



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



Universidad Politécnica de Madrid

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del
Espacio**

Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Análisis de Funciones de Transferencia en Open-Loop

Estabilidad Longitudinal y Lateral-Direccional del RPAS *Global Hawk*

GRUPO 04

Román Ballano Martínez

Adrián Ruiz Quiñones

Rafael Tapia Doblas

Marc Vila Alperi

Especialidad: Intensificación en Aeronaves

Asignatura: Sistemas de Control de Vuelo

Madrid, 1 de noviembre de 2021

Índice de Contenidos

1. Introducción	7
2. Datos iniciales del problema	9
3. Fundamento Teórico	11
3.1. Dominio de Laplace	13
3.2. Funciones de Transferencia	15
4. Canal longitudinal	16
4.1. Respuesta de velocidad a entrada en timón de profundidad	16
4.1.1. Función de transferencia	16
4.1.2. Diagrama de Bode	17
4.1.3. Diagrama de Nichols	19
4.1.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	20
4.1.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada	21
4.2. Respuesta de ángulo de ataque a entrada en timón de profundidad	22
4.2.1. Función de transferencia	22
4.2.2. Diagrama de Bode	23
4.2.3. Diagrama de Nichols	24
4.2.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	24
4.2.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada	25
4.3. Respuesta de ángulo de asiento a entrada en timón de profundidad	26
4.3.1. Función de transferencia	26
4.3.2. Diagrama de Bode	26
4.3.3. Diagrama de Nichols	27
4.3.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	28
4.3.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada	29
4.4. Respuesta de velocidad angular de cabeceo a entrada en timón de profundidad	29
4.4.1. Función de transferencia	29
4.4.2. Diagrama de Bode	30
4.4.3. Diagrama de Nichols	31
4.4.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	32
4.4.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada	32
5. Canal lateral-direccional	34
5.1. Respuesta de velocidad angular de balance a entrada en alerones	34
5.1.1. Función de transferencia	34
5.1.2. Diagrama de Bode	35
5.1.3. Diagrama de Nichols	36
5.1.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	37
5.1.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada	38
5.2. Respuesta de velocidad angular de guiñada a entrada en alerones	39
5.2.1. Función de transferencia	39
5.2.2. Diagrama de Bode	39

5.2.3.	Diagrama de Nichols	40
5.2.4.	Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	41
5.2.5.	Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada	42
5.3.	Respuesta de ángulo de resbalamiento a entrada en timón de dirección	42
5.3.1.	Función de Transferencia	42
5.3.2.	Diagrama de Bode	43
5.3.3.	Diagrama de Nichols	44
5.3.4.	Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	45
5.3.5.	Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada	46
5.4.	Respuesta de velocidad angular de guiñada a entrada en timón de dirección	46
5.4.1.	Función de transferencia	46
5.4.2.	Diagrama de Bode	47
5.4.3.	Diagrama de Nichols	48
5.4.4.	Respuesta temporal a una entrada escalón unitario	48
5.4.5.	Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada	49

Índice de Figuras

2.1. UAV RQ-4A Global Hawk	9
4.1. Diagramas de Bode para la función $G_{u\delta_e}$	17
4.2. Diagrama de Nichols para la función $G_{u\delta_e}$	19
4.3. Respuesta temporal en velocidad frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.	20
4.4. Respuesta temporal en velocidad frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.	21
4.5. Diagramas de Bode para la función $G_{\alpha\delta_e}$	23
4.6. Diagrama de Nichols para la función $G_{\alpha\delta_e}$	24
4.7. Respuesta temporal en ángulo de ataque frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.	24
4.8. Respuesta temporal en ángulo de ataque frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.	25
4.9. Diagramas de Bode para la función $G_{\theta\delta_e}$	26
4.10. Diagrama de Nichols para la función $G_{\theta\delta_e}$	27
4.11. Respuesta temporal en ángulo de asiento frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.	28
4.12. Respuesta temporal en ángulo de asiento frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.	29
4.13. Diagramas de Bode para la función $G_{q\delta_e}$	30
4.14. Diagrama de Nichols para la función $G_{q\delta_e}$	31
4.15. Respuesta temporal en velocidad angular de cabeceo frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.	32
4.16. Respuesta temporal en velocidad angular de cabeceo frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.	32
5.1. Diagramas de Bode para la función $G_{p\delta_a}$	35
5.2. Diagrama de Nichols para la función $G_{p\delta_a}$	36
5.3. Respuesta temporal en velocidad angular de balance frente a una entrada en alerones de tipo escalón unitario.	37
5.4. Respuesta temporal en velocidad angular de balance frente a una entrada en alerones de tipo rampa unitaria saturada.	38
5.5. Diagramas de Bode para la función $G_{r\delta_a}$	39
5.6. Diagrama de Nichols para la función $G_{r\delta_a}$	40
5.7. Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en alerones de tipo escalón unitario.	41
5.8. Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en alerones de tipo rampa unitaria saturada.	42
5.9. Diagramas de Bode para la función $G_{\beta\delta_r}$	43
5.10. Diagrama de Nichols para la función $G_{\beta\delta_r}$	44
5.11. Respuesta temporal en ángulo de resbalamiento frente a una entrada en timón de dirección de tipo escalón unitario.	45
5.12. Respuesta temporal en ángulo de resbalamiento frente a una entrada en timón de dirección de tipo rampa unitaria saturada.	46

5.13. Diagramas de Bode para la función $G_{r\delta_r}$.	47
5.14. Diagrama de Nichols para la función $G_{r\delta_r}$.	48
5.15. Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en timón de dirección de tipo escalón unitario.	48
5.16. Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en timón de dirección de tipo rampa unitaria saturada.	49

Índice de Tablas

2.1. Valores de los datos geométricos	9
2.2. Valores de los datos máscicos	9
2.3. Valores de la condición del vuelo de referencia	9
2.4. Derivadas de estabilidad	10
4.1. Valores característicos de la función de transferencia $G_{u\delta_e}$	16
4.2. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{u\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.	17
4.3. Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{u\delta_e}$	18
4.4. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{u\delta_e}$	20
4.5. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{u\delta_e}$	21
4.6. Valores característicos de la función de transferencia $G_{\alpha\delta_e}$	22
4.7. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\alpha\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.	23
4.8. Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{\alpha\delta_e}$	23
4.9. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\alpha\delta_e}$	25
4.10. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\alpha\delta_e}$	25
4.11. Valores característicos de la función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$	26
4.12. Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{\theta\delta_e}$	27
4.13. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.	27
4.14. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\theta\delta_e}$	28
4.15. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\theta\delta_e}$	29
4.16. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{q\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.	30
4.17. Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{q\delta_e}$	30
4.18. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{q\delta_e}$	32
4.19. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{q\delta_e}$	33
5.1. Valores característicos de la función de transferencia $G_{p\delta_a}$	34
5.2. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{p\delta_a}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.	35
5.3. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{p\delta_a}$	37
5.4. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{p\delta_a}$	38
5.5. Valores característicos de la función de transferencia $G_{r\delta_a}$	39
5.6. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{r\delta_a}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.	40
5.7. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{r\delta_a}$	41
5.8. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{r\delta_a}$	42
5.9. Valores característicos de la función de transferencia $G_{\beta\delta_r}$	43
5.10. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\beta\delta_r}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.	43
5.11. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\beta\delta_r}$	45
5.12. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\beta\delta_r}$	46
5.13. Valores característicos de la función de transferencia $G_{r\delta_r}$	46

5.14. Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{r\delta_r}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.	47
5.15. Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{r\delta_r}$	49
5.16. Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{r\delta_r}$	49

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día en el mundo de la aviación, tanto civil como militar, el empleo de los Sistemas de Control de Vuelo (FCS por sus siglas en inglés) son de vital importancia. El estudio de estos sistemas necesita de conocimientos multidisciplinarios en áreas como la mecánica del vuelo, aerodinámica y teoría de control.

El objetivo de este trabajo es el de obtener las funciones de transferencia **dimensionales** en lazo abierto (*open loop*) a partir de las características geométricas y datos másicos del avión y de sus derivadas de estabilidad para un modelo de avión proporcionado.

Primero se plantearán cuáles son los datos del avión asignado a estudiar. A continuación, a partir de las ecuaciones del movimiento longitudinal y lateral-direccional, se obtendrán las matrices que componen la función de estado, que viene dada por la expresión siguiente:

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \quad (1.1)$$

Donde los distintos elementos que la conforman son:

$\vec{x}(t)$: Vector de estado

$\vec{u}(t)$: Vector de control

$[A]$: Matriz de estado

$[B]$: Matriz de entrada

A partir de estas matrices, se podrá conocer la respuesta del sistema $\vec{x}(t)$. Luego, mediante el uso de la transformada de Laplace, se obtendrán las distintas funciones de transferencia factorizadas, tanto para el canal longitudinal, como para el canal lateral-direccional.

Mediante el empleo de Matlab, se extraerán los diagramas de Bode y Nichols para cada función de transferencia correspondientes a ambos canales.

A continuación, se representarán las respuestas temporales para una entrada de tipo escalón unitario y para otra de tipo rampa unitaria saturada para cada función de transferencia, analizándose los parámetros característicos de cada respuesta.

Finalmente, se hará un análisis de las diferencias en la respuesta obtenida del sistema en ambas entradas y se expondrán las conclusiones.

Este trabajo servirá como base para el siguiente trabajo, donde se implementará este sistema dinámico y se realizará el estudio de la estabilidad y controlabilidad en lazo cerrado (*closed loop*).

Capítulo 2

Datos iniciales del problema

Para el caso que se va a estudiar en el presente trabajo, se han proporcionado una serie de datos que han sido extraídos del Trabajo de Fin de Máster de una compañera del Máster en Ingeniería Aeronáutica. Estos datos corresponden al modelo de avión que aparece a continuación (Figura 2.1):



Figura 2.1: UAV RQ-4A Global Hawk

En las siguientes tablas se muestran los datos geométricos, los datos másicos del avión, la condición de referencia de vuelo y las derivadas de estabilidad longitudinales y lateral-direccionales.

Datos Geométricos		
$S_w = 48,68 \text{ m}^2$	$c = 1,48 \text{ m}$	$b = 35,42 \text{ m}$

Tabla 2.1: Valores de los datos geométricos

Datos Másicos		
$m = 9375 \text{ kg}$	$I_{x_b} = 168907 \text{ kgm}^2$	$I_{y_b} = 45466 \text{ kgm}^2$
$I_{z_b} = 210513 \text{ kgm}^2$	$I_{xz_b} = -1660 \text{ kgm}^2$	

Tabla 2.2: Valores de los datos másicos

Condición de Referencia		
$h_s = 10000 \text{ m}$	$U_s = 320 \text{ kts}$	$\alpha_{x_b-x_s} = -0,0^\circ$
$C_{L_s} = 0,154$	$C_{D_s} = 0,026$	$\epsilon_s = 0,0^\circ$

Tabla 2.3: Valores de la condición del vuelo de referencia

Derivadas de Estabilidad	
Longitudinales	Lateral-Direccionales
$C_{D_{\dot{u}}} = +0.053; C_{D_{\alpha}} = +0.036$	$C_{l_{\beta}} = -0.022; C_{l_{\dot{\beta}}} = -0.567$
$C_{T_{\dot{u}}} = -0.051$	$C_{Y_{\beta}} = +0.296; C_{Y_{\dot{\beta}}} = -0.000$
$C_{L_{\dot{u}}} = +0.213; C_{L_{\alpha}} = +6.578$	$C_{n_{\beta}} = +0.007; C_{n_{\dot{\beta}}} = -0.022$
$C_{L_{\dot{\alpha}}} = +0.463; C_{L_{\dot{q}}} = +9.031$	$C_{n_{T_{\beta}}} = +0.000$
$C_{m_{\dot{u}}} = +0.063; C_{m_{\alpha}} = -2.701$	$C_{l_{\dot{\beta}}} = +0.056; C_{Y_{\dot{\beta}}} = +0.088$
$C_{m_{\dot{\alpha}}} = -1.900; C_{m_{\dot{q}}} = -13.777$	$C_{n_{\dot{\beta}}} = -0.018$
$C_{m_{T_{\dot{u}}}} = +0.044$	$C_{l_{\delta_a}} = +0.262; C_{l_{\delta_r}} = -0.004$
$C_{D_{\delta_e}} = +0.022; C_{L_{\delta_e}} = 0.161$	$C_{Y_{\delta_a}} = +0.000; C_{Y_{\delta_r}} = -0.117$
$C_{m_{\delta_e}} = -0.661$	$C_{n_{\delta_a}} = -0.001; C_{n_{\delta_r}} = 0.020$

Tabla 2.4: Derivadas de estabilidad

Capítulo 3

Fundamento Teórico

Antes de introducir los resultados de la estabilidad y controlabilidad de la aeronave a estudiar, se va a realizar un repaso teórico de cuál es el proceso a seguir para obtener las funciones de transferencia **dimensionales** en lazo abierto, para los canales longitudinal y lateral-direccional.

Partiendo de la hipótesis de pequeñas perturbaciones, aplicada a una condición de vuelo de referencia que corresponde con la de vuelo simétrico, rectilíneo, horizontal, con las alas a nivel y estacionario, se pueden linealizar las ecuaciones dinámicas del movimiento del avión.

Las hipótesis de pequeñas perturbaciones se aplicarán sobre los mandos longitudinales como una entrada en deflexión del timón de profundidad, mientras que para el caso lateral-direccional las entradas corresponden a deflexión de alerones y timón de dirección.

El sistema de ecuaciones linealizadas dimensionales para el movimiento longitudinal viene expresado cómo:

$$\begin{aligned} \left(X_u - m \frac{d}{dt} \right) \Delta u + X_w \Delta w - mg \cos \theta_s \Delta \theta &= -X_{\delta_e} \Delta \delta_e \\ Z_u \Delta u + \left(Z_w + (Z_{\dot{w}} - m) \frac{d}{dt} \right) \Delta w + \left((Z_q + m u_s) \frac{d}{dt} - mg \sin \theta_s \right) \Delta \theta &= -Z_{\delta_e} \Delta \delta_e \\ M_u \Delta u + \left(M_w + m_{\dot{w}} \frac{d}{dt} \right) \Delta w + \left(M_q \frac{d}{dt} - I_y \frac{d^2}{dt^2} \right) \Delta \theta &= - \left(M_{\delta_e} + M_{\dot{\delta}_e} \frac{d}{dt} \right) \Delta \delta_e \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} &= \Delta q \end{aligned}$$

De cara a presentar de manera más general toda la información que proporciona este sistema de ecuaciones longitudinal, se adimensionalizará en base a las siguientes magnitudes características:

Longitud: $c/2$	Presión: $(1/2)\rho V^2$
Superficie: S	Fuerzas exteriores: $(1/2)\rho V^2 S$
Velocidad: u_s	Momento exterior: $(1/2)\rho V^2 S c$
Masa: $\rho S c/2$	Momento charnela timón: $(1/2)\rho V^2 \eta_t S_e c_e$
Tiempo: $c/2u_s$	Momento inercia avión: $\rho S (c/2)^3$
	Momento inercia timón: $\rho \nu_t S_e (c_e/2)(c/2)^2$

Para poder adimensionalizar se hará uso del operador "D", que representa la derivada con respecto del tiempo adimensional, las perturbaciones adimensionales $\Delta\hat{u}$ y $\Delta\hat{q}$, y los parámetros geométricos y másicos siguientes:

$$D = \frac{d}{dt} \frac{c}{2u_s} \quad \Delta\hat{u} = \frac{\Delta u}{u_s} \quad \Delta\hat{q} = \Delta q \frac{c}{2u_s}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho S c/2} \quad \hat{I}_{yy} = \frac{I_{yy}}{\rho S \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

El sistema de ecuaciones adimensionales que determina la respuesta del movimiento longitudinal queda expresado como:

$$(2\mu D - C_{X\hat{u}})\Delta\hat{u} - C_{X\alpha}\Delta\alpha - C_{Zs}\Delta\theta = C_{X\delta_e}\Delta\delta_e$$

$$-(C_{Z\hat{u}} + 2C_{Zs})\Delta\hat{u} + ((2\mu - C_{Z\hat{\alpha}})D - C_{Z\alpha})\Delta\alpha - (2\mu + C_{Z\hat{q}})D\Delta\delta$$

$$-C_{m\hat{u}}\Delta\hat{u} - (C_{m\hat{\alpha}}D + C_{m\alpha})\Delta\alpha + (\hat{I}_y D^2 - C_{m\hat{q}}D)\Delta\theta = C_{m\delta}D + C_{m\delta_e}\Delta\delta_e$$

$$D\Delta\theta = \Delta\hat{q}$$

De manera análoga, a continuación se expresan las ecuaciones dimensionales que determinan la respuesta en el modo lateral-direccional.

