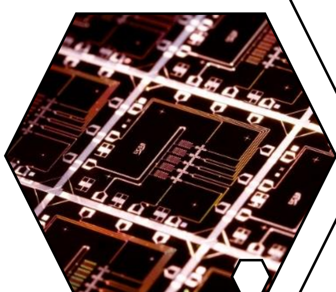
关于离子阱的那些事儿

南科大量子科学与工程研究院

张君华

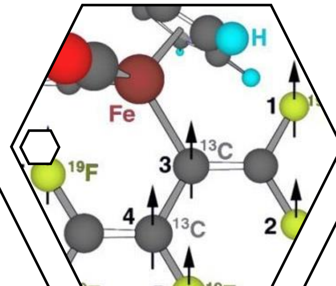
2019.07.14

常见的系统



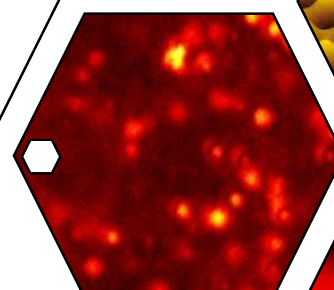
核磁共振

超导

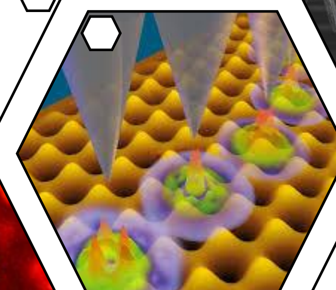


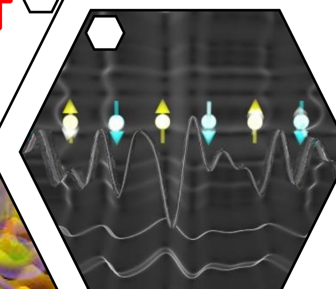
金刚石色心

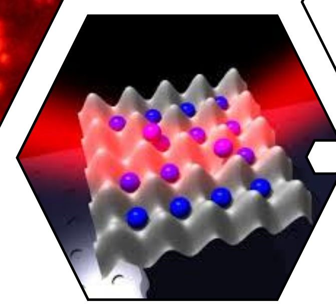
硅量子点



离子阱







超冷原子

原子

先来
复习一下
原子物理

原子能级

$$^{2S+1}L_J$$

电子的总自旋

电子的轨道角动量

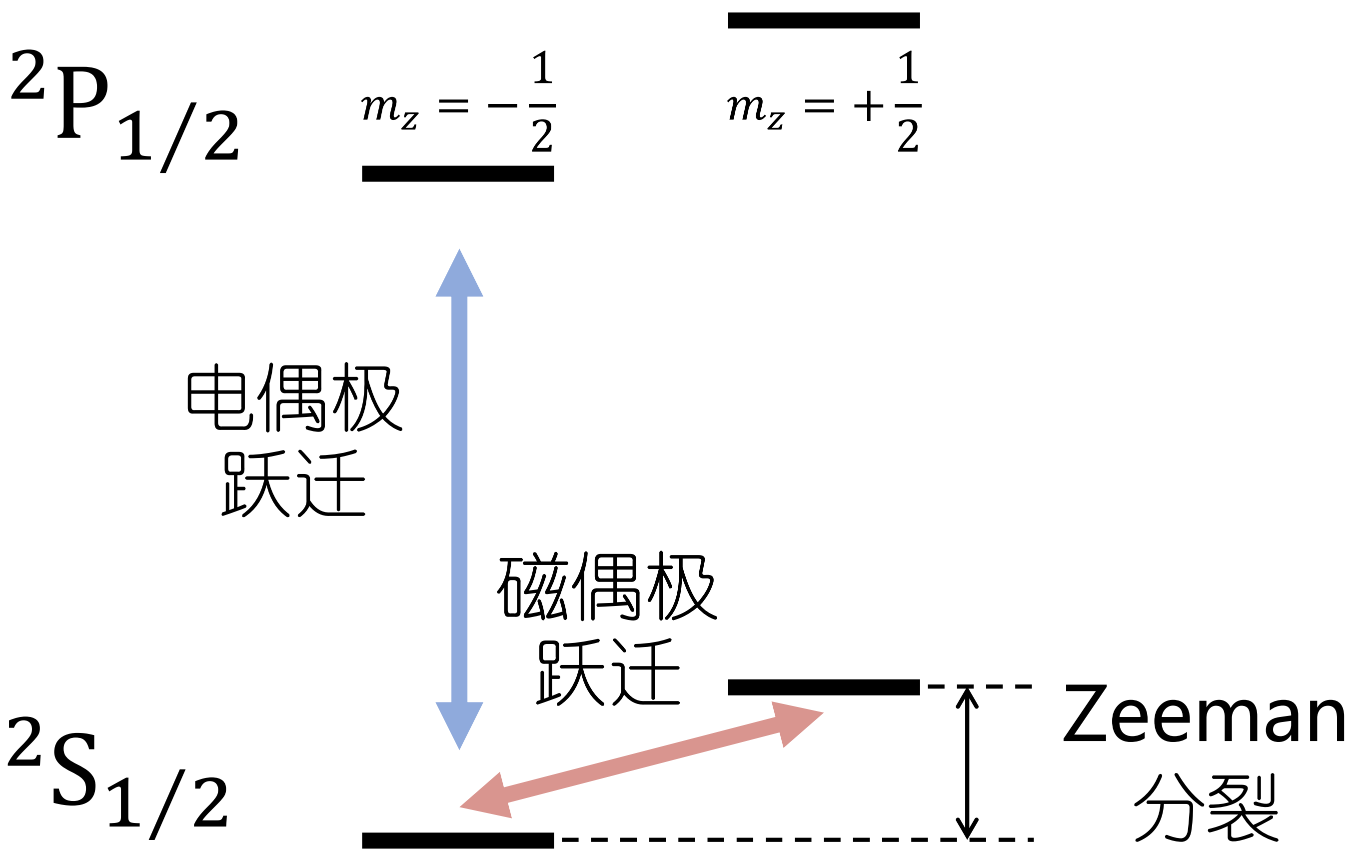
S,P,D,F…对应

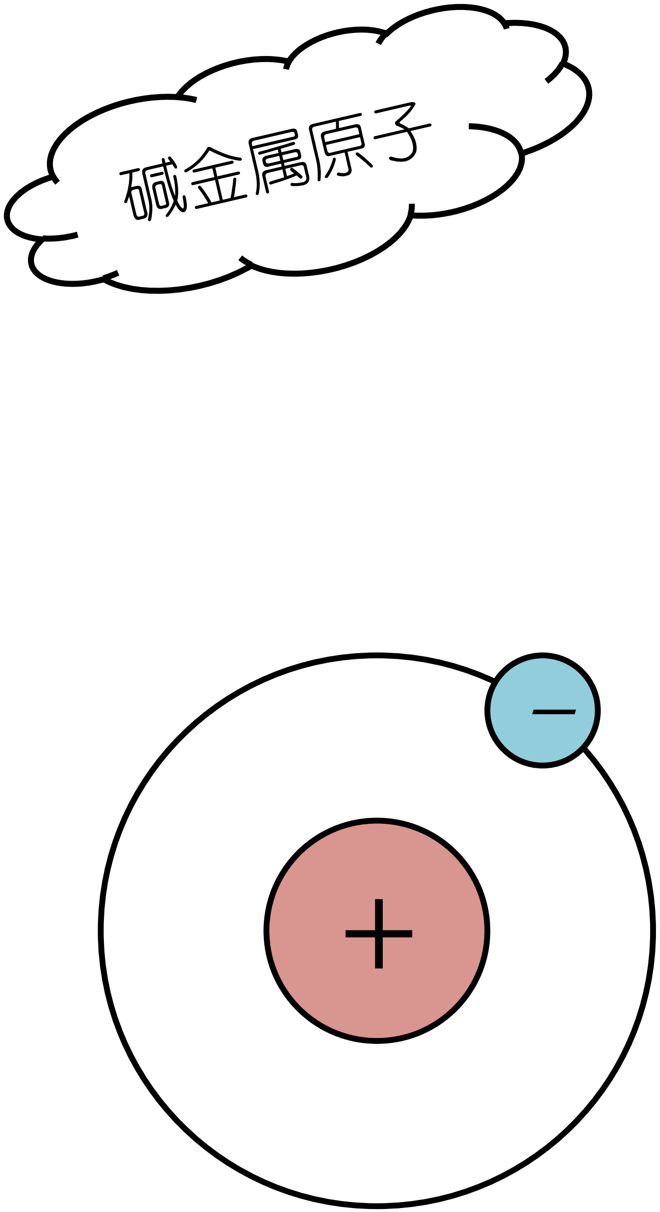
