

UNIVERSITE NORBERT ZONGO

\*\*\*\*\*

Unité de Formation et de Recherche

Sciences et Technologies

\*\*\*\*\*

Département de Physique



*Cours :*

**MAGNETOSTATIQUE**

*et*

**Courants Variables**

*Destiné aux étudiants de 1<sup>ère</sup> année de licence Maths Physique Informatique*

**(MPCI -L1S2)**

**Enseignant : Salfo KABORÉ, PhD**

**Université Norbert ZONGO de KOUDOUGOU**

***Année Universitaire : 2021-2022***

# Table des matières

<b>Chapitre 1 : Prérequis mathématiques.....</b>	<b>6</b>
I. Éléments de calcul vectoriel .....	6
1. Base orthonormée directe .....	6
2. Calcul vectoriel.....	6
a) Produit scalaire .....	6
b) Produit vectoriel .....	7
3. Vecteurs et pseudo-vecteurs .....	7
a) Notions de vecteurs et de pseudo-vecteurs.....	7
b) Transformations géométriques d'un vecteur ou d'un pseudo-vecteur .....	8
II. Principaux systèmes de coordonnées.....	9
1. Coordonnées cartésiennes .....	9
2. Coordonnées cylindriques .....	9
3. Coordonnées sphériques.....	10
III. Opérateurs différentiels vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.....	12
1. Expressions des opérateurs.....	12
a) Le gradient.....	12
b) La divergence .....	12
c) Le rotationnel .....	12
d) Le laplacien .....	13
2. Relations de compositions entre opérateurs .....	13
IV. Notions de base sur les champs.....	14
1. Définition.....	14
2. Champ scalaire et champ vectoriel.....	14
a) Champ scalaire .....	14
b) Champ vectoriel .....	14
3. Champ uniforme, champ permanent .....	15
4. Lignes de champ et tube de champ.....	15
5. Circulation d'un champ vectoriel .....	16
a) Notion de contour.....	16
b) Notion de circulation.....	16
c) Théorème de Stokes .....	17
6. Flux d'un vecteur.....	17
a) Vecteur élément de surface .....	17
b) Notion de flux .....	18
c) Théorème de Green-Ostrogradsky .....	18

<b>Chapitre 2 : Magnétostatique</b> .....	19
I. Généralités sur le magnétisme .....	19
1. Sources du champ magnétique .....	19
a) Aimants .....	19
b) Conducteurs parcourus par un courant. ....	19
2. La boussole et les pôles d'un aimant.....	20
3. Lignes de champ magnétique .....	21
a) lignes de champ créés par un aimant droit .....	21
b) lignes de champ créés par un fil conducteur rectiligne parcouru par un courant $I$ .....	22
II. Invariances et symétrie du champ magnétique $B$ .....	22
1. Plan de symétrie et plan d'antisymétrie des courants source du champ $B$ .....	23
a) Définitions .....	23
b) Exemples de plan de symétrie et de plan d'antisymétrie.....	24
c) Principe de Curie et règles de symétrie .....	24
2. Détermination de la direction du champ magnétique $B$ .....	25
3. Invariance de la distribution de courant .....	25
a) Notion d'invariance .....	25
b) Quelques types d'invariances. ....	25
III. Champ magnétique créé par une charge électrique et un conducteur filiforme .....	27
1. Champ magnétique créé par une charge ponctuelle .....	27
2. Champ magnétique créé par un conducteur filiforme : Loi de Biot et Savart.....	27
a) Distribution linéique de courant .....	27
b) Loi de Biot et Savart .....	27
3. Exercices d'application .....	29
3.1 Exercice 1 .....	29
a) Enoncé.....	29
b) Corrigé .....	30
3.2 Exercice 2 .....	30
a) Enoncé.....	30
b) Corrigé .....	30
3.3 Exercice 3 .....	32
a) Enoncé.....	32
b) Solution .....	32
3.4. Exercice 4.....	33
a) Enoncé.....	33
b) Solution .....	33

IV. Le théorème d'Ampère .....	35
1. Enoncé .....	35
2. Remarques .....	35
3. Forme locale du théorème d'Ampère .....	36
4. Méthode d'application de la forme intégrale du théorème d'Ampère.....	36
5. Exercices d'application .....	37
5.1 Exercice 1 .....	37
a) Enoncé.....	37
b) Solution .....	37
5.2 Exercice 2 .....	38
a) Enoncé.....	38
b) Solution .....	38
V. Potentiel vecteur magnétostatique $A$ .....	42
1. Non divergence de $B$ ou équation de Maxwell-Thomson .....	42
2. Champ magnétique $B$ : champ à flux conservatif. ....	43
3. Expression du champ $B$ en fonction du potentiel $A$ et Jauge de Coulomb .....	43
4. Equation de Poisson en magnétostatique .....	44
5. Expression du potentiel vecteur.....	44
6. Méthodes de calcul du potentiel vecteur .....	45
7. Exemples de calcul du potentiel scalaire.....	45
7.1 Exercice 1 .....	45
a) Enoncé.....	45
b) Solution .....	45
7.2 Exercice 2 .....	46
a) Enoncé.....	46
b) Solution .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
VII. Forces électromagnétiques.....	47
1. Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une particule chargée.....	47
a) Force de Lorentz (rappel classes de Terminales C , D et E) . ....	47
b) Application : étude du mouvement d'une particule chargée d'un champ magnétique uniforme .....	47
2. Action d'un champ magnétique sur un courant : Force de Laplace. ....	47
<b>Chapitre 3 : Induction électromagnétique .....</b>	<b>49</b>
I. Phénomènes d'induction électromagnétique et inductance .....	49
1. Mise en évidence des phénomènes d'induction. ....	49

2. Lois de l'induction.....	50
<i>a) Loi de Faraday</i> .....	51
<i>b) Loi de Lenz</i> .....	51
II. Induction mutuelle et auto-induction.....	52
1. Induction mutuelle entre deux circuits fermés .....	52
2. Auto-induction.....	53
III. Régimes variables.....	53
1. Force électromotrice (f.é.m.) d'inductance mutuelle .....	53
2. Forces électromotrices (f.é.m.) induite totale .....	53
3. Exercice d'application.....	54
a) Enoncé.....	54
b) Solution .....	54

# Chapitre 1 : Prérequis mathématiques

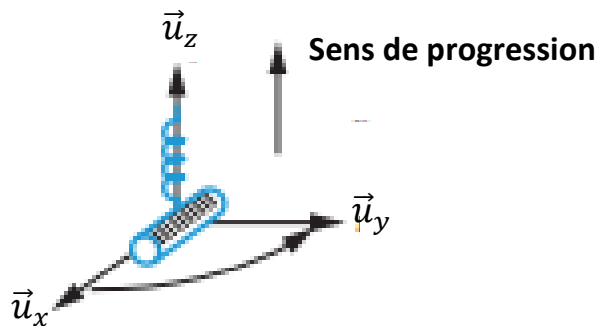
## I. Éléments de calcul vectoriel

### 1. Base orthonormée directe

Une base  $(B) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est dite orthonormée si et seulement si :

- ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux :  $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y \perp \vec{u}_z$ ,
- ses vecteurs sont unitaires :  $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$ .

Dans la suite de cours, nous considérons des bases orthonormées directe telle que deux des vecteurs de la base définissent le sens positif du troisième selon la règle du tire-bouchon de Maxwell (figure 1.1)



**Figure 1.1: Règle du tire-bouchon de Maxwell :** le manche du tire-bouchon étant placé sur  $\vec{u}_x$ , une rotation de  $\pi/2$  vers  $\vec{u}_y$  fait progresser le tire-bouchon dans le sens de  $\vec{u}_z$ .

**Remarque :** En associant un point  $O$  de l'espace à une base  $(B)$ , on obtient un repère d'espace noté  $(R)$ .

### 2. Calcul vectoriel

Soient  $(B) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  une base orthonormée directe, et trois vecteurs

$$\vec{v}_1 = v_{1x}\vec{u}_x + v_{1y}\vec{u}_y + v_{1z}\vec{u}_z ; \vec{v}_2 = v_{2x}\vec{u}_x + v_{2y}\vec{u}_y + v_{2z}\vec{u}_z ; \vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z.$$

Notons  $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  l'angle tel que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

#### a) Produit scalaire

Le produit scalaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  est le scalaire, noté  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  défini par :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \times v_2 \times \cos\theta.$$

L'expression analytique de ce produit scalaire est :  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} \cdot v_{2x} + v_{1y} \cdot v_{2y} + v_{1z} \cdot v_{2z}$

**Remarque :** on peut déduire de la définition et de l'expression analytique d'un produit scalaire l'expression de la norme  $v$  d'un vecteur  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \cdot v_x + v_y \cdot v_y + v_z \cdot v_z = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\text{et } \vec{v} \cdot \vec{v} = v \cdot v \cdot \cos 0 = v^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

### b) Produit vectoriel

Le produit vectoriel de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  est le vecteur noté  $\vec{u} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$  (ou  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ ) dont les caractéristiques sont :

- Sa direction, orthogonale au plan formé par  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ;
- Son sens, tel que le trièdre  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u})$  soit direct, c'est-à-dire donné par la règle du tire-bouchon à partir de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ;
- Sa norme,  $\|\vec{u}\| = u = v_1 \times v_2 \times \sin \theta$

L'expression analytique de ce produit scalaire est :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y} \\ v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z} \\ v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x} \end{vmatrix}$$

## 3. Vecteurs et pseudo-vecteurs

### a) Notions de vecteurs et de pseudo-vecteurs

Un **vecteur polaire**, ou **vrai vecteur**, est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés.

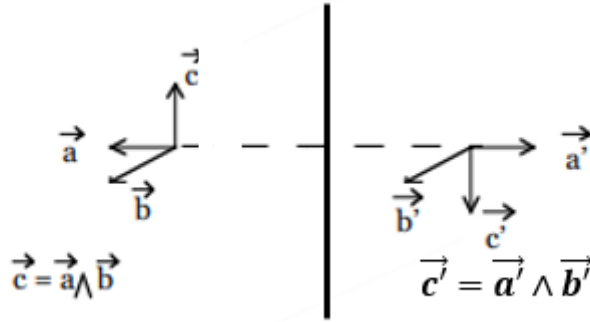
Exemples : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité de courant.

Un **vecteur axial**, ou **pseudo-vecteur**, est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une convention d'orientation d'espace et dépend donc de cette convention.

Exemples : le vecteur rotation instantanée, le **champ magnétique**, la normale à une surface.

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. Orienter l'espace revient à associer à un axe orienté un sens de rotation dans un plan perpendiculaire à cet axe. Le sens conventionnellement choisi est déterminé par la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle du bonhomme d'Ampère (pour le champ magnétique mais aussi pour le vecteur rotation instantanée).

Le produit vectoriel de deux vrais vecteurs (respectivement pseudo-vecteurs) est un pseudo-vecteur (resp. vrai vecteur), tandis que celui d'un vrai vecteur par un pseudo-vecteur est un pseudo-vecteur.



**Figure 1.2:** Transformation par rapport à un plan de symétrie

### b) Transformations géométriques d'un vecteur ou d'un pseudo-vecteur

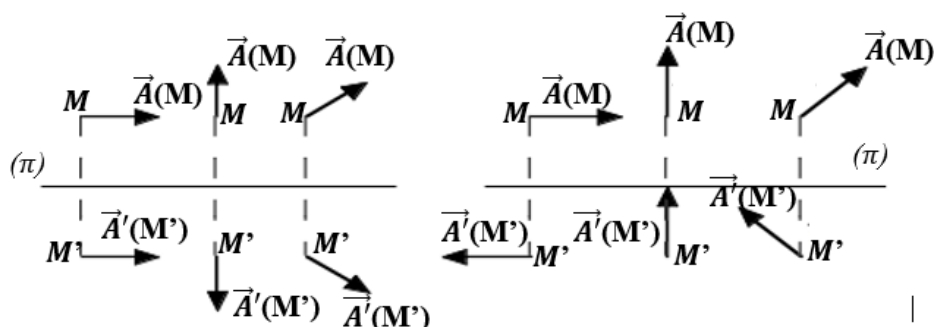
Vecteurs et pseudo-vecteurs se transforment de la même manière dans une rotation ou une translation. Il n'en est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan ou à un point. Dans ces transformations

- un vecteur est transformé en son symétrique,
- un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé du symétrique.

#### Règles de symétrie :

Soit  $\vec{A}'(M')$  le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan  $\pi$  à partir du vecteur  $\vec{A}(M)$

- 1) si  $\vec{A}(M)$  est un vrai vecteur
  - $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est engendré par les mêmes vecteurs de base que S ;
  - $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est perpendiculaire à S.
- 2) au contraire, si  $\vec{A}(M)$  est un pseudo-vecteur
  - $\vec{A}'(M') = \vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est perpendiculaire à S ;
  - $\vec{A}'(M') = -\vec{A}(M)$  si  $\vec{A}(M)$  est engendré par les mêmes vecteurs de base que S.



(a) : transformation d'un **vecteur**  $\vec{A}$  par symétrie par rapport un plan ( $\pi$ )      (b) : transformation d'un **pseudo-vecteur**  $\vec{A}$  par symétrie rapport un plan ( $\pi$ )

*Figure 1.3 : Transformation vectorielle*



## II. Principaux systèmes de coordonnées

### 1. Coordonnées cartésiennes

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  où  $x, y, z \in ]-\infty, +\infty[$ . Le vecteur position du point M s'écrit dans ce repérage :  $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ .

