

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. М. Мацокин, С. Б. Сорокин

Численные методы

Часть 1

Численный анализ

Курс лекций

Новосибирск
2006

УДК 519.6
ББК В 22.19
М 367

Мацокин А. М., Сорокин С. Б. Численные методы: Курс лекций/ Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2006: Ч.1: Численный анализ. 132 с.

ISBN 5-94356-406-3

Курс основан на материале лекций, читаемых на механико-математическом факультете и в Высшем колледже информатики Новосибирского государственного университета. Он содержит постановки и некоторые способы решения основных задач численного анализа: интерполяции, численного интегрирования, численного дифференцирования и отыскания корней нелинейных уравнений. В конце каждого параграфа помещены упражнения к нему. Решения большинства задач приведены в конце курса.

Приносим благодарность студентам механико-математического факультета Новосибирского государственного университета Е. И. Стодольской, Д. В. Книшпенберг, проверившим формулировку и решения практически всех задач, студентам Высшего колледжа информатики К. С. Зорину, М. С. Коневской, О. Я. Чопкайло, осуществившим предварительную корректуру и Е. А. Хоперсковой за рекомендации по стилю оформления.

Курс предназначен для чтения лекций и проведения практических занятий на механико-математическом факультете и в Высшем колледже информатики. Также он может составить основу для преподавания численного анализа на других факультетах Новосибирского государственного университета.

Рецензент

д-р физ.-мат. наук, проф. А. Ф. Воеводин

© Новосибирский государственный университет, 2006

© Мацокин А. М., 2006

© Сорокин С. Б., 2006

ISBN 5-94356-406-3

Содержание

1. Алгебраические методы интерполирования	5
1.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа	7
1.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона	8
1.3. Оценка погрешности интерполирования	15
1.4. Полином (Чебышева), наименее уклоняющийся от нуля	18
1.4.1. Чебышевский альтернанс	20
1.4.2. Многочлен Чебышева	27
1.5. Упражнения	33
2. Численное интегрирование	37
2.1. Интерполяционные квадратурные формулы	37
2.2. Квадратуры Гаусса наивысшей алгебраической степе- ни точности	41
2.3. Сходимость квадратур Гаусса	47
2.4. Устойчивость квадратурных формул	50
2.5. Простейшие квадратурные формулы	51
2.5.1. Формулы прямоугольников (на одном узле)	52
2.5.2. Формула трапеций (на двух узлах)	53
2.5.3. Формула Симпсона (на трех узлах)	55
2.6. Составные квадратурные формулы	57
2.6.1. Составные формулы прямоугольников	58
2.6.2. Составная формула трапеций	59
2.6.3. Составная формула Симпсона	59
2.7. Упражнения	59
3. Численное дифференцирование	64
3.1. Интерполяционные формулы	64
3.2. Метод неопределенных коэффициентов	65
3.3. Формулы на основе определения производной	66
3.4. Неустойчивость формул численного дифференцирова- ния	70
3.5. Упражнения	72

4. Численные методы решения нелинейных уравнений	74
4.1. Отделение корней	75
4.2. Метод деления пополам (бисекций)	77
4.3. Принцип сжимающих отображений	78
4.4. Метод последовательных приближений (простой итерации)	81
4.5. Метод Эйткена ускорения сходимости	86
4.6. Метод Ньютона	88
4.7. Метод Ньютона с параметром	92
4.8. Интерполяционные методы	97
4.9. Упражнения	98
5. Ответы, указания, решения	102
Список литературы	132

1. Алгебраические методы интерполирования

Задача интерполирования функции $f(x)$ состоит в том, чтобы по известным ее значениям в некоторых точках определить ее значения в остальных точках области задания. Такая задача возникает, например, тогда, когда по результатам измерения некоторой физической величины в одних точках требуется определить ее значения в других точках или когда в целях ускорения вычислений желательно приблизить заданную функцию другой, но "легко" вычислимой. Поскольку наиболее простыми с вычислительной точки зрения являются алгебраические многочлены (полиномы), то вполне естественным является их использование при решении интерполяционных задач. Конечно, существует много других подходов к решению задачи интерполирования функции. Здесь мы их рассматривать не будем. Желающие ознакомиться с ними могут это сделать, изучив соответствующие разделы монографий, приведенных в списке литературы.

Определение 1.1. Алгебраический полином

$$P_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_m \cdot x^m \quad (1.1)$$

называется интерполяционным полиномом для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, по ее значениям $f(x_i)$ в $n + 1$ попарно различных точках $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, n$ (узлах интерполяции), если

$$P_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1.2)$$

□

Задачу построения алгебраического полинома (1.1), удовлетворяющего условиям (1.2), будем называть в дальнейшем *задачей алгебраической интерполяции*.

Первый вопрос, на который нам необходимо ответить: какие условия гарантируют существование и единственность интерполяционного полинома?

Для определения коэффициентов полинома $P_m(x)$ ($m+1$ неизвестное: a_0, a_1, \dots, a_m в (1.1)) мы имеем $n+1$ условие (1.2). Единственность решения математических конечномерных задач обычно обеспечивается равенством числа неизвестных количеству накладываемых на них условий. Если условий меньше, чем неизвестных, то решение обычно не единственно; если условий больше, то решения вообще может не существовать.

Теорема 1.1. *Задача алгебраической интерполяции при $m = n$ имеет единственное решение.* \square

Доказательство. Перепишем систему (1.2) относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n полинома $P_n(x)$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned} x_0^0 \cdot a_0 + x_0 \cdot a_1 + \dots + x_0^n \cdot a_n &= f(x_0), \\ x_1^0 \cdot a_0 + x_1 \cdot a_1 + \dots + x_1^n \cdot a_n &= f(x_1), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$x_n^0 \cdot a_0 + x_n \cdot a_1 + \dots + x_n^n \cdot a_n = f(x_n).$$

Определитель матрицы этой системы линейных алгебраических уравнений

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

является известным определителем Вандермонда. Он отличен от нуля, так как $x_i \neq x_j$ при $i \neq j, i, j = 0, \dots, n$. А это, в свою очередь, является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения системы (1.3). \square

1.1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Теорема 1.1 гарантирует существование решения задачи алгебраической интерполяции (1.1)–(1.2). Однако, в ней никаких рекомендаций по его нахождению не приводится. Одну из форм представления решения задачи алгебраической интерполяции дает следующая

Теорема 1.2. При $m = n$ решение задачи алгебраической интерполяции (1.1)–(1.2) представимо в форме Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad (1.4)$$

где

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \quad (1.5)$$

– полином степени $n + 1$. \square

Доказательство. Для каждого $k = 0, 1, \dots, n$ рассмотрим частный случай задачи алгебраического интерполирования:

$$P_{n,k}(x_i) = \delta_{k,i}, \\ i = 0, 1, \dots, n,$$

где $\delta_{k,i}$ — символ Кронекера: $\delta_{k,i} = 0$ при $k \neq i$, $\delta_{k,k} = 1$.

Так как полином $P_{n,k}(x)$ степени n по условию имеет n корней

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n,$$

то он может быть представлен в виде произведения мономов

$$P_{n,k}(x) = q_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n),$$

где q_k определяется из условия $P_{n,k}(x_k) = 1$:

$$q_k = \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}.$$

Легко проверить, что этот полином можно переписать в следующем виде:

$$P_{n,k}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)},$$

где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Ясно, что линейная комбинация

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x)f(x_k)$$

полиномов $P_{n,k}(x)$ с весами $f(x_k)$ является полиномом степени n .

А так как

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x_i)f(x_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{k,i}f(x_k) = f(x_i)$$

для $i = 0, 1, \dots, n$, то она является интерполянтom функции $f(x)$. Тем самым представление (1.4)–(1.5) доказано. \square

1.2. Интерполяционный полином в форме Ньютона

Рассмотрим следующую ситуацию. По значениям функции $f(x_i)$ в узлах x_0, x_1, \dots, x_n мы построили интерполяционный полином $P_n(x)$ и вычислили его значения для некоторого набора точек отрезка $[a, b]$. Предположим, что появились новые значения интерполируемой функции $f(x)$. Скажем, одно в новой точке x_{n+1} . Возникает вопрос: можно ли учесть эту новую информацию и подправить уже вычисленную таблицу? Фактически речь идет о том, насколько легко можно вычислить поправку $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ к интерполяционному полиному $P_n(x)$ степени n , чтобы построить полином $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (P_{n+1}(x) - P_n(x))$ степени $n + 1$.

Для интерполяционного полинома, представленного в форме Лагранжа, переход от $P_n(x)$ к $P_{n+1}(x)$ чрезвычайно трудоемок. При добавлении новой точки x_{n+1} необходимо пересчитать все "коэффициенты"

$$\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$$

в представлении (1.4)–(1.5). В связи с этим мы изучим другую запись интерполяционного полинома. Необходимо сразу отметить, что сам интерполяционный полином будет один и тот же в силу доказанной выше теоремы 1.1 о его существовании и *единственности*. Различаются только формы его записи.

Пусть $P_k(x)$ — интерполяционный полином для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, по ее значениям $f(x_i)$ в первых $k+1$ узлах x_0, x_1, \dots, x_k из $n+1$ попарно различных точек x_0, x_1, \dots, x_n .

Очевидно, разность $P_{k+1}(x) - P_k(x)$ является полиномом степени $k+1$. Значения интерполяционных полиномов $P_{k+1}(x)$ и $P_k(x)$ при $x = x_0, x_1, \dots, x_k$ совпадают: $P_{k+1}(x_i) = P_k(x_i) = f(x_i)$. Таким образом, эти точки являются различными корнями разности $P_{k+1}(x) - P_k(x)$. Поскольку полином степени $k+1$ имеет ровно $k+1$ корень, то справедливо представление

$$P_{k+1}(x) - P_k(x) = A_{k+1}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k), \quad (1.6)$$

где A_{k+1} постоянная. Ее можно определить из уравнения, следующего из представления (1.6):

$$P_{k+1}(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1}) = A_{k+1}(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)\dots(x_{k+1} - x_k).$$

Так как в соответствии с условиями интерполяции выполняется равенство $P_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1})$, то

$$A_{k+1} = \frac{f(x_{k+1}) - P_k(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)\dots(x_{k+1} - x_k)}. \quad (1.7)$$

Легко получить явную формулу для A_1 . Запишем (1.7) при $k=0$:

$$A_1 = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}. \quad (1.8)$$

В этой формуле $P_0(x_1)$ есть значение интерполяционного полинома $P_0(x)$ в точке x_1 . По определению, $P_0(x)$ — полином нулевой степени (т. е. константа) и $P_0(x_0) = f(x_0)$. Поэтому для всех значений x справедливо $P_0(x) = f(x_0)$. Таким образом, $P_0(x_1) = f(x_0)$ и (1.8) записывается в виде

$$A_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Определение 1.2. Разделенной разностью первого порядка функции $f(x)$ на узлах $x_0 \neq x_1$ называется число

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Тогда, учитывая формулу (1.7) ($k = 0$), интерполяционный полином $P_1(x)$ можно представить в следующей форме (Ньютона):

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_0(x) + (P_1(x) - P_0(x)) = \\ &= P_0(x) + A_1(x - x_0) = \\ &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Только что мы по интерполяционному полиному $P_0(x)$ (нулевой степени) на одном узле x_0 , вычислив поправку $P_1(x) - P_0(x)$, построили интерполяционный полином $P_1(x)$ (первой степени) на двух узлах x_0, x_1 .

Сделаем следующий шаг: построим интерполяционный полином $P_2(x)$ (второй степени) на трех узлах x_0, x_1, x_2 по интерполяционному полиному первой степени.

Полином $P_2(x)$ можно получить двумя способами:

1) построим интерполяционный полином $P_1(x)$ (первой степени) на двух узлах x_0, x_1 . Тогда в соответствии с представлением (1.6) ($k = 1$)

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + (P_2(x) - P_1(x)) = \\ &= P_1(x) + A_2(x - x_0)(x - x_1); \end{aligned} \quad (1.10)$$

2) построим интерполяционный полином $Q_1(x)$ (первой степени) на двух узлах x_1, x_2 :

$$Q_1(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1). \quad (1.11)$$

Тогда аналогично предыдущему случаю

$$\begin{aligned} P_2(x) &= Q_1(x) + (P_2(x) - Q_1(x)) = \\ &= Q_1(x) + B_2(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Используя формулу (1.7) при $k = 1$ и учитывая, что x_2 — узел интерполяции для $Q_1(x)$, т. е. $f(x_2) = Q_1(x_2)$, нетрудно найти выражение для A_2 :

$$A_2 = \frac{f(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{Q_1(x_2) - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Подставляя в него выражения $P_1(x_2)$ и $Q_1(x_2)$, получающиеся из формул (1.9) и (1.11) соответственно, имеем

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{f(x_1) + f(x_1, x_2)(x_2 - x_1) - f(x_0) - f(x_0, x_1)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_0, x_1)(x_1 - x_0) + f(x_1, x_2)(x_2 - x_1) - f(x_0, x_1)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_1, x_2)(x_2 - x_1) - f(x_0, x_1)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}. \end{aligned}$$

Определение 1.3. Разделенной разностью второго порядка функции $f(x)$ на попарно различных узлах x_0, x_1, x_2 называется число

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

□

Тогда в соответствии с формулами (1.9) и (1.10) интерполяционный полином $P_2(x)$ можно представить в следующей форме (Ньютона):

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_0(x) + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1). \end{aligned}$$

Полученные формулы позволяют предположить, что коэффициенты A_k в формуле (1.7) равны разделенным разностям k -го порядка функции $f(x)$ на попарно различных узлах x_0, x_1, \dots, x_k , которые определяются через разности предыдущего порядка следующим образом:

Определение 1.4. Разделенной разностью k -го порядка функции $f(x)$ на попарно различных узлах x_0, x_1, \dots, x_k называется число

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

□

Одно из эквивалентных представлений разделенной разности k -го порядка функции $f(x)$ дает

Лемма 1.1. Для разделенной разности k -го порядка функции $f(x)$ на попарно различных узлах x_0, x_1, \dots, x_k справедлива следующая формула:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}.$$

□

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции. Справедливость леммы для $k = 1$ следует очевидным образом из определения разделенной разности первого порядка (см. также формулу для A_1). Предложим, что лемма справедлива при $k = m$ и докажем ее для $k = m + 1$.

Из определения разделенной разности $(m + 1)$ -го порядка и сделанного предположения математической индукции следует, что

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_{m+1}) &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_m)}{x_{m+1} - x_0} = \\ &= \frac{1}{x_{m+1} - x_0} \left[\sum_{i=1}^{m+1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m+1})} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=0}^m \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} \right]. \end{aligned}$$

Далее, перегруппировав слагаемые, имеем

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, \dots, x_{m+1}) &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1})} + \\
&+ \frac{1}{x_{m+1} - x_0} \sum_{i=1}^m \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m+1})} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} \right] + \\
&\quad + \frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1} - x_0)(x_{m+1} - x_1) \dots (x_{m+1} - x_{m-1})(x_{m+1} - x_m)}. \tag{1.12}
\end{aligned}$$

Преобразуем выражение, стоящее под знаком суммы. Вынося общий множитель, получаем его значение в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{x_i - x_{m+1}} - \frac{1}{x_i - x_0} \right] \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} = \\
&= \left[\frac{x_{m+1} - x_0}{(x_i - x_{m+1})(x_i - x_0)} \right] \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)} = \\
&= (x_{m+1} - x_0) \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m+1})}.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (1.12), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, \dots, x_{m+1}) &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)(x_0 - x_{m+1})} + \\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m+1})} + \\
&+ \frac{f(x_{m+1})}{(x_{m+1} - x_0)(x_{m+1} - x_1) \dots (x_{m+1} - x_{m-1})(x_{m+1} - x_m)} = \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m+1})},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Лемма 1.2. Коэффициенты A_k из формулы (1.7) равны раз-
деленным разностям k -го порядка функции $f(x)$ на попарно раз-
личных узлах x_0, x_1, \dots, x_k :

$$A_k = f(x_0, x_1, \dots, x_k).$$

□

Доказательство. В соответствии с формулой (1.7)

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{f(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})} = \\ &= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} - \frac{P_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Заменяя во втором слагаемом интерполяционный полином $P_{k-1}(x)$ на его представление (1.4)–(1.5) в форме Лагранжа

$$P_{k-1}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} f(x_i), \quad \omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

и учитывая, что знаменатели в формуле (1.13) равны $\omega(x_k)$, полу-
чаем

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{f(x_k)}{\omega(x_k)} - \frac{1}{\omega(x_k)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\omega(x_k)}{(x_k - x_i)\omega'(x_i)} f(x_i) = \\ &= \frac{f(x_k)}{\omega(x_k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_k)\omega'(x_i)}. \end{aligned}$$

Наконец, так как $\omega'(x_i) = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{k-1})$,
последняя формула записывается в виде

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})} + \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{k-1})(x_i - x_k)} = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_k)}, \end{aligned}$$

что по доказанному в лемме 1.1 и является разделенной разностью k -го порядка функции $f(x)$ на попарно различных узлах x_0, x_1, \dots, x_k . Лемма 1.2 полностью доказана. \square

Теорема 1.3. При $m = n$ решение задачи алгебраической интерполяции (1.1)–(1.2) представимо в форме Ньютона:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}), \quad (1.14)$$

где $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ – разделенные разности k -го порядка. \square

Доказательство. Утверждение теоремы является следствием формулы (1.6) и леммы 1.2. Действительно, из формулы (1.6) получаем

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_{n-1}(x) + A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) = \\ &= P_{n-2}(x) + A_{n-1}(x-x_0)\dots(x-x_{n-2}) + A_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n A_k(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1}). \end{aligned}$$

А по доказанному в лемме 1.2 имеем $A_k = f(x_0, x_1, \dots, x_k)$, что и дает (1.14), если под A_0 понимать $f(x_0)$. \square

1.3. Оценка погрешности интерполирования

Перейдем к выяснению основного вопроса этого раздела: насколько отличаются значения интерполяционного полинома $P_n(x)$ от значений интерполируемой функции $f(x)$? Прежде всего дадим следующее

Определение 1.5. Погрешностью (ошибкой) интерполирования функции $f(x)$ по ее значениям $f(x_i)$ в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n интервала $[a, b]$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$ называется их разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Совершенно очевидно, что в узлах интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n справедливо $R_n(x_i) = 0$ для $i = 0, 1, \dots, n$. Оценим погрешность в точках, не совпадающих с узлами интерполяции.

Лемма 1.3. Если $y \in [a, b]$ и не совпадает ни с одним из узлов интерполяции, $y \neq x_i$, $i = \overline{0, n}$, то

$$R_n(y) = f(x_0, \dots, x_n, y) \omega(y),$$

где $\omega(y) = (y - x_0)(y - x_1) \dots (y - x_n)$. □

Доказательство. Для функции $f(x)$ построим интерполяционный полином $P_{n+1}(x)$ степени $n+1$ по $n+2$ попарно различным узлам $x_0, x_1, \dots, x_n, y : P_{n+1}(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $P_{n+1}(y) = f(y)$. Представим его в форме Ньютона:

$$P_{n+1}(x) = f(x_0) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + \\ + f(x_0, \dots, x_n, y) \omega(x) = P_n(x) + f(x_0, \dots, x_n, y) \omega(x).$$

Из этого равенства следует, что

$$P_n(x) = P_{n+1}(x) - f(x_0, \dots, x_n, y) \omega(x).$$

Тогда

$$R_n(y) = f(y) - P_n(y) = f(y) - P_{n+1}(y) + f(x_0, \dots, x_n, y) \omega(y).$$

По условию интерполяции $P_{n+1}(y) - f(y) = 0$, что и завершает доказательство. □

Лемма 1.4. Если функция $f(x)$ n раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

для некоторой точки $\xi \in [a, b]$. □

Доказательство. Рассмотрим погрешность интерполирования

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Подставим сюда интерполяционный полином $P_n(x)$ в форме Ньютона (1.14) и продифференцируем n раз:

$$\begin{aligned}
R_n^{(n)}(x) &= \left[f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k)(x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \right]^{(n)} = \\
&= f^{(n)}(x) - n! f(x_0, x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Очевидно, что для доказательства леммы достаточно установить существование хотя бы одного корня ξ у этой производной на $[a, b]$.

Оценим количество различных корней у погрешности $R_n(x)$. Их не меньше, чем $n + 1$, так как $R_n(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Не уменьшая общности, будем считать, что узлы интерполяции упорядочены по возрастанию: $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Тогда по теореме о среднем значении ее первая производная будет иметь хотя бы один корень внутри каждого интервала (x_0, x_1) , (x_1, x_2) , \dots , (x_{n-1}, x_n) . Следовательно, $R_n'(x)$ имеет на $[a, b]$ не менее чем n попарно различных корней.

Повторяя это рассуждение для функции $R_n'(x)$, получаем, что вторая производная погрешности $R_n''(x)$ имеет на $[a, b]$ не менее, чем $n - 1$ попарно различных корней.

Через n таких шагов мы придем к выводу, что n -я производная погрешности $R_n^{(n)}(x)$ имеет на $[a, b]$ не менее одного корня, что и требовалось доказать. \square

Теорема 1.4. Если функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то погрешность интерполирования функции $f(x)$ по ее значениям $f(x_i)$ в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n интервала $[a, b]$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$R_n(y) = f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(y), \quad (1.15)$$

где $\xi \in [a, b]$, $\omega(y) = (y - x_0)(y - x_1) \dots (y - x_n)$. \square

Доказательство. Если y совпадает с одним из узлов интерполирования, то утверждение леммы очевидным образом верно для любого $\xi \in [a, b]$, поскольку для $y = x_i$ справедливо $R_n(y) = 0$ и $\omega(y) = 0$.

Если y не совпадает ни с одним из узлов интерполирования, то из леммы 1.3 следует, что

$$R_n(y) = f(x_0, \dots, x_n, y)\omega(y),$$

а лемма 1.4 гарантирует существование $\xi \in [a, b]$ такого, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

отсюда следует, что (1.15) справедливо и в этом случае. \square

1.4. Полином (Чебышева), наименее уклоняющийся от нуля

Рассмотрим оценку (1.15) ошибки интерполяции функции $f(x)$ алгебраическим полиномом $P_n(x)$:

$$R_n(y) = f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(y),$$

где

$$\omega(y) = (y - x_0)(y - x_1) \dots (y - x_n).$$

Из нее следует, что

$$|R_n(y)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |\omega(y)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega(x)|.$$

Используя определение нормы в пространстве непрерывных функций

$$\|f(x)\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

получаем неравенство

$$|R_n(y)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a, b]}}{(n+1)!} \|\omega(x)\|_{C[a, b]},$$

которое справедливо для любого $y \in [a, b]$. А следовательно,

$$\max_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a, b]}}{(n+1)!} \|\omega(x)\|_{C[a, b]},$$

и

$$\|R_n(x)\|_{C[a, b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a, b]}}{(n+1)!} \|\omega(x)\|_{C[a, b]}.$$

Очевидно, что неудачный выбор узлов интерполяции (например, в одной половине интервала $[a, b]$) будет причиной плохого приближения функции $f(x)$ интерполяционным полиномом (в другой половине отрезка $[a, b]$). Поэтому естественной является задача такого выбора интерполяционных узлов, при котором норма многочлена $\omega(x)$ в пространстве $C[a, b]$ минимальна. Иначе говоря, нам нужно выбрать узлы x_0, x_1, \dots, x_n , минимизирующие функцию $\|\omega(x)\|_{C[a, b]} = \|\omega(x; x_0, x_1, \dots, x_n)\|_{C[a, b]}$. Поставленная задача формально записывается в виде

$$\arg \min_{x_0, \dots, x_n} \|\omega(x; x_0, x_1, \dots, x_n)\|_{C[a, b]}. \quad (1.16)$$

Полином $\omega(x)$ является полиномом степени $n+1$ с коэффициентом при старшей степени x^{n+1} равным единице, поскольку

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \\ &= x^{n+1} - (p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0) \equiv x^{n+1} - P_n(x). \end{aligned}$$

Легко понять, что речь в задаче (1.16) идет о наилучшем приближении функции $f(x) = x^{n+1}$ полиномом $P_n(x)$ степени n на отрезке $[a, b]$: *найти полином $P_n(x)$ степени n такой, что для всех других полиномов $Q_n(x)$ степени n на отрезке $[a, b]$ выполнялось*

$$\|x^{n+1} - P_n(x)\|_{C[a, b]} = \min_{Q_n(x)} \|x^{n+1} - Q_n(x)\|_{C[a, b]}, \quad (1.17)$$

а корни многочлена $\omega(x) = x^{n+1} - P_n(x)$ должны быть попарно различны и принадлежать интервалу $[a, b]$.

1.4.1. Чебышевский альтернанс

Проиллюстрируем решение задачи (1.17) в частных случаях.

Найдем ее решение $P_0(x) = p_0 = \text{const}$ в случае, когда $n = 0$, а $a = -1, b = 1$. Максимум модуля линейной функции $x - P_0(x) = x - p_0$ достигается на концах отрезка (при $x = -1$ или $x = 1$). Таким образом,

$$\|x - p_0\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |x - p_0| = \max\{|1 + p_0|, |1 - p_0|\} \geq 1.$$

Поэтому очевидно, что $P_0(x) = 0$, так как для любого другого $p_0 \neq 0$ имеем

$$\|x - p_0\|_{C[-1,1]} > 1 = \max_{x \in [-1,1]} |x - 0| = \|x - 0\|_{C[-1,1]}.$$

Заметим, что разность $x - P_0(x)$ достигает своего максимального по модулю значения L

$$L = \max_{x \in [-1,1]} |x - P_0(x)| = \max_{x \in [-1,1]} |x| = 1,$$

только в двух точках $y_0 = -1 < y_1 = 1$, причем

$$\begin{aligned} (x - P_0(x))|_{x=y_0} &= -L = -1, \\ (x - P_0(x))|_{x=y_1} &= +L = +1. \end{aligned}$$

Можно проверить, что решением задачи (1.17) при $n = 1$ на отрезке $[-1, 1]$ будет полином первой степени $P_1(x) = 0.5$. При этом максимальное по модулю значение L разности $x^2 - P_1(x)$ достигается только в трех точках $y_0 = -1 < y_1 = 0 < y_2 = 1$, а знаки значений функции $x^2 - P_1(x)$ в этих точках чередуются:

$$\begin{aligned} (x^2 - P_1(x))|_{x=y_0} &= +L = +\frac{1}{2}, \\ (x^2 - P_1(x))|_{x=y_1} &= -L = -\frac{1}{2}, \\ (x^2 - P_1(x))|_{x=y_2} &= +L = +\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Определение 1.6. Говорят, что разность $f(x) - P_n(x)$ имеет чебышевский альтернанс в точках $y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1}$, принадлежащих интервалу $[a, b]$, если в этих точках она принимает максимальное по модулю значение, а знаки значений $f(y_0) - P_n(y_0)$, $f(y_1) - P_n(y_1)$, \dots , $f(y_{n+1}) - P_n(y_{n+1})$ чередуются. \square

Теорема 1.5. Для того чтобы полином $P_n(x)$ степени n был полиномом наилучшего приближения функции $f(x) \in C[a, b]$, т. е.

