overrightarrow{e_{z0}}\right)=\dot{\Omega}.R\sin\theta\left(\overrightarrow{e_{z0}}\wedge\overrightarrow{e_x}\right)=\dot{\Omega}.R\sin\theta\overrightarrow{e_y}$$

Or $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\lambda\ \Rightarrow\ \sin\theta=\cos\lambda$ d'où: $\vec{V}(O/R_g)=\vec{\Omega}(R/R_g)\wedge\overrightarrow{TO}=R.\dot{\Omega}.\cos\lambda\overrightarrow{e_y}$

$$\dot{\Omega}=\frac{d\Omega}{dt}=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3600\times24}=7{,}3.10^{-5}\ \text{rad/s};\ \text{R}=6400\,\text{km};\ \Rightarrow\ \vec{V}(O/R_g)=456{,}4.\cos\lambda\ \text{m/s}$$

$$\vec{V}(O/R_g)=456{,}4.\cos\lambda\ \text{m/s}$$

D'après la loi de composition des vitesses, pour un point A (satellite par exemple) mobile par rapport au repère R, on a:

$$\vec{V}(A/R_g)=\vec{V}(A/R)+\vec{V}_e=\vec{V}(A/R)+\vec{V}(O/R_g) \qquad (\text{car } \vec{V}(O/R_g)=\vec{V}_e\,)$$

Pour que $\vec{V}(A/R_g)$ ait un module maximal il faut que :

- $\vec{V}(O/R_g)$ soit ***maximal*** c'est-à dire: ***λ=0***
- $\vec{V}(A/R)$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{V}(O/R_g)$, c'est-à-dire dirigé vers l'Est.

  La composition des vitesses permet de montrer qu'on tire avantage au mieux de la rotation de la terre en installant les champs de tirs de satellites artificiels le plus proche de l’équateur (*vitesse maximale de rotation de la terre*) et en les lançant vers l’Est (*sens de rotation de la terre*).

<u>Exemple de Bases de lancement de satellite</u> :

- ***Cap Canaveral au USA : λ=25,5° N (Latitude Nord)***
- ***Pletsek en Russie : λ=63° N (Latitude Nord)***
- ***Kourou en Guyanne Française : λ=5,25° N (Latitude Nord)***

Pour des raisons de sécurité (notamment encas d’explosion de la fusée), les régions situées à l’Est des champs de tire sont généralement inhabitées.

III. COMPOSITION DES ACCELERATIONS

Dérivons par rapport au temps, le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R)$ dans l’expression traduisant la loi de composition des vitesses : $\vec{V}(A/R)=\vec{V}(A/R')+\vec{V}(O'/R)+\vec{\Omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'A}$. On a :

$$\vec{a}(A/R)=\frac{d\left(\vec{V}(A/R)\right)}{dt}/R=\frac{d\left(\vec{V}(A/R')\right)}{dt}/R+\frac{d\left(\vec{V}(O'/R)\right)}{dt}/R+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R$$

Or :

- $$\frac{d\left(\vec{V}(A/R')\right)}{dt}/R=\frac{d\left(\vec{V}(A/R')\right)}{dt}/R'+\vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R')$$
$$=\vec{a}(A/R')+\vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R')$$

- $$\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R=\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}/R'+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}=\vec{V}(A/R')+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}$$

- $$\frac{d\left(\vec{V}(O'/R)\right)}{dt}/R=\vec{a}(O'/R)$$

En remplaçant ces expressions dans celle de $\vec{a}(A/R)$ on a:

$$\vec{a}(A/R)=\vec{a}(A/R')+\vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R')+\vec{a}(O'/R)+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\wedge\left[\vec{V}(A/R')+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}\right]$$

$$\vec{a}(A/R)=\vec{a}(A/R')+2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R')+\vec{a}(O'/R)+\frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$$

$\vec{a}(A/R)=\vec{a}(A/R')+\overrightarrow{a_c}+\overrightarrow{a_e}$ avec:

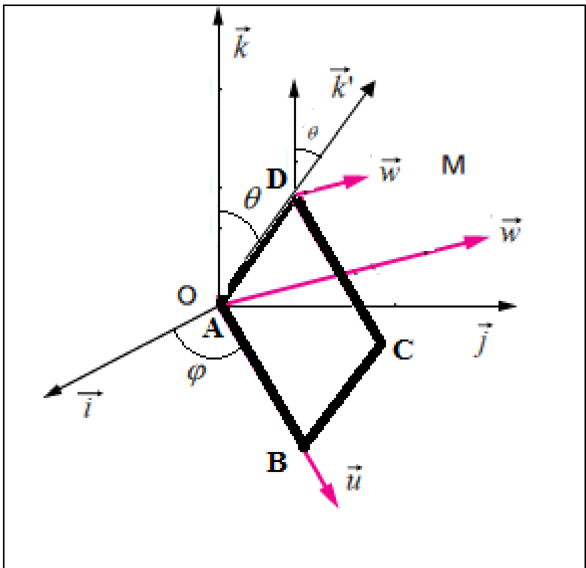
- $\overrightarrow{a_r}=\vec{a}(A/R')=\dfrac{d\left(\vec{V}(A/R')\right)}{dt}/R'$
- $\overrightarrow{a_c}=2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}(A/R')$
- $\overrightarrow{a_e}=\vec{a}(O'/R)+\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}/R\wedge\overrightarrow{O'A}+\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$