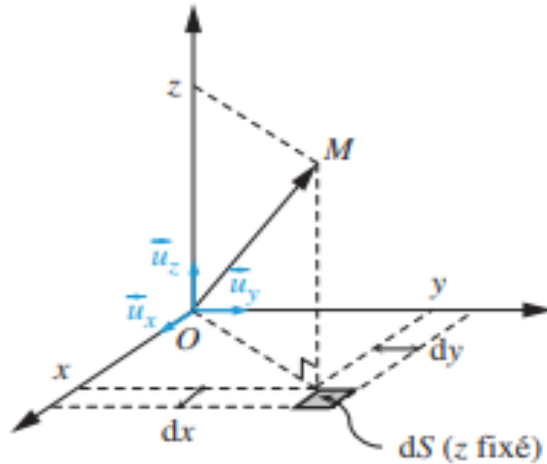


Figure 1.4: Repérage cartésien

Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  du point M est défini par :

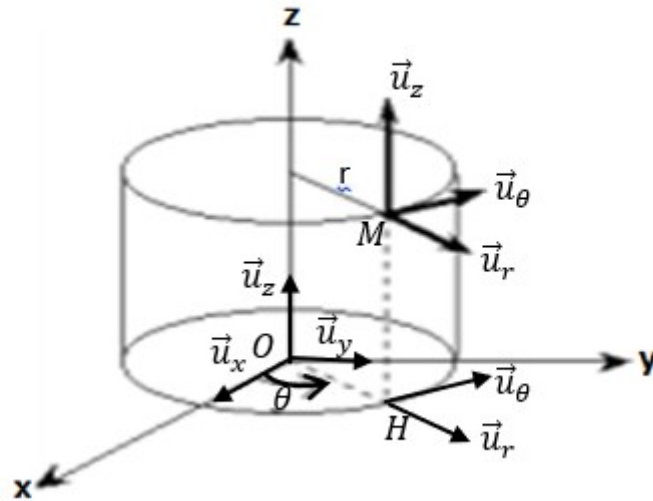
$$d\vec{l}_M = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

où  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  désignent respectivement la variation infinitésimale de la coordonnée  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Au cours de ce déplacement, le point M a décrit un volume élémentaire  $dV_M = dxdydz$ . Cet élément de volume définit trois éléments de surface plans : l'élément de surface  $dS_M = dydz$  à  $x$  fixé, l'élément de surface  $dS_M = dx dz$  à  $y$  fixé et l'élément de surface  $dS_M = dx dy$  à  $z$  fixé (voir figure 1.4).

### 2. Coordonnées cylindriques

Dans le repérage cylindrique, un point M de l'espace peut être considéré comme un point d'un cylindre droit d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ .



**Figure 1.5 : Repérage cylindrique**

On le repère par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  où :

- $r \in [0, +\infty[$  est le rayon du cylindrique ;
- $\theta \in [0; 2\pi]$  est l'angle orienté  $(\vec{u}_x, \overrightarrow{OH})$  avec H le projeté orthogonal du point M sur le plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  ;
- $z \in ]-\infty, +\infty[$  est la cote du point M sur l'axe  $(O, \vec{u}_z)$ .

Les coordonnées cylindriques  $r, \theta$  et  $z$  sont définies dans le repère cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  où :

- $\vec{u}_r$  est le vecteur radial colinéaire à  $\overrightarrow{OH}$  ;
- $\vec{u}_\theta$  est le vecteur orthoradial obtenu par rotation du vecteur  $\vec{u}_r$  de  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique.

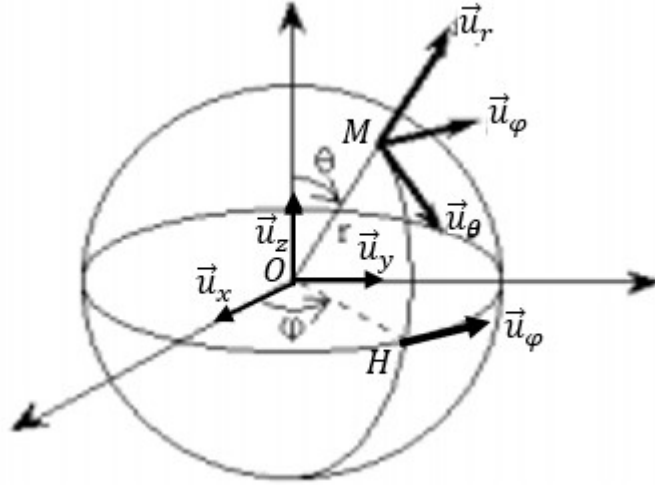
Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  du point M est défini par :

$$d\vec{l}_M = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Le **système de coordonnées cylindriques** est utilisé dans le repérage d'une grandeur physique **invariante par rotation autour d'un axe privilégié** (problème à **symétrie cylindrique**).

### 3. Coordonnées sphériques

Un point M de l'espace peut être considéré comme un point d'une sphère de centre O (figure 1.6).



**Figure 1.6: Repérage sphérique**

On le repère par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi, )$  où :

- $r \in [0 ; +\infty[$  est le rayon de la sphère,
- $\theta \in [0, \pi]$  est l'angle orienté  $(\vec{u}_z, \overrightarrow{OM})$
- $\varphi \in [0, 2\pi]$  est l'angle orienté  $(\vec{u}_x, \overrightarrow{OH})$  avec H le projeté orthogonal du point M sur le plan  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (figure 1.6).

Les coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\varphi$  sont définies dans le repère sphérique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  où :

- $\vec{u}_r$  est le vecteur radial, colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$  ;
- $\vec{u}_\theta$  est le vecteur orthoradial appartenant au plan  $(\vec{u}_z, \overrightarrow{OM})$  obtenu par rotation du vecteur  $\vec{u}_r$  de  $\pi/2$  dans le sens des  $\theta$  croissants
- $\vec{u}_\varphi$  appartient au plan  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  est le vecteur azimutal tel que  $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$ .

Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  du point M est défini par :

$$d\vec{l}_M = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

**Remarques :**

- ✓ Le système de coordonnées sphériques trouve son intérêt dans le repérage d'une **grandeur physique invariante par symétrie par rapport à un point privilégié** (problème à **symétrie sphérique**).
- ✓ Expression d'un élément de volume  $d\tau$  dans les différents systèmes de coordonnées

Coordonnées	$d\tau$
cartésiennes	$dx \times dy \times dz$
cylindriques	$dr \times r d\theta \times dz$
sphériques	$dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$

### III. Opérateurs différentiels vectoriels en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

#### 1. Expressions des opérateurs

##### a) Le gradient

Coordonnées	$\overrightarrow{\text{grad}} f$
cartésiennes	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

##### b) La divergence

Coordonnées	$\text{div } \vec{F}$
cartésiennes	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

##### c) Le rotationnel

Coordonnées	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}$
cartésiennes	$\left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r$ $+ \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta$ $+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$

## d) Le laplacien

### ✓ Le laplacien scalaire

Coordonnées	$\Delta f$		
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	+	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$	+	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf)$	+	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \times \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

### ✓ Le laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel est défini par la relation :

$$\Delta \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{F}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F})$$

Il ne s'exprime simplement qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{F}(x, y, z, t) = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z$$

## 2. Relations de compositions entre opérateurs

On peut rappeler, sans démontrer, quelques relations utiles en magnétostatique.

Soient  $\vec{A}(M)$  et  $\vec{B}(M)$  deux champs vectoriels et  $U(M)$  une fonction scalaire (ou champ scalaire) on a :

- ✓  $\overrightarrow{\text{rot}} [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)] = \overrightarrow{\text{grad}} [\text{div} \vec{A}(M)] - \Delta \vec{A}(M) ;$
- ✓  $\overrightarrow{\text{rot}} [\overrightarrow{\text{grad}} U(M)] = 0 ;$
- ✓  $\text{div} [\vec{A}(M) \wedge \vec{B}(M)] = \vec{B}(M) \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M) - \vec{A}(M) \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M)$
- ✓  $\text{div} [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)] = 0 ;$
- ✓  $\text{div} [\overrightarrow{\text{grad}} U(M)] = \Delta U(M).$

## IV. Notions de base sur les champs

### 1. Définition

On appelle champ d'une grandeur physique  $G$ , définie dans un domaine  $D$  de l'espace, à un instant  $t$  donné, l'ensemble des valeurs de  $G$  aux différents points  $M$  de ce domaine à cet instant.

**Remarque :** De façon générale le champ se note  $G(M, t)$ . La détermination complète du champ nécessite la connaissance des valeurs du champ sur les limites du domaine  $D$ , appelées conditions aux limites.

### 2. Champ scalaire et champ vectoriel

#### a) Champ scalaire

Si la grandeur physique est un scalaire (définie par la donnée d'un seul nombre), on parle de champ scalaire.

**Exemples :**

- Une barre métallique, de longueur  $l$  selon un axe  $Ox$  est calorifugée sur sa face extérieure. Ses deux extrémités sont reliées à deux thermostats de températures différentes  $T_1$  en  $x = 0$ , et  $T_2 < T_1$  en  $x = l$ . En régime permanent, on montre que la température dans la barre, en tout point  $M$  d'abscisse  $x$ , est de la forme

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{l} x.$$

Il existe donc un champ de température  $T(M, t)$  dans la barre. *Ce champ est scalaire car la température le long de la barre en un point  $M$  donné ne dépend que de sa position :*

$$T(M, t) = T(x).$$

- Le potentiel électrostatique  $V(r)$  est un champ de scalaire.

#### b) Champ vectoriel

Un champ est dit vectoriel si la grandeur physique est vectorielle (définie par trois composantes dans une base donnée).

**Exemple :** L'ensemble des vitesses prises à chaque instant en tout point d'une conduite cylindrique par les différentes particules de fluide constitue un champ vectoriel  $\vec{V}(M)$  appelé champ des vitesses. En effet une particule de fluide qui se trouve en point  $M$  à un instant  $t$  considéré a une vitesse modélisable par un vecteur caractérisée par une orientation (sens et direction) et une intensité ou norme.

### 3. Champ uniforme, champ permanent

Un champ  $G(M, t)$  est dit *uniforme* s'il est *indépendant de la position de  $M$*  :

$$G(M, t) = G(t) .$$

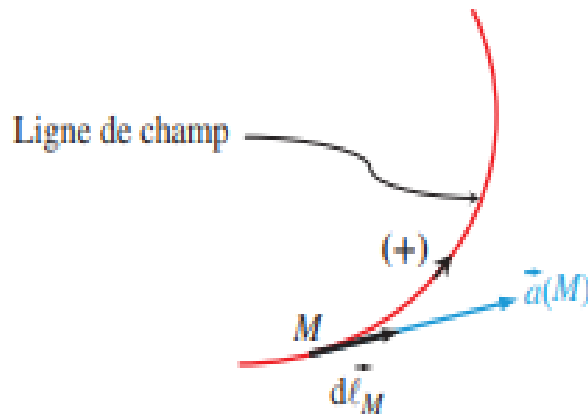
Lorsqu'un champ est *indépendant du temps*, il est dit *permanent* ou stationnaire :

$$G(M, t) = G(M) .$$

### 4. Lignes de champ et tube de champ

Soit un champ vectoriel  $\vec{a}(M)$ . On appelle ligne de champ une courbe telle qu'en chacun de ses points  $M$  le vecteur  $\vec{a}$  y soit tangent. Une ligne de champ est orientée positivement dans le sens du champ (figure 1.7).

L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée donnée est appelée tube de champ.



**Figure 1.7 : ligne de champ**

Considérons un déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  en un point  $M$  le long d'une ligne de champ. L'orientation positive de la courbe impose le sens du vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$  en  $M$  (voir figure ci-dessus). Ce vecteur étant porté par la tangente en  $M$  à la ligne de champ, alors le champ de vecteur  $\vec{a}(M)$  est colinéaire à  $d\vec{l}_M$  :

$$\vec{a}(M) \wedge d\vec{l}_M = \vec{0}$$

Cette relation permet d'établir **l'équation d'une ligne de champ**.

**Exemple :** Prenons l'exemple de l'écoulement permanent d'eau dans une conduite horizontale d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ . En repérage cylindrique, le champ des vitesses est de la forme  $\vec{v}(M) = v_z(r)\vec{u}_z$ .

L'équation des lignes de champ est telle que :  $\vec{v}(M) \wedge d\vec{l}_M = \vec{0} \Rightarrow v_z(r)\vec{u}_z \wedge d\vec{l}_M = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{u}_z \wedge d\vec{l}_M = \vec{0} \Rightarrow d\vec{l}_M$  est colinéaire à  $\vec{u}_z$  : **les lignes de champ** (aussi appelées lignes de courant) **sont donc des droites parallèles** à l'axe  $(Oz)$  de la conduite.

Dans ce cas, la conduite elle-même constitue un tube de champ.

**Remarques :**

- Soit  $\vec{a}(M) \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$  un champ de vecteur.

En coordonnées cartésiennes,  $d\vec{l}_M = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$ , les lignes de champ sont donc telles  $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_y dz - a_z dy \\ a_z dx - a_x dz \\ a_x dy - a_y dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Les lignes de champ sont donc calculées en résolvant l'équation  $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$ ;

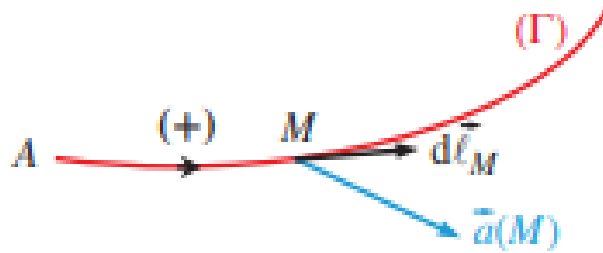
- En coordonnées cylindriques,  $d\vec{l}_M = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$  et l'équation des lignes de champ devient :

$$\frac{dr}{a_r} = \frac{r d\theta}{a_\theta} = \frac{dz}{a_z}$$

## 5. Circulation d'un champ vectoriel

### a) Notion de contour

Soit une courbe  $(\Gamma)$ , orientée positivement de manière arbitraire d'un point A à un point B. Une telle courbe est appelée **contour**. En tout point M d'un contour, le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l}_M$ , tangent à  $(\Gamma)$  au point M, est orienté dans le sens positif choisi de  $(\Gamma)$  (figure 1.8).



**Figure 1.8 :** Contour  $(\Gamma)$

### b) Notion de circulation

Soit un champ vectoriel  $\vec{a}(M)$ . On appelle circulation élémentaire  $dC$  de  $\vec{a}$  le long de  $(\Gamma)$  le produit scalaire :  $dC = \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$

La circulation  $C$  de  $\vec{a}$  le long de  $(\Gamma)$  est obtenue en faisant la somme de toutes les circulations élémentaires depuis le point A jusqu'au point B :  $C_{(\Gamma)} = \int_{A \rightarrow B} \vec{a}(M) \cdot d\vec{l}_M$ .