$$\left(Y_v - m \frac{d}{dt}\right) \Delta v + Y_p \Delta p + (Y_r - m u_s) \Delta r + m g \cos \theta_s \Delta \phi = -Y_{\delta_r} \Delta \delta_r$$

$$L_v \Delta v + \left(L_p - I_x \frac{d}{dt}\right) \Delta p + \left(L_r + J_{xz} \frac{d}{dt}\right) \Delta r = -\left(L_{\delta_a} + L_{\delta_a} \frac{d}{dt}\right) \Delta \delta_a - L_{\delta_r} \Delta \delta_r$$

$$N_v \Delta v + \left(N_p + J_{xz} \frac{d}{dt}\right) \Delta p + \left(N_r - I_z \frac{d}{dt}\right) \Delta r = -(N_{\delta_a} \Delta \delta_a - \left(N_{\delta_r} + N_{\delta_r} \frac{d}{dt}\right) \Delta \delta_r$$

$$\frac{d\Delta\phi}{dt} = \Delta p + \tan \theta_s \Delta r$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \sec \theta_s \Delta r$$

Adimensionalizando en base a las siguientes magnitudes características:

Longitud: $b/2$	Presión: $(1/2)\rho V^2$
Superficie: S	Fuerzas exteriores: $(1/2)\rho V^2 S$
Velocidad: u_s	Momento exterior: $(1/2)\rho V^2 S b$
Masa: $\rho S b/2$	Momento charnela alerones: $(1/2)\rho V^2 S_a c_a$
Tiempo: $b/2u_s$	Momento charnela timón dirección: $(1/2)\rho V^2 \eta_v S_r c_r$
	Momento inercia avión: $\rho S (b/2)^3$
	Momento de inercia alerones: $\rho S_a (c_a/2)(b/2)^2$
	Momento inercia timón dirección: $\rho \eta_v S_r (c_r/2)(b/2)^2$

En esta ocasión haremos uso del operador "D", adimensionalizado correctamente usando la envergadura b, así como el resto de parámetros geométricos, másicos y derivadas adimensionales:

$$D = \frac{d}{dt} \frac{b}{2u_s} \quad \Delta\hat{p} = \Delta p \frac{b}{2u_s} \quad \Delta\hat{r} = \Delta r \frac{b}{2u_s}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho S b/2} \quad \hat{I}_{xx} = \frac{I_{xx}}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3} \quad \hat{I}_{zz} = \frac{I_{zz}}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3} \quad \hat{J}_{xz} = \frac{J_{xz}}{\rho S \left(\frac{b}{2}\right)^3}$$

Finalmente el sistema de ecuaciones adimensionales que determina la respuesta del movimiento lateral-direccional es el siguiente:

$$\begin{aligned}
(2\mu D - C_{Y\beta})\Delta\beta - C_{Y\hat{p}}\Delta\hat{p} + (2\mu - C_{Y\hat{r}})\Delta\hat{r} + C_{Zs}\Delta\phi &= C_{Y\delta_r}\Delta\delta_r \\
-C_{l_\beta}\Delta\beta + (\hat{I}_x D - C_{l\hat{p}})\Delta\hat{p} - (\hat{J}_{xz}D + C_{l\hat{r}})\Delta\hat{r} &= (C_{l\delta_a} D + C_{l\delta_a})\Delta\delta_a + C_{l\delta_r}\Delta\delta_r \\
-C_{n_\beta}\Delta\beta - (\hat{J}_{xz}D + C_{n\hat{p}})\Delta\hat{p} + (\hat{I}_z D + C_{n\hat{r}})\Delta\hat{r} &= C_{n\delta_a}\Delta\delta_a + (C_{n\delta_r} D + C_{n\delta_r})\Delta\delta_r \\
D\Delta\phi &= \Delta\hat{p} \\
D\Delta\psi &= \Delta\hat{r}
\end{aligned}$$

Como ya se mencionó anteriormente, estos sistemas se presentan por medio de la ecuación:

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t)$$

Si particularizamos la ecuación para el canal longitudinal, las variables de estado que forman el vector de estado, $\vec{x}(t)$, y el vector entrada $\vec{u}(t)$, corresponden a:

$$\vec{x}(t) = \{\Delta\hat{u}(t), \Delta\alpha(t), \Delta\theta(t), \Delta q(t)\} \quad \vec{u}(t) = \{\Delta\delta_e(t)\}$$

Por su parte, las variables y entradas para el canal Lateral-Direccional quedarán expresadas como:

$$\vec{x}(t) = \{\Delta\beta(t), \Delta\hat{p}(t), \Delta\hat{r}(t), \Delta\phi(t)\} \quad \vec{u}(t) = \{\Delta\delta_a(t), \Delta\delta_r(t)\}$$

3.1. Dominio de Laplace

Tomando en estos sistemas de ecuaciones la transformada de Laplace (con condiciones iniciales nulas), y denotando, para el canal longitudinal:

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{u}(s) &= \mathcal{L}(\Delta\hat{u}(t)) \\
\Delta\alpha(s) &= \mathcal{L}(\Delta\alpha(t)) \\
\Delta\theta(s) &= \mathcal{L}(\Delta\theta(t)) \\
\Delta\delta_e(s) &= \mathcal{L}(\Delta\delta_e(t))
\end{aligned}$$

Y para el canal lateral-direccional:

$$\begin{aligned}
\Delta\beta(s) &= \mathcal{L}(\Delta\beta(t)) \\
\Delta\phi(s) &= \mathcal{L}(\Delta\phi(t)) \\
\Delta\hat{r}(s) &= \mathcal{L}(\Delta\hat{r}(t)) \\
\Delta\delta_a(s) &= \mathcal{L}(\Delta\delta_a(t)) \\
\Delta\delta_r(s) &= \mathcal{L}(\Delta\delta_r(t))
\end{aligned}$$

Se toma la transformada de Laplace y se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{aligned}s[I]\vec{x}(s) &= A\vec{x}(s) + B\vec{u}(s) \\ \{s[I] - A\}\vec{x}(s) &= B\vec{u}(s) \\ A'\Delta\vec{x}(s) &= B\Delta\vec{u}(s)\end{aligned}$$

Estos sistemas que se generan son lineales y no homogéneos. A partir de la forma matricial, y resolviendo por el método de Cramer se pueden obtener las funciones de transferencia del sistema.

A continuación, se va a expresar como quedarían los sistemas matriciales para ambos canales y posteriormente se obtendrán las buscadas funciones de transferencia de cada entrada a las variables de estado del sistema, así como los diagramas de Bode y Nichols.

3.2. Funciones de Transferencia

Expresando en forma matricial los sistemas de ecuaciones, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{X\dot{u}} & -C_{X\alpha} & -C_{Zs} \\ -(C_{Z\dot{u}} + 2C_{Zs}) & ((2\mu - C_{Z\dot{\alpha}})s - C_{Z\alpha}) & -(2\mu + C_{Z\dot{q}})s \\ -C_{m\dot{u}} & -(C_{m\dot{\alpha}}s + C_{m\alpha}) & (\hat{I}_y s^2 - C_{m\dot{q}}s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\hat{u}(s) \\ \Delta\alpha(s) \\ \Delta\theta(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{X\delta_e} \\ C_{Z\delta_e} \\ C_{m\dot{\delta}_e}s + C_{m\delta_e} \end{Bmatrix} \Delta\delta_e(s) \quad (3.1)$$

La solución del sistema con las tres ecuaciones dinámicas es, tras aplicar el método de Cramer:

$$\begin{aligned} \Delta\hat{u}(s) &= \frac{N_{\hat{u}\delta_e}(s)}{D(s)} \Delta\delta_e(s) & G_{\hat{u}\delta_e} &= \frac{\Delta\hat{u}(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\hat{u}\delta_e}(s)}{D(s)} \\ \Delta\alpha(s) &= \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)} \Delta\delta_e(s) & G_{\alpha\delta_e} &= \frac{\Delta\alpha(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\alpha\delta_e}(s)}{D(s)} \\ \Delta\theta(s) &= \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)} \Delta\delta_e(s) & G_{\theta\delta_e} &= \frac{\Delta\theta(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)} \\ \Delta q(s) &= s\Delta\theta(s) & G_{q\delta_e} &= \frac{\Delta q(s)}{\Delta\delta_e(s)} = s \frac{N_{\theta\delta_e}(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

Donde $G_{\hat{u}\delta_e}$, $G_{\alpha\delta_e}$, $G_{\theta\delta_e}$ y $G_{q\delta_e}$ representan las cuatro funciones de transferencia y $N_{\hat{u}\delta_e}(s)$, $N_{\alpha\delta_e}(s)$ y $N_{\theta\delta_e}(s)$ son los numeradores que aparecen en las funciones de transferencia. Por otro lado $D(s)$ es el determinante característico del sistema o cuártica de estabilidad longitudinal, que viene dado por el determinante de la matriz de estado A' del movimiento longitudinal:

$$D_{LON}(s) = |A'_{LON}| = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E \quad (3.2)$$

De igual manera, para el caso del canal Lateral-Direccional, las ecuaciones en forma matricial quedan:

$$\begin{bmatrix} 2\mu s - C_{Y\beta} & -(C_{Y\dot{\beta}}s - C_{Zs}) & 2\mu - C_{Y\hat{r}} \\ -C_{l\beta} & (\hat{I}_x s^2 - C_{l\dot{\beta}}s) & -(J_{xz}s + C_{l\hat{r}}) \\ -C_{n\beta} & -(J_{xz}s^2 + C_{n\dot{\beta}}s) & \hat{I}_z s - C_{n\hat{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\beta(s) \\ \Delta\phi(s) \\ \Delta\hat{r}(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_{Y\delta_r} \\ C_{l\dot{\delta}_a}s + C_{l\delta_a} & C_{l\delta_r} \\ C_{n\delta_a} & C_{l\dot{\delta}_r}s + C_{n\delta_r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\delta_a(s) \\ \Delta\delta_r(s) \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Se puede observar que el movimiento lateral y el direccional están acoplados y, por tanto, hay seis funciones de transferencia más cuatro obtenidas a partir de éstas:

$$\begin{aligned} G_{\beta\delta_a} &= \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\beta\delta_a}(s)}{D(s)} & G_{\phi\delta_a} &= \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\phi\delta_a}(s)}{D(s)} & G_{\hat{r}\delta_a} &= \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{N_{\hat{r}\delta_a}(s)}{D(s)} \\ G_{\beta\delta_r} &= \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\beta\delta_r}(s)}{D(s)} & G_{\phi\delta_r} &= \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\phi\delta_r}(s)}{D(s)} & G_{\hat{r}\delta_r} &= \frac{\Delta\hat{r}(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{N_{\hat{r}\delta_r}(s)}{D(s)} \\ G_{p\delta_a} &= \frac{\Delta p(s)}{\Delta\delta_a(s)} = s \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = sG_{\phi\delta_a} & G_{\psi\delta_a} &= \frac{\Delta\psi(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{1}{s} \frac{\Delta r(s)}{\Delta\delta_a(s)} = \frac{1}{s} G_{r\delta_a} \\ G_{p\delta_r} &= \frac{\Delta p(s)}{\Delta\delta_r(s)} = s \frac{\Delta\phi(s)}{\Delta\delta_r(s)} = sG_{\phi\delta_r} & G_{\psi\delta_r} &= \frac{\Delta\psi(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{1}{s} \frac{\Delta r(s)}{\Delta\delta_r(s)} = \frac{1}{s} G_{r\delta_r} \end{aligned}$$

Donde $D(s)$ es el determinante característico o cuártica de estabilidad lateral-direccional del sistema dado por la expresión (3.2) aplicada a la matriz A' del canal lateral-direccional.

Capítulo 4

Canal longitudinal

4.1. Respuesta de velocidad a entrada en timón de profundidad

4.1.1. Función de transferencia

$$G_{u\delta_e} = [K]_{u\delta_e} \frac{(\tau_u s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_u} \right)^2 + 2\xi_u \left(\frac{s}{\omega_u} \right) + 1 \right]}{\left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right)^2 + 2\xi_{SP} \left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right)^2 + 2\xi_P \left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right) + 1 \right]} \quad (4.1)$$

$[K]_{u\delta_e} \text{ [(m/s)/}^\circ]$	5.342
$\tau_u \text{ [s]}$	-0.29
$\omega_u \text{ [rad/s]}$	2.44
$\xi_u \text{ [-]}$	0.16
$\omega_{SP} \text{ [rad/s]}$	7.39
$\xi_{SP} \text{ [-]}$	0.26
$\omega_P \text{ [rad/s]}$	0.13
$\xi_P \text{ [-]}$	0.15

Tabla 4.1: Valores característicos de la función de transferencia $G_{u\delta_e}$.

Esta función de transferencia representa las perturbaciones en la velocidad Δu ante entradas de perturbaciones en el timón de profundidad $\Delta \delta_e$. Como podemos observar al factorizar la función vemos que en el denominador aparecen dos pares de autovalores complejos conjugados a diferentes frecuencias que inducirán movimientos oscilatorios dentro de la respuesta unitaria del sistema. Esto concuerda, si lo traducimos al modelo físico, con la aparición de los dos modos propios longitudinales: el fugoide (P, *phugoid*) y el de corto periodo (SP, *short period*), que como se explica en el capítulo 3.3 de la referencia [2], ambos están caracterizados por su frecuencia natural y su amortiguamiento, dados por $\{\omega_P, \xi_P\}$ para el modo fugoide a frecuencia baja, y por $\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$ para el modo de corto periodo a frecuencia mayor.

En cuanto a la ganancia estática ($i\omega \rightarrow 0$), viene dada por el parámetro $[K]_{u\delta_e}$, que indica el aumento de velocidad de perturbación estacionaria frente a una entrada escalón unitario sobre timón de profundidad, resultando en un aumento de la misma velocidad respecto a la condición de referencia al tener ésta signo positivo.

4.1.2. Diagrama de Bode

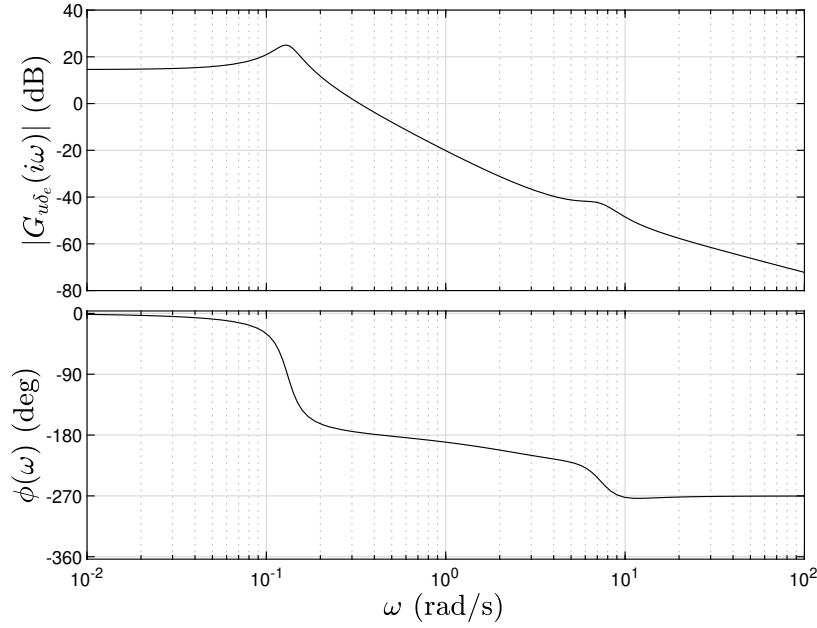


Figura 4.1: Diagramas de Bode para la función $G_{u\delta_e}$.

A continuación pasamos del dominio de *Laplace* en s al dominio de las frecuencias, de esta manera se puede observar la diferencia entre la amplitud de salida en estacionario (aumento de velocidad, Δu) ante la excitación a la entrada (ángulo del elevador, $\Delta\delta_e$) a diferentes frecuencias, junto con el ángulo de desfase de ambas señales en grados.

$ G_{u\delta_e}(\omega_P) $ [dB]	24.94
$ G_{u\delta_e}(\omega_{SP}) $ [dB]	-42.84

Tabla 4.2: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{u\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.

