Universidad Nacional del Altiplano
Facultad de Ingeniería Estadística e Informática
Escuela Profesional de Ingeniería de Estadística e Informática

Optimization Methods

Evaluacion Primera Unidad Practica

Estudiante: Herson Romario Condori Mamani

Profesor: Fred Torres Cruz

22 de enero de 2025

Problema 1

En el marco de una investigación sobre movilidad urbana en Lima, se desea modelar el costo diario (C) de movilizar datos de sensores de tráfico desde dos distritos: San Isidro (variable x) y Surco (variable y). La función de costo es:

$$C(x, y) = 4x + 6y \quad \text{(en soles)}$$

donde x y y representan el número de gigabytes procesados al día en cada distrito. Se sabe que:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100 \quad \text{(límite de capacidad de red)} \\ x \geq 10, &\quad y \geq 5 \quad \text{(mínimos de datos por contrato)} \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Explique cómo podría usarse este modelo para estimar costos de transferencia de datos en un proyecto piloto de análisis de tráfico.

Función de costo:

$$C(x, y) = 4x + 6y \quad \text{(en soles)}$$

Restricciones:

1. $x + y \leq 100$ (capacidad máxima de la red)
2. $x \geq 10, y \geq 5$ (mínimos establecidos por contrato)
3. $x, y \geq 0$ (valores no negativos)

Análisis del modelo:

Este modelo puede ser usado para estimar los costos diarios al procesar datos desde sensores de tráfico en dos distritos:

- x: gigabytes procesados en San Isidro.
- y: gigabytes procesados en Surco.

La función objetivo busca calcular el costo en soles dependiendo de los gigabytes procesados en cada distrito, respetando las restricciones establecidas.

Resolución del problema

1. Planteamiento del problema de optimización lineal:

Se busca minimizar el costo total:

$$\text{Minimizar}\, C(x, y) = 4x + 6y$$

Sujeto a las restricciones:

$$
\begin{aligned}
x + y &\leq 100 \\
x &\geq 10 \\
y &\geq 5 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

2. Restricciones:

1. $x + y = 100$ (línea con intersecciones en $(100, 0)$ y $(0, 100)$).
2. $x = 10$ (línea vertical en $x = 10$).
3. $y = 5$ (línea horizontal en $y = 5$).
4. $x, y \geq 0$ (primer cuadrante).

El área factible está delimitada por las intersecciones de estas restricciones.

3. Puntos vértices del área factible:

Resolvemos las intersecciones de las restricciones:

- Intersección de $x + y = 100$ y $x = 10$:
$$10 + y = 100 \Longrightarrow y = 90 \quad \text{(vértice: } (10, 90)\text{)}.$$
- Intersección de $x + y = 100$ y $y = 5$:
$$x + 5 = 100 \Longrightarrow x = 95 \quad \text{(vértice: } (95, 5)\text{)}.$$
- Punto límite inferior: $(10, 5)$.

Los vértices del área factible son: $(10, 90)$, $(95, 5)$ y $(10, 5)$.

4. Evaluación de la función objetivo:

Calculamos $C(x, y) = 4x + 6y$ en cada vértice:

- En $(10, 90)$: $C = 4(10) + 6(90) = 40 + 540 = 580$.
- En $(95, 5)$: $C = 4(95) + 6(5) = 380 + 30 = 410$.
- En $(10, 5)$: $C = 4(10) + 6(5) = 40 + 30 = 70$.

5. Conclusión:

El costo mínimo se logra en $(10, 5)$, con un costo diario de **S/70**. Esto significa que se procesarán 10 GB en San Isidro y 5 GB en Surco, respetando las restricciones.

Problema 2

Una startup en Arequipa se especializa en ofrecer servicios de análisis de datos de ventas de granos andinos. La empresa contrata x analistas junior y y analistas senior para procesar la información proveniente de diferentes asociaciones de productores locales. El costo total se modela como:

$$C(x, y) = 1500x + 3000y \quad \text{(en soles al mes)}$$

Por políticas internas, se requiere al menos un total de 8 analistas (entre junior y senior), y al menos 3 deben ser senior para garantizar experiencia en proyectos. Además, la capacidad máxima de contratación es 12 personas. Especifique la función objetivo y las restricciones. Cómo definiría un rango razonable de valores de x y y en la práctica.