### Remarques :

- Si le *champ vectoriel*  $\vec{a}$  est une *force* ( $\vec{a} = \vec{F}$ ), alors la *circulation de*  $\vec{F}$  le long de la trajectoire ( $\Gamma$ ) suivie par une particule matérielle entre deux points A et B n'est rien d'autre que le *travail* de la force appliquée à la particule entre ces deux points A et B.

- Si la circulation C de  $\vec{a}$  est nulle le long de tout contour fermé, le champ  $\vec{a}$  est dit à circulation conservative :  $C_{(\Gamma)} = \int_{A \rightarrow B} \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}_M = 0$ .

### c) Théorème de Stokes

**Enoncé :** La circulation d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  le long d'un contour ( $\Gamma$ ) fermé est égale au flux du rotationnel de  $\vec{a}$  à travers une surface ( $\Sigma$ ) quelconque s'appuyant sur ( $\Gamma$ ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}_M = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

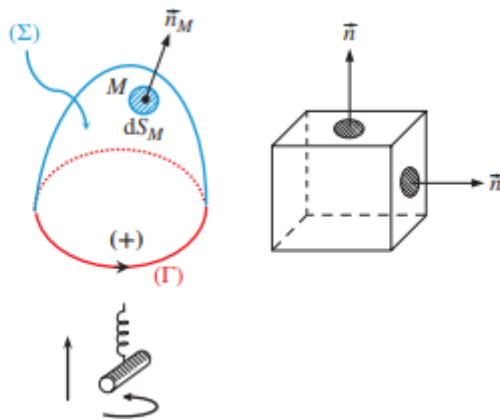
**Remarque importante :** Si le champ  $\vec{a}$  est à **circulation conservative**  $\oint_{(\Gamma)} \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{l}_M = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{0}$

## 6. Flux d'un vecteur

### a) Vecteur élément de surface

Soit un contour ( $\Gamma$ ) fermé et soit une surface ( $\Sigma$ ) quelconque s'appuyant sur ce contour (figure 1.9).

On convient d'orienter tout élément de surface  $dS_M$  entourant un point M de ( $\Sigma$ ) par un vecteur unitaire  $\vec{n}_M$ , perpendiculaire à  $dS_M$  et dont le **sens** est donné par la **règle du tire-bouchon de Maxwell** (ou par tout autre règle équivalent) : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens positif de ( $\Gamma$ ) perce la surface ( $\Sigma$ ) dans le sens de  $\vec{n}_M$ , au point M considéré. On appelle alors **vecteur élément de surface** le vecteur  $d\vec{S}_M = \vec{n}_M dS_M$ .



**Figure 1.9 :** Vecteur élément de surface : cas d'une surface ouverte (à gauche) et surface fermée (à droite).

Dans le cas d'une surface fermée, on oriente conventionnellement le vecteur normal  $\vec{n}_M$  de l'intérieur vers l'extérieur.

### b) Notion de flux

Soit un champ vectoriel  $\vec{a}_M$ . On appelle **flux élémentaire** de  $\vec{a}_M$  à travers un élément de surface  $dS_M$  de  $(\Sigma)$  le produit scalaire  $d\Phi(\vec{a}) = \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{S}_M$ .

Le flux de  $\vec{a}$  à travers  $(\Sigma)$  noté  $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a})$  est obtenu en faisant la somme des flux élémentaires  $d\Phi(\vec{a})$  à travers chacune des surfaces élémentaires constituant  $(\Sigma)$  :

$$\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{S}_M$$

En particulier, si son flux est nul à travers toute surface  $(\Sigma)$  fermée, le champ  $\vec{a}$  est dit à **flux conservatif** :  $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{a}(\mathbf{M}) \cdot d\vec{S}_M = 0$ .

Il importe de préciser qu'en **physique**, le flux d'un **champ de vecteur** à travers une surface traduit la quantité d'une grandeur physique qui traverse par unité de temps la surface.

### c) Théorème de Green-Ostrogradsky

**Enoncé :** Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{a}$  sortant d'une surface fermée  $(\Sigma)$  est égal à l'intégrale de sa divergence, étendue au volume  $(\tau)$  délimité par  $(\Sigma)$  :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{a}) dV$$

Remarque : Si le **champ  $\vec{a}$  est à flux conservatif**, alors son flux à travers  $(\Sigma)$  est nul donc  **$\text{div}(\vec{a}) = 0$**  en tout point de l'espace et ce réciproquement.

## Chapitre 2 : Magnétostatique

### I. Généralités sur le magnétisme

La magnétostatique est la partie du magnétisme qui étudie les effets magnétiques créés par des courants permanents (des courants constants-indépendants du temps - stationnaires) ou par les aimants.

L'interaction magnétique à l'instar de celle électrique et gravitationnelle se manifeste à distance.

#### 1. Sources du champ magnétique

##### a) Aimants

La source la plus ancienne du **champ magnétique** est l'**aimant**. Celui-ci est connu depuis l'Antiquité, sous le nom de **magnétite**, pierre trouvée à proximité de la ville de **Magnésia** (région de la Grèce antique en Asie Mineure, actuellement en Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de **champ magnétique**.

Certaines substances, appelées **substances magnétiques** peuvent être à la fois **attirées** et **repoussées** par un aimant (tout dépendant de la position des pôles). Ces substances étant elles-mêmes des aimants. Exemple : l'aiguille de la boussole est une substance magnétique.

Les **substances ferromagnétiques** sont des substances qui sont **attirées** par les aimants, **mais ne sont pas repoussées par ceux-ci**. De plus, elles ne sont pas attirées entre elles.

*Exemples :* le nickel (Ni), le fer (Fe), le cobalt (Co), leurs oxydes magnétiques de fer ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), leur alliage, ou un alliage contenant un de ses éléments.

*Remarques :*

- les aimants peuvent être naturels ou artificiels. En effet, en traitant convenablement les substances ferromagnétiques, on peut obtenir des aimants artificiels.
- Les substances telles que, le caoutchouc, le zinc, l'aluminium, le cuivre, le bois, le carbone, sont des substances qui ne sont pas attirées par un aimant : elles sont dites **non magnétiques**.

##### b) Conducteurs parcourus par un courant.

Tout commença avec l'expérience de Oersted réalisée pour la première fois en 1820. L'expérience consiste à placer un fil conducteur au-dessus d'une boussole.

On constate :

- qu'en présence d'un courant électrique dans le fil conducteur, l'aiguille de la boussole est effectivement déviée,
- que si on inverse le sens du courant, la déviation change de sens.

L'Expérience d'Oersted prouva sans ambiguïté : (a) qu'un courant électrique dévie un aimant, (b) qu'un conducteur électrique parcouru par un courant électrique  $I$  est susceptible de créer dans son voisinage un champ magnétique  $\vec{B}$

Il importe de préciser que Davy en 1821 montra à travers une expérience qu'un arc électrique était dévié dans l'entrefer d'un gros aimant. Cette expérience prouva qu'un **aimant** peut faire dévier un **courant électrique**.

Conclusion : Un aimant ou un courant électrique (particules chargées en mouvement) produit une modification des propriétés de l'espace autour d'eux. Cette région de cet espace où, en chaque point, le pôle d'un aimant est soumis à l'action d'une force est appelée **champ magnétique**.

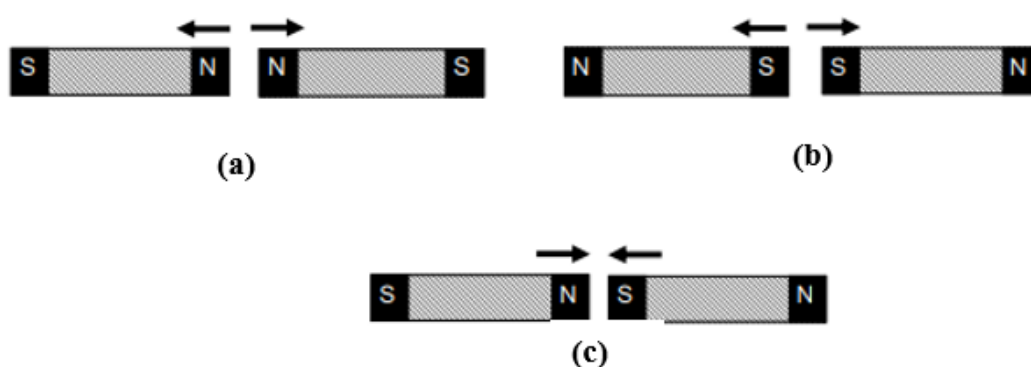
## 2. La boussole et les pôles d'un aimant

Les chinois ont été les premiers à constater, il y a plus de 1000 ans qu'une fine aiguille aimantée suspendue par un fil, loin de tout aimant (de toute source magnétique) prenait toujours une direction fixe correspondant à la direction Sud-Nord des pôles magnétiques.

**Cette aiguille aimantée (ou aiguille magnétisée) capable de s'orienter librement en s'alignant le champ magnétique terrestre est appelée boussole.**

**Un aimant possède deux pôles.** Les propriétés d'un aimant ne se manifestent qu'à ses pôles (que sont les extrémités). Ces deux pôles, appelés, comme les pôles géographiques, pôle nord et pôle sud, sont différents. Cependant, chaque pôle a la propriété d'attirer le fer. On appelle pôle d'un aimant les extrémités de l'aimant se dirigeant vers les pôles géographiques. Le pôle nord est le pôle se dirigeant vers le nord géographique et le pôle sud est celui se dirigeant vers le Sud géographique.

L'expérience montre que *deux pôles de même nom (nature) se repoussent alors que deux pôles, de noms contraires, s'attirent.*

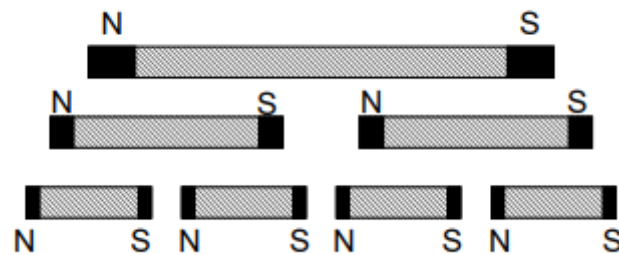


**Figure 2.1 :** *interaction aimant-aimant : (a) et (b) répulsion et (c) attraction*

L'expérience de l'aimant brisé montre qu'il est **impossible de séparer le pôle nord du pôle sud d'un aimant**. En effet, si on casse un aimant en deux parties, on obtient deux autres petits aimants ayant chacun un pôle nord et un pôle sud. Si on répète cette opération, on

obtient, à chaque fois, des aimants de plus en plus petits dotés chacun d'un pôle nord et d'un pôle sud.

L'expérience de l'aimant brisé montre ainsi que les pôles magnétiques vont toujours par paires. Par conséquent, Il n'existe pas de « **monopôle magnétique** », ou du moins leur existence n'a pas encore été montrée (confirmée expérimentalement, 2022).



**Figure 2.2 :** *Expérience de l'aimant brisé*

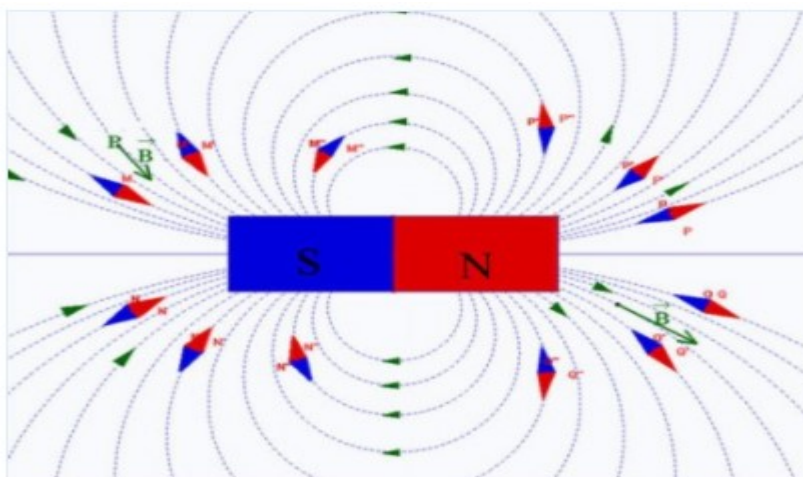
### 3. Lignes de champ magnétique

Les lignes de champ magnétique sont des courbes (fermées) tangentes au vecteur champ magnétique. Elles sont orientées dans le sens du champ. Pour être attiré par un aimant, un objet magnétique doit se trouver dans l'espace où existe des lignes de champ magnétique.

L'équation d'une ligne de champ magnétique est  $\vec{dl} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  où  $\vec{dl}$  est le vecteur déplacement élémentaire le long de la ligne de champ.

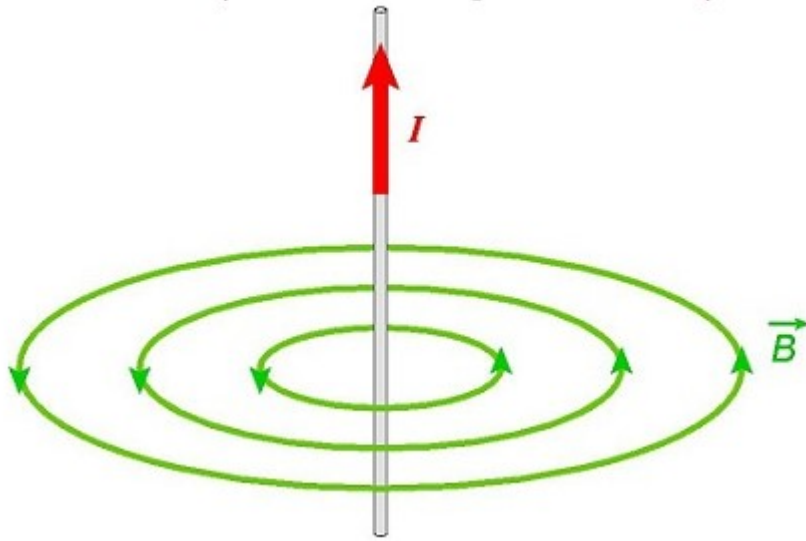
Exemples de lignes de champ magnétique

#### a) lignes de champ créées par un aimant droit



**Figure 2.3:** lignes de champ créées par un aimant droit

b) lignes de champ créées par un fil conducteur rectiligne parcouru par un courant  $I$ .