$L = 0,1,2,3 \ldots$

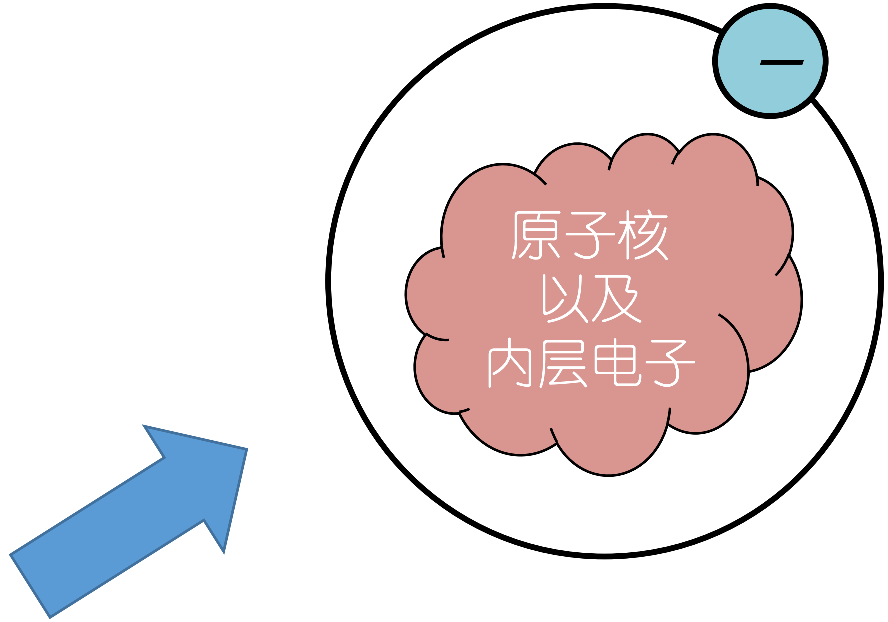
系统的总角动量

$|L-S|$到$L+S$的半整数

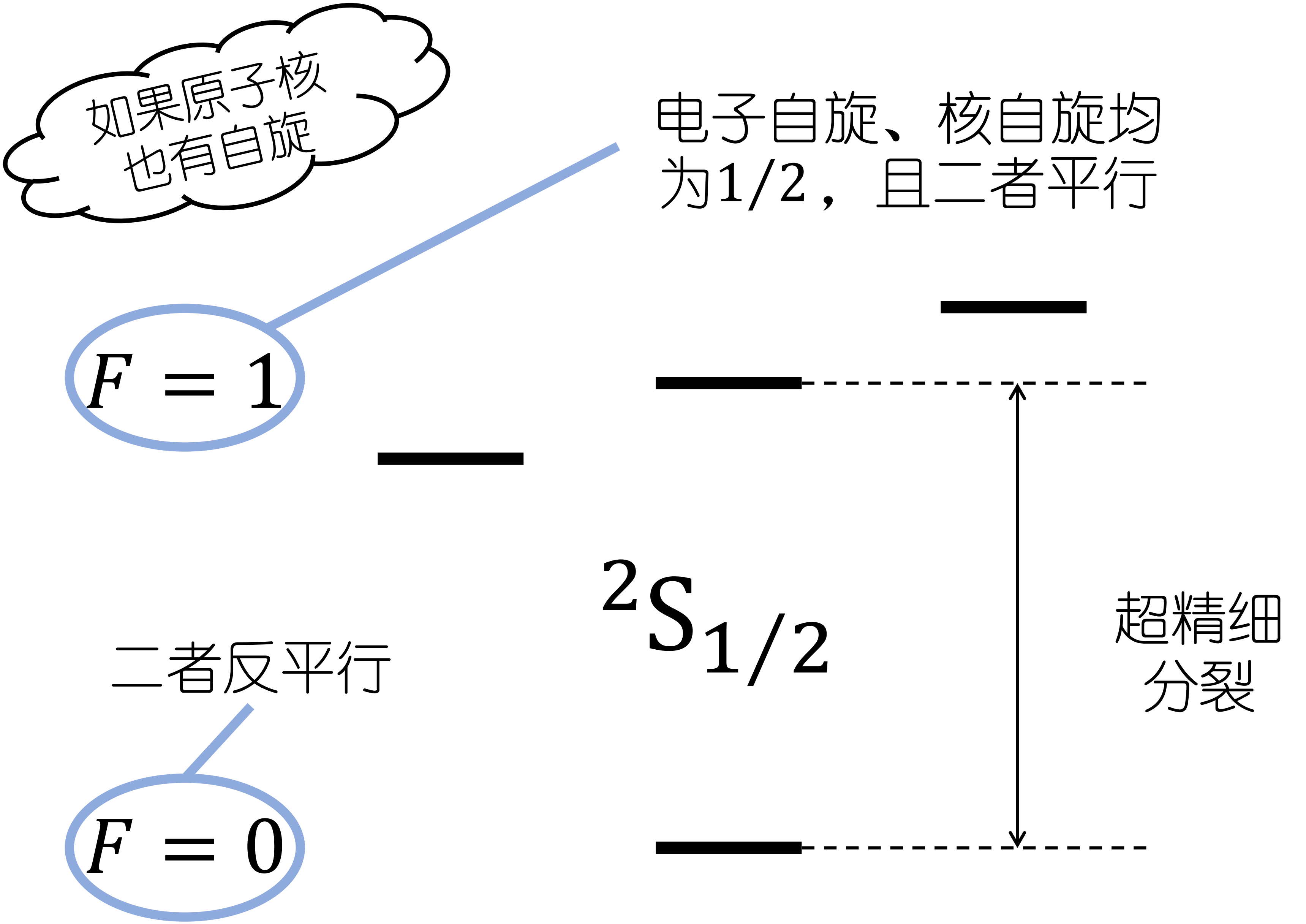
举个栗子：氢原子







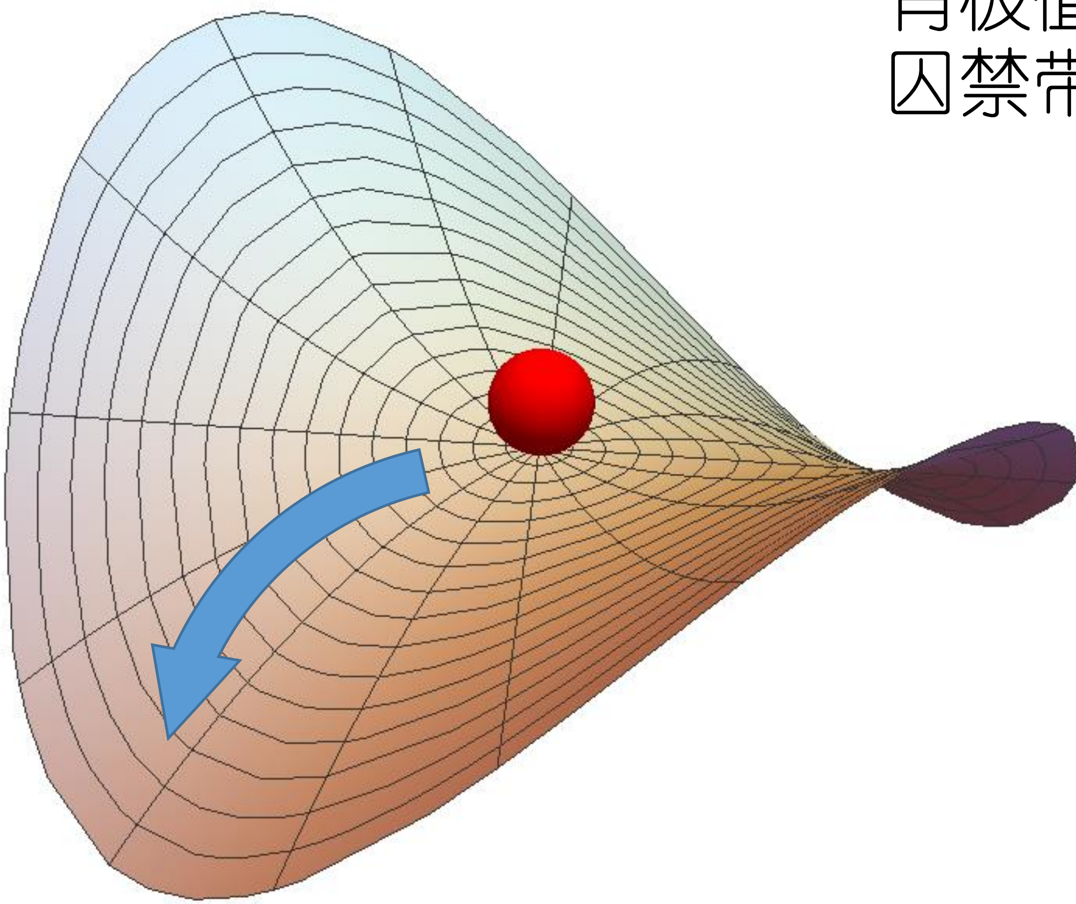
能级结构
类似于
氢原子



如果原子核
也有自旋
电子自旋、核自旋均
为1/2，且二者平行
F = 1
$^2S_{1/2}$
二者反平行
F = 0
超精细
分裂

离子的囚禁

根据拉普拉斯方程……



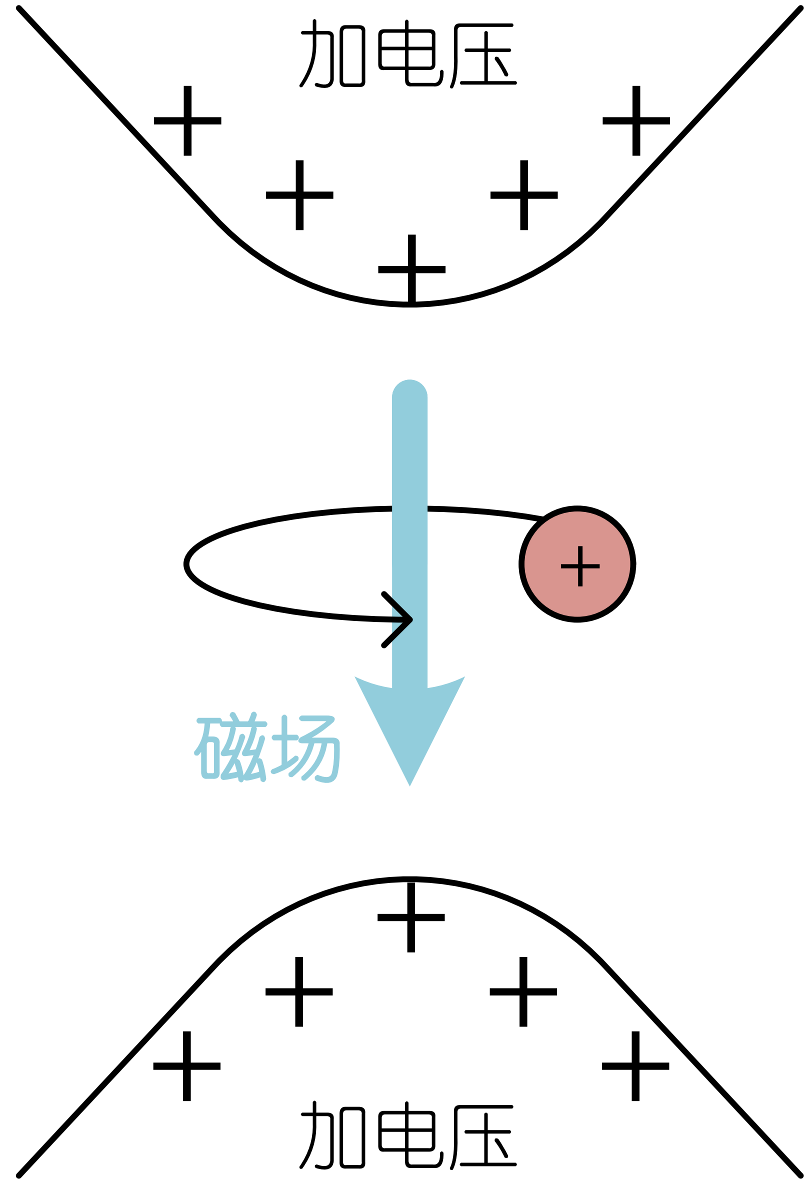
无源静电场势能没有极值，无法稳定囚禁带电粒子

那么就有两种方案……

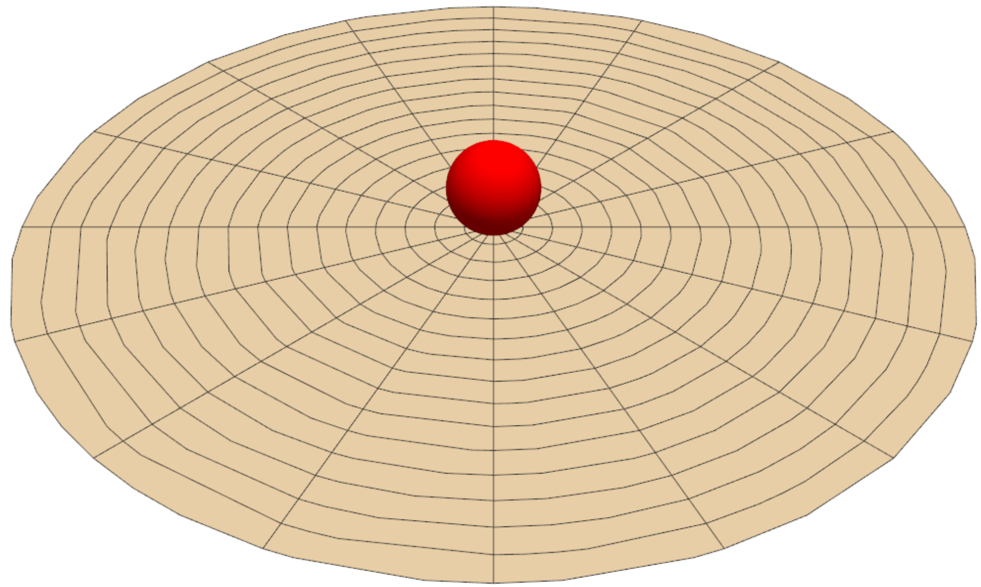
其一，Penning阱：
轴向由静电场束缚，
径向由磁场束缚，
离子在阱中转动。

角速度：