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{C[a,b]} = \min_{Q_n(x)} \|f(x) - Q_n(x)\|_{C[a,b]},$$

где $Q_n(x)$ — произвольный полином степени n , необходимо и достаточно, чтобы погрешность приближения $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ имела чебышевский альтернанс в $n+2$ точках $y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1}$ из интервала $[a, b]$. \square

Доказательство. Сначала докажем достаточность условия теоремы.

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что

$$a \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1} \leq b —$$

точки чебышевского альтернанса разности $f(x) - P_n(x)$, в которых

$$|f(y_i) - P_n(y_i)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| = L,$$

знаки разности $f(y_i) - P_n(y_i)$ чередуются, но полином $P_n(x)$ не является полиномом наилучшего приближения. Другим словами, существует полином $Q_n(x)$ такой, что

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - Q_n(x)| < L.$$

Рассмотрим разность

$$Q_n(x) - P_n(x) = [f(x) - P_n(x)] - [f(x) - Q_n(x)].$$

Так как

$$|f(y_i) - P_n(y_i)| = L > \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_n(x)| \geq |f(y_i) - Q_n(y_i)|,$$

то знак этой разности в точках альтернанса определяется знаком первого слагаемого. Следовательно, функция $Q_n(x) - P_n(x)$ в концах интервалов $(y_0, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_n, y_{n+1})$ имеет различные знаки. Но тогда по теореме Больцано–Коши внутри этих интервалов функция $Q_n(x) - P_n(x)$ имеет хотя бы по одному корню. Значит, многочлен $Q_n(x) - P_n(x)$ степени n имеет не менее $n + 1$ корней. Но это противоречит основной теореме алгебры: полином степени n имеет ровно n корней. Полученное противоречие говорит о несправедливости сделанного нами допущения, и, следовательно, полином $P_n(x)$ является полиномом наилучшего приближения.

Теперь докажем необходимость условия теоремы.

Прежде чем проводить доказательство, установим два вспомогательных факта.

Во-первых, заметим, что хотя бы одна точка альтернанса существует, так как непрерывная функция $f(x) - P_n(x)$ должна достигать своего максимума на компакте $[a, b]$. Для определенности будем считать, что $f(y_0) - P_n(y_0) = L > 0$.

Во-вторых, покажем, что точек альтернанса всегда не менее двух. Действительно, если точка альтернанса только одна — y_0 , то $R_n(x) > -L$ во всех точках компакта $[a, b]$. Непрерывная функция $R_n(x)$ достигает на компакте своего минимума. Очевидно, что $M = \min R_n(x)$ строго больше $-L$. Положим $\varepsilon = M + L > 0$. Поскольку $R_n(x) \geq M = -L + (M + L)$ и $M > -L$, то имеем

$$-L + \varepsilon \leq f(x) - P_n(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

а учитывая, что $f(x) - P_n(x) \leq +L$:

$$-L + \varepsilon \leq f(x) - P_n(x) \leq +L \quad \forall x \in [a, b].$$

Вычитая из всех частей неравенства $\frac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$-L + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) - [P_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}] \leq +L - \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [a, b].$$

Следовательно, полином в квадратных скобках лучше приближает функцию $f(x)$, чем $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - [P_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}]\|_{C[a,b]} &= \max_{x \in [a,b]} |f(x) - [P_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}]| \leq \\ &\leq L - \frac{\varepsilon}{2} < L = \|f(x) - P_n(x)\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

Но этого не может быть, так как $P_n(x)$ — полином наилучшего приближения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Приступим к основной части доказательства.

Доказательство опять проведем методом от противного. Предположим, что $P_n(x)$ является полиномом наилучшего приближения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, но требуемых по условию теоремы точек альтернанса меньше чем $n + 2$. Иными словами, существует только $m + 1$ точка альтернанса $a \leq y_0 < y_1 < \dots < y_m \leq b$, в которых $|f(y_i) - P_n(y_i)| = L$, причем $0 \leq m < n + 1$. Покажем, что при таком предположении $P_n(x)$ не является полиномом наилучшего приближения функции $f(x)$. Для этого в каждом из имеющихся $m \leq n$ интервалов

$$(y_0, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{m-1}, y_m)$$

мы выберем по одной точке z_i , $i = \overline{1, m}$ и построим полином

$$Q_{m,\varepsilon}(x) = \varepsilon \cdot (z_1 - x) \cdot (z_2 - x) \cdot \dots \cdot (z_m - x)$$

такой, что полином $P_n(x) + Q_{m,\varepsilon}(x)$ будет лучше приближать функцию $f(x)$, чем $P_n(x)$.

Ради краткости изложения будем проводить рассуждения для случая $n = 2$ ($n + 1 = 3$). Поскольку $m < n + 1$, выберем $m = 2$. Тогда $f(x) - P_n(x) = f(x) - P_2(x) = R_2(x)$, а точками чебышевского альтернанса будут

$$a \leq y_0 < y_1 < y_2 \leq b.$$

Сначала определим вспомогательные точки y_i^+ , $i = 0, \dots, m$ и y_i^- , $i = 0, \dots, m$ такие, что

$$a = y_0^- \leq y_0^+ < y_1^- \leq y_1^+ < \dots < y_{m-1}^- \leq y_{m-1}^+ < y_m^- \leq y_m^+ = b,$$

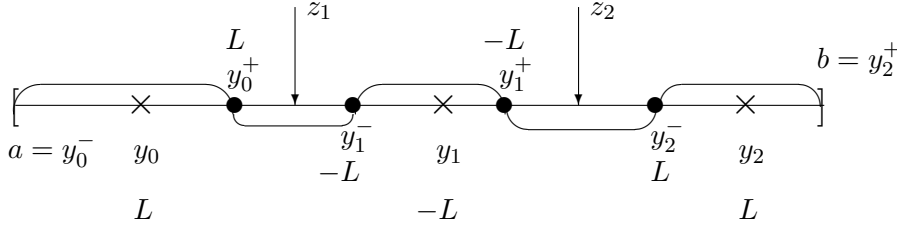
взяв в качестве:

— y_i^+ , $i = 0, \dots, m-1$ максимальную точку из полуинтервала $[y_i, y_{i+1})$ в которой значение ошибки $R_n(x)$ совпадает с экстремальным ее значением в точке y_i ;

— y_i^- , $i = 1, \dots, m$ минимальную точку из полуинтервала $(y_{i-1}, y_i]$, в которой значение ошибки аппроксимации $R_n(x)$ совпадает с экстремальным ее значением в точке y_i .

На рисунке изображены точки чебышевского альтернанса разности $f(x) - P_n(x)$: y_i ($i = 0, \dots, m$) и определенные выше точки y_i^+ ($i = 0, \dots, m$), y_i^- ($i = 0, \dots, m$).

Над или под этими точками указано значение, которое в них принимает разность $f(x) - P_n(x)$. Напомним: мы считаем, что $f(y_0) - P_n(y_0) = L > 0$.



В соответствии с проведенными построениями:

1) на компакте $[y_0^-, y_0^+]$ для любого x справедливо

$$-L < f(x) - P_n(x) \leq +L, \quad (1.18)$$

внутри интервала (y_0^+, y_1^-) для любого x справедливо

$$-L < f(x) - P_n(x) < +L, \quad (1.19)$$

причем в концах интервала достигаются экстремальные значения (в левом: $R_2(y_0^+) = +L$, в правом: $R_2(y_1^-) = -L$).

Из последнего, в частности, следует, что для непрерывной функции $R_2(x)$ существует точка $z_1 \in (y_0^+, y_1^-)$ такая, что $R_2(z_1) = 0$;

2) на компакте $[y_1^-, y_1^+]$ для любого x справедливо

$$-L \leq f(x) - P_n(x) < +L, \quad (1.20)$$

внутри интервала (y_1^+, y_2^-) для любого x справедливо

$$-L < f(x) - P_n(x) < +L, \quad (1.21)$$

причем в концах интервала достигаются экстремальные значения (в левом: $R_2(y_1^+) = -L$, в правом: $R_2(y_2^-) = +L$).

Как и в предыдущем случае, для функции $R_2(x)$ *существует точка* $z_2 \in (y_1^+, y_2^-)$ *такая, что* $R_2(z_2) = 0$.

Так как точка z_1 лежит внутри интервала (y_0^+, y_1^-) , то из неравенств (1.18)–(1.19) имеем

$$\forall x \in [a, z_1] \quad -L < f(x) - P_n(x) \leq +L. \quad (1.22)$$

В (1.22) нам важно, что левое неравенство строгое (см. рисунок на с. 24).

Аналогично поскольку $z_1 \in (y_0^+, y_1^-)$, а $z_2 \in (y_1^+, y_2^-)$, то из (1.19)–(1.21), получаем

$$\forall x \in [z_1, z_2] \quad -L \leq f(x) - P_n(x) < +L. \quad (1.23)$$

В (1.23) нам важно, что правое неравенство строгое.

Наконец, так как $z_2 \in (y_1^+, y_2^-)$, то из соотношений (1.21) и того, что правее y_2^- нет точек чебышевского альтернанса, в которых $f(x) - P_n(x)$ принимает значение $-L$, следует

$$\forall x \in [z_2, b] \quad -L < f(x) - P_n(x) \leq +L. \quad (1.24)$$

Опять отметим, что в (1.24) левое неравенство строгое.

Мы каждый раз подчеркивали, что в формулах (1.22)–(1.24) одно из неравенств строгое. Это дает возможность подобрать некоторое положительное число ε_0 такое, что строгие неравенства "превращаются" в нестрогие:

$$\forall x \in [a, z_1] \quad -L + \varepsilon_0 \leq f(x) - P_n(x) \leq +L; \quad (1.25)$$

$$\forall x \in [z_1, z_2] \quad -L \leq f(x) - P_n(x) \leq +L - \varepsilon_0; \quad (1.26)$$

$$\forall x \in [z_2, b] \quad -L + \varepsilon_0 \leq f(x) - P_n(x) \leq +L. \quad (1.27)$$

Определим число

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2 \max_{x \in [a, b]} |(z_1 - x)(z_2 - x)|}$$

и полином

$$Q_{m, \varepsilon}(x) = \varepsilon(z_1 - x)(z_2 - x).$$

Вычислим $\|Q_{m, \varepsilon}(x)\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |Q_{m, \varepsilon}(x)|$:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |Q_{m, \varepsilon}(x)| &= \varepsilon \max_{x \in [a, b]} |(z_1 - x)(z_2 - x)| = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2 \max_{x \in [a, b]} |(z_1 - x)(z_2 - x)|} \max_{x \in [a, b]} |(z_1 - x)(z_2 - x)| = \frac{\varepsilon_0}{2}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Очевидно, что многочлен $Q_{m, \varepsilon}(x)$ меняет знак при переходе через свой корень z_i и:

- на интервале $[a, z_1)$ строго положителен;
- на интервале (z_1, z_2) строго отрицателен;
- на интервале $(z_2, b]$ строго положителен.

Таким образом, учитывая вычисленное в (1.28) значение $\|Q_{m, \varepsilon}(x)\|_{C[a, b]}$, имеем

$$\forall x \in [a, z_1) \quad 0 < Q_{m, \varepsilon}(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad (1.29)$$

$$\forall x \in (z_1, z_2) \quad -\frac{\varepsilon_0}{2} \leq Q_{m, \varepsilon}(x) < 0; \quad (1.30)$$

$$\forall x \in (z_2, b] \quad 0 < Q_{m, \varepsilon}(x) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (1.31)$$

Рассмотрим полином $P_n(x) + Q_{m, \varepsilon}(x)$ и оценим разность

$$f(x) - [P_n(x) + Q_{m, \varepsilon}(x)] = [f(x) - P_n(x)] - Q_{m, \varepsilon}(x).$$

Как легко убедиться в любой точке интервала $[a, z_1)$ эта разность будет строго меньше $+L$. Действительно, в соответствии с неравенствами (1.25)

$$[f(x) - P_n(x)] - Q_{m,\varepsilon}(x) \leq [+L] - Q_{m,\varepsilon}(x),$$

а полином $Q_{m,\varepsilon}(x)$ по формуле (1.29) на этом интервале строго положителен. Таким образом,

$$[f(x) - P_n(x)] - Q_{m,\varepsilon}(x) < +L. \quad (1.32)$$

С другой стороны, из неравенств (1.25) имеем

$$[f(x) - P_n(x)] - Q_{m,\varepsilon}(x) \geq [-L + \varepsilon_0] - Q_{m,\varepsilon}(x) = -L + [\varepsilon_0 - Q_{m,\varepsilon}(x)].$$

На интервале $[a, z_1]$ по (1.29) $Q_{m,\varepsilon}(x)$ не превосходит $\varepsilon_0/2$. Следовательно, выражение в квадратных скобках строго положительно и для любой точки интервала $[a, z_1]$

$$-L < [f(x) - P_n(x)] - Q_{m,\varepsilon}(x). \quad (1.33)$$

Объединяя соотношения (1.32) и (1.33), получаем

$$\forall x \in [a, z_1] \quad -L < f(x) - [P_n(x) + Q_{m,\varepsilon}(x)] < +L.$$

Аналогичными рассуждениями, используя неравенства (1.26)–(1.27) и (1.30)–(1.31), можно убедиться в том, что $f(x) - [P_n(x) + Q_{m,\varepsilon}(x)]$ строго меньше $+L$ и строго больше $-L$ на интервалах (z_1, z_2) и $(z_2, b]$. В результате, учитывая, что $[f(x) - P_n(x)] - Q_{m,\varepsilon}(x)$ обращается в нуль в точках z_1, z_2 , приходим к следующему выводу:

$$\forall x \in [a, b] \quad -L < f(x) - [P_n(x) + Q_{m,\varepsilon}(x)] < +L.$$

Таким образом, полином $P_n(x) + Q_{m,\varepsilon}(x)$ лучше приближает функцию $f(x)$, чем многочлен $P_n(x)$. Полученное противоречие означает, что m не может быть меньше $n + 1$. \square

1.4.2. Многочлен Чебышева

Применим доказанную теорему для решения поставленной в начале этого параграфа задачи (1.17).

Для этого сначала найдем в явном виде решение задачи о наилучшем приближении функции $f(x) = x^{n+1}$ полиномом $P_n(x)$ степени n на "стандартном" отрезке $[-1, 1]$:

$$\|x^{n+1} - P_n(x)\|_{C[-1,1]} = \min_{Q_n(x)} \|x^{n+1} - Q_n(x)\|_{C[-1,1]} = L \quad (1.34)$$

и проверим, что корни многочлена $\omega(x) = x^{n+1} - P_n(x)$ попарно различны и принадлежат интервалу $[-1, 1]$. На основе решения этой задачи в заключение пункта дадим решение для общего случая.

В соответствии с теоремой 1.5, для того чтобы задача (1.34) имела решение необходимо и достаточно наличие $(n+2)$ -х точек чебышевского альтернанса у многочлена $\omega(x) = x^{n+1} - P_n(x)$. Обозначим их через

$$-1 \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1} \leq 1.$$

По определению чебышевского альтернанса, в этих точках полином $\omega(x)$ степени $n+1$ принимает максимальное по модулю значение L , т.е. $|\omega(y_i)| = L$, $i = \overline{0, n+1}$. Но тогда $\omega^2(y_i) = L^2$ и, следовательно, эти точки являются корнями полинома $L^2 - \omega^2(x)$ степени $2(n+1)$:

$$L^2 - \omega^2(y_i) = 0, \quad i = \overline{0, n+1}. \quad (1.35)$$

Известно, что если в точке x , лежащей внутри некоторого интервала, непрерывно дифференцируемая функция принимает свой минимум или максимум, то ее производная в этой точке равна нулю. Ясно, что полином $\omega(x)$ есть непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1, 1]$. В точках y_i , $i = \overline{1, n}$, лежащих внутри интервала $[-1, 1]$, функция $\omega(x)$ достигает своего минимума или максимума (это точки чебышевского альтернанса). Но тогда производная от $\omega(x)$ в точках y_i , $i = \overline{1, n}$ равна нулю:

$$\omega'(y_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.36)$$

Заметим, что точки y_0 и y_{n+1} , которые, возможно, являются концами отрезка $[-1, 1]$ (что впоследствии и окажется), мы здесь не рассматриваем.

Вычислим производную полинома $L^2 - \omega^2(x)$:

$$[L^2 - \omega^2(x)]' = -2\omega(x)\omega'(x). \quad (1.37)$$

Тогда формула (1.36) позволяет заключить, что

$$[L^2 - \omega^2(y_i)]' = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.38)$$

Из соотношений (1.35) и (1.38) следует, что точки

$$-1 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < 1,$$

являются корнями полинома $L^2 - \omega^2(x)$ кратности 2.

Полином $L^2 - \omega^2(x)$ степени $2(n+1)$ должен иметь ровно $2(n+1)$ корней. Мы указали $2n$ его корней.

В соответствии с формулой (1.35), точки y_0 и y_{n+1} тоже являются корнями этого полинома. Очевидно, что ни y_0 , ни y_{n+1} не могут быть кратными, поскольку если хотя бы один из них был бы кратным, то количество корней полинома $L^2 - \omega^2(x)$ степени $2(n+1)$ превысило бы $2(n+1)$.

Так как y_0 и y_{n+1} — некртные корни, то

$$[L^2 - \omega^2(y_0)]' \neq 0, \quad [L^2 - \omega^2(y_{n+1})]' \neq 0. \quad (1.39)$$

Из этого следует, что y_0 и y_{n+1} являются концами интервала $[-1, 1]$, т. е. $y_0 = -1$ а $y_{n+1} = 1$. Действительно, пусть, например, $y_0 \neq -1$, т. е. y_0 лежит строго внутри $[-1, 1]$. Поскольку y_0 входит в число точек чебышевского альтернанса, то в y_0 функция $\omega(x)$ достигает своего минимума или максимума. Но тогда (так же, как это было для y_i , $i = \overline{1, n}$) производная от $\omega(x)$ в точке y_0 равна нулю: $\omega'(y_0) = 0$. Из этого и формулы (1.37) получаем

$$[L^2 - \omega^2(y_0)]' = -2\omega(y_0)\omega'(y_0)' = 0,$$

что противоречит неравенствам (1.39). Следовательно, точка y_0 обязана совпадать с левым концом интервала $[-1, 1]$.

Суммируя результаты проведенных выше рассуждений, имеем: корнями полинома $L^2 - \omega^2(x)$ являются точки y_i , $i = \overline{1, n}$ (корни кратности 2) и $y_0 = -1$, а $y_{n+1} = 1$ (корни кратности 1). Из формулы (1.36) легко видеть, что эти же точки являются корнями, причем той же кратности, многочлена $(1 - x^2)[\omega'(x)]^2$. Но тогда эти многочлены могут быть разложены в произведения:

$$\begin{aligned}
L^2 - \omega^2(x) &= (1 - x^2)(x - y_1)^2 \dots (x - y_n)^2, \\
(1 - x^2)[\omega'(x)]^2 &= (1 - x^2)(n + 1)^2(x - y_1)^2 \dots (x - y_n)^2.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Коэффициент $(n + 1)^2$ в правой части второго равенства появляется потому, что

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \\
&= x^{n+1} - (p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\omega'(x) = (n + 1)x^n - (np_n x^{n-1} + \dots + p_1)$$

и коэффициент при старшей степени x у $\omega'(x)$ в левой части этого равенства равен в точности $(n + 1)$.

Из равенств (1.40) получаем, что $\omega(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)[\omega'(x)]^2 = (n + 1)^2[L^2 - \omega^2(x)].$$

Одним из его решений на интервале $[-1, 1]$ является функция

$$\omega(x) = L \cos((n + 1) \arccos x), \quad L = 2^{-n}. \tag{1.41}$$

Корни этой функции, как легко проверить, задаются формулой

$$x_k = \cos \frac{(2k + 1)\pi}{2(n + 1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{1.42}$$

Они попарно различны и принадлежат интервалу $[-1, 1]$.

Осталось проверить, что правая часть формулы (1.41) действительно является полиномом степени $(n + 1)$ с коэффициентом, равным единице при старшей степени аргумента. В самом деле, если $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$, то

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0) = 1, \\
T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x, \\
T_2(x) &= \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1,
\end{aligned}$$

так как $\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$.

Для произвольного m

$$\begin{aligned} T_m(x) &= 2x T_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) = \\ &= 2^{m-1} x^m + \dots, \end{aligned} \quad (1.43)$$

так как

$$\begin{aligned} \cos(m \arccos x) + \cos((m-2) \arccos x) &= \\ = 2 \cos(\arccos x) \cos((m-1) \arccos x). \end{aligned}$$

Из соотношений (1.43) следует, что $\omega(x)$ в формуле (1.41) является полиномом степени $(n+1)$ с коэффициентом равным единице при старшей степени аргумента.

Теперь легко выписать полином $\omega(x)$, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[a, b]$, т. е. дающий решение поставленной в начале этого параграфа задачи (1.16). Произведя в формулах (1.41), (1.43) замену переменной x , ранее изменявшейся на отрезке $[-1, 1]$, на величину $\frac{2x - b - a}{b - a}$, которая при x , изменяющемся на отрезке $[a, b]$, принимает значения от -1 до 1 , получаем

$$\omega(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot T_{n+1}\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right), \quad (1.44)$$

где $T_{n+1}\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right)$ – полином степени $n+1$, определяемый по формулам (1.43).

Корни этого полинома, учитывая формулу (1.42), могут быть получены из уравнений

$$\frac{2x_k - b - a}{b - a} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.45)$$

Очевидно, что полином $\omega(x)$ из формулы (1.44) принимает свой минимум или максимум в тех точках, в которых его принимает функция

$$T_{n+1}\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right) = \cos((n+1) \arccos\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right)).$$

Ясно, что свои экстремальные значения, равные ± 1 , эта функция достигает в точках y_k , для которых

$$(n+1) \arccos \left(\frac{2y_k - b - a}{b - a} \right) = k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

или

$$\frac{2y_k - b - a}{b - a} = \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1. \quad (1.46)$$

Нетрудно проверить, что коэффициент при x^{n+1} у построенного в формуле (1.44) полинома $\omega(x)$ равен единице, т. е.

$$\omega(x) = x^{n+1} - (p_n x^n + \dots + p_1 x + p_0) = x^{n+1} - P_n(x).$$

Итак, разность $x^{n+1} - P_n(x) = \omega(x)$ имеет $n+2$ точки чебышевского альтернанса $y_k \in [a, b]$, определяемые из соотношений (1.46), что в соответствии с теоремой 1.5 является достаточным условием наилучшего приближения функции x^{n+1} полиномом $P_n(x)$ степени n на отрезке $[a, b]$. Это означает, что мы решили задачу (1.17), а следовательно, и (1.16): *в качестве оптимальных узлов интерполяции нужно брать x_k , предписываемые формулой (1.45):*

$$x_k = \frac{(b+a) + (b-a) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Следует особо отметить, что применение оптимальных узлов не обеспечивает минимума самой погрешности интерполяции

$$\|R_n(x)\|_{C[a,b]} = \|f(x) - P_n(x)\|_{C[a,b]},$$

а лишь минимизирует в её оценке

$$\|R_n(x)\|_{C[a,b]} \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a,b]}}{(n+1)!} \|\omega(x)\|_{C[a,b]}$$

последний сомножитель в правой части неравенства.

Естественно поставить следующую задачу: среди всех полиномов степени n найти многочлен $P_n(x)$, для которого величина погрешности $\|f(x) - P_n(x)\|_{C[a,b]}$ минимальна. Искомый многочлен называется полиномом наилучшего равномерного приближения. Известно, что для любой непрерывной функции такой многочлен существует и единствен.

1.5. Упражнения

1.1. Построить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по следующим трем узлам и значениям интерполируемой функции в этих узлах ($n = 2$) :

$$\begin{aligned}x_0 &= -1, & x_1 &= 0, & x_2 &= 1, \\f(x_0) &= 3, & f(x_1) &= 4, & f(x_2) &= 5.\end{aligned}$$

1.2. Построить интерполяционный многочлен в форме Лагранжа по следующим четырем узлам и значениям интерполируемой функции в этих узлах ($n = 3$) :

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2, & x_3 &= 4, \\f(x_0) &= 2, & f(x_1) &= 3, & f(x_2) &= 4, & f(x_3) &= 6.\end{aligned}$$

1.3. Вычислить разделенную разность третьего порядка для функции $f(x)$, принимающей в узлах значения, приведенные в следующей таблице:

$$\begin{aligned}x_0 &= -2, & x_1 &= -1, & x_2 &= 1, & x_3 &= 2 \\f(x_0) &= -8, & f(x_1) &= -1, & f(x_2) &= 1, & f(x_3) &= 8.\end{aligned}$$

1.4. При каждом целом $p = 0, \dots, n$ вычислить разделенную разность n -го порядка для функции, принимающей в узлах $x_i = i$, $i = 0, \dots, n$ значения $f(x_i) = x_i^p$.

1.5. Построить интерполяционный многочлен в форме Ньютона для функции $f(x) = |x|$ по узлам $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ($n = 2$).