*Figure 2.4: lignes de champ circulaires créées par un fil conducteur rectiligne parcouru par un courant  $I$ .*

## II. Invariances et symétrie du champ magnétique $\vec{B}$

Le champ magnétique en un point  $M$  noté  $\vec{B}(M)$  est un vecteur (ou plus précisément un pseudo-vecteur) qui se décompose sur trois vecteurs de base et chaque composante est une fonction des trois coordonnées de  $M$  :

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{B}(M) = B_x(x, y, z)\vec{u}_x + B_y(x, y, z)\vec{u}_y + B_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + B_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + B_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$$

Du fait que le champ magnétique soit créé par un courant électrique, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné naissance. Cette trivialité se traduit par la présence de certaines symétries et invariances si les sources de courant en possèdent également. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie de la densité de courant, on pourra connaître celles du champ magnétique.

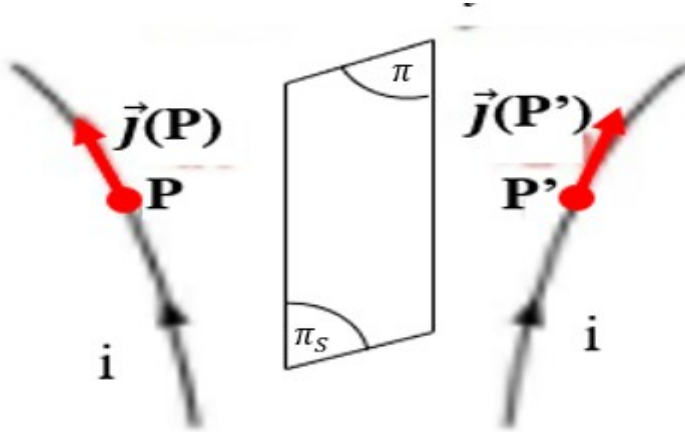
**L'étude des propriétés de symétrie** est fondamentale en magnétostatique car elle permet de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique  $\vec{B}(M)$ . En termes plus explicites disons que cette étude permettra *avant* de commencer les calculs, de déterminer la **direction de  $\vec{B}(M)$**  et les **variables dont dépend réellement  $\vec{B}(M)$** .

# 1. Plan de symétrie et plan d'antisymétrie des courants source du champ $\vec{B}$

## a) Définitions

Un plan ( $\pi$ ) est dit plan de symétrie ( $\pi_S$ ) des courants si et seulement si quel que soit deux points P et P' symétriques par rapport à ( $\pi$ ) alors l'élément de courant au point P est symétrique à l'élément de courant au point P' :

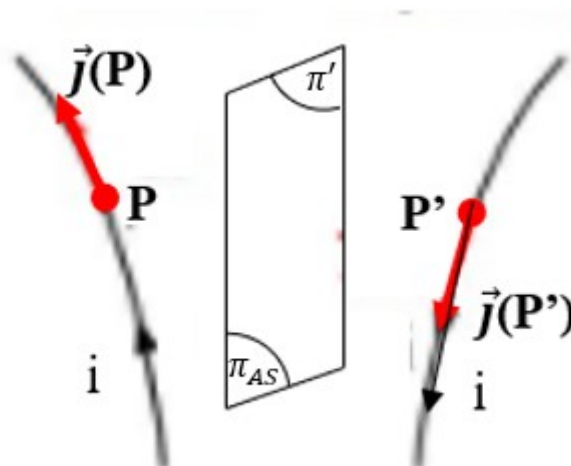
$$\vec{j}(P) = \vec{j}(P')$$



*Figure 2.5: plan de symétrie ( $\pi_S$ ) des courants*

Un plan ( $\pi'$ ) est dit plan d'antisymétrie ( $\pi_{AS}$ ) des courants si et seulement si quel que soit deux points P et P' symétriques par rapport à ( $\pi'$ ) alors l'élément de courant au point P est égal à l'opposé du vecteur densité de courant au point P' :

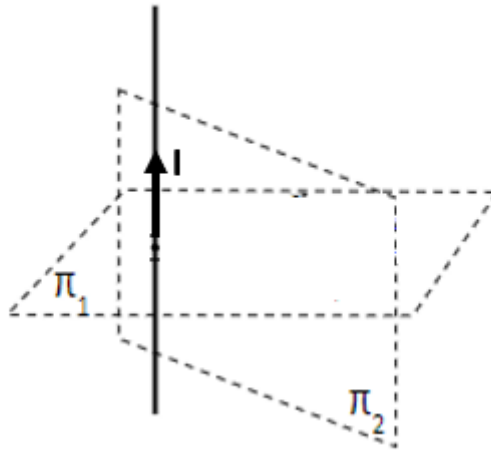
$$\vec{j}(P) = -\vec{j}(P')$$



*Figure 2.6: plan d'antisymétrie ( $\pi_{AS}$ ) des courants*

**Remarque :** un plan de symétrie ne retourne pas les courants alors qu'un plan d'antisymétrie retourne les courants.

## b) Exemples de plan de symétrie et de plan d'antisymétrie



**Figure 2.7 :** *plan de symétrie et plan d'antisymétrie* : le plan  $\pi_2$  contenant le fil ou plan du fil est un plan de symétrie des courants. Le plan  $\pi_1$  orthogonal au fil est un plan d'antisymétrie des courants.

## c) Principe de Curie et règles de symétrie

**Principe de Curie :** « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. »

Ainsi, dans un espace homogène et isotrope, si l'on fait subir une transformation géométrique à un système physique (exemples : ensemble de particules, distribution de charges électriques et/ou de courants électriques) susceptible de créer certains effets (forces, champs), alors ces effets subissent les mêmes transformations.

Si un système physique S possède un certain degré de symétrie, on pourra alors déduire les effets créés par ce système en un point à partir des effets en un autre point.

Ainsi si la densité de courant  $\vec{j}$  est invariant par rotation autour d'un axe, le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  l'est aussi (principe de Curie).

### Règles de symétrie

- **Invariance par translation** : si un système physique S est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, les effets ne dépendent pas de z.
- **Symétrie axiale** : si S est invariant dans toute rotation  $\theta$  autour d'un axe Oz, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  ne dépendent pas de  $\theta$ .
- **Symétrie cylindrique** : si S est invariant par translation le long de l'axe Oz et par rotation autour de ce même axe, alors ses effets exprimés en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  ne dépendent que de la distance à l'axe r.



- **Symétrie sphérique** : si S est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets exprimés en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  ne dépendent que de la distance au centre r.

- **Plan de symétrie** : si un système physique S admet un plan de symétrie  $\pi$ , alors en tout point de ce plan, un effet à caractère **vectoriel (champ électrique par exemple)** est **contenu dans le plan** et un effet à caractère **pseudo-vectoriel (champ magnétique)** lui est **perpendiculaire**. Ainsi, si le système de **courants** possède un **plan de symétrie**, alors en tout point de ce plan la densité de courant  $\vec{j}$  est **contenu dans ce plan** et le vecteur  $\vec{B}$  lui est **perpendiculaire**.

- **Plan d'antisymétrie  $\pi'$** : si par symétrie par rapport à un plan  $\pi'$ , S est transformé en  $-S$ , alors ce plan est un plan d'antisymétrie et en tout point de ce plan, un effet à caractère **vectoriel** est **perpendiculaire** au plan et un effet à caractère **pseudo-vectoriel** est contenu dans ce plan.

**Remarques :**

- Si  $\vec{j}$  est *poloïdal* (porté par  $\vec{u}_r$  et/ou  $\vec{u}_z$ ), alors  $\vec{B}$  est *toroïdal* (porté par  $\vec{u}_\theta$ ).
- Si  $\vec{j}$  est *toroïdal*, alors  $\vec{B}$  est *poloïdal*.

## 2. Détermination de la direction du champ magnétique $\vec{B}$

Pour trouver la direction du champ magnétique en un point M, il suffit d'identifier un plan de symétrie ( $\pi_S$ ) de la distribution des courants passant par M. **Le champ  $\vec{B}$  (M) est alors perpendiculaire au plan ( $\pi_S$ ).**

S'il n'y a pas de plan de symétrie, identifier deux plans d'antisymétrie ( $\pi_{AS}$ ) passant par M. **Le champ  $\vec{B}$  (M) est parallèle à la droite matérialisant l'intersection des deux plans.**

**Remarque :** Le champ  $\vec{B}$  (M) est orthogonal à un plan de symétrie des sources et inclus dans un plan d'antisymétrie des sources :  $\vec{B}$  est donc un **pseudo-vecteur** ou vecteur axial (Chapitre 1 ; 1.3)

## 3. Invariance de la distribution de courant

### a) Notion d'invariance

Une invariance est une propriété géométrique de la distribution des courants qui supprime la dépendance des composantes de  $\vec{B}$  (M) avec certaines coordonnées de M. Ainsi l'étude des invariances permet de connaître les variables d'espace dont dépendent les composantes du champ magnétique  $\vec{B}$  (M).

Il y a invariance si la vue de la distribution est identique en un point M et en un point M'; (M' étant obtenu par translation ou rotation depuis M), ou bien si le champ magnétique calculé en M et en M' est identique.

### b) Quelques types d'invariances.

- **Invariance par translation le long d'un axe**

Il y a invariance d'une distribution par translation le long d'un axe (Oz) si rien ne change physiquement à celle-ci (on voit depuis un point M et depuis un point M', image par translation de M, la même distribution) lorsqu'il subit une translation parallèle à cet axe.

Si une distribution admet un axe suivant lequel une translation ne change rien physiquement à celle-ci alors le champ magnétique ne doit pas non plus subir de changement (toutes choses égales par ailleurs- principe de Curie).

**Remarques :**

\* Lorsqu'une distribution présente **une invariance par translation le long d'un axe** dans le calcul du champ magnétique  $\vec{B}(\mathbf{M})$ , il faudra donc choisir une base **cartésienne** (O,  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ ) ou **cylindrique** (O,  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ ) qui sont des bases qui exploitent au moins un axe fixe.

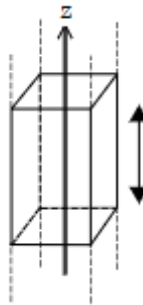
\* Si une distribution invariante le long d'un axe (Oz) **alors  $\vec{B}(\mathbf{M})$  ne dépend pas de z.**

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{B}(\mathbf{M}) = B_x(x, y)\vec{u}_x + B_y(x, y)\vec{u}_y + B_z(x, y)\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(\mathbf{M}) = B_r(r, \theta)\vec{u}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta + B_z(r, \theta)\vec{u}_z$$



**Figure 2.8 : Invariance par translation**

➤ **Invariance par rotation autour d'un axe**

Il y a invariance d'un système physique par rotation autour d'un axe (axe central du système) si physiquement la situation ne change pas lorsque l'angle de rotation autour de cet axe varie.

Lorsqu'une distribution présente **une invariance par rotation autour d'un axe** dans le calcul du champ magnétique  $\vec{B}(\mathbf{M})$ , il faudra donc choisir une base **cylindrique** (O,  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ ) ou **sphérique** (O,  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$ ) qui sont des bases qui exploitent au moins un angle de rotation.

**Remarques :** Si une distribution de courant admet un **axe suivant lequel une rotation ne change rien physiquement à celle-ci**, alors le champ magnétique ne doit pas non plus subir de changement. Il ne dépendra pas de l'angle de rotation autour de cet axe, **les composantes du champ magnétique ne dépendront pas de la coordonnée  $\theta$**  (systèmes de coordonnées cylindriques ou sphériques) :

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_\theta(r, z)\vec{u}_\theta + B_z(r, z)\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, \varphi)\vec{u}_r + B_\theta(r, \varphi)\vec{u}_\theta + B_\varphi(r, \varphi)\vec{u}_\varphi$$



**Figure 2.9: Invariance par rotation autour de l'axe d'un cylindre.**

### III. Champ magnétique créé par une charge électrique et un conducteur filiforme

#### 1. Champ magnétique créé par une charge ponctuelle

Une particule ponctuelle de charge  $q$  animée d'une vitesse uniforme  $\vec{v}$  ( $v \ll c$  :  $v$  petite devant celle de la lumière  $c$ ) crée en un point  $M$  distant de  $PM$  de celle-ci un champ magnétique d'expression :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

#### 2. Champ magnétique créé par un conducteur filiforme : Loi de Biot et Savart

##### a) Distribution linéique de courant

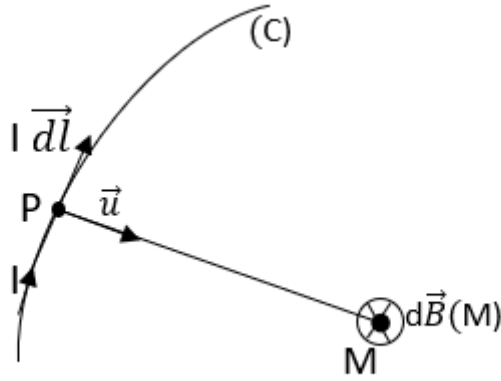
Un conducteur filiforme (idéalisation d'un fil réel dont la longueur serait très supérieure aux dimensions transverses de sa surface de section), traversé par un courant d'intensité  $I$  constitue une **distribution linéique de courant**.

Dans une distribution linéique de courant, un élément vectoriel infiniment petit  $\vec{dl}$  traversé par un courant  $I$  définit un élément de courant  $I \vec{dl}$ .

##### b) Loi de Biot et Savart

Notons  $C$  la courbe géométrique représentant un circuit filiforme et soit  $P$  un point de cette courbe  $C$ .

Notons  $d\vec{l}$  le vecteur déplacement élémentaire tangent à la courbe  $C$  et centré au point  $P$ .



**Figure 2.10:** champ magnétique créée par un élément de courant  $I \vec{dl}$ . En utilisant la règle des trois doigts de la main droite on trouve que le champ élémentaire  $d\vec{B}(M)$  est **entrant**.

