1 $\boxed{\text{基本概念}}$

$z = x + iy \quad x, y \in R \quad i^2 = -1. \quad x$: 实部 $\quad y$: 虚部.

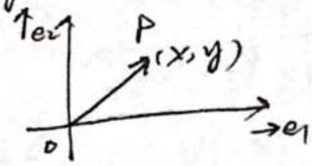
△ 运算: $z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

① 加法 $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

② 乘法 $\quad z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$

$$\begin{array}{ccc} C & & R^2 \\ z = x+iy & \longleftrightarrow & (x, y) \end{array}$$



$z \longrightarrow P(x, y)$

$z \downarrow$ 向量 $\vec{OP}$

△ ③ 模 $\quad z = x + iy \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

④ 共轭 $\quad \bar{z} = x - iy.$

$x = \mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

$y = \mathrm{Im}\,z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

性质:

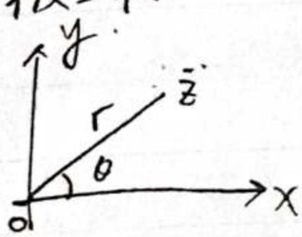
① $|\mathrm{Re}\,z| \le |z| \quad |\mathrm{Im}\,z| \le |z|$

② $|z + w| \le |z| + |w| \quad |z - w| \ge \big||z| - |w|\big|$ $\quad \big||z| - |w|\big| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$

③ $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (z \ne 0)$.

$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z} + \bar{w})$
$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z}$
$= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$
$\le |z|^2 + |w|^2 + \underline{2|z\bar{w}|}$
$= |z|^2 + |w|^2 + \underline{2|z|\cdot|w|} = (|z| + |w|)^2$

△ 极坐标



$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad z = x + iy = r\cos\theta + r\sin\theta i$
$\quad = r(\cos\theta + \sin\theta i) \quad z \ne 0.$

θ: 定义为 x 轴正向转动到 $\vec{oz}$ 的角度.
逆时针为正. θ: 称为辐角. 记为 $\mathrm{Arg}\,z$. $(\in R)$.

设 θ_0 为一个辐角, 则 $\mathrm{Arg}\,z = \{\theta_0 + 2k\pi \mid k \in Z\}$. <u>Arg 为无穷值函数</u>.

辐角主值. $\arg z$ 定义为 $\mathrm{Arg}\,z$ 在 $(-\pi, \pi]$ 中的取值. (或 $[0, 2\pi)$)

△ 乘法. 除法的几何意义.

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad \underline{z_1 z_2 \ne 0}.$

$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$.

$A+A \neq 2A$

$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$. (Def: 集合 A, B $A+B = \{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$
$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}(z_2)$. $A-B = \{a-b \mid a\in A,\ b\in B\}$)

△定义: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 若 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{i\theta} = i$; $\theta = \pi$, $e^{i\theta} = -1$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$e^{i\theta} z$ 表示 $\vec{oz}$ 逆时针转动 θ 角

e.g. iz 表示 $\vec{oz}$ …… …… $\frac{\pi}{2}$

○直线方程 l: $ax+by+c=0$. (a, b 不全为 0).

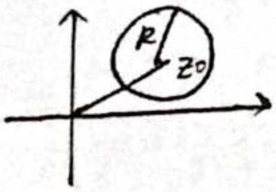
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z+\bar z) \\ y = \frac{1}{2i}(z-\bar z) \end{cases}$$

$$\frac{a}{2}(z+\bar z) + \frac{b}{2i}(z-\bar z) + c = 0.$$

$$\underbrace{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2i}\right)}_{=\bar B} z + \underbrace{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2i}\right)}_{=B} \bar z + c = 0$$

故 $\bar B z + B \bar z + c = 0$. $B \neq 0$. $c \in \mathbb{R}$.

△圆周方程 $|z - z_0| = R$.



$(z-z_0)(\bar z - \bar z_0) = R^2$

$|z|^2 + |z_0|^2 - z\bar z_0 - z_0 \bar z = R^2$.

令 $A = 1$ $B = -z_0$. $C = |z_0|^2 - R^2$ ..

$A|z|^2 + B\bar z + \bar B z + C = 0\ (*)$ $A, C \in \mathbb{R}$ $B \in \mathbb{C}$

命题: 若 $A, C \in \mathbb{R}$ $B \in \mathbb{C}$ $|B|^2 - AC > 0$ 则 $(*)$ 表示圆周或直线

1/ 若 $A = 0$ 则表示直线

若 $A \neq 0$ 则表示圆周

证: $A \neq 0$. $|z|^2 + \frac{B}{A}\bar z + \frac{\bar B}{A} z + \frac{C}{A} = 0$.

$$\left(z + \frac{B}{A}\right)\cdot\left(\bar z + \frac{\bar B}{A}\right) = \frac{|B|^2 - AC}{A^2} > 0 \quad \text{圆周}.$$

复平面上 $(*)$. 广义的圆周 (包含直线与圆)

球极投影.

R^3 $\quad S: x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$

$N: (0,0,1)$.

$\mathbb{C}: \{(x,y,0) \mid x, y \in R\}$.

$z=x+iy \longleftrightarrow (x,y,z)$.

$\begin{cases} |z|>1 & P: 北半球 \\ |z|<1 & P: 南半球. \end{cases}$

给定 $z\in C$. 作直线 Nz. Nz 交 S 于 p. $P\neq N$.

反之若 $P\in S$. 作 NP 交 C 于 z. 故 C 与 $S\backslash\{N\}$ 成一一对应.

若 $|z|\to+\infty$. 则 $p\to N$. 定义 $\bar{C}=C\cup\{\infty\}$. 则 $\bar{C}$ 与 S 一一对应.

称: 球极投影.

命题1: ① 若 $z=x+iy$ 则对应 $P\in S$ 为

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

② 若 $P(x_1,x_2,x_3)\in S$. 则 $z=\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3}$

命题2: 在球极投影下

$$S \longleftrightarrow \bar{C}$$

圆周 $\begin{cases} 不过N点的圆周 \longleftrightarrow 圆周 \\ 过N点的圆周 \longleftrightarrow 直线. \end{cases}$ $\Big\}$ $\bar{C}$ 上的广义圆周

S 与 $\bar{C}$ 上圆周一一对应.

$\bar{C}$ 上的距离: $\bar{C}$ 上球距离定义为两点轴在球面投影下对应点的欧氏距离

$z\in\bar{C} \longleftrightarrow (x_1,x_2,x_3)\in S$

$z'\in\bar{C} \longleftrightarrow (x_1',x_2',x_3')\in S$

$$d(z,z')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}=\sqrt{2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3')}$$

$$=\frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}},$$

令 $z'\to\infty$. $d(z,z')=\dfrac{|z-z'|}{|z'|}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}\cdot\dfrac{|z'|}{\sqrt{1+|z'|^2}}\longrightarrow\dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$

$\therefore d(z,\infty)=\dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$

$\mathbb{C}$中收敛 $\{z_n\}$是$\mathbb{C}$中点列 称 $z_n \to w \in \mathbb{C}$：

若 $\forall \varepsilon>0\ \exists N>0$ s.t. $\forall n>0$ $|z_n-w|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-w|=0$. ($\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, w \\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, w\end{cases}$)

开圆盘 $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|<r\}$ 称为a的一个邻域

$\overline{B(a,r)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-a|\le r\}$

$B(\infty,R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|>R\}$ 称为∞的一个邻域.

内点. 称z是$\Omega\subset\mathbb{C}$的内点. $\Longleftrightarrow$ $\exists r, z\in B(z,r)\subset\Omega$.

Ω°表示Ω的内点集合.

开集 Ω开 $\Longleftrightarrow$ $\Omega=\Omega^\circ$ $\Longleftrightarrow$ Ω中任意点都是内点.

闭集 Ω闭 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus\Omega$开.

极限点. z_0是Ω的极限点 $\Longleftrightarrow$ $\exists \{z_n\}\subset\Omega$. $z_n\ne z_0$ $z_n\to z_0$

闭包 $\overline{\Omega}=\{z\in\mathbb{C} \mid z\in\Omega$ 或 z是Ω的极限点$\}$

边界 $\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega^\circ$

有界集 Ω称为有界集, 若存在 $M>0$ s.t. $\sup\limits_{z\in\Omega}|z|<M$.

直径 $\mathrm{diam}(\Omega)=\sup\limits_{z,w\in\Omega}|z-w|$

紧致集 Ω紧 $\Longleftrightarrow$ Ω为$\mathbb{C}$中有界闭集.

$\Longleftrightarrow$ Ω中任意点列有子列收敛于Ω中的点.

$\Longleftrightarrow$ Ω的任何开覆盖都有有限子覆盖.

定理 若 $\Omega_1\supset\Omega_2\supset\cdots\cdots$ 列$\mathbb{C}$中紧集. 且 $\mathrm{diam}(\Omega_n)\to 0$.

则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ 为一个点.

连通：称 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 连通则不存在两个非空不交开集 Ω_1,Ω_2 s.t:

$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$.

区域 Ω 为区域 $\Leftrightarrow$ Ω 为连通开集.

作业：球极投影命题 1.2.

P.16 . 3

2 $\boxed{\text{全纯函数}}$

$\mathbb{C}$ 上函数 $f(z)$. $z=x+iy$

连续性：称 $f(z)$ 在 z_0 连续 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ s.t: $\forall z$ with $|z-z_0|<\delta$

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

2.1 复变函数的导数.

定义：(可导) 若 极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在. 则 $f(x)$ 在 z_0 处可导

(有限复值)

记为 $f'(z_0)$

(可微) 若 $f(z)$ 在 z_0 处的改变量

$\Delta f=A(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)$ $\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0.$ $\in\mathbb{C}$. $\Leftrightarrow\left|\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}\right|\to 0.$

(微分)

则称 $f(z)$ 在 z_0 可微 $\quad \Delta z=z-z_0.\quad \Delta f=f(z)-f(z_0)$.

引理. 可导 $\Leftrightarrow$ 可微 $\quad \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{A(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)}{\Delta z}=Az_0+\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}$

定义：① 称 f 在区域 D 中全纯. 若 f 在 D 中处处可导

② 称 f 在 z_0 全纯，若 f 在 z_0 的某邻域 $B(z_0,r)$ 中全纯

强于 f 在 z_0 可导 (stein 定义有区别)

eg. $f(z)=\bar{z}$ 不全纯 ($\mathbb{C}$ 上)

证：$\forall z_0\in\mathbb{C}$ $\quad \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\dfrac{\overline{z_0+h}-\bar{z}_0}{h}=\dfrac{\bar{h}}{h}\to\begin{cases}1 & h\in\mathbb{R}\\ -1 & h\in i\mathbb{R}\end{cases}$

$(h\in\mathbb{C})$

$\therefore\ \forall z_0\in\mathbb{C}$ 处 $f(z)$ 不可导. $\Rightarrow$ $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导.

eg. $f(z)=(\mathrm{Re}\,z)^2$ 在 $z=0$ 可导但不全纯

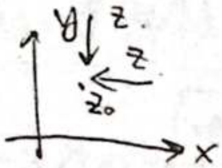
证: ① $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^2}{x+iy}=0.$

$$\left|\frac{x^2}{x+iy}\right|=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\sqrt{x^2+y^2}=|z|\to 0$$

或

$$\left|\frac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{z}\right|=\left|\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}\right|\cdot|\mathrm{Re}\,z|\le|\mathrm{Re}\,z|\to 0$$

② $z_0=x_0+iy_0$ 设 $z=x+iy_0$ $x\to x_0$



$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0$$

设 $z=x_0+iy$ $y\to y_0$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{x_0^2-x_0^2}{i(y-y_0)}=0$$

若 $\mathrm{Re}\,z_0\neq 0$ 则 $f(z)$ 在 z_0 处不可导.

$\forall B(0,r)$ 中 $\exists$ $\mathrm{Re}\,z\neq 0$ 的点 $\Rightarrow$ f 在0处不全纯.

上例说明. $f=u(x,y)+iv(x,y)$. u,v 作为二元实函数可微 $\not\Rightarrow$ f 可微 没

2.2 Cauchy–Riemann方程

定义 (实可微). $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. u,v 作为二元实函数在 (x_0,y_0) 点可微. 则称 f 在 z_0 实可微.

系数

引理: f 在 z_0 实可微 $\Leftrightarrow$ $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)\Delta z+\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\Delta\bar z+o(|\Delta z|).$

其中 $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}-i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right).$

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}+i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ (当 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)=0$ 时. f 在 z_0 可微)

证: $u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)$

$v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)=\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o(|\Delta z|)$

$\therefore$ $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{z_0}\Delta x+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\Big|_{z_0}\Delta y+o(|\Delta z|)$

$$\Delta x = \frac{1}{2}(\Delta z + \Delta \bar{z})$$
$$\Delta y = \frac{1}{2i}(\Delta z - \Delta \bar{z})$$

$z = x + iy \rightarrow \Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$\bar{z} = x - iy \quad\ \ \Delta \bar{z} = \Delta x - i\Delta y$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta \bar{z} + o(|\Delta z|).$$

求 $\frac{\partial f}{\partial z}$. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$,

e.g. $f = (\mathrm{Re}\, z)^2 = \frac{1}{4}[(z+\bar{z})]^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4}\cdot 2(z+\bar{z})\cdot \frac{\partial}{\partial z}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

可将 z. $\bar{z}$ 看为独立变量求 $\frac{\partial f}{\partial z}$. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$

$f(x,y) \quad x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

引理. f 在 z_0 处可微 $\Longleftrightarrow$ f 在 z_0 处实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

$$\left(\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+iv) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].\end{aligned}\right)$$

$\Longleftrightarrow$ f 在 z_0 实可微且在 z_0 点满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0\\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.\end{cases}$$

Cauchy-Riemann 方程.

引理: f 在区域 D 中全纯 $\Longleftrightarrow$ f 在 D 中实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

定理. $f(z)$ 在 D 内解析则 $f(z)$ 在 D 内有各阶导数.

定义 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ → 实值函数.

若 $u \in C^2(\Omega)$ 且 $\Delta u = 0$ 则称 u 为调和函数

命题: 设 $u \in C^2$, $\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$

证:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u.$$

命题 若$f=u+iv$全纯，则u、v调和（在某区域Ω中）

证: $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0 \Rightarrow \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}=0 \Rightarrow \frac{\partial \bar f}{\partial z}=0$

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}=\overline{\frac12\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)}=\frac12\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)}\,\overline{(u+iv)}=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u-iv)\right.$$
$$\left.=\frac12\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar f=\frac{\partial \bar f}{\partial z}\right)$$

$u=\frac12(f+\bar f)$

$$\Delta u=\frac12 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}(f+\bar f)=2\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar z}+\underset{\frac{\partial^2 \bar f}{\partial \bar z\partial z}}{\underset{\parallel}{\frac{\partial^2 \bar f}{\partial z\partial \bar z}}}\Big)=0.$$

$v=\frac{1}{2i}(f-\bar f)$

$$\Delta v=\frac{1}{2i}\cdot 4\cdot\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar z}(f-\bar f)=0.$$

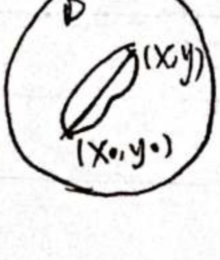
定义：若u、v是区域D上一对调和函数且满足C-R方程，则称v是u的共轭调和函数.

单连通区域：若区域D中任一简单闭曲线内部仍在D中.

简单闭曲线：自身不相交的闭曲线.

定理. 设D $\boxed{\text{单连通}}$，u在D上调和，则存在u的共轭调和函数，使$f=u+iv$在D上全纯.

证: 令 $$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)\in D}^{(x,y)}\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}}_{=P(x,y)}dx+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=Q(x,y)}dy.$$



① $v(x,y)$定义合理.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

② u、v满足C-R方程

$\Big\}$ $f=u+iv$在D中全纯.

导数的运算：设 f, g 在区域 D 中全纯.

① $f \pm g$. $f \cdot g$ 在 D 中全纯. 且 $(f \pm g)' = f' \pm g'$. $(fg)' = f'g + fg'$.