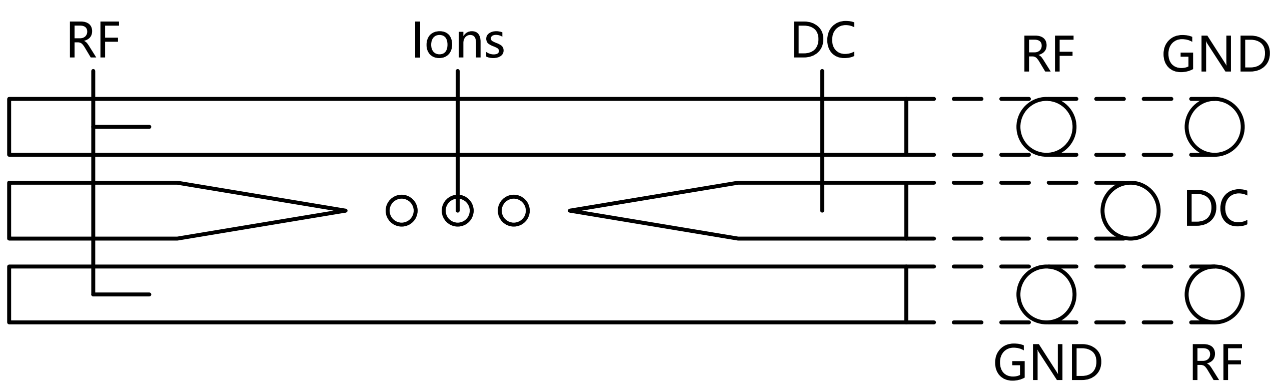
$$\omega = qB/m$$



那么就有两种方案……

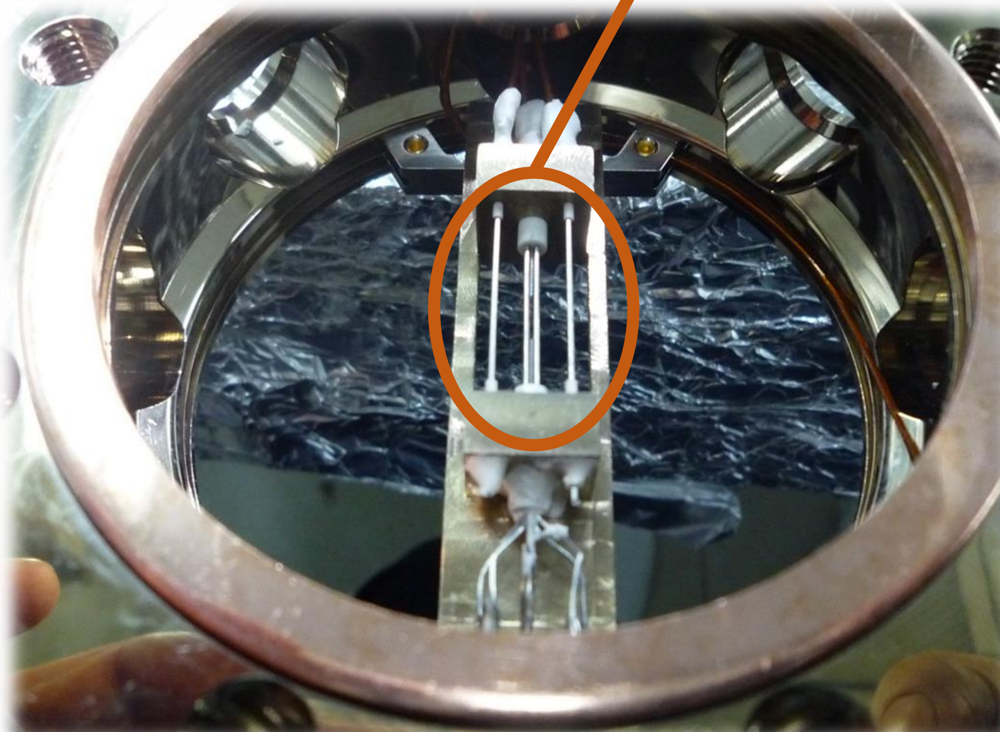


其二，Paul阱：
轴向由静电场束缚，
径向由射频电场束缚，
离子在阱中看上去是稳定的。

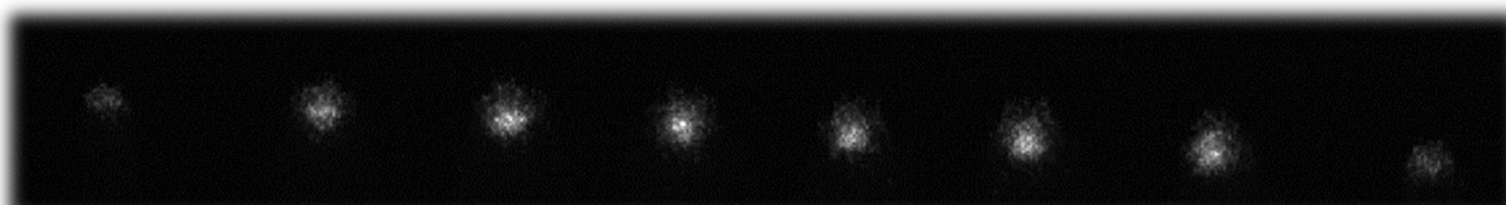


先来个
直观的概念

离子阱



阱里的离子
长这样



然后是
虐人的理论

电势能

直流电极到阱中心的等效距离

$$U(x,y,z,t)$$

轴向直流电压

电极形状系数

$$= k\frac{V_\mathrm{a}}{2}\cdot\frac{2z^2-x^2-y^2}{A^2}$$

射频电场频率

径向射频电压

$$+\frac{V_\mathrm{r}}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{R^2}\cdot\cos\Omega t$$