Dans le vide un élément  $\vec{dl}$  traversé par un courant  $I$  (l'élément de courant  $I \vec{dl}$ ) crée en un point  $M$  ( $M \notin C$ ) un champ magnétique  $d\vec{B}$  d'expression :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

- L'unité légale du champ magnétique est le tesla (T)
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide.

### Caractéristiques de $d\vec{B}(M)$

**Direction :** il est orthogonal au plan formé par le vecteur  $I \vec{dl}(P)$  et le vecteur  $\overrightarrow{PM}$ .

**Sens :** il est déterminé par la règle des trois doigts de la main droite ou par toute règle équivalente (tire-bouchon, bonhomme d'Ampère).

**Norme :**

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{\|\overrightarrow{PM}\|^2} \sin(\widehat{\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{PM}})$$

### Remarques :

- Le **champ magnétique total** en M,  $\vec{B}(M)$  créé par un circuit filiforme C est la somme des champs magnétiques élémentaires créés par tous les points P de la distribution C.

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in C} \frac{\mu_0 I d\vec{l}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi \|\overrightarrow{PM}\|^3} : \text{ loi de Biot et Savart}$$

- Il importe de noter que la formule de Biot et Savart (1820) qui a été établie expérimentalement fournit un **lien explicite** entre le **champ magnétique** et le **courant électrique**.

- Si le circuit C n'est pas filiforme alors le champ magnétique total  $\vec{B}(M)$  en M, la somme des champs magnétiques élémentaires créés par un petit volume dV (par un tube de courant) situé en un point P, et de densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{B}(M) = \iiint_{P \in V} \frac{\mu_0 \vec{j} \wedge \overrightarrow{PM}}{4\pi \|\overrightarrow{PM}\|^3} dV$$

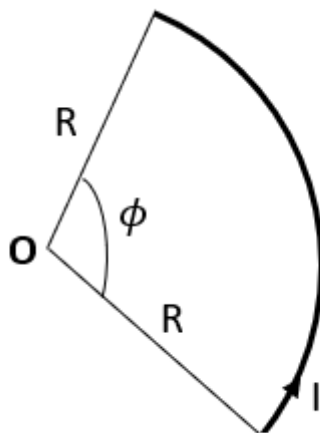
$$(\vec{j} dV = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) d\vec{l} = I d\vec{l})$$

### 3. Exercices d'application

#### 3.1 Exercice 1

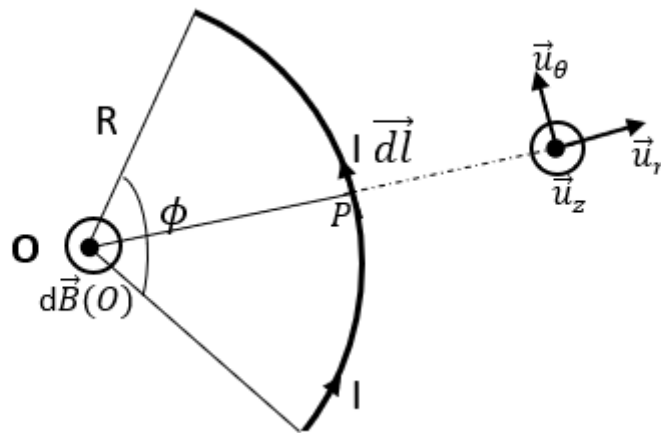
##### a) Enoncé

Un arc circulaire de centre O et de rayon R est traversé par un courant constant I.



1. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(O)$  créée par l'arc en son centre O.
2. Dédire l'intensité du champ magnétique créée par une spire circulaire en son centre.

## b) Réponses



$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \phi \vec{u}_z$$

2. Déduisons l'intensité du champ magnétique créée par une spire en son centre.

$$B = \vec{B}(O) \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

## 3.2 Exercice 2

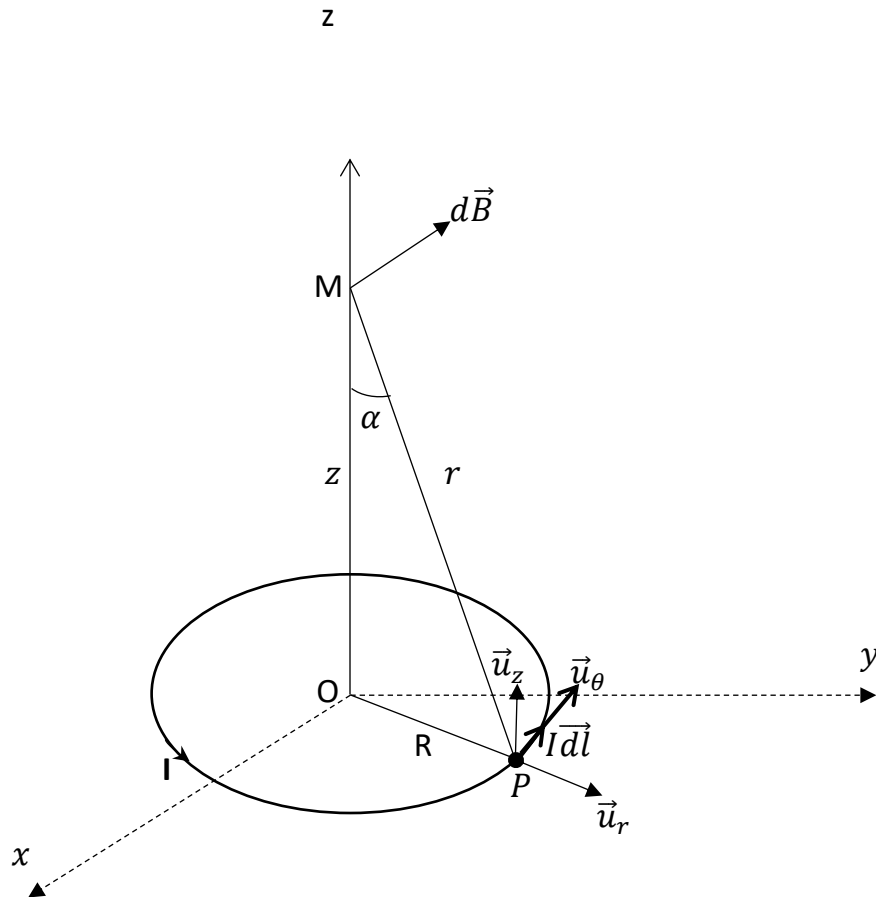
### a) Enoncé

Une spire circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ , et d'axe  $(zz')$  est parcouru par un courant constant  $I$ .

1. Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par la spire en un point  $M$  de son axe.
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire en son centre.
3. Tracer l'allure de la courbe de  $B(z)$  qui représente la variation de l'intensité du champ magnétique  $B$  le long de l'axe  $zz'$ .

## b) Réponses

1. Déterminons le champ magnétique  $\vec{B}(M)$



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 r^3} \vec{u}_z$$

**Remarques :** Dans le triangle (OMP) on a :

$$\checkmark \quad r^2 = R^2 + z^2 \Rightarrow r = (R^2 + z^2)^{1/2} \text{ d'où}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

où M est un point de l'axe de la spire , z est l'altitude du point M par rapport au centre de la spire et R le rayon de la spire

$$\checkmark \quad \sin \alpha = \frac{R}{r} \Leftrightarrow r = \frac{R}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R^2}{\left(\frac{R}{\sin \alpha}\right)^3} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$$

d'où

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{u}_z$$

2. Déduisons l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire en son centre.

$$\text{on a } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Au centre de la spire le point  $M = O$  d'où  $z = 0$  ;  $r = R$  ;  $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2)^{3/2}} \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2 R} \vec{u}_z$$

Remarque: on retrouve la réponse de la question 2 de l'exercice 3.1

3. Traçons (tracez !) la courbe de  $B$  en fonction de  $z$  avec  $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

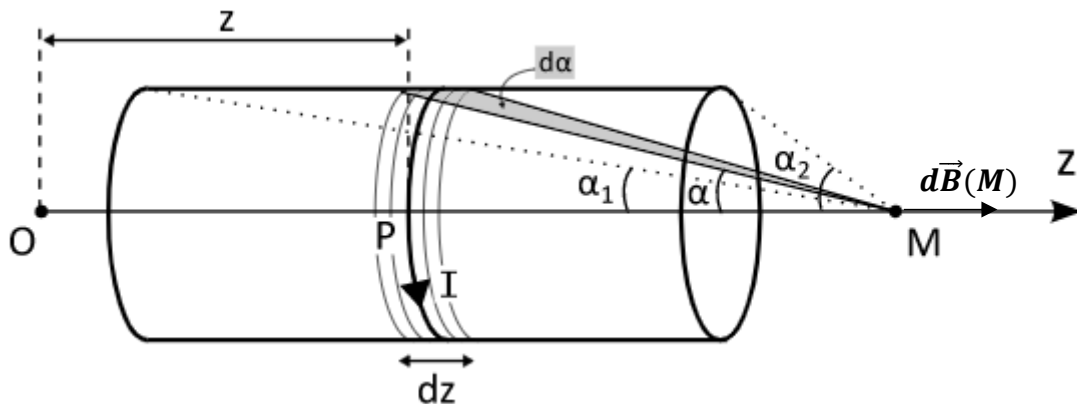
### 3.3 Exercice 3

#### a) Enoncé

Une bobine longue ou solénoïde d'axe  $zz'$  de longueur  $L$  est constituée de  $N$  spires identiques de rayon  $R$ .

1. Déterminer le champ magnétique créé par le solénoïde en un point  $M$  de son axe.
2. Dédurre l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini.

#### b) Réponses



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2R} \int \sin^3 \alpha \, dz = \frac{\mu_0 n I}{2R} \int \sin^3 \alpha \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha$$



$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{u}_z$$

2. Si le solénoïde est infini ( $L \gg R$ ) alors  $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow \pi$  on a :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos 0 - \cos \pi) \vec{u}_z = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

Conclusion : l'expression vectorielle du champ magnétique créé par un solénoïde infini (comportant  $n$  spires par unité de longueur et parcouru par un courant permanent  $I$ ) en un point  $M$  de son axe est :

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{L} I \vec{u}_z$$

### 3.4. Exercice 4

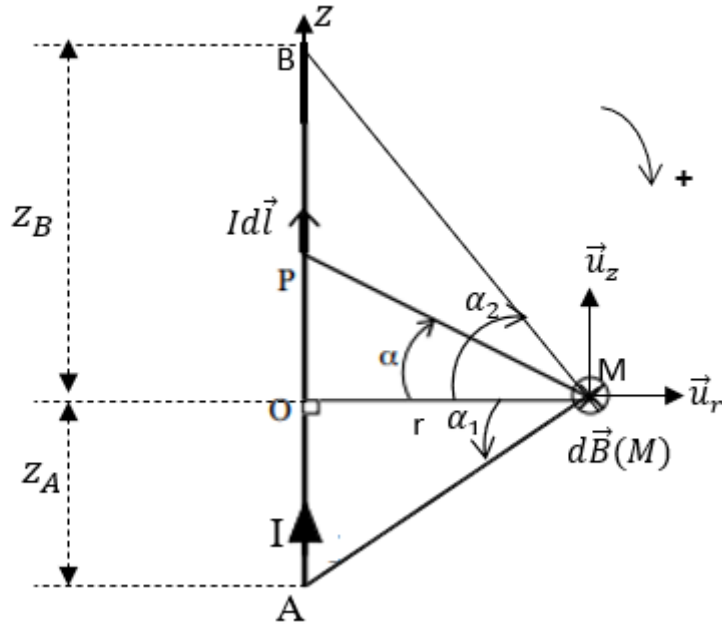
#### a) Enoncé

Un fil AB de longueur  $L$  est parcouru par un courant électrique d'intensité constante  $I$ .

1. Déterminer le champ magnétique créé par le fil en un point  $M$  de l'espace hors du fil et distant de  $r$  de celui-ci.
2. En déduire l'expression du champ magnétique créé par un fil infini en un point  $M$  distant de  $r$  de celui-ci.

#### b) Réponses

1. Déterminons le champ magnétique créé par le fil en un point  $M$  de l'espace hors du fil et distant de  $r$  de celui-ci.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \vec{u}_\theta$$

**Commentaires :**

- Si le point M est situé sur le plan médian du fil on a :  $\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_0$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin\alpha_0 \vec{u}_\theta$$

- Dans les triangles  $\Delta(AOM)$  et  $\Delta(BOM)$  on a :  
 $\sin\alpha_1 = \frac{z_A}{\sqrt{z_A^2 + r^2}}$  et  $\sin\alpha_2 = \frac{z_B}{\sqrt{z_B^2 + r^2}} \Rightarrow \vec{B}$  peut s'écrire aussi la forme :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( \frac{z_B}{\sqrt{z_B^2 + r^2}} - \frac{z_A}{\sqrt{z_A^2 + r^2}} \right) \vec{u}_\theta$$

**2.** Dédudisons l'expression du champ magnétique créé par un fil infini en un point M distant de r de celui-ci.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2} \right) \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

## IV. Le théorème d'Ampère

### 1. Enoncé

La circulation du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  le long d'une courbe ( $\Gamma$ ) quelconque orientée et fermée, appelée contour d'Ampère, est égale au produit de la perméabilité  $\mu_0$  du vide par la somme algébrique des intensités des courants qui traversent (enlacent) la surface délimitée par  $\Gamma$  :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacés}}$$

### 2. Remarques

- L'équation ci-dessus est une **formulation mathématique** de la **forme intégrale du théorème d'Ampère**.
- Les courants qui traversent toute surface s'appuyant sur le contour  $\Gamma$  sont dits « courants enlacés » pour le contour. Les intensités de ces courants sont algébriques. On compte positivement les courants dirigés dans le même sens que le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à la surface. Le sens de  $\vec{n}$  est déduit de la règle de la main droite à partir de l'orientation choisie pour le contour.
- Contrairement au champ électrique la circulation du champ magnétique est non conservative.