1.6. Построить интерполяционный многочлен в форме Ньютона для функции $f(x) = x^2$ по узлам $x_i = i$, $i = 0, \dots, 3$ ($n = 3$). Объяснить полученный результат.

1.7. Построить интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в форме Лагранжа для функции $f(x) = x^2$ по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, ($n = 1$). Построить интерполяционный многочлен $P_2(x)$, добавив еще один узел интерполяции: $x_2 = 1$. Объяснить полученный результат.

1.8. Вычислить при каждом целом значении $p = 0, \dots, n + 1$ сумму

$$\sum_{k=0}^n x_k^p \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}, \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

1.9. Для функции $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, входящей в оценку погрешности интерполяции при $n = 1$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, вычислить равномерную норму $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)|$.

1.10. Для функции $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, входящей в оценку погрешности интерполяции, вычислить равномерную норму $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)|$ при $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

1.11. Для функции $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$, входящей в оценку погрешности интерполяции, вычислить равномерную норму $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |\omega(x)|$ при $n = 3$, $x_0 = -1$,

$$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = 1.$$

1.12. Функция $f(x) = \sin(x)$ приближается на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ по ее значениям в двух узлах ($n = 1$): $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$. Оценить погрешность интерполяции в равномерной норме

$$\|P_1(x) - f(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} = \max_{x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} |P_1(x) - f(x)|.$$

1.13. Функция $f(x) = \sin(x)$ приближается на отрезке $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ по ее значениям в трех узлах ($n = 2$): $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$. Оценить погрешность интерполяции в равномерной норме

$$\|P_2(x) - f(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} = \max_{x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} |P_2(x) - f(x)|.$$

1.14. Функция $f(x) = \frac{1}{6(A^2 + 2 - x)^3}$ приближается на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$, построенным по ее значениям в узлах $x_0 = -1, x_1 = 1$. При каких A погрешность интерполяции в равномерной норме не превышает 10^{-5} ?

1.15. Функция $f(x) = e^{-\frac{x}{5}}$ приближается на отрезке $[0, 1]$ интерполяционным многочленом $P_1(x)$ по ее значениям в двух узлах $x_0 = 0, x_1 = 1$. Найти наибольшее целое p в оценке:

$$\|R_1(x)\|_{C[0,1]} = \|P_1(x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq 10^{-p}.$$

1.16. Функция $f(x) = e^{2x}$ приближается на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$ по ее значениям в трех узлах ($n = 2$) : $x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме

$$\|P_2(x) - f(x)\|_{C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = \max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |P_2(x) - f(x)|$$

не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

1.17. Для вычисления функции $f(x) = e^x$ при $x \in [0, 1]$ используется линейная интерполяция:

1) на отрезке $[0, 1]$ строится равномерная сетка с шагом $h = \frac{1}{n}$: $x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_n = nh = 1$;

2) на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = ih$ строится интерполяционный полином $P_1(x)$ по двум узлам x_i и x_{i+1} ;

3) за значение e^x при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ принимается значение полинома $P_1(x)$, построенного на этом интервале.

С каким шагом h следует построить сетку $x_i = ih$, чтобы ошибка $|e^x - P_1(x)|$ вычисления функции e^x не превышала 10^{-6} ?

1.18. Пусть $f(x)$ — непрерывная нечетная функция на отрезке $[-1, 1]$. Показать, что многочлен наилучшего равномерного приближения произвольной степени n также нечетная функция.

1.19. Функцию $f(x) = \frac{1}{x+9}$ приблизить на отрезке $[-1, 1]$ многочленом первой степени следующими способами:

- 1) линейной частью ряда Тейлора в точке $x = 0$;
- 2) интерполяционным полиномом $P_1(x)$, построенным по узлам $x_0 = -1, x_1 = 1$;
- 3) интерполяционным полиномом $P_1(x)$, построенным по оптимальным узлам интерполяции;
- 4) наилучшим равномерным приближением.

Для каждого случая оценить норму погрешности приближения в норме пространства $C[-1, 1]$.

1.20. Функцию $f(x) = x^3$ приблизить на отрезке $[-1, 1]$ многочленом первой степени следующими способами:

- 1) линейной частью ряда Тейлора в точке $x = 0$;
- 2) наилучшим приближением в норме пространства квадратично суммируемых функций - $L_2[-1, 1]$;
- 3) интерполяционным полиномом $P_1(x)$, построенным по узлам $x_0 = -1, x_1 = 1$;
- 4) интерполяционным полиномом $P_1(x)$, построенным по оптимальным узлам интерполяции;
- 5) наилучшим равномерным приближением.

Для каждого случая оценить норму погрешности приближения в норме пространства $C[-1, 1]$.

2. Численное интегрирование

Интегрирование функций является одной из основных математических операций. К вычислению определенных интегралов сводятся задачи определения, например, объема, площади поверхности, моментов инерции твердого тела.

В этом разделе мы рассмотрим классический подход к построению формул для приближенного вычисления определенного интеграла.

2.1. Интерполяционные квадратурные формулы

Итак, пусть необходимо вычислить определенный интеграл

$$If = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) \in C[a, b]. \quad (2.1)$$

Определение 2.1. Формула

$$I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \quad (2.2)$$

называется квадратурной формулой для приближенного вычисления определенного интеграла (2.1) от функции $f(x)$ на $(n+1)$ -м узле $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ с весами A_0, A_1, \dots, A_n . \square

Как может быть построена квадратурная формула?

По значениям функции $f(x)$ в узлах квадратурной формулы $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ мы можем построить интерполирующий ее полином в форме Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k),$$

где

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

— полином степени $n+1$. Очевидно, мы можем надеяться, что тогда

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_a^b P_n(x) dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) dx = \\ &= \sum_{k=0}^n \underbrace{\left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx \right]}_{A_k} f(x_k), \end{aligned}$$

то естественным было бы определить веса квадратурной формулы (2.2) в виде

$$A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.3)$$

и при этом саму формулу назвать интерполяционной.

Определение 2.2. Квадратурная формула (2.2) называется интерполяционной квадратурной формулой, если ее веса вычисляются по формуле (2.3). \square

Определение 2.3. Алгебраической степенью точности квадратурной формулы (2.2) называется целое число m такое, что квадратурная формула точна на всех полиномах $Q_p(x)$ степени p меньше или равной m , т. е.:

$$I_n Q_p(x) = \sum_{k=0}^n A_k Q_p(x_k) = I Q_p(x) = \int_a^b Q_p(x) dx, \quad \forall p \leq m.$$

Теорема 2.1. Квадратурная формула (2.2) на $(n+1)$ -м узле будет интерполяционной квадратурной формулой тогда и только тогда, когда она имеет алгебраическую степень точности n . \square

Доказательство. Сначала покажем, что интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) имеет алгебраическую степень точности n . Возьмем произвольный полином $Q_p(x)$ степени p меньше или равной n . Используя формулы (2.2)–(2.3), получаем

$$\begin{aligned} I_n Q_p(x) &= \sum_{k=0}^n A_k Q_p(x_k) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx \right]}_{A_k} Q(x_k) = \\ &= \int_a^b \left[\sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} Q(x_k) \right] dx. \end{aligned}$$

В правой части этой формулы под интегралом (в квадратных скобках) стоит интерполяционный полином $P_n(x)$ для функции $Q_p(x)$, по ее значениям $Q_p(x_k)$ в $n+1$ попарно различных точках $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \dots, n$. По определению, интерполяционный полином $P_n(x)$ проходит через заданный набор узлов:

$$P_n(x_k) = Q_p(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Но через этот набор узлов, естественно, проходит и интерполируемый полином $Q_p(x)$. Поскольку задача построения полинома степени n , принимающего заданные значения в $(n+1)$ -м узле, имеет единственное решение (теорема 1.1), то $P_n(x)$ обязан совпадать с $Q_p(x)$. Таким образом,

$$\int_a^b \left[\sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} Q(x_k) \right] dx = \int_a^b P_n(x) dx = \int_a^b Q_p(x) dx.$$

Подводя итог проведенным рассуждениям, получаем

$$I_n Q_p(x) = \int_a^b Q_p(x) dx, \quad \forall p \leq n,$$

что и означает алгебраическую степень точности n интерполяционной квадратурной формулы (2.2)–(2.3).

Докажем обратное утверждение теоремы: если квадратурная формула (2.2) точна на любом полиноме степени n , то она должна быть интерполяционной. Для этого возьмем полином степени n :

$$P_{n,l}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_l)\omega'(x_l)}, \quad l \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

По условию, для него квадратурная формула (2.2) должна быть точна, т. е.

$$\int_a^b P_{n,l}(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k P_{n,l}(x_k). \quad (2.4)$$

Но $P_{n,l}(x_k) = 0$, $\forall k \neq l$ и $P_{n,l}(x_l) = 1$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^n A_k P_{n,l}(x_k) = A_l. \quad (2.5)$$

Из равенств (2.4)–(2.5) получаем

$$A_l = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_l)\omega'(x_l)} dx,$$

т. е. формула (2.2) интерполяционная. \square

Теорема 2.2. Если функция $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то точность вычисления интеграла (2.1) по интерполяционной квадратурной формуле (2.2)–(2.3) на $(n+1)$ -м узле оценивается следующим неравенством:

$$|If - I_n f| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega(x)| dx,$$

где $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a,b]}$. \square

Доказательство. Теорема 1.4 утверждает, что погрешность интерполирования функции $f(x)$ по ее значениям $f(x_i)$ в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n интервала $[a, b]$, интерполяционным полиномом $P_n(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x),$$

где $\xi \in [a, b]$ зависит от x . Отсюда, учитывая, что квадратурная формула по условию теоремы является интерполяционной ((2.3)), следует, что

$$\begin{aligned} |If - I_n f| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \right| = \\ &= \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx \right] f(x_k) \right| = \\ &= \left| \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} f(x_k) \right] dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b [f(x) - P_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P_n(x)| dx = \\ &= \int_a^b \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x) \right| dx \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega(x)| dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

2.2. Квадратуры Гаусса наивысшей алгебраической степени точности

В предыдущем разделе мы выяснили, что на любой системе узлов $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) точна на линейном пространстве размерности

$n + 1$ всех полиномов степени не более чем n . Естественным образом возникает вопрос: а нельзя ли за счет выбора этих узлов ($n + 1$ параметр) увеличить алгебраическую точность квадратурной формулы?

Выясним сначала, какую максимальную алгебраическую степень точности может иметь квадратурная формула.

Теорема 2.3. *Квадратурная формула (2.2) на $(n + 1)$ -м узле не может иметь алгебраическую степень точности больше, чем $2n + 1$.* \square

Доказательство. Пусть $f(x) = \omega^2(x) = [(x - x_0) \dots (x - x_n)]^2$. Это полином степени $2n + 2$. Какова бы ни была квадратурная формула (2.2), справедливо

$$I_n f = \sum_{k=0}^n A_k \omega^2(x_k) = 0,$$

так как узлы квадратуры являются корнями полинома $\omega(x)$.

С другой стороны, функция $f(x) = \omega^2(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, непрерывна и отлична от нуля почти всюду. Поэтому интеграл от нее по интервалу $[a, b]$ строго положителен:

$$If = \int_a^b \omega^2(x_k) dx > 0.$$

Таким образом,

$$If \neq I_n f.$$

Следовательно, любая квадратурная формула (2.2) не точна на полиноме $\omega^2(x)$ степени $2n + 2$. А это и означает, что квадратурная формула (2.2) на $(n + 1)$ -м узле не может иметь алгебраическую степень точности больше, чем $2n + 1$. \square

Итак, больше чем $2n + 1$ алгебраическая степень точности квадратурной формулы (2.2) на $(n + 1)$ -м узле быть не может.

Нашей дальнейшей целью будет выяснение вопроса: существуют ли интерполяционные квадратурные формулы на $(n + 1)$ -м узле, имеющие алгебраическую степень точности равную $2n + 1$?

Теорема 2.4. Если квадратурная формула (2.2) на $(n+1)$ -м узле $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ имеет алгебраическую степень точности $m = 2n+1$, то она интерполяционная, а полином $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ ортогонален на $[a, b]$ всем полиномам меньшей степени, т. е.

$$\int_a^b \omega(x) P_i(x) dx = 0,$$

где $P_i(x)$ – произвольный полином степени $i \leq n$. \square

Доказательство. Так как квадратурная формула (2.2) имеет алгебраическую степень точности $m = 2n+1 > n$, то по теореме 2.1 она интерполяционная.

Далее, пусть $f(x) = \omega(x) P_i(x)$, где $P_i(x)$ – произвольный полином степени $i \leq n$. Степень полинома $f(x)$ не превышает $2n+1$. По условию теоремы квадратурная формула на нем точна:

$$If = \int_a^b \omega(x) P_i(x) dx = I_n f = \sum_{k=0}^n A_k \omega(x_k) P_i(x_k) = 0,$$

что и доказывает второе утверждение теоремы. \square

Теорема 2.5. Если полином $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ ортогонален на $[a, b]$ всем полиномам меньшей степени, т. е.

$$\int_a^b \omega(x) P_i(x) dx = 0,$$

где $P_i(x)$ – произвольный полином степени $i \leq n$, то интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) на $(n+1)$ -м узле $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ имеет алгебраическую степень точности $m = 2n+1$. \square

Доказательство. Пусть $f(x)$ – произвольный полином степени $n+1+i \leq 2n+1$. Тогда он может быть представлен в виде $f(x) = \omega(x) P_i(x) + Q_l(x)$, где $P_i(x)$ – некоторый полином степени

$i \leq n$, а полином $Q_l(x)$ степени $l \leq n$ — остаток от деления $f(x)$ на $\omega(x)$. Поскольку полином $\omega(x)$ ортогонален на $[a, b]$ полиному $P_i(x)$, то

$$If = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \omega(x) P_i(x) dx + \int_a^b Q_l(x) dx = \int_a^b Q_l(x) dx. \quad (2.6)$$

С другой стороны,

$$I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k \omega(x_k) P_i(x_k) + \sum_{k=0}^n A_k Q_l(x_k) = \sum_{k=0}^n A_k Q_l(x_k). \quad (2.7)$$

Так как квадратурная формула (2.2) интерполяционная, то по теореме 2.1 она точна на полиномах до степени n . Поэтому для полинома $Q_l(x)$ степени $l \leq n$ имеем

$$\int_a^b Q_l(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k Q_l(x_k)$$

и правые части в формулах (2.6)–(2.7) совпадают. Но тогда равны и их левые части, т. е. мы показали, что

$$If = \int_a^b f(x) dx = I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

для любого полинома $f(x)$ степени $n+1+i \leq 2n+1$. Следовательно, интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) имеет алгебраическую степень точности $m = 2n+1$, что и требовалось доказать. \square

Две предыдущие теоремы указывают, каким свойством должен обладать полином $\omega(x)$, для того чтобы интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) имела алгебраическую степень точности $m = 2n+1$. Докажем, что такой полином существует.

Теорема 2.6. *Полином $\omega(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, ортогональный на $[a, b]$ всем полиномам меньшей степени, т. е.*

$$\int_a^b \omega(x) P_i(x) dx = 0, \quad (2.8)$$

где $P_i(x)$ – произвольный полином степени $i \leq n$, существует, единствен и имеет $n + 1$ простых корней на $[a, b]$, т. е. $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. \square

Доказательство. Выберем в условии ортогональности в качестве полиномов $P_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n полинома $\omega(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, ортогонального на $[a, b]$ всем полиномам меньшей степени,

$$\int_a^b (x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) x^i dx = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

или

$$\int_a^b (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) x^i dx = - \int_a^b x^{n+1} x^i dx, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Для существования и единственности решения этой системы необходимо и достаточно, чтобы однородная система

$$\int_a^b (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) x^i dx = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

имела только нулевое решение. Докажем, что решением системы (2.9) может быть только $a_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Пусть однородная система (2.9) имеет решение a_0, a_1, \dots, a_n . Тогда, умножив ее i -е уравнение на a_i и сложив результаты, получим

$$\sum_{i=0}^n \int_a^b (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) a_i x^i dx = \int_a^b (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)^2 dx = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0)^2 = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Поэтому все a_0, a_1, \dots, a_n должны быть равны нулю.

Осталось исследовать корни полинома $\omega(x)$, а именно показать, что он не имеет кратных корней.

Если этот полином имеет $n+1$ корень нечетной кратности (т.е. все его корни простые) на $[a, b]$ то теорема доказана.

Дальнейшее доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что у $\omega(x)$ есть кратные корни на $[a, b]$. Определим полином $Q(x)$ следующим образом:

1. Если у $\omega(x)$ корней нечетной кратности на $[a, b]$ нет, то

$$Q(x) = 1.$$

2. Если $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$, — все корни $\omega(x)$ нечетной кратности на $[a, b]$ и $m < n$, то

$$Q(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m).$$

В обоих случаях произведение $\omega(x) Q(x)$ не меняет знак на $[a, b]$. Следовательно, в силу непрерывности и отличия от нуля почти всюду интеграл от него по отрезку $[a, b]$ отличен от нуля

$$\int_a^b \omega(x) Q(x) dx \neq 0.$$

Поскольку степень полинома $Q(x)$ не превосходит n , то это противоречит ортогональности на $[a, b]$ полинома $\omega(x)$ всем полиномам меньшей степени (2.8). Значит, сделанное выше предположение неверно и $m = n$. \square

Таким образом теоремы 2.4–2.6 гарантируют существование единственной интерполяционной квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности которые принято называть квадратурами Гаусса. Для них справедлива следующая

Теорема 2.7. *Если функция $f(x)$ $2(n+1)$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, то точность вычисления интеграла (2.1) по квадратурной формуле Гаусса (2.2) на $(n+1)$ -м узле оценивается следующим неравенством:*

$$|If - I_n f| \leq \frac{M_{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \int_a^b |\omega^2(x)| dx,$$

$$\text{где } M_{2(n+1)} = \|f^{(2n+2)}(x)\|_{C[a,b]}. \quad \square$$

2.3. Сходимость квадратур Гаусса

Замечательным свойством квадратур Гаусса является их сходимость для любой функции $f(x) \in C[a, b]$.

Теорема 2.8. *Если функция $f(x) \in C[a, b]$, то интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) на $(n+1)$ -м узле с положительными весами сходится к интегралу (2.1) при $n \rightarrow \infty$.* \square

Доказательство. Поскольку множество всех полиномов плотно в пространстве $C[a, b]$, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует полином $Q_N(x)$ степени N такой, что

$$|f(x) - Q_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.10)$$

Вместе с тем любая интерполяционная квадратурная формула (2.2)–(2.3) на $(n+1)$ -м узле по теореме 2.1 точна на полиномах степени $N \leq n$:

$$\int_a^b Q_N(x) dx = \sum_{k=0}^n A_k Q_N(x_k).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} If - I_n f &= \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b Q_N(x) dx + \sum_{k=0}^n A_k Q_N(x_k) - \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ &= \int_a^b [f(x) - Q_N(x)] dx + \sum_{k=0}^n A_k [Q_N(x_k) - f(x_k)]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство (2.10) и то, что по условиям теоремы $A_k > 0$:

$$\begin{aligned} |If - I_n f| &\leq \int_a^b |f(x) - Q_N(x)| dx + \sum_{k=0}^n A_k |Q_N(x_k) - f(x_k)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b 1 dx + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=0}^n A_k \cdot 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Наконец, так как интерполяционная квадратурная формула точна на константе — полиноме нулевой степени, то

$$\sum_{k=0}^n A_k \cdot 1 = \int_a^b 1 dx = (b-a), \quad (2.12)$$

и из формулы (2.11) имеем

$$|If - I_n f| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b 1 dx + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=0}^n A_k \cdot 1 = \varepsilon.$$

Следовательно, $If \rightarrow I_n f$ при $n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. \square

Осталось показать, что веса квадратур Гаусса положительны.

Лемма 2.1. *Все веса квадратурной формулы Гаусса (2.2) положительны.* \square

Доказательство. Пусть

$$I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

— квадратура Гаусса. Она точна на всех полиномах до степени $2n + 1$. А значит, для полинома степени $2n$:

$$f(x) = \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)} \right]^2 = \left[(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \right]^2$$

справедливо

$$If = \int_a^b f(x) dx = I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k). \quad (2.13)$$

Здесь x_i , $i = \overline{0, n}$ узлы квадратуры — корни полинома

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Поскольку $f(x)$ неотрицательна, непрерывна и не равна тождественно нулю на $[a, b]$, то (учитывая формулу (2.13))

$$\begin{aligned} 0 < If &= \int_a^b f(x) dx = I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \\ &= \sum_{k=0}^n A_k \left[(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{i-1})(x_k - x_{i+1}) \dots (x_k - x_n) \right]^2 = \\ &= A_i \left[(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) \right]^2, \end{aligned}$$

откуда и следует положительность i -го веса квадратуры Гаусса. \square

Заметим, что этот результат не имеет места для квадратурных интерполяционных формул на равномерной сетке узлов, т. е. когда $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$, $i = \overline{0, n-1}$.

2.4. Устойчивость квадратурных формул

Зачастую по тем или иным причинам значения интегрируемой функции вычисляются неточно: вместо $f(x_k)$ мы имеем $f_\varepsilon(x_k)$. Поэтому вместо вычисления $I_n f$ в действительности мы будем вычислять $I_n f_\varepsilon$. Возникает вопрос: насколько будут отличаться результаты? Ответ на этот вопрос для квадратурных формул с положительными весами дает следующая

Лемма 2.2. *Для интерполяционной квадратурной формулы на $(n+1)$ -м узле (2.2)–(2.3) с положительными весами из*

$$|f(x_k) - f_\varepsilon(x_k)| \leq \varepsilon, \quad k = \overline{0, n} \quad (2.14)$$

следует

$$|I_n f - I_n f_\varepsilon| \leq \varepsilon(b - a).$$

Доказательство. Пусть выполнено (2.14) и веса квадратурной формулы A_k положительны, тогда

$$\begin{aligned} |I_n f - I_n f_\varepsilon| &= \left| \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) - \sum_{k=0}^n A_k f_\varepsilon(x_k) \right| = \left| \sum_{k=0}^n A_k [f(x_k) - f_\varepsilon(x_k)] \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^n A_k |f(x_k) - f_\varepsilon(x_k)| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n A_k = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Последнее равенство в проведенных выкладках справедливо, поскольку интерполяционная квадратурная формула точна на константе (2.12). Лемма доказана. \square

Из доказанной леммы 2.2 следует, что при выполнении ее условий малые изменения интегрируемой функции мало изменяют приближенное значение интеграла независимо от числа квадратурных узлов. Это и означает устойчивость квадратурных формул: малым изменениям входных данных соответствует малое изменение результата расчетов.

Заметим, что таким свойством не обладают интерполяционные квадратурные формулы на равномерной сетке узлов.

2.5. Простейшие квадратурные формулы

В этом разделе для приближенного вычисления определенного интеграла

$$If = \int_a^b f(x) dx :$$

1) строятся простейшие интерполяционные квадратурные формулы

$$I_n = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx,$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

на одном, двух и трех узлах;

2) конкретизируется оценка их точности (см. теорему 2.2)

$$|If - I_n f| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |\omega(x)| dx,$$

где $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a,b]}$;

3) на одном и двух узлах строятся квадратуры Гаусса с оценкой точности (см. теорему 2.7)

$$|If - I_n f| \leq \frac{M_{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \int_a^b |\omega^2(x)| dx,$$

где $M_{2(n+1)} = \|f^{(2n+2)}(x)\|_{C[a,b]}$.

Всюду в этом разделе через $h = b - a$ мы будем обозначать длину интервала интегрирования, а через c — его среднюю точку $\frac{(a+b)}{2}$.

2.5.1. Формулы прямоугольников (на одном узле)

Сначала выберем в качестве узла интерполяционной квадратурной формулы $x_0 = a$. Тогда

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad \omega(x) = (x - x_0) = (x - a), \\ A_0 &= \int_a^b \frac{(x - x_0)}{(x - x_0) \cdot 1} dx = \int_a^b 1 dx = h, \\ \int_a^b |\omega(x)| dx &= \int_a^b |x - a| dx = \int_a^b (x - a) dx = \frac{(b - a)^2}{2} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$I_0 f = A_0 f(x_0) = f(a)(b - a), \quad |If - I_0 f| \leq \frac{M_1}{2}(b - a)^2 \quad (2.15)$$

– формула второго порядка малости по h .

Теперь выберем в качестве узла интерполяционной квадратурной формулы $x_0 = c$. Тогда

$$x_0 = c, \quad \omega(x) = x - c, \quad A_0 = \int_a^b dx = h, \quad \int_a^b |x - c| dx = \frac{(b - a)^2}{4}.$$

Легко проверяется, что $\int_a^b \omega(x) dx = \int_a^b (x - c) dx = 0$. Таким образом, $\omega(x)$ ортогонален полиномам меньшей степени (константам).

Поэтому

$$I_0 f = f(c)(b - a) \quad (2.16)$$

квадратура Гаусса и

$$|If - I_0 f| \leq \frac{M_2}{24}(b - a)^3,$$

поскольку $\int_a^b |\omega(x)|^2 dx = \int_a^b (x - c)^2 dx = \frac{(b - a)^3}{12}.$

Следовательно, формула прямоугольников с центральной точкой – формула третьего порядка малости по h .

2.5.2. Формула трапеций (на двух узлах)

Выберем в качестве узлов интерполяционной квадратурной формулы $x_0 = a$ и $x_1 = b$. Тогда

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad \omega(x) = (x - a)(x - b),$$

$$A_0 = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{h}{2}, \quad A_1 = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{h}{2}$$

и, следовательно,

$$I_1 f = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a). \quad (2.17)$$

Вычислим $\int_a^b |\omega(x)| dx$. Учитывая, что $a \leq x \leq b$ и производя замену $x = y + c$, получаем

$$\int_a^b |(x - a)(x - b)| dx = - \int_{-0.5h}^{0.5h} (y + 0.5h)(y - 0.5h) dy = \frac{(b - a)^3}{6}$$

Поэтому

$$|If - I_1 f| \leq \frac{M_2}{12} (b - a)^3$$

– и формула (2.17) имеет третий порядок малости по h .