- Le terme $\overrightarrow{a_r}$ est appelé ***accélération relative***. C'est l'accélération du point A de R' par rapport à R'. $\overrightarrow{a_r} = \vec{a}(A/R') = \dfrac{d\left(\vec{V}(A/R')\right)}{dt}/R'$
- Le terme $\overrightarrow{a_e}$ est appelé ***accélération d'entrainement***. C'est l'accélération du point A' coïncident avec A : $\overrightarrow{a_e} = \vec{a}(O'/R) + \dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}/R \wedge \overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A}\right)$

  Attention : $\overrightarrow{a_e}$ en s'obtient pas par dérivation direct de $\overrightarrow{V_e}$. $\overrightarrow{a_e} \neq \dfrac{d\overrightarrow{V_e}}{dt}/R$.
- Le terme $\overrightarrow{a_c}$ est appelé ***accélération de Coriolis, Complémentaire ou Centrifuge.*** C'est l'accélération : $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(A/R')$

C'est ce terme qui est à l'origine de la ***force de Coriolis***. $\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$ pour un mouvement de translation.

<u>Application</u>: Une plaque rectangulaire ABCD se meut dans un espace Euclidien par rapport à un repère orthonormé direct $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de façon que A reste en O et que le coté AB reste dans le plan $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



1. Déterminer son vecteur rotation
2. Calculer $\vec{V}(D/R)$ et $\vec{V}(B/R)$
3. En déduire $\vec{V}(C/R)$.
4. $\vec{\Gamma}(D/R)$ et $\vec{\Gamma}(B/R)$

NB : On exprimera les coordonnées des vitesses dans le repère R puis dans R'. $R' = \left(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}'\right)$.

On pose : OD=a ; OB= b. $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ $\varphi = \left(\vec{i}, \vec{u}\right)$; $\theta = \left(\vec{k}, \vec{k}'\right)$.

Correction :

1. $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{u}$

Dans le repère $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, $\vec{u} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ d'où $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\cos\varphi\vec{i} + \dot{\theta}\sin\varphi\vec{j} + \dot{\varphi}\vec{k}$.

Dans le repère $R' = \left(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}'\right)$, $\vec{k} = \cos\theta\vec{k}' - \sin\theta\vec{w}$ d'où $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{k}' - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{w} + \dot{\theta}\vec{u}$

2. $\vec{V}(D/R) = \vec{V}(D/R') + \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AD}$ or $\vec{V}(A/R) = \vec{V}(O/R) = \vec{0}$ (origine)

De même $\vec{V}(D/R') = 0$, car Dest immobile dans R', d'où :

$$\vec{V}(D/R) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AD}$$

($\overrightarrow{AD} = a\vec{k}' = a\cos\theta\vec{k} + a\sin\theta\vec{w} = a\cos\theta\vec{k} + a\sin\theta\left(\cos\varphi\vec{j} - \sin\varphi\vec{i}\right)$)

$$\vec{V}(B/R) = \vec{V}(B/R') + \vec{V}(A/R) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = b\vec{u} = b\cos\varphi\vec{i} + b\sin\varphi\vec{j}$$

3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$$\vec{V}(C/R) = \vec{V}(B/R) + \vec{V}(D/R)$$

CHAPITRE V : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

La dynamique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées forces, qui les produisent. Les lois physiques sur lesquelles elle s'appuie ont été énoncées partiellement par G. Galilée en 1632 et complètement par I. Newton en 1687.

Dans ce chapitre, nous considérons d'abord les lois relatives au mouvement d'un point matériel, connues sous les noms de $1^{ère}$ et $2^{ième}$ loi de Newton.

La première loi, ou principe de l'inertie été énoncée pour la première fois par Galilée. Dans la deuxième loi, Newton introduit le concept de quantité de mouvement qui regroupe les notions de vitesse et de masse.

La troisième loi, ou loi d'opposition des actions réciproques entre deux points matériels, joue un rôle essentiel dans l'étude des systèmes de N points matériels.

I. MASSE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

1. Masse

L'univers peut être considéré comme un ensemble d'éléments appelés points matériels caractérisés :

- ***Cinématiquement*** par un seul vecteur vitesse et un seul vecteur accélération ; on ne distingue donc pas les mouvements des différents points géométriques qui peuvent constitués de tels éléments.