射频电极的等效距离

继续
虐人的理论

不可能存在局部极小，因此x^2、y^2系数为负

轴向必须是束缚势阱，z^2系数为正

$$U(x,y,z,t) = k\frac{V_\mathrm{a}}{2}\cdot\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{A^2} + \frac{V_\mathrm{r}}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{R^2}\cdot\cos\Omega t$$

考虑系统的镜像对称性，因此没有x, y, z的一次项

同理，无局部极小，因此x^2、y^2系数反号

继续
虐人的理论

由电势可得电场：

$$\vec{E}(x, y, z, t)$$

$$= \frac{kV_\mathrm{a}}{A^2}(x, y, -2z)$$

$$- \frac{V_\mathrm{r}\cos\Omega t}{R^2}(x, -y, 0)$$

虐人的理论
要发大招了

由牛顿第二定律可得：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r_i + \frac{\Omega^2}{4}[a_i + 2p_i\cos\Omega t]r_i = 0$$

Mathieu
方程

虐人的理论要发大招了

$$p_x = -p_y = \frac{2qV_\mathrm{r}}{R^2\Omega^2 m},$$
$$p_z = 0$$

阱中单个离子的位置坐标

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r_i + \frac{\Omega^2}{4}\left[a_i + 2p_i \cos \Omega t\right] r_i = 0$$

$$i = x, y, z$$

$$a_x = a_y = -\frac{a_z}{2} = -\frac{4kqV_\mathrm{a}}{A^2\Omega^2 m}$$

虐人的理论
在大杀特杀

直观理解：
离子足够重或电场频率足够高，离子不会被电场大幅度带着跑

假设$|p_i|, |a_i| \ll 1$，则有

$$r_i(t) = A_i\left[1 + \frac{p_i}{2}\cos\Omega t\right]\cos(\omega_i t + \phi_i)$$