*Exemple :*

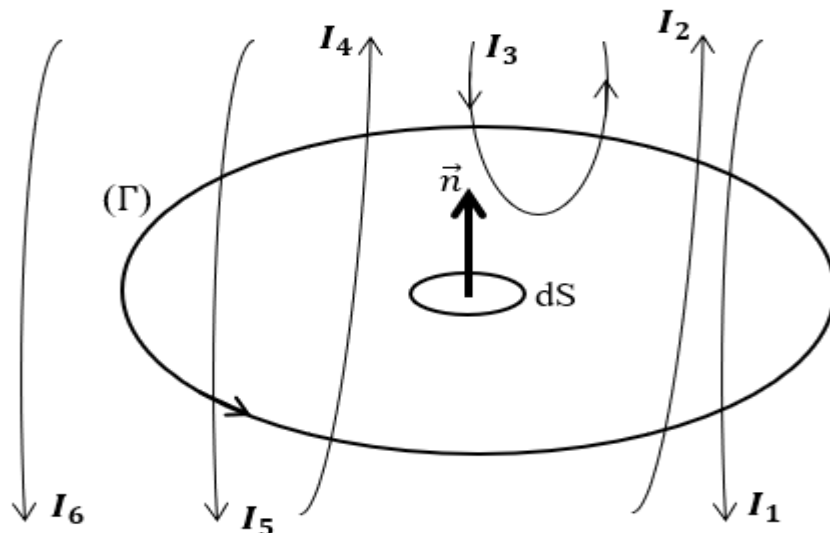


Figure 2.11 : courants enlacés par un contour ( $\Gamma$ )

$$\sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacées}} = -I_1 + I_2 + I_3 - I_3 + I_4 - I_5 = -I_1 + I_2 + I_4 - I_5$$

- Le théorème d'Ampère est « l'équivalent » du théorème de Gauss pour le champ électrostatique. Il relie le champ  $\vec{B}$  à ses sources (le courant électrique) dans le vide et permet de **calculer le champ magnétique** créé par une distribution de courants lorsque celle-ci possède des **symétries « fortes »**. Cependant, à la différence du théorème de Gauss, le théorème d'Ampère n'est valable qu'en régime permanent.

### 3. Forme locale du théorème d'Ampère

Posons  $\sum_{algébrique} I_{enlacés} = I$ .

$$\text{On a : } I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \mu_0 \sum_{algébrique} I_{enlacés} = \mu_0 I = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

$$\text{On sait d'après le théorème de Stokes que } \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(\Gamma)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

Or d'après la **forme intégrale du théorème d'Ampère** on a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{algébrique} I_{enlacés} \quad (3)$$

$$\text{Les relations (1), (2) et (3)} \Rightarrow \iint_{(\Gamma)} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} : \text{forme locale du théorème d'Ampère}$$

### 4. Méthode d'application de la forme intégrale du théorème d'Ampère

L'application du théorème d'Ampère pour le calcul de  $\vec{B}$  est une méthode très intéressante quand la distribution de courants (source du champ magnétique) présente un grand nombre d'invariances et symétries. Techniquement, elle est intéressante si le produit scalaire  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  est simple à écrire sur un contour bien choisi.

1. Simplifiez au maximum l'expression générale de  $\vec{B}$  par une étude des symétries et des invariances.

2. Placez le point M où vous voulez calculer  $\vec{B}$  puis choisissez (et construisez) un contour  $\Gamma$  fermé, dit contour d'Ampère, qui soit compatible avec les symétries du problème et qui passe par le point M où l'on veut calculer le champ magnétique  $\vec{B}$ .

3. Calculez la circulation C de  $\vec{B}$  le long de  $\Gamma$ . Il est courant que, si vous avez bien choisi votre contour,  $\vec{B}$  soit constant en norme sur  $\Gamma$ .

4. Calculez l'intensité totale  $I_{enlacé}$  du courant qui passe la surface délimitée par  $\Gamma$ . (L'orientation choisie pour  $\Gamma$  détermine le sens positif de I enlacé par la règle des trois doigts).

5. Appliquer l'égalité  $C = \mu_0 I_{enlacé}$  pour déterminer  $\vec{B}$

### Remarques :

- Le contour  $\Gamma$  fermé est choisi de telle façon que le calcul de la circulation  $C$  soit simple. En termes clairs,  $C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l}$  est facile à calculer si  $\vec{B}$  est **tangent au contour  $\Gamma$**  en tout point ( $\vec{B}$  *colinéaire* à  $d\vec{l}$ ) et est **constant le long du contour  $\Gamma$** .
- Il est souvent conseillé de **découper le contour  $\Gamma$  en petits éléments** de telle manière que  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  soit simple à calculer et à intégrer (voir exercice 5.2).

## 5. Exercices d'application

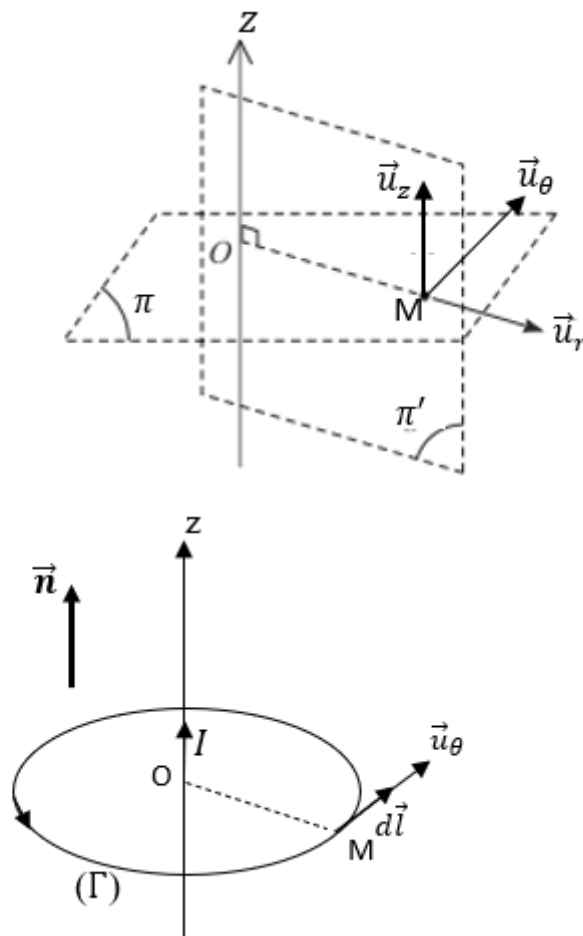
### 5.1 Exercice 1

#### a) Enoncé

Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant électrique permanent d'intensité  $I$ .

Par application du théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le fil en un point  $M$  hors du fil et distant de  $r$  de celui-ci.

#### b) Réponses



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

### Remarques

\* On montre facilement que l'expression de  $\vec{B}(M)$  ne dépend donc pas de l'orientation du contour fermé  $\Gamma$ .

\* Comme  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  le champ présente donc l'allure de la figure ci-dessous. On dit que le champ magnétique « tourne » autour du fil (ou qu'il est toroïdal).

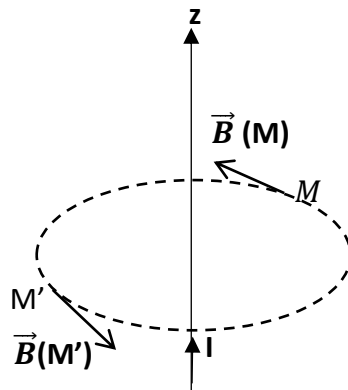


Figure : Le champ magnétique « tourne » autour du fil.

## 5.2 Exercice 2

### a) Énoncé

Un solénoïde infini, comporte  $n$  spires par unité de longueur, chacune est parcourue par un courant  $I$  permanent.

En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer le champ magnétique créé par le solénoïde en un point  $M$  de l'espace.

### b) Corrigé détaillé et commenté

Étant donné la géométrie cylindrique du solénoïde, nous travaillerons en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , l'axe  $z$  étant l'axe du solénoïde.

#### \*Étude des symétries et des invariances

##### - Éléments de symétrie et conséquences

Le plan passant par un point  $M$  et perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie. Le champ magnétique est donc porté par l'axe  $(Oz)$  :

Dans la base cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  le champ magnétique vu comme une fonction des coordonnées  $(r, \theta, z)$  s'écrit :  $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$

- **Eléments d'invariance et conséquences**

Le solénoïde étant infini il y a invariance par translation le long de son axe de symétrie  $(z'z)$ . Par conséquent le champ  $\vec{B}(M)$  est indépendant de  $z$ .

D'où  $\vec{B}(M) = B_z(r, \theta)\vec{u}_z$

D'autre part comme l'axe  $(z'z)$  est un axe de symétrie du solénoïde, il y a donc invariance par rotation autour de cet axe. Le champ  $\vec{B}(M)$  est indépendant de  $\theta$ .

D'où  $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{u}_z = B(r)\vec{u}_z$

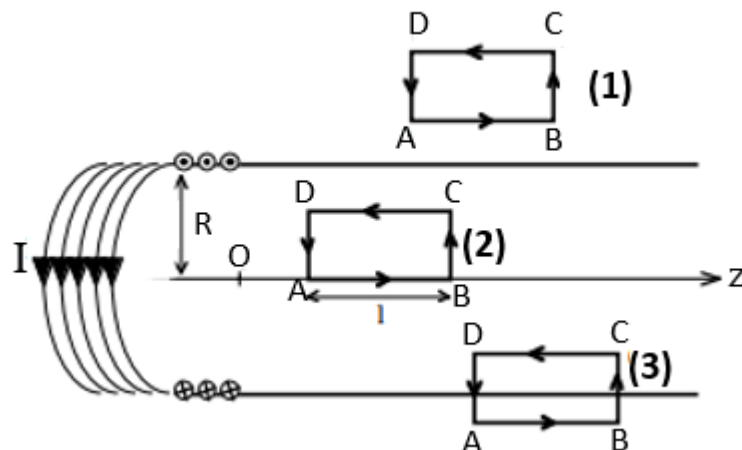
**\*Choix du contour d'Ampère**

Comme le champ  $\vec{B}(M)$  est **axial**, il garde une direction bien définie. Sur des segments [DC] et [AB] parallèles à l'axe  $zz'$  le champ  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{u}_z$ , donc à un élément de déplacement  $(d\vec{l})$  sur ces segments.

Le long de chaque segment  $r = \text{constante}$  donc  $B_z(r)$  l'est aussi. Cependant, comme ces segments ne constituent pas des contours fermés, nous allons fermer le contour en choisissant deux segments [DA] et [CB] parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe  $zz'$ .

En conclusion **le contour d'Ampère choisi sera donc un rectangle orienté.**

On choisit trois contours orientés (1), (2) et (3) différents.



- **Détermination de la circulation  $C$  de  $\vec{B}(M)$ , de la somme algébrique des intensités des courants enlissés, ainsi que de  $\vec{B}$ .**

En appliquant le théorème d'Ampère le long du contour (1) ABCD on a :

### Pour le contour (1)

#### *Circulation C*

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A \rightarrow B} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{B \rightarrow C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C \rightarrow D} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{D \rightarrow A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_{A \rightarrow B} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A \rightarrow B} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \oint_{A \rightarrow B} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz$$

Comme le long du segment A, B ;  $r = \text{constante}$  alors  $\mathbf{B}_z(\mathbf{r}) = \text{constante} \Rightarrow$

$$\oint_{A \rightarrow B} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) \int_{z_A}^{z_B} dz = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) (z_B - z_A) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) l$$

avec  $l = z_B - z_A$

$$\oint_{C \rightarrow D} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \vec{u}_z \cdot dz (-\vec{u}_z) = - \oint_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz$$

Comme le long du segment A, B ;  $r = \text{constante}$  alors  $\mathbf{B}_z(\mathbf{r}) = \text{constante} \Rightarrow$

$$- \oint_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz = \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) \int_{z_C}^{z_D} dz = -\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) l$$

avec  $l = z_D - z_C$

$$\oint_{B \rightarrow C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{D \rightarrow A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car les segments [BC] et [DA] on a } \vec{B} \perp d\vec{l}$$

$$\Rightarrow C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) l - \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) l = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) l \quad (1)$$

#### *Somme algébrique des courants enlascés I*

$$I = \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlascés}} = 0 \quad (2)$$

car aucun courant n'enlase le contour fermé A,B, C, D.

$$(1) \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) l = 0 \Rightarrow \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$$

Conclusion partielle : le champ  $\vec{B}(M)$  est uniforme hors du solénoïde. Or à l'infini (très loin des courants traversant les spires) le champ  $\vec{B}(M)$  créé par ses spires est nul :

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}.$$

A l'extérieur d'un **solénoïde infini** parcouru par un courant  $I$  le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par celui-ci est nul :  $\vec{B}(M) = \vec{0}$  à l'extérieur.

### Pour le contour (2)

#### *Circulation C*

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A \rightarrow B} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{B \rightarrow C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C \rightarrow D} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{D \rightarrow A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$
$$= \mathbf{B}_1 l + 0 - \mathbf{B}_2 l + 0$$

$$C = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) l$$

#### *Somme algébrique des courants enlascés I*



$$I = \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacées}} = 0 \quad (2)$$

car aucun courant ne traverse (n'enlace) le contour (2) qui est totalement intérieur au solénoïde.

$$\Rightarrow (B_1 - B_2)l = 0 \Rightarrow B_1 = B_2$$

**Conclusion :** A l'intérieur du solénoïde le champ  $\vec{B}$  est uniforme en tout point  $M$ .

### Pour le contour (3)

#### **Circulation C**

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{A \rightarrow B} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{B \rightarrow C} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{C \rightarrow D} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{D \rightarrow A} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_{B \rightarrow C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{D \rightarrow A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_{A \rightarrow B} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ car } \vec{B} = 0 \text{ à l'extérieur du solénoïde.}$$

$$\oint_{C \rightarrow D} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \vec{u}_z \cdot dz (-\vec{u}_z) = - \int_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz$$

Comme le long de  $[C, D]$  ;  $r = \text{constante}$  alors  $\mathbf{B}_z(\mathbf{r}) = \text{constante} \Rightarrow$

$$- \int_{C \rightarrow D} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot dz = -\mathbf{B}(\mathbf{r}) \int_{z_C}^{z_D} dz = -\mathbf{B}(\mathbf{r})(z_D - z_C) = -B(r)(-l) = B(r)l$$

avec  $l = z_C - z_D$

$$\text{d'où } C = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r)l \quad (1)$$

### **Somme algébrique des courants enlacsés I**

$$\mu_0 \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacées}} = \mu_0 I_{\text{total}}$$

**Sur une longueur L (longueur du solénoïde) on N spires.**

$$L \rightarrow N \text{ spires}$$

$$l = CD \rightarrow ?$$

$$\Rightarrow \text{Le nombre de spires contenu dans la longueur } \ell \text{ est donc } \frac{N}{L} \times l = n$$

Or sur chaque spire circule un courant d'intensité  $I$ . Sur les spires  $n$   $\ell$  circulent alors un courant d'intensité  $n I$

$$\text{D'où } \mu_0 \sum_{\text{algébrique}} I_{\text{enlacées}} = \mu_0 I_{\text{total}} = \mu_0 n I \quad (2)$$

$$\text{Les relations (1) et (2)} \Rightarrow B(r)l = \mu_0 n I \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 n \mathbf{I}$$

$$\vec{B}(\mathbf{M}) = \mu_0 n \mathbf{I} \vec{u}_z$$

## V. Potentiel vecteur magnétostatique $\vec{A}$

### 1. Non divergence de $\vec{B}$ ou équation de Maxwell-Thomson

D'après la loi de Biot et Savart on a :

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in C} \frac{\mu_0 I d\vec{l}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}$$

En posant  $\overrightarrow{PM} = \vec{r}$  on a

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in C} \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in C} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in C} \text{div} \left( \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\text{div} \left( \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} d\vec{l}(M) - d\vec{l}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$\overrightarrow{\text{rot}} d\vec{l}(M) = 0$  car  $d\vec{l}(M)$  est indépendant de  $M$ .