Для того чтобы получить квадратуру Гаусса на двух узлах, нужно построить полином $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, ортогональный всем полиномам первой степени. Для выполнения этого достаточно, чтобы он был ортогонален функциям 1 и x .

Будем искать $\omega(x)$ в виде $\omega(x) = (x - a)(x - b) + d$. Тогда параметр d определяется из условия ортогональности полинома $\omega(x)$ функции 1 :

$$\int_a^b [(x - a)(x - b) + d] dx = \int_{-0.5h}^{0.5h} [(y + 0.5h)(y - 0.5h) + d] dy =$$

$$= -\frac{1}{6}h^3 + hd = h \left[d - \frac{1}{6}h^2 \right] = 0. \quad (2.18)$$

Таким образом, $d = \frac{1}{6}h^2$. Теперь корни полинома $\omega(x)$ легко вычисляются:

$$x_0 = c - \frac{\sqrt{3}}{6}h, \quad x_1 = c + \frac{\sqrt{3}}{6}h.$$

Осталось проверить ортогональность $\omega(x)$ функции x :

$$\begin{aligned} \int_a^b [(x-a)(x-b)+d] x dx &= \int_{-0.5h}^{0.5h} [(y+0.5h)(y-0.5h)+d](y+c) dy = \\ &= \int_{-0.5h}^{0.5h} [(y+0.5h)(y-0.5h)+d] y dy + c \int_{-0.5h}^{0.5h} [(y+0.5h)(y-0.5h)+d] dy = \\ &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \left[(y+0.5h)(y-0.5h) + \frac{1}{6}h^2 \right] y dy = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В формуле (2.19) учтено равенство (2.18), и то, что последний интеграл, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля интервалу, равен нулю.

Наконец, проводя вычисления

$$\begin{aligned} x_0 &= c - \frac{\sqrt{3}}{6}h, \quad x_1 = c + \frac{\sqrt{3}}{6}h, \quad \omega(x) = (x-c)^2 - \frac{(b-a)^2}{12}, \\ A_0 &= \frac{\sqrt{3}}{b-a} \int_a^b (x-c + \frac{\sqrt{3}}{6}h) dx = \frac{\sqrt{3}}{b-a} \int_{-0.5h}^{0.5h} (y + \frac{\sqrt{3}}{6}h) dy = \frac{h}{2} = A_1, \\ \int_a^b \omega^2(x) dx &= \int_{-0.5h}^{0.5h} \left[y^2 - \frac{h^2}{12} \right]^2 dy = \frac{(b-a)^5}{180} \end{aligned}$$

получаем квадратуру Гаусса на двух узлах:

$$I_1 f = \left[f\left(c - \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\right) + f\left(c + \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\right) \right] \frac{b-a}{2}, \quad |If - I_1 f| \leq \frac{M_4}{4320} (b-a)^5$$

– формулу пятого порядка малости по h .

2.5.3. Формула Симпсона (на трех узлах)

Выберем в качестве узлов интерполяционной квадратурной формулы $x_0 = a$, $x_1 = c$ и $x_2 = b$. Тогда

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \quad x_1 = c, \quad x_2 = b, \quad \omega(x) = (x-a)(x-c)(x-b), \\ A_0 &= \int_a^b \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} dx = \frac{2}{h^2} \int_{-0.5h}^{0.5h} y(y-0.5h) dy = \frac{h}{6}, \\ A_1 &= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} dx = -\frac{4}{h^2} \int_{-0.5h}^{0.5h} (y+0.5h)(y-0.5h) dy = \frac{4h}{6}, \\ A_2 &= \int_a^b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} dx = \frac{2}{h^2} \int_{-0.5h}^{0.5h} (y+0.5h)y dy = \frac{h}{6}, \end{aligned}$$

$$I_2 f = \frac{f(a) + 4f(c) + f(b)}{6} (b-a). \quad (2.20)$$

Кроме того, полином $\omega(x)$ ортогонален единице:

$$\int_a^b \omega(x) dx = \int_a^b (x-a)(x-c)(x-b) dx = \int_{-0.5h}^{0.5h} (y+0.5h)y(y-0.5h) dy = 0. \quad (2.21)$$

Утверждение. Квадратурная формула Симпсона (2.20) точна на многочленах до третьей степени. \square

Доказательство. Пусть $f(x)$ – полином третьей степени. Тогда имеет место представление

$$f(x) = A\omega(x) + Q_2(x) \quad (2.22)$$

с некоторыми постоянной A и полиномом второй степени $Q_2(x)$. Используя формулы (2.21)–(2.22), имеем

$$If = \int_a^b f(x) dx = A \int_a^b \omega(x) dx + \int_a^b Q_2(x) dx = \int_a^b Q_2(x) dx \quad (2.23)$$

По теореме 2.1 интерполяционная квадратурная формула на трех узлах точна на полиномах второй степени, поэтому

$$\int_a^b Q_2(x) dx = \sum_{k=0}^2 A_k Q_2(x_k) = \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k). \quad (2.24)$$

Последнее равенство в формуле (2.24) следует из представления (2.22), поскольку x_k — корни полинома $\omega(x)$. Объединяя равенства (2.23)–(2.24), окончательно приходим к

$$If = \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k) = I_2 f.$$

Полученный результат позволяет более точно оценить погрешность вычисления интеграла по квадратурной формуле Симпсона, чем это предсказывается теоремой 2.2.

Пусть $P_3(x)$ — интерполяционный полином, построенный для функции $f(x)$ по четырем узлам $x_0 = a$, $x_1 = c$, $x_2 = b$ и $x_3 = c + \varepsilon$. Здесь $\varepsilon > 0$ — малое число такое, что $c + \varepsilon \in [a, b]$. Тогда, используя условия интерполяции $f(x_k) = P_3(x_k)$ и доказанное утверждение ($IP_3(x) = I_2 P_3(x)$), имеем

$$\begin{aligned} |If - I_2 f| &= |If - \sum_{k=0}^2 A_k f(x_k)| = |If - \sum_{k=0}^2 A_k P_3(x_k)| = |If - I_2 P_3| = \\ &= |If - IP_3| = \left| \int_a^b [f(x) - P_3(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P_3(x)| dx. \end{aligned}$$

Оценивая правую часть полученного неравенства с помощью теоремы 1.4, приходим к оценке

$$|If - I_2 f| \leq \frac{M_4}{24} \int_a^b |(x-a)(x-c)(x-b)(x-[c+\varepsilon])| dx,$$

справедливой для любого ε . Полагая в ней $\varepsilon = 0$ и вычисляя

$$\int_a^b |(x-a)(x-c)^2(x-b)| dx = - \int_{-0.5h}^{0.5h} (y+0.5h)y^2(y-0.5h) dy = \frac{h^5}{120},$$

получаем

$$|If - I_2f| \leq \frac{M_4}{2880}(b-a)^5,$$

т. е. квадратурная формула Симпсона имеет пятый порядок по h .

2.6. Составные квадратурные формулы

Использование простейших квадратурных формул для интегрирования функции на интервале, длина которого не является малой величиной, редко приводит к хорошим результатам. Поэтому обычно поступают следующим образом:

1) отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивают на N подынтервалов $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$ одинаковой длины $h = (b-a)/N$: $[a_k, b_k] = [a + (k-1)h, a + kh]$;

2) исходный интеграл представляют в виде суммы интегралов по отрезкам разбиения

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} f(x) dx;$$

3) каждый интеграл $\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx$ заменяют по той или иной квадратурной формуле

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x) dx \longrightarrow I_{n,k} = \sum_{i=0}^n A_{i,k} f(x_{i,k}), \quad x_{i,k} \in [a_k, b_k];$$

4) за приближенное значение интеграла принимают

$$I_h f = \sum_{k=1}^N I_{n,k}.$$

Полученные таким способом квадратурные формулы носят название составных квадратурных формул.

Построим составные квадратурные формулы, основанные на применении в третьем пункте простейших квадратурных формул, изученных в предыдущих разделах. Через $M_{n,k}$ будем обозначать максимум модуля n -й производной функции $f(x)$ на интервале $[a_k, b_k]$, а через c_k — среднюю точку этого интервала.

2.6.1. Составные формулы прямоугольников

Применяя формулу прямоугольников (2.15), получаем

$$If \approx I_h f = \sum_{k=1}^N f(a_k) h. \quad (2.25)$$

Используя на каждом интервале $[a_k, b_k]$ оценку (2.15) и учитывая, что $\sum_{k=1}^N 1 = N = \frac{(b-a)}{h}$, находим

$$|If - I_h f| \leq \sum_{k=1}^N \frac{M_{1,k}}{2} h^2 = \frac{M_1}{2} h^2 \sum_{k=1}^N 1 = \frac{M_1(b-a)}{2} h.$$

Поэтому (2.25) будет формулой первого порядка малости по h . \square

Применяя на каждом интервале $[a_k, b_k]$ формулу прямоугольников (2.16), получаем, что

$$If \approx I_h f = \sum_{k=1}^N f(c_k) h$$

— формула второго порядка малости по h , так как

$$|If - I_h f| \leq \sum_{k=1}^N \frac{M_{2,k}}{24} h^3 \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2.$$

\square

2.6.2. Составная формула трапеций

Применяя на каждом интервале $[a_k, b_k]$ формулу трапеций (2.17), получаем, что

$$If \approx I_h f = \sum_{k=1}^N \frac{f(a_k) + f(b_k)}{2} h,$$
$$|If - I_h f| \leq \sum_{k=1}^N \frac{M_{2,k}}{12} h^3 \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2$$

– формула второго порядка малости по h .

2.6.3. Составная формула Симпсона

Применяя на каждом интервале $[a_k, b_k]$ формулу Симпсона (2.20), получаем, что

$$If \approx I_h f = \sum_{k=1}^N \frac{f(a_k) + 4f(c_k) + f(b_k)}{6} h,$$
$$|If - I_h f| \leq \sum_{k=1}^N \frac{M_{4,k}}{2880} h^5 \leq \frac{M_4(b-a)}{2880} h^4$$

– формула четвертого порядка малости по h .

2.7. Упражнения

2.1. Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ построить интерполяционную квадратурную формулу $I_0 f = A_0 f(x_0)$ на одном узле $x_0 = b$.

2.2. Для вычисления интеграла $If = \int_{-1}^1 f(x) dx$ построить интерполяционную квадратурную формулу $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ на двух узлах $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0.5$.

2.3. Пусть узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т. е. $x_{-i} = -x_i$, $i = 0, \dots, n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле для вычисления интеграла $\int_{-a}^a f(x) dx$ веса, соответствующие симметричным узлам, равны, т. е. $A_{-i} = A_i$, $i = 0, \dots, n$.

2.4. Доказать, что интерполяционная квадратурная формула для вычисления интеграла по интервалу $[-a, a]$, построенная на узлах, расположенных симметрично относительно нуля, то есть $x_{-i} = -x_i$, $i = 0, \dots, n$, точна на мономах нечетного порядка $-x^{2k+1}$.

2.5. Доказать, что для интерполяционной квадратурной формулы $I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ на $(n+1)$ -м узле $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ и любого полинома $Q_p(x)$ степени $p = 0, \dots, n$, справедливо равенство

$$I_n Q_p(x) = \int_a^b Q_p(x) dx.$$

2.6. Доказать, что для весов A_k любой интерполяционной квадратурной формулы $I_n f = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, построенной на $(n+1)$ -м узле $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$, справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a.$$

2.7. Для вычисления интеграла $I f = \int_{-1}^1 f(x) dx$ построить интерполяционную квадратурную формулу на четырех узлах $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 1$.

2.8. Показать, что интерполяционная квадратурная формула для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ на одном узле $x_0 = \frac{a+b}{2}$ имеет алгебраическую степень точности, равную 1.

2.9. Для вычисления интеграла $\int_3^5 f(x) dx$ построить интерполяционную квадратурную формулу $I_0 f = A_0 f(x_0)$ на одном узле $x_0 \in [3, 5]$. Выбрать точку x_0 так, чтобы интеграл от линейной функции $f(x) = a_0 + a_1 x$ вычислялся по этой квадратурной формуле точно.

2.10. Вычислить приближенно интеграл от функции x^3 по отрезку $[0, 1]$ ($\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$), используя формулы прямоугольников, трапеций, Гаусса на одном узле, Симпсона, Гаусса на двух узлах. Проанализировать полученные результаты.

2.11. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, используя составные квадратурные формулы трапеций

$$I_h f = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})], \quad x_k = kh, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N},$$

разделив отрезок интегрирования $[0, 1]$ на две ($N = 2, h = \frac{1}{2}$) и четыре ($N = 4, h = \frac{1}{4}$) части.

2.12. Пусть по какому-либо алгоритму вычисляется величина I_h , приближающая значение I , и известно, что справедливо представление $I_h = I + M h^k + O(h^{k+1})$, где M — некоторая константа, не зависящая от параметра h . Определить α и β такие, что линейная комбинация $\alpha I_h + \beta I_{2h}$ приближает значение I с порядком $O(h^{k+1})$, т. е. $\alpha I_h + \beta I_{2h} = I + O(h^{k+1})$.

Используя результаты предыдущей задачи, уточнить вычисленные в ней по составным квадратурным формулам трапеций ($k = 2$) значения $I_{\frac{1}{2}}$ и $I_{\frac{1}{4}}$.

2.13. Построить квадратурную формулу Гаусса на трех узлах для приближенного вычисления определенных интегралов по отрезку $[-1, 1]$.

2.14. Для приближенного вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x) dx$ используются формулы прямоугольников, Гаусса на одном узле и трапеций. Для каждого случая оценить точность получаемого результата.

2.15. Для приближенного вычисления интеграла $\int_0^1 \sin(x) dx$ используются формулы Симпсона и Гаусса на двух узлах. Для каждого случая оценить точность получаемого результата.

2.16. Для вычисления интеграла $If = \int_0^1 f(x) dx$ применяется составная квадратурная формула трапеций

$$I_h f = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})], \quad x_k = kh, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Оценить минимальное число разбиений N интервала $[0, 1]$, обеспечивающее неравенство $|If - I_h f| \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$ на классе функций $\|f''(x)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| \leq 1$.

2.17. Для вычисления интеграла $If = \int_0^1 f(x) dx$ применяется составная квадратурная формула Симпсона

$$I_h f = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{6} [f(x_k) + 4f(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) + f(x_{k+1})],$$

$$x_k = kh, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Оценить минимальное число разбиений N интервала $[0, 1]$, обеспечивающее неравенство $|If - I_h f| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$ на классе функций $\|f^{(4)}(x)\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 1$.

2.18. Для вычисления интеграла $\int_0^1 f(x) dx$ построить квадратурную формулу $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ на двух фиксированных узлах $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, имеющую максимально возможную алгебраическую степень точности.

2.19. Для вычисления интегралов $\int_{-1}^0 x^2 f(x) dx$ и $\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$ построить квадратурные формулы вида $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ с одним фиксированным узлом $x_0 = 0$, точные на мономах $f(x) = x^k$ максимально высокой степени.

2.20. Для вычисления интеграла $I f = \int_{-1}^1 f(x) dx$ построить квадратурную формулу $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ с равными весами $A_0 = A_1$ (формула Чебышева) на двух узлах x_0, x_1 , имеющую максимально возможную алгебраическую степень точности.

3. Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $f(x)$ по заданным в конечном числе точек значениям этой функции. Численное дифференцирование применяется и тогда, когда функцию трудно продифференцировать аналитически. Возможны различные подходы к приближенному вычислению производных. Ниже мы рассмотрим некоторые из них.

3.1. Интерполяционные формулы

Поступим так же, как мы поступали при построении интерполяционных квадратурных формул. По значениям функции $f(x)$ в заданном наборе узлов $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ мы можем построить интерполирующий ее полином в форме Лагранжа или Ньютона

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad (3.1)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}), \quad (3.2)$$

где

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

а $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ — разделенные разности k -го порядка.

Очевидно, мы снова можем надеяться, что тогда

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x), \quad k = \overline{0, n}.$$

При таком подходе исследование оценки погрешности численного дифференцирования $f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)$ достаточно трудоемко. Поэтому мы приведем здесь лишь вид погрешности

$$f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!(n+i+1)!} f^{(n+i+1)}(z_i) \omega^{(k-i)}(x),$$

где z_i — некоторые точки интервала $[x_0, x_n]$, а $P_n(x)$ — полином из формулы (3.1) или (3.2).

3.2. Метод неопределенных коэффициентов

Другой способ построения формул численного дифференцирования, приводящий к тем же формулам, что и в предыдущем разделе, — метод неопределенных коэффициентов. Суть его состоит в том, что коэффициенты c_i , $i = \overline{0, n}$ в формуле численного дифференцирования

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i) \quad (3.3)$$

выбираются из условия, чтобы формула была точна (знак \approx переходил в знак равенства) для многочленов $Q_m(x)$ максимальной высокой степени m .

Лемма 3.1. *Для каждого целого числа k и точки $y \in [a, b]$ существует и единственная формула численного дифференцирования (3.3) на $n + 1$ -м узле $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, точно вычисляющая k -ю производную в точке y :*

$$Q_n^{(k)}(y) = \sum_{i=0}^n c_i Q_n(x_i),$$

для всех полиномов степени n . □

Доказательство. Возьмем произвольный полином

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

степени n . Потребуем, чтобы для него соотношение (3.3) обратилось в точке $y \in [a, b]$ в равенство

$$\sum_{j=0}^n a_j (x^j)^{(k)}|_{x=y} = \sum_{i=0}^n c_i \left(\sum_{j=0}^n a_j x_i^j \right).$$

Используя равенство $(x^j)^{(k)} = j(j-1)\dots(j-k+1)x^{j-k}$ и меняя последовательность суммирования в правой части, приходим к

$$\sum_{j=0}^n a_j (j(j-1)\dots(j-k+1)y^{j-k}) = \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{i=0}^n c_i x_i^j \right).$$

Это равенство будет выполняться для всех полиномов степени n тогда и только тогда, когда коэффициенты при a_j в правой и левой частях будут равны. Приравнявая коэффициенты при a_j , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$j(j-1)\dots(j-k+1)y^{j-k} = \sum_{i=0}^n c_i x_i^j, \quad j = \overline{0, n}, \quad (3.4)$$

относительно не известных c_i . Определитель этой системы является определителем Вандермонда и поэтому при различных значениях $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ отличен от нуля. Следовательно, существует и единственно ее решение c_i , $i = \overline{0, n}$, что и завершает доказательство леммы. \square

Приведем пример использования метода неопределенных коэффициентов. Пусть требуется построить формулу численного дифференцирования (3.3) на двух узлах — $a = 0 = x_0 < x_1 = b = h$, точно вычисляющую первую производную в точке $y = 0$ для всех многочленов первой степени. В нашем случае $n = 1$, $k = 1$ и система (3.4) принимает вид

$$\begin{aligned} j = 0 & \longrightarrow 0 = c_0 + c_1, \\ j = 1 & \longrightarrow 1 = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot h. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем $c_0 = -\frac{1}{h}$, $c_1 = \frac{1}{h}$. Следовательно, формула

$$c_0 f(0) + c_1 f(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

дает точное значение $f'(0)$ для всех функций вида $a_1 x + a_0$.

3.3. Формулы на основе определения производной

Формула для приближенного вычисления производной в точке x может быть построена исходя из определения производной, которое формулируется следующим образом.

Если предел слева и справа отношения приращения функции к приращению аргумента существуют и равны, то его значение называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (3.5)$$

Если в определении (3.5) h достаточно мало, то можно надеяться, что отношения

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \quad (3.6)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3.7)$$

близки к значению производной $f'(x)$. Выражения в формулах (3.6), (3.7) называются разностным отношением назад и вперед соответственно и обозначаются через $f_{\bar{x}}(x)$ и $f_x(x)$.

Если есть возможность вычислять значения функции в любой точке, то формулы (3.6), (3.7) позволяют приближенно определять значение ее производной в наперед заданной точке.

Выясним погрешность вычисления производных с помощью разностных отношений назад и вперед. Подставляя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) \pm \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(x) + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z_{\pm}), \quad (3.8)$$

$$z_- \in [x-h, x], \quad z_+ \in [x, x+h],$$

для $n = 2$ в выражение для разностных отношений, получаем

$$\begin{aligned} f_{\bar{x}}(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{f(x) - [f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(z_1)]}{h} = \\ &= f'(x) - \frac{h}{2!} f^{(2)}(z_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(z_2)] - f(x)}{h} = \\
&= f'(x) + \frac{h}{2!}f^{(2)}(z_2).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
|f'(x) - f_{\bar{x}}(x)| &= \left| \frac{h}{2}f^{(2)}(z_1) \right| \leq \frac{M_2}{2}h, \\
|f'(x) - f_x(x)| &= \left| \frac{h}{2}f^{(2)}(z_2) \right| \leq \frac{M_2}{2}h,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(2)}(x)|$.

Выполнение этих оценок означает, что разностные отношения назад и вперед приближают (аппроксимируют) значение первой производной в точке x с первым порядком по h .

Рассмотрим еще одно разностное отношение, называемое центральной разностью

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{3.10}$$

Для него применяется обозначение $f_x(x)$. Заменяя в формуле (3.10) значения функции в точках $x-h$ и $x+h$ разложением в ряд Тейлора (3.8) для $n=3$, получаем

$$\begin{aligned}
f_x(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h} \left([f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(z_3)] - \right. \\
&\quad \left. - [f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(z_4)] \right) = f'(x) + \frac{h^2}{3!} \frac{[f^{(3)}(z_3) + f^{(3)}(z_4)]}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом центральная разность приближает (аппроксимирует) значение первой производной в точке со вторым порядком по h :

$$|f'(x) - f'_x(x)| = \left| \frac{h^2}{3!} \frac{[f^{(3)}(z_3) + f^{(3)}(z_4)]}{2} \right| \leq \frac{M_3}{6} h^2,$$

где $M_3 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(3)}(x)|$.

Введенные выше разностные отношения можно применить для аппроксимации производных большего порядка, чем первый. Поскольку вторая производная это производная от первой производной $f''(x) = (f')'(x)$, то, заменяя каждую из них разностным отношением назад или вперед, получаем приближение для $f''(x)$. Например,

$$f''(x) \approx (f_x)_{\bar{x}}(x)$$

или

$$f''(x) \approx (f_{\bar{x}})_x(x).$$

Исходя из определения $f_{\bar{x}}(x)$ и $f_x(x)$, имеем

$$(f_x)_{\bar{x}}(x) = \frac{f_x(x) - f_x(x-h)}{h} = \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right]$$

и

$$(f_{\bar{x}})_x(x) = \frac{f_{\bar{x}}(x+h) - f_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \right].$$

Следовательно, оба выражения равны

$$(f_x)_{\bar{x}}(x) = (f_{\bar{x}})_x(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad (3.11)$$

и поэтому обозначаются $f_{x\bar{x}}(x)$ или $f_{\bar{x}x}(x)$. Нетрудно проверить, подставляя в формулу (3.11) значения функции в точках $x-h$ и $x+h$ из их разложения в ряд Тейлора (3.8) для $n=4$, что вторая разность $f_{x\bar{x}}(x)$ приближает (аппроксимирует) значение второй производной в точке со вторым порядком по h :

$$|f''(x) - f_{x\bar{x}}(x)| \leq \frac{M_4}{12} h^2,$$

где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Аналогичным образом мы можем поступить при аппроксимации производных третьего, четвертого и так далее порядков. Например, четвертая производная $f^{(4)}(x)$ приближается со вторым порядком по h разностным отношением вида

$$\begin{aligned} f_{xxxx}(x) &= \frac{f_{xx}(x-h) - 2f_{xx}(x) + f_{xx}(x+h)}{h^2} = \\ &= \frac{f(x-2h) - 4f(x-h) + 6f(x) - 4f(x+h) + f(x+2h)}{h^4}. \end{aligned}$$

Это непосредственно проверяется таким же образом, как мы поступали раньше: разложением в ряд Тейлора значения функции в точках $x-2h$, $x-h$, $x+h$ и $x+2h$.

3.4. Неустойчивость формул численного дифференцирования

Под устойчивостью какого-либо алгоритма обычно понимается то, что при малом изменении входных данных мало изменяется и результат вычислений по этому алгоритму.

Примером неустойчивого алгоритма является вычисление производной. Действительно, возьмем какую-либо дифференцируемую функцию $f(x)$. При малом ε функция $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \sin(Nx)$ отличается от нее незначительно:

$$|f(x) - f_\varepsilon(x)| = |\varepsilon \sin(Nx)| \leq \varepsilon.$$

Но производная $f'(x)$ отличается от производной $f'_\varepsilon(x)$ на величину

$$|f'(x) - f'_\varepsilon(x)| = |f'(x) - f'(x) - \varepsilon \sin'(Nx)| = |\varepsilon N \cos(Nx)|,$$

которая стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, приходим к выводу, что при вычислении производной малым изменениям входных данных могут соответствовать огромные изменения результатов вычислений.

Исследуем формулы численного дифференцирования на устойчивость. Пусть для определенности значение $f'(x)$ вычисляется с помощью разности вперед:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Согласно формуле (3.9) оценка для погрешности вычисления производной имеет вид

$$|f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}| \leq \frac{M_2 h}{2}.$$

Если значения функции известны не точно, а с некоторыми погрешностями, то реально вместо значений $f(x)$ и $f(x+h)$ в алгоритме будут использоваться $f(x)+\varepsilon_1$ и $f(x+h)+\varepsilon_2$. Это приводит к тому, что погрешность вычисления производной будет содержать дополнительное слагаемое

$$\begin{aligned} & |f'(x) - \frac{(f(x+h) + \varepsilon_2) - (f(x) + \varepsilon_1)}{h}| = \\ & = |f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h}| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|}{h}. \end{aligned}$$

При $|\varepsilon_i| \leq E$ получаем оценку для общей погрешности

$$|f'(x) - \frac{(f(x+h) + \varepsilon_2) - (f(x) + \varepsilon_1)}{h}| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h}.$$

Для малости погрешности вычисления производной в оценке (3.9) необходима малость h . Но при уменьшении h в полученной выше оценке растёт второе слагаемое. Это и означает неустойчивость численного дифференцирования, поскольку даже малым возмущениям входных данных ε_i при $h \rightarrow 0$ могут соответствовать большие изменения результатов вычислений.