Función de costo:

$$C(x, y) = 1500x + 3000y$$

donde:

- x: número de analistas junior.
- y: número de analistas senior.

Restricciones:

1. $x + y \geq 8$ (mínimo de 8 analistas en total).
2. $y \geq 3$ (al menos 3 analistas senior).
3. $x + y \leq 12$ (capacidad máxima de contratación).
4. $x, y \geq 0$ (valores no negativos).

Planteamiento del problema:

El objetivo es minimizar el costo mensual de contratación:

$$\text{Minimizar}\, C(x, y) = 1500x + 3000y$$

sujeto a las restricciones mencionadas.

Resolución del problema

1.Restricciones:

1. $x + y = 8$: Línea con intersecciones en $(8, 0)$ y $(0, 8)$.
2. $x + y = 12$: Línea con intersecciones en $(12, 0)$ y $(0, 12)$.

3. $y = 3$: Línea horizontal en $y = 3$.
4. $x, y \geq 0$: Primer cuadrante.

El área factible está delimitada por estas restricciones.

2. Vértices del área factible:

Identificamos las intersecciones:

- Intersección de $x + y = 8$ y $y = 3$:

$$x + 3 = 8 \Longrightarrow x = 5 \quad \text{(vértice: } (5, 3)).$$

- Intersección de $x + y = 12$ y $y = 3$:

$$x + 3 = 12 \Longrightarrow x = 9 \quad \text{(vértice: } (9, 3)).$$

- Intersección de $x + y = 8$ y $x + y = 12$: No es válida porque $x + y$ no puede ser simultáneamente 8 y 12.

El área factible está formada por los puntos $(5, 3)$ y $(9, 3)$, ya que ambas restricciones se cumplen.

3. Evaluación de la función objetivo:

Calculamos $C(x, y) = 1500x + 3000y$ en cada vértice:

- En $(5, 3)$:

$$C = 1500(5) + 3000(3) = 7500 + 9000 = 16,500 \text{ soles.}$$

- En $(9, 3)$:

$$C = 1500(9) + 3000(3) = 13,500 + 9000 = 22,500 \text{ soles.}$$

4. Conclusión:

El costo mínimo se alcanza en $(5, 3)$, con un costo mensual de $\mathbf{S/16,500}$. Esto significa que se deben contratar 5 analistas junior y 3 analistas senior.

Problema 3

Para monitorear la deforestación en la Amazonía peruana, se utilizan drones que capturan imágenes satelitales. Suponga que x y y representan el número de vuelos realizados en la región de Madre de Dios y en Ucayali, respectivamente. La cobertura (en kilómetros cuadrados) se modela como:

$$S(x, y) = 50x + 65y$$

Las restricciones de presupuesto y logística imponen:

$$3x + 4y \leq 200 \quad \text{(presupuesto en miles de soles)}$$
$$x + y \leq 40 \quad \text{(tiempo de operación limitado)}$$
$$x, y \geq 0$$

Describa el objetivo de maximizar la cobertura $S(x, y)$. ¿Qué tipo de análisis de datos podría hacerse con las imágenes recolectadas?

Función de cobertura:

$$S(x, y) = 50x + 65y$$

donde:

- x: número de vuelos en Madre de Dios.
- y: número de vuelos en Ucayali.

Restricciones:

1. $3x + 4y \leq 200$ (presupuesto en miles de soles).
2. $x + y \leq 40$ (tiempo limitado para operaciones).
3. $x, y \geq 0$ (valores no negativos).

Planteamiento del problema:

El objetivo es maximizar la cobertura total:

$$\text{Maximizar } S(x, y) = 50x + 65y$$

sujeto a las restricciones mencionadas.

Resolución del problema

1. Graficación de las restricciones:

1. $3x + 4y = 200$: Resolviendo las intersecciones:
   - Si $x = 0$: $4y = 200 \implies y = 50$.
   - Si $y = 0$: $3x = 200 \implies x = 66.67$. La línea tiene intersecciones en $(66.67, 0)$ y $(0, 50)$.
2. $x + y = 40$: Resolviendo las intersecciones:
   - Si $x = 0$: $y = 40$.

- Si $y = 0$: $x = 40$. La línea tiene intersecciones en $(40, 0)$ y $(0, 40)$.

3. $x, y \geq 0$: Se restringe al primer cuadrante.