某个无关紧要的幅度系数

阱频率 $\omega_i = \frac{\Omega}{2}\sqrt{a_i + \frac{p_i^2}{2}}$

总结一下

- 静电场无法稳定囚禁带电粒子
  - Penning阱：静电场和磁场
  - Paul阱：静电场和射频电场

- 在Paul阱中，如果射频电场频率够高、离子够重，则射频电场可等效为赝势处理，离子等同于在一个简谐势阱中振动

离子
的
激光冷却

刚被囚禁住的离子一般动能较大，会在阱里跑来跑去，不能形成稳定的结构……

那就得让它们冷下来！

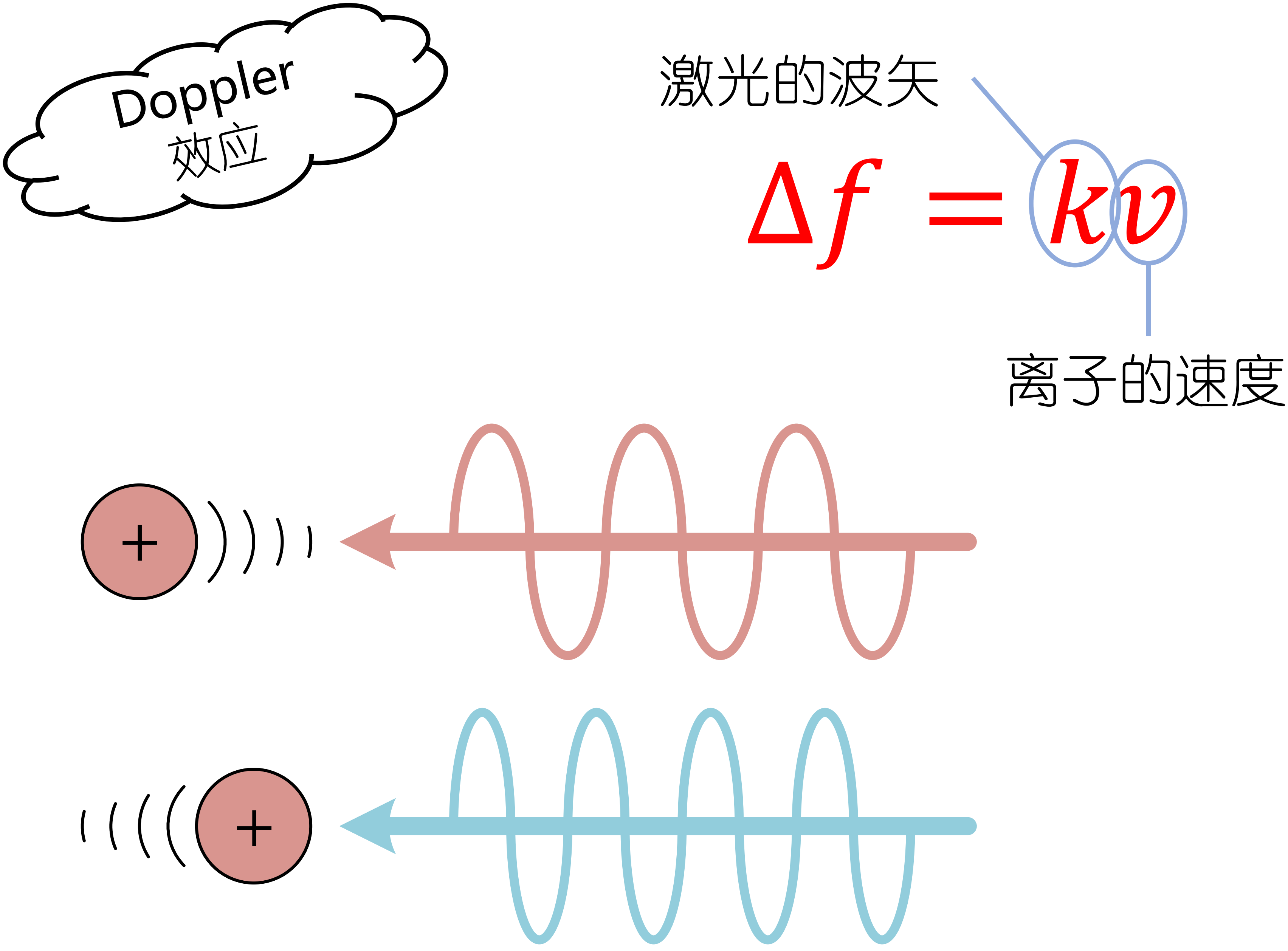
荡秋千
都玩过吧

该如何让秋千停下来？

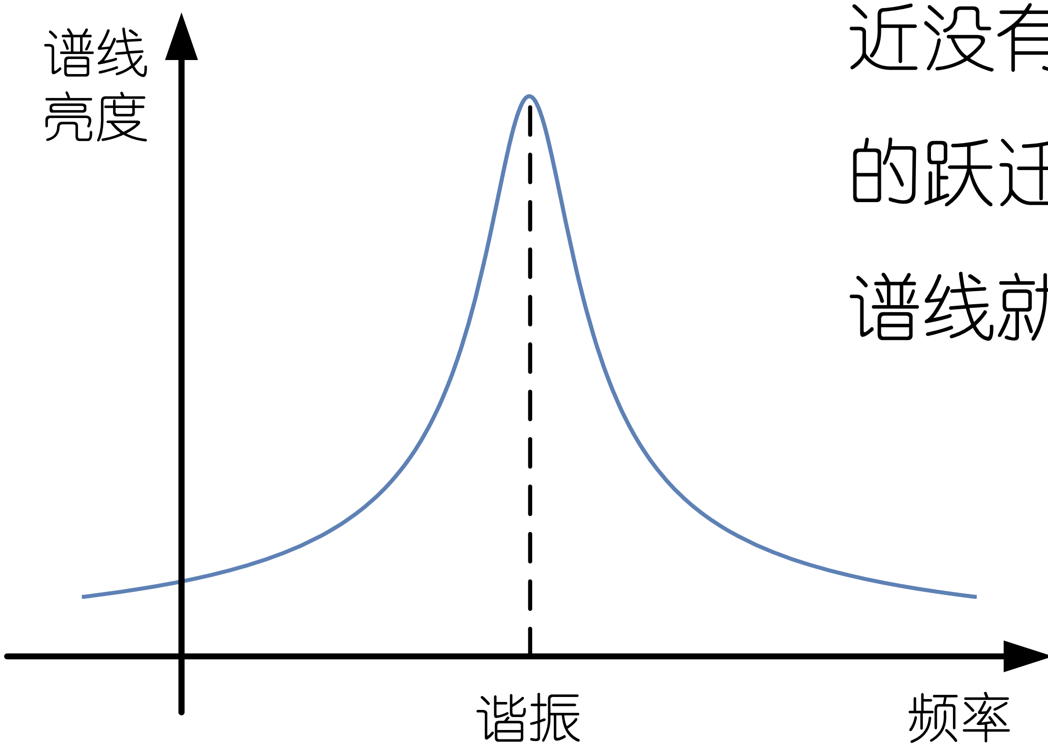
当秋千荡过来的时候推一下！

离子拿什么推？

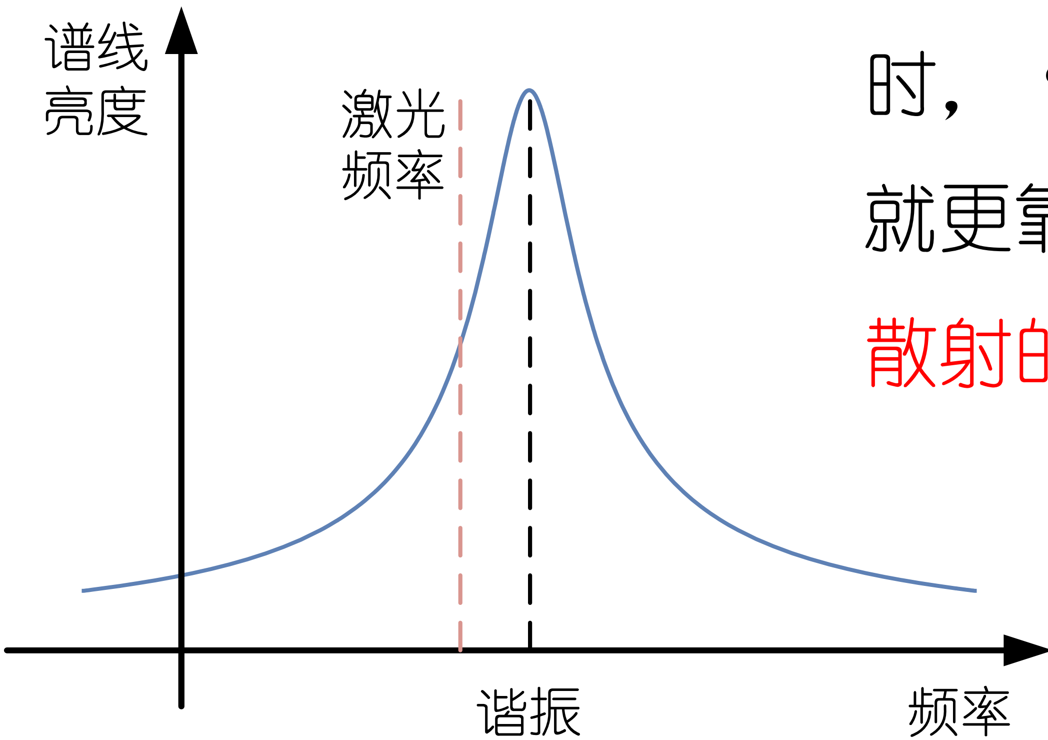
用激光！


Doppler
效应
激光的波矢
$\Delta f = kv$
离子的速度

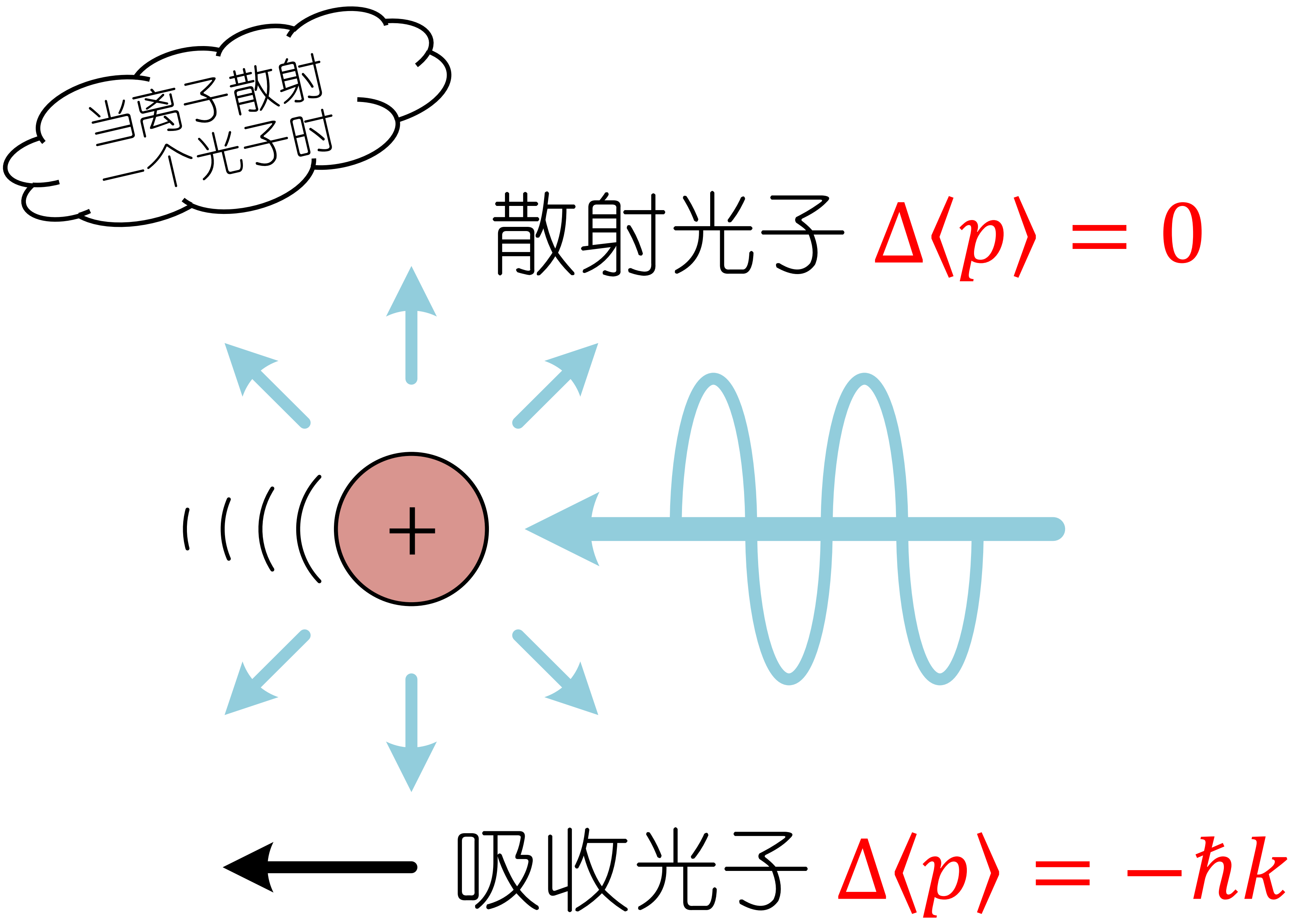
当激光照射离子的时候



如果激光激发的是一个电偶极跃迁，且附近没有其它波长相近的跃迁，那么原子的谱线就是洛伦兹型的



如果激发的激光频率低于谐振（红失谐），当离子向着激光运动时，“看起来”激光就更靠近谐振一些，散射的光子也就更多。



当离子散射
一个光子时
散射光子 $\Delta\langle p\rangle = 0$
+
吸收光子 $\Delta\langle p\rangle = -\hbar k$

当离子散射
一个光子时

- 当激光照射离子时，离子吸收1个光子，相应的平均动量发生改变
- 当离子辐射1个光子时，由于各向同性，平均动量不变
- 当红失谐的激光照射离子时，若离子面向激光移动，由于多普勒效应，散射的光子会略多些，也就是向着激光运动时，会“受到点阻力”

考虑一个质量为m的二能级的离子，其电偶极跃迁的自然线宽为Γ，某时刻沿入射激光方向的速度分量为v，入射激光的波矢为k。

虐人的理论
又来啦！

则大致上，离子受到的“阻力”为：

$$F = \hbar k \cdot kv$$

吸收一个光子
损失的动量

Doppler效应引
起的散射率差异

于是激光的冷却功率即为：

$$P_c = Fv = \hbar k^2 v^2$$

虐人的理论
又来啦！

除了冷却，光子的散射还会带来加热：

$\langle p\rangle$不变，但是$\langle p^2\rangle$增加了$\hbar^2k^2$

虐人的理论
又来啦！

于是光子散射导致的加热功率大致为：

$$P_h = \frac{\mathrm{d}\langle E_k \rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}\langle p^2 \rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\Gamma$$

当制冷和加热平衡时，达到最低温度：

$$P_h = P_c \rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{\hbar\Gamma}{4}$$

$$T = \frac{2E_k}{k_B} = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$$

总结一下

- 离子在吸收光子时，会获得光子的动量，由Doppler效应导致的正反运动方向的吸收率差异，整体表现为离子动量的损失。
- 离子在散射光子时，会增加自身动量的不确定度，整体表现为离子运动的加热。
- 以上只是一个唯像的粗浅推导，但是结果是正确的
  - Doppler冷却的极限动能为：$\langle E_k \rangle = \hbar\Gamma/4$
  - Doppler冷却的最优失谐为：$\delta = \Gamma/2$