Найдем экстремумы функции $g(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h}$. Из уравнения $g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2E}{h^2} = 0$ (производная берется по переменной h) получаем одну точку экстремума h_0 , равную

$$h_0 = 2\sqrt{\frac{E}{M_2}}.$$

Так как $g^{(2)}(h) = \frac{4E}{h^3} > 0$, то h_0 есть точка минимума. Минимальное значение погрешности, следовательно, будет равно

$$g(h_0) = 2\sqrt{E M_2}.$$

Таким образом, ни при каком h мы не получим оценку для погрешности меньше, чем $2\sqrt{E M_2}$. Другими словами, применяя разность вперед, мы не можем гарантировать вычисление производной с точностью большей чем $2\sqrt{E M_2}$.

Конечно, мы исследовали не саму погрешность, а лишь ее оценку сверху $g(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h}$. Может показаться, что полученный результат слишком пессимистичен и в действительности мы можем надеяться на более качественные приближения. Однако даже самый простой пример показывает, что это далеко не так. Возьмем в качестве $f(x) = a_1 x + a_0$ линейную функцию. Для нее $f'(x) = f_x(x) = a_1$. Поэтому при наличии возмущений ϵ_i погрешность вычисления производной будет равна

$$\begin{aligned} f'(x) - \frac{(f(x+h) + \epsilon_2) - (f(x) + \epsilon_1)}{h} = \\ = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}. \end{aligned}$$

Ясно, что при $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ она стремится к бесконечности при $h \rightarrow 0$!

3.5. Упражнения

3.1. Показать, что в точке x , совпадающей с одним из узлов интерполяции x_i , $i = \overline{0, n}$, справедлива оценка погрешности для вычисления производной функции $f(x) \in C^{n+2}[a, b]$ по интерполяционному полиному $P_n(x)$:

$$|f'(x_i) - P'_n(x_i)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a,b]}}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |x_i - x_j|.$$

3.2. Методом неопределенных коэффициентов построить формулу численного дифференцирования

$$f'(0) \approx af(-2h) + bf(0) + cf(h),$$

точную для многочленов $Q_m(x)$ максимально высокой степени m .

3.3. Методом неопределенных коэффициентов построить формулу численного дифференцирования

$$f''(0) \approx af(-h) + bf(h) + cf(2h) + df(3h),$$

точную для многочленов $Q_m(x)$ максимально высокой степени m .

3.4. Пусть числа c_i , не зависящие от h , порождают формулу численного дифференцирования

$$f^{(k)}(0) \approx h^{-k} \sum_{i=-n}^n c_i f(ih),$$

точную для многочленов $Q_m(x)$ максимально высокой степени m . Доказать, что $c_i = c_{-i}$, если k четно и $c_i = -c_{-i}$, если k нечетно.

3.5. Доказать, что для численного дифференцирования произведения функций справедливо равенство

$$(fg)_x = (f)_x g + f(g)_x + h(f)_x(g)_x.$$

3.6. Доказать справедливость равенства

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{(f)_x g - f(g)_x}{g(g + h(g)_x)}.$$

3.7. Вычислить $f_{x\bar{x}\bar{x}}(x)$.

3.8. Какой порядок по h имеет погрешность вычисления $f'(0)$ по формуле

$$-\frac{1}{6h}f(-2h) - \frac{1}{2h}f(0) + \frac{2}{3h}f(h)?$$

3.9. При каких α и β выражение $\alpha u_x(x) + \beta u_{\bar{x}}(x)$ аппроксимирует (приближает) $u'(x)$ с наивысшим порядком точности по h ?

3.10. Пусть значения функции задаются с погрешностью. Получить оценки погрешности для формул численного дифференцирования $f_{x\bar{x}}$ и $f_{xx\bar{x}\bar{x}}$ (аппроксимирующих $f''(x)$ и $f^{(4)}(x)$ соответственно) как суммы погрешности метода и неустранимой погрешности. Найти оптимальный шаг h_0 , при котором минимизируется величина оценки полной погрешности.

4. Численные методы решения нелинейных уравнений

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется решить уравнение

$$f(x) = 0. \quad (4.1)$$

Любое решение $x^* \in [a, b]$ этого уравнения будем называть корнем (нулем) функции $f(x)$. Отметим, что каких-либо общих правил анализа расположения корней произвольной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не существует.

Определение 4.1. Корень x^* функции $f(x)$ будем называть изолированным корнем кратности $p > 0$, если для $f(x)$ справедливо представление

$$f(x) = (x - x^*)^p g(x),$$

а функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и знакоопределена в некоторой окрестности $I_\varepsilon(x^*) = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \cap [a, b]$, $\varepsilon > 0$ точки x^* . \square

Очевидно, что, найдя один изолированный корень x^* функции $f(x)$ и определив его кратность p , следующий корень мы можем искать как корень функции $g(x) = \frac{f(x)}{(x - x^*)^p}$.

Построить явные формулы, определяющие корни непрерывной функции, удается крайне редко. Поэтому основными методами решения задачи (4.1) являются итерационные процессы, позволяющие получить ее решение с любой точностью.

Обычно приближенное нахождение изолированных *действительных* корней уравнения (4.1) складывается из двух этапов:

1) *отделение корней (локализация)*, т.е. установление по возможности малых интервалов отрезка $[a, b]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (4.1);

2) *уточнение приближенных корней*, т.е. доведение их до заданной степени точности.

4.1. Отделение корней

Для отделения корней, как правило, применяют графический или табличный методы. Последний базируется на известной теореме из математического анализа

Теорема 4.1. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по крайней мере один корень x^* уравнения $f(x) = 0$. \square

Замечание 4.1. Если производная $f'(x)$ существует и сохраняет знак внутри интервала $[a, b]$, ($f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при $a < x < b$), то корень x^* заведомо будет единственным. \square

Действительно, в этом случае функция $f(x)$ либо строго возрастает (при $f'(x) > 0$), либо строго убывает (при $f'(x) < 0$). В обоих случаях она может принять нулевое значение не более одного раза.

Процесс отделения корней уравнения (4.1) начинают с установления знаков функции $f(x)$ в концах интервала $[a, b]$. Затем определяются знаки функции $f(x)$ в ряде промежуточных точек a_1, a_2, \dots, a_n . При выборе этих точек стараются, по возможности, учесть особенности функции $f(x)$. Если окажется, что

$$f(a_k)f(a_{k+1}) < 0,$$

то в силу теоремы 4.1 в интервале (a_k, a_{k+1}) имеется корень x^* уравнения $f(x) = 0$.

Отметим, что корни четной кратности таким алгоритмом отделить не удастся. Например, функция $f(x) = x^2$ имеет корень $x = 0$ (кратности два). Однако очевидно, что отделить его описанным выше способом нельзя, поскольку для любого x функция $f(x) \geq 0$.

После локализации нужно тем или иным способом убедиться, является ли этот корень единственным и установить его кратность.

В заключение этого раздела дадим две довольно общие, но в ряде случаев полезные оценки погрешности приближения \bar{x} к корню x^* функции $f(x)$.

Пусть известно, что внутри интервала $[a, b]$ имеется корень x^* уравнения (4.1) и посредством применения какой-либо процедуры к нему построено приближение \bar{x} , также принадлежащее $[a, b]$. Тогда очевидно, что расстояние между ними меньше длины этого интервала:

$$|\bar{x} - x^*| \leq b - a. \quad (4.2)$$

Вторую оценку погрешности приближенного корня дает

Теорема 4.2. Пусть x^* — точный и \bar{x} — приближенный корни уравнения $f(x) = 0$ принадлежат отрезку $[a, b]$. Пусть, кроме того, $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Тогда справедливо неравенство

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора (3.8) для значения $n = 1$, имеем

$$f(\bar{x}) - f(x^*) = f'(z)(\bar{x} - x^*),$$

где точка z расположена между \bar{x} и x^* , а значит $z \in [a, b]$. Отсюда, так как $f(x^*) = 0$ и $|f'(z)| \geq m_1$, получаем

$$|f(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - f(x^*)| = |f'(z)||\bar{x} - x^*| \geq m_1|\bar{x} - x^*|.$$

Следовательно,

$$|\bar{x} - x^*| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

□

Для отделения корней, а также для их приближенного вычисления может быть применен метод деления пополам. Метод деления пополам по сравнению с другими методами сходится довольно медленно. Однако он очень прост в применении, что делает его весьма привлекательным.

4.2. Метод деления пополам (бисекций)

Пусть дано уравнение (4.1), в котором функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$.

Для нахождения корня уравнения (4.1), принадлежащего отрезку $[a, b]$, делим этот отрезок пополам. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то $x^* = \frac{a+b}{2}$ является корнем. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то выбираем ту из половин $[a, \frac{a+b}{2}]$ или $[\frac{a+b}{2}, b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Новый суженный отрезок обозначим $[a_1, b_1]$. Его снова делим пополам и проводим то же рассуждение и т. д. В результате получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (4.1), или последовательность вложенных друг в друга отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что

$$f(a_n)f(b_n) < 0, \quad n = 1, 2, \dots, n, \dots, \quad (4.3)$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \quad (4.4)$$

Очевидно, что левые концы $\{a_n\}$ образуют монотонную неубывающую, а правые концы $\{b_n\}$ — монотонную невозрастающую ограниченные последовательности. Поэтому каждая из этих последовательностей имеет предел, а из равенства (4.4) следует, что

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \frac{1}{2^n}(b-a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Переходя в формуле (4.3) к пределу при $n \rightarrow \infty$, в силу непрерывности функции $f(x)$ ($f(a_n) \rightarrow f(x^*)$ и $f(b_n) \rightarrow f(x^*)$ при $n \rightarrow \infty$) получаем $[f(x^*)]^2 \leq 0$. Отсюда $f(x^*) = 0$, т. е. x^* является корнем.

В качестве приближений к корню x^* уравнения (4.1) следует выбирать середины $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ интервалов $[a_n, b_n]$. Так как x_n и x^* принадлежат $[a_n, b_n]$, то для них справедлива оценка (4.2), позволяющая оценить точность получаемых приближений:

$$|x_n - x^*| \leq b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \quad (4.5)$$

Далее мы изучим два итерационных метода, наиболее употребимых при решении нелинейных уравнений: метод последовательных приближений и метод Ньютона. Основой этих методов является принцип сжимающих отображений.

4.3. Принцип сжимающих отображений

Пусть M – метрическое пространство. Это означает, что между любыми двумя его элементами x и y определено расстояние (метрика). Иначе говоря, на M задана функция $\rho(x, y) : M \times M \rightarrow R$, удовлетворяющая трем аксиомам:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$ причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in M$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in M$ — неравенство треугольника.

Определение 4.2. Последовательность элементов x_n , $n = 0, 1, \dots$, метрического пространства M называется фундаментальной по Коши, если $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. \square

Определение 4.3. Метрическое пространство M называется полным, если оно содержит пределы всех своих фундаментальных последовательностей, т.е. если последовательность $x_n \in M$, $n = 0, 1, \dots$, фундаментальна, то существует элемент x , *принадлежащий* M , такой, что

$$x_n \rightarrow x \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (\rho(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty).$$

\square

Определение 4.4. Отображение $\varphi : M \rightarrow M$ называется сжимающим, если существует положительное число $q < 1$ такое, что

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q \cdot \rho(x, y) \tag{4.6}$$

для любых элементов x и y из M . \square

Определение 4.5. Элемент $x \in M$ называется неподвижной точкой отображения φ из M в M , если $x = \varphi(x)$. \square

Теорема 4.3 (принцип сжимающих отображений).

1. Любое сжимающее отображение $\varphi(x)$ из M в M , где M — полное метрическое пространство, имеет одну и только одну неподвижную точку $x^* \in M$:

$$x^* = \varphi(x^*). \quad (4.7)$$

2. Последовательность (метод последовательных приближений или простой итерации)

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in M, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.8)$$

при любом начальном приближении x_0 сходится к этой точке и имеет место оценка

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - q} q^n. \quad (4.9)$$

\square

Доказательство. Докажем сначала, что последовательность x_n из формулы (4.8) имеет предел.

Из определений последовательности x_n , $n = 0, 1, \dots$, и сжимающего отображения получаем

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+m}, x_n) &= \rho(\varphi(x_{n+m-1}), \varphi(x_{n-1})) \leq q \cdot \rho(x_{n+m-1}, x_{n-1}) = \\ &= q \cdot \rho(\varphi(x_{n+m-2}), \varphi(x_{n-2})) \leq q^2 \cdot \rho(x_{n+m-2}, x_{n-2}) \leq \dots \leq q^n \cdot \rho(x_m, x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых n и m имеем

$$\rho(x_{n+m}, x_n) \leq q^n \cdot \rho(x_m, x_0). \quad (4.10)$$

Оценим правую часть этого неравенства. Из неравенства треугольника ($x = x_n$, $y = x_0$, $z = x_{m-1}$) следует, что

$$\rho(x_m, x_0) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_0).$$

Применяя для оценки первого слагаемого правой части формулу (4.10) с $n = m - 1$ и $m = 1$, получаем рекуррентное соотношение

$$\rho(x_m, x_0) \leq q^{m-1} \rho(x_1, x_0) + \rho(x_{m-1}, x_0),$$

из которого вытекает

$$\rho(x_m, x_0) \leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q + 1) \rho(x_1, x_0).$$

Но для $q < 1$ верно $q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q + 1 < \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,
поэтому

$$\rho(x_m, x_0) < \frac{\rho(x_1, x_0)}{1-q}$$

и, значит, из неравенства (4.10) имеем

$$\rho(x_{n+m}, x_n) < \frac{\rho(x_1, x_0)}{1-q} q^n. \quad (4.11)$$

Так как $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($q < 1$), то из неравенства (4.11) следует фундаментальность последовательности (4.8). Из полноты метрического пространства M следует ее сходимость к некоторому элементу $x^* \in M$: $\rho(x^*, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Легко показать, что для сжимающего отображения $\varphi(x)$ этот предел является неподвижной точкой $x^* = \varphi(x^*)$.

Очевидно, что сжимающее отображение является непрерывным. Действительно, поскольку для него $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q \rho(x, y)$, то из $y \rightarrow x$ ($\rho(x, y) \rightarrow 0$) следует $\varphi(y) \rightarrow \varphi(x)$ ($\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \rightarrow 0$), что и означает непрерывность $\varphi(x)$. Таким образом, при $x_n \rightarrow x_*$ имеем $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x_*)$. Переходя в равенстве (4.8) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (4.7).

Переходя теперь к пределу при $m \rightarrow \infty$ в неравенстве (4.11), получаем оценку сходимости (4.9).

Наконец, единственность неподвижной точки устанавливается элементарно. Пусть $x^* = \varphi(x^*)$ и $x^{**} = \varphi(x^{**})$ — два решения уравнения (4.7). Тогда

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(\varphi(x^*), \varphi(x^{**})) \leq q \rho(x^*, x^{**})$$

и, так как $q < 1$, то $x^* = x^{**}$. □

4.4. Метод последовательных приближений (простой итерации)

Вернемся к уравнению (4.1)

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — функция непрерывная на отрезке $[a, b]$. Для того чтобы применить полученные в предыдущем разделе результаты, преобразуем его к эквивалентному уравнению вида

$$x = \varphi(x). \quad (4.12)$$

В каждом конкретном случае способы такого преобразования могут быть различны. А значит различны будут и свойства функции $\varphi(x)$. Если для нахождения x^* решения (4.12) планируется применение метода простой итерации (4.8), то, чем более "сжимающим" будет отображение $\varphi(x)$, тем быстрее x_n будет сходиться к x^* . Таким образом, при сведении уравнения (4.1) к виду (4.12) надо стремиться к тому, чтобы положительное число $q < 1$ в (4.6) было как можно меньше.

Один из универсальных способов преобразования уравнения (4.1) к виду (4.12), не требующий знания конкретного вида функции $f(x)$, заключается в следующем. Умножаем равенство (4.1) на непрерывную, знакоопределенную на отрезке $[a, b]$ функцию $\tau(x)$, прибавляем к каждой из частей равенства по x и переносим $\tau(x)f(x)$ в правую часть:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \tau(x)f(x) = 0 \Rightarrow x + \tau(x)f(x) = x \Rightarrow x = x - \tau(x)f(x).$$

Полагая в последнем равенстве $\varphi(x) = x - \tau(x)f(x)$, приходим к уравнению (4.12).

В дальнейшем мы будем считать, что переход от уравнения (4.1) к уравнению (4.12) уже реализован тем или иным способом, например описанным выше. Нас будет интересовать вопрос: какими свойствами должна обладать функция $\varphi(x)$, для того чтобы решение уравнения (4.12) существовало и его можно было бы найти методом простой итерации (4.8):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots? \quad (4.13)$$

Ответ на этот вопрос основан на применении теоремы 4.3. Фактически дело сводится к проверке условий этой весьма общей теоремы в конкретном, рассматриваемом нами, случае.

Теорема 4.4. Если функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна по Липшицу:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad q < 1, \quad (4.14)$$

и преобразует интервал $[a, b]$ в $[a, b]$, т. е.

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \quad \forall x \in [a, b], \quad (4.15)$$

то:

- 1) уравнение (4.12) имеет единственное на $[a, b]$ решение x^* ;
- 2) последовательность $\{x_n\}$ метода простой итерации (4.13) при любом начальном приближении $x_0 \in [a, b]$ сходится к x^* ;
- 3) имеет место оценка

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - q} q^n; \quad (4.16)$$

- 4) кратность корня x^* функции $f(x) = x - \varphi(x)$ равна единице.

□

Доказательство. Определим пространство $M = [a, b]$ с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$. Очевидно, что так введенное метрическое пространство M полно. Из условий (4.14) и (4.15) следует, что $\varphi(x)$ — сжимающее отображение из M в M и, значит, утверждения 1–3 этой теоремы являются прямым следствием теоремы 4.3.

Докажем последнее утверждение. Используя неравенство треугольника, непрерывность по Липшицу функции $\varphi(x)$ и то, что x^* — корень ($x^* = \varphi(x^*)$) уравнения (4.12), получаем неравенства, справедливые для всех $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} |x - x^*| - |f(x)| &\leq |x - x^* - f(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq q|x - x^*|, \\ |f(x)| - |x - x^*| &\leq |f(x) - (x - x^*)| = |-\varphi(x) + \varphi(x^*)| \leq q|x - x^*|. \end{aligned}$$

Из них с помощью элементарных преобразований следует, что

$$0 < (1 - q) \leq \frac{|f(x)|}{|x - x^*|} \leq (1 + q).$$

Последнее означает, что в определении 4.1 кратности корня $p = 1$, а для функции $g(x)$ выполнено $0 < (1 - q) \leq |g(x)| \leq (1 + q)$. Поэтому функция $g(x)$ знакоопределена в некоторой окрестности $I_\varepsilon(x^*) = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon] \cap [a, b]$, $\varepsilon > 0$ точки x^* . Таким образом, кратность корня x^* функции $f(x) = x - \varphi(x)$ равна единице. \square

Проверка условий теоремы 4.4 для конкретных функций $\varphi(x)$ может вызвать определенные затруднения.

Условие (4.14) для непрерывно дифференцируемой функции означает ограниченность на интервале $[a, b]$ модуля ее первой производной постоянной Липшица $q < 1$. Действительно, применяя формулу Тейлора (3.8) для $n = 1$ и любых двух точек x и y из интервала $[a, b]$, имеем

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(z)(x - y),$$

где точка z расположена между x и y , а значит $z \in [a, b]$. Поэтому ограниченность модуля первой производной

$$|\varphi'(z)| \leq q < 1, \quad \forall z \in [a, b]$$

гарантирует выполнение оценки

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(z)||x - y| \leq q|x - y|,$$

т. е. условия (4.14). Таким образом, проверка (4.14) сводится к поиску максимума $\varphi'(z)$ при $z \in [a, b]$.

Проверка же условия (4.15) заключается в поиске (или оценке) экстремальных значений самой функции на отрезке $[a, b]$.

Как известно, точки экстремума функции есть корни ее производной. Таким образом, в рассматриваемом нами случае необходимо найти корни уравнений

$$\varphi'(x) = 0, \quad \varphi''(x) = 0,$$

что может оказаться более сложной задачей по сравнению с решением самого уравнения (4.12).

Если константа Липшица $q < 1$ известна, то при достаточно удачном выборе начального приближения x_0 метода простой итерации удастся избавиться от проверки условия (4.15).

Теорема 4.5. Пусть функция $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна по Липшицу:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q|x - y|, \quad q < 1$$

и известно $x_0 \in [a, b]$ такое, что

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b] \quad \text{для} \quad \delta = \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{1 - q}. \quad (4.17)$$

Тогда уравнение $x = \varphi(x)$ имеет в $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ единственное решение x^* , к которому сходится последовательность $\{x_n\}$ метода простой итерации

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

и имеет место оценка

$$|x^* - x_n| \leq \delta q^n.$$

Доказательство. Покажем, что функция $\varphi(x)$ отображает отрезок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ в себя.

Для любого $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ выполнено $|x - x_0| \leq \delta$. Применяя неравенство треугольника и используя условия теоремы: непрерывность по Липшицу функции $\varphi(x)$ и определение величины δ в (4.17), — получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - x_0| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - x_0| \leq \\ &\leq q|x - x_0| + (1 - q)\delta \leq q\delta + (1 - q)\delta = \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняются все условия теоремы 4.4 на интервале $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, откуда следует существование единственного корня x^* уравнения $x = \varphi(x)$ и сходимость метода простой итерации. Оценка скорости сходимости следует из формул (4.16) и (4.17), учитывая, что, по определению метода простой итерации, $x_1 = \varphi(x_0)$. \square

Для иллюстрации метода простой итерации рассмотрим следующий

Пример. Пусть требуется решить уравнение

$$f(x) = x^2 - a = 0$$

на интервале $[1, a]$ при $a > 1$.

Перепишем его в эквивалентной форме

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{x^2 - a}{1 + a}.$$

Проверим для $\varphi(x)$ выполнение условий теоремы 4.4.

Так как $\varphi(x) = \frac{x + x(a - x) + a}{1 + a}$ и для $1 \leq x \leq a$ справедливо

$$1 = \frac{1 + 1(a - a) + a}{1 + a} \leq \frac{x + x(a - x) + a}{1 + a} \leq \frac{a + a(a - 1) + a}{1 + a} = a,$$

то для $\varphi(x)$ выполнено (4.15): $1 \leq \varphi(x) \leq a$.

Легко получить, что $\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{x - y}{1 + a}(1 + a - x - y)$. Учитывая, что для $1 \leq x \leq a$ и $1 \leq y \leq a$ справедливо

$$-(a - 1) = 1 + a - a - a \leq 1 + a - x - y \leq 1 + a - 1 - 1 = a - 1,$$

получаем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{a - 1}{1 + a}|x - y|,$$

т. е. условие (4.14) с $q = \frac{a - 1}{1 + a} < 1$.

Таким образом выполняются все условия теоремы 4.4. Поэтому последовательность метода простой итерации

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{1 + a}$$

сходится к квадратному корню из числа a при любом начальном приближении $x_0 \in [1, a]$.

Для погрешности $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$, вычитая из каждой части предыдущего равенства по \sqrt{a} и считая $x_n \approx \sqrt{a}$, легко получить следующее представление:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{x_n^2 - a}{1 + a} = \left(1 - \frac{x_n + \sqrt{a}}{1 + a}\right) \varepsilon_n \approx \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{1 + a}\right) \varepsilon_n.$$

Заметим, что сходимость (ее скорость) называют линейной, если погрешность очередного приближения пропорциональна (конечно с коэффициентом меньшим единицы) погрешности на предыдущей итерации. Следовательно, в нашем примере скорость сходимости линейна.

4.5. Метод Эйткена ускорения сходимости

Предположим, что $x^* \in [a, b]$ – решение уравнения

$$x^* = \varphi(x^*), \quad (4.18)$$

к которому сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.19)$$

Пусть $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция и $\varphi'(x^*) = d \neq 1$. Применим формулу Тейлора (3.8) для точек x_n и x^* :

$$\varphi(x_n) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{\varphi''(\xi_n)}{2}(x_n - x^*)^2,$$

где точка ξ_n расположена между x_n и x^* . Заменяя $\varphi'(x^*)$ на d , из формул (4.18) и (4.19) имеем

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= d(x_n - x^*) + \delta_n, \\ x_{n+2} - x^* &= d(x_{n+1} - x^*) + \delta_{n+1}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\delta_n = O(|x_n - x^*|^2)$ и $\delta_{n+1} = O(|x_{n+1} - x^*|^2)$.

Разрешая эту систему относительно неизвестных x^* и d , получаем (упражнение)

$$\begin{aligned} x^* &= x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n} + \\ &+ \delta_{n+1} \frac{\Delta x_n}{\Delta \delta_n - \Delta^2 x_n} + \Delta \delta_n \Delta x_{n+1} \frac{\Delta x_n}{\Delta^2 x_n - \Delta \delta_n}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1}, \quad \Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n,$$

$$\Delta \delta_n = \delta_{n+1} - \delta_n.$$

Вычитая в формулах (4.20) из второго уравнения первое и применяя введенные выше обозначения, получаем

$$\Delta x_{n+1} = d\Delta x_n + \Delta \delta_n.$$

Отнимая от каждой части этого равенства по Δx_n , приходим к

$$\Delta^2 x_n = (d-1)\Delta x_n + \Delta \delta_n,$$

из чего находим

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta^2 x_n - \Delta \delta_n} = (d-1)^{-1}.$$

Теперь, учитывая, что δ_{n+1} и δ_n имеют порядок $O(|x_n - x^*|^2)$, равенство (4.21) можно трактовать следующим образом:

$$\text{величина} \quad \tilde{x}_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n} \quad (4.22)$$

отличается от x^* на величину $O(|x_n - x^*|^2)$, т.е. пропорциональна квадрату погрешности на n -м шаге итерационного процесса. В таких случаях говорят, что имеет место квадратичная скорость сходимости.