El área factible está delimitada por estas restricciones.

2. Vértices del área factible:

Determinamos las intersecciones:

- Intersección de $3x + 4y = 200$ y $x + y = 40$: Resolviendo el sistema:

$$3x + 4y = 200$$
$$x + y = 40$$

  Sustituyendo $y = 40 - x$ en la primera ecuación:

$$3x + 4(40 - x) = 200 \Longrightarrow 3x + 160 - 4x = 200 \Longrightarrow -x = 40 \Longrightarrow x = 40$$

  Esto lleva a $y = 40 - 40 = 0$ (vértice: $(40, 0)$).

- Intersección de $3x + 4y = 200$ y $y = 0$:

$$3x + 4(0) = 200 \Longrightarrow x = 66.67 \quad \text{(vértice: } (66.67, 0)\text{)}.$$

- Intersección de $x + y = 40$ y $x = 0$:

$$0 + y = 40 \Longrightarrow y = 40 \quad \text{(vértice: } (0, 40)\text{)}.$$

3. Evaluación de la función objetivo:

Calculamos $S(x, y) = 50x + 65y$ en cada vértice:

- En $(40, 0)$:
$$S = 50(40) + 65(0) = 2000.$$

- En $(0, 40)$:
$$S = 50(0) + 65(40) = 2600.$$

- En $(66.67, 0)$:
$$S = 50(66.67) + 65(0) = 3333.5.$$

4. Conclusión:

La cobertura máxima se alcanza en $(66.67, 0)$, con una cobertura de $3333.5\,\text{km}^2$. Esto significa que todos los vuelos deben concentrarse en Madre de Dios para maximizar la cobertura.

Problema 4

Una cooperativa cafetalera en Junín realiza un pronóstico de ventas semanal en función de dos factores: precio promedio por kilo (x) y calidad estandarizada de grano (y). El modelo lineal para la venta total (en toneladas) se define por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 40 \\ 3x + y = 70 \end{cases}$$

Emplee la Regla de Cramer para hallar x y y, e interprete los resultados en términos de precio promedio (soles /kg) y un índice cuantitativo de calidad.

Sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 40$$

$$3x + y = 70$$

donde:

- x: precio promedio por kilo (soles /kg).
- y: índice cuantitativo de calidad.

Queremos resolver el sistema usando la Regla de Cramer.

Pasos para resolver con la Regla de Cramer:

1. Matriz de coeficientes (A):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (3)(2) = 1 - 6 = -5$$

3. Matriz A_x:

Sustituimos la primera columna de A por los términos independientes (40 y 70):

$$A_x = \begin{bmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{vmatrix} = (40)(1) - (70)(2) = 40 - 140 = -100$$

4. Matriz A_y:

Sustituimos la segunda columna de A por los términos independientes (40 y 70):

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{vmatrix} = (1)(70) - (3)(40) = 70 - 120 = -50$$

5. Cálculo de x y y:

Usando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-100}{-5} = 20$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-50}{-5} = 10$$

Resultados:

- Precio promedio por kilo (x): 20 soles /kg.
- Índice de calidad (y): 10.

Interpretación:

- El precio promedio por kilo de café es de S/20, y la calidad promedio alcanza un índice de 10.
- Esto permite a la cooperativa estimar las ventas semanales con base en un modelo que integra precios y calidad.

Problema 5

Para un sistema de reconocimiento automático de especies marinas en mercados mayoristas del Callao se tienen tres variables que describen: luminosidad de la imagen (x), contraste de bordes (y) y color promedio (z). Un modelo de calibración de sensores establece:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 20 \\ x + 4y + 2z = 23 \\ 3x + 2y + z = 16 \end{cases}$$

Resuelva para determinar los valores de x, y, z. Explique cómo estos parámetros mejoran el algoritmo de clasificación.

Sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
2x + y + 3z &= 20 \\
x + 4y + 2z &= 23 \\
3x + 2y + z &= 16
\end{aligned}
$$

donde:

- x: luminosidad de la imagen.
- y: contraste de bordes.
- z: color promedio.

Queremos resolver el sistema para determinar x, y, yz.

Resolución del sistema:

Utilizaremos el método de eliminación de Gauss para resolver.