② 若 $g(z) \neq 0$ 则 $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

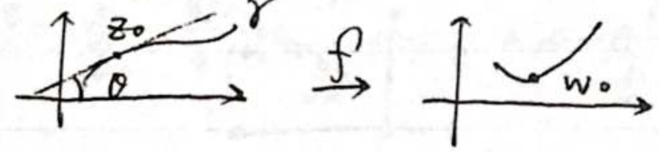
③ 若 $\varphi(z) = f(g(z))$ 则 $\varphi'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$

2.3 导数的几何意义

$$f = u(x,y) + i\,v(x,y) \text{ 全纯}$$

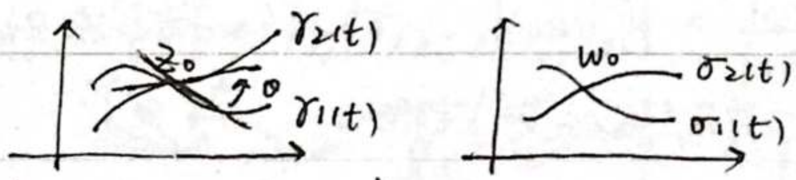
$$R^2 \longrightarrow R^2$$

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$



设 γ 是一条光滑曲线. $\gamma(0) = z_0$. $\sigma(t) = f(\gamma(t))$

在 z_0 点 $\gamma'(0)$ $\theta = \operatorname{Arg}\gamma'(0)$



在 z_0 点. $\gamma_1(t)$ 切线转动到 $\gamma_2(t)$ 切线的角度为

$\operatorname{Arg}\gamma_2'(0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)$ （默认 k 取定值）

在 w_0 点. $\sigma_1(t)$ 切线转动到 $\sigma_2(t)$ 切线的角度为

$\operatorname{Arg}\sigma_2'(0) - \operatorname{Arg}\sigma_1'(0)$

$\sigma_i(t) = f(\gamma_i(t))$ $\sigma_i'(t) = f'(\gamma_i(t)) \cdot \gamma_i'(t)$.

$$\frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \bar z} \cdot \frac{\partial \bar\gamma}{\partial t}} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}$$
$$= f' \cdot \gamma'(t).$$

令 $t = 0$. $\sigma_i'(0) = f'(z_0)\gamma_i'(0)$.

设 $f'(z_0) \neq 0$. 则 $\operatorname{Arg}\sigma_i'(0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg}\gamma_i'(0)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{Arg}\sigma_2'(0) - \operatorname{Arg}\sigma_1'(0)}_{w_0} = \underbrace{\operatorname{Arg}\gamma_2'(0) - \operatorname{Arg}\gamma_1'(0)}_{z_0}.$$

（当 $f'(z_0) \neq 0$ 时）

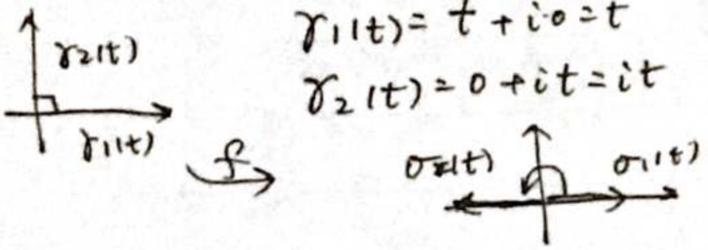
夹角大小与旋转方向保持不变. 此时. 称 f 在 z_0 处保角（或共形）

说明: $f'(z_0)=0$处 $f(z)$一定不保角.

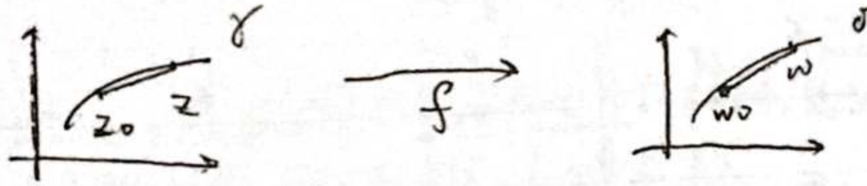
e.g. $f(z)=z^2$ $\quad f'(0)=0$.

$\gamma_1(t)=t+i0=t \qquad \sigma_1(t)=t^2$

$\gamma_2(t)=0+it=it \qquad \sigma_2(t)=-t^2$.



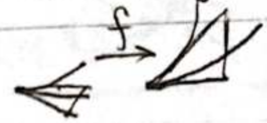
导数的模 几何意义.



$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=|f'(z_0)|.$$ 称$|f'(z_0)|$为f在z_0点的伸缩率

共形映射(f): f作用前后之微分三角形相似 $\Updownarrow$ 夹角 伸长

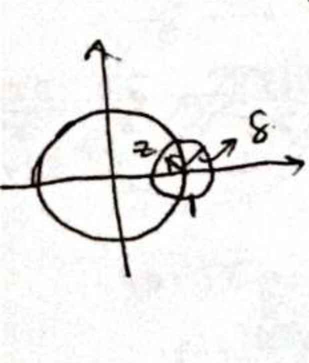


e.g. f在$B(0,1)\cup\{1\}$上全纯 且$f(B(0,1))\subset B(0,1)$ $\quad f(1)=1$

证 $f'(1)\geq 0$.

证: f在$z=1$附近 $\quad f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|) \quad \forall z\in B(1,\delta)$

当$|z|<1$时 有$|f(z)|<1$ 故当 $z\in B(0,1)\cap B(1,\delta)$



$$|f(1)+f'(1)(z-1)+o(|z-1|)|<1.$$

$$\Rightarrow (1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|))\overline{(1+f'(1)(z-1)+o(|z-1|))}<1$$

$$\Rightarrow 1+2\,\mathrm{Re}(f'(1)(z-1))+o(|z-1|)<1$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(f'(1)(z-1))+o(|z-1|)<0.$$

令 $z-1=re^{i\theta} \quad \theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$.

$$\mathrm{Re}(f'(1)(z-1))+o(r)<0.$$

$$\mathrm{Re}(f'(1)\cdot re^{i\theta})+o(r)<0 \qquad \lim_{r\to 0}\frac{\overset{=r\cdot o(1)}{o(r)}}{r}=0.$$

$$\mathrm{Re}(f'(1)\cdot e^{i\theta})+o(1)<0$$

$$\mathrm{Re}(f'(1)\cdot e^{i\theta})\leq 0 \quad \forall\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi).$$

令 $f'(1)=|f'(1)|e^{i\underbrace{\arg f'(1)}\in[-\pi,\pi]}$

$Re(e^{i(\arg f'(1)+\theta)})\le 0.$

$\Rightarrow$

$\arg f'(1)+\theta\in(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi)\ (k\in Z)$

$\because$ $\arg f'(1)+\theta\in(\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{3}{2}\pi+\pi)=(-\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{2}\pi).$

$\therefore$ $\arg f'(1)+\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ $\therefore$ $\arg f'(1)=0.$

$\because$ θ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi)$ 中任意取值 $f'(1)\ge 0$

2.4(1) 初等全纯函数

① 指数函数 设 $z=x+iy$ $e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$

$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$. $z=iy$ 时 $e^{iy}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{k!}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}}_{\cos y}+\underbrace{i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{i\sin y}$

性质. (1) $\forall z\in C$ $e^z\neq 0.$ $(|e^z|=|e^x|>0).$

(2) $\forall z_1,z_2\in C.$ $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

证. $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2.$

$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{x_1+x_2}(\cos y_1+i\sin y_1)(\cos y_2+i\sin y_2)=e^{z_1+z_2}.$

(3) e^z 是周期函数. 周期 $2\pi i$.

$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z$

(4) e^z 在 C 上全纯 (易验证 $u=e^x\cos y$ $v=e^x\sin y$ 满足 C-R 方程).

(5) $(e^z)'=e^z$

(6) e^z 单叶域.

单叶函数: 若 $z_1\neq z_2$ 则 $f(z_1)\neq f(z_2)$ (单射)

单叶域: 若 f 在 Ω 中单叶 则 Ω 是 f 的单叶域.

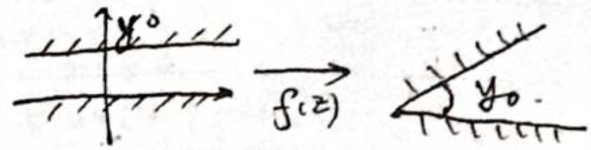
$e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow e^{z_1-z_2}=1\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi i(k\in Z).$

(P44. 1.2.3.)

如果 D 中任意两点之差不为 $2k\pi i$. 则 D 为 e^z 的单叶域.

$f(z): \quad R^2 \longrightarrow R^2$ $\qquad f = e^z = e^{x+iy} = \underset{r}{e^x} \cdot \underset{\theta}{e^{iy}}$

$(x,y) \longmapsto (r,\theta) = (e^x, y)$.



设 $D = \{(x,y) \mid 0 < y < y_0\}$ $(0 < y_0 < 2\pi)$.

$\xrightarrow[f(z)]{} \{(r,\theta) \mid r = e^x > 0.\ 0 < \theta < y_0\}$.

② 对数函数

定义：如 $e^w = z$ 则称 w为z的对数. 记为 $w(z) = \log(z)$.
(不唯一)

令 $\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ w = u(z) + iv(z) \end{cases} \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = re^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} e^u = r \Rightarrow u = \underline{\ln r} \,|\log r \\ v = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

故 $\log z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$. $\boxed{\text{多值函数}}$

符号: ① 若 $x > 0$ 为实数. 则 $\log x$ 表示正实数的实对数值

② $\operatorname{Log} z$ 表示多值函数.

③ 固定k. $(\operatorname{Log} z)_k$ 表示函数 $\log|z| + i(\arg z + 2k\pi)$.

$(\operatorname{Log} z)_k$ 定义域为 $z \neq 0$

性质: $(\operatorname{Log} z)_k$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上不连续.

$\log|z|$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上光滑.

$\arg z \quad [0, 2\pi)$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$
s.t. $|z_1 - \overset{=1}{z_2}| < \delta$
$|\underset{2(k+1)\pi i}{f(z_1)} - \underset{2k\pi i}{f(z_2)}| < \varepsilon$

证: $(\operatorname{Log} 1)_k = \log 1 + i(0 + 2k\pi) = 2k\pi i$.

令 $\quad z(s) = e^{is} \quad (s \in (0, 2\pi])$

$\lim_{s \to 2\pi^-} z(s) = e^{2\pi i} = 1$.

$(\operatorname{Log} z(s))_k = \log|e^{is}| + i(\arg e^{is} + 2k\pi)$.

$\lim_{s \to 2\pi^-} (\log z(s))_k = 2(k+1)\pi i$

问题：如何求区域 D 使 $(\mathrm{Log}\,z)_k$ 是全纯？
如何求 D 使 $(\mathrm{Log}\,R(z))_k$ 为全纯？$R(z)$ 为有理函数

☆

2.4.2 多值函数

定义：① 设 $F(z)$ 多值 定义 Ω 上 初值 $f(z_0)$，$z_0 \in \Omega$，当 z 沿曲线 C 连续变动到 z_1 时，$f(z_0)$ 连续变动到唯一确定的值 $f(z_1)$

则称 $F(z)$ 在 C 上改变量 $\Delta_C F(z) = f(z_1) - f(z_0)$

$\Delta_C(F_1(z) \pm F_2(z)) = \Delta_C F_1(z) \pm \Delta_C F_2(z)$.

② 若 $\Delta_C F(z)$ 的值不依赖于 Ω 中曲线的选取（仅依赖于 $z_0, z_1, f(z_0)$）单值域

则称 $F(z)$ 在 Ω 中有单值分支，该分支在任何点的值为

$f(z) = f(z_0) + \Delta_C F(z)$（$C$ 为 $z_0 \to z$ 的任何曲线）

结论：$F(z)$ 在 Ω 中有单值分支 $\Leftrightarrow$ 对 Ω 中任何闭曲线 C $\Delta_C F(z) = 0$.

此时称 Ω 为单值域

支点 ③ (C). $\forall a \in \Omega$，若 $F(z)$ 在 a 的任何小的空心邻域中 $B(a,\delta)\setminus\{a\}$ 存在闭曲线 C，使 $\Delta_C F(z) \neq 0$

则 a 称为 $F(z)$ 的支点。 e.g. $\mathrm{Arg}\frac{z-a}{z-b}$ $(a \neq b)$

例：a 是 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 的支点，∞ 亦是

证. 设 C 为闭曲线（逆），若 a 在 C 内部 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 2\pi$.
若 a 在 C 外部 $\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = 0$.

例 求 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的支点.

解：$\Delta_C \mathrm{Log}(z-a) = \Delta_C(\log|z-a| + i\mathrm{Arg}(z-a))$.

$$= i\Delta_C \mathrm{Arg}(z-a) = \begin{cases} 2\pi i & a\text{在}C\text{内部} \\ 0 & a\text{在}C\text{外部} \end{cases}$$

故 a 是 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的支点，$\forall z_0 \in \mathbb{C}$ $z_0 \neq a$，z_0 不是 $\mathrm{Log}(z-a)$ 的支点.

(∞)，$L\to\overline{C}$

定义：称∞为$F(z)$的支点 若在任何充分大$|z|>R$中存在闭曲线 c s.t. $\Delta_c F(z)\neq$

由定义 ∞是$\mathrm{Log}(z-a)$的支点.

求$\mathrm{Log}(z-a)$的单值域Ω.

在$\overline{C}$上 支点为a. ∞ ⇒ Ω中不包含绕a或∞的闭曲线.

$\Omega=\overline{C}\setminus[a,+\infty)$

例：$\mathrm{Arg}(z-a)$的单值域 ⟺ $\forall\Omega$中闭c. $\Delta_c\mathrm{Arg}(z-a)=0$

⟺ $\forall\Omega$中闭c a不在c的内部

单值域与支点是否在其中无必然联系.

一般地 求极大的单值域Ω. 单值域不唯一.

$\forall$单值域Ω'. $\Omega'\subset\Omega$.

例 $F(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}\ (a\neq b)$

解：c闭. $\Delta_c F(z)=\Delta_c\mathrm{Log}\dfrac{z-a}{z-b}=\Delta_c(\mathrm{Log}(z-a)-\mathrm{Log}(z-b))$

$=i\Delta_c(\mathrm{Arg}(z-a)-\mathrm{Arg}(z-b))$

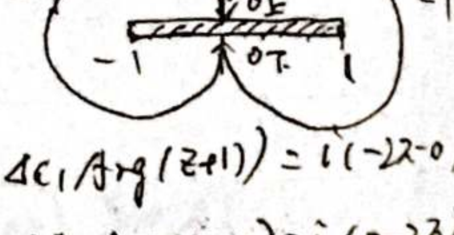
$$=\begin{cases} i(2\pi-0)=2\pi i & \text{若}c\text{仅绕}a\\ i(0-2\pi)=-2\pi i & \cdots\cdots\ b\\ i(2\pi-2\pi)=0 & \text{若}a.b\text{在}c\text{内}\\ i(0-0)=0 & \text{若}a.b\text{在}c\text{外}.\end{cases}$$

支点. $z=a.b.$ ∞不是支点

单值域 $C\setminus[a,b]$

例. $F(z)=\mathrm{Log}\dfrac{z-1}{z+1}$ $D=C\setminus[-1,1]$ 记$f(z)$为$F(z)$在D中的单值分

设 $f(0_上)=2\pi i$ 求$f(0_下)$. $f(\infty)$



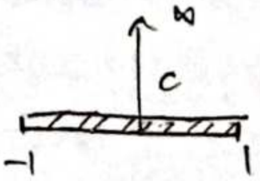
解：$f(0_下)=f(0_上)+\Delta_c F(z)$.

取 $c=c_1$ $\Delta_{c_1}F(z)=i(\Delta_{c_1}\mathrm{Arg}(z-1)-\Delta_{c_1}\mathrm{Arg}(z+1))=i(-2\pi-0)$

取 $c=c_2$ $\Delta_{c_2}F(z)=i(\Delta_{c_2}\mathrm{Arg}(z-1)-\Delta_{c_2}\mathrm{Arg}(z+1))=i(0-2\pi)$

$\therefore f(0下) = f(0上) + \Delta_c F(z) = -\pi i$

求 $f(\infty)$



$$f(\infty) = f(0上) + \Delta_c F(z)$$
$$= \pi i + i(\Delta_c \mathrm{Arg}(z-1) - \Delta_c \mathrm{Arg}(z+1))$$
$$= \pi i + i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

③ 幂函数. $W = z^{\alpha}$　$\alpha \in \mathbb{C}$

① 若 $\alpha = n \in N$. $W = z^{\alpha}$ 在C上全纯.

