问题二求解思路

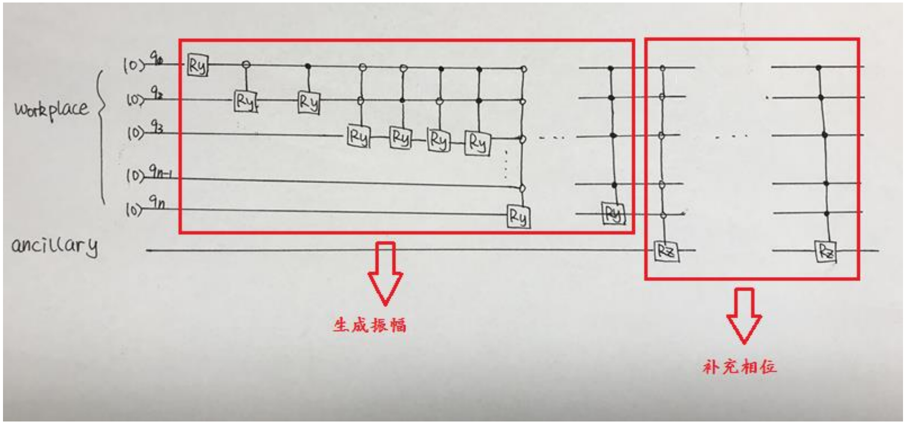
根据题目要求，首先要制备特定的量子态，这里根据给定的门电路的集合设计如下算法来构造此任意态。

大致思想：

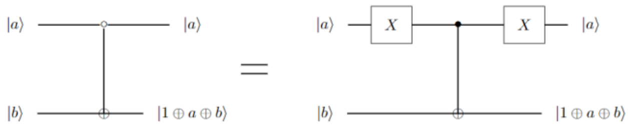
(1)利用 CNOT 门和 Ry Rz 实现 CRy 和 CRz，并结合本文所述的技巧递归的产生 多比特的受控门。 (2)寻找最短路径，确定受控位和被控制位之间最近的一条路径（最短路径算 法），然后利用多次 SWAP 门（可以分解成三个 CNOT 门），从而可以实现非邻近比特间的纠缠门操作。

具体步骤如下：

Step1：设计构造任意量子态的电路图如下：



其中：



现在假设需要制备的量子状态的终态为：

$$\sum_{j\in\{0,1\}^n} \alpha_j |j\rangle$$

其中 α_j为任意复数，则将复数分解成实数与相位的乘积形式，即$\alpha_j=|\alpha_j|e^{i\theta_j}$

先考虑将对振幅部分进行分解，下面给出分解过程：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in\{0,1\}^n}\alpha_j\left|j\right\rangle=\sum_{j\in\{0,1\}^n}|\alpha_j|e^{i\theta_j}\left|j\right\rangle\\
=&|\alpha_{0\cdots0}|e^{i\theta_{0\cdots0}}\left|0\cdots0\right\rangle+\cdots+|\alpha_{1\cdots1}|e^{i\theta_{1\cdots1}}\left|1\cdots1\right\rangle\\
=&\beta_0\left|0\right\rangle(\cdots)+\beta_1\left|1\right\rangle(\cdots)\\
=&\beta_0\left|0\right\rangle(\beta_{00}\left|0\right\rangle+\beta_{01}\left|1\right\rangle)(\cdots)+\beta_1\left|1\right\rangle(\beta_{10}\left|0\right\rangle+\beta_{11}\left|1\right\rangle)(\cdots)\\
=&\beta_0\left|0\right\rangle[\beta_{00}\left|0\right\rangle(\beta_{000}\left|0\right\rangle+\beta_{001}\left|1\right\rangle)(\cdots)+(\beta_{01}(\beta_{010}\left|0\right\rangle+\beta_{011}\left|1\right\rangle)(\cdots)]\\
&+\beta_1\left|0\right\rangle[\beta_{10}\left|0\right\rangle(\beta_{100}\left|0\right\rangle+\beta_{101}\left|1\right\rangle)(\cdots)+(\beta_{11}(\beta_{110}\left|0\right\rangle+\beta_{111}\left|1\right\rangle)(\cdots)]\\
=&\beta_0\left|0\right\rangle\left\{\beta_{00}\left|0\right\rangle(\beta_{000}\left|0\right\rangle(\cdots\left[\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{n-1}}\left|0\right\rangle\left(e^{i\theta_{\underbrace{0\cdots0}_{n}}}\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{n}}\left|0\right\rangle+e^{i\theta_{\underbrace{0\cdots0}_{n-1}1}}\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{n-1}1}\left|1\right\rangle\right)+\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{n-2}1}\left|1\right\rangle(\cdots)\right]\cdots))\right\}\\
&+\beta_1\left|1\right\rangle(\cdots)
\end{aligned}
$$