Para esta primera función de transferencia podemos observar tres zonas interesantes de estudio, correspondientes a las diferentes zonas de influencia en función de las frecuencias dadas, por ello podemos distinguir en:

- $\omega \in [0, \omega_P]$: Delimita la zona proporcional, cuya ganancia y fase se mantiene constante.
- $\omega \in [\omega_P, \omega_{SP}]$: Comienza la zona afectada por el primer par de polos complejos conjugados $\{\omega_P, \xi_P\}$, que presenta un pico asintótico en la frecuencia natural del modo (ω_P), seguido de una atenuación del orden de -40 dB/década , así como un cambio de fase de 180° . Cabe denotar también que cuando la frecuencia se aproxima al límite superior se llega a la zona de influencia del cero real dado por τ_{u1} , cuya cercanía al eje imaginario se hace influyente provocando una zona de ganancia nula antes de llegar al segundo pico asintótico.
- $\omega \in [\omega_{SP}, \infty]$: Por último se presenta el último pico asintótico, marcado por el segundo par de polos complejos conjugados $\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$, a su frecuencia natural ω_{SP} que viene marcada por la zona del modo de corto periodo. Mas allá de la frecuencia natural de este modo, observamos que el sistema se comporta como se esperaría de un sistema con función de transferencia de cuarto orden, una disminución de -40 dB/dec . En cuanto a la fase observamos que de manera similar al comportamiento en la zona influenciada por el modo fugoide, se da un cambio de 90° en el desfase seguido de una zona de fase constante en frecuencias grandes.

Esto queda recogido a continuación en la Tabla 4.3.

Función Elemental		Módulo y Fases Asintóticas		
		ω_b	$\omega \ll \omega_b$	$\omega \gg \omega_b$
$[K]_{ude}$	Proporcional	-	14.55 dB, 0°	14.55 dB, 0°
$\{\omega_P, \xi_P\}$	Modo Fugoide	ω_P	20 dB/dec, 0°	-40 dB/dec, -180°
$[\omega_u, \xi_u]$	Par de Ceros Complejos	ω_u	0 dB/dec, -180°	0 dB/dec, -180°
$[-1/\tau_u]$	Cero Real	$1/\tau_u$	0 dB/dec, -180°	20 dB/dec, -270°
$\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$	Modo Corto Periodo	ω_{SP}	0 dB/dec, -180°	-40 dB/dec, -270°

Tabla 4.3: Trazas asintóticas del diagrama de Bode para G_{ude} .

Si se analiza esta información desde el punto de vista de las Cualidades de Vuelo, se puede intuir la carga de trabajo que supondrá al piloto controlar la velocidad de vuelo a través del timón de profundidad. Para llevar a cabo este estudio, se analizarán dos parámetros que son la frecuencia de cruce en ganancia (ω_G) y la frecuencia de desfase (ω_{180}).

La frecuencia en ganancia indica el intervalo de frecuencias dónde la efectividad del control es adecuada para conseguir un cambio en la velocidad del avión usando el timón de profundidad. Para este caso, ω_G se sitúa en torno a 0.2-0.3 rad/s haciendo que la efectividad del control no sea adecuada y el piloto tenga que aumentar bastante la amplitud de los mandos para conseguir una respuesta en velocidad determinada.

En cuanto a la frecuencia de desfase, indica el desfase de la velocidad respecto a los comandos o entrada. Para este caso, ω_{180} se sitúa en torno a 0.4 rad/s aproximadamente. Este desfase se mantiene en un rango de frecuencias amplio y que coinciden con las del piloto por lo que éste tendrá que estar constantemente anticipándose a la respuesta del avión para conseguir el comportamiento requerido.

La frecuencia del modo fugoide se encuentra dentro del rango de frecuencias dónde la efectividad del control es buena para modificar la velocidad de vuelo pero, sin embargo, el modo fugoide presenta un bajo amortiguamiento lo que hará incrementar la carga de trabajo del piloto que tendrá que contrarrestar las oscilaciones producidas.

También se puede observar en la figura 4.1 que el desfase para frecuencias inferiores a ω_{180} y hasta aproximadamente 0.1 rad/s, la velocidad de perturbación tiene un desfase de 180° respecto a los mandos de entrada del timón de profundidad. Esto hará que el piloto tenga que estar continuamente adelantándose a la respuesta del avión para conseguir el movimiento deseado. Resumiendo, se espera una carga del trabajo del piloto moderada.

4.1.3. Diagrama de Nichols

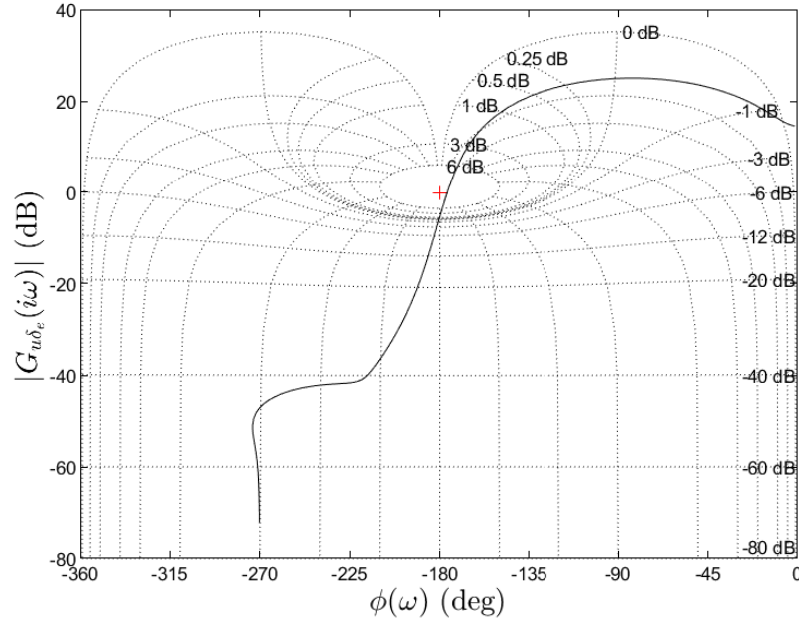


Figura 4.2: Diagrama de Nichols para la función $G_{u\delta_e}$.

Para finalizar los diagramas de análisis de módulo y fase, se ha empleado una última herramienta que se puede observar en la Figura 4.2, el diagrama de Nichols. Permite representar de forma compacta la ganancia a diferentes desfases como si se tratase de una forma compacta de mostrar ambos diagramas de Bode, siendo el parámetro de desplazamiento sobre la curva la frecuencia de excitación.

En este tipo de diagramas se puede observar, de manera concisa, información como los márgenes de ganancia a las frecuencias naturales, anchos de banda, pudiendo obtener así la función de transferencia en lazo cerrado a partir de la de lazo abierto.

En cuanto al análisis del diagrama de Nichols mostrado en la Figura 4.2, podemos ver que a frecuencias altas tenemos ganancias muy negativas, es decir, tendiendo a cero, y para fases mayores a -180° tenemos ganancias positivas junto con la intersección a -3 dB. Se puede comprobar cómo ω_p actúa como frecuencia de corte, actuando de manera similar a un filtro paso bajo.

4.1.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

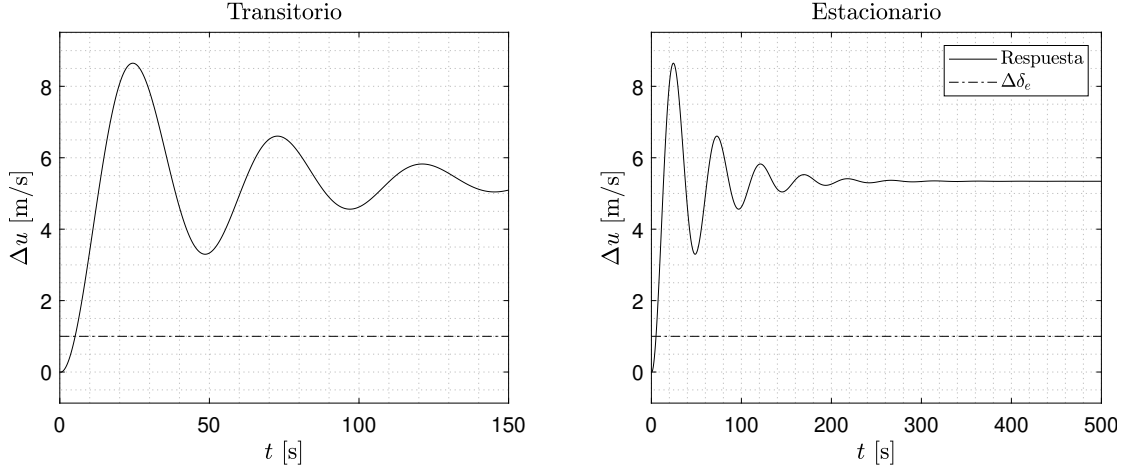


Figura 4.3: Respuesta temporal en velocidad frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	61.3
Δu_p [m/s]	8.62
t_p [s]	25.5
Δu_{st} [m/s]	5.34
t_s [s]	196

Tabla 4.4: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{u\delta_e}$.

La figura 4.3 recoge la respuesta en velocidades ante una entrada escalón unitario en timón de profundidad. La línea a trazos con puntos representa dicha entrada, la cual se representará una única vez por entrada en lo que resta de informe, tanto para entrada escalón como rampa.

En cuanto a la respuesta a un escalón unitario podemos observar cómo dada la naturaleza de la función de transferencia, se observan oscilaciones que se van amortiguando en el tiempo debidas a los pares de polos complejos conjugados que tenemos en la misma. Los valores pico y estacionario vienen recogidos en la tabla 4.4 con los subíndices "p" (*peak*) y "st" (*steady*) respectivamente, junto al instante de tiempo en el que se da cada uno. La sobreoscilación inicial está definida por la siguiente expresión (en este caso, siendo $y = \Delta u$):

$$[M]_p [\%] = \frac{y_p - y_{st}}{y_{st}} \cdot 100 \quad (4.2)$$

En lo referido al sentido en términos de Cualidades de Vuelo, implica que cuando el piloto aplique un grado de deflexión del timón de profundidad, al ser un ángulo pequeño a frecuencia cero, esto se traduce en un aumento de la velocidad con oscilaciones inducidas por el modo de fugoide que van quedando atenuadas a medida que pasa el tiempo.

Aún así, se puede observar que la respuesta es muy lenta hasta llegar al estacionario, tendiendo a un valor dado por $[K]_{u\delta_e}$, es decir $i\omega \rightarrow 0$.

4.1.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada

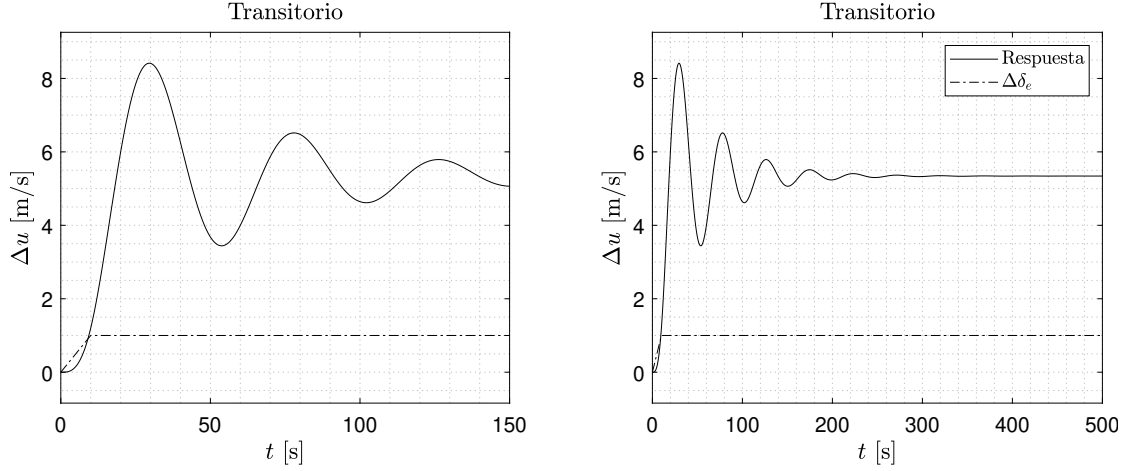


Figura 4.4: Respuesta temporal en velocidad frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	57.5
Δu_p [m/s]	8.41
t_p [s]	29.6
Δu_{st} [m/s]	5.34
t_s [s]	182

Tabla 4.5: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{u\delta_e}$

Por otra parte, analizando la respuesta ante una entrada en rampa unitaria saturada aplicada durante 10 segundos, al inicio se puede observar una sobreoscilación elevada, siendo este un comportamiento similar a la entrada de escalón unitario si bien es ligeramente menor.

En cuanto a la evolución de la respuesta con el tiempo, se puede observar como hay unas oscilaciones poco amortiguadas pero con una frecuencia baja, características del modo fugoide y que pueden ser controlables por el piloto. Conforme la respuesta alcanza un comportamiento más estacionario adopta de nuevo una forma muy parecida a la respuesta del escalón unitario. Los modos principales de $[G]_{\alpha\delta_e}$ vienen dados una vez mas por los polos del modo fugoide y de corto periodo, $\{\omega_P, \xi_P\}$ y $\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$ respectivamente.

4.2. Respuesta de ángulo de ataque a entrada en timón de profundidad

4.2.1. Función de transferencia

$$G_{\alpha\delta_e} = [K]_{\alpha\delta_e} \frac{(\tau_\alpha s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_\alpha} \right)^2 + 2\xi_\alpha \left(\frac{s}{\omega_\alpha} \right) + 1 \right]}{\left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right)^2 + 2\xi_{SP} \left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right)^2 + 2\xi_P \left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right) + 1 \right]} \quad (4.3)$$

$[K]_{\alpha\delta_e} [-]$	- 0.17
$\tau_\alpha [s]$	$4.8 \cdot 10^{-3}$
$\omega_\alpha [\text{rad/s}]$	0.11
$\xi_\alpha [-]$	0.18

Tabla 4.6: Valores característicos de la función de transferencia $G_{\alpha\delta_e}$.

En este apartado se recoge la función de transferencia que indica cómo afectan las perturbaciones en el timón de profundidad a perturbaciones en el ángulo de ataque.

La ganancia estática de timón de profundidad a ángulo de ataque, $[K]_{\alpha\delta_e}$, tiene signo negativo. Esto es así debido a que una deflexión positiva del ángulo del timón de profundidad inducirá una disminución en el ángulo de ataque. Dicho signo corresponde al criterio de signos seguido por el ángulo del elevador, es decir, un ángulo positivo en el elevador significa una deflexión del mismo hacia la parte inferior del avión, lo que inducirá un momento de cabeceo que implicará una disminución en el ángulo de ataque.

En esta función de transferencia se observa la aparición de dos ceros complejos conjugados, $[\omega_\alpha, \xi_\alpha]$, además de uno real. Esto reflejará un comportamiento ligeramente diferente al de la función anterior, ya que en términos matemáticos los ceros complejos conjugados afectarán al primer autovvalor de frecuencia baja, es decir, el modo fugoide.

4.2.2. Diagrama de Bode

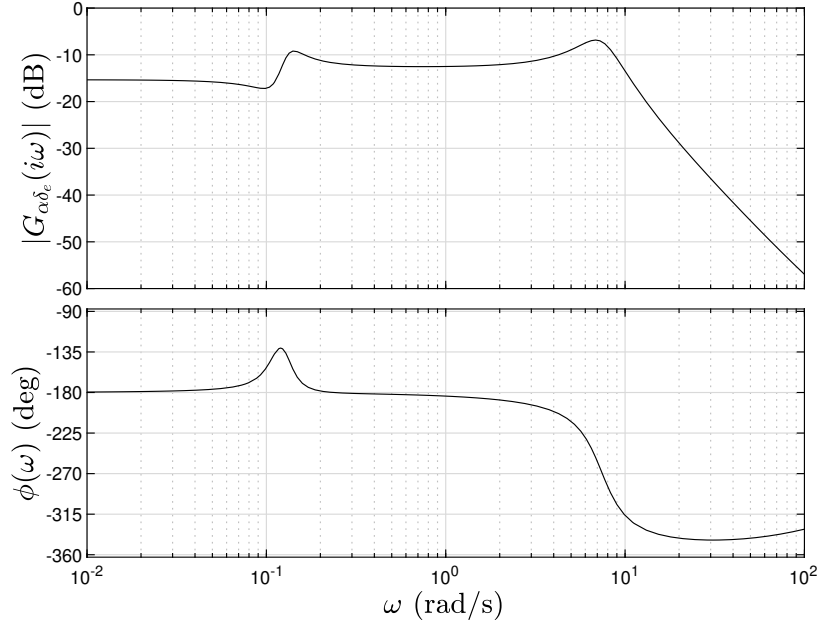


Figura 4.5: Diagramas de Bode para la función $G_{\alpha\delta_e}$.

En cuanto a los diagramas de Bode que se han obtenido, presentan varias diferencias notables respecto al diagrama anterior. Como ya se ha comentado anteriormente, al tener un cero complejo conjugado muy cerca del polo del modo fugoide, se aprecia que aparece una ruptura de ganancia asíntótica con un cambio de fase súbito alrededor de esa frecuencia de corte. A esto, le sigue una zona de ganancia constante (en este caso atenuación) hasta llegar a la frecuencia del modo de corto periodo, que finalmente actuará como un filtro típico de cuarto orden paso bajo, con -40 dB/dec de atenuación a frecuencias mas allá de ésta.