量子比特

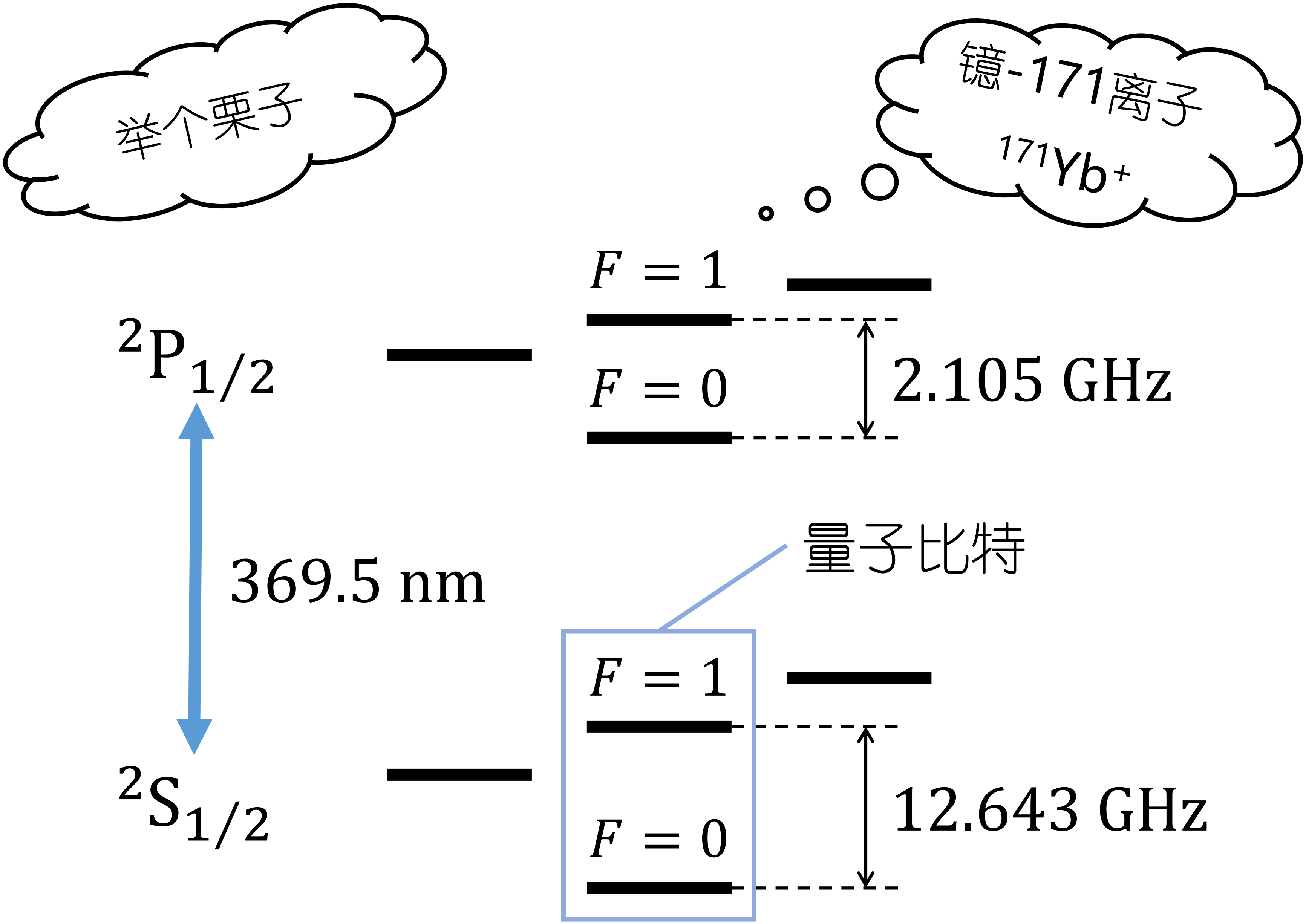
先入门一下

通常使用被囚禁的离子的不同电子能级来表示量子比特的$|0\rangle$和$|1\rangle$，所使用的能级类型大致上有：

- 不同的轨道角动量能级
- 超精细能级：同一轨道角动量的不同核自旋的能级
- Zeeman能级：无核自旋的同一轨道角动量的不同磁量子数的能级

哪些离子合适？

通常使用碱土金属（铍、镁、钙、锶、钡、镱等等）的离子进行实验，因为碱土金属的+1价离子最外层只有1个电子，能级结构与氢原子类似，较为简单。

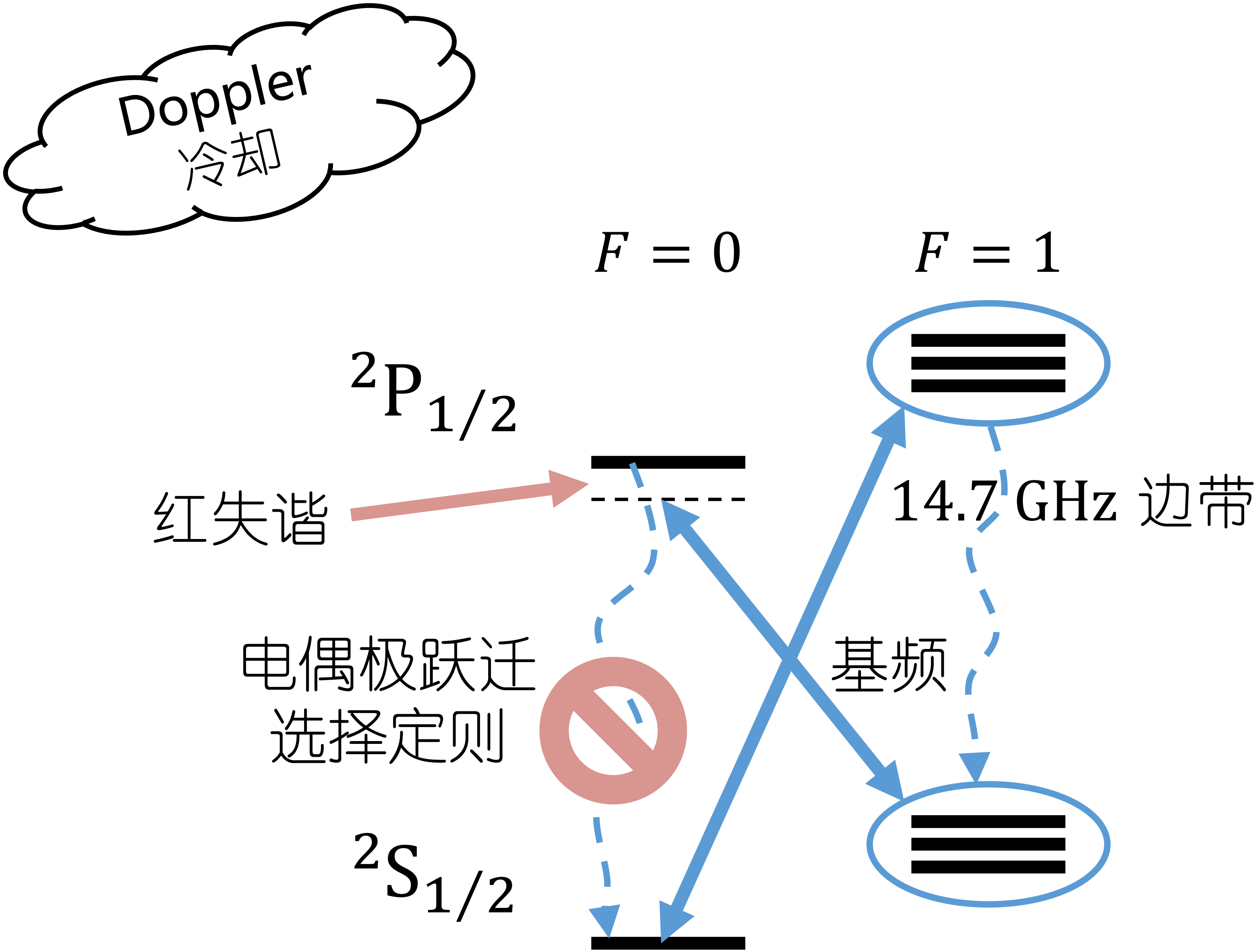


举个栗子
镱-171离子
$^{171}Yb^{+}$
$^2P_{1/2}$
$F = 1$
$F = 0$
2.105 GHz
369.5 nm
量子比特
$^2S_{1/2}$
$F = 1$
$F = 0$
12.643 GHz