Формула (4.22) построения по трем последовательным приближениям x_n , x_{n+1} и x_{n+2} значительно (на порядок) более близкого к x^* приближения \tilde{x}_{n+2} называется методом Эйткена ускорения простой итерации.

Метод Эйткена позволяет предположить возможность построения для решения уравнения

$$f(x) = 0$$

итерационных процессов с квадратичной скоростью сходимости. К рассмотрению одного из них мы и переходим.

4.6. Метод Ньютона

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ и требуется решить уравнение

$$f(x) = 0. \quad (4.1)$$

Знаменитый метод Ньютона является одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных уравнений. Его расчетную формулу можно получить различными способами. Здесь мы применим подход, использующий специальную линеаризацию решаемой задачи. Сам метод линеаризации, позволяющий свести решение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач, имеет настолько общий характер, что применяется при решении самых разных практических задач.

Итак, пусть построено приближение x_n к корню x^* уравнения (4.1). Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_n в виде ряда Тейлора (3.8):

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(z)}{2}(x - x_n)^2. \quad (4.23)$$

Здесь z — некоторая точка, расположенная между x и x_n . Заменяя в уравнении $f(x) = 0$ функцию $f(x)$ главной линейной частью разложения (4.23), получаем линейное уравнение

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

Принимая его решение за новое приближение x_{n+1} к решению x^* уравнения $f(x) = 0$, приходим к расчетной формуле метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.24)$$

Заметим, что уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_n, f(x_n))$, имеет вид

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Полагая в этом равенстве $y = 0$, находим точку пересечения касательной с осью Ox , значение которой в точности совпадает с x_{n+1} , вычисляемым по формуле (4.24). Благодаря такой геометрической интерпретации метод Ньютона часто называют методом касательных.

Теорема 4.6. Пусть функция $f(x) \in C^2[a, b]$ и:

- 1) $f(a)f(b) < 0$;
- 2) $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют знаки при $a \leq x \leq b$;
- 3) начальное приближение $x_0 \in [a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$f(x_0)f''(x_0) > 0. \quad (4.25)$$

Тогда уравнение (4.1) имеет единственный корень и последовательность x_n метода Ньютона (4.24) сходится **монотонно** к этому корню. \square

Доказательство. В силу условий 1–2, существование корня x^* следует из теоремы 4.1, а его единственность — из замечания 4.1 к этой теореме.

Доказательство сходимости метода Ньютона проведем для случая

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad \text{а } f'(x) > 0 \text{ и } f''(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

В выбранном нами случае, согласно неравенству (4.25), имеем $f(x_0) > 0$. Например, в качестве x_0 можно взять $x_0 = b$. Далее мы методом математической индукции докажем, что все приближения x_n больше корня x^* уравнения (4.1).

Заметим, что из $x_n > x^*$ следует $f(x_n) > 0$. Действительно, поскольку у нас $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, то непрерывная функция $f(x)$ является строго возрастающей. Следовательно, после принятого в x^* нулевого значения она при всех x больших x^* должна быть больше нуля.

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что из $f(x_0) > 0$ следует $x_0 > x^*$. Поэтому для $n = 0$ доказываемое утверждение справедливо.

Пусть выполнено $x_n > x^*$. Докажем, что из этого следует $x_{n+1} > x^*$.

Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_n в виде ряда Тейлора (3.8):

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(z_n)}{2}(x^* - x_n)^2, \quad (4.26)$$

где $x^* < z_n < x_n$. Так как $f''(x) > 0$, то из формулы (4.26) имеем

$$f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) < 0$$

и, следовательно,

$$x^* < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (4.24), учитывая $f(x_n) > 0$ и $f'(x_n) > 0$, получаем, что $x_{n+1} < x_n$. Таким образом, $\{x_n\}$ образует ограниченную монотонно убывающую последовательность. Следовательно, она имеет предел $\bar{x}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в процессе (4.24) при $n \rightarrow \infty$ (учитывая непрерывность $f(x)$ и $f'(x)$), получаем

$$\bar{x}^* = \bar{x}^* - \frac{f(\bar{x}^*)}{f'(\bar{x}^*)},$$

т. е. $f(\bar{x}^*) = 0$. Отсюда $\bar{x}^* = x^*$, что и требовалось доказать. \square

Для оценки погрешности n -го приближения x_n можно воспользоваться формулой, полученной в теореме 4.2:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (4.27)$$

где m_1 — наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Выведем еще одну формулу для оценки точности приближений, получаемых с помощью метода Ньютона.

Представим функцию $f(x)$ в окрестности x_{n-1} в виде ряда Тейлора (3.8):

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(z_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \quad (4.28)$$

где $z_{n-1} \in [x_{n-1}, x_n]$. Но, в силу определения x_n (формула (4.24)),

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0.$$

Таким образом, из равенства (4.28) находим

$$|f(x_n)| = \frac{|f''(z_{n-1})|}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$. Наконец, на основании формулы (4.27) получаем следующую оценку погрешности n -го приближения:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Ее можно использовать в качестве критерия окончания итераций.

Установим формулу, связывающую абсолютные погрешности двух последовательных приближений x_n и x_{n+1} .

Из формулы (4.26) имеем

$$x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2, \quad x^* < z_n < x_n.$$

Отсюда, учитывая формулу (4.24), получаем

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{f''(z_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2,$$

и, следовательно,

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x^* - x_n)^2. \quad (4.29)$$

Формула (4.29) гарантирует квадратичную скорость сходимости метода Ньютона, если начальное приближение x_0 таково, что выполняются неравенства

$$\frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0| \leq q < 1.$$

В частности, если

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leq 1 \quad \text{и} \quad |x^* - x_n| \leq 10^{-m},$$

то из неравенства (4.29) получаем

$$|x^* - x_{n+1}| \leq 10^{-2m}.$$

Если приближение x_n имело m верных десятичных знаков после запятой, то следующее приближение x_{n+1} будет иметь по меньшей мере $2m$ верных десятичных знаков. Иными словами, если $\mu \leq 1$, то в вычисляемых с помощью метода Ньютона приближениях x_n число верных знаков после запятой удваивается на каждом шаге.

4.7. Метод Ньютона с параметром

До настоящего времени нами не учитывалась кратность корня. Пусть теперь $x^* \in [a, b]$ – изолированный корень кратности $p > 0$ непрерывной функции $f(x)$. Тогда, по определению 4.1, для нее имеем

$$f(x) = (x - x^*)^p g(x),$$

где функция $g(x)$ знакоопределена в некоторой окрестности корня. Пусть, кроме того, $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Очевидно, что метод Ньютона (4.24) можно трактовать и как метод последовательных приближений

$$x_{n+1} = \varphi(x_n),$$

применяемый для решения уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (4.30)$$

эквивалентного исходному уравнению (4.1).

Непосредственная проверка показывает, что при сделанных относительно функции $f(x)$ предположениях справедливо соотношение

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{p-1}{p}x + \frac{x^*}{p} + \frac{g'(x)(x-x^*)^2}{p(pg(x) + g'(x)(x-x^*))}.$$

Отсюда следует представление для производной

$$\varphi'(x) = \frac{p-1}{p} + O(|x-x^*|), \quad (4.31)$$

и, значит, приближения $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ метода Ньютона (4.24) к корню $x^* = \varphi(x^*)$ функции $f(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(z_n)(x_n - x^*) = \\ &= \frac{p-1}{p}(x_n - x^*) + O(|x_n - x^*|^2), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где точка z_n лежит между x_n и x^* .

Опираясь на формулу (4.32) можно получить приближенные равенства

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &\approx \frac{p-1}{p}(x_n - x^*), \\ x_{n+2} - x^* &\approx \frac{p-1}{p}(x_{n+1} - x^*). \end{aligned}$$

Вычитая из первого второе, приходим к

$$x_{n+1} - x_{n+2} \approx \frac{p-1}{p}(x_n - x_{n+1}),$$

а выражая p , получаем формулу

$$p \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{2x_{n+1} - x_{n+2} - x_n},$$

позволяющую приближенно определить кратность корня в тех случаях, когда точно она неизвестна.

Из равенства (4.32) и проделанных выкладок можно сделать следующие предположения:

1) если $p \leq 0.5$, то метод Ньютона не сходится, так как в этом случае

$$\left| \frac{p-1}{p} \right| = \frac{1-p}{p} \geq \frac{1-0.5}{0.5} = 1;$$

2) если $p > 0.5$ (что эквивалентно $\left| \frac{p-1}{p} \right| < 1$), то метод Ньютона сходится и $p \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{2x_{n+1} - x_{n+2} - x_n}$;

3) при $p = 1$ скорость сходимости метода Ньютона квадратичная, а при $p \neq 1$ — линейная.

Из п. 3 мы видим, что квадратичная скорость сходимости метода Ньютона, доказанная нами для простого корня (4.29), теряется в случае кратных корней. Чтобы устранить этот недостаток метода, определим его модификацию — метод Ньютона с параметром. Рассмотрим два случая.

Случай первый — кратность p искомого корня нам известна.

В этом случае метод Ньютона с параметром имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.33)$$

и его можно трактовать как метод последовательных приближений решения уравнения

$$x = \psi(x) \equiv x - p \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Учитывая формулы (4.30), (4.31), имеем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (1-p)x + p\varphi(x), \\ \psi'(x) &= (1-p) + p \left[\frac{p-1}{p} + O(|x - x^*|) \right] = O(|x - x^*|). \end{aligned}$$

Следовательно, приближения $x_{n+1} = \psi(x_n)$ метода Ньютона с параметром к корню $x^* = \psi(x^*)$ функции $f(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \psi(x_n) - \psi(x^*) = \psi'(z_n)(x_n - x^*) = \\ &= O(|x_n - x^*|)(x_n - x^*) = O(|x_n - x^*|^2), \end{aligned}$$

где точка z_n лежит между x_n и x^* .

Последнее равенство говорит о том, что метод Ньютона с параметром (4.33) сходится при любой положительной кратности p корня функции $f(x)$ и скорость его сходимости квадратичная. \square

Случай второй — кратность p искомого корня мы не знаем.

Разрешая уравнение (4.31) относительно p , получаем

$$p = \frac{1}{1 - \varphi'(x)} + O(|x - x^*|).$$

Подставляя в формулу (4.33) вместо p первое слагаемое из правой части полученного равенства, приходим к итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 - \varphi'(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 \in [a, b], \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.34)$$

Очевидно, процесс (4.34) является методом простой итерации для уравнения

$$x = \eta(x) \equiv x - \frac{1}{1 - \varphi'(x)} \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\eta(x) = \frac{x - x \varphi'(x) - \frac{f(x)}{f'(x)}}{1 - \varphi'(x)} = \frac{\varphi(x) - x \varphi'(x)}{1 - \varphi'(x)}.$$

Но тогда, дифференцируя $\eta(x)$, получаем

$$\eta'(x) = \frac{-\varphi''(x)[x - \varphi(x)]}{[1 - \varphi'(x)]^2}.$$

Поскольку x^* — корень уравнения (4.30), то в числителе этого равенства квадратная скобка равна нулю при $x = x^*$, т. е. $\eta'(x^*) = 0$. Учитывая это, получаем, что в окрестности точки x^* справедливо представление (ряд Тейлора для $\eta'(z)$)

$$\eta'(z) = \eta'(x^*) + \eta''(z_1)(z - x^*) = \eta''(z_1)(z - x^*) = O(|z - x^*|),$$

где точка z_1 лежит между z и x^* .

Суммируя проведенные для второго случая рассуждения, получаем, что приближения $x_{n+1} = \eta(x_n)$ метода Ньютона с параметром (4.34) к корню $x^* = \eta(x^*)$ функции $f(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \eta(x_n) - \eta(x^*) = \eta'(z_n)(x_n - x^*) = \\ &= O(|x_n - x^*|)(x_n - x^*) = O(|x_n - x^*|^2), \end{aligned}$$

где точка z_n лежит между x_n и x^* . Но это и означает квадратичную скорость сходимости (4.34) при достаточно близком к корню x^* приближении x_0 , \square

В качестве иллюстрации эффективности метода Ньютона с параметром рассмотрим простейший

Пример. Пусть необходимо на интервале $[0, 1]$ найти корень уравнения

$$f(x) \equiv x^p = 0, \quad p > 0.$$

Очевидно, что $x^* = 0$ – корень кратности p функции $f(x)$.

Метод Ньютона (4.24) в этом случае выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^p}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n.$$

При $p \leq 0.5$ он не сходится. При остальных $p \neq 1$, учитывая, что $x^* = 0$, имеем

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{p-1}{p} (x_n - x^*),$$

т. е. скорость его сходимости линейна.

Применив метод Ньютона с параметром (4.33), получим

$$x_{n+1} = x_n - p \frac{x_n^p}{p x_n^{p-1}} = x_n - x_n = 0.$$

Иными словами, для нашего примера этот метод дает решение за одну итерацию при любом $p > 0$.

4.8. Интерполяционные методы

Идея интерполяционных методов состоит в том, что задача нахождения корней уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

заменяется задачей нахождения корней интерполяционного полинома $P_n(x)$, построенного для $f(x)$.

Рассмотрим случай, когда для $f(x)$ строится интерполяционный полином первого порядка $P_1(x)$ — интерполяционный метод первого порядка. Пусть известны приближения x_{n-1} и x_n к корню x^* уравнения (4.1). Выбрав в качестве узлов интерполяции x_n и x_{n-1} , построим для $f(x)$ интерполяционный полином в форме Ньютона:

$$P_1(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n). \quad (4.35)$$

Заменяя в уравнении (4.1) функцию $f(x)$ интерполяционным полиномом $P_1(x)$ из (4.35), получаем линейное уравнение

$$f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) = 0.$$

Принимая его решение за новое приближение x_{n+1} , приходим к интерполяционному методу первого порядка:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n, x_{n-1})}.$$

Подставляя сюда в соответствии с определением 1.2 выражение для разделенной разности первого порядка функции $f(x)$, окончательно получаем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \quad (4.36)$$

Геометрическая интерпретация рассмотренного метода состоит в следующем. Через точки $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$ проводится прямая — хорда графика функции $y = f(x)$. Ее уравнение имеет вид

$$y = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n).$$

Полагая в этом равенстве $y = 0$, находим точку пересечения хорды с осью Ox , значение которой в точности совпадает с x_{n+1} , вычисляемым по формуле (4.36). Благодаря такой геометрической интерпретации интерполяционный метод первого порядка называют методом хорд.

Получим формулы интерполяционного метода второго порядка.

Пусть известны приближения x_{n-2} , x_{n-1} и x_n к корню x^* уравнения (4.1). Выбрав в качестве узлов интерполяции x_n , x_{n-1} и x_{n-2} построим для $f(x)$ интерполяционный полином второго порядка в форме Ньютона:

$$P_2(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}).$$

Следуя идее построения интерполяционных методов, для нахождения нового приближения x_{n+1} рассмотрим квадратное уравнение

$$f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) = 0.$$

Решая его, получим два, может быть, комплексных корня $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$. В качестве следующего приближения x_{n+1} выбирается то из значений $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, которое ближе к x_n .

Интерполяционный метод второго порядка удобен тем, что позволяет получить комплексные корни уравнения (4.1), пользуясь вещественными начальными приближениями x_0 , x_1 , x_2 .

Заметим также, что процесс нахождения нового приближения x_{n+1} заключается в нахождении точек пересечения параболы $P_2(x)$, проходящей через точки $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$, $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$ с осью Ox . Поэтому интерполяционный метод второго порядка называют еще методом парабол.

4.9. Упражнения

4.1. Отделить корни уравнения $x^4 - 4x - 1 = 0$.

4.2. Локализовать все корни уравнения $4(1 - x^2) - e^{-x} = 0$.

4.3. На отрезке $[-4, 4]$ методом деления пополам локализовать корни уравнения $x^2 = 13$ с точностью $\frac{1}{4}$.

4.4. Доказать, что метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для решения уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{4}$, сходится при выборе начального приближения из $[0, 1]$.

4.5. Доказать, что метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для решения уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \sqrt{x+2}$, сходится при выборе в качестве начального приближения любого x_0 из области определения $\varphi(x)$.

4.6. Определить, при каких начальных приближениях метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для решения уравнения $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = x^2$, сходится к решению уравнения $x = x^2$.

4.7. Пусть в некоторой окрестности $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ неподвижной точки $x^* = \varphi(x^*)$ функции $\varphi(x)$ для всех $x \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ выполнено $|\varphi'(x)| \leq q < 1$. Доказать, что метод последовательных приближений $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится к x^* при любом начальном приближении x_0 из $[x^* - \delta, x^* + \delta]$.

4.8. Уравнение $x + \ln x = 0$, имеющее корень $x^* \approx 0.6$, предлагается решать одним из методов простой итерации:

$$\begin{aligned} 1) \quad x_{n+1} &= -\ln x_n; & 2) \quad x_{n+1} &= e^{-x_n}; \\ 3) \quad x_{n+1} &= \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}; & 4) \quad x_{n+1} &= \frac{3x_n + 5e^{-x_n}}{8}. \end{aligned}$$

Исследовать эти методы и сделать выводы о целесообразности использования каждого из них.

4.9. Показать, что наибольший корень уравнения $x^3 + x = 1000$ лежит в интервале $[9, 10]$. Для вычисления этого корня применяются следующие варианты метода простой итерации:

$$1) \quad x_{n+1} = 1000 - x_n^3; \quad 2) \quad x_{n+1} = \frac{1000}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}; \quad 3) \quad x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n}.$$

Исследовать сходимость каждого варианта. Для сходящихся указать количество итераций, необходимое для определения корня с точностью 10^{-2} .

4.10. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[a, b]$, $f'(x)$ непрерывна и знакопостоянна на этом интервале. Построить равносильное уравнение вида $x = \varphi(x)$, для которого на $[a, b]$ выполнено условие $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, гарантирующее, что отображение $\varphi(x)$ будет сжимающим.

4.11. Вычисление корня уравнения $x^2 - a = 0$ на интервале $[1, a]$, ($a > 1$) эквивалентно нахождению неподвижной точки отображения $\varphi(x) = x - \tau(x^2 - a)$, $\tau \in R$, $\tau > 0$. Указать все параметры τ , для которых $\varphi(x)$ будет сжимающим отображением. Определить τ_{opt} , гарантирующее наименьшее значение $q(\tau)$ в неравенстве

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq q(\tau) |x - y|.$$

Для τ_{opt} вычислить $q(\tau_{opt})$ и обосновать сходимость метода последовательных приближений $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

4.12. Построить метод Ньютона для численного решения уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = \frac{1}{ax} - 1$, $a > 0$ и показать, что он сходится при выборе в качестве начального приближения левого конца интервала $\left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right]$.

4.13. Показать, что уравнение $f(x) = 0$, где $f(x) = (x - a)^2 - b^2$, имеет единственный корень на интервале $[a - 2b, a]$. Построить метод Ньютона для решения этого уравнения и показать, что он сходится при выборе в качестве начального приближения левого конца интервала: $x_0 = a - 2b$.

4.14. Определить, при каких начальных приближениях метод Ньютона сходится к решению уравнения $f(x) \equiv x^2 - 10 = 0$.

4.15. Определить количество вещественных корней полинома $x^3 + x^2 + x + 1.5$. Локализовать их. Указать начальные приближения, при которых метод Ньютона будет к ним сходиться.

4.16. Сравнить метод Ньютона и метод Ньютона с параметром для вычисления кратного $p = 2$ корня $x^* = 0$ уравнения $x^2 e^x = 0$.

4.17. Выписать расчетные формулы метода Ньютона и метода Ньютона с параметром для вычисления кратного корня $x^* = 0$ уравнения $x^3 = 0$. Кратность корня p вычислить по формулам разд. 4.7.

4.18. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет корень x^* на отрезке $[a, b]$. Для нахождения x^* применяется итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Доказать его сходимость в предположении, что $f'(x)$, $f''(x)$ непрерывны и $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на этом интервале, а начальное приближение выбирается таким, что $f(x_0) > 0$.

4.19. Для приближенного вычисления простого корня x^* функции $f(x)$, $f(x) \in C^4[a, b]$ применяется итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} - \frac{g(x_n)}{2g'(x_n)}, \quad g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Доказать, что разность $x_{n+1} - x^*$ пропорциональна $(x_n - x^*)^3$, т. е. скорость сходимости процесса кубичная.

4.20. Для приближенного вычисления простого корня x^* функции $f(x)$, $f(x) \in C^3[a, b]$ применяется итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}.$$

Доказать, что если метод сходится, то скорость сходимости кубичная.

5. Ответы, указания, решения

§ 1

- 1.1. $P_2(x) = x + 4$.
1.2. $P_3(x) = x + 2$.
1.3. $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$.
1.4. $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ при $p = 1, \dots, n-1$, $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 1$ при $p = n$. Воспользоваться леммой 1.4.
1.5. $P_2(x) = x^2$.
1.6. $P_3(x) = x^2$.
1.7. $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = x^2$.
1.8. x^p при $p = 1, \dots, n$, $x^{n+1} - \omega(x)$ при $p = n + 1$, где $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$. Воспользоваться теоремой 1.4.
1.9. $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = 1$.
1.10. $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.
1.11. $\|\omega(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{16}{81}$.
1.12. $\|R_1(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} \leq \frac{\|f''(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}}{2!} \|\omega(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{2} \frac{\pi^2}{16}$.
1.13. $\|R_2(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} \leq \frac{\|f^{(3)}(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}}{3!} \|\omega(x)\|_{C[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]} = \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{96\sqrt{3}}$.
1.14. $|A| \geq 3$.
1.15. $p = 2$.
1.16. Воспользоваться оценкой для $\|R_n(x)\|_{C[a,b]}$.
1.17. $h \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} 10^{-3}$.
1.18. Пусть $Q_n(x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq L = \|f(x) - Q_n(x)\|_{C[-1,1]}.$$

После замены x на $-x$ и умножения выражения под знаком модуля на -1 получим

$$|-f(-x) - (-Q_n(-x))| \leq L \quad \text{или} \quad |f(x) - (-Q_n(-x))| \leq L.$$

Следовательно, $-Q_n(-x)$ также является многочленом наилучшего равномерного приближения $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку для непрерывной функции существует только один многочлен наилучшего равномерного приближения, то $-Q_n(-x) = Q_n(x)$, что и требовалось доказать.

$$1.19. \quad 1. \quad P_1(x) = \frac{1}{9} - \frac{x}{81}, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{648} \approx 0.0015.$$

$$2. \quad P_1(x) = \frac{9}{80} - \frac{x}{80}, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{2(9 - \sqrt{80})}{80} \approx 0.0014.$$

$$3. \quad P_1(x) = \frac{9}{80.5} - \frac{x}{80.5}, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{1288} \approx 0.000776.$$

$$4. \quad P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{80}} - \frac{x}{80}, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{9 - \sqrt{80}}{80} \approx 0.0007.$$

Для построения наилучшего равномерного приближения воспользуемся теоремой 1.5. Из поведения функции $f(x) = \frac{1}{x+9}$ на отрезке $[-1, 1]$ ясно, что искомый полином первого порядка имеет вид $P_1(x) = -ax + b$, $a \geq 0$. По теореме 1.5 погрешность $R_1(x) = \frac{1}{x+9} - (-ax + b)$ должна иметь на $[-1, 1]$ не менее трех точек чебышевского альтернанса. Составим уравнение для поиска точек экстремума $R'_1(x) = -\frac{1}{(x+9)^2} + a = 0$, из которого получаем $x_{1,2} = -9 \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$. Ясно, что $x_2 = -9 - \frac{1}{\sqrt{a}}$ не принадлежит $[-1, 1]$. Таким образом, внутри отрезка $[-1, 1]$ имеется только одна точка экстремума. Поэтому оставшиеся две точки экстремума обязаны быть концами интервала $[-1, 1]$. Выпишем для $R_1(x)$ условие чебышевского альтернанса:

$$\begin{aligned}
R_1(-1) &= \frac{1}{8} - a - b &= L, \\
R_1(x_1) &= \sqrt{a} + a \left(-9 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) - b = -L, \\
R_1(1) &= \frac{1}{10} + a - b &= L.
\end{aligned}$$

Решая полученную систему относительно a и b , находим $a = \frac{1}{80}$ и $b = \frac{1}{\sqrt{80}}$.

$$1.20. \quad 1. \quad P_1(x) = 0, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = 1.$$

$$2. \quad P_1(x) = \frac{3}{5}x, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{2}{5}.$$

$$3. \quad P_1(x) = x, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$4. \quad P_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{2}.$$

$$5. \quad P_1(x) = \frac{3}{4}x, \quad \|R_1(x)\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{4}.$$

Для построения наилучшего равномерного приближения воспользуемся теоремой 1.5. Функция x^3 нечетная. Поэтому в соответствии с задачей 1.18 полином наилучшего равномерного приближения для нее тоже нечетная функция: $P_1(x) = ax$. Из поведения функции $f(x) = x^3$ на отрезке $[-1, 1]$ ясно, что $a \geq 0$. По теореме 1.5 погрешность $R_1(x) = x^3 - ax$ должна иметь на $[-1, 1]$ не менее трех точек чебышевского альтернанса. Составим уравнение для поиска точек экстремума $R'_1(x) = 3x^2 - a = 0$, из которого получаем $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$. Таким образом, внутри отрезка $[-1, 1]$ имеются только две точки экстремума. Поэтому оставшаяся третья точка экстремума обязана быть концом интервала $[-1, 1]$. Выпишем для

$R_1(x)$ условие чебышевского альтернанса:

$$R_1\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 + a\sqrt{\frac{a}{3}} = -L,$$

$$R_1\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}} = +L,$$

$$R_1(1) = 1 - a = -L.$$

Знаки правой части выбираются в соответствии с расположением точек экстремума $y_1 = -\sqrt{\frac{a}{3}} < y_2 = \sqrt{\frac{a}{3}} < y_3 = 1$.

Решая эту систему относительно a , находим $a = \frac{3}{4}$.