- ***dynamiquement*** par un scalaire positif qui est constant au cours du mouvement et qui est invariant par changement de référentiel. Ce scalaire positif est appelé ***masse inerte*** ou plus brièvement ***masse*** (notée ***m*** ou ***M***).

On mesure la masse d'un point matériel en la comparant à celle d'un point matériel prise comme unité : la comparaison se fait naturellement à partir des lois physiques où les masses interviennent.

2. Quantité de mouvement

Soit ***A*** un point matériel de masse ***m*** en mouvement dans un référentiel R à la vitesse $\vec{V}(A/R)$. On appel quantité de mouvement de A, le vecteur $\vec{p}$ défini comme le produit de la masse ***m*** du point matériel et de sa vitesse : $\vec{p} = m.\vec{V}(A/R)$

Tout comme la vitesse, le vecteur quantité de mouvement est défini par rapport à un référentiel. On l'appelle parfois ***impulsion*** (on trouve la justification de cette appellation dans le rôle joué par $\vec{p}$ dans les problèmes de collision) ou ***moment linéaire***.

II. MOMENT CINETIQUE

1. Définition

On appelle ***moment cinétique*** en ***O*** ($\overrightarrow{\sigma_O}$) d'un point matériel A, par rapport à un référentiel R, en un point O de R, le moment de sa quantité de mouvement :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P}_{A/R} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}_{A/R}$$

Le moment cinétique est parfois appelé ***moment angulaire***.

Application : Soit m un point matériel de masse 1 kg se déplaçant à la vitesse de $\vec{V}(4,3,7)$ dans le référentiel ***R*** contenant le point ***O***. Le support du vecteur vitesse passant par le point ***A (7,3,1)***, calculer le moment cinétique de ***m***.

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}$$

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 \wedge 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21-3=18 \\ 4-49=-45 \\ 21-12=9 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\sigma_O} = 18\vec{i} - 45\vec{j} + 9\vec{k}$$

2. Théorème du moment cinétique

La dérive du moment cinétique en O ($\vec{\sigma}_{O/R}$) par rapport au temps et relativement à un référentiel R supposé galiléen donne :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt}/R = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}/R \wedge m\vec{V}_{A/R} + \overrightarrow{OA} \wedge m\frac{d\vec{V}_{A/R}}{dt}/R$$

$$\vec{V}_{A/R} \wedge m\vec{V}_{A/R} + \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{a}(A/R) = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{a}(A/R)$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt}/R = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{a}(A/R) = \overrightarrow{OA} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{M_O}}$$

<u>Enoncé du théorème</u> : La dérive par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel, en un point fixe O d'un référentiel galiléen, est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent sur ce point.

III. PRINCIPE DE L'INERTIE

Le principe de l'inertie connu aussi sous le nom de première loi de Newton, a été énoncé la première fois par Galilée.

1. Première loi de Newton

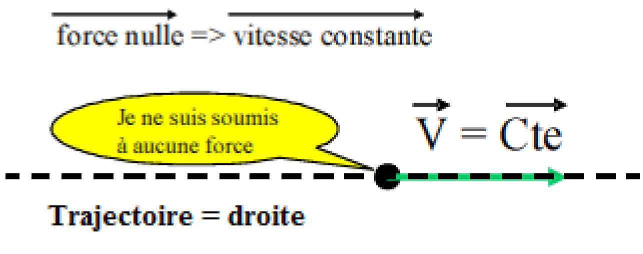
Enoncé : *Par rapport à tout référentiel R, qualifié de Galiléen, tout point matériel A, éloigné de tout autre corps, a un mouvement rectiligne uniforme:* $\vec{V} = \overrightarrow{Cte}$.

Le terme éloigné de tout autre corps signifie que les forces d'interaction sont négligeables.

En d'autres termes ce théorème s'énonce comme suit :

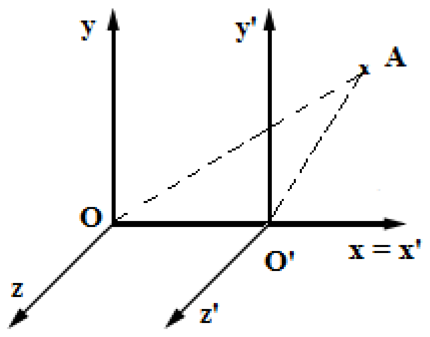
Un corps sur lequel n'agit aucune force garde une vitesse constante (ou reste au repos)

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = \overrightarrow{Cte}$$



2. Transformation de Galilée

Considérons le mouvement d'un point matériel A par rapport à deux référentiels ***R*** et ***R'*** en ***translation rectiligne uniforme***. La transformation de Galilée est celle qui permet de relier les coordonnées d'un point ***A*** dans ***R*** aux coordonnées du même point dans ***R'***.