$ G_{\alpha\delta_e}(\omega_P) $ [dB]	-10.02
$ G_{\alpha\delta_e}(\omega_{SP}) $ [dB]	-7.16

Tabla 4.7: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\alpha\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.

Función Elemental		Módulo y Fases Asíntóticas		
		ω_b	$\omega \ll \omega_b$	$\omega \gg \omega_b$
$[K]_{\alpha\delta_e}$	Proporcional	-	-15.33 dB, 0°	-15.33 dB, 0°
$[\omega_\alpha, \xi_\alpha]$	Par de Ceros Complejos	ω_α	-20 dB/dec, -180°	40 dB/dec, -135°
$\{\omega_P, \xi_P\}$	Modo Fugoide	ω_P	40 dB/dec, -135°	-20 dB/dec, -180°
$\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$	Modo Corto Periodo	ω_{SP}	20 dB/dec, -180°	-40 dB/dec, -360°
$[-1/\tau_\alpha]$	Cero Real	$1/\tau_\alpha$	-40 dB/dec, -180°	-40 dB/dec, -360°

Tabla 4.8: Trazas asíntóticas del diagrama de Bode para $G_{\alpha\delta_e}$.

En cuanto al punto de vista de las Cualidades de Vuelo se puede observar que hasta ω_{SP} , el piloto tendrá una respuesta constante en cuanto a ganancia y fase. Esto hace que la efectividad del timón de profundidad para controlar el ángulo de ataque sea buena. Una vez superado esta frecuencia de cruce en ganancia, la señal de salida está en contra fase con los comandos de entrada, lo que implicará un incremento en la carga de trabajo del piloto teniéndose que adelantar a la respuesta del avión.

4.2.3. Diagrama de Nichols

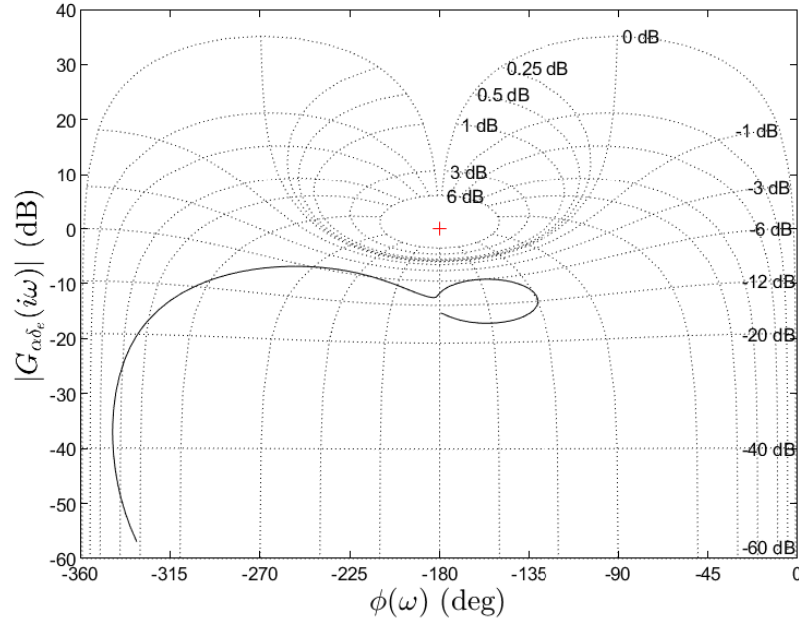


Figura 4.6: Diagrama de Nichols para la función $G_{\alpha\delta_e}$.

En la Figura 4.6 se puede observar como para la función $G_{\alpha\delta_e}(\omega_p)$ tenemos una frecuencia de resonancia en torno a los 180° , concordando con la frecuencia natural del modo fugoide junto con el par de ceros complejos conjugados, así como una ganancia observada mas o menos constante hasta llegar a la frecuencia del modo de corto periodo.

4.2.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

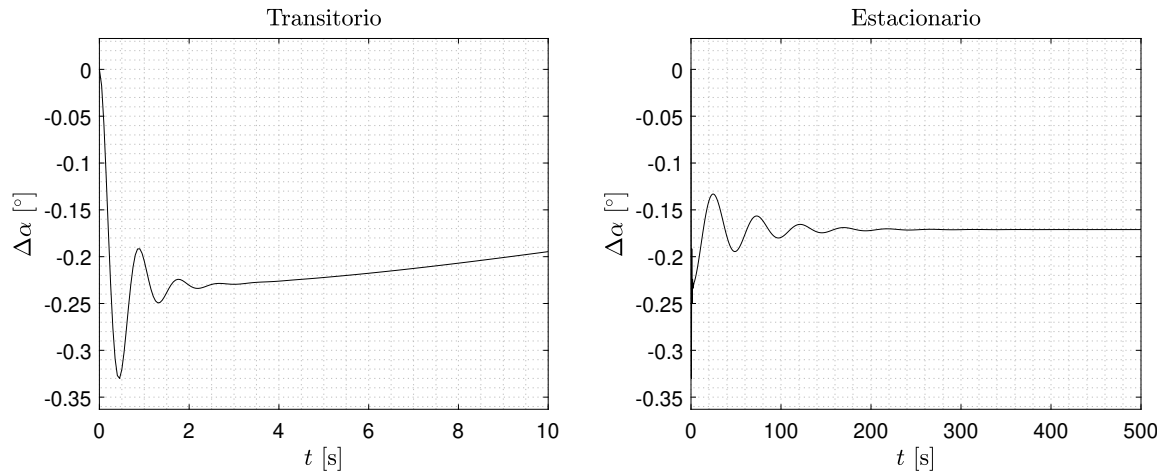


Figura 4.7: Respuesta temporal en ángulo de ataque frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.

$[M]_p [\%]$	92.9
$\Delta\alpha_p [^\circ]$	-0.33
$t_p [s]$	0.42
$\Delta\alpha_{st} [^\circ]$	-0.17
$t_s [s]$	146

Tabla 4.9: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\alpha\delta_e}$.

Como se puede apreciar en la Figura 4.7, la gráfica que representa el comportamiento mas transitorio presenta unas oscilaciones que tienen una frecuencia elevada y baja amplitud características del modo corto periodo. Asimismo, la sobreoscilación tiene un valor de 92.9 %, el cual es considerablemente elevado y nos transmite que el ángulo de ataque mínimo (máximo en valor absoluto) es muy superior en valor absoluto al que tenderá la aeronave conforme avance el tiempo.

Por otro lado, en la gráfica de la derecha se puede apreciar la existencia de oscilaciones a frecuencias más bajas pero con mayor amplitud, características del modo fugoide.

4.2.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada

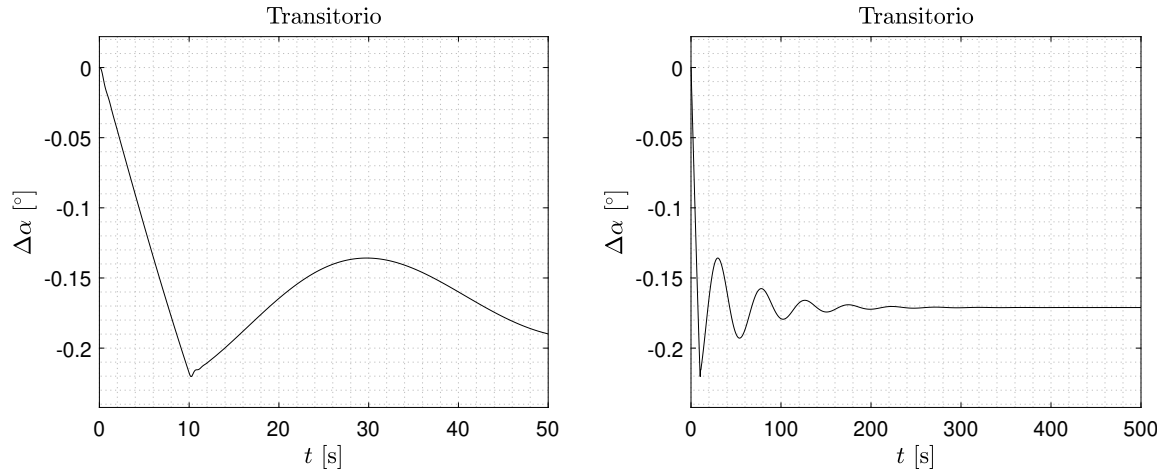


Figura 4.8: Respuesta temporal en ángulo de ataque frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p [\%]$	28.8
$\Delta\alpha_p [^\circ]$	-0.22
$t_p [s]$	10.2
$\Delta\alpha_{st} [^\circ]$	-0.17
$t_s [s]$	133

Tabla 4.10: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\alpha\delta_e}$.

De manera análoga a lo que ocurre con la respuesta escalón, obtenemos una respuesta inicial característica del corto periodo, donde las oscilaciones a altas frecuencias tienden en poco tiempo a amortiguarse haciendo el incremento del ángulo de ataque a consecuencia de la excitación tienda a disminuir. Por otro lado, para tiempos mayores la respuesta evoluciona a frecuencias mas bajas características del modo fugoide.

Sin embargo, ante una entrada de tipo rampa la sobreoscilación es mucho menor y por tanto se trata de un caso más favorable. En este caso es del 28.8 % frente al 92.9 % de la respuesta ante

escalón unitario. El valor de pico de ángulo de ataque se alcanza a un tiempo mucho mayor que en el caso anterior que además coincide con el punto de aplicación de la máxima deflexión del elevador (saturación de la rampa, 10 segundos) y además se llega al estado estacionario antes que al aplicar una entrada escalón.

4.3. Respuesta de ángulo de asiento a entrada en timón de profundidad

4.3.1. Función de transferencia

$$G_{\theta\delta_e} = [K]_{\theta\delta_e} \frac{(\tau_{\theta_1} s + 1)(\tau_{\theta_2} s + 1)}{\left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right)^2 + 2\xi_{SP} \left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}} \right) + 1 \right] \left[\left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right)^2 + 2\xi_P \left(\frac{s}{\omega_{n_P}} \right) + 1 \right]} \quad (4.4)$$

$[K]_{\theta\delta_e} [-]$	-1.53
$\tau_{\theta_1} [s]$	20.35
$\tau_{\theta_2} [s]$	0.4364

Tabla 4.11: Valores característicos de la función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$.

La función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$ relaciona las perturbaciones en el timón de profundidad con el ángulo de asiento. Como se aprecia en los valores de la tabla ??, la ganancia estática de esta función de transferencia tiene valor negativo. Esto quiere decir que, de manera similar a la función de transferencia anterior de timón de profundidad a ángulo de ataque, una deflexión del timón de profundidad positiva tiene como consecuencia un incremento negativo del ángulo de asiento (la aeronave tiende a picar).

4.3.2. Diagrama de Bode

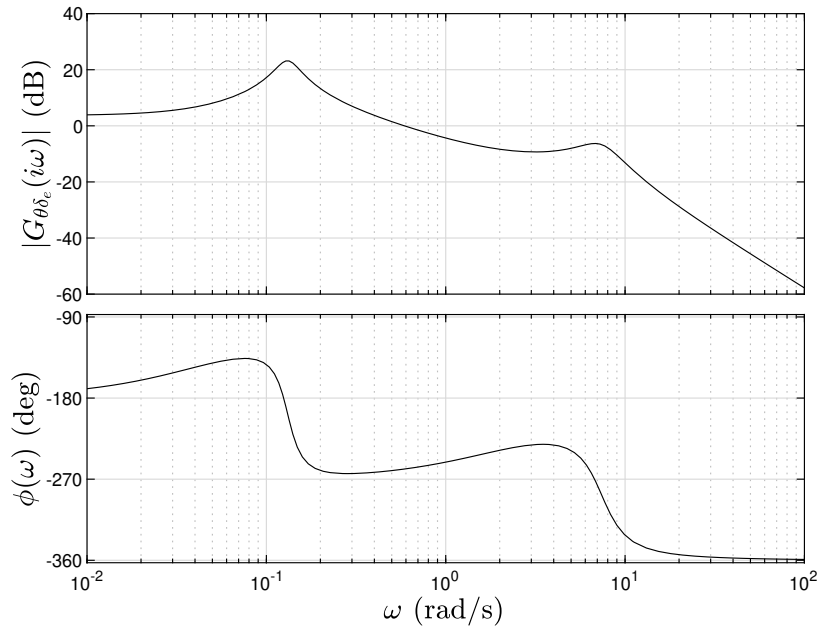


Figura 4.9: Diagramas de Bode para la función $G_{\theta\delta_e}$.

Función Elemental		Módulo y Fases Asintóticas		
		ω_b	$\omega \ll \omega_b$	$\omega \gg \omega_b$
$[K]_{\theta\delta_e}$	Proporcional	-	3.69 dB, -180°	3.69 dB, -180°
$[-1/\tau_{\theta_1}]$	<i>Cero Real</i>	$1/\tau_{\theta_1}$	0dB/dec, -180	20dB/dec, -90
$\{\omega_P, \xi_P\}$	Modo Fugoide	ω_P	40 dB/dec, -90°	-40 dB/dec, -270°
$\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$	Modo Corto Periodo	ω_{SP}	20 dB/dec, -270°	-40 dB/dec, -180°
$[-1/\tau_{\theta_2}]$	Cero Real	$1/\tau_{\theta_2}$	-40 dB/dec, -225°	-40 dB/dec, -360°

Tabla 4.12: Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{\theta\delta_e}$

En este caso, se tienen cinco intervalos de frecuencias de ruptura. Mientras que en el diagrama de ganancias se aprecia que la representación exacta reproduce con bastante exactitud la representación asintótica, no ocurre lo mismo con el diagrama de fases. Esto se debe a que las frecuencias de ruptura no están lo suficientemente alejadas unas de otras y por lo tanto la curva de fases se ve afectada por el cambio de fase debido a la siguiente función elemental.

$ G_{\theta\delta_e}(\omega_P) $ [dB]	23.21
$ G_{\theta\delta_e}(\omega_{SP}) $ [dB]	-6.67

Tabla 4.13: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.

Haciendo un estudio bajo el punto de vista de Cualidades de Vuelo, se puede observar que la frecuencia de cruce en ganancia, es decir, el paso de la Ganancia por el 0 dB, ocurre a 0.6 rad/s, valor que esta dentro del intervalo de frecuencias de control del piloto ($\omega > 0.1$ rad/s). Sin embargo, la salida tiene un desfase considerable respecto de la entrada en todo el rango de ganancias. Esta cualidad hará que sea más complicado controlar el ángulo de asiento del avión que para el caso del ángulo de ataque.

4.3.3. Diagrama de Nichols

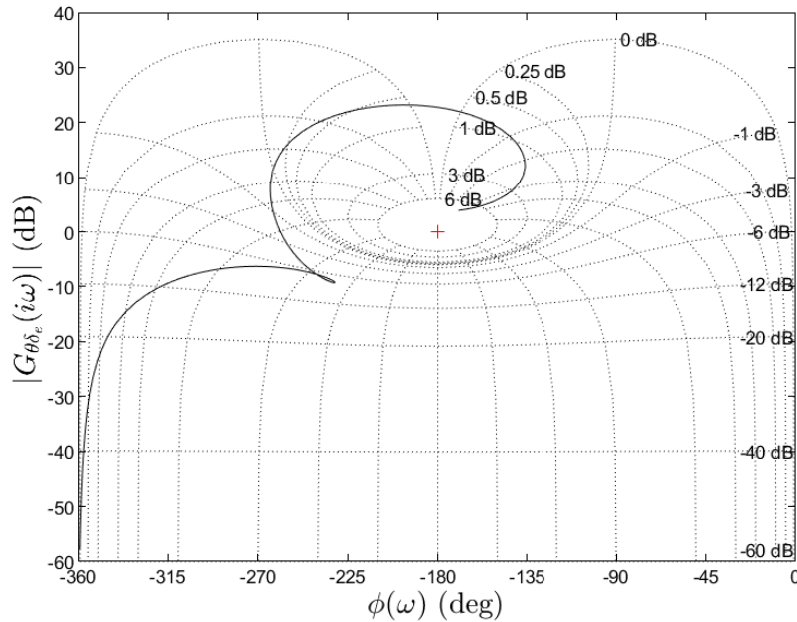


Figura 4.10: Diagrama de Nichols para la función $G_{\theta\delta_e}$.