§ 2

$$2.1. \quad I_0 f = (b - a)f(b).$$

$$2.2. \quad I_1 f = f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2.3. Для весов интерполяционной квадратурной формулы справедлива формула

$$A_i = \int_{-a}^a \frac{(x - x_{-n}) \dots (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_{-n}) \dots (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} dx$$

(считаем, что при $i = 1$ и $i = n$ отсутствуют сомножители, содержащие значение x_{i-1} и x_{n+1} соответственно). Для каждой скобки $(x - x_{-j})$, $j \neq i$ в числителе найдется соответствующая ей $(x - x_j)$. Это верно и для произведения, стоящего в знаменателе. Поэтому, учитывая, что $x_{-j} = -x_j$, $x_0 = 0$, для A_i получаем формулу

$$A_i = \int_{-a}^a \frac{(x - x_{-i})x \dots (x^2 - x_{i-1}^2)(x^2 - x_{i+1}^2) \dots (x^2 - x_n^2)}{(x_i - x_{-i})x_i \dots (x_i^2 - x_{i-1}^2)(x_i^2 - x_{i+1}^2) \dots (x_i^2 - x_n^2)} dx.$$

Аналогично имеем

$$A_{-i} = \int_{-a}^a \frac{(x - x_i)x \dots (x^2 - x_{i-1}^2)(x^2 - x_{i+1}^2) \dots (x^2 - x_n^2)}{(x_{-i} - x_i)x_{-i} \dots (x_{-i}^2 - x_{i-1}^2)(x_{-i}^2 - x_{i+1}^2) \dots (x_{-i}^2 - x_n^2)} dx,$$

а с учетом $x_{-j}^2 = (-x_j)^2 = x_j^2$ и $x_{-i} = -x_i$ получаем

$$A_{-i} = \int_{-a}^a \frac{(x - x_i)x \dots (x^2 - x_{i-1}^2)(x^2 - x_{i+1}^2) \dots (x^2 - x_n^2)}{(x_i - x_{-i})x_i \dots (x_i^2 - x_{i-1}^2)(x_i^2 - x_{i+1}^2) \dots (x_i^2 - x_n^2)} dx.$$

Таким образом,

$$A_i = \int_{-a}^a (x - x_{-i}) g(x) dx, \quad A_{-i} = \int_{-a}^a (x - x_i) g(x) dx,$$

где

$$g(x) = \frac{x \dots (x^2 - x_{i-1}^2)(x^2 - x_{i+1}^2) \dots (x^2 - x_n^2)}{(x_i - x_{-i})x_i \dots (x_i^2 - x_{i-1}^2)(x_i^2 - x_{i+1}^2) \dots (x_i^2 - x_n^2)}.$$

Следовательно,

$$A_i - A_{-i} = \int_{-a}^a [(x - x_{-i})g(x) - (x - x_i)g(x)] dx = (x_i - x_{-i}) \int_{-a}^a g(x) dx.$$

Поскольку функция $g(x)$ нечетная, то интеграл от нее по симметричному относительно нуля интервалу равен нулю. Таким образом, $A_i = A_{-i}$, что и требовалось доказать.

2.4. Поскольку функция x^{2k+1} нечетная, то интеграл от нее по симметричному относительно нуля интервалу $[-a, a]$ равен нулю:

$$If = \int_{-a}^a x^{2k+1} dx = 0. \text{ Для квадратурной формулы имеем}$$

$$I_n f = \sum_{i=-n}^n A_i x_i^{2k+1} = \sum_{i=-n}^{-1} A_i x_i^{2k+1} + A_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2k+1},$$

а, заменяя в первой сумме индекс суммирования i на $-i$,

$$I_n f = \sum_{i=n}^1 A_{-i} x_{-i}^{2k+1} + \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2k+1} = \sum_{i=1}^n A_{-i} x_{-i}^{2k+1} + \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2k+1}.$$

Теперь воспользуемся результатом предыдущей задачи: узлы интерполяционной квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля $x_{-i} = -x_i$, поэтому для ее весов справедливо $A_{-i} = A_i$, $i = 0, \dots, n$. Но тогда

$$I_n f = \sum_{i=1}^n A_i (-1)^{2k+1} x_i^{2k+1} + \sum_{i=1}^n A_i x_i^{2k+1} = 0.$$

Следовательно, $I x^{2k+1} = 0 = I_n x^{2k+1}$ и квадратурная формула точна на мономах нечетного порядка - x^{2k+1} .

2.5. По теореме 2.1 интерполяционная квадратурная формула на $(n+1)$ -м узле имеет алгебраическую степень точности n , что и означает (определение 2.3) выполнение на всех полиномах $Q_p(x)$ степени меньшей или равной n равенства $I_n Q_p(x) = \int_a^b Q_p(x) dx$.

2.6. Для полинома нулевой степени $Q_0(x) \equiv 1$ имеем

$$I_n 1 = \sum_{k=0}^n A_k 1 = \sum_{k=0}^n A_k, \quad \int_a^b 1 dx = b - a.$$

Из предыдущей задачи с $Q_0(x) \equiv 1$ получаем $I_n 1 = \int_a^b 1 dx$. По-

этому $\sum_{k=0}^n A_k = b - a$.

2.7. По определению, $\omega(x) = (x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)$ и

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{9})(x-1)}{(1 - \frac{1}{9})(-1-1)} dx = \frac{1}{4}.$$

Узлы интерполяционной квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля $x_{3-i} = -x_i$, $i = 0, 1$. Поэтому (задача

2.3) для ее весов справедливо $A_3 = A_0$, $A_1 = A_2$. Таким образом, имеем $A_3 = A_0 = \frac{1}{4}$, а, воспользовавшись результатом предыдущей задачи,

$$2 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 2A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2} + 2A_1.$$

Отсюда $A_1 = A_2 = \frac{3}{4}$ и окончательно

$$I_3 f = \frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1).$$

2.8. Интерполяционная квадратурная формула на одном узле $x_0 = \frac{a+b}{2}$ имеет вид $I_0 f = (b-a)f$. Возьмем произвольный полином первой степени $Q_1(x) = c_1 x + c_2$ и вычислим для него

$$I Q_1(x) = \int_a^b Q_1(x) dx = \int_a^b (c_1 x + c_2) dx = \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_2(b-a),$$

$$I_0 Q_1(x) = (b-a)Q_1(\frac{a+b}{2}) = (b-a)(c_1 \frac{a+b}{2} + c_2) = \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_2(b-a).$$

Таким образом, на всех полиномах $Q_1(x)$ степени меньшей или равной 1 выполнено равенство. Это означает, что алгебраическая степень точности квадратурной формулы не меньше 1. А поскольку для полинома второй степени $Q_2(x) = (x - \frac{a+b}{2})^2$ справедливо $0 = I_0 Q_2(x) \neq I Q_2(x) > 0$, то алгебраическая степень точности квадратурной формулы равна 1.

2.9. Интерполяционная квадратурная формула на одном узле x_0 имеет вид $I_0 f = (b-a)f(x_0)$. По условию задачи необходимо выбрать точку x_0 таким образом, чтобы для любой линейной функции $f(x) = a_0 + a_1 x$ выполнялось равенство $I_0 f = \int_a^b f(x) dx$.

Подставляя в это соотношение $a = 3$, $b = 5$ и значение интеграла $\int_3^5 (a_0 + a_1 x) dx = 2a_0 + 8a_1$, приходим к уравнению относительно x_0 : $2(a_0 + a_1 x_0) = 2a_0 + 8a_1$. Из него получаем $x_0 = 4$.

2.10. Прямоугольников: $I_0 f = (1 - 0)f(0) = 0 \quad \left[\frac{1}{4} \right].$

Трапеций: $I_1 f = \frac{(1-0)}{2}(f(0) + f(1)) = \frac{1}{2} \quad \left[-\frac{1}{4} \right].$

Гаусса на одном узле: $I_0 f = (1 - 0)f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \quad \left[\frac{1}{8} \right].$

Симпсона: $I_2 f = \frac{(1-0)}{6}(f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)) = \frac{1}{4} \quad [0].$

Гаусса на двух узлах: $I_1 f = \frac{(1-0)}{2}(f(-\frac{\sqrt{3}}{6}) + f(\frac{\sqrt{3}}{6})) = \frac{1}{4} \quad [0].$

В квадратных скобках указана погрешность $If - I_n f$ вычисления интеграла If по соответствующей квадратурной формуле.

2.11. $I_{\frac{1}{2}} f = \frac{5}{16}, \quad If - I_{\frac{1}{2}} f = -\frac{1}{16}; \quad I_{\frac{1}{4}} f = \frac{17}{64}, \quad If - I_{\frac{1}{4}} f = -\frac{1}{64}.$

2.12. Используя условия задачи, получаем

$$\begin{aligned} \alpha I_h + \beta I_{2h} &= \alpha(I + M h^k + O(h^{k+1})) + \beta(I + M (2h)^k + O(h^{k+1})) = \\ &= (\alpha + \beta)I + (\alpha + 2^k \beta)M h^k + (\alpha + \beta)O(h^{k+1}). \end{aligned}$$

Линейная комбинация $\alpha I_h + \beta I_{2h}$ будет приближать значение I с порядком $O(h^{k+1})$, если будут выполняться следующие соотношения: $\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + 2^k \beta = 0$. Решая эту систему уравнений относительно α и β , получаем $\alpha = \frac{2^k}{2^k - 1}$ и $\beta = \frac{1}{1 - 2^k}$.

Для составной квадратурной формулы трапеций имеем $k = 2$. Поэтому $\alpha = \frac{4}{3}, \quad \beta = -\frac{1}{3}$ и для $h = \frac{1}{4}$, используя результаты предыдущей задачи, получаем, что линейная комбинация

$$\alpha I_h + \beta I_{2h} = \frac{4}{3} I_{\frac{1}{4}} f - \frac{1}{3} I_{\frac{1}{2}} f = \frac{4}{3} \frac{17}{64} - \frac{1}{3} \frac{5}{16} = \frac{1}{4}$$

равна точному значению интеграла $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

2.13. В соответствии с теоремой 2.5 интерполяционная квадратурная формула на трех узлах $-1 \leq x_0 < x_1 < x_2 \leq 1$ будет квадратурой Гаусса для приближенного вычисления определенных интегралов по отрезку $[-1, 1]$, если многочлен третьей степени $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ ортогонален на $[-1, 1]$ всем полиномам меньшей степени. В рассматриваемом случае это условие эквивалентно выполнению трех равенств:

$$\int_{-1}^1 \omega(x) 1 dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \omega(x) x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 \omega(x) x^2 dx = 0.$$

Подставляя в предыдущие равенства многочлен $\omega(x)$ в виде $\omega(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ и вычисляя интегралы, приходим к системе линейных уравнений:

$$\frac{2}{3}a + 2c = 0, \quad \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = 0, \quad \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0.$$

Ее решением являются $a = 0$, $b = -\frac{3}{5}$, $c = 0$ и поэтому имеем $\omega(x) = x^3 - \frac{3}{5}x = x(x^2 - \frac{3}{5})$. Следовательно, узлами искомой квадратурной формулы будут: $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Непосредственные вычисления дают

$$A_0 = \int_{-1}^1 \frac{x \left(x - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)} dx = \frac{5}{9}.$$

Узлы интерполяционной квадратурной формулы расположены симметрично относительно нуля: $x_2 = -x_0$, $x_1 = 0$. Поэтому (задача 2.3) для ее весов справедливо $A_2 = A_0 = \frac{5}{9}$. А, воспользовавшись результатом задачи 2.6,

$$2 = A_0 + A_1 + A_2 = 2A_0 + A_1 = \frac{10}{9} + A_1.$$

Отсюда $A_1 = \frac{8}{9}$ и окончательно получаем квадратуру Гаусса

$$I_2 f = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 0 \cdot f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

2.14. Используя оценки точности вычисления интегралов по соответствующим квадратурным формулам из разд. 2.5, получаем для формулы:

$$\text{прямоугольников: } |If - I_0 f| \leq \frac{\|\cos(x)\|_{C[0,1]}}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Гаусса на одном узле: } |If - I_0 f| \leq \frac{\|\sin(x)\|_{C[0,1]}}{24} = \frac{\sin(1)}{24};$$

$$\text{трапеций: } |If - I_1 f| \leq \frac{\|\sin(x)\|_{C[0,1]}}{12} = \frac{\sin(1)}{12}.$$

Заметим, что формула Гаусса на одном узле дает лучший результат, чем формула трапеций на двух узлах.

2.15. Используя оценки точности вычисления интегралов по соответствующим квадратурным формулам из разд. 2.5, получаем для формулы:

$$\text{Симпсона — } |If - I_3 f| \leq \frac{\|\sin(x)\|_{C[0,1]}}{2880} = \frac{\sin(1)}{2880};$$

$$\text{Гаусса на двух узлах — } |If - I_1 f| \leq \frac{\|\sin(x)\|_{C[0,1]}}{4320} = \frac{\sin(1)}{4320}.$$

Заметим, что формула Гаусса на двух узлах дает лучший результат, чем формула Симпсона на трех узлах.

2.16. Используя оценку точности вычисления интегралов по составной квадратурной формуле трапеций из разд. 2.6 и данные задачи, получаем $|If - I_h f| \leq \frac{1}{12} \frac{1}{N^2}$. Необходимое неравенство $|If - I_h f| \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$ будет выполнено, если $\frac{1}{12} \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{2} 10^{-5}$ или $N \geq 100 \sqrt{\frac{10}{6}} \approx 129.1$. Следовательно, минимальное $N = 130$.

2.17. Используя оценку точности вычисления интегралов по составной квадратурной формуле Симпсона из разд. 2.6 и данные задачи, получаем $|If - I_h f| \leq \frac{1}{2880} \frac{1}{N^4}$. Поэтому неравенство $|If - I_h f| \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$ будет выполнено, если $\frac{1}{2880} \frac{1}{N^4} \leq \frac{1}{2} 10^{-4}$ или $N \geq \frac{10}{\sqrt[4]{1440}} \approx 1.6$. Следовательно, минимальное $N = 2$.

2.18. В квадратурной формуле $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ заданы узлы. Требуется указать такие веса A_0 и A_1 , чтобы эта формула имела максимально возможную алгебраическую степень точности. Для определения двух неизвестных A_0 и A_1 составим два уравнения $I1 = I_1 1$, $Ix = I_1 x$, которые гарантируют алгебраическую степень точности равную 1. Вычисляя необходимые интегралы и используя данные задачи, получаем

$$1 = A_0 1 + A_1 1, \quad \frac{1}{2} = A_0 \frac{1}{2} + A_1 \frac{2}{3}.$$

Решением этой системы являются $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$. Таким образом, искомой квадратурной формулой будет $I_1 f = f(\frac{1}{2})$. Непосредственная проверка показывает, что $Ix^2 = \frac{1}{3} \neq I_1 x^2 = \frac{1}{4}$. Поэтому алгебраическая степень точности построенной квадратурной формулы не превосходит 1.

Заметим, что вычисление весов A_0 и A_1 из определения интерполяционной квадратурной формулы (узлы заданы) тоже приводит к $A_0 = 1$ и $A_1 = 0$. А интерполяционная квадратурная формула на двух узлах имеет по теореме 2.1 алгебраическую степень точности, равную 1.

2.19. По условию задачи в квадратурной формуле на двух узлах $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ задан один узел $x_0 = 0$. Требуется указать такие веса A_0 , A_1 и узел x_1 , чтобы эта формула была точна, т. е. $I x^2 f = \int_a^b x^2 f(x) dx = I_1 f$, на мономах $f(x) = x^k$ максимально высокой степени. Для определения трех неизвестных A_0 ,

A_1 и x_1 составим три уравнения:

$$I x^2 1 = I_1 1, \quad I x^2 x = I_1 x, \quad I x^2 x^2 = I_1 x^2,$$

которые гарантируют точность квадратурной формулы на мономах $f(x) = x^k$ до $k = 2$ включительно. Вычисляя необходимые интегралы и используя данные задачи, получаем:

в первом случае $a = -1, b = 0$ —

$$\frac{1}{3} = A_0 1 + A_1 1, \quad -\frac{1}{4} = A_0 0 + A_1 x_1, \quad \frac{1}{5} = A_0 0 + A_1 x_1^2;$$

во втором случае— $a = -1, b = 1$ —

$$\frac{2}{3} = A_0 1 + A_1 1, \quad 0 = A_0 0 + A_1 x_1, \quad \frac{2}{5} = A_0 0 + A_1 x_1^2;$$

Решение первой системы: $A_0 = \frac{1}{48}, A_1 = \frac{5}{16}$, и $x_1 = -\frac{4}{5}$. Таким образом, искомая квадратурная формула имеет следующий вид:

$$I_1 f = \frac{1}{48} f(0) + \frac{5}{16} f\left(-\frac{4}{5}\right).$$

Проверка показывает, что $I x^2 x^3 = \int_{-1}^0 x^5 dx = -\frac{1}{6} \neq I_1 x^3 = -\frac{4}{25}$.

Поэтому построенная квадратурная формула не точна на мономах $f(x) = x^3$.

Вторая система не имеет решения, так как из второго уравнения либо $A_1 = 0$, либо $x_1 = 0$, чего не позволяет третье уравнение.

Ограничимся во втором случае двумя первыми уравнениями. Система имеет решения:

1) $A_1 = 0, A_0 = \frac{2}{3}$, и x_1 —любое. При этом искомой квадратурной формулой будет $I_1 f = \frac{2}{3} f(0)$;

2) $x_1 = 0, A_1$ —любое, а $A_0 = \frac{2}{3} - A_1$. Квадратурной формулой будет опять $I_1 f = \frac{2}{3} f(0)$.

2.20. В квадратурной формуле $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ веса равны $I_1 f = A_0 f(x_0) + A_0 f(x_1)$. Требуется указать такие вес A_0 и узлы x_0, x_1 , чтобы эта формула имела максимально возможную алгебраическую степень точности. Для определения трех неизвестных A_0, x_0 и x_1 составим три уравнения:

$$I 1 = I_1 1, \quad I x = I_1 x, \quad I x^2 = I_1 x^2,$$

которые гарантируют алгебраическую степень точности, равную 2. Вычисляя необходимые интегралы и используя данные задачи, получаем

$$2 = A_0 1 + A_0 1, \quad 0 = A_0 x_0 + A_0 x_1, \quad \frac{2}{3} = A_0 x_0^2 + A_0 x_1^2.$$

Решением этой системы являются $A_0 = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, искомая квадратурная формула будет иметь вид $I_1 f = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$. Непосредственная проверка показывает, что $I x^3 = 0 = I_1 x^3$, но $I x^4 = \frac{2}{5} \neq I_1 x^4 = \frac{2}{9}$. Поэтому алгебраическая степень точности построенной квадратурной формулы в действительности равна 3, хотя строилась она из условий, чтобы алгебраическая степень точности была равной 2.

§ 3

3.1. По теореме 1.4 если функция $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$, то погрешность интерполирования функции $f(x)$ интерполяционным полиномом $P_n(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$R_n(y) = f(y) - P_n(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(y),$$

где $\xi \in [a, b]$, $\omega(y) = (y - x_0)(y - x_1) \dots (y - x_n)$. Дифференцируя это соотношение по y , получаем

$$f'(y) - P'_n(y) = \frac{d}{dy} \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right] \omega(y) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \frac{d}{dy} [\omega(y)],$$

а учитывая, что $\omega(x_i) = 0$ и $\frac{d}{dy}[\omega(y)]|_{y=x_i} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$, имеем

$$f'(x_i) - P'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j),$$

и, следовательно,

$$|f'(x_i) - P'_n(x_i)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |x_i - x_j| \leq \frac{\|f^{(n+1)}(x)\|_{C[a,b]}}{(n+1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |x_i - x_j|.$$

3.2. Очевидно, что формула численного дифференцирования

$$f'(0) \approx af(-2h) + bf(0) + cf(h)$$

точна для многочленов $Q_m(x)$ степени m тогда и только тогда, когда она точна на всех мономах x^k , $k = \overline{0, m}$. Для определения трех неизвестных — a , b и c — составим три уравнения, означающих, что знак \approx переходит в знак равенства, если в качестве $f(x)$ выбираются соответственно функции 1 , x , x^2 . В результате приходим к системе уравнений

$$0 = a + b + c, \quad 1 = a(-2h) + ch, \quad 0 = a(-2h)^2 + ch^2,$$

решением которой являются $a = -\frac{1}{6h}$, $b = -\frac{1}{2h}$, $c = \frac{2}{3h}$. Таким образом, искомой формулой численного дифференцирования будет

$$-\frac{1}{6h}f(-2h) - \frac{1}{2h}f(0) + \frac{2}{3h}f(h).$$

Проверка показывает, что подстановка в нее монома x^3 дает

$$-\frac{1}{6h}(-2h)^3 - \frac{1}{2h}(0)^3 + \frac{2}{3h}(h)^3 = 2h^2,$$

что не совпадает с производной x^3 в точке 0 . Поэтому построенная формула численного дифференцирования точна только на полиномах второй степени.

3.3. Так же, как и в решении предыдущей задачи, потребуем, чтобы формула численного дифференцирования

$$f''(0) \approx af(-h) + bf(h) + cf(2h) + df(3h)$$

была точна на всех мономах x^k , $k = \overline{0, m}$ наиболее высокой степени m . Для определения четырех неизвестных — a , b , c и d — составим четыре уравнения, означающих, что знак \approx переходит в знак равенства, если в качестве $f(x)$ выбираются соответственно функции 1 , x , x^2 , x^3 . В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= a + b + c + d, & 0 &= a(-h) + bh + c2h + d3h, \\ 2 &= a(-h)^2 + bh^2 + c(2h)^2 + d(3h)^2, & 0 &= a(-h)^3 + bh^3 + c(2h)^3 + d(3h)^3, \end{aligned}$$

решением которой являются

$$a = \frac{1}{2h^2}, \quad b = -\frac{2}{h^2}, \quad c = \frac{2}{h^2}, \quad d = -\frac{1}{2h^2}.$$

Таким образом, искомой формулой численного дифференцирования будет

$$\frac{1}{2h^2}f(-h) - \frac{2}{h^2}f(h) + \frac{2}{h^2}f(2h) - \frac{1}{2h^2}f(3h).$$

Проверка показывает, что подстановка в нее монома x^4 дает

$$\frac{1}{2h^2}(-h)^4 - \frac{2}{h^2}h^4 + \frac{2}{h^2}(2h)^4 - \frac{1}{2h^2}(3h)^4 \neq 0,$$

т. е. не совпадает со второй производной x^4 в точке 0 . Поэтому построенная формула численного дифференцирования точна только на полиномах третьей степени.

3.4. Поскольку в формуле численного дифференцирования имеется $2n + 1$ неизвестных коэффициентов, то для однозначного их определения необходимо составить столько же уравнений. Поэтому в задаче речь идет о формуле численного дифференцирования точной на полиномах до степени $2n$ включительно. Это означает справедливость равенств

$$(x^p)^{(k)}(0) = h^{-k} \sum_{i=-n}^n c_i (ih)^p, \quad p = 0, 1, \dots, 2n,$$

совокупность которых представляет систему $2n+1$ линейных алгебраических уравнений относительно c_i , $i = -n, n$. Матрица системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -nh & -(n-1)h & \dots & -h & 0 & h & \dots & (n-1)h & nh \\ (-nh)^2 & (-(n-1)h)^2 & \dots & (-h)^2 & 0 & h^2 & \dots & ((n-1)h)^2 & (nh)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-nh)^p & (-(n-1)h)^p & \dots & (-h)^p & 0 & h^p & \dots & ((n-1)h)^p & (nh)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-nh)^{2n} & (-(n-1)h)^{2n} & \dots & (-h)^{2n} & 0 & h^{2n} & \dots & ((n-1)h)^{2n} & (nh)^{2n} \end{bmatrix},$$

а компоненты правой части все равны нулю, кроме k -й, которая равняется $k!$.

В соответствии с правилом Крамера $c_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. Здесь A означает матрицу системы, а матрица A_i получается из A заменой ее i -го столбца на столбец правой части (нумерация столбцов матрицы такова, что i изменяется от $-n$ до n так, что первый в приведенной выше матрице столбец имеет номер $-n$, второй имеет номер $-(n-1)$ и т. д.).

Нетрудно установить связь между матрицами A_i и A_{-i} . Переставим в матрице A_i столбцы с номерами -1 и 1 , затем с номерами -2 и 2 и т. д. до столбцов с номерами $-n$ и n . У полученной матрицы умножим каждую строку с нечетным номером $i = \pm 1, \pm 3, \dots$ (соответствующую нечетной степени p) на -1 .

Проведенные преобразования приводят к матрице, у которой определитель такой же как и у A_i . Действительно, при перестановке двух столбцов матрицы получаем новую матрицу, определитель которой равен определителю исходной, умноженному на -1 . Мы переставили n пар столбцов. Поэтому определитель матрицы, полученной после перестановки всех указанных выше пар столбцов, равен $(-1)^n \det(A_i)$. При умножении одной строки матрицы на -1 получаем новую матрицу, определитель которой равен определителю исходной, умноженному на -1 . Количество строк, име-

ющих в матрице A_i нечетный номер, равно n . Поэтому, сменив знаки элементов в n строках матрицы, получим новую матрицу, определитель которой равен определителю исходной, умноженному на $(-1)^n$. В результате осуществления всех описанных выше действий получим матрицу, определитель которой равен

$$(-1)^n (-1)^n \det(A_i) = (-1)^{2n} \det(A_i) = \det(A_i).$$

Теперь разберем два случая:

1. Если k — четное, то строка, содержащая $k!$, будет иметь четный номер. Поэтому она не подвергается умножению на -1 и, как нетрудно понять, проведенные преобразования A_i приводят к матрице A_{-i} . Следовательно, $\det(A_{-i}) = \det(A_i)$, а значит, и

$$c_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = \frac{\det(A_{-i})}{\det(A)} = c_{-i}.$$

2. Если k — нечетное, то строка, содержащая $k!$, будет иметь нечетный номер и умножается на -1 . В этом случае проведенные преобразования A_i приводят к матрице, отличающейся от A_{-i} только i -м столбцом. Причем i -й столбец полученной из A_i матрицы равен i -у столбцу A_{-i} , умноженному на -1 . Но тогда $\det(A_{-i}) = -\det(A_i)$ и

$$c_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} = -\frac{\det(A_{-i})}{\det(A)} = -c_{-i}.$$

3.5. Использовать определение разности вперед.

