

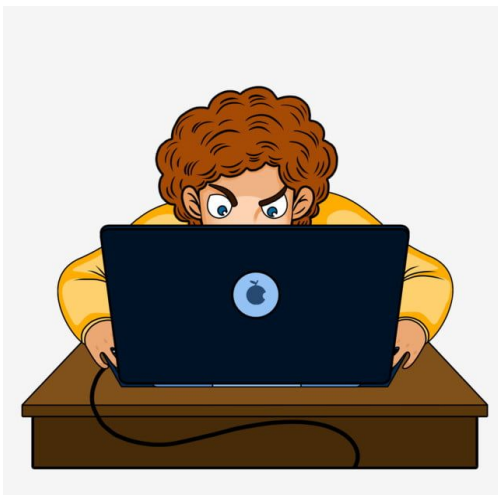
# CÓDIGOS DE GRUPO: USO DO CÓDIGO DE HAMMING

**Tecnologia em Telecomunicações**

# CONTEÚDO

1. Introdução
2. Ruído e erros
3. Detecção e correção de erros
4. Tipos de códigos corretores de erro
5. Códigos de bloco lineares
6. Formulação matricial dos códigos de bloco
7. O que é um código de Hamming?
8. Exemplo de utilização do código de Hamming

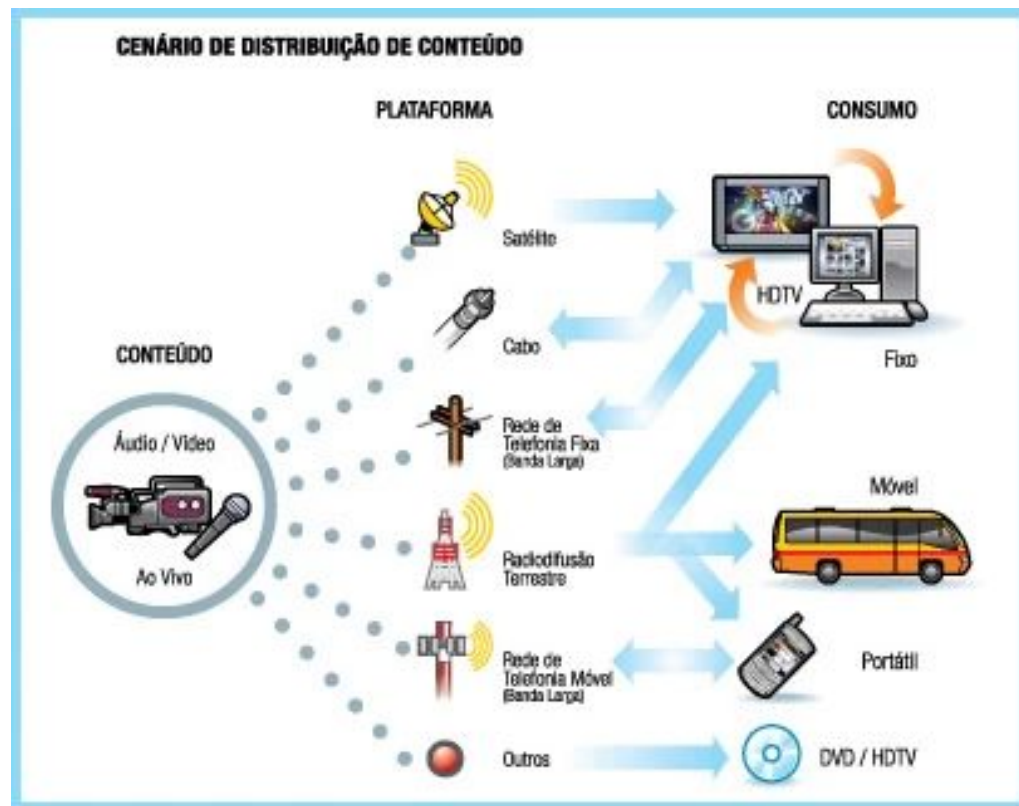
# INTRODUÇÃO



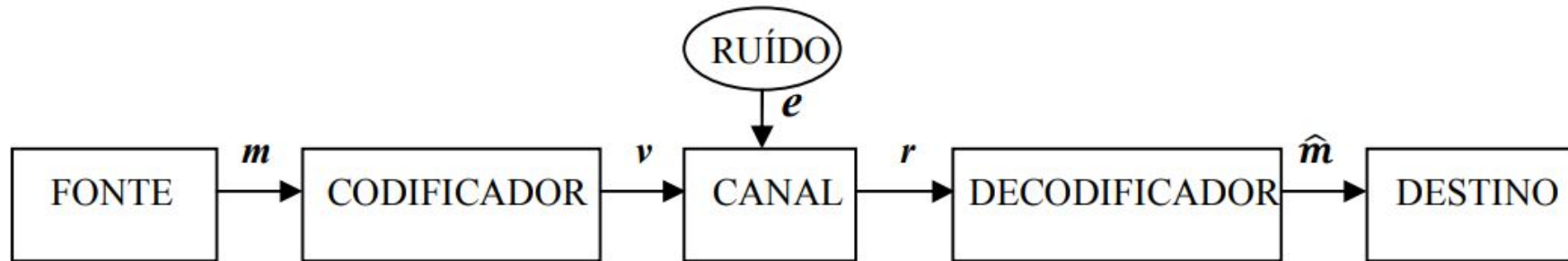
# INTRODUÇÃO



# INTRODUÇÃO

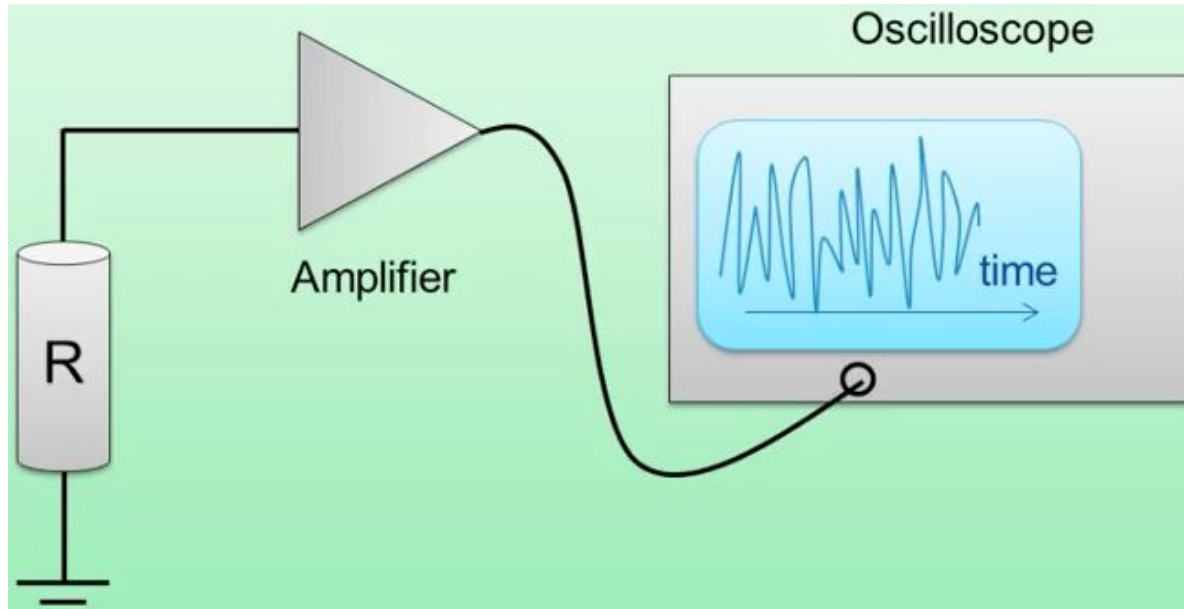