Paso 1: Representar el sistema como una matriz aumentada

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 20 \\ 1 & 4 & 2 & 23 \\ 3 & 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}
$$

Paso 2: Transformación hacia una matriz triangular superior

1. Dividimos la primera fila (F_1) entre 2 para normalizar el primer pivote:

$$
F_1 = \frac{F_1}{2} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 10 \end{bmatrix}
$$

   Nueva matriz:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 23 \\ 3 & 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}
$$

2. Eliminamos el coeficiente x en las filas $2(F_2)$ y $3(F_3)$:

   - $F_2 = F_2 - F_1$:

$$
[1, 4, 2, 23] - [1, 0.5, 1.5, 10] = [0, 3.5, 0.5, 13]
$$

   - $F_3 = F_3 - 3F_1$:

$$
[3, 2, 1, 16] - 3[1, 0.5, 1.5, 10] = [0, 0.5, -3.5, -14]
$$

   Nueva matriz:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 10 \\ 0 & 3.5 & 0.5 & 13 \\ 0 & 0.5 & -3.5 & -14 \end{bmatrix}
$$

3. Normalizamos el pivote de la fila 2:

   - $F_2 = \frac{F_1}{3.5}$:
$$[0, 3.5, 0.5, 13]/3.5 = [0, 1, 0.14, 3.71]$$

   Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 10 \\ 0 & 1 & 0.14 & 3.71 \\ 0 & 0.5 & -3.5 & -14 \end{bmatrix}$$

4. Eliminamos el coeficiente y de la fila $3(F_3)$:

   - $F_3 = F_3 - 0.5F_2$:

$$[0, 0.5, -3.5, -14] - 0.5[0, 1, 0.14, 3.71] = [0, 0, -3.57, -15.86]$$

   Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 & 10 \\ 0 & 1 & 0.14 & 3.71 \\ 0 & 0 & -3.57 & -15.86 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Sustitución regresiva

Resolviendo las ecuaciones desde la última fila hacia la primera:

1. De la tercera fila ($-3.57z = -15.86$):

$$z = \frac{-15.86}{-3.57} \approx 4.44$$

2. De la segunda fila ($y + 0.14z = 3.71$):

$$y + 0.14(4.44) = 3.71 \Longrightarrow y \approx 3.09$$

3. De la primera fila ($x + 0.5y + 1.5z = 10$):

$$x + 0.5(3.09) + 1.5(4.44) = 10 \Longrightarrow x \approx 2.50$$

Resultados finales:

- Luminosidad (x): 2.50.
- Contraste de bordes (y): 3.09.
- Color promedio (z): 4.44.

Interpretación:

Estos parámetros ajustan los sensores para mejorar el algoritmo de clasificación de especies marinas:

- Luminosidad adecuada mejora la claridad de las imágenes.
- Contraste de bordes ayuda a detectar contornos de las especies.
- Color promedio asegura una mejor identificación visual.

Problema 6

Un estudio de Data Science sobre la expansión de microrredes en zonas rurales en Puno plantea el siguiente sistema para balancear costos de infraestructura (x), capacidad de generación (y) y reserva de potencia (z) en tres zonas. El sistema es:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + 4z = 12 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

Encuentre las soluciones de x, y, z. Interprete cada variable en un contexto de planificación energética: suponga que x está en miles de soles, y en megavatios (MW) y z en MW de reserva.

Sistema de ecuaciones:

$$x + 2y + z = 8$$
$$2x - y + 4z = 12$$
$$-x + 3y + 2z = 6$$

donde:

- x: costos de infraestructura (en miles de soles),
- y: capacidad de generación (en MW),
- z: reserva de potencia (en MW).

Queremos resolver este sistema para obtener x, y, yz.

Resolución del sistema usando el método de eliminación de Gauss:

Paso 1: Representar el sistema como una matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Transformación hacia una matriz triangular superior

1. Eliminamos el coeficiente x de la segunda fila (F_2) y la tercera fila (F_3):

   - $F_2 = F_2 - 2F_1$:

   $$[2, -1, 4, 12] - 2[1, 2, 1, 8] = [0, -5, 2, -4]$$

   - $F_3 = F_3 + F_1$:

   $$[-1, 3, 2, 6] + [1, 2, 1, 8] = [0, 5, 3, 14]$$

   Nueva matriz:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{bmatrix}$$

2. Eliminamos el coeficiente y en la tercera fila (F_3):

   - $F_3 = F_3 + F_2$:

   $$[0, 5, 3, 14] + [0, -5, 2, -4] = [0, 0, 5, 10]$$

   Nueva matriz:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Sustitución regresiva