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$$

$$\left|\begin{matrix} x \\ y = \\ z \end{matrix}\right|\begin{matrix} V_e.t + x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = V_e.t + x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Une conséquence immédiate de la loi de composition des vitesses est:

$$\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A/R') + \vec{V}(O'/R) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = V_e + \dot{x}' \\ \dot{y} = \dot{y}' \\ \dot{z} = \dot{z}' \end{cases}$$

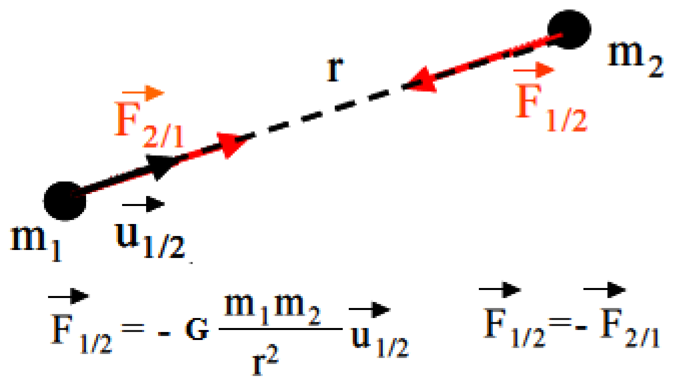
IV. LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

1. Les forces

Tout système matériel de l'univers exerce sur un point matériel ***A*** non inclus dans ce système une force représentée, dans un référentiel galiléen ***R***, par un vecteur lié, c'est-à-dire l'ensemble d'un point ***A*** et vecteur $\vec{F} : (A, \vec{F})$.

- **La force de gravitation universelle**

Dans l'univers, un point matériel $\boldsymbol{A_1}$ subit de la part d'un autre point matériel $\boldsymbol{A_2}$ une force d'expression : $\vec{F}_{2-1} = G.\frac{m_1.m_2}{r^2}\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$



G est la constante de gravitation universelle, m_1 et m_2 les masses qui interviennent dans la gravitation :

G=6,67. 10⁻¹¹ SI.

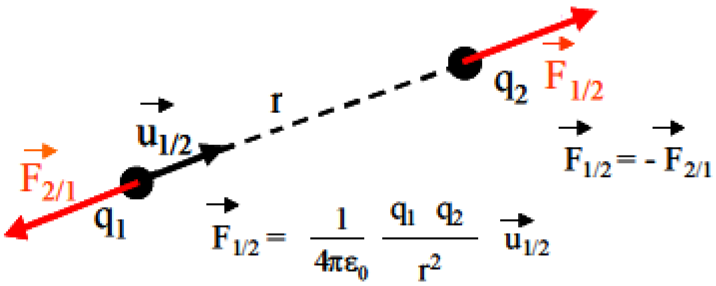
- **Force électromagnétique ou force de Lorentz**
  - **Force électrique**

L'expression de la force électrique ressemble à celle de la force gravitationnelle, mais la force peut-être attractive ou répulsive suivant le signe des charges.

$$\vec{F}_{1-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 . q_2}{r^2} \vec{u}_{1-2}$$

La force électrique peut s'exprimer également à partir du champ électrique comme suit:

$$\vec{F} = q_2 \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1-2}$$



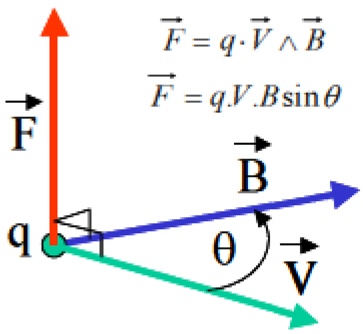
Cette expression est valables dans le vide, q_1 et q_2 sont les charges exprimées en Coulomb.

ε_0 la perméabilité magnétique du vide ε_0=8,854. 10^{-12} (S I).

- **Force Magnétique**

Lorsque les particules chargées sont en mouvement, une force dite magnétique s'ajoute à la force électrique. Pour une charge q_2, son expression est donnée par :

$$\vec{F} = q\vec{V} \wedge \vec{B}$$



Où est $\vec{B}$ le champ magnétique cré par la circulation des porteurs de charges dans le circuit et est exprimé en Tesla (T) ; $\vec{V}$ la vitesse de la charge. La force magnétique est donc en permanence perpendiculaire à la vitesse de la charge.

- **Force électromagnétique ou force de Lorentz**

Un système de charges électriques au repos ou en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R exerce sur une charge électrique **q** placée en A, une force $\vec{F}$ tel que :

$$\vec{F} = q \cdot \left[\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}\right]$$

Cette force fut appelée la force de Lorentz. La force de Lorentz est la somme des forces électrique et magnétique.