En el diagrama de Nichols, mostrado en la figura 4.10, podemos observar que para la función $G_{\theta\delta_e}(\omega_p)$, tenemos un comportamiento con una primera zona donde la ganancia aumenta hasta la frecuencia del modo fugoide donde seguidamente manifiesta un decaimiento de fase, hasta llegar a la zona del modo de corto periodo donde presenta tanto un decaimiento de módulo mayor (unos 40 dB/dec , como se comenta en el apartado anterior) como una caída de fase.

4.3.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

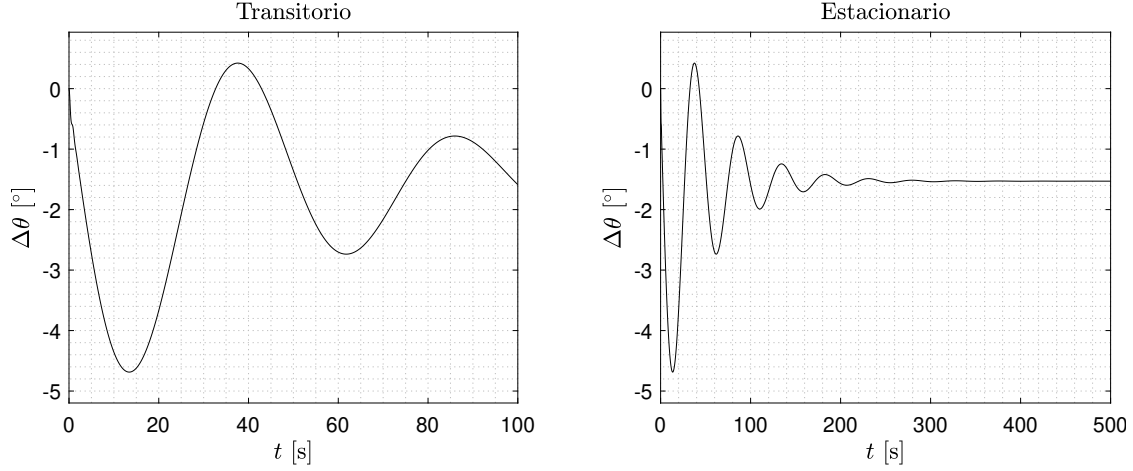


Figura 4.11: Respuesta temporal en ángulo de asiento frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.

$[M]_p [\%]$	206
$\Delta\theta_p [^\circ]$	-4.68
$t_p [s]$	13.89
$\Delta\theta_{st} [^\circ]$	-1.53
$t_s [s]$	237

Tabla 4.14: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\theta\delta_e}$.

En la figura 4.11 se puede apreciar que en la respuesta transitoria la sobreoscilación es muy pronunciada, alcanzando un valor del 206 %. Además, para el caso de la respuesta asociada al modo fugoide, se puede ver que son oscilaciones con mayor amplitud que para el caso del ángulo de ataque. Esto es debido que el módulo del autovector asociado a este modo propio para el caso del ángulo de ataque es mas pequeño que para la componente del ángulo de asiento. Por lo tanto, el ángulo de asiento variará más que el ángulo de ataque cuando se excita el modo fugoide.

4.3.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada

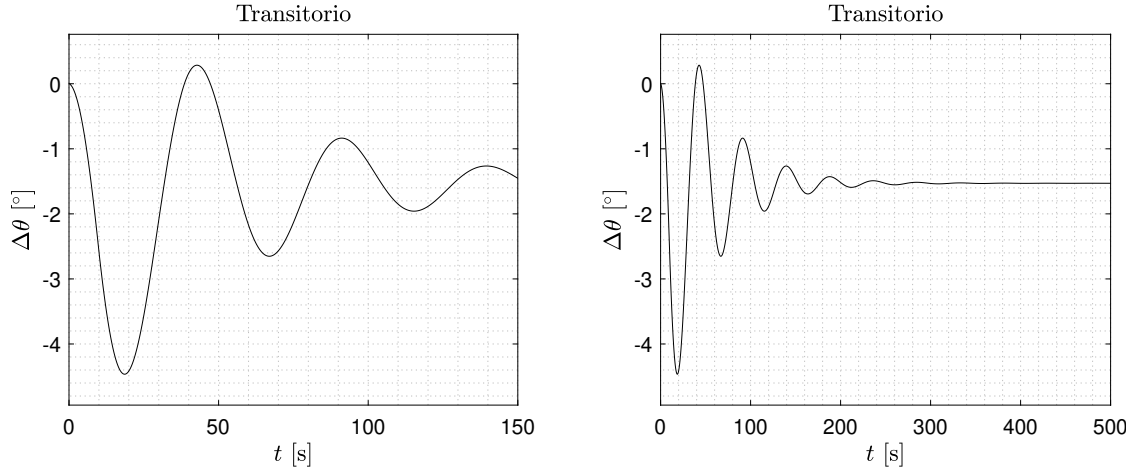


Figura 4.12: Respuesta temporal en ángulo de asiento frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	192
$\Delta\theta_p$ [°]	-4.46
t_p [s]	18.6
$\Delta\theta_{st}$ [°]	-1.53
t_s [s]	241

Tabla 4.15: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\theta\delta_e}$

En la figura 4.8 podemos ver que el comportamiento ante una entrada en rampa sobre el timón de profundidad es similar al de la entrada escalón unitario. Grandes oscilaciones tanto en la zona transitoria de la respuesta, perteneciente al modo de corto periodo, como cuando se excita el modo fugoide. La sobreoscilación y demás parámetros de la respuesta tienen valores similares a los obtenidos con entrada escalón unitario.

4.4. Respuesta de velocidad angular de cabeceo a entrada en timón de profundidad

4.4.1. Función de transferencia

$$G_{q\delta_e} = sG_{\theta\delta_e} = [K]_{\theta\delta_e} \frac{s(\tau_{q_1}s + 1)(\tau_{q_2}s + 1)}{\left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}}\right)^2 + 2\xi_{SP}\left(\frac{s}{\omega_{n_{SP}}}\right) + 1\right]\left[\left(\frac{s}{\omega_{n_P}}\right)^2 + 2\xi_P\left(\frac{s}{\omega_{n_P}}\right) + 1\right]} \quad (4.5)$$

NOTA: $\tau_{q_i} = \tau_{\theta_i}$

Esta función de transferencia de perturbaciones en timón de profundidad a velocidad angular de cabeceo se obtiene derivando en el dominio de Laplace la función de transferencia $G_{\theta\delta_e}$ como se expone en el apartado 3, por lo que presenta los mismos ceros más un cero en $s = 0$. Esto es debido a la relación entre Δq y $\Delta\theta$, siendo la primera perturbación derivada de la segunda. Los parámetros de la función de transferencia son, por tanto, los mismos que los de la función $G_{\theta\delta_e}$.

4.4.2. Diagrama de Bode

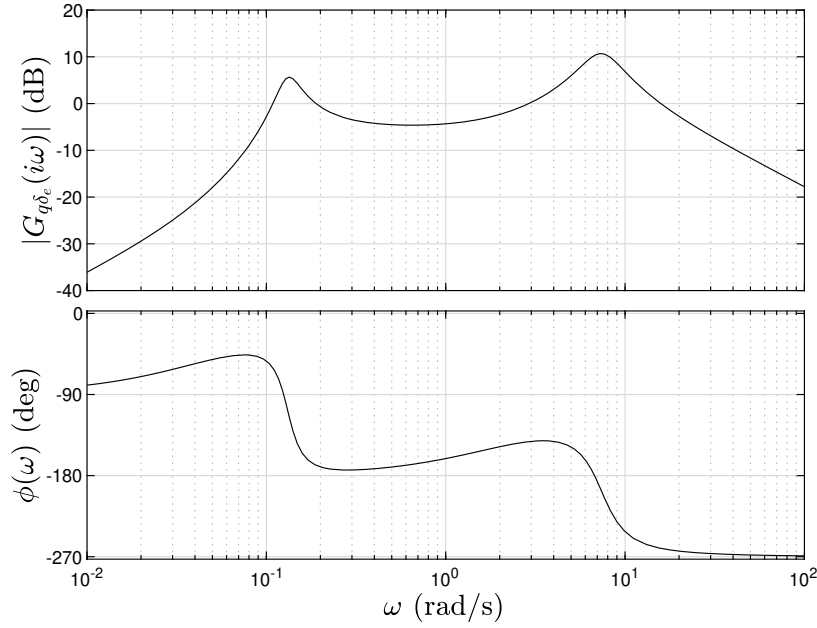


Figura 4.13: Diagramas de Bode para la función $G_{q\delta_e}$.

$ G_{q\delta_e}(\omega_P) $ [dB]	5.58
$ G_{q\delta_e}(\omega_{SP}) $ [dB]	10.70

Tabla 4.16: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{q\delta_e}$ a las frecuencias de los modos propios longitudinales.

Función Elemental		Módulo y Fases Asintóticas		
		ω_b	$\omega \ll \omega_b$	$\omega \gg \omega_b$
s	Cero en Origen	0	$\sim -37dB, -90^\circ$	40dB/dec, -90°
$[K]_{\theta\delta_e}$	Proporcional	-	3.69 dB, -90°	3.69 dB, -90°
$[-1/\tau_{q1}]$	Cero Real	$1/\tau_{\theta_1}$	0 dB/dec, -90°	20 dB/dec, -0°
$\{\omega_P, \xi_P\}$	Modo Fugoide	ω_P	40 dB/dec, -90°	-40 dB/dec, -180°
$\{\omega_{SP}, \xi_{SP}\}$	Modo Corto Periodo	ω_{SP}	20 dB/dec, -180°	-40 dB/dec, -90°
$[-1/\tau_{q2}]$	Cero Real	$1/\tau_{\theta_2}$	-40 dB/dec, -180°	-40 dB/dec, -270°

Tabla 4.17: Trazas asintóticas del diagrama de Bode para $G_{q\delta_e}$.

En la figura 4.13 se obtienen cuatro frecuencias de cruce en ganancia que están dentro del rango de las frecuencias de control del piloto, lo que le permitirá poder controlar adecuadamente la velocidad angular de cabeceo del avión.

Sin embargo la salida estará durante todo el rango de frecuencias de control en oposición de fase con la entrada, lo cual va a causar que, al igual que en el caso del ángulo de ataque y del ángulo de asiento, el piloto tenga que asumir esa carga de trabajo aunque en menor medida que para el caso del ángulo de asiento.

4.4.3. Diagrama de Nichols

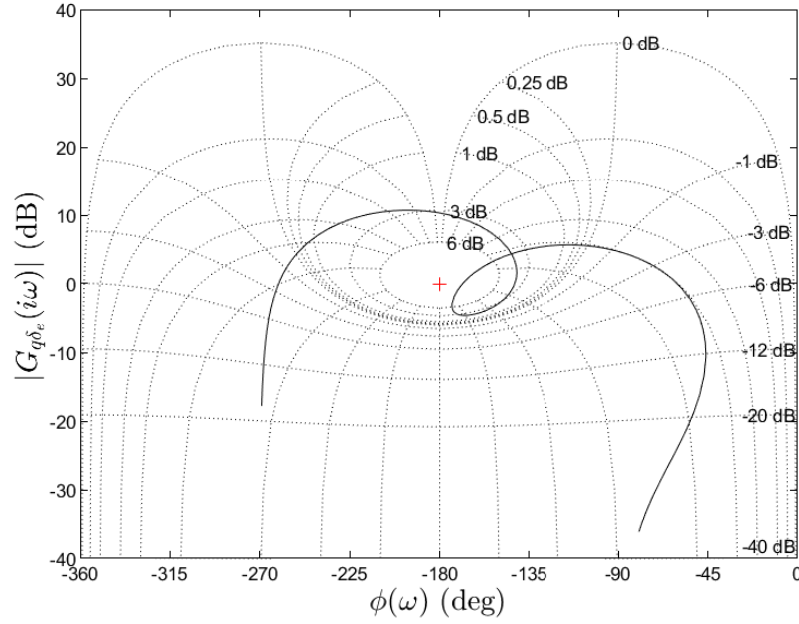


Figura 4.14: Diagrama de Nichols para la función $G_{q\delta_e}$.

Observando el diagrama de Nichols de la función $G_{q\delta_e}(\omega_p)$ se puede apreciar claramente la forma de filtro pasa banda que se intuye en el diagrama de Bode. Esto quiere decir que el diagrama evoluciona desde un módulo muy bajo a fase -90° en frecuencias bajas, aumentando hasta llegar a la zona de los picos de las frecuencias propias (primero el modo fugoide y luego de corto periodo), seguido de un decaimiento de módulo, a la vez que disminuye la fase a medida que se aumenta la frecuencia.

También se puede observar una especie de lazo entre las fases de -135° a -180° , esto representa el cambio de pendiente que presenta la función en torno al pico del modo de corto periodo, cuyo significado sería que después de una zona de módulo aproximadamente constante presenta un decrecimiento antes del pico, seguido de la subida y bajada del pico a la frecuencia ω_{SP} .

4.4.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

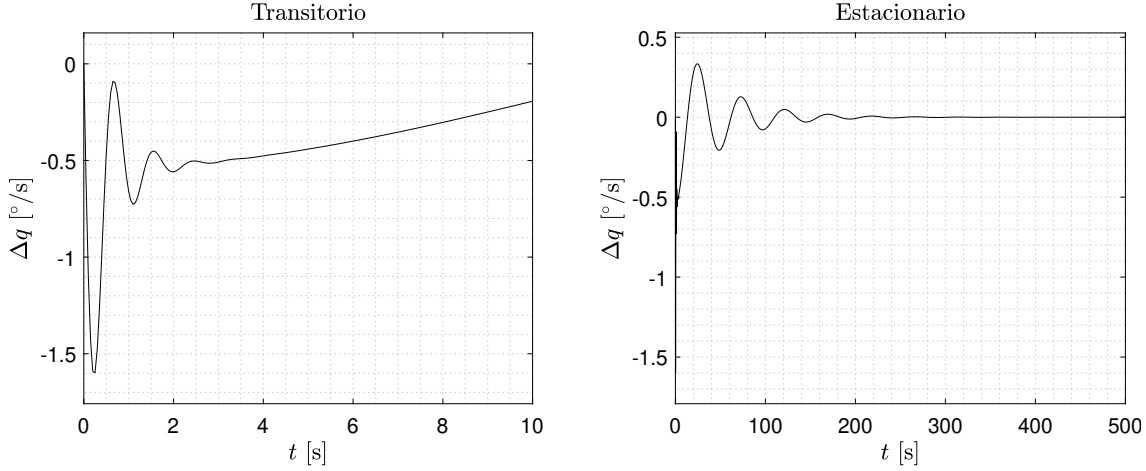


Figura 4.15: Respuesta temporal en velocidad angular de cabeceo frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	-
Δq_p [°/s]	-1.61
t_p [s]	0.24
Δq_{st} [°/s]	0
t_s [s]	264

Tabla 4.18: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{q\delta_e}$

Como se observa en la Figura 4.15, la respuesta está en concordancia con lo que ocurre en los casos de ángulo de ataque y de asiento. Se tiene una respuesta transitoria con una sobreoscilación a frecuencias elevadas correspondiente al modo de corto periodo, y una posterior oscilación de amplitud elevada para el modo fugoide. En este caso la sobreoscilación es indeterminada con la definición típica ya que el valor estático es nulo, debido al cero nulo introducido al derivar en el dominio de Laplace.

4.4.5. Respuesta temporal a una entrada rampa unitaria saturada

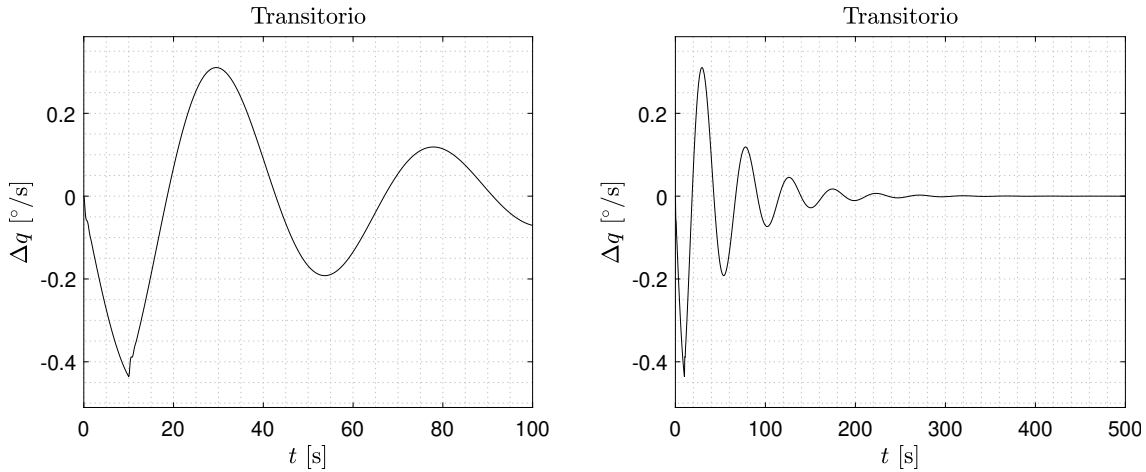


Figura 4.16: Respuesta temporal en velocidad angular de cabeceo frente a una entrada en el timón de profundidad de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p [\%]$	-
$\Delta q_p [^\circ/\text{s}]$	-0.44
$t_p [\text{s}]$	10
$\Delta q_{st} [^\circ/\text{s}]$	0
$t_s [\text{s}]$	376

Tabla 4.19: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{q\delta_e}$

Para la respuesta ante una entrada en rampa, se aprecia que la amplitud es baja para las frecuencias elevadas, y que la parte de la respuesta que corresponde al modo fugoide tiene amplitudes más elevadas. Este comportamiento también está en línea con lo que ocurría en los análisis de ángulo de ataque y de asiento. Aunque la sobreoscilación sigue siendo indeterminada, el valor de pico de la velocidad angular de cabeceo es apreciablemente menor en valor absoluto al obtenido ante entrada escalón unitario.