② 若 $\alpha = \frac{1}{n}$. $n \in N$. $W = z^{\alpha}$　　$\mathrm{Log}\,W = \mathrm{Log}(z^{\alpha})$

$W = z^{\frac{1}{n}}$ 是 $W = z^n$ 的反函数

$$\Leftrightarrow e^{\mathrm{Log}\,W} = e^{\mathrm{Log}(z^{\alpha})} = W$$

$$\Leftrightarrow W = e^{\mathrm{Log}(z^{\alpha})} = e^{\log|z^{\alpha}| + i\mathrm{Arg}(z^{\alpha})} = |z^{\alpha}| e^{i\mathrm{Arg}(z^{\alpha})}$$

$$\Leftrightarrow W = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\mathrm{Arg}(z^{\frac{1}{n}})} \qquad \arg \in [0, 2\pi)$$

$$= |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\left(\begin{array}{l} z = re^{i\theta} \quad \theta \in \mathrm{Arg}\,z \\ z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \end{array} \right)$

实际上 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

$\therefore W = z^{\alpha}$ 是 n 值函数. ($\alpha = \frac{1}{n}$. $n \in N$). $k=0$ 的一支称为主支. 记为 $W = \sqrt[n]{z}$

③ 若 $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$. ($a, b \in \mathbb{R}$).　　$u = \mathrm{Log}(z^{\alpha})$

$$W = e^{\mathrm{Log}(z^{\alpha})} \overset{定义}{=} e^{\alpha \mathrm{Log}\,z} \qquad e^u = z^{\alpha} = (re^{i\theta})^{\alpha} = r^{\alpha} e^{i\theta\alpha}$$

$$= e^{(a+bi)(\log|z| + i\mathrm{Arg}\,z)} \qquad e^{a} \cdot e^{bi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \alpha \log r \\ b = \alpha\theta \end{array} \right.$$

$$= e^{a\log|z| - b\mathrm{Arg}\,z} \cdot e^{i(b\log|z| + a\mathrm{Arg}\,z)}$$

$$e^{a(\arg z + 2k\pi)}$$

若 $b=0$　$a = n \in N$.　$W = z^{\alpha}$ 单值.

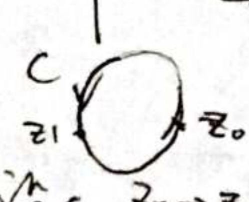
若 $b=0$　$a = \frac{p}{q}$.　$p, q \in \mathbb{Z}$.　则 $W = e^{\frac{p}{q}\log|z|} e^{i\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)}$　多个单值分支

若 $b=0$.　$a \in \mathbb{Q}^c$　则 $W = |z|^a e^{i(\arg z + 2k\pi)a} = |z|^a e^{ia\cdot\arg z} \cdot e^{2ka\pi i}$　无穷多单值分支

若 $b \neq 0$.　W: 无穷值函数

例. 若 $F(z) = \sqrt[n]{R(z)}$, $R(z)$ 有理函数, 求支点. 单值域.

解: $\Delta_c F(z) = \Delta_c\left(|R(z)|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\mathrm{Arg}\,R(z)}\right)$ → 表示从 z_0 连续变化到 z_1 的



令 $z_1 = z_0$ (C闭)

$$= |R(z_1)|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\mathrm{Arg}R(z)}\Big|_{z=z_1} - |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{1}{n}\mathrm{Arg}R(z)}\Big|_{z=z_0}$$

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Arg}R(z)|_{z=z_0} + \Delta_c \mathrm{Arg}R(z))} - e^{\frac{1}{n}\mathrm{Arg}R(z)|_{z=z_0}}\right)$$

设 $C: z_0 \to z_1$　$|R(z)|$ 单值

$$= |R(z_0)|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n}\mathrm{Arg}(R(z))|_{z=z_0}}\left(e^{\frac{1}{n}\Delta_c \mathrm{Arg}R(z)} - 1\right).$$

$\Delta_C R(z)=0 \iff e^{\frac{i}{n}\Delta \mathrm{Arg}\, R(z)}=1 \iff \frac{i}{n}\Delta\mathrm{Arg}\, R(z)=2k\pi i \quad k\in\mathbb{Z}$.

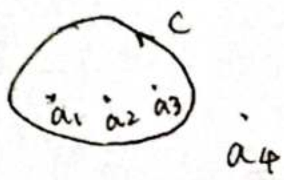
$\iff \Delta_C \mathrm{Arg}\, R(z)=2nk\pi$

$\boxed{R(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j} \quad a_j\in\mathbb{C},\ n_j\in\mathbb{Z} \quad m\in\mathbb{N}.}$

$\iff \Delta_C \mathrm{Arg} \prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}=2nk\pi$

$\iff \sum_{j=1}^{m} n_j\, \Delta_C \mathrm{Arg}(z-a_j)=2nk\pi$

$\iff \sum_{\substack{j \\ a_j \text{ in } C}} n_j\cdot 2\pi=2nk\pi$.



定义 $\Lambda=\{j \mid a_j\text{在}C\text{内部}\}$.

$\iff 2\pi\sum_{j\in\Lambda} n_j=2nk\pi \iff \underline{\sum_{j\in\Lambda} n_j=nk} \quad k\in\mathbb{Z}$.

$F=\sqrt[n]{R(z)}$

故 $\underline{\Delta_C F(z)=0} \iff \sum_{j\in\Lambda} n_j$ 为 n 的整数倍.

$\iff$ <u>C内部的点对应的指数之和为n的整数倍</u>

求支点. n_j 不是 n 的整数倍 $\iff a_j$ 是支点.

$\sum_{j=1}^{m} a_j$ 不是 n 的整数倍 $\iff \infty$ 是支点.

单值域: (例) $F(z)=\sqrt{z(z-1)\cdots(z-4)}$ 支点 $0.1.2.3.4\ \infty$.

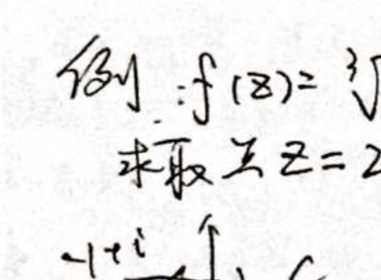
$\Delta_C F(z)=0 \iff C$ 中支点指数和为2的倍数.

$z=$	0.	1.	2.	3.	4.	∞
n_j	1	1	1	1	1	

$\mathbb{C}\setminus[0,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)$.

例: $f(z)=\sqrt[3]{z-1}$ 求 f 支点. 若单值域 $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,1]$

求取点 $z=2$ 取正值的分支. 在 $z=-1+i$ 的值



解: $f(z)=|z-1|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}(z-1)}$ $\qquad \pi-\arctan\frac{1}{2}$ $\qquad$ 3-1)

$\mathrm{Arg}(z-1)\Big|_{z=-1+i}=\mathrm{Arg}(z-1)\Big|_{z=2}+\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1).=\Delta_C A$

当 $z=2$ 时. $f(z)=e^{\frac{i}{3}\mathrm{Arg}\,1}>0$. 取 $\mathrm{Arg}\, z\big|_{z=1}$ 为0.

$f(-1+i) = |-2+i|^{\frac{1}{3}} e^{\frac{i}{3}(\pi - \arctan\frac{1}{2})}$.

例 $F(z)=\mathrm{Log}\,R(z)$　$R(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}$　$a_j\in\mathbb{C}$. $n_j\in\mathbb{Z}$.

解: $\Delta_C F(z) = \Delta_C \mathrm{Log}\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}$

$= \Delta_C\left(\log|R(z)| + i\,\mathrm{Arg}\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}\right)$

$= \Delta_C\left(i\,\mathrm{Arg}\prod_{j=1}^{m}(z-a_j)^{n_j}\right) = i\sum_{j=1}^{m} n_j \Delta\mathrm{Arg}(z-a_j))$

$= i\sum_{j\in\Lambda} 2\pi n_j$　　$\Lambda=\{j \mid a_j$在C内部$\}$.

∴ $\Delta_C F(z)=0 \iff \sum_{j\in\Lambda} n_j = 0. \iff$ 包含在C内部点对应指数和为0.

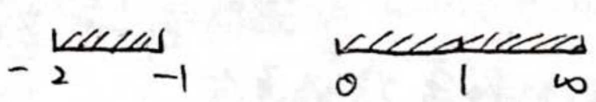
a_j是支点 $\iff n_j\neq 0$.

∞是支点 $\iff \sum_{j\in\Lambda} n_j \neq 0$

例 $\mathrm{Log}\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^3(z+2)}$

支点　0　-1　1　-2　∞

指数　2　1　-3　-1



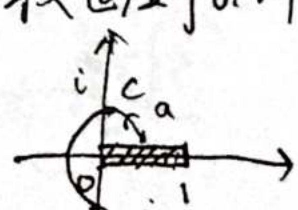
或

P67: 23. 26. 27

例: 设 $f(z)=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}\cdot\frac{1}{z+1}$ 单值函数 试确定f在[0,1]上岸取正值f_0, 计算$f_0(-i)$

解: $z=$　0.　1　∞ → ∞不是支点. 0.1是支点.

$n_j=$　-1　3　2



令 $\varphi=\sqrt{\frac{(1-z)^3}{z}}$,　$\varphi(-i)=|\varphi(-i)|e^{i\mathrm{Arg}\varphi(-i)}$

$=|\varphi(-i)|e^{i(\underbrace{\mathrm{Arg}\varphi(a)}_{0}+\Delta_C\mathrm{Arg}\varphi(z))}$

$\Delta\mathrm{Arg}(z)$
$=\Delta\mathrm{Arg}(1-z) = \Delta\mathrm{Arg}(\ldots$
$+\Delta\mathrm{Arg}\ldots$

$\Delta_C\mathrm{Arg}\,\varphi(z) = \frac{1}{2}(3\Delta_C\mathrm{Arg}(1-z) - \Delta_C\mathrm{Arg}\,z)$

$= \frac{1}{2}(3\Delta_C\mathrm{Arg}(z-1) - \Delta_C\mathrm{Arg}\,z) = \frac{1}{2}(3\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\pi) = -\frac{3}{8}\pi$.

$\varphi(-i)=|\varphi(-i)|e^{-\frac{3\pi i}{8}}$

2.5 分式线性变换

共形映射

问题：给定 $\mathbb{C}$ 中两区域 U, V，是否存在全纯双射 $f: U \to V$？

例：取 $U=\mathbb{C}$，$V=D=\{|z|<1\}$ 若 $f: U \to V$ 全纯 则 f 为常数

∴ 不存在全纯的双射从 $\mathbb{C} \to D$

定义：$w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\Delta=ad-bc\neq 0$ 分式线性变换

（若 $\Delta=0$ 则 $f=\text{const}$ 或无意义）

特殊情况：

$w=az+b$，$a,b\in\mathbb{C}$，$a\neq 0$

① 平移 $w=z+a$ $a\in\mathbb{C}$

② 旋转 $w=e^{i\theta}z$ $\theta\in\mathbb{R}$

③ 伸缩 $w=rz$ $r>0$

④ 反演 $w=\dfrac{1}{z}$

令 $a=re^{i\theta}$ $w=az+b=a(z+b')$ $(ab'=b)$

$=re^{i\theta}(z+b')$

$$z\xrightarrow{z+b'}z_1\xrightarrow{rz_1}z_2\xrightarrow{e^{i\theta}z_2}z_3(=w)$$

定理：任一分式线性变换为四种变换的复合

证 ① 若 $c=0$ $w=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ 则为 ①~③ 的复合

② 若 $c\neq 0$ $\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cz+d)}$

$$z\xrightarrow{cz+d}z_1\xrightarrow{\frac{1}{z_1}}z_2\xrightarrow{(bc-ad)z_2}z_3\xrightarrow{z_3+\frac{a}{c}}z_4(=w)$$

引理：$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc\neq 0$ 是 $\bar{\mathbb{C}}\to\bar{\mathbb{C}}$ 的双射

证：$f^{-1}: w \longrightarrow \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ $ad-bc\neq 0$ 也是分式线性映射

$f\circ f^{-1}=id$ $f^{-1}\circ f=id \Rightarrow f$ 双射

单 $f^{-1}(f(z_1))\Rightarrow f^{-1}(f(z_2))$ $z_1\neq z_2$ $f(z_1)\neq f(z_2)$

满 $\forall w\in\mathbb{C}$ $f\circ f^{-1}(w)=f(f^{-1}(w))=w$

令 $z=f^{-1}(w)\Rightarrow f(z)=w$

引理：若分式线性映射有3个不动点，则必为恒等映射

证：$\dfrac{az+b}{cz+d}=z$

$cz^2+(d-a)z-b=0$ 三个解 $c=0.\ b=0.\ d=a.$ 恒等。

定理：在 $\mathbb{C}$ 上给定互异三点 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性映射 s.t. $w_i=f(z_i)$

证：① 唯一性

$w_i=f_1(z_i)$ $\quad f_2^{-1}\circ f_1$ 三个不动点

$w_i=f_2(z_i)$ $\quad \Rightarrow f_2^{-1}\circ f_1=\mathrm{i.d.}\quad f_1=f_2.$

② 存在性。① 构造 g（分式线性）: $(z_1, z_2, z_3)\longrightarrow(1, 0, \infty)$

$$g(z)=\frac{z-z_2}{z-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

② 构造 $h: (w_1, w_2, w_3)\to(1, 0, \infty)$

$$h(w)=\frac{w-w_2}{w-w_3}:\frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}.$$

③ 令 $f=h^{-1}\circ g.$

故将 $z_i\to w_i$ 的分式为 $w=h^{-1}\circ g(z)\Longleftrightarrow h(w)=g(z)$

为 $$\frac{w-w_2}{w-w_3}\ \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}=\frac{z-z_2}{z-z_3}\cdot\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

定义：交比 $(z_1, z_2, z_3, z_4)=\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ （至少三个不同）.

故将 $z_i\to w_i$ 的分式为 $(w, w_1, w_2, w_3)=(z, z_1, z_2, z_3).$

引理：在任何线性变换下交比不变.

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4))=(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

证：设 $w_2=f(z_2)$，$w_3=f(z_3)$，$w_4=f(z_4)$。

则 $z_i\to w_i$ $(i=2.3.4)$ 的映射为 $g:(w,w_2,w_3,w_4)=(z,z_2,z_3,z_4)$

$(w=g(z))$

由定义 $f(z_i)=w_i$ $(i=2.3.4)$ $\therefore f=g$.

$\therefore (g(z),w_2,w_3,w_4)=(f(z),w_2,w_3,w_4)=(z,z_2,z_3,z_4)$

$\Rightarrow (f(z_1),w_2,w_3,w_4)=(f(z_1),f(z_2),f(z_3),f(z_4))=(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

例：求 $(2,i,-2)\to(-1,i,1)$ 的分式.

$(w,-1,i,1)=(z,2,i,-2)$

$$\frac{w+i}{w-1}:\frac{-1-i}{-1-1}=\frac{z-i}{z+2}:\frac{2-i}{2+2}$$

圆曲线：$\mathbb{C}$ 上

$$A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0.\quad A.C\in\mathbb{R}.\ B\in\mathbb{C}.\ |B|^2-AC>0.$$

性质：分式线性变换将圆周映为圆周.（广义）

证：$\begin{cases} w=az+b & (a\neq0) \\ w=\frac{1}{z} \end{cases}$

在 $w=\frac{1}{z}$ 下，$z=\frac{1}{w}$.

$\therefore A\left|\frac{1}{w}\right|^2+\bar{B}\frac{1}{w}+B\frac{1}{\bar{w}}+C=0.$

$A+\bar{B}\bar{w}+Bw+C|w|^2=0.$

（可能：直线 $\rightleftarrows$ 圆周）

定理：四点 $z_1.z_2.z_3.z_4$ 共圆 $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$

证：① 令 $f(z)=(z,z_2,z_3,z_4)=\dfrac{z-z_3}{z-z_4}:\dfrac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$.

故 $f(z_2)=1$. $f(z_3)=0$. $f(z_4)=\infty$.

$\Rightarrow f$ 将过 $z_2.z_3.z_4$ 的圆周映为过 $1.0.\infty$ 的圆周.

引理 过 $1.0.\infty$ 的圆周为实轴.

$z=\infty$ 时令 $z=\frac{1}{w}$ 代入

$A|z|^2+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0$ 求系数

② $\Rightarrow f(z_1)$ 在实轴上. $\operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$.