其中的各个符号的定义如下：

(1)第1层

$$
\begin{cases}
|\alpha_0|=\sqrt{\sum_{j\in\{0,1\}^{n-1}}|\alpha_{0j}|^2},\\
|\alpha_1|=\sqrt{\sum_{j\in\{0,1\}^{n-1}}|\alpha_{1j}|^2},\\
\beta_0=|\alpha_0|,\\
\beta_1=|\alpha_1|.
\end{cases}
$$

(2)第k层, $2\le k\le n$

$$
\begin{cases}
|\alpha_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}|^2=\sum_{j\in\{0,1\}^{n-k}}|\alpha_{\underbrace{0\cdots0}_{k}j}|^2,\\
\qquad\vdots\\
|\alpha_{\underbrace{1\cdots1}_{k}}|^2=\sum_{j\in\{0,1\}^{n-k}}|\alpha_{\underbrace{1\cdots1}_{k}j}|^2,\\
\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}=\dfrac{|\alpha_{\underbrace{0\cdots0}_{k}}|}{\beta_{\underbrace{0\cdots0}_{k-1}}},\\
\qquad\vdots\\
\beta_{\underbrace{1\cdots1}_{k}}=\dfrac{|\alpha_{\underbrace{1\cdots1}_{k}}|}{\beta_{\underbrace{1\cdots1}_{k-1}}}.
\end{cases}
$$

$$
R_y(\theta)=e^{i\theta Y/2}=cos\frac{\theta}{2}I-isin\frac{\theta}{2}Y=\begin{bmatrix}cos\frac{\theta}{2}&-sin\frac{\theta}{2}\\sin\frac{\theta}{2}&cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix},
$$

$$
R_z(\theta)=e^{i\theta Z/2}=cos\frac{\theta}{2}I-isin\frac{\theta}{2}Z=\begin{bmatrix}e^{-i\frac{\theta}{2}}&0\\0&e^{i\frac{\theta}{2}}\end{bmatrix}.
$$

在确定好上述参数后，按照如下的流程进行配置好量子线路：

(1)准备初态$|0\rangle^{\otimes n}$，用β_0确定第一个R_y的参数，即$cos(\theta/2)=\beta_0$ 将其作用于第一个量子比特。此时的量子态为：

$$R_y(\theta)\,|0\rangle\,|0\rangle^{\otimes(n-1)}=(\beta_0\,|0\rangle+\beta_1\,|1\rangle)\,|0\rangle^{\otimes(n-1)}$$

(2)确定CR_y门后，即可用两个这样的门来确定第二个量子比特。此时的量子态为：

$$\beta_0\,|0\rangle\,(\beta_{00}\,|0\rangle+\beta_{01}\,|1\rangle)\,|0\rangle^{\otimes(n-2)}+\beta_1\,|1\rangle\,(\beta_{10}\,|0\rangle+\beta_{11}\,|1\rangle)\,|0\rangle^{\otimes(n-2)}$$