Resolviendo las ecuaciones desde la última fila hacia la primera:

1. De la tercera fila ($5z = 10$):

   $$z = \frac{10}{5} = 2$$

2. De la segunda fila ($-5y + 2z = -4$):

   $$-5y + 2(2) = -4 \implies -5y + 4 = -4 \implies -5y = -8 \implies y = \frac{-8}{-5} = 1.6$$

3. De la primera fila ($x + 2y + z = 8$):

   $$x+2(1.6)+2 = 8 \implies x+3.2+2 = 8 \implies x+5.2 = 8 \implies x = 8-5.2 = 2.8$$

Resultados finales:

- Costos de infraestructura (x): 2.8 miles de soles.
- Capacidad de generación (y): 1.6 MW.
- Reserva de potencia (z): 2 MW.

Interpretación:

1. Costos de infraestructura (x) indican cuánto se necesita invertir para mantener las microrredes en operación.
2. Capacidad de generación (y) es la cantidad de energía generada que puede abastecer a las zonas rurales.
3. Reserva de potencia (z) permite asegurar un respaldo en caso de fallos o picos en la demanda.

Este análisis ayuda a tomar decisiones clave para garantizar un balance óptimo entre costos y suministro energético en microrredes rurales.

Problema 7

Un modelo lineal simple para predecir la demanda de tickets de tren en dos estaciones (Ollantaytambo y Poroy) se describe con:

$$\begin{cases} x + y = 350 \\ 2x - y = 100 \end{cases}$$

donde x e y representan la cantidad proyectada de turistas (en miles) por cada estación en un mes pico. Resuelva mediante Gauss-Jordan y explique qué implicaría cada solución en la planificación de rutas turísticas.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 350 \\ 2x - y &= 100 \end{aligned}$$

donde:

- x: cantidad proyectada de turistas en Ollantaytambo (en miles).
- y: cantidad proyectada de turistas en Poroy (en miles).

Queremos resolver el sistema usando el método de Gauss-Jordan.

Resolución del sistema:

Paso 1: Representar el sistema como una matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Transformación hacia una matriz identidad

1. Eliminamos el coeficiente x en la segunda fila (F_2):
   - $F_2 = F_2 - 2F_1$:
   $$[2, -1, 100] - 2[1, 1, 350] = [0, -3, -600]$$
   Nueva matriz:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{bmatrix}$$
2. Normalizamos el pivote de la segunda fila (F_2):
   - $F_2 = \frac{F_2}{-3}$:
   $$[0, -3, -600]/-3 = [0, 1, 200]$$
   Nueva matriz:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$
3. Eliminamos el coeficiente y en la primera fila (F_1):
   - $F_1 = F_1 - F_2$:
   $$[1, 1, 350] - [0, 1, 200] = [1, 0, 150]$$
   Nueva matriz:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Resultados finales:

$$x = 150, \quad y = 200$$

Interpretación:

- Ollantaytambo (x): Se proyecta que $\mathbf{150,000}$ turistas visitarán esta estación en un mes pico.
- Poroy (y): Se proyecta que $200,000$ turistas visitarán esta estación en un mes pico.

Implicaciones para la planificación de rutas:

- Los datos sugieren que Poroy tendrá una mayor demanda turística, lo que podría requerir una mayor asignación de recursos (e.g., trenes, personal, infraestructura).
- Ollantaytambo también presenta una demanda significativa, lo que indica la importancia de optimizar las rutas que conectan ambas estaciones.

Problema 8

Una empresa agroexportadora en Piura desea combinar tres variedades de mango (A, B, C) y un conservante (w) para lograr un producto optimizado. Las ecuaciones que describen la mezcla (en toneladas diarias) son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Use el método Gauss-Jordan para determinar A, B, C, w.

Sistema de ecuaciones representado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}$$

donde:

- A, B, C: toneladas diarias de variedades de mango.
- w: toneladas diarias de conservante.

Queremos resolver el sistema usando el método de Gauss-Jordan.