Capítulo 5

Canal lateral-direccional

5.1. Respuesta de velocidad angular de balance a entrada en alerones

5.1.1. Función de transferencia

$$G_{p\delta_a} = sG_{\phi\delta_a} = [K]_{\phi\delta_a} \frac{s \left[\left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + 2\xi_p \left(\frac{s}{\omega_p} \right) + 1 \right]}{(\tau_S s + 1)(\tau_R s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_{nDR}} \right)^2 + 2\xi_{DR} \left(\frac{s}{\omega_{nDR}} \right) + 1 \right]} \quad (5.1)$$

$[K]_{\phi\delta_a}$ [-]	$7,27 \cdot 10^4$
ω_p [rad/s]	0.845
ξ_p [-]	0.181
τ_S [s]	19730
τ_R [s]	0.131
ω_{DR} [rad/s]	0.913
ξ_{DR} [-]	0.176

Tabla 5.1: Valores característicos de la función de transferencia $G_{p\delta_a}$.

Esta función de transferencia representa la respuesta del sistema en velocidad angular de balance, $\Delta p = \Delta \dot{\phi}$ ante una perturbación en los alerones $\Delta \delta_a$.

El denominador de esta función de transferencia, común al resto de funciones del canal lateral-direccional y obtenido a partir de la cuártica de estabilidad lateral-direccional, aporta información acerca de los modos propios lateral-direccionales de la aeronave. Por un lado existen dos polos reales correspondientes al modo espiral (S, *spiral*) y al modo de convergencia en balance (R, *roll*) respectivamente, siendo el tiempo característico del primero mucho mayor que el del segundo. Por otro lado se tiene un par de polos complejos conjugados correspondientes al modo de balanceo holandés (DR, *Dutch Roll*).

El valor tan grande de la ganancia estática conlleva que si se mantiene una deflexión de los alerones durante un cierto tiempo, llega un momento en el cual el ángulo de balance es tan grande que ya no se puede aplicar la teoría de pequeñas perturbaciones.

En cuanto a términos matemáticos, el hecho de que la función $G_{p\delta_a}$ se obtenga a partir de derivar la respuesta de balance a cambios de ángulo de alerones significa, en términos de *Laplace* añadir un cero

en el origen, cuyo efecto se apreciará en los diagramas de Bode y supondrá una atenuación importante de la velocidad angular de balance a bajas frecuencias.

5.1.2. Diagrama de Bode

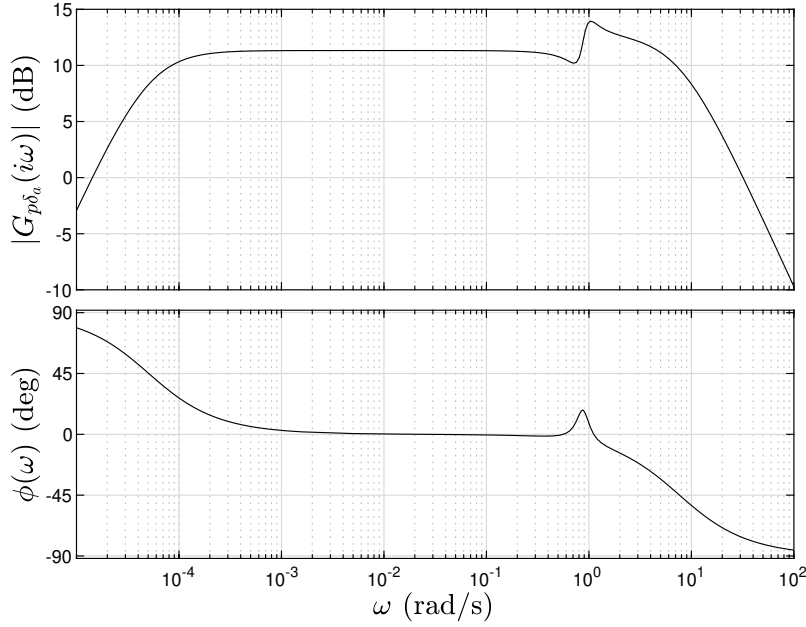


Figura 5.1: Diagramas de Bode para la función $G_{p\delta_a}$.

$ G_{p\delta_a}(\omega_{DR}) $ [dB]	12.93
$ G_{p\delta_a}(1/\tau_R) $ [dB]	11.25
$ G_{p\delta_a}(1/\tau_S) $ [dB]	-55.59

Tabla 5.2: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{p\delta_a}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.

Según se puede observar en la Figura 5.1, para el rango de frecuencias del control del piloto [0.05 - 1 Hz], una deflexión de los alerones produce una velocidad angular de balance que provoca un aumento progresivo del ángulo de balance.

Para frecuencias mayores, o tiempos mas bajos, se puede ver como aparece la frecuencia asintótica correspondiente al modo de balanceo holandés, que junto con la aparición de un cero cercano a esta frecuencia (ω_p), provoca la aparición de una asíntota invertida así como un pico de fase entre ambas frecuencias.

5.1.3. Diagrama de Nichols

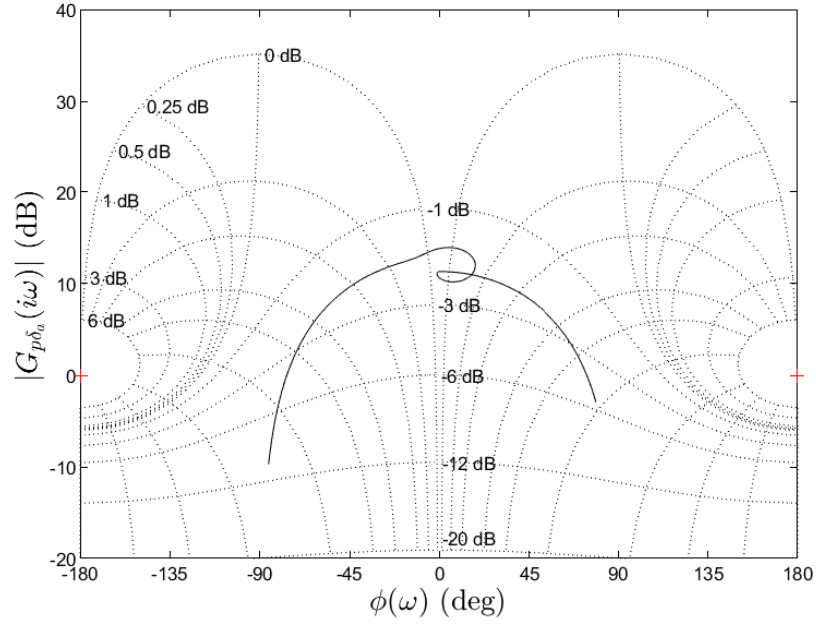


Figura 5.2: Diagrama de Nichols para la función $G_{p\delta_a}$.

A continuación, en la Figura 5.2, el diagrama de Nichols de la función $G_{p\delta_a}(\omega_p)$, presenta una disposición general similar a las comentadas anteriormente. El cero en el origen representa la derivada de una función de transferencia en balance, es decir tenemos una atenuación a frecuencias bajas pero debido a la ganancia tan elevada que presenta dicha función, ni presenta mucha atenuación ni se mantiene durante mucho tiempo.

Se puede observar un lazo en el entorno de fase 0° , esto es debido, como ya se ha comentado en el apartado anterior, a la cercanía entre las frecuencias ω_{DR} y ω_p , lo que en el diagrama de Bode saldría como un pico asintótico en fase y una asíntota invertida en módulo, presenta dicho lazo en el diagrama Nichols, vistos en la Figura 5.1.

5.1.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

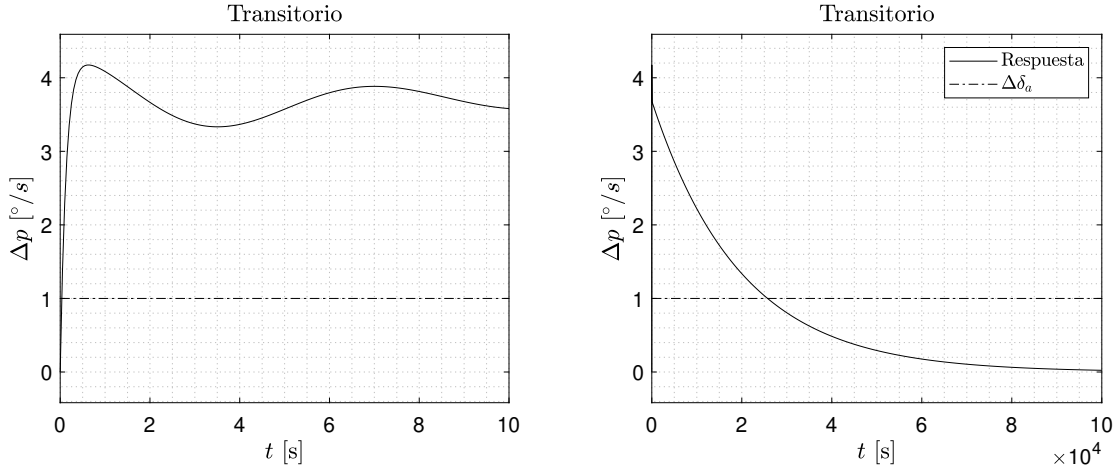


Figura 5.3: Respuesta temporal en velocidad angular de balance frente a una entrada en alerones de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	-
Δp_p [$^{\circ}/s$]	3.65
t_p [s]	182
Δp_{st} [$^{\circ}/s$]	0
t_s [s]	$1.2 \cdot 10^5$

Tabla 5.3: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{p\delta_a}$.

Ante una entrada de este tipo en la deflexión de los alerones, se produce una velocidad angular de balance estacionaria. Como consecuencia de este movimiento, se generará un incremento de sustentación no simétrica que hará desarrollar un viraje no simétrico.

Si no se modifica el ángulo de resbalamiento, y puesto que el modo espiral es estable, la velocidad angular de balance irá anulándose y se alcanzará un estado estacionario final formado por un ángulo de balance y un ángulo de resbalamiento. Esta característica viene dada principalmente, como ya se ha comentado anteriormente, por el hecho de que la función de transferencia $G_{p\delta_a}$ viene de la derivada de una función sobre un ángulo lo que aparece un cero en el origen, que combinado con el hecho de que tanto un escalón como una rampa saturada, ambas se comportan como $\omega \sim 0 rad$ (al menos en estacionario), es decir, presentarán en estacionario una atenuación importante hasta llegar a 0 pero teniendo en cuenta la magnitud de la parte proporcional esta tendrá un tiempo de relajamiento importante tal como se aprecia en la Figura 5.3, con el valor de t_s de la Tabla 5.3.

5.1.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada

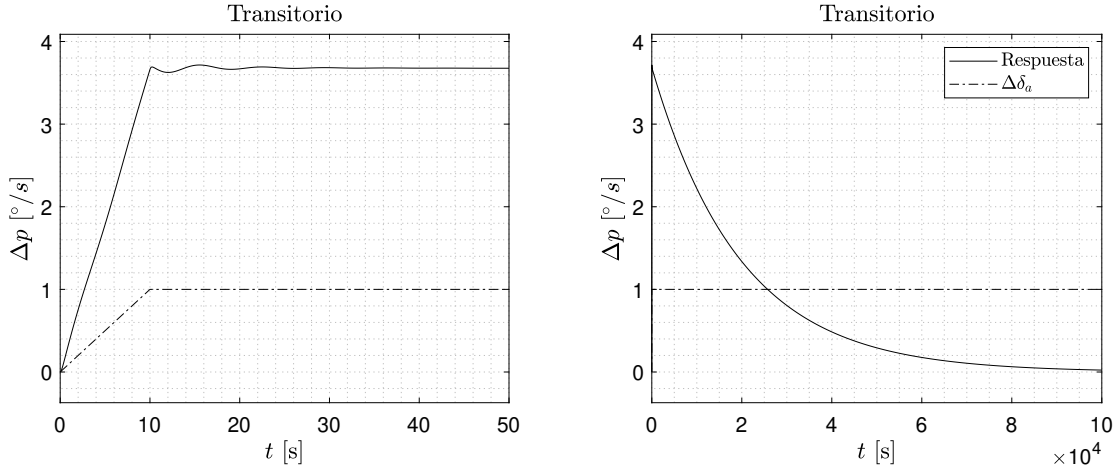


Figura 5.4: Respuesta temporal en velocidad angular de balance frente a una entrada en alerones de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	-
Δp_p [°/s]	3.72
t_p [s]	15.55
Δp_{st} [°/s]	0
t_s [s]	$1.2 \cdot 10^5$

Tabla 5.4: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{p\delta_a}$.

Para este tipo de entrada, el efecto físico sobre el avión es igual al que ocurre con la entrada escalón unitario. La principal diferencia está en tiempos pequeños del movimiento, dónde el incremento de la velocidad de balance crece progresivamente conforme se introduce la deflexión en los alerones, hasta que dejamos fija la posición de los mandos.

Llegados a este punto, el sistema adquiere el mismo comportamiento que el explicado en el caso de entrada de escalón unitario.

5.2. Respuesta de velocidad angular de guiñada a entrada en alerones

5.2.1. Función de transferencia

$$G_{r\delta_a} = [K]_{r\delta_a} \frac{(-\tau_{r1}s + 1)(\tau_{r2}s + 1)(\tau_{r3}s + 1)}{(\tau_s s + 1)(\tau_R s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{DR}}} \right)^2 + 2\xi_{DR} \left(\frac{s}{\omega_{n_{DR}}} \right) + 1 \right]} \quad (5.2)$$

$[K]_{r\delta_a}$ [1/s]	4211
τ_{r1} [s]	2.923
τ_{r2} [s]	2.159
τ_{r3} [s]	0.042

Tabla 5.5: Valores característicos de la función de transferencia $G_{r\delta_a}$

La función de transferencia 5.4 representa las perturbaciones en la velocidad angular de guiñada Δr frente a entradas de deflexión de alerones $\Delta\delta_a$. Cuenta con un cero real positivo (τ_{r1}) que indica que la respuesta inicial irá en sentido contrario al valor estacionario final.

Esto es debido, tal y como se comenta en [2], al efecto de guiñada adversa del avión que aparece ante una deflexión positiva en los alerones, dando lugar a un momento aerodinámico de guiñada negativo y este, a su vez, a una velocidad angular de guiñada adversa en los instantes iniciales, lo cual se apreciará en las gráficas de respuesta ante escalón y rampa recogidas en apartados posteriores.

En cuanto al análisis de la función de transferencia de $G_{r\delta_a}$, se puede observar la aparición de tres ceros reales, en contraste con la función anterior que presentaba dos ceros complejos conjugados y uno real. Esto afectará principalmente al comportamiento a bajas frecuencias ya que al tener una ganancia estática muy elevada provocará una amplificación de la señal importante a frecuencias bajas.