$\Leftarrow$ 若 $\operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,z_4)=0$ 则 $(z_1,z_2,z_3,z_4)=t\in R$

$g=f^{-1}$ 将 $t\to z_1$. z_1 在圆周 $z_2.z_3.z_4$ 上. $\Rightarrow z_1.z_2.z_3.z_4$ 共圆.

引理证明:

过0点 $C=0$. 过 $z=1$ $A+\bar{B}+B=0$. $A+2\operatorname{Re}B=0$. $\Rightarrow \operatorname{Re}B=0$

过∞点. 令 $w=\frac{1}{z}$. $A\left|\frac{1}{w}\right|^2+B\frac{1}{\bar{w}}+\bar{B}\frac{1}{w}=0 \Rightarrow A+Bw+\bar{B}\bar{w}=0$. 过 $w=0$ 点. $\Rightarrow A=0$.

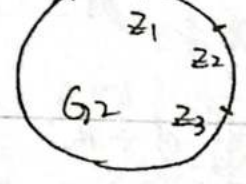
令 $B=ib$. $(b\in R)$ $(b\neq 0)$ $|B|^2-Ac>0$.

$ib\bar{z}-ibz=0 \Rightarrow ib\bar{z}=ibz \Rightarrow z=\bar{z} \Rightarrow z\in R$

由引理证明知. $\bar{C}$ 上过∞的圆周为直线

问题: 如何确定 $f(z)=(z,z_1,z_2,z_3)$ 在圆内外的符号

定义:

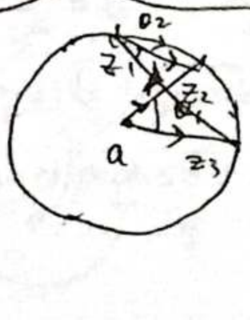


若 $z_1\to z_2\to z_3$ 则称 G_1 为左边. G_2 为右边.

若 $z_3\to z_2\to z_1$ 则称 G_2 为左边. G_1 为右边.

定理. 设 z_1, z_2, z_3 是 $\bar{C}$ 上圆周 γ 上的有序3点. 则 $z_1\to z_2\to z_3$ 右边的点有 $\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)>0$. 左边的点有 $\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)<0$.

证明:



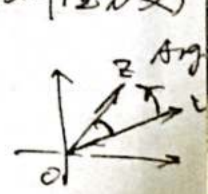
$\operatorname{Arg}(a,z_1,z_2,z_3)=\operatorname{Arg}\left(\frac{a-z_2}{a-z_3}:\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$ (取单值分支)

$=\operatorname{Arg}\left(\frac{a-z_2}{a-z_3}\right)-\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right)$

$=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2-a}{z_3-a}\right)-\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$

$=\theta_1-\theta_2=\frac{\theta_1}{2}\in(0,\pi) \Rightarrow \operatorname{Im}(a,z_1,z_2,z_3)>0$

$\operatorname{Arg}\frac{z}{w}$



若点圆外 $\operatorname{Arg}(\infty,z,z_2,z_3)=\operatorname{Arg}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=-|\theta|\in(-\pi,0)$

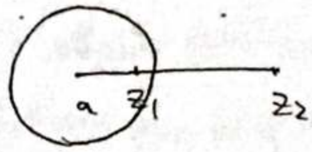
$\Rightarrow \operatorname{Im}(\infty,z_1,z_2,z_3)<0$.

推论: 若 $f: z_i\to w_i$ $(i=1.2.3)$ 则 f 将 $z_1\to z_2\to z_3$ 的左(或右)侧 分别映为 $w_1\to w_2\to w_3$ 的左(或右)侧

记 $\operatorname{Im}(w,w_1,w_2,w_3)=\operatorname{Im}(z,z_1,z_2,z_3)$

$z_1-a=re^{i\theta}$ $\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}=\frac{R^2}{re^{-i\theta}}=\frac{R^2}{r}e^{i\theta}$

对称点 ① 圆



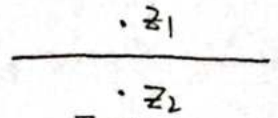
称 z_1,z_2 为圆 $|z-a|=R$ 的对称点.

若 $z_2-a=\frac{R^2}{\overline{z_1-a}}$

$A|z|^2+B\bar z+\bar B z+C=0$

$\Leftrightarrow A z_1\bar z_2+\bar B z_1+B\bar z_2+C$

② 直线



设直线方程 $B\bar z+\bar B z+C=0$ $B\neq 0.$ $C\in\mathbb{R}.$

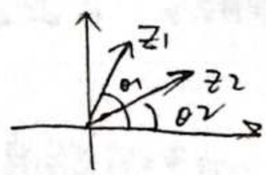
定理: z_1,z_2 关于 L 对称 $\Leftrightarrow$ $B\bar z_1+\bar B z_2+C=0.$

(或 $B\bar z_2+\bar B z_1+C=0$)

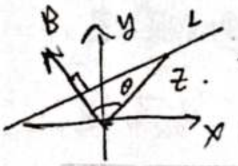
若 $\begin{cases} z_1=r_1e^{i\theta_1}=x_1+iy_1\\ z_2=r_2e^{i\theta_2}=x_2+iy_2\end{cases}$

$\mathrm{Re}(z_1\bar z_2)=\mathrm{Re}(r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{-i\theta_2})=\mathrm{Re}(r_1r_2e^{i(\theta_1-\theta_2)})=r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

$=|z_1|\cdot|z_2|\cos(\theta_1-\theta_2)=\vec{Oz_1}$ 与 $\vec{Oz_2}$ 的内积



例: 设直线L的法向量为 $B\in\mathbb{C}$. 求L的方程. $\mathrm{Re}(B\bar z)=C$



点z在L上. $\Leftrightarrow$ $\vec{Oz}$ 在 $\vec{OB}$ 上的投影为常数 $\Rightarrow$

即 $B\bar z+\bar B z=2C=C'$

$\mathrm{Re}(B\bar z)=\vec{Oz}\cdot\vec{OB}=|\vec{Oz}|\cdot|\vec{OB}|\cdot\cos\theta=|\vec{OB}|\cdot d\in\mathbb{R}$

(定理) ①

证: 向量 z_1-z_2 与 $\vec{OB}$ 共线. $\Leftrightarrow$ 向量 z_1-z_2 与 iB 垂直.

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(iB\overline{z_1-z_2})=0$

$iB(\bar z_1-\bar z_2)-i\bar B(z_1-z_2)=0$

$B\bar z_1-B\bar z_2-\bar B z_1+\bar B z_2=0$

$B\bar z_1+\bar B z_2=\bar B z_1+B\bar z_2$

$B\frac{\overline{z_1+z_2}}{2}+\bar B\frac{z_1+z_2}{2}+C=0.$

$B(\overline{z_1+z_2})+\bar B(z_1+z_2)+2C=0.$

$\underbrace{(B\bar z_1+\bar B z_2+C)}_{\|}+\underbrace{(\bar B z_1+B\bar z_2+C)}_{0}=0$

② 若 z_1,z_2 满足 $\begin{cases}B\bar z_1+\bar B z_2+C=0\\ B\bar z_2+\bar B z_1+C=0.\end{cases}$

相加 $B\frac{\bar z_1+\bar z_2}{2}+\bar B\frac{z_1+z_2}{2}+C=0$

相减 $iB(\bar z_1-\bar z_2)+i\bar B(z_1-z_2)=0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(iB\overline{z_1-z_2})=0.$

$\Leftrightarrow$ $\vec{z_1z_2}$ 与 $\vec{OB}$ 共线.

定理 若分式线性变换将圆 r_1 变换成 r_2，则该分式线性变换将 r_1 的对称点映为 r_2 的对称点

证: 只需验证 $f(z)=\frac{1}{z}$. $f(z)=az+b$.

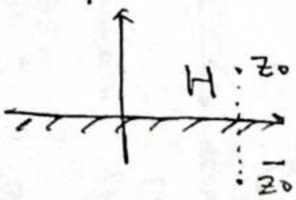
$z_1. z_2$ 关于 z_1 对称 $\iff Az_1\bar{z}_2+\bar{B}z_1+B\bar{z}_2+C=0$

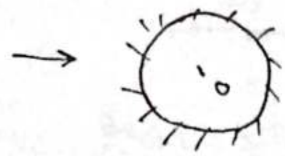
$\iff A\frac{1}{w_1}\frac{1}{\bar{w}_2}+\bar{B}\frac{1}{w_1}+B\frac{1}{\bar{w}_2}+C=0$.

$\iff A+\bar{B}\bar{w}_2+Bw_1+Cw_1\bar{w}_2=0$.

$\iff w_1 w_2$ 关于 $C|w|^2+Bw+\bar{B}\bar{w}+A=0$ 对称.

例. 求将上半平面映为单位圆的分式.





$\exists z_0$. $f(z_0)=0$ $f(\bar{z}_0)=\infty$ $\forall a$ $f(a)=b$.

$(z,a,z_0,\bar{z}_0)=(w,b,0,\infty)$

$\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}:\frac{a-z_0}{a-\bar{z}_0}=\frac{w-0}{w-\infty}:\frac{b-0}{b-\infty}=\frac{w}{b}$.

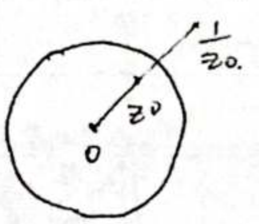
即 $w=K\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$.

当 $z\in R$ 时 $|w|=1$. 令 $z=x\in R$ $1=|w|=|K|\left|\frac{x-z}{x-\bar{z}_0}\right|\Rightarrow|K|=1$.

$\therefore w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ $(\theta\in R)$

例. 求将单位圆D映为单位圆D的分式.

$\exists z_0$. $|z_0|<1$ f: $z_0\to 0$. $\frac{1}{\bar{z}_0}\to\infty$ $a\to b$.



$(z,a,z_0,\frac{1}{\bar{z}_0})=(w,b,0,\infty)$

$\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}}:\frac{a-z_0}{a-\frac{1}{\bar{z}_0}}=\frac{w-0}{w-\infty}:\frac{b-0}{b-\infty}=\frac{w}{b}$.

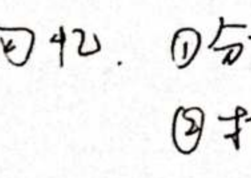
$w=b\cdot\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}}=b'\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ $(\theta\in R, |z_0|<1)$.

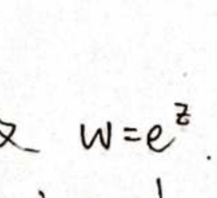
$|z|=1$ 时 $1=|w|=|b'|\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=|b'|\left|\frac{z-z_0}{z\cdot\bar{z}-\bar{z}_0 z}\right|=|b'|\left|\frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right|=|b'|$.

回忆. ①分式.

②指数 $w=e^z$. $(x,y)\to(r,\theta)=(e^x,y)$.

$\{(x,y)\mid 0<y<h\}$ $(0<h\le 2\pi)$ $\longrightarrow\{(r,\theta)\mid r>0, 0<\theta<h\}$.



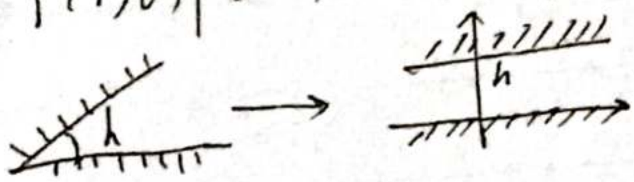


带形 → 扇形.

③对数 $w = \operatorname{Log} z = \log|z| + i\arg z,\ \arg z \in [0, 2\pi)$ 取分支

$\{(r,\theta) \mid 0<r,\ 0<\theta<h\}\ (0<h\le 2\pi) \to \{(x,y) \mid 0<y<h\}$.

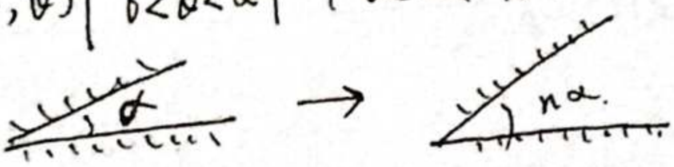
扇形→带形



④幂函数 $w = z^n \quad n \ge 2.\ n\in N$

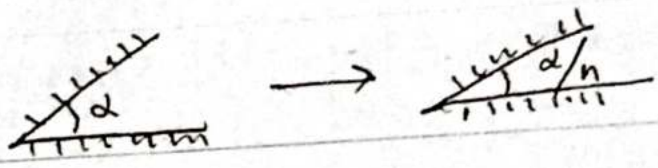
$z = re^{i\theta} \quad w = r^n e^{in\theta}$.

$\{(r,\theta) \mid 0<\theta<\alpha\}\ (0<\alpha<\frac{2\pi}{n}) \to \{(\rho,\beta) \mid 0<\beta<n\alpha\}$

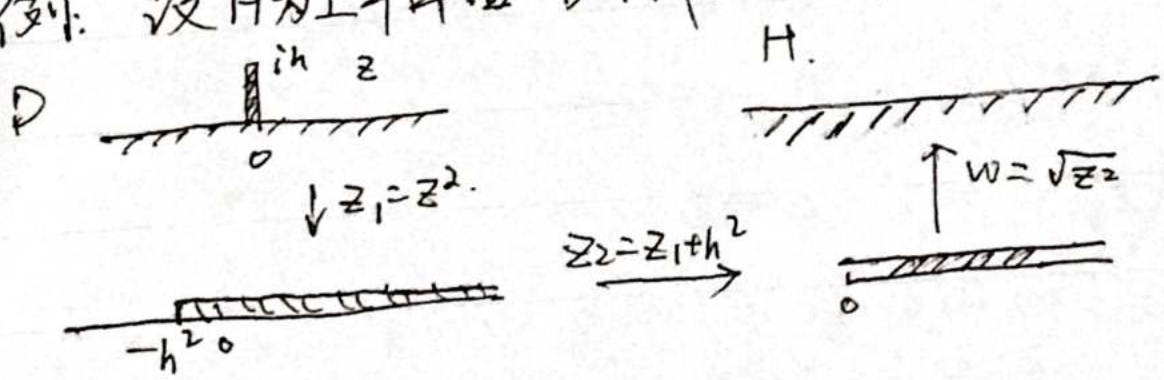


⑤根式. $w = z^{\frac{1}{n}}\ (n\in N)$ $\quad z = re^{i\theta}.\ w = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$

$\{(r,\theta) \mid 0<\theta<\alpha\}\ (0<\alpha\le 2\pi) \to \{(\rho,\beta) \mid 0<\beta<\frac{\alpha}{n}\}$.

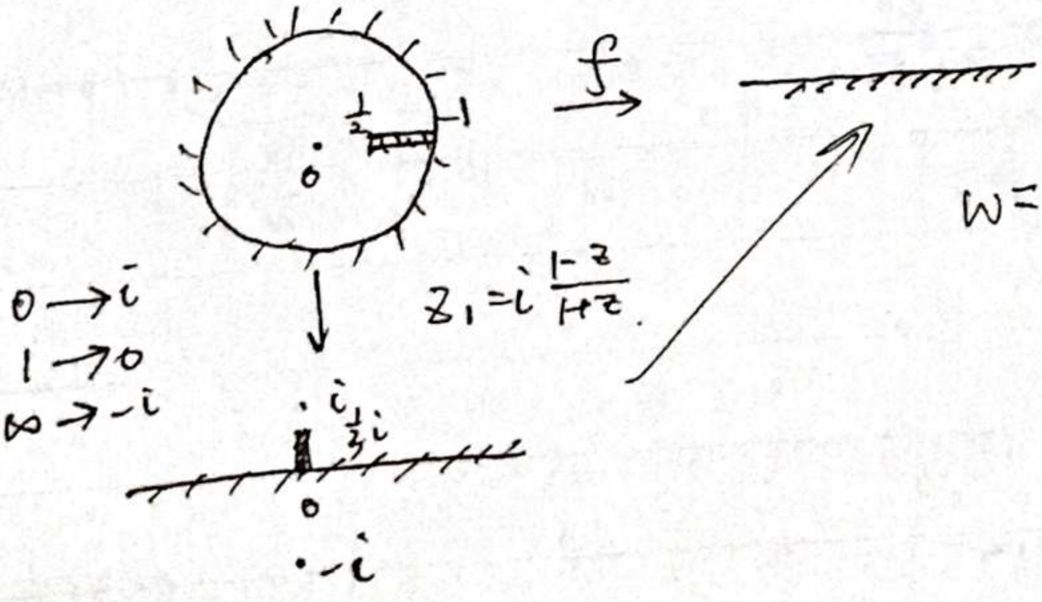


例：设H为上半平面 $D = H\setminus[ih, 0]$ 求 $D\to H$ 的共形.