Resolución del Problema:

Paso 1: Representar la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Transformación hacia una matriz diagonal

1. Eliminamos el coeficiente A de las filas 2, 3 y 4:

   - $F_2 = F_2 - 2F_1$:

   $$[2, 1, 1, 0, 70] - 2[1, 1, 0, 1, 50] = [0, -1, 1, -2, -30]$$

   - $F_3 = F_3 - F_1$:

   $$[1, 2, 1, 1, 80] - [1, 1, 0, 1, 50] = [0, 1, 1, 0, 30]$$

   - $F_4 = F_4 - 0F_1$ (sin cambios en F_4).

Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{bmatrix}$$

2. Eliminamos el coeficiente B de las filas 3 y 4:

   - $F_3 = F_3 - F_2$:

$$[0, 1, 1, 0, 30] - [0, -1, 1, -2, -30] = [0, 0, 0, 2, 60]$$

   - $F_4 = F_4 - F_2$:

$$[0, 1, 2, 1, 60] - [0, -1, 1, -2, -30] = [0, 0, 1, 3, 90]$$

   Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 90 \end{bmatrix}$$

3. Eliminamos el coeficiente C de la fila 4:

   - $F_4 = F_4 - F_3$:

$$[0, 0, 1, 3, 90] - [0, 0, 0, 2, 60] = [0, 0, 1, 1, 30]$$

   Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Normalizamos los pivotes:

   - $F_2 = F_2 / -1$:

$$[0, -1, 1, -2, -30] / -1 = [0, 1, -1, 2, 30]$$

   - $F_3 = F_3 / 2$:

$$[0, 0, 0, 2, 60] / 2 = [0, 0, 0, 1, 30]$$

   Nueva matriz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Sustitución regresiva

Resolviendo:

1. De F_4: $C + w = 30 \Longrightarrow C = 30 - w$.
2. De F_3: $w = 30$.
3. De F_2: $B - C + 2w = 30 \Longrightarrow B - (30 - 30) + 60 = 30 \Longrightarrow B = 0$.
4. De F_1: $A + B + w = 50 \Longrightarrow A + 0 + 30 = 50 \Longrightarrow A = 20$.

Resultados finales:

- Variedad A (mango): $A = 20$ toneladas diarias.
- Variedad B (mango): $B = 0$ toneladas diarias.
- Variedad C (mango): $C = 30$ toneladas diarias.
- Conservante: $w = 30$ toneladas diarias.

Interpretación:

Para optimizar la mezcla:

- Usar 20 toneladas de la variedad A.
- No usar la variedad B.
- Usar 30 toneladas de la variedad C.
- Agregar 30 toneladas de conservante.

Esto maximiza la eficiencia del proceso de producción y cumple con las restricciones establecidas.

Problema 9

Una agencia de marketing digital en Lima procesa grandes volúmenes de datos de redes sociales. Cada servidor de tipo 1 puede analizar 200 mensajes por hora y cada servidor de tipo 2 puede analizar 300 mensajes por hora. El costo por día de un servidor tipo 1 es S/400 y el de tipo 2 es S/700. Se dispone de un presupuesto de S/7000 diarios y se desea analizar al menos 4000 mensajes por hora. Defina el modelo para minimizar el costo diario, escriba las restricciones y soluciones posibles.

Definir las variables:

Sea x el número de servidores de tipo 1. Sea y el número de servidores de tipo 2.

Formular las restricciones:

- La restricción de presupuesto: $400x + 700y \leq 7000$.
- La restricción de capacidad de análisis: $200x + 300y \geq 4000$.
- Las restricciones de no negatividad: $x \geq 0$ y $y \geq 0$.

Definir la función objetivo:

- El costo diario que se desea minimizar es $C = 400x + 700y$.

Resolver el sistema de ecuaciones:

1. Primero, graficamos las restricciones para encontrar la región factible.
2. Luego, evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible para encontrar el mínimo costo.

1. Restricción de presupuesto:

$$400x + 700y \leq 7000$$

Dividimos toda la ecuación por 100 para simplificar:

$$4x + 7y \leq 70$$

2. Restricción de capacidad de análisis:

$$200x + 300y \geq 4000$$

Dividimos toda la ecuación por 100 para simplificar:

$$2x + 3y \geq 40$$

3. Encontrar los puntos de intersección:

- Intersección de $4x + 7y = 70$ y $2x + 3y = 40$:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 70 \\ 2x + 3y = 40 \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 2:

$$4x + 6y = 80$$

Restamos esta ecuación de la primera:

$$(4x + 7y) - (4x + 6y) = 70 - 80y = -10$$

Esto no es posible ya que $y \geq 0$. Por lo tanto, buscamos otros puntos de intersección con los ejes.