3.6. Использовать определение разности вперед.

3.7. Используя определение разности вперед и назад, имеем

$$f_x(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$f_{x\bar{x}}(x) = (f_x)_{\bar{x}}(x) = \frac{f_x(x) - f_x(x-h)}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

$$\begin{aligned} f_{x\bar{x}\bar{x}}(x) &= (f_{x\bar{x}})_{\bar{x}}(x) = \frac{f_{x\bar{x}}(x) - f_{x\bar{x}}(x-h)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h) - 3f(x) + 3f(x-h) - f(x-2h)}{h^3}. \end{aligned}$$

3.8. Осуществляя разложение в ряд Тейлора $f(-2h)$ и $f(h)$ в окрестности нуля и приводя подобные, получаем

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6h}f(-2h) - \frac{1}{2h}f(0) + \frac{2}{3h}f(h) = \\
& = -\frac{1}{6h}[f(0) + f'(0)(-2h) + \frac{f''(0)}{2}(-2h)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(-2h)^3 + O(h^4)] - \\
& \quad -\frac{1}{2h}[f(0)] + \\
& \quad + \frac{2}{3h}[f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2}h^2 + \frac{f'''(0)}{6}h^3 + O(h^4)] = \\
& = f'(0) + \frac{f'''(0)}{3}h^2 + O(h^3).
\end{aligned}$$

Таким образом, погрешность вычисления $f'(0)$ по формуле

$$-\frac{1}{6h}f(-2h) - \frac{1}{2h}f(0) + \frac{2}{3h}f(h)$$

является величиной второго порядка малости по h .

3.9. Используя определение разности вперед и назад, осуществляя разложение в ряд Тейлора $u(x-h)$ и $u(x+h)$ в окрестности точки x и, наконец, приводя подобные, получаем

$$\begin{aligned}
\alpha u_x(x) + \beta u_{\bar{x}}(x) &= \alpha \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \beta \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = \\
&= \frac{\alpha}{h}[u(x+h) - u(x)] + \frac{\beta}{h}[u(x) - u(x-h)] = \\
&= \frac{\alpha}{h}[u(x) + u'(x)h + \frac{u''(x)}{2}h^2 + \frac{u'''(x)}{6}h^3 + O(h^4) - u(x)] + \\
&+ \frac{\beta}{h}[u(x) - (u(x) - u'(x)h + \frac{u''(x)}{2}h^2 - \frac{u'''(x)}{6}h^3 + O(h^4))] = \\
&= (\alpha + \beta)u'(x) + (\alpha - \beta)\frac{u''(x)}{2}h + (\alpha + \beta)\frac{u'''(x)}{6}h^2 + O(h^3).
\end{aligned}$$

Очевидно, что при выполнении условий $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = 0$ линейная комбинация $\alpha u_x(x) + \beta u_{\bar{x}}(x)$ приближает $u'(x)$ с наивысшим порядком точности по h равным двум. Из полученной системы двух уравнений с двумя неизвестными находим $\alpha = \beta = 0.5$, а подставляя полученные значения в исследуемое выражение, приходим к

$$\alpha u_x(x) + \beta u_{\bar{x}}(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'_x(x).$$

3.10. Пусть значения функции в формуле численного дифференцирования $f_{x\bar{x}}$ задаются с погрешностью, т.е. вместо $f(x-h)$, $f(x)$, $f(x+h)$ используются $f^*(x-h) = f(x-h) + \varepsilon_1$, $f^*(x) = f(x) + \varepsilon_2$, $f^*(x+h) = f(x+h) + \varepsilon_3$, $|\varepsilon_i| \leq E$. Тогда полная погрешность

$$\begin{aligned} R_2(h, \varepsilon) &= |f''(x) - f_{x\bar{x}}^*| = \left| f''(x) - \frac{f^*(x-h) - 2f^*(x) + f^*(x+h)}{h^2} \right| = \\ &= \left| f''(x) - \frac{f(x-h) + \varepsilon_1 - 2(f(x) + \varepsilon_2) + f(x+h) + \varepsilon_3}{h^2} \right| = \\ &= \left| f''(x) - \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} - \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{h^2} \right| \end{aligned}$$

оценивается следующим образом:

$$R_2(h, \varepsilon) \leq \left| f''(x) - \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \right| + \left| \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{h^2} \right|.$$

Второе слагаемое в этой оценке не превосходит $\frac{4E}{h^2}$, а первое в соответствии с результатами разд. 3.3 не превосходит $\frac{M_4}{12} h^2$, где $M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)|$.

Поэтому окончательно имеем

$$R_2(h, \varepsilon) \leq \frac{M_4}{12} h^2 + \frac{4E}{h^2} = g_2(h).$$

Оптимальный шаг, при котором минимизируется величина оценки полной погрешности, найдем из уравнения $g_2'(h) = \frac{M_4}{6}h - \frac{8E}{h^3} = 0$ (производная берется по переменной h). Получаем одну точку экстремума $h_0 = 2 \left(\frac{3E}{M_4} \right)^{\frac{1}{4}}$.

Аналогичные рассуждения для формулы численного дифференцирования $f_{xx\bar{x}\bar{x}}$ приводят к $h_0 = 2 \left(\frac{3\varepsilon}{M_6} \right)^{\frac{1}{6}}$.

§ 4

4.1. Вычислим $f'(x) = 4(x^3 - 1)$. При $x < 1$ имеем $f'(x) < 0$, а при $x > 1$ выполнено $f'(x) > 0$. Следовательно, на интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ исследуемая функция монотонно убывает и возрастает соответственно. Поэтому на каждом из них не может быть более одного корня. То, что корни действительно есть, устанавливается путем определения знаков значений функции на концах интервалов: $f(-\infty) > 0$, $f(1) < 0$, $f(\infty) > 0$. Мы указали два интервала, на которых имеется ровно по одному корню. Следовательно уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ имеет только два действительных корня, а два других корня комплексные.

4.2. Вначале воспользуемся графическим методом. Для этого преобразуем уравнение к виду $(1 - x^2) = 0.25e^{-x}$ и построим графики функций $y = (1 - x^2)$, $y = 0.25e^{-x}$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями данного уравнения. Из рисунка определяем, что уравнение имеет два корня, причем $x_1 \in [-1, 0]$, $x_2 \in [0, 1]$. Действительно,

$$f(-1) = -e^{-1} < 0, \quad f(0) = 3 > 0, \quad f(1) = -e^1 < 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 4.1, на каждом из отрезков $[-1, 0]$, $[0, 1]$ находится по крайней мере один корень.

4.3. $x_1 \in [-3.75, -3.5]$, $x_2 \in [3.5, 3.75]$.

4.4. Выберем в качестве M замкнутый отрезок $[0, 1]$. Это полное метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Легко проверяется, что отрезок $[0, 1]$ переводится функцией $\varphi(x)$ в себя. Кроме того, так как для $x, y \in [0, 1]$ справедливо $0 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$, то $\forall x, y \in [0, 1]$ имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{8}y^4 \right| = \frac{1}{8}|x + y||x - y||x^2 + y^2| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ — сжимающее отображение полного метрического пространства в себя. В силу теоремы 4.3, метод простой итерации сходится.

4.5. Область определения функции $\varphi(x) = \sqrt{x+2}$ есть $[-2, \infty]$. Очевидно, что для любого начального приближения x_0 имеем $x_1 = \varphi(x_0) \geq 0$. Поэтому можно считать, что фактически итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ мы начинаем с $x_1 \in [0, \infty]$. Функция $\varphi(x) = \sqrt{x+2}$ переводит полное метрическое пространство $[0, \infty]$ в себя. Кроме того, для нее выполнено

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \quad \forall x \in [0, \infty].$$

Следовательно, $\varphi(x)$ — сжимающее отображение полного метрического пространства в себя и, в силу теоремы 4.3, метод простой итерации сходится.

4.6. Для $\varphi(x) = x^2$ имеем $\varphi'(x) = 2x$. Чтобы отображение $\varphi(x)$ было сжимающим, достаточно выполнения условия $|\varphi'(x)| < 1$. Это условие в нашем случае будет выполнено, если x принадлежит отрезку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. А так как $\varphi(x) = x^2$ переводит отрезок $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ в себя, то при выборе начального приближения из $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ метод простой итерации будет сходиться.

4.7. Условие $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ гарантирует то, что отображение $\varphi(x)$ непрерывно по Липшицу. Действительно, используя формулу Тейлора

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(z)(x - y),$$

где точка z расположена между x и y , имеем

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(z)||x - y| \leq q|x - y|.$$

Докажем, что $\varphi(x)$ переводит отрезок $[x^* - \delta, x^* + \delta]$ в себя. Для этого возьмем произвольную точку x из этого отрезка: $|x - x^*| \leq \delta$. Применим опять формулу Тейлора:

$$\varphi(x) - \varphi(x^*) = \varphi'(z)(x - x^*),$$

где точка z расположена между x и x^* . Следовательно,

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(z)||x - x^*| \leq q|x - x^*| \leq \delta,$$

т.е. $\varphi(x) \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, что и требовалось доказать. Итак, отображение $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.4 для $[a, b] = [x^* - \delta, x^* + \delta]$. Поэтому метод простой итерации при любом начальном приближении $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$ сходится к x^* .

4.8. Исследуем значение $|\varphi'(x)|$ в окрестности корня x^* . Если $|\varphi'(x^*)| \geq 1$, то метод расходится. В противном случае метод будет сходиться. При вычислениях учтем, что $x^* \approx 0.6$ — корень уравнения, т.е. $e^{-x^*} = x^* \approx 0.6$.

- 1) $|\varphi'(x^*)| = \left| -\frac{1}{x^*} \right| = \left| \frac{1}{0.6} \right| > 1;$
- 2) $|\varphi'(x^*)| = \left| -e^{-x^*} \right| = \left| -x^* \right| = 0.6 < 1;$
- 3) $|\varphi'(x^*)| = \left| \frac{1 - e^{-x^*}}{2} \right| = \left| \frac{1 - x^*}{2} \right| = \left| \frac{1 - 0.6}{2} \right| = 0.2 < 1;$
- 4) $|\varphi'(x^*)| = \left| \frac{3 - 5e^{-x^*}}{8} \right| = \left| \frac{3 - 5x^*}{8} \right| = \left| \frac{3 - 5 \cdot 0.6}{8} \right| \approx 0.$

Для первого варианта метод расходится. Для трех последних сходится. Целесообразно использовать четвертый вариант.

4.9. В задаче речь идет о вычислении одного из корней функции $f(x) = x^3 + x - 1000$. Существование корня на отрезке $[9, 10]$ следует из теоремы 4.1: $f(9) = -262 < 0$, а $f(10) = 10 > 0$. Его единственность — из того, что производная сохраняет знак на этом интервале: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ для $x \in [9, 10]$. Корень $x^* \in [9, 10]$ — наибольший корень функции $f(x) = x^3 + x - 1000$, поскольку $f(x) = x^3 + x - 1000 > 0$ при любом $x > 10$.

Исследуем $|\varphi'(x)|$ для каждого варианта:

1) $\varphi'(x) = -3x^2$. Очевидно $|\varphi'(x)| > 1, \forall x \in [9, 10]$;

2) $\varphi'(x) = \frac{1}{x^3}(x - 2000)$. Для рассматриваемого интервала име-

ем $|\varphi'(x)| = \frac{1}{x^3}(2000 - x)$. Очевидно, эта функция убывающая.

Следовательно, ее минимум на интервале $[9, 10]$ достигается при $x = 10$: $\min_{x \in [9, 10]} |\varphi'(x)| = 2 - 0.01 > 1$. Поэтому $|\varphi'(x)| > 1, \forall x \in [9, 10]$;

3) $\varphi'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$. Для $x \in [9, 10]$ при возрастании

аргумента значение функции $|\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - x)^2}}$ тоже воз-

растает. Следовательно, ее максимум достигается на правом конце интервала при $x = 10$: $\max_{x \in [9, 10]} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000 - 10)^2}} \approx \frac{1}{300}$.

Поэтому $|\varphi'(x)| < q = \frac{1}{300} < 1, \forall x \in [9, 10]$.

Итак, для первых двух вариантов метод расходится, а для третьего сходится.

Для ответа на последний вопрос воспользуемся оценкой (4.16) теоремы 4.4. Поскольку начальное приближение x_0 должно выбираться из интервала $[9, 10]$, а следующее приближение x_1 тоже лежит в этом интервале ($\varphi(x)$ — сжимающее), то расстояние между x_0 и x_1 меньше его длины: $|x_1 - x_0| < 1$. Таким образом, в нашем случае $q = \frac{1}{300}$ и правая часть в (4.16) оценивается следующим образом:

$$\frac{|x_1 - x_0|}{1 - \frac{1}{300}} \left(\frac{1}{300} \right)^n \approx \left(\frac{1}{300} \right)^n.$$

Для того чтобы она была меньше 10^{-2} достаточно выбрать $n = 1$. Итак, необходимую точность мы получаем за одну итерацию.

4.10. Пусть $f'(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют постоянные m и M такие, что $0 < m \leq f'(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. Исходное уравнение равносильно уравнению $x = x - \tau f(x)$. Будем считать, что число $\tau > 0$. Таким образом, мы пришли к задаче отыскания неподвижной точки отображения $\varphi(x) = x - \tau f(x)$.

При сделанных предположениях имеем

$$1 - \tau M \leq \varphi'(x) = 1 - \tau f'(x) \leq 1 - \tau m.$$

Поэтому $|\varphi'(x)| \leq q(\tau) = \max\{|1 - \tau M|, |1 - \tau m|\}$. Для того чтобы выполнялось $q(\tau) < 1$, достаточно взять $\tau \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$.

Случай, когда $f'(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, сводится к рассмотренному умножением уравнения $f(x) = 0$ на -1 .

4.11. Используем результаты, полученные при решении предыдущей задачи. В нашем случае на отрезке $[1, a]$ ($a > 1$)

$$0 < m = 2 \leq f'(x) = 2x \leq 2a = M, \quad \forall x \in [1, a].$$

Поэтому отображение $\varphi(x) = x - \tau(x^2 - a)$ будет сжимающим для всех τ из интервала $\left(0, \frac{1}{a}\right)$.

Решим задачу минимизации по параметру $\tau \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ функции $q(\tau) = \max\{|1 - \tau M|, |1 - \tau m|\}$.

На рисунке приведены графики функций $|1 - \tau M|$ и $|1 - \tau m|$. Стрелками указан график функции $q(\tau) = \max\{|1 - \tau M|, |1 - \tau m|\}$, а ее минимум обозначен жирной точкой.

Точка минимума $q(\tau)$ характеризуется тем, что в ней функции $|1 - \tau M|$ и $|1 - \tau m|$ принимают одинаковые значения:

$$|1 - \tau M| = |1 - \tau m|, \quad \text{или} \quad -1 + \tau M = 1 - \tau m.$$

Отсюда получаем $\tau_{opt} = \frac{2}{m + M}$, а

$$q(\tau_{opt}) = \max\{|1 - \tau_{opt} M|, |1 - \tau_{opt} m|\} = 1 - \tau_{opt} m = 1 - \frac{2m}{m + M} = \frac{M - m}{M + m}.$$

В рассматриваемом случае

$$\tau_{opt} = \frac{1}{1 + a}, \quad q(\tau_{opt}) = \frac{a - 1}{a + 1} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = x - \frac{x^2 - a}{1 + a}.$$

Для приведенной $\varphi(x)$, в примере из разд. 4.4 показано, что $1 \leq \varphi(x) \leq a \quad \forall x \in [1, a]$. Итак, отображение $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.4 для интервала $[1, a]$. Поэтому метод простой итерации при любом начальном приближении $x_0 \in [1, a]$ сходится.

4.12. В соответствии с расчетными формулами метода Ньютона имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{ax_n} - 1}{-\frac{1}{ax_n^2}} = 2x_n - ax_n^2.$$

Заметим, что корнем уравнения $f(x) = 0$ является $x^* = \frac{1}{a}$. Таким образом, для вычисления числа, обратного к заданному, построен метод Ньютона $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$, расчетные формулы которого не содержат операций деления.

Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на рассматриваемом отрезке.

$$1) \quad f\left(\frac{1}{2a}\right) = 1 > 0, \quad f\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{1}{2} < 0, \quad \text{то есть на концах} \quad \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right]$$

функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков;

2) $f'(x) = -\frac{1}{ax^2} < 0$ и $f''(x) = 2\frac{1}{ax^3} > 0$ отличны от нуля и сохраняют знаки при x , принадлежащих $\left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right]$;

3) в силу $f\left(\frac{1}{2a}\right) = 1 > 0$, начальное приближение $x_0 = \frac{1}{2a}$ удовлетворяет неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Все условия теоремы 4.6 выполнены. Поэтому последовательность x_n метода Ньютона сходится.

4.13. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

1) $f(a-2b) = 3b^2 > 0$, $f(a) = -b^2 < 0$, т.е. на концах рассматриваемого отрезка $[a-2b, a]$ функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков;

2) $f'(x) = 2(x-a) < 0$ и $f''(x) = 2 > 0$ отличны от нуля и сохраняют знаки при x , принадлежащих $[a-2b, a]$;

3) в силу $f(a-2b) = 3b^2 > 0$, начальное приближение $x_0 = a-2b$ удовлетворяет неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Все условия теоремы 4.6 выполнены. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на интервале $[a-2b, a]$ и последовательность метода Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n - a)^2 - b^2}{2(x_n - a)} = \frac{x_n^2 + b^2 - a^2}{2(x_n - a)}$$

при выборе в качестве начального приближения $x_0 = a-2b$ к нему сходится.

4.14. Воспользуемся теоремой 4.6. Функция $f(x) = x^2 - 10$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $f'(x) = 2x$, а $f''(x) = 2$. Поэтому $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют знаки на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Кроме того, справедливо как $f(-\infty)f(0) < 0$, так и $f(0)f(\infty) < 0$. Из сказанного следует, что в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ содержится по одному корню функции $f(x) = x^2 - 10$. Поскольку $f''(x) > 0$, $\forall x$, то для их вычисления методом Ньютона (в соответствии с теоремой 4.6) достаточно выбрать начальное приближение x_0 таким образом, чтобы значение $f(x_0)$ было положительным. Для поиска корня, принадлежащего $(0, \infty)$, можно взять, например, $x_0 = 10$, а для определения корня $x^* \in (-\infty, 0)$, например, $x_0 = -10$.

4.15. Вычисляя производную функции $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1.5$, получаем $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$, $\forall x$. Следовательно, $f(x)$ возрастает, а учитывая $f(-\infty)f(\infty) < 0$, можно утверждать, что у нее имеется только один вещественный корень. Легко видеть, что $f''(x) = 6x + 2 < 0$ при $x < -\frac{1}{3}$. Кроме того, $f(-\frac{1}{3}) > 0$, а $f(-2) < 0$. Таким образом, единственный вещественный корень принадлежит интервалу $(-2, -\frac{1}{3})$. В соответствии с теоремой 4.6, для того чтобы метод Ньютона сходил, начальное приближение x_0 должно удовлетворять условию $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Таковым будет, например, $x_0 = -2$, поскольку $f(-2) < 0$ и $f''(-2) < 0$.

4.16. Выпишем расчетные формулы.

метод Ньютона: $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{2+x_n} x_n$;

метод Ньютона с параметром: $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n} x_n^2$.

Поскольку корень $x^* = 0$, то для метода Ньютона имеем $|x_{n+1} - x^*| = |\frac{1+x_n}{2+x_n}| |x_n - x^*| \approx \frac{1}{2} |x_n - x^*|$ при x_n , близких к корню, $x^* = 0$, т.е. сходимость метода линейная.

Для метода Ньютона с параметром при x_n близких к корню справедливо $|x_{n+1} - x^*| = |\frac{1}{2+x_n}| |x_n - x^*|^2 \approx \frac{1}{2} |x_n - x^*|^2$, что означает квадратичную сходимость.

4.17. Для метода Ньютона имеем $x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n$, а учитывая, что корень $x^* = 0$, $|x_{n+1} - x^*| = \frac{2}{3} |x_n - x^*|$, т.е. сходимость метода линейная.

Вычислим кратность корня уравнения $f(x) \equiv x^3 = 0$ по формулам разд. 4.7.

$$p \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{2x_{n+1} - x_{n+2} - x_n} = \frac{\frac{2}{3} x_n - x_n}{2 \frac{2}{3} x_n - \frac{4}{9} x_n - x_n} = 3;$$

$$p \approx \frac{1}{1 - [x - \frac{f(x)}{f'(x)}]'} = 3.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере формулы для приближенного вычисления кратности корня дают ее точное значение $p = 3$.

Получим расчетные формулы для метод Ньютона с параметром $p = 3$: $x_{n+1} = x_n - 3 \frac{x_n^3}{3x_n^2} = x_n - x_n = 0$, т.е. для любого начального приближения x_0 за одну итерацию мы получаем точное значение корня: $x_1 = 0$.

4.18. По условию задачи $f'(x) > 0$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает и из $f(x_0) > 0 = f(x^*)$ следует $x_0 > x^*$. Далее, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$. Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 в виде ряда Тейлора:

$$0 = f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(x^* - x_0)^2,$$

где $x^* < z_0 < x_0$. Так как $f''(x) > 0$, то $f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) < 0$ и,

следовательно, $x^* < x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$. Отсюда $f(x_1) > f(x^*) = 0$,

а значит, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1$. Используя формулу Тейлора в окрестности точки x_1 и проводя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены для x_0 , получим $x^* < x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Поскольку $f''(x) > 0$, то $f'(x)$ возрастает и из доказанного $x_1 < x_0$ следует $f'(x_1) < f'(x_0)$. Поэтому

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} = x_2.$$

Таким образом, $x^* < x_2$. Продолжая подобные рассуждения, получаем, что $\{x_n\}$ образует ограниченную монотонно убывающую последовательность. Следовательно, она имеет предел $\bar{x}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Переходя к пределу в

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

при $n \rightarrow \infty$, имеем $\bar{x}^* = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$, т. е. $f(\bar{x}^*) = 0$. Отсюда $\bar{x}^* = x^*$, что и требовалось доказать.

4.19. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^3}$ конечен. Представим итерационный процесс в виде

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{2f'(x)} - \frac{g(x)}{2g'(x)}, \quad g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Очевидно, что корень x^* функции $f(x)$ является неподвижной точкой отображения $\varphi(x)$. Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x^* дает

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{\varphi''(x^*)}{2}(x_n - x^*)^2 + \\ &+ \frac{\varphi^{(3)}(z_n)}{6}(x_n - x^*)^3, \end{aligned}$$

где z_n лежит между x^* и x_n .

Вычислим $\varphi'(x^*)$ и $\varphi''(x^*)$. Используя формулу

$$\left[\frac{r(x)}{r'(x)} \right]' = \frac{[r'(x)]^2 - r(x)r''(x)}{[r'(x)]^2} = 1 - \frac{r(x)r''(x)}{[r'(x)]^2},$$

получаем

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{2[f'(x)]^2} + \frac{g(x)g''(x)}{2[g'(x)]^2}.$$

А учитывая, что $f(x^*) = 0$ и $g(x^*) = 0$, имеем $\varphi'(x^*) = 0$.

Далее, так как

$$\left[\frac{r(x)r''(x)}{[r'(x)]^2} \right]' = r'(x) \frac{r''(x)}{[r'(x)]^2} + r(x) \left[\frac{r''(x)}{[r'(x)]^2} \right]',$$

то

$$\varphi''(x^*) = f'(x^*) \frac{f''(x^*)}{2[f'(x^*)]^2} + g'(x^*) \frac{g''(x^*)}{2[g'(x^*)]^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} + \frac{g''(x^*)}{2g'(x^*)}.$$

Применявшиеся выше формулы позволяют утверждать, что

$$g'(x^*) = 1, \quad \text{и} \quad g''(x^*) = -\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)},$$

а потому $\varphi''(x^*) = 0$.

Таким образом, $\varphi'(x^*) = 0$ и $\varphi''(x^*) = 0$, а значит (из формулы Тейлора), предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(3)}(z_n)}{6} = \frac{\varphi^{(3)}(x^*)}{6}$$

конечен, что и требовалось доказать.

4.20. Будем действовать так же, как и при решении предыдущей задачи, а именно представим итерационный процесс в виде

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)}.$$

Очевидно, что корень x^* функции $f(x)$ опять является неподвижной точкой отображения $\varphi(x)$. Следовательно, справедливо разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x^* , приведенное в решении предыдущей задачи.

Вычислив $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$, можно убедиться, что снова имеем $\varphi'(x^*) = 0$ и $\varphi''(x^*) = 0$. Значит, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(3)}(z_n)}{6} = \frac{\varphi^{(3)}(x^*)}{6}$$

конечен и, если метод сходится, то скорость сходимости кубичная.

Список литературы

Амосов А. А. и др. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. М.: Высш. шк., 1994.

Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.

Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.

Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Ч. 1; То же. М.: Физматгиз, 1962. Ч. 2.

Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1979.

Ильин В. П. Численный анализ. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. Ч. 1. 335 с.

Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

Крылов В. И. и др. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. М.: Наука, 1976. Т. 1; То же. М.: Наука, 1977. Т. 2.

Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. 8-е изд. М.: Физматлит, 2001. Т. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Амосов А. А. и др. Вычислительные методы для инженеров / А. А. Амосов, Ю. А. Дубинский, Н. В. Копченова. М.: Высш. шк. 1994.
- [2] Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
- [3] Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
- [4] Бахвалов Н. С. и др. Численные методы / Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. М.: Наука, 1987.
- [5] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Наука, 1966. Ч. 1; То же. М.: Физматгиз, 1962. Ч. 2.
- [6] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1979.
- [7] Ильин В. П. Численный анализ. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2004. Ч. 1. 335 с.
- [8] Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [9] Крылов В. И. и др. Вычислительные методы / В. В. Бобков, П. И. Монастырный. М.: Наука, 1976. Т.1; То же. М.: Наука, 1977. Т.2.
- [10] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
- [11] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т., 8-е изд. М.: Физматлит, 2001. Т. 1.