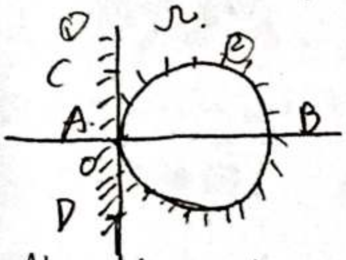
$w = \sqrt{z^2+h^2}$

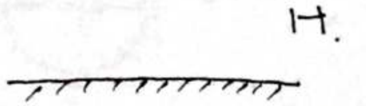
例 求将 $|z|<1$ 去掉 $[\frac{1}{2}, 1]$ 的区域映为H.



$w = \sqrt{\frac{1}{9} - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2}$.

例: Ω是 $|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ 与虚轴围成的无界区域. 求 Ω→H.





$w=e^{z_2}$

$A(0)\to A'(\infty)$

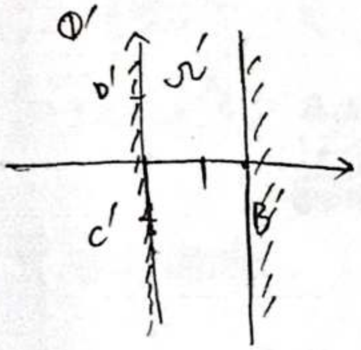
$B(1)\to B'(1)$

$C(i)\to C'(-i)$

$D(-i)\to D'(i)$

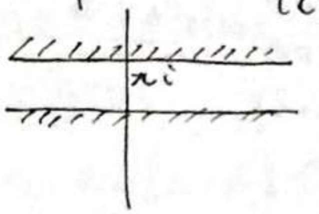
将切点(0)映为∞. 则 ①②映成两条平行直线. (相交于∞)

$\downarrow z_1=\frac{1}{z}$



CAD→C'A'D'(虚轴) 且 Ω在CAD (C'A'D') 右侧

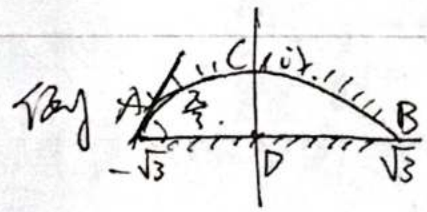
$\xrightarrow{z_2=\pi i z_1}$



说明: 若两圆(直线)相切 令 $w=\frac{cz+d}{z-a}$ 将a变为∞.

a为切点 相切两圆变为平行直线.

例



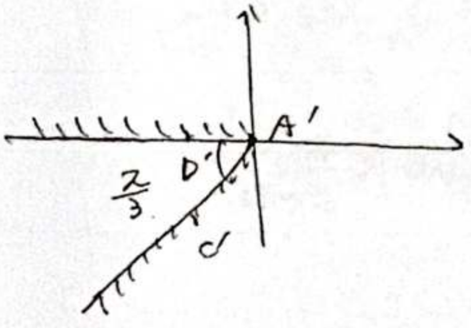
$A(-\sqrt{3})\to A'(0)$

$B(\sqrt{3})\to B(\infty)$

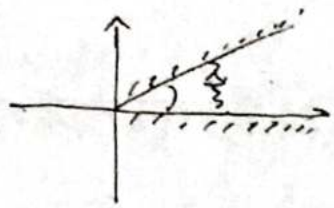
$D(0)\to D'(-1)$

$C(i)\to C'(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$

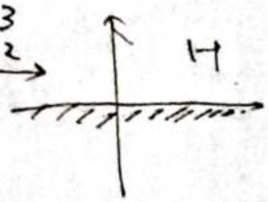
$\downarrow z_1=\frac{z+\sqrt{3}}{z-\sqrt{3}}$



$\xrightarrow{z_2=z_1e^{\pi i}}$

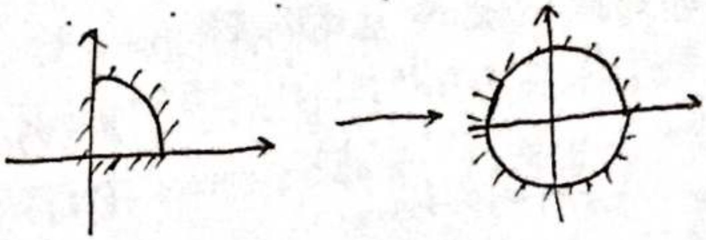


$\xrightarrow{z_3=z_2^3}$

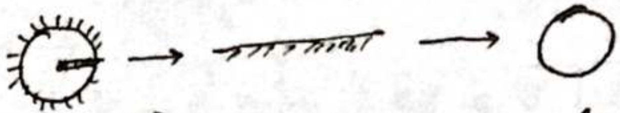


复分析期中 5月11日(周五)

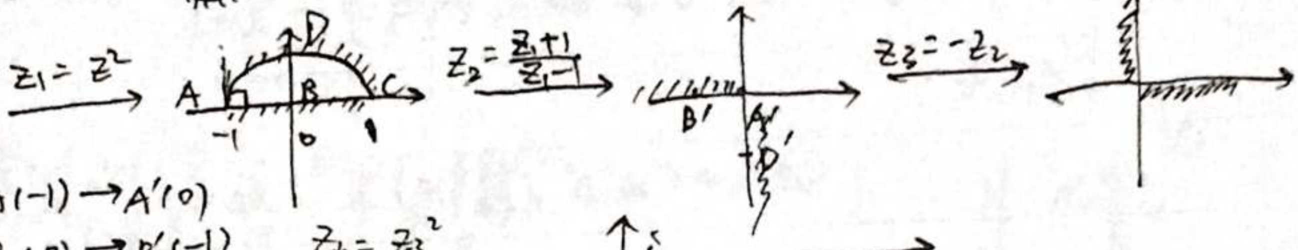
例:



① $z^4 \to$



②

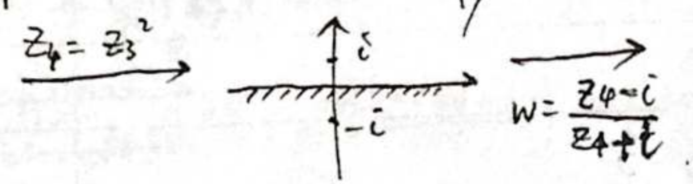


$A(-1) \to A'(0)$

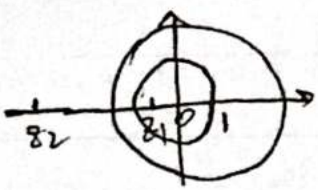
$B(0) \to B'(-1)$

$C(1) \to C'(\infty)$

$D(i) \to D'(-i)$



例. 将 $|z|=1$ 与 $|z-1| = \frac{5}{2}$ 所围成区域D映为某圆环 $1<|w|<R$.



求公共对称点 z_1, z_2.

故 $z_1 z_2$ 过 $z=0, z=1$ ⇒ z_1, z_2 为实轴.

$\Rightarrow z_1 z_2 = 1, \ (z_1-1)(z_2-1) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{4} \\ z_2 = -4 \end{cases}$

作 $w = k\frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$ 则该分式将两圆映为两圆 以0, ∞为对称

令 $z=1$ 时 $w=1 \Rightarrow 1 = k\frac{\frac{5}{4}}{5} = \frac{1}{4}k \Rightarrow k=4$. 圆心在0处

$w = \frac{4z+1}{z+4}$

求R. $z=\frac{7}{2}$ 时 $w = \frac{4\times\frac{7}{2}+1}{\frac{7}{2}+4} = 2 \Rightarrow R=2$.

说明: 两圆相离. 求公共对称点 z_1, z_2 令 $w = k\frac{z-z_1}{z-z_2}$.

3. 全纯函数的积分表示

3.1 积分

$\mathbb{C}$上连续曲线：$\gamma(t)=x(t)+iy(t)$. $x(t), y(t)$实值连续. $t\in[\alpha,\beta]$

闭曲线：$\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$

简单闭曲线：$\gamma(t_1)=\gamma(t_2) \Longleftrightarrow t_1=t_2$ 或 $\begin{cases} t_1=\alpha \\ t_2=\beta \end{cases}$ 无自交点

给定 $\gamma(t)$. $t\in[\alpha,\beta]$ 定义 $\overline{\gamma(t)}=\gamma(-t)$ $\forall t\in[-\beta,-\alpha]$.

(或 $\overline{\gamma(t)}=\gamma(\alpha+\beta-t)$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$.)

光滑曲线：若 $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$ 存在且连续. (t在α, β处为右.左导数)

分段光滑：$\alpha=a_0<a_1\cdots<a_n=\beta$. 且$\gamma$在$[a_k, a_{k+1}]$上都光滑.

(在a_k处可能左导数$\neq$右导数)

可求长曲线：给定连续曲线. $\gamma(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ 作分割Δ：$\alpha=t_0<t_1\cdots<t_n=$

$$L=\sup_{\Delta}\sum_{i=0}^{n}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})|.$$

定义：① 设 $f(t)=x(t)+iy(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$. 为连续复值函数.

R上复值函数的积分. 定义 $\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta x(t)dt+i\int_\alpha^\beta y(t)dt$

故 $Re(\int_\alpha^\beta f(t)dt)=\int_\alpha^\beta Re(f(t))dt$.

$Im(\int_\alpha^\beta f(t)dt)=\int_\alpha^\beta Im(f(t))dt$

命题. $\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right|\le\int_\alpha^\beta|f(t)|dt$

证. 设$\int_\alpha^\beta f(t)dt$ 辐角为θ.

$$\underbrace{\left|\int_\alpha^\beta f(t)dt\right|}_{实值}=e^{-i\theta}\int_\alpha^\beta f(t)dt=\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(t)dt=Re(\int_\alpha^\beta e^{-i\theta}f(t)dt)$$
$$=\int_\alpha^\beta Re(e^{-i\theta}f(t))dt.$$
$$\le\int_\alpha^\beta|e^{i\theta}f(t)|dt=\int_\alpha^\beta|f(t)|dt$$

② 设 $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ 光滑. $f(z)$在γ上连续. 定义 $\int_\gamma f(z)dz$.

$=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ (第二型曲线积分存在)

若γ分段光滑. 则定义 $\int_\gamma f(z)dz=\sum_{k=0}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

积分计算 设 $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$

$f(z)=u(z)+iv(z)$.

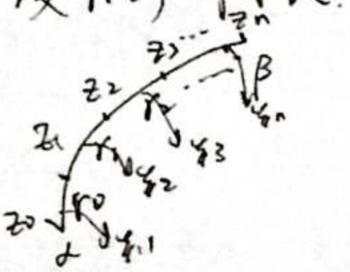
$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt=\int_\alpha^\beta (ux'-vy')dt+i\int(vx'+uy')dt,$$

$$=\int_\gamma udx-vdy+i(vdx+udy)=\int_\gamma (u+iv)d(x+iy)$$

例. 设 $\gamma(t)$ $(t\in[\alpha,\beta])$ 分段光滑 求 $\int_\gamma dz$ $\int_\gamma z\,dz$

计算 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ 其中 $\gamma(t)=a+Re^{it}$ $t\in[0,2\pi)$.

③ 设 $\gamma(t)$ 可求长.



$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})=\int_\gamma f(z)dz$$

$$\lambda=\max_{1\le k\le n} L(\gamma_k).$$

性质: ① $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz=-\int_\gamma f(z)\,dz$.

② $\int_\gamma (\alpha f(z)+\beta g(z))dz=\alpha\int_\gamma f(z)dz+\beta\int_\gamma g(z)dz$. $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

③ $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le \int|f(z)|ds\le \sup_\gamma|f(z)|\,\mathrm{Length}(\gamma)$ 长大不等式.

证: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right|=\left|\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right|\le\int_\alpha^b|f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt$

$\le \sup_\gamma|f(z)|\int_\alpha^\beta|\gamma'(t)|dt=\sup_\gamma|f(z)|\cdot\mathrm{length}(\gamma)$

$\int_\gamma|f(z)||dz|=\int_\gamma|f(z)||dz|=\int|f(z)|\cdot|\gamma'(t)|dt.=\int_\alpha^b|f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt.$

原函数: 讨论区域Ω上函数 $f(z)$ 若存在全纯 $F(z)$. 使 $F'(z)=f(z)$
则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数.

定理 若在区域Ω上连续函数 $f(z)$ 有原函数 $F(z)$ 且 γ 分段光滑
则 $\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(a))-F(\gamma(b))$

pf $\int_\gamma f(z)dz=\int F'(z)dz=\int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$=\int_a^b \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

推论：若γ闭，f连续且在Ω上存在原函数，则$\int_\gamma f(z)dz=0$

3.2 Cauchy积分定理

问题：给定$f(z)$，在Ω上是否有原函数？

①定理（设$f(z)$在D中全纯，且γ闭，$\gamma\subset D$，γ内部$\subset D$）$\Leftrightarrow$ D单连通，γ是D内任一条曲线。$f(z)\in H(D)$

若 $\boxed{f'(z)\text{在}D\text{中连续}}$，则 $\int_\gamma f(z)=0$

引理：定理条件下，$P(x,y)$、$Q(x,y)$在D中连续且有一阶~~连续~~偏导数

$$\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int_\gamma Pdx+Qdy$$

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma(u+iv)d(x+iy)=\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma(vdx+udy)$$

$$=\iint_\Omega\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0 \text{ (Cauchy-Riem}$$

问题：如何去掉"f'连续"？

②（Cauchy 定理） 设 f 在 D 中全纯. $D\subset\mathbb{C}$ 为单连通区域 ☆ $\gamma\subset D$，γ 内部 $\subset D$ 则 $\int_\gamma f(z)dz=0$.

证明. ① 设 $T\subset D$ 三角形 T 内部 $\subset D$. 则 $\int_T f(z)dz=0$.

② 设 $P\subset D$ 闭折线 且 P 内部 $\subset D$ 则 $\int_P f(z)dz=0$

③ 对曲线 $\gamma\subset D$. $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ 折线 $P\subset D$ s.t.

(1) P 与 γ 有相同的起终点. 且 P 的顶点在 γ 上. $[\sup\{|x-y|.\ x,y\in D\}]$

(2) $\left|\int_P f(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right|<\varepsilon$

$T_j^{(1)}$ 直径 $d^{(1)}=\frac{1}{2}d^{(0)}$

$T_j^{(1)}$ 的周长 $p^{(1)}=\frac{1}{2}p^{(0)}$

证：① $T^{(0)}$

$T_4^{(1)}$ $T_1^{(1)}$ $T_2^{(1)}$ $T_3^{(1)}$

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right|=\left|\left(\int_{T_1^{(1)}}+\int_{T_2^{(1)}}+\int_{T_3^{(1)}}+\int_{T_4^{(1)}}\right)f(z)dz\right|\le 4\left|\int_{T_j^{(1)}}f(z)dz\right|\quad(\exists j)$$

将 $T_j^{(1)}=T^{(1)}$ 将 $T^{(1)}$ 分割 $\exists T^{(2)}$

$$\left|\int_{T^{(1)}} f(z)dz\right|\le 4\left|\int_{T^{(2)}}f(z)dz\right|.$$

存在 $T^{(1)}\supset T^{(2)}\supset T^{(3)}\supset\cdots\supset T^{(n)}\supset\cdots$.

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right|\le 4^n\left|\int_{T^{(n)}}f(z)dz\right|.$$

$$d^{(n)}=\frac{1}{2^n}d^{(0)}\qquad p^{(n)}=\frac{1}{2^n}p^{(0)}$$

记 $F^{(n)}$ 为 $T^{(n)}$ 所围闭集.

$$F^{(0)}\supset F^{(1)}\supset F^{(2)}\supset\cdots\supset F^{(n)}\supset\cdots \text{ 且 } d^{(n)}\to 0.$$

$\bigcap_{n\ge 0}F^{(n)}=\{z_0\}\in D.$ （D 单连通）

故 $\exists U$ 及 $z_0\in U$. 对 $\forall z\in U$.