$\frac{\vec{r}}{r^2} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^2} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right)$  or  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{0}$  pour toute fonction scalaire  $f$  d'où  $\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^2} = \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \text{div} \left( \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^2} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} d\vec{l}(M) - d\vec{l}(M) \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in C} \text{div} \left( \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = 0$$

**$\text{div} \vec{B}(M) = 0$  : la divergence du champ magnétique en un point  $M$  donné de l'espace est nulle.**

**Remarques : Signification physique de l'équation de Maxwell Thomson**

**-L'équation  $\text{div} \vec{B}(M) = 0$  est appelée équation de Maxwell Thomson :**

-D'après l'équation de Maxwell Gauss (voir cours d'électrostatique) on a :

$$\text{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation exprime le fait que la divergence du champ électrostatique en un point  $M$  est proportionnelle à la densité de charge en ce point. Ce qui laisse supposer que les charges **électriques** existent et soient à l'origine du **champ électrique**.

Raisonnons par analogie : l'équation  $\text{div} \vec{B}(M) = 0$  appelée équation de Maxwell Thomson exprime le fait que contrairement au champ électrique qu'il n'existe pas de charge "magnétique" que l'on pourrait isoler, de monopôle magnétique, qui serait à l'origine du champ magnétique, comme il existe un électron, charge électrique unitaire qui génère le

champ électrique. Le **champ magnétique** n'est pas créé par des charges "magnétiques", analogues aux charges à l'origine du champ électrique, mais par des **courants électriques**. L'inexistence de monopôle magnétique est admise classiquement en licence ou en prépa.

La loi de Maxwell Thomson ( $\text{div} \vec{B}(M) = 0$ ) traduit donc le fait simple qu'**il n'existe pas de monopôle magnétique**. Un monopôle « sud » ou « nord » d'un aimant n'existe pas (alors qu'il existe des monopôles électriques, comme l'électron, **néгатif**, ou le proton, **positif**). Ce qui est confirmé par l'expérience de l'aimant brisé : si l'on brise un aimant en deux, on obtient deux aimants avec chacun son pôle nord et son pôle sud (**il est impossible de séparer les pôles nord et sud d'un aimant**).

## 2. Champ magnétique $\vec{B}$ : champ à flux conservatif.

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky on a :  $\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{B}) dV$

or  $\text{div}(\vec{B}) = 0$  : équation de Maxwell Thomson

d'où  $\oint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$  : *le flux (total = entrant + sortant) du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers une surface fermée est toujours nul.*

**Remarque :** Dire que  $\text{div} \vec{B}(M) = 0$  c'est aussi exprimer le fait qu'en un point quelconque M de l'espace, le flux du champ magnétique sortant du point M ou d'un volume élémentaire est strictement identique au flux entrant en ce point M ou ce volume élémentaire. *Autrement dit, en régime permanent (stationnaire) le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif.*

## 3. Expression du champ $\vec{B}$ en fonction du potentiel $\vec{A}$ et Jauge de Coulomb

De l'équation de Maxwell-Thomson on a :  $\text{div} \vec{B} = 0$  (1)

Or on sait que pour tout champ de vecteur  $\vec{a}(M)$  quelconque on a :  $\text{div}[\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M)] = 0$  (2)

Les équations (1) et (2) impliquent qu'il existe un champ de vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$   
 $\vec{A}(M)$  est appelé le **potentiel vecteur** de  $\vec{B}$ .

### Remarques :

- La relation  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$  exprime le fait que le champ magnétique  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel vecteur. Cependant, ce potentiel vecteur  $\vec{A}$  est défini au gradient d'une fonction scalaire f différentiable près. Le choix de cette fonction scalaire f est arbitraire.

En effet, on sait que si f est une fonction scalaire on a :

$\overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(f)$  or  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}}(f) = 0$  quel que soit f une fonction scalaire.

$$\text{D'où } \overrightarrow{\text{rot}}[\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{B}$$

On peut lever l'indétermination du potentiel vecteur  $\vec{A}$  en lui imposant une condition supplémentaire appelée **jauge de Coulomb** :  $\text{div}\vec{A} = 0$

- On déduit du théorème de Stokes (voir chapitre 1 ; IV .6.) que

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{A}(\mathbf{M}).d\vec{l}_M = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}).d\vec{S} = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} \Rightarrow \text{La forme intégrale de l'équation}$$

$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$  est donc  $\oint_{(\Gamma)} \vec{A}(\mathbf{M}).d\vec{l}_M = \iint_{(S)} \vec{B}.d\vec{S}$  : la circulation de  $\vec{A}$  sur une courbe fermée ( $\Gamma$ ) est égale au flux du vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  sur une surface  $S$  qui entoure le contour  $\Gamma$ .

-  $\vec{A}$  est un vecteur (polaire) et  $\vec{B}$  est un pseudo-vecteur (il dérive d'un produit vectoriel)  $\vec{A}$  possède les mêmes règles de symétrie que le champ électrique ( **$\vec{A}$  est contenu dans le plan de symétrie des courants**) et  $\vec{B}$  possède des règles de symétrie inverse à celle de  $\vec{A}$  (donc à celles de  $\vec{E}$ ).

#### 4. Equation de Poisson en magnétostatique

De l'expression du potentiel vecteur et en utilisant les relations sur les opérateurs différentiels on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}] = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}\vec{A}] - \Delta\vec{A} \quad (1)$$

Si on impose au potentiel vecteur  $\vec{A}$  la condition  $\text{div}\vec{A} = 0$  (c'est-à-dire si le potentiel vecteur  $\vec{A}$  vérifie la Jauge de Coulomb) l'équation (1) devient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}] = -\Delta\vec{A} \quad (2)$$

On sait d'après la forme locale du théorème d'Ampère que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (3)$$

Des relations (2) et (3) on déduit que :

$$\mu_0 \vec{j} = -\Delta\vec{A} \Leftrightarrow \Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0 : \text{équation de Poisson en magnétostatique.}$$

L'équation de Poisson montre que les courants sont les sources du potentiel vecteur  $\vec{A}$ .

#### 5. Expression du potentiel vecteur

La solution générale de l'équation de Poisson est :

$$\vec{A}(\mathbf{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{PM} dV$$

Dans cette expression souvent vue comme une définition mathématique du potentiel vecteur  $\vec{A}(\mathbf{M})$  en un point  $M$  :

- $\vec{j}$  est la densité de courant ;
- $dV$  désigne l'élément de volume ;
- $PM$  est la distance entre l'élément de courant et le point  $M$ .

**Remarque :** De l'expression  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{PM} dV$  on déduit que  $\vec{A}(M)$  et  $\vec{j}$  sont colinéaires ; ce qui confirme que  $\vec{A}(M)$  est contenu dans le plan de courant.

## 6. Méthodes de calcul du potentiel vecteur

- Si le champ  $\vec{B}$  est connu, on peut utiliser la relation  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$
- On peut aussi utiliser la forme intégrale de l'équation précédente :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- On peut également utiliser la définition du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{PM} dV$$

Il importe de préciser que cette formule n'est pas adaptée pour le calcul de  $\vec{A}(M)$  dans le cas des systèmes infinis. Pour ces systèmes, il faudra donc faire recours aux premières méthodes.

## 7. Exemples de calcul du potentiel vecteur

### 7.1 Exercice 1

#### a) Énoncé

Un fil infini est traversé par un courant permanent  $I$ .  
Déterminer le potentiel vecteur créé par ce fil.

#### b) Réponses

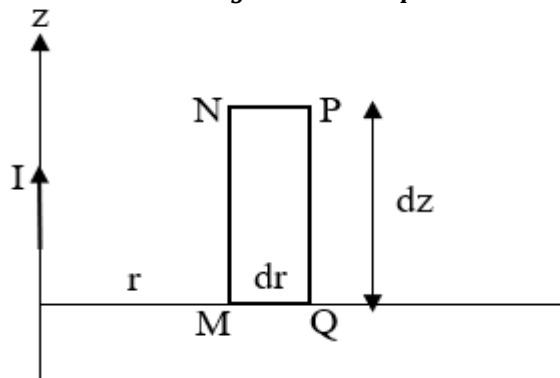
Pour un fil infini  $B(r, \theta, z) = B(r)$  ;  $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ . Comme  $\vec{j} = j \vec{u}_z$  alors  $\vec{A} = A(r) \vec{u}_z$ .

*\*Méthode 1 : utilisation de la relation  $\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A}$ .*

$$\vec{A} = A_z(r) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \vec{u}_z$$

(à une constante additive près).

*\* Méthode 2 : Utilisation de la relation :  $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$*



$$\vec{A} = A_z(r) \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \vec{u}_z \quad (\text{à une constante additive près}).$$

## 7.2 Exercice 2

### a) Enoncé

Un fil fini de longueur  $2L$  est parcouru par un courant permanent  $I$ .

Déterminer le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  créé par ce fil en un point de sa médiatrice.

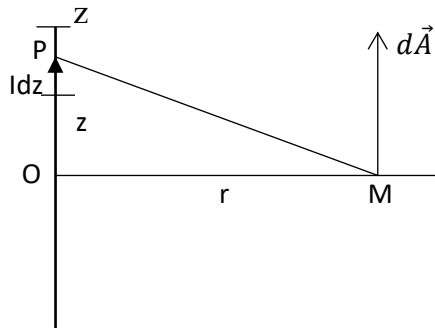
$$\text{Donnée : } \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 + r^2})$$

### b) Solution

Comme le fil est fini utilisons la relation  $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{PM} dV$

$$\vec{j}dV = Id\vec{l} = Idl\vec{u}_z = Idz\vec{u}_z$$

$$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z$$



$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}}{PM} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + r^2}} \vec{u}_z$$

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Comme la fonction  $\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}}$  est paire alors

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{+L} \frac{Idz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln(z + \sqrt{z^2 + r^2}) \right]_0^L$$

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln(z + \sqrt{z^2 + r^2}) \right]_0^L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{(L + \sqrt{L^2 + r^2})}{r} \right)$$

$$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{(L + \sqrt{L^2 + r^2})}{r} \right) \vec{u}_z$$

**Remarques :**

$$\checkmark \quad \vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{(1 + \sqrt{1 + (\frac{r}{L})^2})}{\frac{r}{L}} \right) \vec{u}_z$$

- ✓ Si le fil est infini c'est-à-dire si la longueur  $L$  tend vers l'infini alors  $A(M)$  tend vers l'infini :  $A(M)$  diverge. Ce qui montre que cette méthode de calcul ne peut pas être utilisée pour déterminer le potentiel vecteur créé par un fil infini.

## VII. Forces électromagnétiques

### 1. Action d'un champ magnétique sur le mouvement d'une particule chargée

#### a) Force de Lorentz (rappel classes de Terminales C, D et E).

A la fin du XIXe siècle, le physicien hollandais Hendrik Lorentz donne l'expression de la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur une charge ponctuelle  $q$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}$  dans des champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

En présence du seul champ magnétique  $\vec{B}$  ( $\vec{E} = \vec{0}$ ), la force de Lorentz devient :

$$\vec{F} = q (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

En se référant à la force de Lorentz, le champ magnétique peut être défini comme une région de l'espace où, en l'absence du champ électrique  $\vec{E}$ , une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{V}$ , est soumise à l'action d'une force  $\vec{F} = q (\vec{V} \wedge \vec{B})$

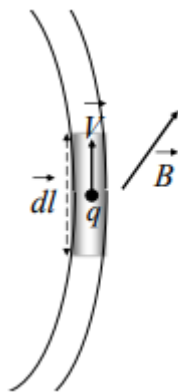
#### b) Application : étude du mouvement d'une particule chargée d'un champ magnétique uniforme

*Revoir cours de Physique classes de Terminales C, D et E !*

### 2. Action d'un champ magnétique sur un courant : Force de Laplace.

Lorsqu'un fil conducteur, parcouru par un courant  $I$ , est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , chaque élément de courant  $I d\vec{l}$  du fil subit une force :

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$



Cette force, appelée force de Laplace est perpendiculaire au plan formé par le champ  $\vec{B}$  et l'élément de courant  $I d\vec{l}$  considéré. Son sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (ou par toute autre méthode équivalente) : le bonhomme d'Ampère, parcouru par le courant  $I$ , des pieds vers la tête, a la force à sa gauche lorsqu'il regarde les lignes de champ.

Démontrons la loi de Laplace à partir de la force de Lorentz.

Considérons un élément de volume conducteur filiforme de longueur  $dl$ , de section  $S$  et parcouru par un courant  $I$ .

Il est traversé à chaque instant par le même nombre  $N$  de charges et par conséquent par une même quantité infinitésimale de charges  $dQ = Nq$ .