Elle est bien plus intense que la force gravitationnelle comme le montre l'exemple suivant de l'atome d'hydrogène. le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène étant, $a_0 = 05\ nm$, on a:

$$\vec{F}^{elec} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2} \approx 8\times10^{-8}N \text{ et } F^{grav} = G\frac{m_p m_e}{a_0^2} \approx 4\times10^{-47}N.$$

- **Force nucléaire (force forte)**

De très courte portée, elle assure par exemple la cohésion du noyau, sinon il serait instable sous l'effet des forces coulombiennes répulsives, car les charges sont toutes positives (protons). Retenons qu'elles sont 100 fois plus intenses que les forces électromagnétiques et de très courte portée *($1F=10^{-15}m$)* au point que leur domaine d'application se limite au noyau.

- **Forces de contact**

Ces forces ne sont pas de nouvelles forces, elles ne sont que la manifestation macroscopique des 4 forces fondamentales (électrique en particulier). Il est beaucoup plus commode pour un solides en interaction de considérer la force résultante plutôt que d'ajouter les innombrables interactions entre les atomes et molécules c'est dire :

- les forces de frottement des solides
- les forces de frottement visqueux
- la poussée d'Archimède
- les forces de tension (ressorts …)

2. Deuxième loi de Newton ou loi fondamentale de la dynamique.

a. Enoncé

Dans un référentiel galiléen R, la dérivée de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport au temps est égale à la somme des forces qu'il subit : $\frac{d\vec{P}}{dt}/R = \sum\vec{F}$ *. Dans le cas où la masse du point matériel est constante le principe s'écrit :* $m\vec{a}(A/R) = \sum\vec{F}$ *.*

NB : Condition d'application de la loi fondamentale de la dynamique à un référentiel non galiléen :

Pour un référentiel non Galiléen on a: $\vec{a}(A/R) = \vec{a}(A/R') + \vec{a_c} + \vec{a_e}$

Avec $\vec{a_c} = 2\vec{\Omega}(R/R')\wedge\vec{V}(A/R')$ et $\vec{a_e} = \vec{a}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}/R\wedge\overrightarrow{O'A} + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'A}\right)$

$m\vec{a}(A/R) = m\left(\vec{a}(A/R') + \vec{a_c} + \vec{a_e}\right)$ soit que : $m\vec{a}(A/R') = \sum\vec{F} - m\vec{a_c} - m\vec{a_e} = \sum\vec{F'}$

$$\frac{d\vec{P'}}{dt} = m\vec{a}(A/R') = \sum\vec{F} - m\vec{a_c} - m\vec{a_e} = \sum\vec{F'}$$

On peut donc appliquer la loi fondamentale de la dynamique à dans un repère *non galiléen* à condition d'ajouter aux forces précédentes ($\sum\vec{F}$) *deux forces supplémentaires* appelées *forces d'inertie ou forces de repère* qui sont :

- *La force d'inertie d'entrainement :* $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}$
- *La force d'inertie d'entrainement :* $\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}$

b. Conséquence: inertie de la masse

La propriété qu'a la masse d'intervenir dans la loi fondamentale s'appelle l'inertie. En effet lorsque deux points matériels initialement au repos sont soumis à la même force $\vec{F}$, celui dont la masse est la plus grande acquiert l'accélération la plus faible :

$$F = m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m_1} \text{ et } a_2 = \frac{F}{m_2}$$

L'accélération étant plus faible, son aptitude à s'opposer à l'effet de F est donc plus grande: on dit son *inertie* est plus *grande*.

c. Relativité galiléenne

La loi fondamentale de la dynamique est invariante par changement de référentiels galiléens R et R'. En effet, pour référentiels R et R' en mouvement l'un par rapport à l'autre on :

$\vec{a}(A/R) = \vec{a}(A/R') + \vec{a_c} + \vec{a_e}$ R et R' étant galiléen, on a : $\vec{a_c} = \vec{a_e} = \vec{0}$,

d'où : $\vec{a}(A/R) = \vec{a}(A/R')$ et $m\vec{a}(A/R) = m\vec{a}(A/R') = \sum \vec{F}$.

Il apparait à travers cette relation qu'il est impossible de distinguer expérimentalement plusieurs référentiels galiléens. Cette invariance de la loi fondamentale lorsqu'on change de référentiel est appelée la relativité galiléenne.

d. Application à la mesure des forces

On peut se servir de la loi fondamentale de la dynamique pour mesurer les forces. En effet, on constate qu'en présence d'autres corps étrangers à un point matériel A, sa quantité de mouvement n'est plus constante (*non observation du principe de l'inertie*). La relation $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ permet de déterminer la force inconnue $\vec{F'}$.

V. TROISIEME LOI DE NEWTON

a. Enoncé : Si un point matériel $\boldsymbol{A_1}$ exerce sur un point matériel $\boldsymbol{A_2}$ une force $\vec{F}_{1-2}$ alors le point matériel $\boldsymbol{A_2}$ exerce sur $\boldsymbol{A_1}$ une force opposée $\vec{F}_{2-1}$ tel que : $\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$.

b. Application à la comparaison des masses

L'opposition des actions réciproques permet d'établir un résultat important relatif à un système formé de deux points matériels soumis à leurs actions mutuelles.