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\psi(z)(z-z_0)\qquad \psi(z)\xrightarrow[z\to z_0]{}0$$

当 n 充分大时. $\left|\int_{T^{(n)}} f(z)dz\right|=\left|\int_{T^{(n)}}\left(f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\psi(z)(z-z_0)\right)dz\right|$

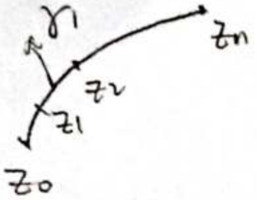
$$=\left|\int_{T^{(n)}}\psi(z)(z-z_0)dz\right|\le \sup_{T^{(n)}}|\psi(z)|\cdot d^{(n)}\cdot p^{(n)}=\frac{\sup|\psi(z)|}{4^n}\cdot d^0\cdot p^0$$

$$\left|\int_{T^{(0)}} f(z)dz\right|\le \sup_{T^{(n)}}|\psi(z)|\,d^0\cdot p^0\to 0\ (n\to\infty)$$

$\therefore \int_{T^{(0)}} f(z)dz = 0.$

② 闭多边形 a) 凸多边形.

b) 凹多边形.

③ 

设 $|z_i - z_{i-1}| < \delta$ $\quad \gamma_k: \gamma_k \to \gamma_{k+1}$.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \int_P f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(z)dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)dz\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k}(f(z)-f(z_k))\,dz - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{[z_k,z_{k+1}]}(f(z)-f(z_k))\,dz\right|$$

$$\le \varepsilon L + \varepsilon L \to 0 \ (\varepsilon \to 0).$$

推广. 定理. 若D是简单闭γ内部 (D单连通). 若f在D全纯. 在$\bar{D}$上连续. 则 $\int_\gamma f(z)dz=0$

证. 在D中 (γ内) 构造简单闭 γ_ε. 使 $\gamma_\varepsilon \to \gamma$ ($\varepsilon \to 0$)

$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0$. $\quad \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \to \int_\gamma f(z)$

f在$\bar{D}$连续.

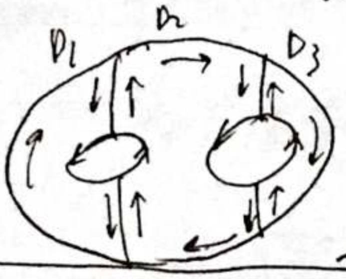
多连通 

设D由n+1条简单闭曲线 $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ 围成区域

若f在D上全纯, $\bar{D}$连续. 则 $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$.

$\partial D = \gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \dots \cup \gamma_n^-$

由∂D的定义 $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \left(\int_{\gamma_1} + \dots + \int_{\gamma_n}\right) f(z)dz$



$\int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3} = 0 = \int_{\partial D} f(z)dz.$

无界区域的Cauchy积分定理(见后).

$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n^-$ 围成无界区域D. f(z)在$D\setminus\{\infty\}$内解析

且 $\lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = a$ (常数). f在$\bar{D}$连续.

则 $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

例 设 $a\notin\gamma$. 求 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

解: 若a在γ内部

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_{\partial B(a,\varepsilon)} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i.$$

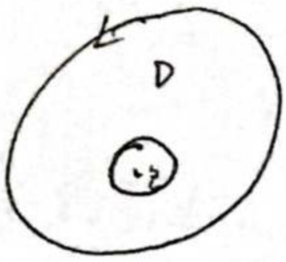
若a在γ外 则 $\frac{1}{z-a}$ 在γ内部全纯.

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = 0$$

Cauchy公式. 设D为简单闭曲线γ所围区域 (单连通). f在D上全纯. $\bar{D}$连续

则 $\forall z\in D$ $\quad f(z) = \boxed{\frac{1}{2\pi i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$

仅与f在γ上的值有关



证: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

令 $\underline{w = z+\varepsilon e^{i\theta}}$, $\theta\in[0,2\pi)$ $\quad \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+\varepsilon e^{i\theta})}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}}} \cancel{\varepsilon} i \cancel{e^{i\theta}} d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+\underset{\downarrow 0}{\varepsilon} e^{i\theta}) d\theta \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z) d\theta = f(z).$$

例. 设γ简单闭, $a, b\notin\gamma$; 求 $I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$.

解: ① a, b在γ内部

$$I = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial B(a,\varepsilon)} \frac{\overset{f(z)}{\frac{1}{z-b}} dz}{z-a} + \int_{\partial B(b,\varepsilon)} \frac{\frac{1}{z-a} dz}{z-b} \right)$$

$$= \frac{1}{z-b}\Big|_{z=a} + \frac{1}{z-a}\Big|_{z=b} = 0.$$

② a, b在γ外, $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在γ内全纯 $I=0$.

③ a在γ内, b在γ外

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,\varepsilon)} \frac{\frac{1}{z-b}}{z-a} dz$$

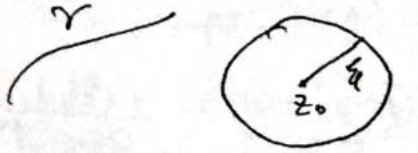
$$= \frac{1}{z-b}\Big|_{z=a} = \frac{1}{a-b}$$

关于全纯函数 f 无穷次可导 → Cauchy 积分表示

引理：设 $\gamma \in \mathbb{C}$ 是一条曲线（不一定闭）$\varphi(\xi)$ 在 γ 上连续，则 φ 的函数

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z}$$ $F(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\gamma$ 上全纯，且对 $\forall z \notin \gamma$

有 $$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}$$



Proof:

① $\boxed{F(z)\text{在}\mathbb{C}\setminus\gamma\text{上连续}}$ 取 $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\gamma$，取邻域 $B(z_0,\delta) \subset \mathbb{C}\setminus\gamma$，当 $z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$

$\forall \xi \in \gamma$，$|\xi - z| \geq \frac{\delta}{2}$

$$F(z) - F(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\xi)\left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0}\right)d\xi = \frac{z - z_0}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(\xi)\frac{1}{(\xi - z)(\xi - z_0)}d\xi$$

所以 $$|F(z) - F(z_0)| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi}\int_\gamma |\varphi(\xi)|\frac{|d\xi|}{|\xi - z||\xi - z_0|}$$

$$\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi\cdot\frac{\delta}{2}\cdot\delta}\int_\gamma |\varphi(\xi)|d\xi \Rightarrow F\text{连续}$$

② $\boxed{\text{可导性}}$ $$\lim_{z\to z_0}\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^2}$$ 故 $$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^2}$$ 高阶导数类似.

定理：设 f 在 D（D 单连通）全纯，$\bar{D}$ 连续（$\forall \gamma \subset D$ 或 γ 内部为 D），则 $f(z)$ 在 D 中有任意阶导数且（$\forall z \in D$）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_\Delta} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

表示式变化

Cor1：若 f 在 D 中全纯，则 f 无穷次可导（D：任意区域）

一般写单连通情形的定理，

Cor2：多连通情形，将 γ 换为 ∂D $\gamma_0 \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cdots \cup \gamma_n^-$

3.4 $\boxed{\text{Cauchy 积分公式的推论}}$

Cauchy 不等式

若 $f(z)$ 在 $B(a,R)$ 中全纯 且 $|f(z)| \le M$.

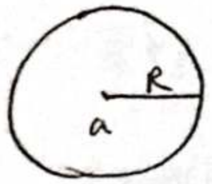
则 $\left|f^{(n)}(a)\right| \le \dfrac{Mn!}{R^n} \quad (\forall n \in N)$

证: $\forall r: 0<r<R$.

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_{|z-a|=r}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-a|^{n+1}}d\xi$$

$$\le \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}$$

Liouville 定理. 若 f 在 C 上全纯且有界. 则 $f(z)$ 为常数.



证 设 $\sup|f(z)| \le M$.

$|f'(a)| \le \dfrac{M}{R} \to 0 \ (R \to +\infty)$

$\Rightarrow f'(a)=0. \ \forall a \in C$

$\Rightarrow f$ 为常数

代数基本定理. C上任何复系数多项式 $P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ $(n\ge 1, a_n \ne 0)$ 至少有一个根.

证. 若 $P_n(z)$ 在 C 上无根, 则 $\dfrac{1}{P_n(z)}$ 在C上全纯.

$$\left|\frac{P_n(z)}{z^n}\right| = \left|a_n + \frac{a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{z^n}\right| \ge |a_n| - \left|\frac{a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0}{z^n}\right| \ge \frac{1}{2}|a_n|$$

$\underline{\forall |z|>R}$

$\exists R. \ \forall |z|>R \quad |P_n(z)| \ge \frac{1}{2}|a_n||z|^n$,

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{P_n(z)}\right| \le \dfrac{2}{|a_n||z|^n} \le \dfrac{2}{|a_n|R^n}$

$\Rightarrow \forall z \in C \quad \left|\dfrac{1}{P_n(z)}\right| \le \max\left\{\max_{|z|\le R}\dfrac{1}{|P_n(z)|}, \dfrac{2}{|a_n|R^n}\right\}$ 故 $\dfrac{1}{P_n(z)}$ 在C上全纯且

有界. $\Rightarrow \dfrac{1}{P_n(z)}$ 为常数

推论 $P_n(z)$ 在C上恰有n个根(包含重数)

证 设 $P_n(z)$ 的一个根为 w_1. 令 $z=(z-w_1)+w_1$ 代入 $P_n(z)$

$$P_n(z) = a_n(z-w_1)^n + b_{n-1}(z-w_1)^{n-1} + \cdots + b_0 \Rightarrow b_0 = 0$$

$$= (z-w_1)\underbrace{\left(a_n(z-w_1)^{n-1} + b_{n-1}(z-w_1)^{n-2} + \cdots + b_1\right)}_{Q_{n-1}(z)}$$

关于域D上全纯函数$f(z)$的原函数$F(z)$

→证明全纯的方法. →一般区域 ⟺ ∀三角形(或闭矩形)

(Morera定理) 设f是D中连续函数 若对任何简单闭γ 有$\int_\gamma f(z)dz=0$

则f全纯. (Cauchy定理逆定理). ~~且$\gamma\subset D$~~ $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)$ 全纯

证: 取$z_0\in D$ 定义 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$. 由$\int_\gamma f(z)=0$ 知

$F(z)$与积分路径无关. 下证 $F'(z)=f(z)$.

$\forall z_1\in D$ $F(z)-F(z_1)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi-\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi=\int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi$

$\left|\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1}-f(z_1)\right|=\left|\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi-\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z} f(z_1)d\xi\right|$

f的连续性

$=\left|\frac{1}{z-z_1}\int_{z_1}^{z}(f(\xi)-f(z_1))d\xi\right|$ $\Rightarrow F'(z)=f(z)$. $F(z)$全纯.

$\Rightarrow$ F任意次可导 $\Rightarrow$ $f=F'$任意次可导 $\Rightarrow$ f全纯.

推论. 设D单连通. f在D中全纯 则$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$为$f(z)$的原函数 且$F'(z)=f(z)$

即积分

证: 对D中简单闭γ. γ内部$\subset D$. 由Cauchy定理

$\int_\gamma f(z)dz=0$. 故$F(z)$与路径无关 $F'(z)=f(z)$.

单连通区域上的全纯函数一定有原函数.

$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$

① 若$F(z)$与路径无关. 则$F(z)$为$f(z)$的原函数

② 若$F(z)$与路径有关. 则$F(z)$为多值函数.

多连通域情形 例: $f(z)=\frac{1}{z}$. $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

设$f(z)$在D中全纯 $\bar{D}$上连续.

定义: $K_1=\int_{\gamma_1} f(z)dz$, ..., $K_n=\int_{\gamma_n} f(z)dz$. ($K_i$与$\gamma_i$无关)

定理. 设$f(z)$在D中全纯. $\bar{D}$连续 则$f(z)$有原函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall j$. $K_j=0$.

↑D为多连通区域(一般$f(z)$无原函数)

$F(z)$多值

$f(\xi)\in H(D)\cup C(\bar{D})$

Cauchy公式. ①算积分.

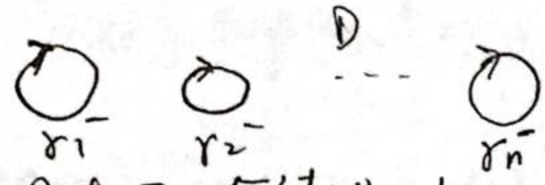
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$$

②无界区域的Cauchy公式

可用于计算内部奇点多外部奇点少的积分.

定义 $\gamma=\gamma_1^-\cup\gamma_2^-\cdots\cup\gamma_n^-$, 称$\gamma$所围区域为$D$.



定理. f在D上全纯且 $\underbrace{\lim_{z\to\infty} z^2 f(z)=a<\infty}$ ($\in\mathbb{C}$) 可减弱

且f在$\bar{D}$上连续. 则 $\int_\gamma f(z)\,dz=0$.

证: 作充分大圆 γ_0: $|z|=R$. 包含所有γ_i

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz=\sum_i\int_{\gamma_i} f(z)\,dz=-\int_\gamma f(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\right|\le \max_{|z|=R}\left|f(z)\cdot z^2\right|\cdot\int_{\gamma_0}\frac{|dz|}{|z^2|}\le |a|\frac{1}{R^2}\cdot 2\pi R\to 0$$

$R\to\infty$. $\int_\gamma f(z)\,dz=0$

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz\le \max_{|z|=R}|f(z)|\int_{\gamma_0}|dz|=2\pi R\max_{|z|=R}|f(z)|\to 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\max_{|z|=R}|z\cdot f(z)|\to 0.}$$

$\lim_{z\to\infty} f(z)$为有限复数记为 $f(\infty)$

定理: 设γ围成无界D. 且 $f(z)$在D中全纯. $\bar{D}$上连续. 则$\forall z\in D$.

$$f(z)=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \qquad \gamma=\gamma_1^-\cup\gamma_2^-\cup\cdots\cup\gamma_n^-$$

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$$

证: 作γ_0: $|z|=R$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi$$

$$=f(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varphi|=R}\frac{f(\varphi)}{\varphi-z_0}d\varphi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varphi|=R}\frac{f(\varphi)-f(\infty)}{\varphi-z_0}d\varphi+\underline{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varphi|=R}\frac{f(\infty)}{\varphi-z_0}d\varphi}_{=f(\infty)}$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\varphi|=R}\frac{f(\varphi)-f(\infty)}{\varphi-z_0}d\varphi\right|\le\max_{|z|=R}|f(z)-f(\infty)|\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{|\varphi|=R}\frac{|d\varphi|}{|\varphi-z_0|}$$

$$\le\max_{|z|=R}|f(z)-f(\infty)|\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi R}{R-|z_0|}\to 0\ (R\to\infty)$$

☆

例. 若 f 在 $\underset{D}{|z-z_0|<r}$ 上全纯, 在 $\bar{D}$ 连续, 且 $|\mathrm{Re}\,f(z)|\le M$. 则

$$|f'(z_0)|\le\frac{2M}{r}$$ (Cauchy 不等式的推广).

证.

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^2}rie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$$

☆ f 在 D 上全纯, $\bar{D}$ 连续

$$\Rightarrow 0=\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz=\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\overline{f(z_0+re^{i\theta})}e^{-i\theta}d\theta=0.$$

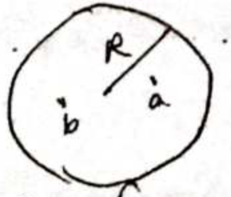
$$\left(\overline{\int_0^{2\pi}fe^{i\theta}d\theta}=\int_0^{2\pi}\overline{fe^{i\theta}}d\theta=\int_0^{2\pi}\bar{f}e^{-i\theta}d\theta\right).$$

$$\Rightarrow|f'(z_0)+0|=\left|\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}2\cdot\mathrm{Re}\,f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\mathrm{Re}\,f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right|$$

$$\le\frac{1}{\pi r}\max_{|z-z_0|=r}|\mathrm{Re}\,f|\cdot 2\pi\le\frac{2M}{r}.$$

Liouvill定理



证. $\forall a,b\in \mathbb{C}$.

$$|f(a)-f(b)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-a}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-b}dz\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz\right|$$

$$\le\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}|f(z)|\cdot\frac{|a-b|}{\underbrace{|z-a|}_{\ge|z|-|a|}\cdot\underbrace{|z-b|}_{\ge|z|-|b|}}|dz|\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}|f(z)|\frac{|a-b|}{(R-|a|)(R-|b|)}|dz|$$

$$\le\frac{M}{2\pi}\frac{|a-b|}{(R-|a|)(R-|b|)}2\pi R\sim\frac{C}{R}\to 0\ (R\to\infty)$$

$\Rightarrow f(a)=f(b)\quad \forall a,b\in \mathbb{C}$.

$k_i=\int_{\gamma_i}f(z)dz$　f在D上全纯. $\bar{D}$连续.