Chaque charge (+q) subit de la part du champ magnétique  $\vec{B}$  une force

$$q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Les N charges subissent de la part du champ une force infinitésimale

$$d\vec{F} = Nq\vec{V} \wedge \vec{B} = dQ\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Or  $dQ = \rho \times volume = \rho \times dl \times S \Rightarrow dQ\vec{V} = \rho \times dl \times S \vec{V}$  où  $\rho$  est la densité volumique de charges.

Comme  $\vec{V}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaires et de même sens alors

$$dQ\vec{V} = \rho \times dl \times S \vec{V} = \rho \times S \times Vd\vec{l} = Id\vec{l}$$

D'où les N charges contenues dans l'élément  $d\vec{l}$  subissent la force

$$d\vec{F} = dQ\vec{V} \wedge \vec{B} = Id\vec{l} \wedge \vec{B}$$

D'où l'expression de la loi de Laplace :

$$\mathbf{dF} = \mathbf{Idl} \wedge \mathbf{B}$$



## Chapitre 3 : Induction électromagnétique

### I. Phénomènes d'induction électromagnétique et inductance

Dans le précédent chapitre, nous nous sommes intéressés essentiellement à la création d'un champ magnétique à partir d'un courant constant. Ceci fut motivé par l'expérience de Oersted.

Puisque le magnétisme et l'électricité sont deux phénomènes intimement liés, on peut alors se poser la question de savoir comment produire un courant à partir d'un champ magnétique ? Faraday (1831) fit un certain nombre d'expériences pour produire un courant électrique à partir d'un champ magnétique. Ces expériences échouèrent car il essayait de produire un courant permanent. Cependant, il s'aperçut bien de certains effets troublants, mais ils étaient toujours transitoires.

#### 1. Mise en évidence des phénomènes d'induction.

Ce phénomène d'induction est mis en évidence à partir de la réalisation de quelques expériences simples :

##### *Expérience 1 :*

On dispose d'une bobine et d'un fil conducteur déformable (placé dans un champ magnétique constant) relié à un galvanomètre à zéro central (*Figure 3.1*). On constate que la **déformation du fil** entraîne **l'apparition d'un courant** dans le galvanomètre. **Ce courant s'annule dès que cesse la déformation**. L'intensité du courant dépend de la vitesse avec laquelle on effectue la déformation. Si on redonne au fil sa forme initiale, un courant circule dans le sens inverse, tant que dure cette opération.



Figure 3.1: bobine connectée à un galvanomètre

##### *Expérience 2 :*

Plaçons un aimant permanent à proximité d'une boucle constituée d'un fil conducteur relié à un galvanomètre (figure 3.2). Lorsque **l'aimant est immobile, il n'y a pas de courant** mesurable dans le fil. Par contre, lorsqu'on **déplace l'aimant**, on voit **apparaître un courant** dont le signe varie selon qu'on approche ou qu'on éloigne l'aimant. De plus, ce courant est d'autant plus important que le **déplacement est rapide**. Dès que le mouvement cesse, le courant induit s'annule. Si on éloigne l'aimant le courant circule dans le sens inverse.

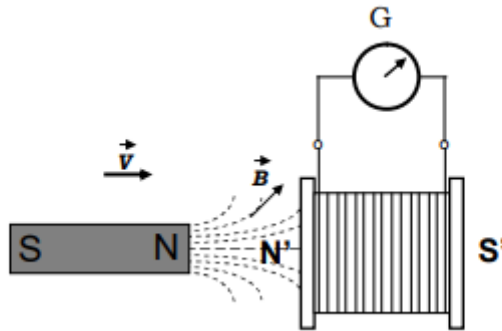


Figure 3.2: aimant à proximité d'une boucle constituée d'un fil conducteur relié à un galvanomètre

### Expérience 3 :

Un cadre rectangulaire, constitué de  $N$  spires conductrices, peut tourner librement autour d'un axe vertical dans une région où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  (figure 3.3). Ses deux extrémités sont reliées à des bagues solidaires de l'axe de rotation. Sur ces bagues viennent frotter deux électrodes (balais) qui constituent les extrémités d'un circuit comportant un galvanomètre  $G$ . La **rotation** du cadre entraîne **l'apparition d'un courant** dans le galvanomètre. Le sens du courant induit est tel que les forces qu'il crée s'opposent à la rotation du cadre.

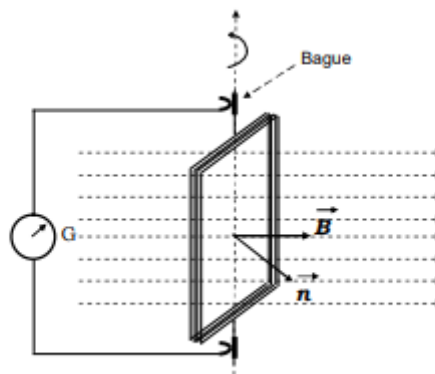


Figure 3.3: Un cadre rectangulaire mobile autour d'un axe vertical

## 2. Lois de l'induction.

Les trois expériences décrites ci-dessus ont mis en évidence **l'apparition d'un courant dans un circuit qui ne comporte aucun générateur**. Ces courants résultent de la naissance d'une force électromotrice induite  $e$ . Selon le cas, on remarque que le sens et la grandeur du courant dépendent de la variation, en fonction du temps :

- de la surface du circuit (expérience 1) ;
- du champ magnétique dans lequel est plongé le circuit (expériences 2) ;
- de l'orientation du circuit par rapport au champ magnétique (expérience 3).

### **a) Loi de Faraday**

Des observations ci-dessus on remarque : chaque fois que le flux magnétique  $\Phi$ , qui traverse un circuit, varie, une force électromotrice  $e$  prend naissance dans le circuit. Sa durée  $\Delta t$  est égale à celle de la variation du flux  $\Delta\Phi$ .

### **Enoncé de la loi de Faraday**

La variation temporelle du flux magnétique à travers un circuit fermé y engendre (induit) une force électromotrice  $e$  induite dans le circuit.

### **Expression mathématique de la loi de Faraday :**

$$e(t) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

**Remarque** : Pour  $N$  spires (pour le circuit) on a :  $\Phi_{\text{circuit}} = N\Phi_{\text{spire}} = N\Phi$

$$\Rightarrow e_{\text{circuit}}(t) = - \frac{d\Phi_{\text{circuit}}}{dt} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

Où  $\Phi$  est le flux du champ magnétique exprimé en Weber (Wb), le temps  $t$  en seconde (s) et la f.é.m  $e$  en volt (V).

### **b) Loi de Lenz**

**Enoncé : l'induction produit des effets qui s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.**

Exemple : si on approche un circuit du pôle nord d'un aimant, le flux augmente et donc la f.é.m induite est négative. Le courant induit sera alors négatif et produira lui-même un champ magnétique induit opposé à celui de l'aimant. Deux conséquences : 1. L'augmentation du flux à travers le circuit est amoindrie. 2. Il apparaît une force de Laplace  $\vec{F} = I \overrightarrow{grad}\Phi$  s'opposant à l'approche de l'aimant.

Remarque : L'**induction électromagnétique** est un phénomène physique conduisant à l'apparition d'une **force électromotrice  $e$**  dans un conducteur électrique soumis à un **flux de champ magnétique variable**. Cette **force électromotrice  $e$**  peut engendrer un **courant électrique** dans le conducteur.

## II. Induction mutuelle et auto-induction

### 1. Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Soient deux circuits fermés  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , orientés, traversés respectivement par des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

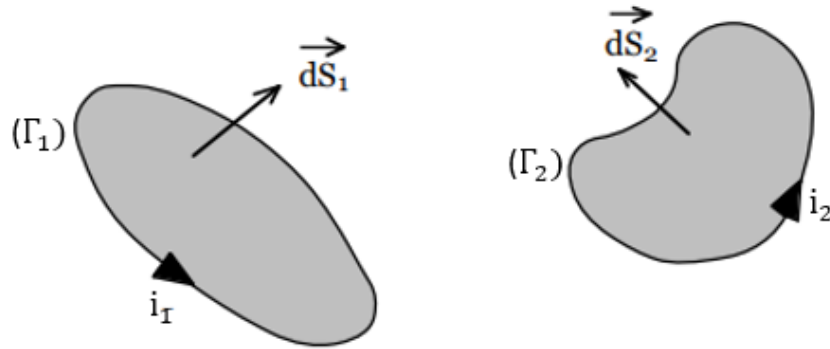


Figure 3.4 : Induction mutuelle entre deux circuits fermés

Le circuit  $\Gamma_1$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_1$  dont le flux  $\Phi_{12}$  à travers une surface orientée  $S_2$  s'appuyant sur le contour du circuit  $\Gamma_2$  est proportionnel à  $i_1(t)$ .

$$\Phi_{12} = M_{12} i_1(t).$$

Le coefficient de proportionnalité s'appelle coefficient d'inductance ou inductance mutuelle noté  $M_{12}$  qui est en réalité l'inductance du circuit  $\Gamma_1$  sur le circuit  $\Gamma_2$ .

**De même le circuit** le circuit  $\Gamma_2$  crée un champ magnétique  $\vec{B}_2$  dont le flux  $\Phi_{21}$  à travers une surface orientée  $S_1$  s'appuyant sur le contour du circuit  $\Gamma_1$  est proportionnel à  $i_2(t)$  :

$$\Phi_{21} = M_{21} i_2(t).$$

Le coefficient de proportionnalité s'appelle coefficient d'inductance ou inductance mutuelle noté  $M_{21}$  qui est en réalité l'inductance du circuit  $\Gamma_2$  sur le circuit  $\Gamma_1$ .

L'inductance mutuelle (unité : Henry, symbole H) vérifie la relation

$$M = M_{12} = M_{21}.$$

(Le signe des coefficients d'inductance dépend de l'orientation respective des circuits et suit la même logique que pour le courant induit. D'après les choix pris pour le sens de circulation le long de chaque circuit (voir figure), les flux sont négatifs pour des courants  $I_1$  et  $I_2$  positifs. Donc les coefficients sont négatifs.)

M dépend de la géométrie des circuits, de leurs positions relatives et de la perméabilité du milieu. En fonction des sens positifs choisis sur les circuits, M peut être positif ou négatif.

## 2. Auto-induction

On considère un circuit isolé, parcouru par un courant  $I$ . Ce courant engendre un champ magnétique  $\vec{B}$  dans tout l'espace et il existe donc un flux  $\Phi$  de ce champ à travers le circuit lui-même, appelé flux propre ( $\Phi_{11}$  ou  $\Phi_{22}$ )

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S} \right] I$$

qu'on peut simplement écrire  $\Phi = LI$  avec :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot d\vec{S}$$

où  $L$  est le **coefficient d'auto-induction** ou **auto-inductance** ou encore **inductance propre** (ou self), exprimé en Henry. Il ne dépend que des propriétés géométriques du circuit et est nécessairement positif alors que l'inductance mutuelle est une grandeur algébrique (**son signe dépend de l'orientation d'un circuit par rapport à l'autre**).

## III. Régimes variables

### 1. Force électromotrice (f.é.m.) d'inductance mutuelle

D'après la loi de Faraday si le circuit  $\Gamma_1$  est parcouru par un courant variable  $i_1(t)$  alors la f.é.m. induite  $e_{1 \rightarrow 2}(t)$  par le circuit  $\Gamma_1$  sur le circuit  $\Gamma_2$  est :

$$e_{1 \rightarrow 2}(t) = e_1(t) = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{dM_{12}i_1(t)}{dt} = -M \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$e_{1 \rightarrow 2}(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt}$$

De même si le circuit  $\Gamma_2$  est parcouru par un courant variable  $i_2(t)$  alors la f.é.m. induite  $e_{2 \rightarrow 1}(t)$  par le circuit  $\Gamma_2$  sur le circuit  $\Gamma_1$  est :

$$e_{2 \rightarrow 1}(t) = e_2(t) = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{dM_{21}i_2(t)}{dt} = -M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$e_{2 \rightarrow 1}(t) = -M \frac{di_2(t)}{dt}$$

### 2. Forces électromotrices (f.é.m.) induite totale

Si l'on considère maintenant que les deux circuits  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont couplés, alors l'expression des flux totaux à travers ces circuits s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$

En régime variable les f.é.m. totale induites  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  dans les circuits  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont donc pour expression :

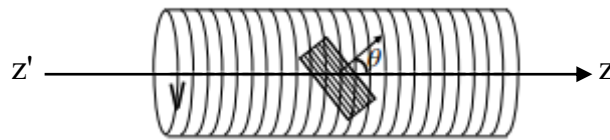
$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d(L_1 i_1 + M i_2)}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d(L_2 i_2 + M i_1)}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

**Remarque :** Le phénomène d'induction mutuelle peut avoir des conséquences importantes (parfois désastreuses), comme l'apparition soudaine d'un courant dans un circuit fermé non alimenté.

### 3. Exercice d'application

#### a) Énoncé

On considère un solénoïde, dont la longueur  $\ell$  est très grande par rapport au rayon  $R$  des spires de façon à l'assimiler à un solénoïde infini. Il comporte  $N$  spires de surface  $S$  et il est parcouru par un courant  $I$ . Une petite bobine de section  $S'$ , comportant  $N'$  spires et parcourue par un courant  $I$ , est placée comme l'indique la figure. Son axe fait un angle  $\theta$  avec celui du solénoïde.



1. Rappeler l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde infini en un point  $M$  de son axe ( $0z$ ).

2. Calculer le coefficient d'induction mutuelle  $M$  de ces deux bobines.

3. On enlève la petite bobine et on ne considère que le solénoïde.

Calculer son coefficient de self induction  $L$ .

*Données :*  $\ell = 25$  cm,  $R = 2$  cm,  $N = 500$ ,  $S' = 3,15$  cm<sup>2</sup>,  $N' = 50$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

#### b) Réponses

1.

2. Le flux du champ  $\vec{B}(M)$  (créé par le solénoïde) à travers la bobine est :

$$A.N : M = 1,96.10^{-5} \text{ H}$$

3. Le flux propre du champ  $\vec{B}(M)$  à travers le solénoïde est :

$$A.N : L = 1,58.10^{-3} \text{ H}$$