(3)重复上述过程，直到确定了所有R_y门。至此，我们制备出了下面的量子状态，即没有考虑相位。

$$\sum_{j\in\{0,1\}^n}|\alpha_j|\,|j\rangle$$

(4)利用多重受控R_z门和一个辅助量子比特为每一个基矢作用上一个相位，从而有

$$\sum_{j\in\{0,1\}^n}|\alpha_j|e^{i\theta_j}\,|j\rangle$$

Step2: 因为可用的门电路集合不包括 CRy 和 CRz 等受控旋转门，下面分别解决通过可用门电路集合构造受控旋转门的问题。参考书本《Quantum Computation and Quantum Information》 Nielsen & Chuang P176 Corollary 4.2 和 P181 的 Figure4.6 可知通过 CNOT 门和 Rx，Ry，Rz 门可以构造出 CRy，CRz 门。

1. 通过 CNOT 和 Rx,Ry,Rz 门实现 CRy 门

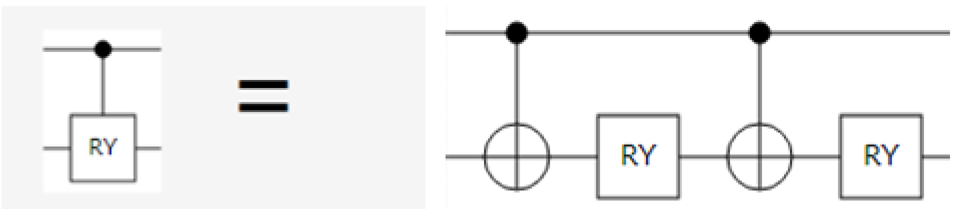
定义： A≡Rz(β)Ry(γ/2);

B≡Ry(-γ/2)Rz(-(δ+β)/2);

C≡Rz((δ+β)/2);

令 α，β，δ 均取为 0，得 U=Ry(γ)=AXB=Ry(γ/2)*Ry(-γ/2),

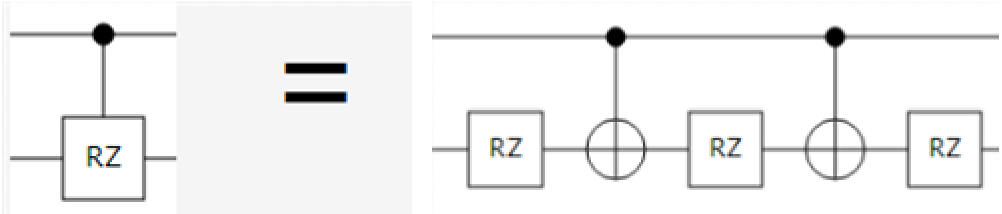
故等效电路图如下所示（其中左边 RY 的参数为-γ/2，右边 RY 的参数为γ/2）：



2. 通过 CNOT 和 Rx, Ry, Rz 门实现 CRz 门:

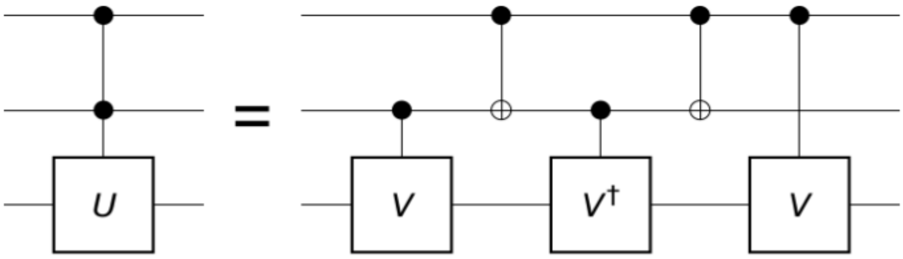
由 step2：1 可知：当 α，γ，δ=均取 0 时，U=Rz(β)=AXBXC=Rz(β)*Rz(-