En effet, des relations $\frac{d\vec{P_1}}{dt} = \vec{F_1}$ et $\frac{d\vec{P_2}}{dt} = \vec{F_2}$ on : $\frac{d\vec{P_1}}{dt} + \frac{d\vec{P_2}}{dt} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}\right)=\vec{0} \text{ soit } \overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}=\overrightarrow{P'_1}+\overrightarrow{P'_2}=\overrightarrow{ct} \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}=m_1\overrightarrow{V'_1}+m_2\overrightarrow{V'_2}$$

$$\Rightarrow m_1\left(\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V'_1}\right)=m_2\left(\overrightarrow{V'_2}-\overrightarrow{V_2}\right) \Leftrightarrow m_1\left\|\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V'_1}\right\|=m_2\left\|\left(\overrightarrow{V'_2}-\overrightarrow{V_2}\right)\right\|$$

doù :

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\left\|\left(\overrightarrow{V'_2}-\overrightarrow{V_2}\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V'_1}\right\|}$$

<u>CHAPITRE</u> VI : ENERGETIQUE DU POINT MATERIEL

Dans ce chapitre, nous allons déduire à partir de la loi fondamentale de la dynamique du point matériel ($m\vec{a}(A/R) = \sum \vec{F}$), un théorème faisant intervenir des grandeurs scalaires, telles que la *puissance, le travail d'une force, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.*

I. PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE.

Considérons un référentiel R ($R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$) dans lequel un point matériel A est en mouvement à la vitesse $\vec{V}$ sous l'effet d'une force $\vec{F}$.

1. Puissance

Par définition, la puissance de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le point matériel A où puissance reçue par le point matériel A est :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z}$$

<u>Forces de puissance nulle</u>: Certaines forces en raison de leur caractère particulier (direction perpendiculaire à la vitesse) on une puissance nulle. Il s'agit en particulier de :

- La force magnétique qui s'exerce sur une particule chargée plongée dans un champ $\vec{\mathbf{B}}$:

$$P = \overrightarrow{F_m} \cdot \vec{V} = q \cdot \left(\vec{V} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{V} = \vec{0}$$

- La force de Coriolis qui s'erxerce sur un point matériel A dans un référentiel non Galiléen R :

$$P = \overrightarrow{F_{ic}} \cdot \vec{V} = -2m \cdot \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{V}\right) \cdot \vec{V} = \vec{0}$$

Plus généralement, la puissance d'une force $\vec{F}$ quelconque est nulle pour tout déplacement qui est normal à la direction de la force.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V} = \vec{0} \quad \text{si } \vec{F} \perp \vec{V}$$

- Si $P > 0$, la puissance est dite ***motrice***
- Si $P < 0$, la puissance est dite ***résistante***

L'unité de la puissance est le Watt (W). L'ancienne puissance encore utilisée est le cheval vapeur et vaut 736 W.

2. Travail

a. Expression élémentaire

Par définition, le travail élémentaire de $\vec{F}$ s'exerçant sur A est $\delta T = P \cdot dt = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot \vec{dl}$ où $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire de A dans le référentiel R par rapport auquel la vitesse est comptée. La notation $\boldsymbol{\delta}$ indique $\boldsymbol{\delta W}$ est une forme différentielle à priori non intégrable qui n'est donc pas la différentielle (totale exacte) d'une fonction.

$$\delta W = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz .$$

L'unité de travail est le joule (J).

b. Travail au cours d'un déplacement fini

- **Force dépendant du temps et de la vitesse**

Dans le cas peu fréquent où la force $\vec{F}$ est fonction de la position de A, de sa vitesse et du temps, l'expression du travail est la suivante :

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(F_x \cdot \dot{x} + F_y \cdot \dot{y} + F_z \cdot \dot{z} \right) \cdot dt$$

<u>Exemple</u> : $\vec{F} = 3x\vec{e_x} + 5z\vec{e_y} + 10x\vec{e_z}$ $\quad \overrightarrow{OA} = \left(t^2 + 1\right)\vec{e_x} + 2t^2\vec{e_y} + t^2\vec{e_z}$

Calculer W entre *t=0 et t=1* :

$$\left| \begin{array}{l} F_x = 3x \\ F_y = -5z \\ F_z = 10x \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 \\ z = t^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{x} = 2t \\ \dot{y} = 4t \\ \dot{z} = 2t \end{array} \right.$$

$$W = \int_0^1 \left[3\left(t^2 + 1\right) \cdot 2t - 5t^2 \cdot 4t + 10\left(t^2 + 1\right) \cdot 2t \right] dt = 14{,}5J$$