# INTRODUÇÃO



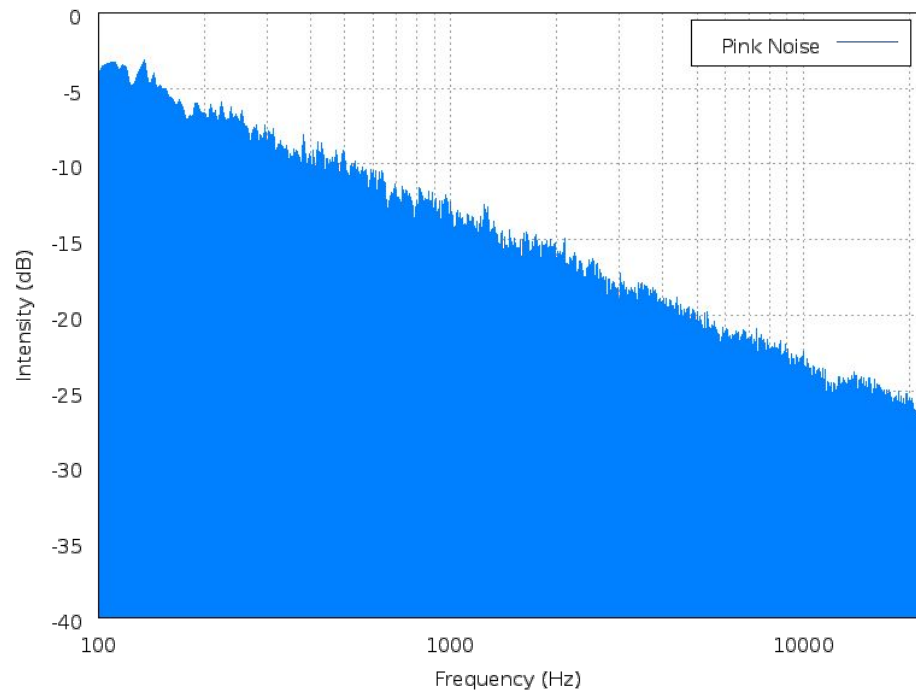
# RUÍDO

Ruído Térmico ou de Johnson-Nyquist



# RUÍDO

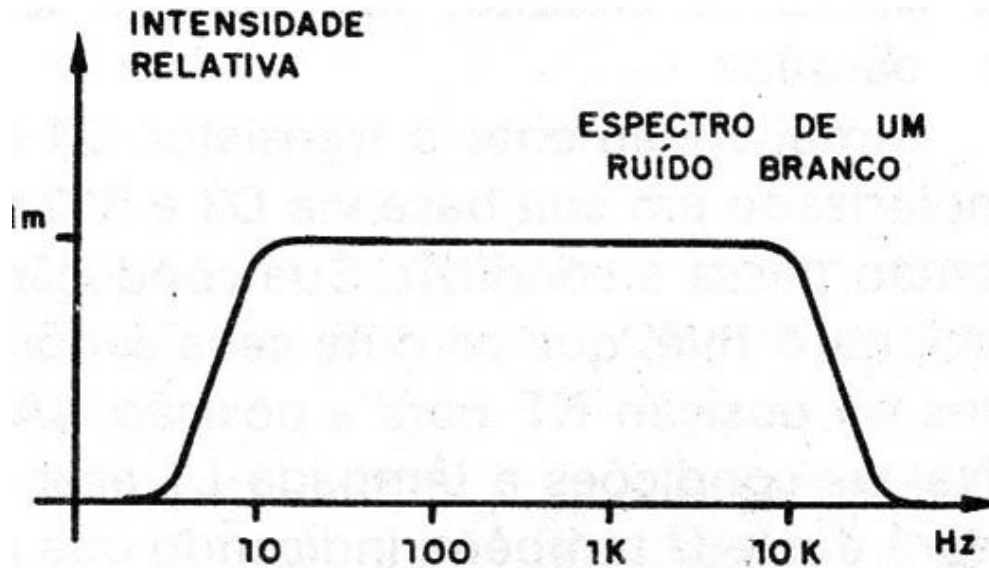
## Ruído Rosa





# RUÍDO

Ruído branco:



# RUÍDOS

Podem ser úteis:

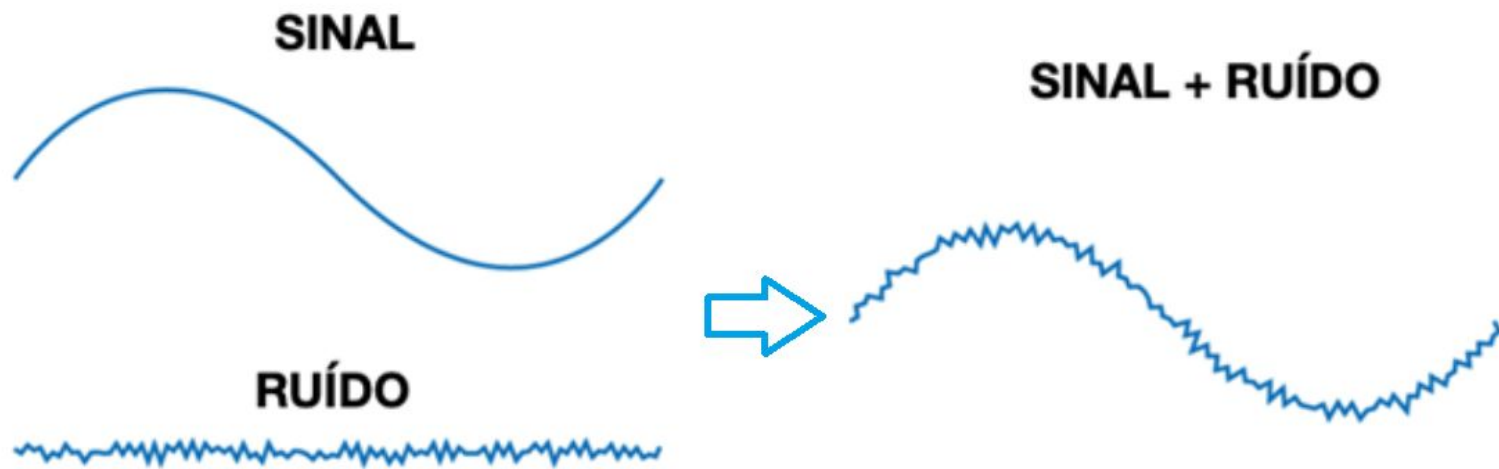
- Como sinais de teste
- Ruído cósmico no estudo da Radioastronomia
- Ruído no estudo de fenômenos microscópicos: teste de semicondutores, etc.

# RUÍDO

Curiosidade



# RUÍDO



# RUÍDOS

Em uma transmissão digital:

Single bit error: In a frame, there is only one bit, anywhere though, which is corrupt.



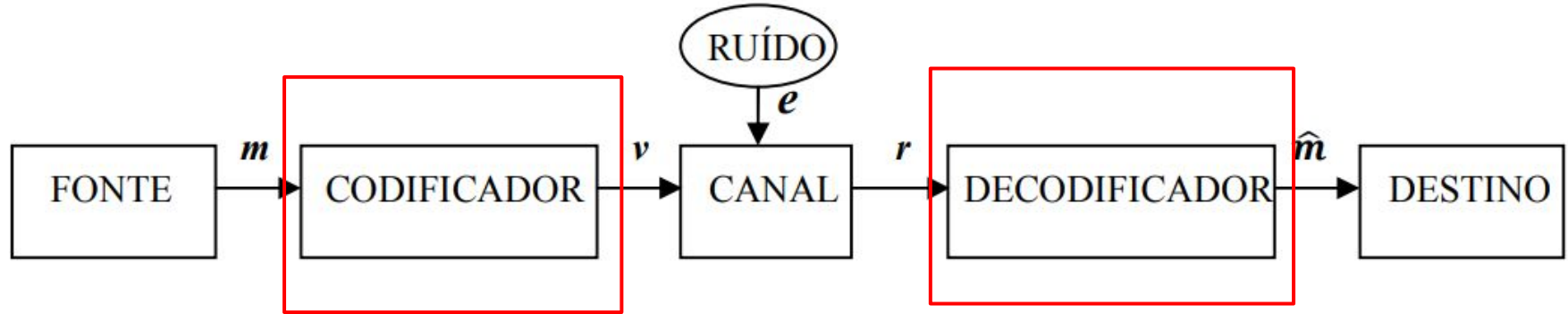
Multi bits error: Frame is received with more than one bits in corrupted state.



Burst bits error: Frame contains more than 1 consecutive bits corrupted..