β/2)*Rz(β/2)，故电路图如下图所示（其中左边 RZ 的参数为 β/2，中间 RZ 的参数为-β/2，右边 RZ 的参数为 β）：

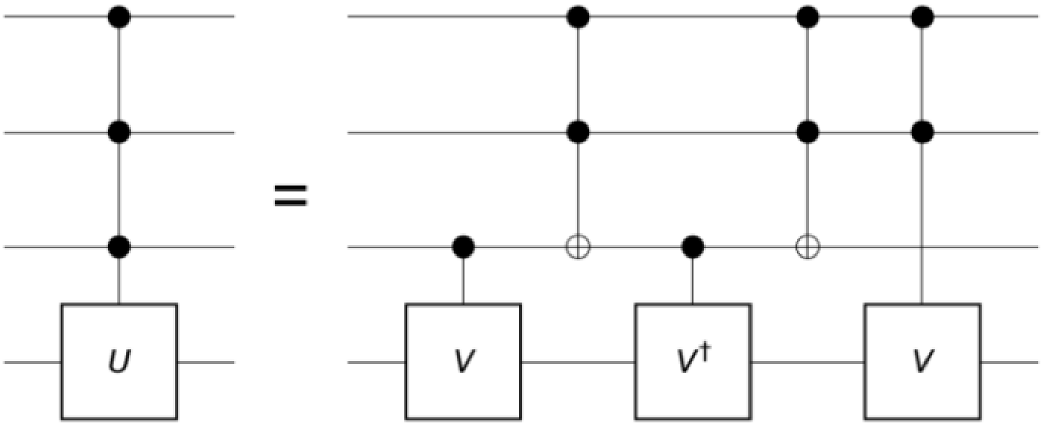


Step3: 因为“量子算法最终以只含单比特量子门和两比特量子门的量子电路呈现“实现，参考书本《Quantum Computation and Quantum Information》 Nielsen & Chuang P184 可知仅用两比特门即可实现 $C^n(U)$门，其中 n 为控制门的个数且 n>2。设 U 为单量子比特上的任意幺正算符，则存在单量子比特上的幺正算符 A,B,C 使得 ABC=I 且 $U=e^{i\alpha}AXBXC$，其中 α 为某个整体的相因子。同时书本上通过证明得到 **U=** $e^{i\alpha}$Rz(β)Ry(γ) Rz(δ)。

1. 当 n=2 时，电路图如下所示（其中 V 满足 $v^2=U$，作为幺正矩阵自然有 $V*V^+=I$）：

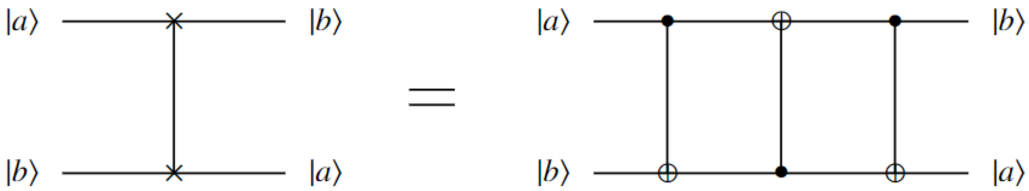


2. 当 n =3 时，电路图如下所示：



3. 以此类推可得 n=4; n=5;……的情况。

Step4：由于很多量子芯片只允许实现某些近邻量比特量子门操作，而我们希望的是实现对任意两个量子比特实现量子门操作。所以，我们可以通过 Swap 门将两个不“相邻”的量子比特变成“相邻”的两个量子比特，执行完们操作以后，再使用 Swap 操作将对应的量子比特交换回去原来的位置。这里需要注意的是：Swap 操作应该是作用在两个不“相邻”量子比特的最短路径上。同时，因为可用门集合的限制，这里需要重新构造 Swap 门，具体实现方法如下是：通过 3 个 CNOT 门来构造，如下图电路所示：



证明过程为：假设 q0=a,q2=b,则通过第一个 CNOT 门后，q2=a+b;通过第二个 CNOT 门后，q0=b;最后通过第三个 CNOT 门后,q2=a;即最终 q0=b,q2=a;

以 4 个比特位为例，实现不相邻（比特 1、4）两比特量子门操作具体操作如下：先通过 SWAP 交换比特位 1 和比特位 3，然后再与比特位 4 实现量子比特门操作，电路图如下：