Алгоритм Тарского

Гибадулин Р.А. (ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль)
Научный руководитель: д-р ф.-м. н., профессор Дурнев В.Г.

Цель работы: Описание алгоритма Тарского и создание компьютерной программы, которая по формуле языка элементарной алгебры строит эквивалентную бескванторную формулу.

Рассмотрим язык логики предикатов с такой сигнатурой, что любой многочлен с целыми коэффициентами можно записать как терм этого языка, а также можно записать формулы вида $P < Q$, $P = Q$, $P > Q$, где P и Q многочлены. Пусть $\mathbb{R}$ – множество носитель, то есть переменные в многочленах принимают действительные значения. Этот язык будем назвать **языком элементарной алгебры**. Но тогда на этом языке можно записать утверждения элементарной геометрии, например, теорему о пересечении высот в треугольнике. Таким образом, если существует алгоритм, который позволяет проверить истинность формулы в этом языке, то с помощью компьютерной программы, реализующей этот алгоритм, можно доказывать теоремы элементарной геометрии.

Теорема 1 (Алфреда Тарского)**.** *Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка элементарной алгебры без свободных переменных определять, является ли эта формула истинной.*

Теорема 2 (Алфреда Тарского)**.** *Существует алгоритм, который по любой формуле языка элементарной алгебры строит эквивалентную бескванторную формулу.*

Алгоритм Тарского для формулы вида $(Qx)\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ – бескванторная формула, которая не содержит свободных вхождений переменных отличных от x, и Q – квантор, состоит из следующих этапов:

1. Составить список всех многочленов, входящих в формулу $\mathcal{A}$;

2. Добавить в список многочлен равный производной произведения всех ненулевых многочленов;

3. Дополнить этот список до насыщенной системы;
4. Построить сокращенную таблицу Тарского;
5. Вычислить логические значения формулы $\mathcal{A}$ для каждого столбца таблицы;
6. Если $Q = \exists$, то формула верна, если истинно хотя бы одно из вычисленных значений, если $Q = \forall$ – если истинны все значения;

После разбора базового случая нетрудно получить алгоритм для произвольной формулы, нужно лишь проводить все вычисления не над действительными числами, а над многочленами от многих переменных, при этом, чтобы не допустить деления на ноль и определить знак, необходимо разбирать случаи.

После изучения алгоритма Тарского была начата работа по его реализации в виде компьютерной программы на языке C# на платформе .NET Core. В ходе этой работы была реализована программа, но лишь для базового случая. Были сформулированы задачи, решив которые будет завершена реализация алгоритма Тарского для общего случая.

Литература

1. Гибадулин Р. А. Алгоритм поиска вывода в Исчислении Высказываний и его программная реализация // Современные проблемы математики и информатики : сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2019. – Вып. 19. – С. 28 – 37.

2. Дурнев, В. Г. Элементы теории множеств и математической логики: учеб. пособие / В. Г. Дурнев; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. – Ярославль, 2009. 457 с.

3. Матиясевич Ю. В. Алгоритм Тарского // Компьютерные инструменты в образовании. – 2008. – № 6. – С. 14.

4. Якимова, О. П. Языки программирования. Ч.2: лабораторный практикум / О. П. Якимова, И. М. Якимов, В. Л. Дольников; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2012 – 56 с.