- **Force indépendant du temps**

Dans le cas d'une force $\vec{F}$ dont l'expression est indépendante de la vitesse et du temps, mais uniquement des positions initiale et finale (forces conservatives), l'expression du travail est la suivante :

$$W = \int_{t_i}^{t_f} P dt = \int_{Ai}^{Af} \left(\vec{F} \cdot \vec{V} \right) dt = \int_{Ai}^{Af} \left(F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_y \cdot \frac{dy}{dt} + F_z \cdot \frac{dz}{dt} \right) \cdot dt$$

$$W = \int_{Ai}^{Af} \left(F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz \right)$$

W est l'intégral curviligne calculé le long de la trajectoire *C* du point d'application entre les positions *Ai* à l'instant *initial* et *Af* à l'instant *final*.

<u>Exemple :</u> $\vec{F}\left(F_x = 3x;\ F_y = -5z;\ F_z = 10x\right)$ et la trajectoire C définie par $y = 2x^2$ et $z = 0$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

$$W = \int_0^1 \left(3xdx + \left(-5z\right)dy + 10xdz \right) = \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_0^1 = 1{,}5J$$

II. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

D'après la loi fondamentale de la dynamique, on a : $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}(A/R) = \sum \vec{F}$.

En multipliant cette relation par le vecteur $\vec{V}$ on a: $m\vec{a}(A/R) \cdot \vec{V}(A/R) = \sum \vec{F} \cdot \vec{V}(A/R)$

Comme

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow m \cdot \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} \right) = \sum \vec{F} \cdot \vec{V} \Leftrightarrow m \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) = \frac{d}{dt}\left[m \cdot \left(\frac{V^2}{2} + Cte \right) \right] = \sum \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Par convention, la Cte = 0. La quantité scalaire non négative, à savoir $\frac{1}{2} \cdot mV^2$ est appelée *énergie cinétique* en raison de sa dépendance essentielle avec la vitesse : $E_C = \frac{1}{2} \cdot mV^2$.

Il en résulte d'après la loi fondamentale de la dynamique que :

$$\frac{dE_C}{d} = P_R \text{ avec } P_R = \sum \vec{F} \cdot \vec{V} \text{ Puissance résultante}$$

- La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de toutes les forces qui s'exercent sur ce point.

$$\frac{dE_C}{dt} = P_R \Leftrightarrow \int_{ti}^{tf} dE = \int_{ti}^{tf} Pdt = \int \delta W \Rightarrow \Delta E_C = \sum W$$

- La variation de l'énergie cinétique est égale au travail de toutes les forces appliquées au système.

Remarque :

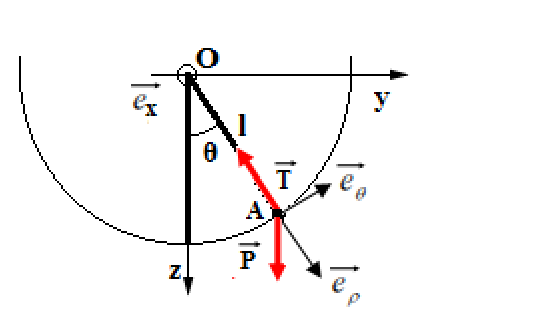
- Si R est non Galiléen, il faut ajouter à la puissance des forces appliquées, celle de la force d'inertie d'entrainement (la puissance de la force de Coriolis étant toujours nulle).
- Le théorème de l'énergie cinétique est toujours adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul paramètre puisqu'il ne fournit qu'une seule équation scalaire.

Exemple : Une masselotte A de masse ***m*** glisse sans frottement sur un arc circulaire de rayon l. On repère sa position par θ, angle que fait $\overrightarrow{OA}$ avec la verticale. En vous servant du théorème l'énergie cinétique, établir l'équation horaire du mouvement.

Solution :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot mV^2 \; ; \quad \overrightarrow{OA} = l\vec{e}_\rho \; ; \quad \vec{V}(A/R) = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = l\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = l\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = l\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$



$$\vec{V}(A/R) = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{d'où:} \quad E_C = \frac{1}{2} \cdot mV^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2}ml^2 \cdot 2\ddot{\theta}\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta};$$

$$\vec{T} \perp \vec{V} \Rightarrow P_{\vec{T}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad P_{\vec{P}} = m\vec{g} \cdot \vec{V} = m\vec{g} \cdot l\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{dE_C}{dt} = P_R \Leftrightarrow ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow ml\dot{\theta}\left(l\ddot{\theta} + g\sin\theta\right) = 0 \Rightarrow l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Pour θ petit, $\sin\theta \approx \theta$ et $\boxed{\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0}$ avec $\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l} \text{ et } T = 2\pi\sqrt{l/g}}$