定理: $f(z)$有原函数$F(z)\Longleftrightarrow\forall j.\ 1,2,\cdots n$ 有$k_j=0$.

证 $\Rightarrow$

$\int_\gamma f(z)dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$

若γ闭. 则$\oint_\gamma f(z)dz=0$

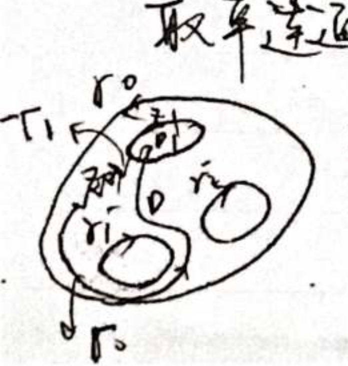
$\exists\{\Gamma_i\}\ \Gamma_i\to\gamma_i.\ \Gamma_i\subset D.\quad 0=\int_{\Gamma_i}f(z)dz\to\int_{\gamma_i}f(z)dz.$

$\Leftarrow$ $\forall j.\ k_j=0$. 则对$\forall D$中简单闭曲线γ. $\int_\gamma f(z)dz=0$.

$\Rightarrow$ $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)dz$ 为$f(z)$的原函数

若某个$k_j\neq0$. 则$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$ 为多值函数

取单连通 $D_1\subset D$　$F_1(z)=\int_{\Gamma_0\,(z_0\to z_1)}f(z)dz+\int_{z_1}^{z}f(\xi)d\xi$



结论:

D_1单连通 $F(z)$在D_1中有单值分支. 记该分支为$F_1(z)$

则$F(z)$在D_1中所有的单值分支为 $F_1(z)+\sum_{j=1}^{n}n_jk_j\ (\forall n_j\in\mathbb{Z})$

设F_2为$F(z)$在D_1中另一分支. 则$\left(F_2(z)-F_1(z)\right)'=0$

$\Rightarrow F_2(z)-F_1(z)=$ 常数 $\forall z\in D_1$.

$$F_1(z_1)=\int_{T_0} f(z)\,dz$$

$$F_2(z_1)=\int_{T_1} f(z)\,dz$$

$$F_1(z_1)-F_2(z_1)=\int_{T_0\cup T_1^-} f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n} n_j k_j \quad (n_j\in Z)$$

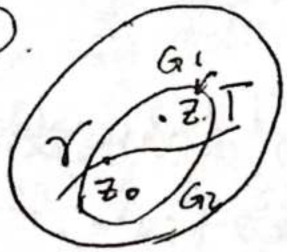
不一定是简单闭曲线

但可以分解为若干简单闭曲线

例：若$f(z)$在D中连续，$D\setminus\gamma$上全纯，则f在D中全纯

证① Morera定理.

②



$\forall z\in G_1$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$$

G_2中全纯，

Cauchy公式推广.

$\Rightarrow$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi. \quad (\forall z\in G_1)$$

$\Gamma=\partial(G_1\cup G_2)$

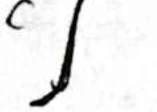
当z在γ上也成立.

取$z_0\in\gamma$. 因为$z_0\notin\Gamma$ ∴当$z\to z_0$时 $f(z)\to f(z_0)$，$\frac{1}{\xi-z}\to\frac{1}{\xi-z_0}$ $(\forall\xi\in\Gamma)$.

$$\therefore \int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\to\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi$$

$\forall z_0\in\gamma$. $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\,d\xi$. 在$D\setminus\Gamma$上可导，$f(z_0)$可导

引理：$F(z)=\int_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$.



若f连续，则$F(z)$在$D\setminus C$上可导.

4. 全纯函数的Talyor展开及应用.

级数

数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad \forall z_i \in \mathbb{C}$.

若部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ 是收敛数列且收敛到 $S \in \mathbb{C}$.

① 则称 $\sum z_n$ 收敛. 否则称发散

$\sum z_n$ 收敛 $\iff \sum \mathrm{Re}\, z_n$ 与 $\sum \mathrm{Im}\, z_n$ 都收敛.

$\iff \forall \varepsilon > 0.\ \exists N > 0$ s.t. $\forall n \geq N.\ \forall p \geq 1$

$|z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$. $\quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ 级数Cauchy收敛(准则) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

② 若 $|z_n|$ 收敛, 则称 $\sum z_n$ 绝对收敛 $\Downarrow \Uparrow\!\!\!\!\times$ 收敛

函数项级数 $\{f_n(z)\}\quad z \in D$.

①(逐点)收敛. 若对 $\forall z \in D.\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (数项级数)收敛 则称.

$\sum f_n(z)$ 在 D 上收敛 记和函数为 $f(z)$.

$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in D$.

② 一致收敛. 在集合 D 上. 称 $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$ 若

s.t. $\forall \varepsilon > 0.\ \exists N > 0\ \forall n \geq N.\ \forall z \in D \quad |S_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

③ 内闭一致收敛 若 $\sum f_n(z)$ 在区域 Ω 上任一紧集(有界闭集)上一致收敛.

判别法. ① $\sum f_n$ 在 D 上一致收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0.\ \exists N > 0.\ \forall n \geq N\ \forall p \geq 1$

$\forall z \in D \quad |f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

(Weierstrass一致收敛判别法) ② 在 D 上 $|f_n(z)| \leq \underset{\text{级数}}{M_n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ 则 $\sum f_n(z)$ 在 D 上一致收敛

性质 ③ 若 $f_n(z)\ (n=1,2,\cdots)$ 在集合 D 连续且 $\sum f_n$ 在 D 上一致收敛于 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 上连续.

③证: 一致收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0.\ \exists N > 0\ \forall n \geq N.\ \forall z \in D$.

$|f(z) - S_n(z)| < \varepsilon$.

$$\forall z_0 \in D \quad |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - S_N(z)| + \underbrace{|S_N(z) - S_N(z_0)|}_{\text{连续}} + |S_N(z_0) - f(z_0)|$$
$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \quad z \to z_0$$
$$= \varepsilon$$

定理：若 ~~$f_n(z)$在曲线γ上连续~~. 且 $\sum_{n\geq1} f_n$ 在 γ 上一致收敛 $f(z)$.

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz \text{（逐项积分）}$$

证：一致 $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0.\ \exists N>0.\ \forall n\geq N\ \forall z\in\gamma.\ |S_n(z)-f(z)|<\varepsilon$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma S_n(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right|$$

$$\leq \left|\int_\gamma |S_n(z)-f(z)|\,dz\right| \leq \varepsilon\cdot L(\gamma).$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.

4.1 Weierstrass 定理

定理. 若 ① $f_n(z)$ $n=1,2,\cdots$ 在 D（区域）中全纯

② $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$

则 ① $f(z)$在D中全纯

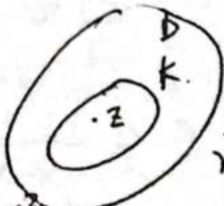
② $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在D中内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$.

① $f(z)$连续

$f(z)$全纯：任取简单闭γ. γ内部$\subset D$.

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = 0. \Rightarrow f(z)\text{全纯}.$$

② (Cauchy不等式)



记 $G=\bigcup_{z\in K}B(z,\rho)$. 则 $G\subset D$. $\overline{G}\subset D$

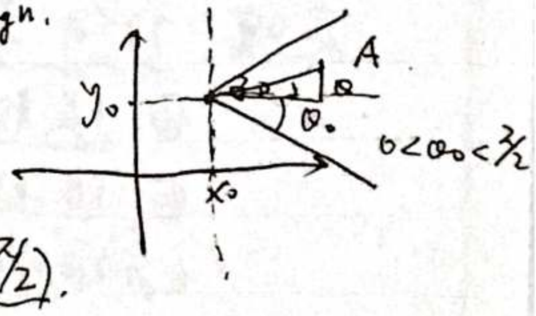
$S_n^{(k)}(z)=\sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(z)$. 因定理保$K\subset D$. $\exists\rho>0$. s.t. $\forall z\in K$. $B(z,\rho)\subset D$

$$\forall z\in K.\ \left|S_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{\rho^k}\sup_{B(z,\rho)}|S_n(z)-f(z)|.$$

$$\text{故}\ \sup_{\forall z\in K}\left|S_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right| \leq \frac{k!}{\rho^k}\sup_{\forall z\in G}|S_n(z)-f(z)| \rightrightarrows 0.$$

考虑. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ $a_n\in\mathbb{C}$. $n^z=\left(e^{\log n}\right)^z=e^{z\cdot\log n}$.

定理 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 收敛. 则



① 它在 $\mathrm{Re}\,z>x_0$ 收敛.

② 它在 区域A的闭包上一致收敛. $(0<\theta_0<\frac{\pi}{2})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{a_n}{n^{z_0}}}_{A_n}\cdot\underbrace{\frac{1}{n^{z-z_0}}}_{B_n}$$

已知$\sum A_n$收敛，求$\sum A_nB_n$是否收敛？

☆ $\boxed{\text{Abel 求和}}$

证明：① 令 $\sigma_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}$

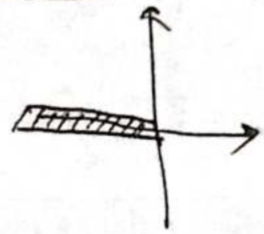
$\forall p\geq 1$

$\boxed{|\sigma_{n+p}|\leq\varepsilon}$

$$\sigma_{n+2}=\frac{a_{n+2}}{(n+2)^{z_0}}+\sigma_{n+1}$$

$$\sigma_{n+p}=\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{z_0}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}$$

$$\sigma_n=0.$$



令 $f(w)=w^a$

$k^a-(k+1)^a=\int_{k+1}^{k}(w^a)'dw$

$$\sigma_{n+p}-\sigma_{n+p-1}=\frac{a_{n+p}}{(n+p)^{z_0}}\ (=A_{n+p}).$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^z}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^{z_0}}\cdot\frac{1}{k^{z-z_0}}=\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_n}{(n+1)^{z-z_0}}+\cdots+\frac{\sigma_{n+p}-\sigma_{n+p-1}}{(n+p)^{z-z_0}}$$

$$=\sigma_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)^{z-z_0}}-\frac{1}{(n+2)^{z-z_0}}\right)+\cdots+\sigma_{n+p-1}\left(\frac{1}{(n+p-1)^{z-z_0}}-\frac{1}{(n+p)^{z-z_0}}\right)$$

$$+\frac{\sigma_{n+p}}{(n+p)^{z-z_0}}-\frac{\overset{=0}{\sigma_n}}{(n+1)^{z-z_0}}$$

$$\left|\frac{1}{k^{z-z_0}}-\frac{1}{(k+1)^{z-z_0}}\right|=\left|(k+1)^a-k^a\right|=\left|a\int_k^{k+1}w^{a-1}dw\right|.$$

$$a=-(z-z_0)\qquad\leq|a|\int_k^{k+1}|w^{a-1}||dw|$$

$\begin{cases}z=x+iy\\ z_0=x_0+iy_0\end{cases}$

$$=|z-z_0|\int_k^{k+1}t^{x_0-x-1}dt=\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left(\frac{1}{k^{x-x_0}}-\frac{1}{(k+1)^{x-x_0}}\right)$$

$$\left(|w^{a-1}|=|t^{a-1}|=|e^{(a-1)\log t}|=\left|e^{\mathrm{Re}(a-1)\log t+i\,\mathrm{Im}(a)\log t}\right|\right.$$

$$\left.=e^{(\mathrm{Re}\,a-1)\log t}=t^{\mathrm{Re}\,a-1}=t^{x_0-x-1}\right)$$

故 $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{k^z}\right|\leq\varepsilon\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}-\cancel{\frac{1}{(n+2)^{x-x_0}}}+\cancel{\frac{1}{(n+2)^{x-x_0}}}-\cancel{\frac{1}{(n+3)^{x-x_0}}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{(n+p-1)^{x-x_0}}}\right.$

$$\left.-\frac{1}{(n+p)^{x-x_0}}\right)+\left|\frac{\varepsilon}{(n+p)^{z-z_0}}\right|$$

$$\leq\varepsilon\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\cdot\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}+\frac{\varepsilon}{(n+p)^{x-x_0}}$$

$$\leq\varepsilon\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\leq\varepsilon\left(\frac{1}{\cos\theta_0}+1\right)$$

$\forall\, 0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ 一致收敛

定理：任何$\sum\frac{a_n}{n^z}$有一条直线 $L:\mathrm{Re}\,z=C$ 且

① 级数在L右边收敛，左边发散.（L上不确定）.

② 级数在L右内闭一致收敛.

L称为收敛直线.

证. ① 若 $\sum \frac{a_n}{n^z}$ 在 $\mathbb{C}$ 处处发散 则 L: $\mathrm{Re}\,z=+\infty$.

…………收敛 则 L: $\mathrm{Re}\,z=-\infty$.

若 $\sum \frac{a_n}{n^z}$ 存在 $z_1\in\mathbb{C}$ 收敛. $z_1'\in\mathbb{C}$ 发散.

a) 若 $\mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_1'$. 则 取 L: $\mathrm{Re}\,z=z_1$

b) $\mathrm{Re}\,z_1<\mathrm{Re}\,z_1'$ 不可能.

c) $\mathrm{Re}\,z_1>\mathrm{Re}\,z_1'$ 设 $z_1,z_1'\in\mathbb{R}$.

取 $[z_1',z_1]$ 中点 c. 若在 c 处收敛 考虑 $[z_1',c]=[a_2,b_2]$

$[z_1',z_1]=[a_1,b_1]$. 若在 c 处发散 考虑 $[c,z_1]=[a_2,b_2]$

$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$

$|a_k-b_k|=\frac{1}{2}(b_{k-1}-a_{k-1})$. 故 $\lim a_n=\lim b_n=c$.

考虑 L: $\mathrm{Re}\,z=c$. 则 在 L 左发散. L 右收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ $z=1$ 发散 $z=x>1$ 收敛. $\Rightarrow c=1$.

L: $\mathrm{Re}\,z=1$. 记 $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ 在 $\mathrm{Re}\,z>1$ 上全纯

例 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 收敛半径 $R=1$.

和函数 $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ $\forall |z|<1$.

$|z|>1$ $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 发散 而 $\frac{1}{1-z}$ 有定义 (和函数的定义域与级数的收敛域无关).

问题. ① $\zeta(z)$ 的定义域 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

② $\zeta(z)$ 的零点 $z=-2m$ $m=1,2,\cdots$.

猜想: $\zeta(z)$ 的其他零点 在 $\mathrm{Re}\,z=\frac{1}{2}$ 上.

4.2 幂级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

定理: 令 $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (Abel第一定理)

则 ① $|z|<R$ $\sum a_n z^n$ 绝对内闭一致收敛

② $|z|>R$ 发散.

证: ① 若 $R=0$. 则要证 $\sum a_n z^n$ 收敛 $\Leftrightarrow z=0$.

若 $z_0\neq 0$. $\because \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$.

$\exists\, n_k$ $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}>\dfrac{1}{|z_0|}$

$\Rightarrow |a_{n_k}|\cdot|z_0|^{n_k}>1$

$\sum |a_{n_k}||z_0|^{n_k}$ 发散.

② $R=\infty$. $\Rightarrow \sum a_n z^n$ 处处收敛.

$\forall z_0\in C$. $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$

$\exists N.\ \forall n>N.\ \sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{2|z_0|}$

$\Rightarrow |a_n||z_0|^n<\dfrac{1}{2^n}$. $\Rightarrow \sum|a_n||z_0|^n$ 绝对收敛.

③ $0<R<+\infty$ 取 $z_0\neq 0$. $|z_0|<R$ 取 ρ $|z_0|<\rho<R$ $\frac{1}{R}<\frac{1}{\rho}$.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}<\frac{1}{\rho}$ $\exists N>0.\ \forall n\geq N$ $\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{\rho}$

$\Rightarrow |a_n||z_0|^n<\left(\dfrac{|z_0|}{\rho}\right)^n$. $\Rightarrow \sum a_0 z^n$ 在 z_0 处收敛.

(Abel) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处收敛. 则必有 $\forall z.\ |z|<z_0$ 绝对内闭一致收敛 $|a_n z^n|=\left|\underbrace{a_n z_0^n}_{\text{有界}}\left(\dfrac{z^n}{z_0^n}\right)\right|$

定理 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_0 z^n$ 收敛域 $|z|<R$.