# DETECÇÃO E CORRECÇÃO DE ERROS



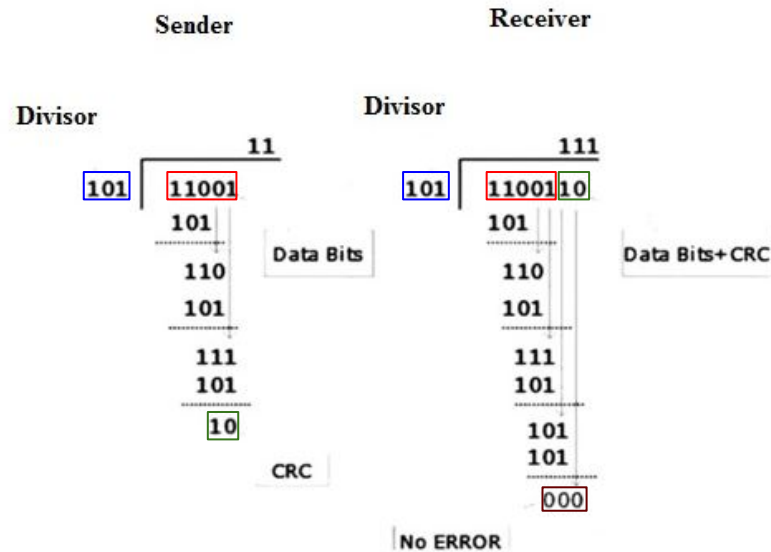
# DETECÇÃO E CORRECÇÃO DE ERROS

Checagem de paridade

7 bits de dados	Qtde. de bits = 1	8 bits incluindo a paridade	
		Par	Ímpar
0000000	0	<b>0</b> 0000000 = 0	<b>1</b> 0000000
1010001	3	<b>1</b> 1010001 = 209	<b>0</b> 1010001
1101001	4	<b>0</b> 1101001 = 105	<b>1</b> 1101001
1111111	7	<b>1</b> 1111111 = 255	<b>0</b> 1111111

# TIPOS DE CÓDIGOS CORRETORES DE ERROS

## Cyclic redundancy check





# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

Relembrando:

Grupo: a estrutura algébrica  $(G, *)$ , em que  $G$  é um conjunto e  $*$  é uma operação binária definida em  $G$ , é um grupo se,  $\forall g, h, k \in G$ ,

G1 - Fechamento:  $g * h \in G$ .

G2 - Associatividade:  $g * h * k = g * (h * k) = (g * h) * k$ .

G3 - Elemento identidade:  $\exists e \in G$  tal que  $e * g = g * e = g$ .

G4 - Elemento inverso:  $\exists g^{-1} \in G$  tal que  $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ .

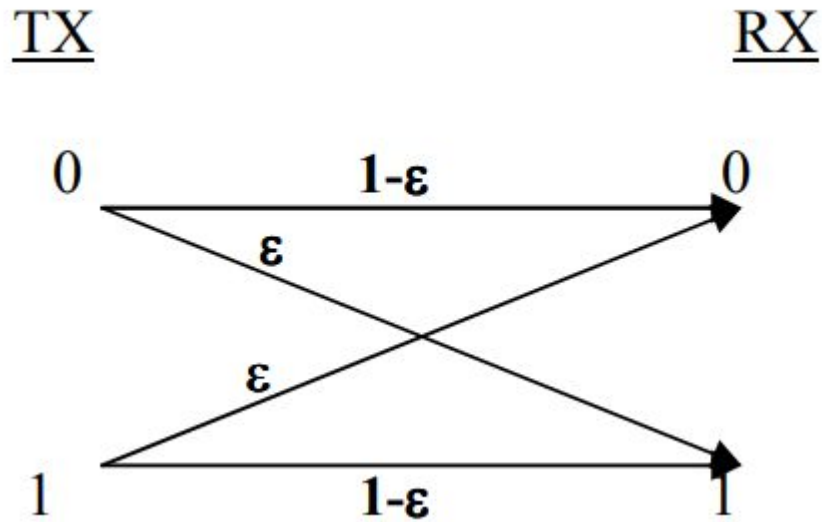
Exemplo: Grupo abeliano  $(G, +)$

# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

Um código de grupo é um subgrupo do grupo aditivo de todas as ênuplas  $p$ -árias.

- Representação do código:  $C(n,k,d)$
- Detecção de erro:  $e = d - 1$
- Correção de erro:  $t = \text{piso}((d - 1)/2)$
- Número de palavras do código:  $M := 2^k$
- Taxa de informação:  $R := k/n$

# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS



# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

O Código de repetição:

$$H_2 = \{000, 111\}$$

Palavra transmitida ( $v$ )	Palavra recebida ( $r$ )	Palavra estimada ( $\hat{v}$ )	Decisão
000	000, 100, 010, 001	000	certa
000	110, 101, 011, 111	111	errada
111	111, 011, 101, 110	111	certa
111	000, 001, 010, 100	000	errada

# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

0 Código de repetição:

- Representação do código:  $C(3,1,3)$
- Detecção de erro:  $e = 3-1 = 2$
- Correção de erro:  $t = \text{piso}((3 - 1)/2) = 1$
- Número de palavras do código:  $M := 2^1 = 2$
- Taxa de informação:  $R := 1/3$

# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

O Código de um único símbolo de paridade:

$$H_4 = \{000, 110, 101, 011\}$$

# CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES BINÁRIOS

0 Código de um único símbolo de paridade:

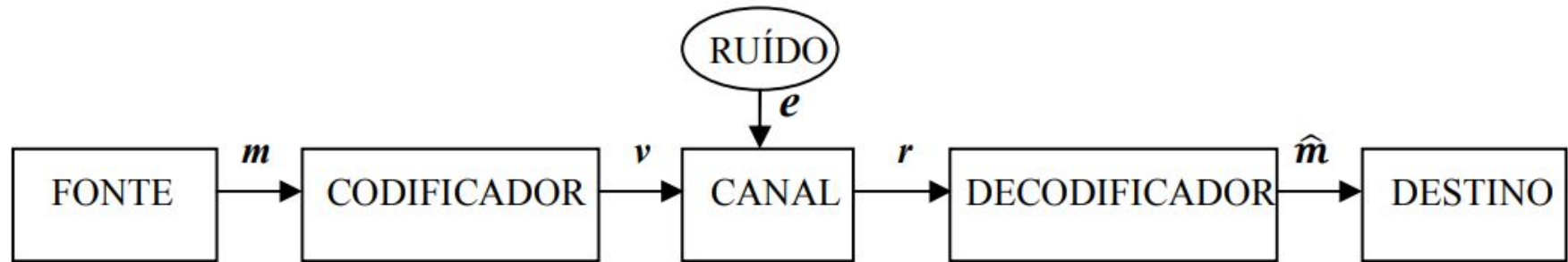
- Representação do código:  $C(3,2,2)$
- Detecção de erro:  $e = 2-1 = 1$
- Correção de erro:  $t = \text{piso}((2 - 1)/2) = 0$
- Número de palavras do código:  $M := 2^2 = 4$
- Taxa de informação:  $R := 2/3$

# FORMULAÇÃO MATRICIAL DOS CÓDIGOS CORRETORES DE BLOCOS

$$m = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

$$c_1 = k_1 + k_2 + k_3, \quad c_2 = k_1 + k_2 + k_4, \quad c_3 = k_1 + k_3 + k_4$$

$$v = \{k_1, k_2, k_3, k_4, c_1, c_2, c_3\}$$





# FORMULAÇÃO MATRICIAL DOS CÓDIGOS CORRETORES DE BLOCOS

$G(k \times n)$  é a matriz geradora do código

$H((n-k) \times n)$  a matriz de paridade

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$G = [I_k | P]$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H = [P^T | I_{n-k}].$$

# O QUE É UM CÓDIGO DE HAMMING?

$C(2^m-1, 2^m-1-m, 3)$ , em que  $m \geq 3$

# FORMULAÇÃO MATRICIAL DOS CÓDIGOS CORRETORES DE BLOCO

$$S = eH^T = e_i h_i^T = h_i^T,$$

$$r = (0000111).$$

$$S = (0000111) H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = h_1.$$

$$v = r + e = (1000111) \quad v = r + e = (1000\cancel{111})$$

# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

Código de Hamming  $C(7, 4, 3)$  na transmissão de uma imagem.

- Representação do código:  $C(7, 4, 3)$
- Detecção de erro:  $e = 3 - 1 = 2$
- Correção de erro:  $t = \text{piso}((3 - 1)/2) = 1$
- Número de palavras do código:  $M := 2^4 = 16$
- Taxa de informação:  $R := 4/7$

# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

Imagem em escala de cinza

```
function r = im2vec(A)
A = rgb2gray(A);
GRAY= reshape(A(:,:,1), [], 1);
VGRAY = GRAY.';
IVEC = reshape([GRAY],[],1);
IVECBIN = de2bi(IVEC);
r = IVECBIN(:);
end
```



# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

Codificando o vetor da imagem e simulando a transmissão pelo canal

```
function mh = encode(vm,M,N)
    %[H,G] = hamngen(3);
    H = [1 1 1 0 1 0 0; 1 1 0 1 0 1 0; 1 0 1 1 0 0 1]
    G = [1 0 0 0 1 1 1; 0 1 0 0 1 1 0; 0 0 1 0 1 0 1; 0 0 0 1 0 1 1]
    vm = double(vm)
    m1 = reshape(vm,[4,M*N*2]);
    m1 = m1';
    for q = 1:M*N*2
        maux = rem(m1(q,1:4)*G,2);
        if q == 1
            mh = maux;
        else
            mh = [mh, maux];
        end
    end
end
```

```
function R = addnoise(I, SNR)

aux = double(I);

for i=1:size(aux, 1)
    if I(i)== 0
        aux(i) = -1;
    else
        aux(i) = 1;
    end
end

R = awgn(aux, SNR);
end
```

# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

```
function mh = decode(vhm,M,N)
%[H,G] = hammgen(3);
H = [1 1 1 0 1 0 0; 1 1 0 1 0 1 0; 1 0 1 1 0 0 1]
G = [1 0 0 0 1 1 1; 0 1 0 0 1 1 0; 0 0 1 0 1 0 1; 0 0 0 1 0 1 1]
bola = vhm

for i=1:M*N*14
    if vhm(i)<0
        bola(i) = 0;
    else
        bola(i) = 1;
    end
end

vhm = bola;

ru = reshape(vhm,[7,M*N*2]);
ru = ru';
err = zeros(1, 7);
mh =[];
```

```
for q = 1:M*N*2
    synd = rem(ru(q,1:7)*H',2);
    aux = H';
    vc = ru(q,1:7);

    if synd==0
        mc = vc;
    else
        for j = 1:7
            if rem(aux(j, 1:3)+ synd ,2)== 0
                vc(j) = rem(1+vc(j),2);
            end
        end
        mc = vc;
    end

    mc(5)=[];
    mc(5)=[];
    mc(5)=[];
    mh = [mh,mc];

end

mh = uint8(mh);
mh = mh';
end
```

# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

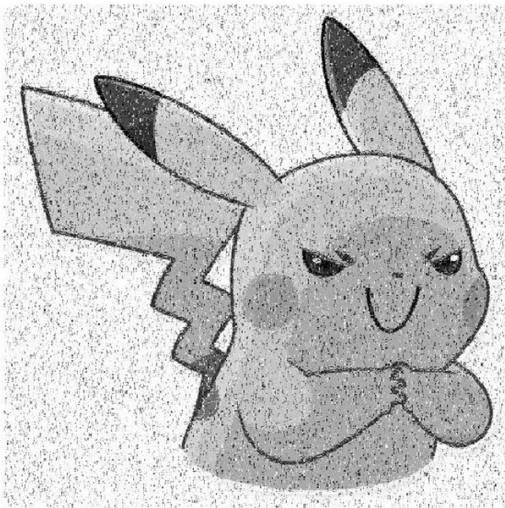
```
function A = vec2im(G, M, N)
    IVECBIN = reshape(G, [M*N, 8]);
    IVEC = bi2de(IVECBIN);
    IVEC = mod(IVEC, 256);
    VGRAY = IVEC(1:(M*N));
    GRAY = VGRAY.';
    A = reshape(GRAY, [M, N]);
end
```



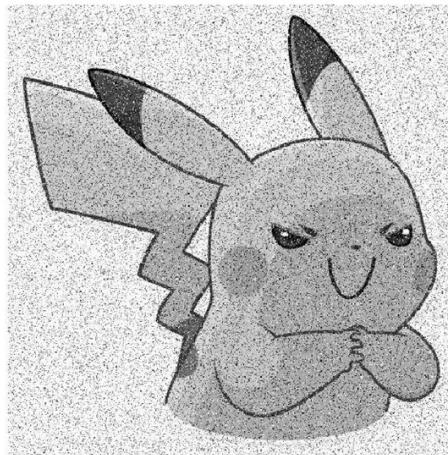
# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING



Original



Com Hamming

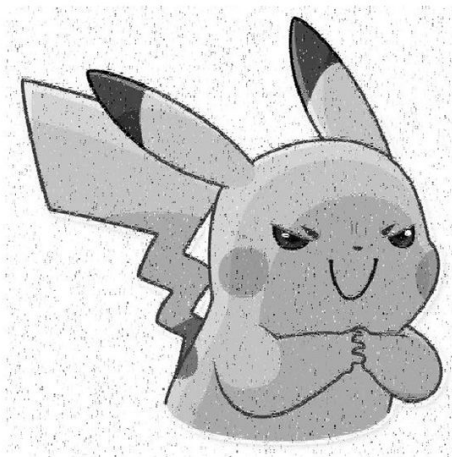


Sem Hamming

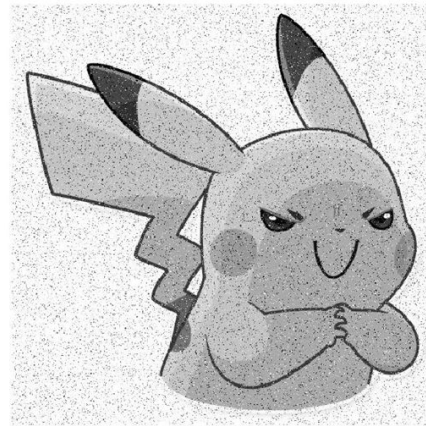
# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING



Original



Com Hamming



Sem Hamming

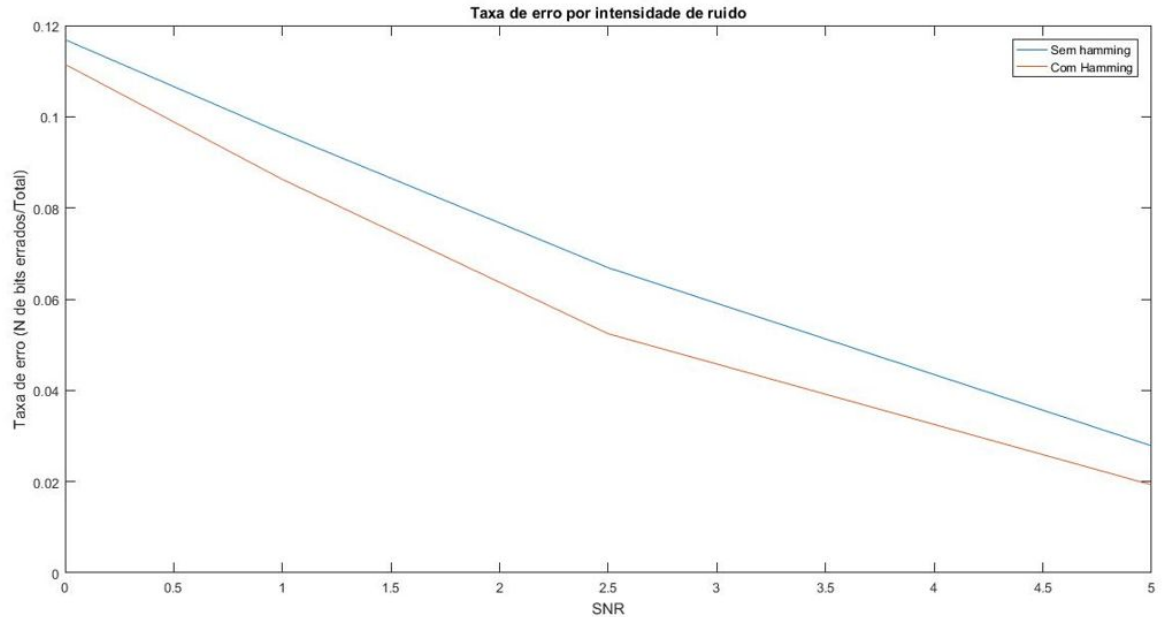
# EXEMPLO DE UTILIZAÇÃO DO CÓDIGO DE HAMMING

```
function plotCurve2 (A)
p = [0 1 2.5 5]
noises = []
noises2 = []
B = encode(A, 512, 512)
B = uint8(B')

for i=1:size(p, 2)

    C = addnoise2(A, p(i));
    C = bob(C, 512, 512);
    C = C'
    D = addnoise2(B, p(i));
    D = decode2(D, 512, 512)
    noises = [noises, noiserate(A, C)];
    noises2 = [noises2, noiserate(A, D)];
end

plot(p, noises);
title('Taxa de erro por intensidade de ruído')
xlabel('SNR')
ylabel('Taxa de erro (N de bits errados/Total)')
hold on
plot(p, noises2);
hold off
legend('Sem hamming','Com Hamming')
end
```



# REFERÊNCIAS

<https://propi.ifto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/2986/2540>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Error\\_detection\\_and\\_correction](https://en.wikipedia.org/wiki/Error_detection_and_correction)

<https://www.elprocus.com/what-is-hamming-code-history-working-and-its-applications/>

<https://electronicsdesk.com/hamming-codes.html>

<https://www.guru99.com/hamming-code-error-correction-example.html>

[https://electrical.sdsu.edu/faculty\\_websites/madhu-gupta/pdfs/PrIEEEJul75.pdf](https://electrical.sdsu.edu/faculty_websites/madhu-gupta/pdfs/PrIEEEJul75.pdf)

Sistemas discretos, notas de aula cap.6, Prof. Ricardo Campello