On peut retrouver le même résultat à l'aide du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O} \qquad \overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{V_A} = l\overrightarrow{e_\rho} \wedge ml\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\left(\overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_\theta}\right) = ml^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_x}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\overrightarrow{e_x}$$

$\overrightarrow{M_O}(T) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} = l\overrightarrow{e_\rho} \wedge mg\overrightarrow{e_z}$ or $\overrightarrow{e_z} = \cos\theta\overrightarrow{e_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$ d'où: $\overrightarrow{M_O}(\vec{P}) = -mgl\sin\theta\left(\overrightarrow{e_\rho} \wedge \overrightarrow{e_\theta}\right) = -mgl\sin\theta\overrightarrow{e_x}$

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O} \Leftrightarrow \boxed{ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta}$$

III. ENERGIE POTENTIELLE

1. Forces conservatives

Une force conservative est une force pour laquelle le travail qui lui est associé ne dépend ni de la façon dont le parcourt est effectué au cours du temps, ni du chemin suivi entre les positions initiale et finale fixées. Il ne dépend que des distances entre les deux masses au début et à la fin du parcours. Ce travail peut être moteur ou résistant.

Pour une force conservative, le travail élémentaire est une différentielle totale : dW.

Exemples de forces conservatives :

- La tension d'un ressort : $\vec{F} = -kx\vec{u}$ d'où; $W_B^A = -\frac{1}{2}k\left(x_B{}^2 - x_A{}^2\right)$

Ce travail ne dépend que des allongements initiaux et finaux. Il est indépendant du chemin suivi et peut être positif ou négatif.

- Travail fourni par les forces de pesanteur.

$$\vec{F} = -K_G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u} \text{ d'où; } W_B^A = K_Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

2. Energie potentielle

Dans le cas d'un point matériel A soumis à une force conservative $\vec{F}$, le travail élémentaire est une différentielle totale :

$$dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OA} = -dE_P$$

La fonction $E_P(A)$ est appelée *énergie potentielle* associée à $\vec{F}$. E_P est définie à une constant additive près et l'énergie potentielle peut être *positive ou négative*.

Exemple de force :

$$\vec{F} = ax\overrightarrow{e_x} + by\overrightarrow{e_y} \qquad dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OA} = axdx + bydy = d\left(a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2} + cte\right) = \text{-}dE_p$$

$$E_P = -a\frac{x^2}{2} - b\frac{y^2}{2} + cte$$

3. Exemples d'énergies potentielles

La plus part des forces fondamentales dérivent d'une énergie potentielle.

a. Energie potentielle Newtonienne

Considérons un point A soumis de la part du centre O, à une force Newtonienne de la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}$ avec $\vec{e_r} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}$ avec K une constante d'interaction.

K >0 si l'interaction est répulsive (force entre charges électriques de même signe)
K < 0 si l'interaction est attractive (force entre charges électriques de signe opposés)

$$dW = \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OA} = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}\cdot d(r\vec{e_r}) = \frac{K}{r^2}\vec{e_r}\left(dr\vec{e_r} + rd\vec{e_r}\right) = \frac{K}{r^2}dr + \frac{K}{r}\vec{e_r}d\vec{e_r} = \frac{K}{r^2}dr$$

car $\vec{e_r}d\vec{e_r} = \vec{0}$ $\quad \vec{e_r} = \vec{ct}$

$$dW = \frac{K}{r^2}dr = d\left(-\frac{K}{r^2}\right) = -dE_P \quad \text{Par integration on a:} \quad E_P = \frac{K}{r} + cte$$

$$E_P(\infty) = 0 \;\Rightarrow\; \text{cte} = 0 \;\; \text{d'où}: \; E_P = \frac{K}{r}$$

b. Energie potentielle pesanteur

$$dW = m\vec{g}\cdot d\overrightarrow{OA} \;\Leftrightarrow\; dW = d\left[m\vec{g}\cdot\overrightarrow{OA} + cte\right] = -dE_P$$

$$\Rightarrow E_P = -m\vec{g}\cdot\overrightarrow{OA} + Cte \qquad \left(-mg\vec{e_z}\cdot z\cdot\vec{e_z} + Cte\right)$$

$$E_P = 0 \;\; pour\; \text{z} = 0 \;\Rightarrow\; \text{Cte} = 0 \;\; \text{d'où}: \quad E_P = -mgz\cdot$$

c. Energie potentielle élastique d'un ressort de raideur k

$$dW = -k(x - l_o)\,\text{dx} = -dE_P \qquad dW = d\left(\frac{k}{2}\cdot(x - l_o)^2 + Cte\right) = -dE_P \;\Rightarrow$$

$$E_P = \frac{k}{2}\cdot(x - l_o)^2 + Cte \quad E_P = 0 \;\text{pour}\; \text{x} = \text{l}_\text{o} \;\Rightarrow$$

$$E_P = kX^2 \;\; \text{avec} \;\; X = (x\text{-}l_o)$$