- Intersección de $4x + 7y = 70$ con el eje $x(y = 0)$:

$$4x = 70$$
$$x = 17.5$$

Punto: $(17.5, 0)$

- Intersección de $4x + 7y = 70$ con el eje $y(x = 0)$:

$$7y = 70$$
$$y = 10$$

Punto: $(0, 10)$

- Intersección de $2x + 3y = 40$ con el eje $x(y = 0)$:

$$2x = 40$$
$$x = 20$$

Punto: $(20, 0)$

- Intersección de $2x + 3y = 40$ con el eje $y(x = 0)$:

$$3y = 40$$
$$y = \frac{40}{3} \approx 13.33$$

Punto: $(0, 13.33)$

4. Evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible:

- Punto $(17.5, 0)$:
$$C = 400(17.5) + 700(0) = 7000$$

- Punto $(0, 10)$:
$$C = 400(0) + 700(10) = 7000$$

- Punto $(20, 0)$:
$$C = 400(20) + 700(0) = 8000$$

- Punto $(0, 13.33)$:

$$C = 400(0) + 700(13.33) \approx 9331$$

5. Conclusión:

El costo mínimo se obtiene en los puntos $(17.5, 0)$ y $(0, 10)$, con un costo de S/7000 diarios.

Por lo tanto, la agencia de marketing digital debe contratar 17.5 servidores de tipo 1 y 0 servidores de tipo 2, o 0 servidores de tipo 1 y 10 servidores de tipo 2 para minimizar el costo diario a S/7000.

Problema 10

Una empresa de comercio electrónico con sede en Trujillo almacena dos tipos de productos digitales: Software local (x) y Cursos virtuales (y). Cada unidad de Software local requiere 3 GB de almacenamiento y genera una ganancia de S/20, mientras que cada Curso virtual ocupa 1 GB y genera S/15 de ganancia. El centro de datos solo dispone de 120 GB de espacio y se exige cumplir al menos 10 unidades de Software local para respetar convenios previos. Formule el problema de maximización de ganancias con sus restricciones y discuta cómo se implementaría este análisis en un proyecto de ciencia de datos.

1. Definir las variables:

Sea x el número de unidades de Software local. Sea y el número de unidades de Cursos virtuales.

2. Formular la función objetivo:

- La ganancia total G se da por:

$$G = 20x + 15y$$

3. Formular las restricciones:

- Restricción de almacenamiento:

$$3x + y \leq 120$$

- Restricción de unidades mínimas de Software local:

$$x \geq 10$$

- Restricciones de no negatividad:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones:

1. Primero, graficamos las restricciones para encontrar la región factible.
2. Luego, evaluamos la función objetivo en los vértices de la región factible para encontrar la máxima ganancia.

1. Restricción de almacenamiento:

$$3x + y \leq 120$$

2. Restricción de unidades mínimas de Software local:

$$x \geq 10$$

3. Encontrar los puntos de intersección:

- Intersección de $3x + y = 120$ con el eje $x(y = 0)$:

$$3x = 120$$
$$x = 40$$

  Punto: $(40, 0)$

- Intersección de $3x + y = 120$ con el eje $y(x = 0)$:

$$y = 120$$

  Punto: $(0, 120)$

- Intersección de $x = 10$ con $3x + y = 120$:

$$3(10) + y = 120$$
$$30 + y = 120$$
$$y = 90$$

  Punto: $(10, 90)$

4. Evaluar la función objetivo en los vértices de la región factible:

- Punto $(40, 0)$:
$$G = 20(40) + 15(0) = 800$$

- Punto $(10, 90)$:

$$G = 20(10) + 15(90) = 200 + 1350 = 1550$$

5. Conclusión:

La máxima ganancia se obtiene en el punto $(10, 90)$, con una ganancia de S/1550.

Por lo tanto, la empresa de comercio electrónico debe almacenar 10 unidades de Software local y 90 unidades de Cursos virtuales para maximizar sus ganancias a S/1550.