5.2.2. Diagrama de Bode

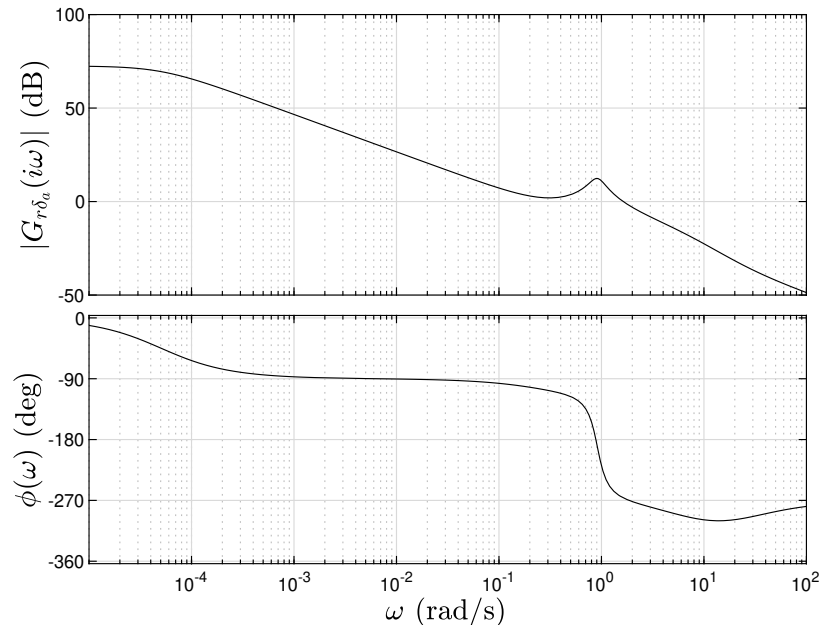


Figura 5.5: Diagramas de Bode para la función $G_{r\delta_a}$.

$ G_{r\delta_a}(\omega_{DR}) $ [dB]	12.38
$ G_{r\delta_a}(1/\tau_R) $ [dB]	1.49
$ G_{r\delta_a}(1/\tau_S) $ [dB]	-94.79

Tabla 5.6: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{r\delta_a}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.

Como se puede observar en la figura 5.5, la aparición de estos ceros reales, junto con la ganancia estática $[K]_{r\delta_a}$, provoca una zona constante en el entorno de frecuencias hasta $\omega \sim 10^{-4} rad$, seguido de una zona de atenuación de $-20 dB/dec$ hasta las frecuencias naturales del modo de convergencia en balance y de balanceo holandés, que presentan tanto la asíntota como el cambio de fase característico.

5.2.3. Diagrama de Nichols

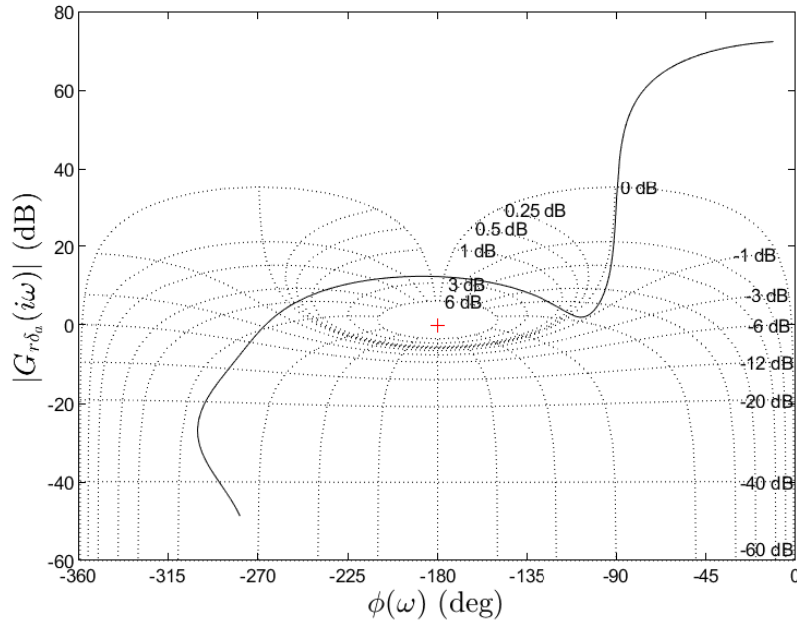


Figura 5.6: Diagrama de Nichols para la función $G_{r\delta_a}$.

En cuanto al diagrama de Nichols mostrado en la Figura 5.6, podemos observar un comportamiento similar, al ya comentado previamente, como de un filtro paso bajo, es decir, una disminución de ganancia a medida que aumenta la frecuencia, con los picos característicos, mostrados como valles y colinas en el diagrama de Nichols, así como una disminución de fase mas o menos constante excepto durante el tramo entre el modo de balanceo holandés (ω_{DR}) y las influencias de los ceros reales más cercanos al eje imaginario, τ_{r1} y τ_{r2} .

5.2.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

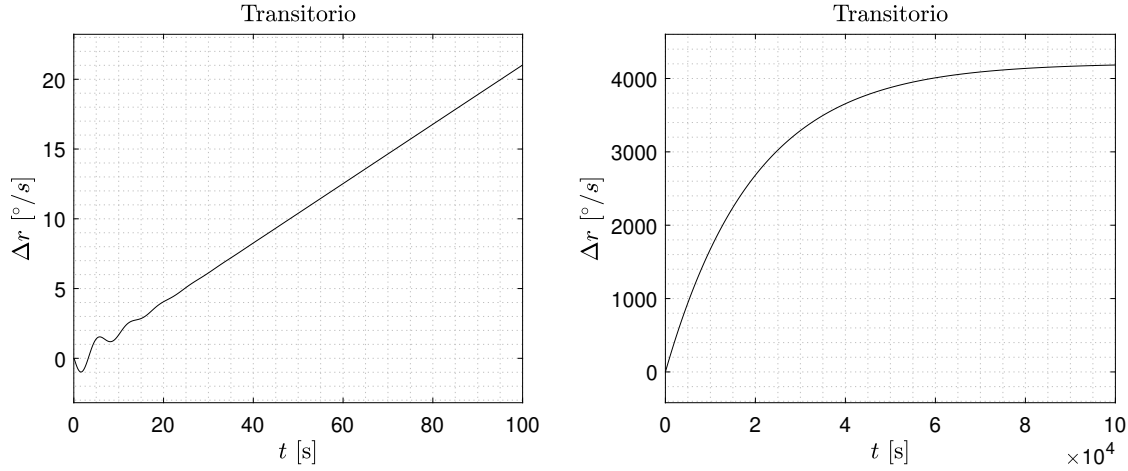


Figura 5.7: Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en alerones de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	0
Δr_p [°/s]	-1.02
t_p [s]	2.4
Δr_{st} [°/s]	4210
t_s [s]	$7.7 \cdot 10^4$

Tabla 5.7: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{r\delta_a}$.

Como se puede observar en la figura 5.7, al introducir una perturbación en forma de deflexión en los alerones de tipo escalón, esto generará un movimiento de balanceo del avión. A este movimiento, le seguirá el efecto de la guiñada adversa lo que introducirá una velocidad angular de guiñada que, si se mantiene la deflexión de alerones, llegará un momento en que se haga constante. De esta forma se llegará un estado final estacionario compuesto de un ángulo de balance y un ángulo de resbalamiento.

Por otra parte cabe comentar que la disposición de ceros cercana al eje imaginario presentada por la función de transferencia, es decir los valores de τ_{r1}, τ_{r2} principalmente provocan una ralentización importante de la función, como se observa en el valor de t_s presentado en la tabla 5.7, pese a tener un valor en estacionario muy elevado por la ganancia proporcional tan elevada. Por otra parte uno de los efectos que tienen los ceros reales sobre el sistema no solo es ralentizar el mismo si no que también cancelan casi en absoluto cualquier oscilación grande en el estacionario en una escala de respuesta aceptable.

5.2.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada

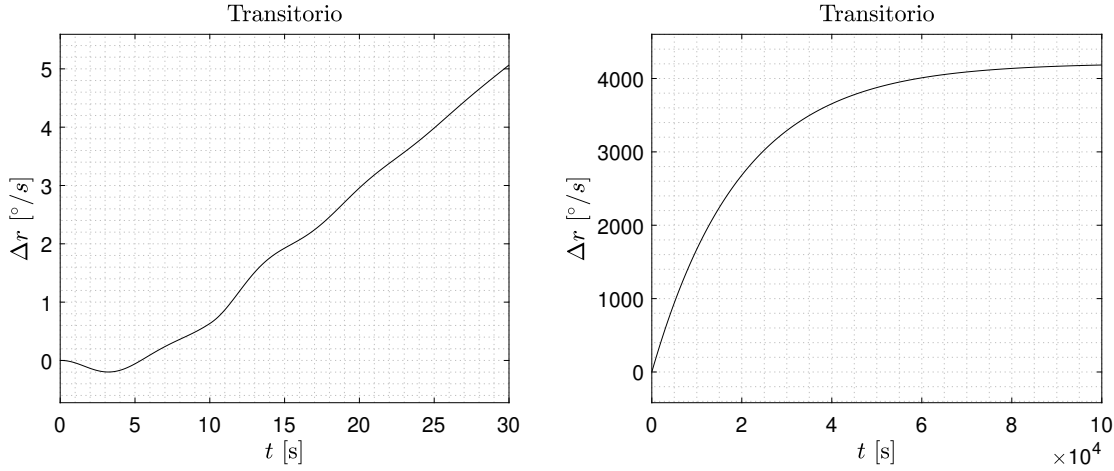


Figura 5.8: Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en alerones de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	0
Δr_p [$^{\circ}/s$]	-0.20
t_p [s]	3.2
Δr_{st} [$^{\circ}/s$]	4210
t_s [s]	$7.7 \cdot 10^4$

Tabla 5.8: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{r\delta_a}$.

De manera análoga a lo que pasaba con la entrada en escalón unitario, la velocidad inducida de guiñada aumentará con la excitación introducida en los alerones hasta que se haga constante en el tiempo.

Si bien en los instantes iniciales de la entrada escalón la respuesta presentaba oscilaciones más acusadas, en este caso la entrada es mas progresiva haciendo disminuir la amplitud de dichas oscilaciones en los instantes iniciales del transitorio. Finalmente, la respuesta estacionaria se comportará de forma análoga al caso anterior.

5.3. Respuesta de ángulo de resbalamiento a entrada en timón de dirección

5.3.1. Función de Transferencia

$$G_{\beta\delta_r} = [K]_{\beta\delta_r} \frac{(-\tau_{\beta_1}s + 1)(\tau_{\beta_2}s + 1)(\tau_{\beta_3}s + 1)}{(\tau_s s + 1)(\tau_R s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_{n_{DR}}} \right)^2 + 2\xi_{DR} \left(\frac{s}{\omega_{n_{DR}}} \right) + 1 \right]} \quad (5.3)$$

Como se puede observar en la función de transferencia 5.3, existe un cero real positivo, y por lo tanto se obtendrá una respuesta inicial en sentido opuesto al valor estacionario.

De acuerdo con el criterio de signos que se ha considerado, una deflexión positiva del timón de dirección genera un momento de guiñada positivo, y este a su vez, un ángulo de resbalamiento

$[K]_{\beta\delta_r} [-]$	262
$\tau_{\beta_1} [s]$	184
$\tau_{\beta_2} [s]$	0.129
$\tau_{\beta_3} [s]$	0.023

Tabla 5.9: Valores característicos de la función de transferencia $G_{\beta\delta_r}$.

negativo. Por lo tanto, se tiene que el ángulo de resbalamiento estacionario tiene signo opuesto al que se genera cuando se deflecta el timón de dirección al principio.

Esta diferencia entre ángulos estacionarios y para tiempos cortos se debe a que cuando se deflecta el timón de dirección se genera un momento de guiñada y también un momento de balance que no se compensa con los alerones.

Finalmente, dado que el modo espiral es estable, la velocidad angular de balance irá disminuyendo con el tiempo hasta llegar a un punto estacionario dónde el ángulo de resbalamiento y el ángulo de balance serán consecuencia del equilibrio entre los momentos aerodinámicos de perturbación en balance y guiñada.

5.3.2. Diagrama de Bode

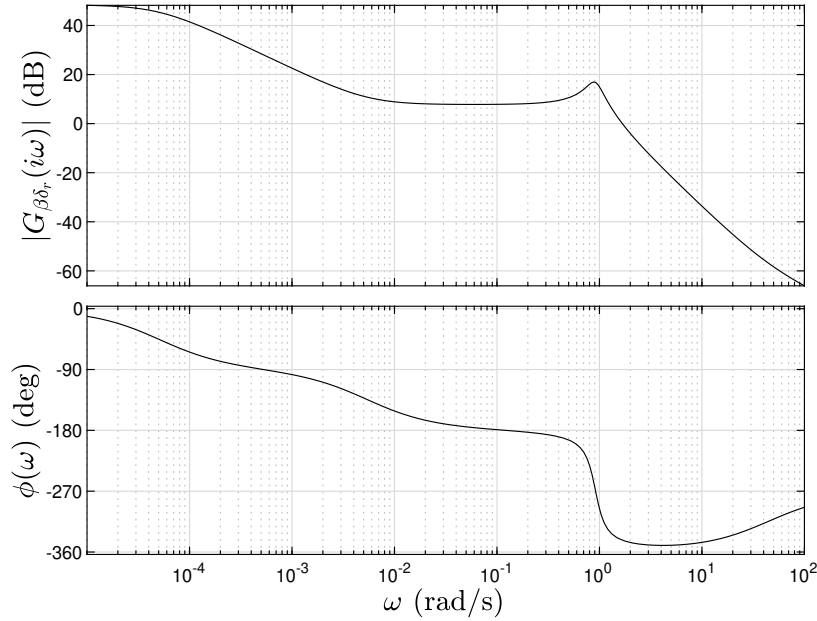


Figura 5.9: Diagramas de Bode para la función $G_{\beta\delta_r}$.

$ G_{\beta\delta_r}(\omega_{DR}) [dB]$	16.83
$ G_{\beta\delta_r}(1/\tau_R) [dB]$	6.81
$ G_{\beta\delta_r}(1/\tau_S) [dB]$	-112.77

Tabla 5.10: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{\beta\delta_r}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.

Desde el punto de vista de las Cualidades de Vuelo, si analizamos el intervalo de frecuencias que interesan desde el punto de vista del control del piloto, se puede apreciar que a frecuencias bajas el ángulo de resbalamiento esta en fase con la entrada.

Si aumentamos la frecuencia de control del ángulo de resbalamiento, el módulo de la entrada tiene mayor dependencia con dicha frecuencia y además empieza a estar en contrafase con la entrada haciendo que se excite el modo de balanceo del holandés. Por lo tanto, esta excitación del balanceo holandés hará que aumente la carga de trabajo del piloto si aumenta la frecuencia de sus comandos de entrada.

En el caso presente de la función de transferencia $G_{\beta\delta_r}$, observamos un comportamiento muy similar a la función del apartado anterior, ya que presenta una configuración similar de ceros, pero en este caso solamente se tiene un cero importante muy cerca del origen, en lugar de dos.

5.3.3. Diagrama de Nichols

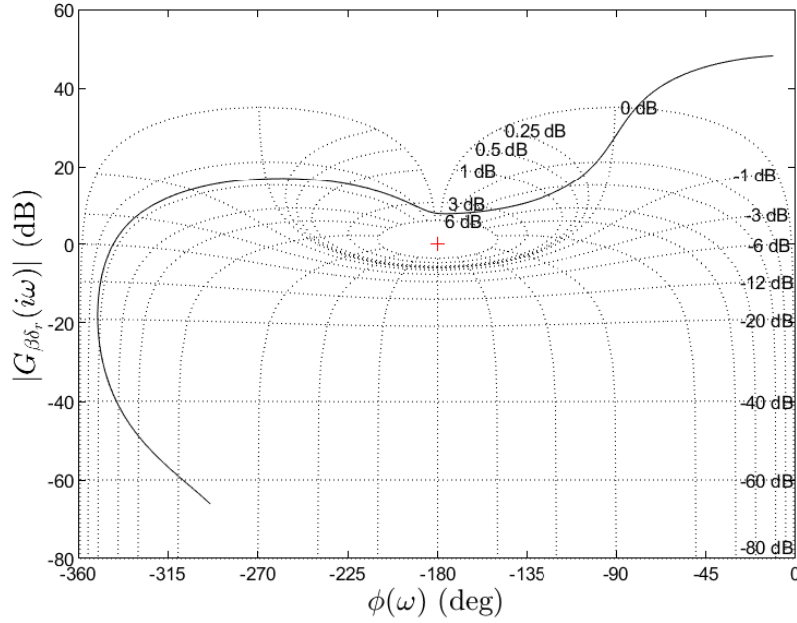


Figura 5.10: Diagrama de Nichols para la función $G_{\beta\delta_r}$.

Una vez más en la figura 5.10, tenemos una configuración de $G_{\beta\delta_r}$, muy similar a la función del apartado anterior ($G_{r\delta_a}$), ya que la configuración de ceros es similar al del dicho apartado, combinando el hecho de que ambas funciones de transferencia presentan los mismos polos.