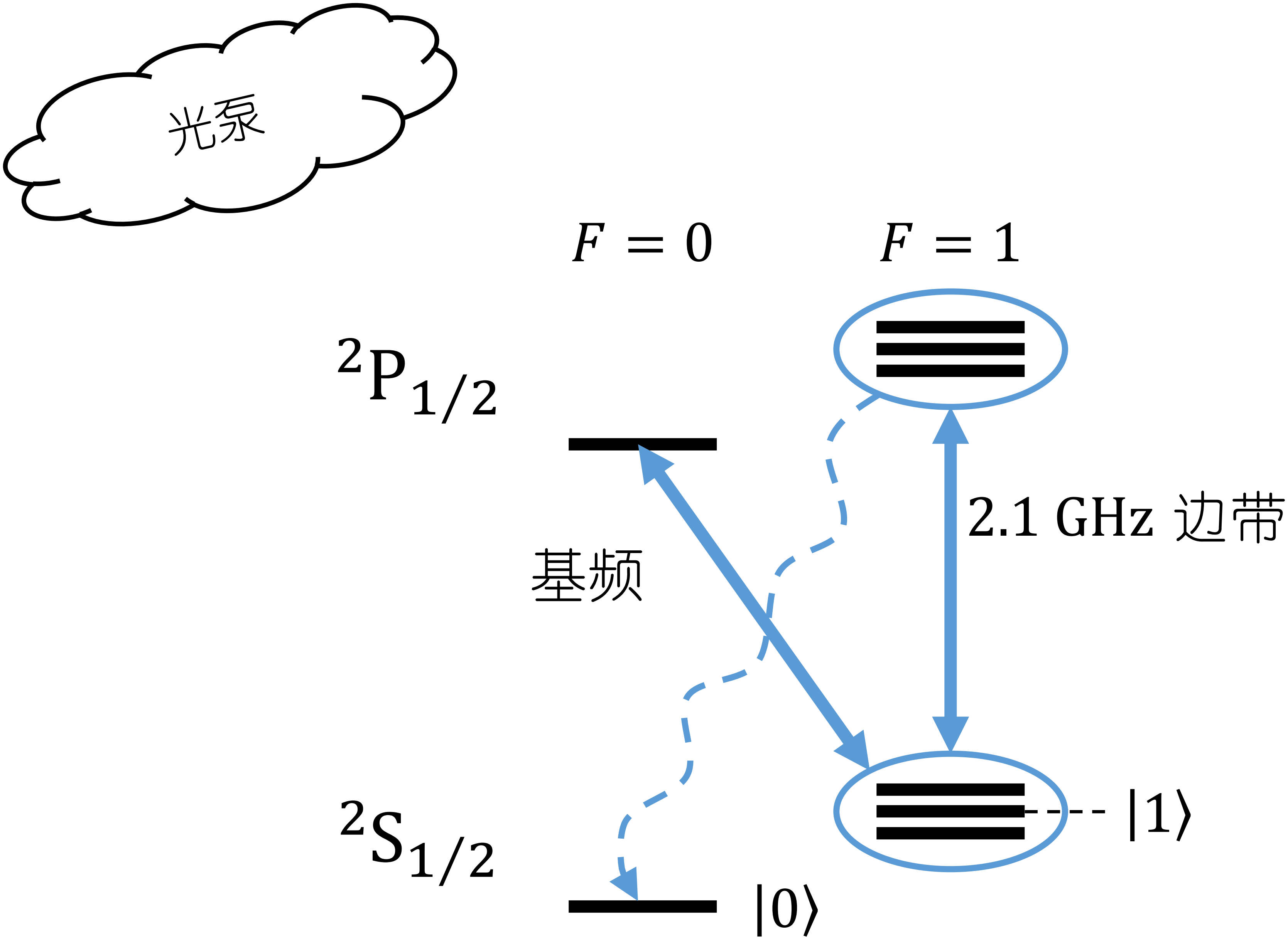
一些基本操作

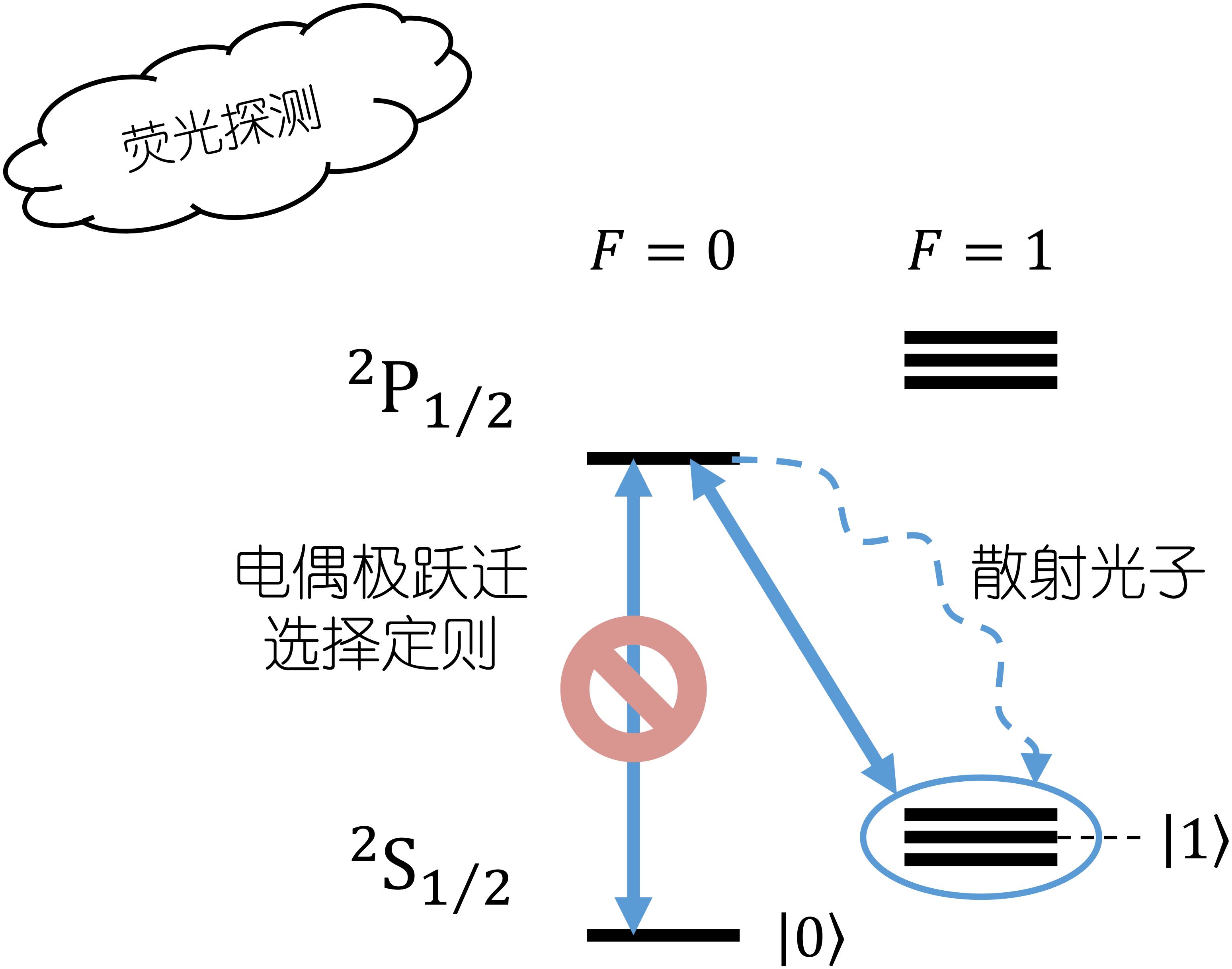
要将被囚禁的离子用于量子计算，还需要实现这些操作：

- 离子的冷却：Doppler冷却
- 量子比特的初始化：光泵技术(optical pumping)
- 区分$|0\rangle$和$|1\rangle$：荧光探测
- 量子逻辑门：改变量子比特的量子态



Doppler
冷却
$F = 0$
$F = 1$
$^2\mathrm{P}_{1/2}$
红失谐
14.7 GHz 边带
电偶极跃迁
选择定则
基频
$^2\mathrm{S}_{1/2}$


光泵
$F = 0$
$F = 1$
$^2P_{1/2}$
基频
2.1 GHz 边带
$^2S_{1/2}$
$|1\rangle$
$|0\rangle$


荧光探测
F = 0
F = 1
²P1/2
电偶极跃迁
选择定则
散射光子
²S1/2
|1⟩
|0⟩

量子逻辑门

超精细能级之间的差别本质上还是磁偶极矩的差别，因此也是磁偶极跃迁，可以用微波信号来激发。整个系统完整的哈密顿量为：

Rabi频率

能级间隔

微波频率

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \vec{B}\cdot\vec{\mu} = \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z + \Omega\cos(\omega t + \varphi)\hat{\sigma}_x$$

Pauli算符

看起来和标
准的不一样？

第一步：相互作用表象

$$\hat{H} = \underbrace{\Delta\hat{\sigma}_z/2}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\Omega\cos(\omega t + \varphi)\,\hat{\sigma}_x}_{\hat{H}_1}$$

$$\hat{H}_I = \hat{U}\hat{H}_1\hat{U}^\dagger, \qquad \hat{U} = \exp\left(i\hat{H}_0 t\right)$$

$$\sigma^- = |0\rangle\langle 1|$$

$$\hat{H}_I = \Omega\cos(\omega t + \varphi)\left(e^{i\Delta t}\sigma^+ + e^{-i\Delta t}\sigma^-\right)$$

$$\sigma^+ = |1\rangle\langle 0|$$

看起来和标准的不一样？

第二步：旋波近似

$$\hat{H}_I = \Omega\cos(\omega t+\varphi)\left(e^{i\Delta t}\sigma^+ + e^{-i\Delta t}\sigma^-\right)$$

$$=\frac{\Omega}{2}\Big[\cancel{e^{i(\omega+\Delta)t+i\varphi}\sigma^+} + e^{-i(\omega-\Delta)t-i\varphi}\sigma^+$$

$$+e^{i(\omega-\Delta)t+i\varphi}\sigma^- + \cancel{e^{-i(\omega+\Delta)t-i\varphi}\sigma^-}\Big]$$

- 只保留低频成分

这就一样了

$$\hat{H}_I = \frac{\Omega}{2}\left[e^{-i(\omega-\Delta)t-i\varphi}\sigma^{+} + e^{i(\omega-\Delta)t+i\varphi}\sigma^{-}\right]$$

相互作用表象“转回去”

$$\hat{H}_I' = \frac{\Delta-\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Omega}{2}\left[e^{-i\varphi}\sigma^{+} + e^{i\varphi}\sigma^{-}\right]$$