5.3.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

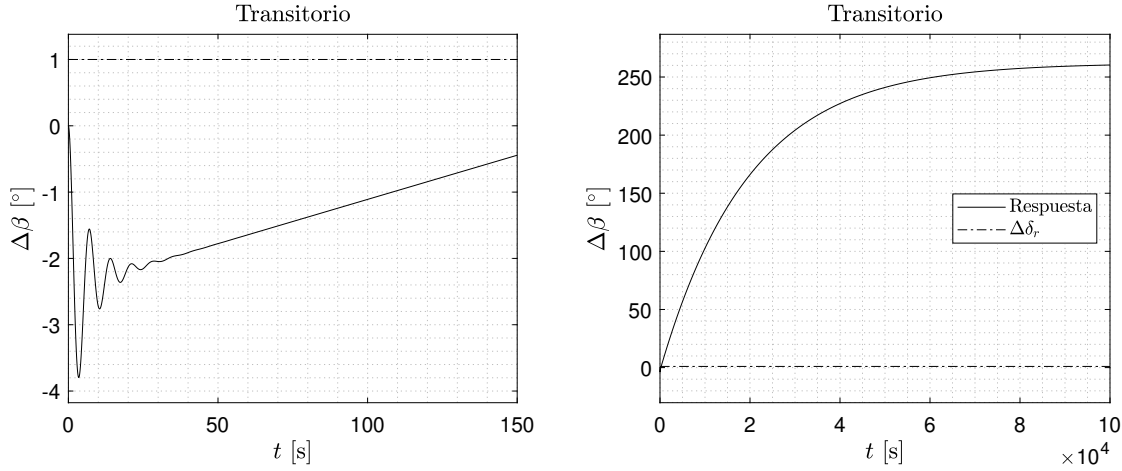


Figura 5.11: Respuesta temporal en ángulo de resbalamiento frente a una entrada en timón de dirección de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	-
$\Delta\beta_p$ [°]	-3.78
t_p [s]	3.8
$\Delta\beta_{st}$ [°]	262
t_s [s]	$8.1 \cdot 10^4$

Tabla 5.11: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{\beta\delta_r}$.

Ante una entrada de tipo escalón, se genera un momento de guiñada positivo que a su vez inducirá un ángulo de resbalamiento negativo.

El avión tenderá a corregir este movimiento equilibrando los momentos aerodinámicos de perturbación haciendo que las velocidades del ángulo de guiñada y ángulo de balance disminuyan con el tiempo, dando como resultado un estado final de ángulos de balance y resbalamiento.

Este caso una presenta una versión análoga de la respuesta a una entrada escalón muy similar a la de $G_{r\delta_a}$, es decir, dada a la disposición de ceros reales la función apenas presenta oscilaciones pero en su defecto tiene un tiempo de llegada a estacionario muy elevado, teniendo una ganancia también muy elevada.

5.3.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada

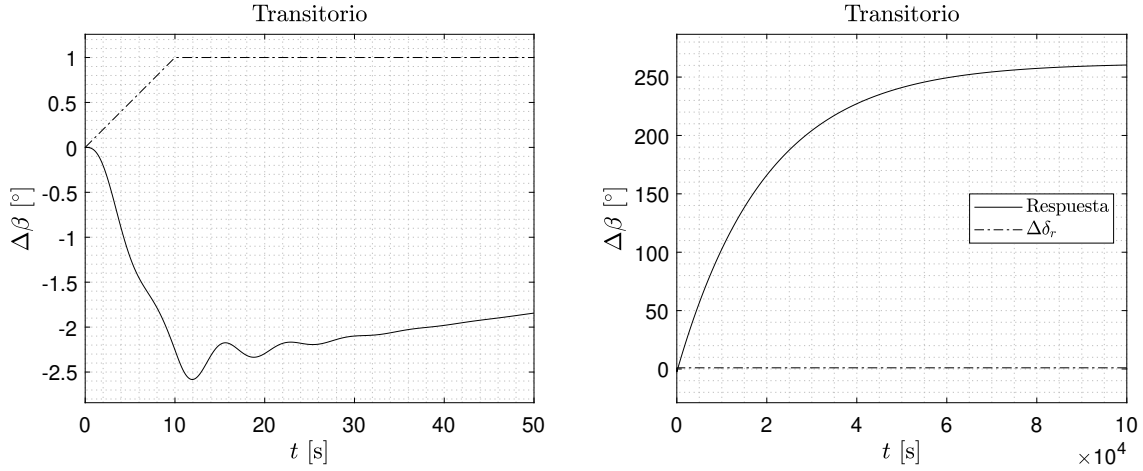


Figura 5.12: Respuesta temporal en ángulo de resbalamiento frente a una entrada en timón de dirección de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	-
$\Delta\beta_p$ [°]	-2.58
t_p [s]	12
$\Delta\beta_{st}$ [°]	262
t_s [s]	$7.7 \cdot 10^4$

Tabla 5.12: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{\beta\delta_r}$.

Si llevamos a cabo una entrada en rampa, la respuesta del sistema será análoga al caso del escalón unitario, con la pequeña diferencia de que el ángulo de guiñada que se obtiene en los primeros compases del movimiento es ligeramente menor en valor absoluto respecto al caso anterior.

5.4. Respuesta de velocidad angular de guiñada a entrada en timón de dirección

5.4.1. Función de transferencia

$$G_{r\delta_r} = [K]_{r\delta_r} \frac{(\tau_r s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_r} \right)^2 + 2\xi_r \left(\frac{s}{\omega_r} \right) + 1 \right]}{(\tau_s s + 1)(\tau_R s + 1) \left[\left(\frac{s}{\omega_{nDR}} \right)^2 + 2\xi_{DR} \left(\frac{s}{\omega_{nDR}} \right) + 1 \right]} \quad (5.4)$$

$[K]_{r\delta_r}$ [1/s]	957
τ_r [s]	0.130
ω_r [s]	0.141
ξ_r [s]	0.333

Tabla 5.13: Valores característicos de la función de transferencia $G_{r\delta_r}$

La función de transferencia 5.4 representa las perturbaciones en la velocidad angular de guiñada, Δr , frente a entradas de perturbación en el timón de dirección, $\Delta\delta_r$.

En este caso se vuelve a recuperar la configuración de cero real con doble cero complejo conjugado, y tal como se ha explicado en los apartados anteriores se puede predecir junto con los valores de la tabla 5.13, que debido a la cercanía entre polos y ceros, la aparición de asíntotas invertidas así como de cambios de fase momentáneos.

5.4.2. Diagrama de Bode

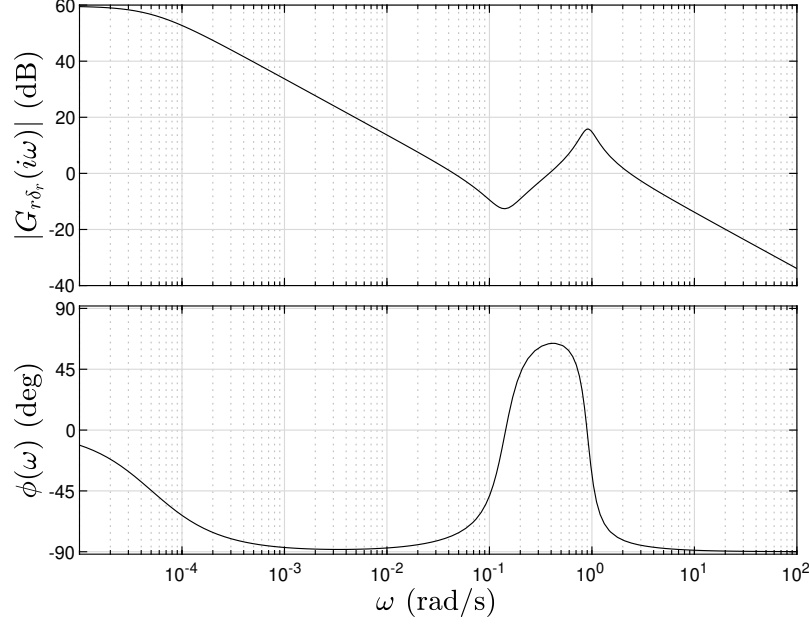


Figura 5.13: Diagramas de Bode para la función $G_{r\delta_r}$.

$ G_{r\delta_r}(\omega_{DR}) $ [dB]	15.84
$ G_{r\delta_r}(1/\tau_R) $ [dB]	-1.34
$ G_{r\delta_r}(1/\tau_S) $ [dB]	-79.83

Tabla 5.14: Módulo de la respuesta en frecuencia de la función de transferencia $G_{r\delta_r}$ a las frecuencias de los modos propios lateral-direccionales.

Observando la Figura 5.13, se puede confirmar la predicción hecha y comentada en casos anteriores, quedando configuraciones de polos y ceros cercanas en frecuencia lo que provoca, lejos de anularse entre ellas, un fuerte cambio de pendiente de -20 dB/dec a 40 dB/dec , junto con un abrupto cambio de fase entre 0.1 rad y 1 rad , pasando de -90° a 90° antes de volver a atenuarse.

5.4.3. Diagrama de Nichols

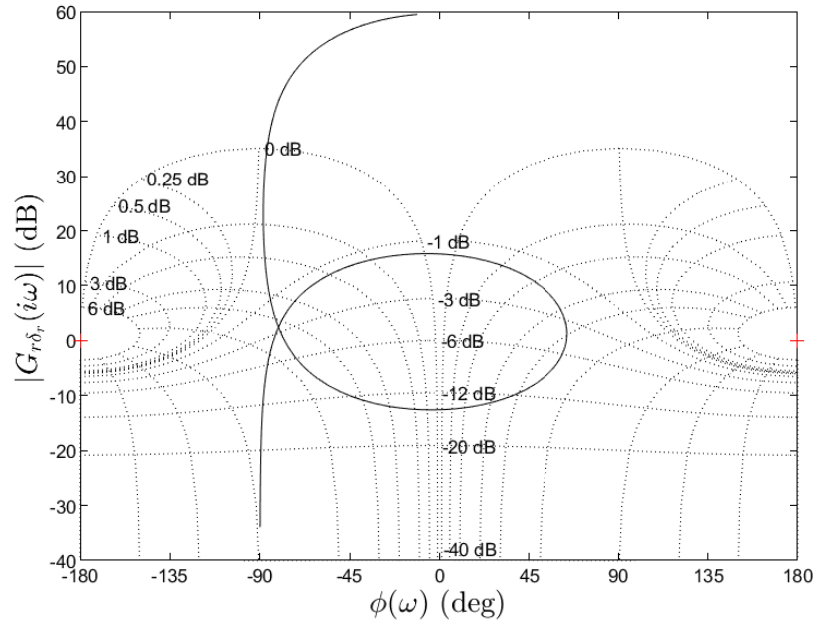


Figura 5.14: Diagrama de Nichols para la función $G_{r\delta_r}$.

Finalmente en la figura 5.14, tenemos un diagrama de Nichols que presenta un lazo importante en el entorno de fase 0° , esta característica viene dada principalmente por el hecho de que tenemos un cero real ($1/\tau_r$), que combinado con la pareja de ceros complejos conjugados, caracterizados en la frecuencia ω_r , hacen que tengamos una asíntota invertida muy alargada en el rango de frecuencias entre 0.1 rad y 1 rad , lo cual produce, como se ha comentado en el diagrama de Bode de esta función, un pico de cambio de fase muy brusco entre -90° y 90° antes de volver a atenuarse con el aumento de frecuencia.

5.4.4. Respuesta temporal a una entrada escalón unitario

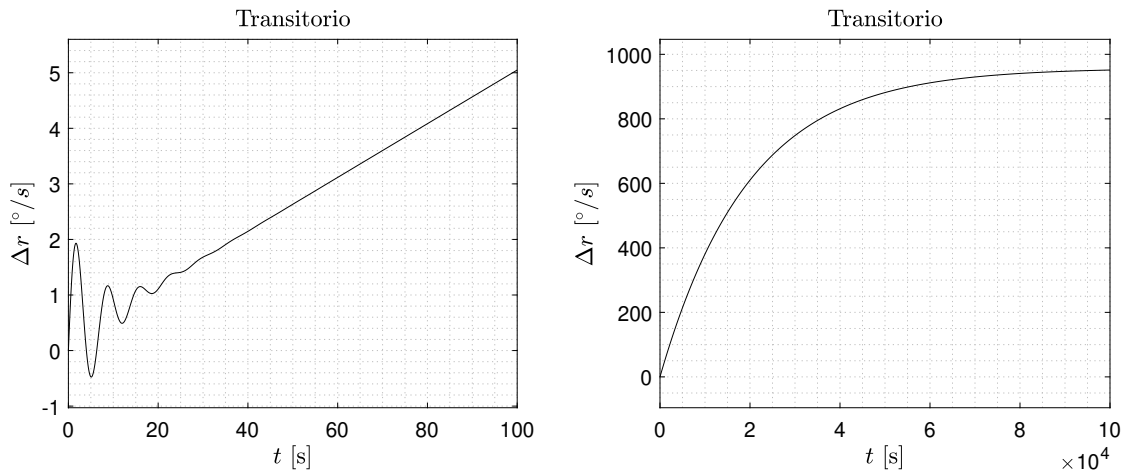


Figura 5.15: Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en timón de dirección de tipo escalón unitario.

$[M]_p$ [%]	-
Δr_p [°/s]	-
t_p [s]	-
Δr_{st} [°/s]	957
t_s [s]	$7.7 \cdot 10^4$

Tabla 5.15: Datos característicos de la respuesta a escalón unitario para $G_{r\delta_r}$.

Observando la respuesta de la figura 5.15 se puede apreciar que ante una entrada en el ángulo de dirección, la respuesta del sistema, como consecuencia de que la salida está en prácticamente fase con la entrada, es incrementar la velocidad del ángulo de guiñada hasta hacerse estacionario e igual a la posición de equilibrio.

5.4.5. Respuesta temporal a una entrada en rampa unitaria saturada

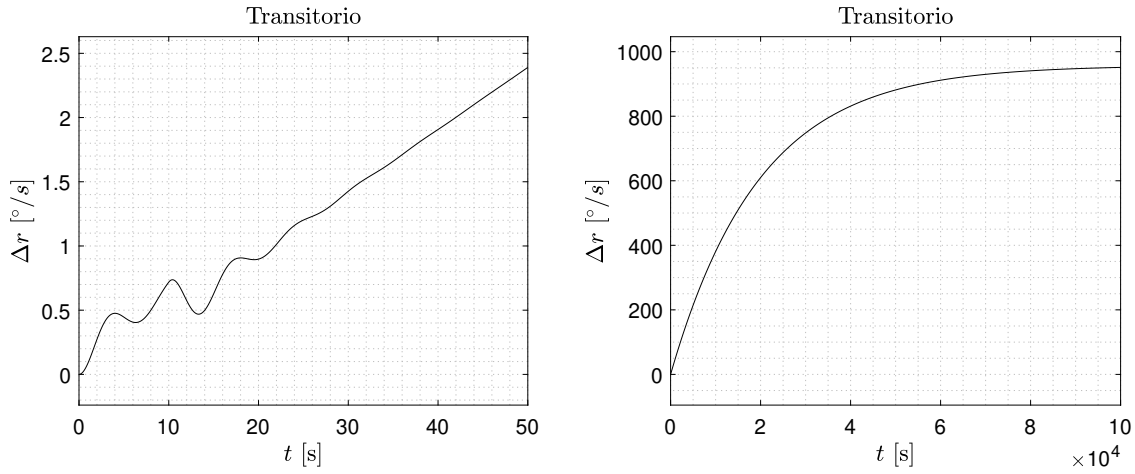


Figura 5.16: Respuesta temporal en velocidad angular de guiñada frente a una entrada en timón de dirección de tipo rampa unitaria saturada.

$[M]_p$ [%]	-
Δr_p [°/s]	-
t_p [s]	-
Δr_{st} [°/s]	957
t_s [s]	$7.7 \cdot 10^4$

Tabla 5.16: Datos característicos de la respuesta a rampa saturada para $G_{r\delta_r}$.

En el caso de una entrada en rampa unitaria sobre el timón de dirección, se aprecia como las oscilaciones iniciales son menos acusadas pero el comportamiento final del sistema es el mismo que para el caso de la entrada escalón unitario.

Referencias

[1] - Gómez Tierno, M.A., Pérez Cortés, M. y Puentes Márquez, C., *Mecánica del Vuelo (2ª edición)*, Ibergarceta Publicaciones, SL, Madrid, 2012

[2] - Antón Diez, M. A., Gómez Tierno, M., A., Pérez Cortés, M., Gracia Diez, L., *Leyes de Control de Vuelo, Guía de diseño para aeronaves de ala fija* 1ª ed., Garceta, Madrid, 2019

[3] - Gómez Tierno, M.A. y Pérez Cortés, M., *Apuntes Moodle*, Publicaciones ETSIAE, Madrid

[4] - Cook, M.V. *Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control* 3ª ed. Elsevier Aerospace Engineering Series, 2012