一些
其他内容

振动也是量子化的

- 离子的温度很低，其在阱中的振动也是量子化的
- 离子的振动可以用称为声子(phonon)的准粒子来描述，是一种玻色子
- 有多个离子的情况下，每个简振模对应一个玻色子的模式，模式中声子数的多少对应其振动幅度

振动也是量子化的

由于激光的光子动量比较大，用受激拉曼过程可以耦合离子的内部自由度和声子自由度，实现(anti-)Jaynes-Cummings相互作用：

$$H_{\mathrm{JC}} = \frac{i\Omega}{2}\left(\sigma^{+}a - \sigma^{-}a^{\dagger}\right), \qquad H_{\mathrm{aJC}} = \frac{i\Omega}{2}\left(\sigma^{+}a^{\dagger} - \sigma^{-}a\right)$$

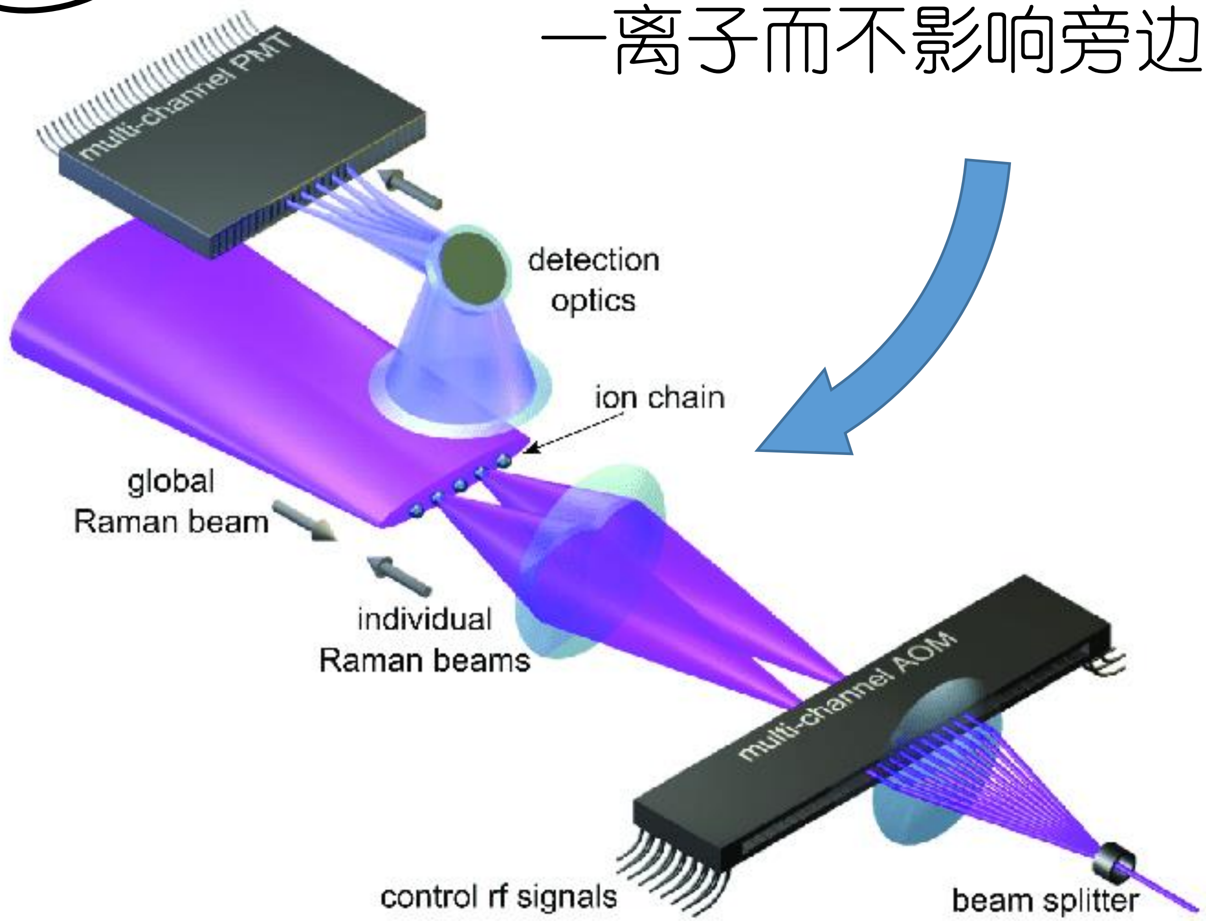
声子数升降算符

振动也是量子化的

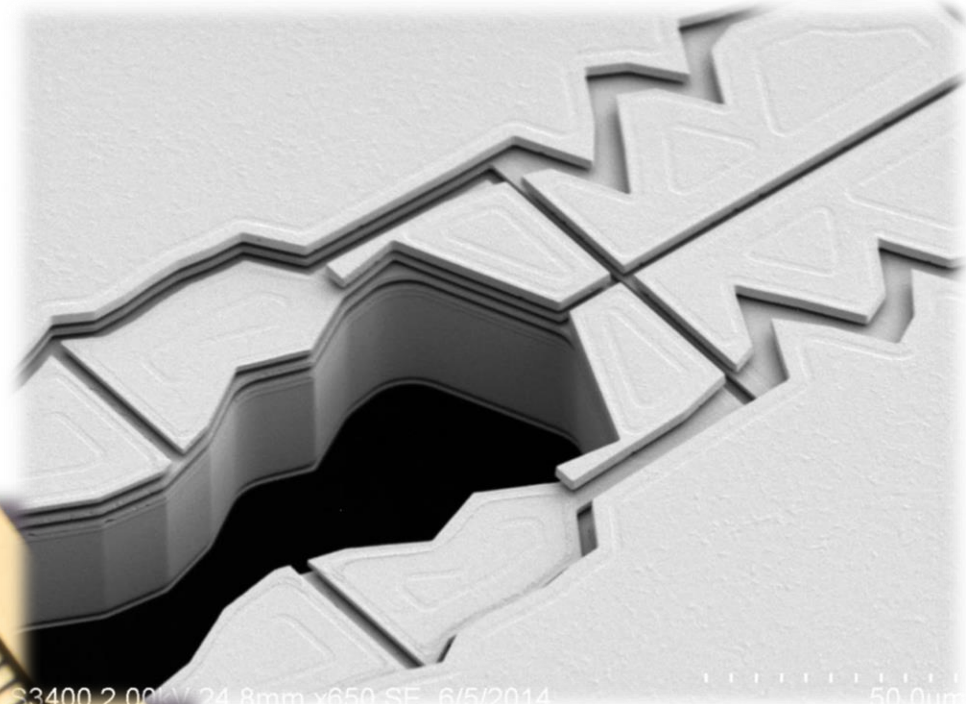
由于内部能级是“自己的”，而声子能级是所有离子共通的，所以声子能级可以作为媒介来纠缠两个不同离子的内部量子态，实现同一个阱中不同离子之间的两比特逻辑门。

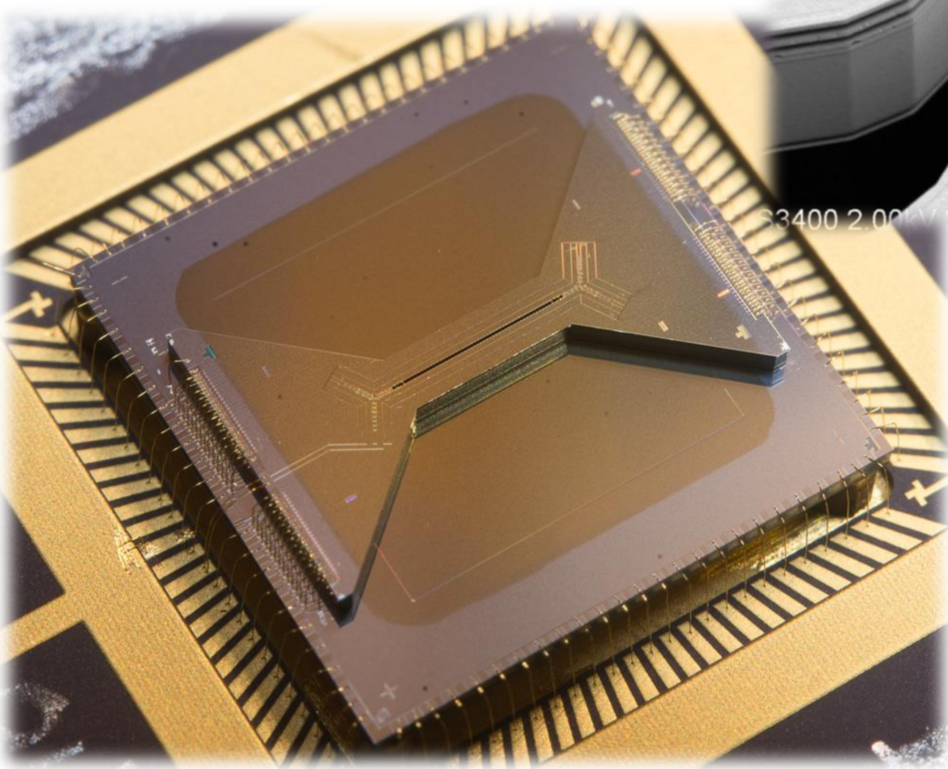
独立操控

用高度聚焦的激光束照射单一离子而不影响旁边的离子



一些很
炫酷的阱





离子可以
跑来跑去

讲完了

不懂就问

我的邮箱：

zhangjh6@sustc.edu.cn