则 ① $f(z)$ 在 $|z|<R$ 上全纯

② f 在 $|z|<R$ 上可导 $f(z)=\sum n a_n z^{n-1}$

③ $f'(z)$ 在 $|z|<R$ 上收敛且全纯

证: 令 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ~~在$|z|<R$上全纯~~

要证 $f'=g$. $\lim \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = g(z_0)$ $\forall |z_0|<R$.

$f(z)=S_n(z)+E_n(z)$ $S_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)=\left(\underbrace{\frac{S_N(z_0+h)-S_N(z_0)}{h}-S_N'(z_0)}_{<\varepsilon/3}\right)+\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}+\underbrace{S_N'(z_0)-g(z_0)}_{<\varepsilon/3}$$

$$\left|\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n(z_0+h)^n-a_nz_0^n}{h}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|\left|\frac{(z_0+h)^n-z_0^n}{h}\right|$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| r^{n-1} < \varepsilon/3$$

$$|(z_0+h)^n-z_0^n| = \left|h[(z_0+h)^{n-1}+(z_0+h)^{n-2}z_0+\cdots+z_0^{n-1}]\right|$$
$$\le |h|\,[\underbrace{r^{n-1}+r^{n-1}\cdots+r^{n-1}}_{n个}]$$

设 $|z_0|<r<R$ 且取 $|h|$ 小使 $|z_0+h|<r$.

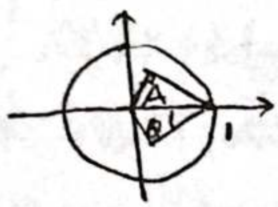
由于 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ 在 $|z|<R$ 绝对收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ 在 $r<R$ 时收敛

(Abel第二定理)

定理: 若 $f(z)=\sum a_n z^n$ 收敛半径 $R=1$. 且在 $z=1$ 处收敛到 S.

则: ① 级数在区域A一致收敛.
(开)

② $\lim\limits_{\substack{z\to1\\ z\in A}} f(z)=S$. 非切向的极限.



(即 $\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to1}} f(z)=\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to1}}\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$)

证 $\sigma_{n,p}=a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}$ $\sigma_{n,0}=0$

$\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N>0\ \forall n\ge N,\ \forall p\ge1\ |\sigma_{n,p}|<\varepsilon$

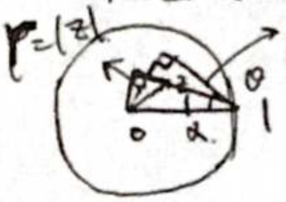
$$a_{n+1}z^{n+1}+\cdots+a_{n+p}z^{n+p}$$
$$=(\sigma_{n,1}-\sigma_{n,0})z^{n+1}+\cdots+(\sigma_{n,p}-\sigma_{n,p-1})z^{n+p}$$
$$=\sigma_{n,1}(z^{n+1}-z^{n+2})+\cdots+\sigma_{n,p-1}(z^{n+p-1}-z^{n+p})+\sigma_{n,p}z^{n+p}$$

$= \sigma_{n,1} z^{n+1}(1-z) + \cdots + \sigma_{n,p-1} z^{n+p-1}(1-z) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$

$= z^{n+1}(1-z)(\sigma_{n,1} + \sigma_{n,2} z + \cdots + \sigma_{n,p-1} z^{p-2}) + \sigma_{n,p} z^{n+p}$

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k z^k\right| \le |z|^{n+1}|1-z|\,\varepsilon(1+|z|+\cdots+|z|^{p-2}) + \varepsilon|z|^{n+p}$
$\le \varepsilon\cdot\frac{|1-z|}{1-|z|} + \varepsilon$

下证当 $z\in A$ $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ 一致有界



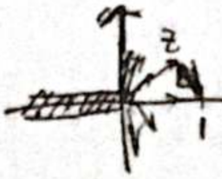
$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{\rho}{1-r} = \frac{\rho(1+r)}{1-r^2} = \frac{\rho(1+r)}{2\rho\cos\alpha-\rho^2} = \frac{1+r}{2\cos\alpha-\rho}$

$(\rho<\cos\alpha) \quad \le \frac{1+r}{\cos\alpha} \le \frac{2}{\cos\alpha} \le \frac{2}{\cos\theta}$

定理 $\sum f_n(z)$ $\boxed{E\text{集合}}$
$f_n(z)$在E上连续. $\sum f_n(z)$在E上一致收敛. 则
$f(z)=\sum f_n(z)$是连续的.

② 取 $E=A\cup\{1\}$ 一致
在A上 $\sum a_n z^n$ 收敛到 $f(z)$
$\forall\varepsilon>0.\ \exists N_1.\ \forall n\ge N_1$ 时 $\forall z\in A$ $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - f(z)\right| < \varepsilon.$
在 $z=1$ 处收敛,
$\forall\varepsilon>0.\ \exists N_2.\ \forall n\ge N_2$ 时 $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - f(z)\right| < \varepsilon\ (z=1)$
$N=\max\{N_1,N_2\}.$ $\sum a_n z^n$ 在E上一致收敛

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 收敛半径为1. $z=1$处发散 但在 $z=e^{i\theta}\ (0<\theta<2\pi)$ 收敛
解. $R=1$. 当$|z|<1$ $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{1-z}$.
$f(0)=0$
$f(z)=f(0)+\int_0^z \frac{1}{1-w}\,dw = -\mathrm{Log}(1-z) = -(\log|1-z| + i\,\mathrm{Arg}(1-z))$
(取 $\log 1=0$ 的分支)



$= -(\log|1-z| + i\arg(1-z))$ 其中 $\arg\in(-\pi,\pi)$.

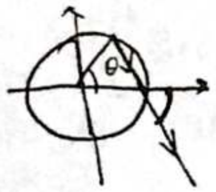
当 $z=e^{i\theta}$ $\theta\in(0,2\pi)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\theta n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$.

($\sum_{k=1}^{n}\cos n\theta$ 有界, $\frac{1}{n}\downarrow 0$)

$\sum a_n b_n$ Dirichlet判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\theta n}}{n}=\lim_{\substack{z=te^{i\theta}\\ t\to 1^-\\ t>0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \text{ 收敛} =\lim_{\substack{z=te^{i\theta}\\ t\to 1^-}}\left(-\log|1-z|-i\arg(1-z)\right)$$

$$=-\log\underbrace{|1-e^{i\theta}|}_{=2\sin\frac{\theta}{2}}-i\underbrace{\arg(1-e^{i\theta})}_{=-\frac{\pi-\theta}{2}}=-\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)+\frac{\pi-\theta}{2}i \quad \theta\in(0,2\pi)$$



4.3 全纯函数的Talyor展开. $0\le|z-z_0|\le R$.

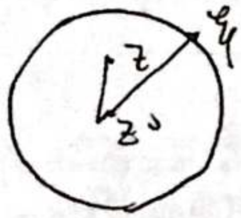
定理. 设f在区域D中全纯 且 $B(z_0,R)\subset D$ 则f在z_0可展开:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \quad \forall z\in B(z_0,R)$$

收敛半径$\ge R$.

证: f在$B(z_0,R)$全纯. $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

当$|z-z_0|<R$时 $\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}$



$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$ $\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$ 内闭一致收敛 (关于ξ).

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi}_{a_n}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

唯一性. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$.

设 $z_0=0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{z^n}{z^k}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{z^n}{z^k}$$

推论：f在z_0处全纯 $\Longleftrightarrow$ f在z_0的某邻域可展成幂级数
(z_0处的Taylor级数)

定义：若f在z_0全纯．$f(z_0)=0$．$f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$．但$f^{(m)}(z_0)\neq 0$．
则称z_0是f的m阶零点，$m=1$．简单零点．

命题　f在$B(z_0,\delta)$中全纯且不恒为0．z_0是f的m阶零点．
$\Longleftrightarrow$ $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$．$g(z)$在$B(z_0,\delta)$内全纯．$g(z_0)\neq 0$．

证．$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$．$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$　$a_k=0$ $k=0,\cdots,m-1$
$a_m\neq 0$．
$=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$
$=a_m(z-z_0)^m)\underbrace{[1+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots]}_{g(z)}$．

定理．若f在区域D中全纯且不恒为零．则f在D中零点是孤立的
(若$z_k\to z_0$．$z_k\in D$．$z_0\in D$．$f(z_k)=0$．则f恒为0)

证：① $f(z)$在z_0全纯．若f在$B(z_0,\delta)$不恒为0．
$f(z)=a_m(z-z_0)^m(1+g(z))$　$g(z)$在$B(z_0,\delta)$全纯且$g(z_0)=0$．
取δ充分小．使$|g(z)|<\varepsilon$．$\forall z\in B(z_0,\delta)$．
故$f(z_k)=a_m(z_k-z_0)^m(1+g(z_k))\neq 0$．(若$z_k\in B(z,\delta)$)矛盾．
?　$\therefore$ f在$B(z_0,\delta)$恒为0．

可参考P152 命题4.3.5
② 下证f在区域D中恒为0
记U为$\{z\in D \mid f(z)=0\}$的内部．
U为开集．非空．
下证：U闭，若$\overset{z_n\to z_0}{z_n\in D}$．要证$z_0\in U$．
$f(z_0)=0\Rightarrow f$在$B(z_0,\delta)$恒为0 $\therefore z_0\in U$．
$\Rightarrow$ U为D既开又闭的子集．由D连通
$U=D$.

推论：若 f_1, f_2 在 D 中全纯，且存在 $\{z_n\} \subset D$，$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in D$

$\forall n \geq 1$，$f_1(z_n) = f_2(z_n)$，则 $f_1(z) = f_2(z)$，$\forall z \in D$。

例 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad x \in R$

$\Downarrow$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \forall z \in C$。

例 $\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 全纯

应用：幂级数展开（复数情况与实数相同）。

$z=0$ 为 $f(z)$ m 阶零点

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots \quad (m \in N)\ a_m \neq 0.$$

$$= a_m z^m (1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots)$$

$$= a_m z^m (1 + h(z)) \quad h \text{ 在 } z=0 \text{ 全纯},\ h(0) = 0.$$

$$f'(z) = m a_m z^{m-1}(1+h) + a_m z^m h'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}\right) dz = m.$$

定理：若 f 在 D 中全纯，$\overset{\text{不恒为}0}{}$ γ 是 D 中简单闭曲线，γ 内部 $\subset D$，f 在 γ 上无零点

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f, \gamma)$（$\gamma$ 内部所有零点阶数之和）

γ 中只有有限个零点，设为 $z_1, z_2, \cdots, z_k$。

考虑 $D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(z_k, \varepsilon)$，$\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在其上全纯

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial B(z_k,\varepsilon)} \frac{f'}{f} dz = \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

设 γ 是闭曲线（不一定简单）$\gamma(t) = \rho(t) e^{i\theta(t)}$ $t \in [a,b]$ $\quad \gamma(a) = \gamma(b)$, $\rho(a) = \rho(b)$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_a^b \frac{1}{\rho(t) e^{i\theta(t)}}\left(\rho'(t) e^{i\theta(t)} + \rho(t)\, i e^{\theta(t)} \theta'(t)\right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{\rho'}{\rho} dt + i\int_a^b \theta'(t) dt$$

$$= \log\rho(b) - \log\rho(a) + i(\theta(b) - \theta(a)) = i(\theta(b) - \theta(a))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = \frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\, z$$ 曲线γ绕原点的圈数

4. 幅角原理和Rouché定理

幅角原理 $N(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$

证：$N(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{df(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w}$

$= \frac{1}{2\pi}\Delta_{f(\gamma)}\mathrm{Arg}\, w = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$ γ: 闭曲线

例：$f(z) = (z-1)(z-2)^3(z-4)$ $\gamma: |z|=3$

$N=4$

$\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z-1) + 3\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z-2) + \Delta_\gamma \mathrm{Arg}(z-4)$

$= 2\pi + 3\cdot 2\pi = 4\cdot 2\pi$

$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z) = N = 4$

(Rouché)

定理：若$f(z)$, $g(z)$在D中全纯，在γ上$|g(z)| \leq |f(z)|$，γ内部$\subset D$ （γ上不含零点）

则f与$f\pm g$在γ内部有相同的零点数

证：$N(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f(z)$

$N(f+g,\gamma) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}(f(z)+g(z)) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg} f + \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g}{f}\right)$

只证 $\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\left(1+\frac{g}{f}\right) = 0 \Longleftrightarrow \Delta_{w(\gamma)}\mathrm{Arg}\, w = 0$ ($w(\gamma)$ 不绕0转)

令 $w = \left(1+\frac{g}{f}\right)(z)$

$\Longleftrightarrow$ $w(\gamma)$内部不含原点

在γ上 $|w-1| = \left|\frac{g}{f}\right| < 1$

推论：若在γ上 $|g| \underset{\triangle}{<} |f| + |f\pm g|$ （γ上无$f\cdot g$的零点） 则f与g在γ内部有相同零点数

（强证，g、f在γ上均无零点）

证：只证 $w = 1+\frac{g}{f}$ $w(\gamma)$内部不含原点

γ上 $|g| < |f| + |f\pm g|$ $\Rightarrow \left|\frac{g}{f}\right| < 1 + \left|1\pm\frac{g}{f}\right|$

$\Rightarrow |w-1| < 1+|w|$ $\Longleftrightarrow$ w不取负实值

给定全纯F. G. D. γ. 要证F.G在γ中有相同的零点数 只要验证 在γ上. 下面条件之一成立.

① $|F-G|<|F|$

② $|F+G|<|F|$

③ $|F-G|<|F|+|G|$.

④ $|F+G|<|F|+|G|$.

例1. 求 $z^4-6z+3=0$ 在圆$|z|<1$与$1<|z|<2$内根个数.

解: ① $|z|=1$上. $G=z^4-6z+3$. $F=-6z$. $|F-G|<|F|$.

$|F-G|=|z^4+3|\le 4<6=|-6z|=|F|$

$G=z^4-6z+3$ 在$|z|<1$内 只有一个零点

② 取 $G=z^4-6z+3$ $F=z^4$.

$|F-G|=|-6z+3|\le 15<16=|z^4|=|F|$

G与F在 $|z|<2$中有相同零点数 $\Rightarrow$ G在$|z|<2$中有4个零点

$\Rightarrow$ G在$1<|z|<2$中有3个零点.

例: n次方程 $a_nz^n+\cdots+a_0=0$ $(a_n\ne 0)$ 在$\mathbb{C}$上恰有n个根

证. 令 $F(z)=a_nz^n$.

$|z|=R$上 $|F-G|=|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|<|a_nz^n|=|F|$.

R足够大

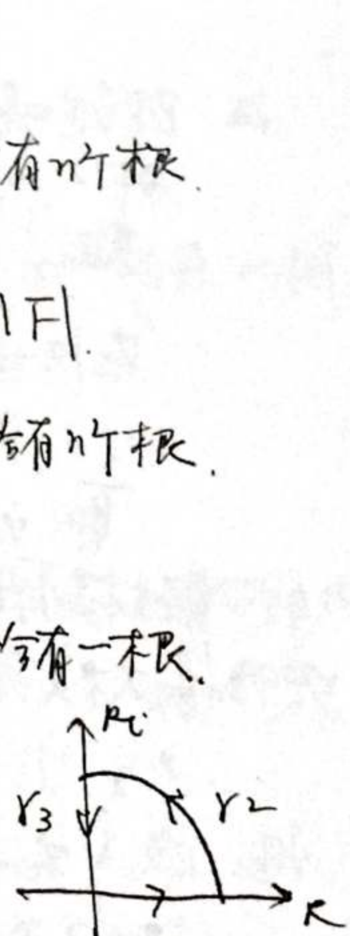
$\left.\begin{array}{l}G(z)\text{在}|z|=R\text{内有}n\text{个零点}\\ G(z)\text{在}|z|=R\text{外无零点}\end{array}\right\}\Rightarrow G$在$\mathbb{C}$上恰有$n$个根.

例 证明 $P(z)=z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限中恰有一根.

证. ① $x\in\mathbb{R}$ $P(x)=(x^2-1)(x+1)^2+11$.

当$|x|\ge 1$ $P(x)\ge 11$.

$|x|<1$ $P(x)\ge 11-4=7$.



当 $z=iy$. $y\in\mathbb{R}$

$P(iy)=y^4+2iy^3-2iy+10=(y^4+10)-2iy(y^2+1)\ne 0$.

② 求第一象限内零点个数

$\Delta_{\gamma_1}\mathrm{Arg}P(z)=0$.

$\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,P(z)=\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\left(z^4\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)\right)$

$=\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\,z^4+\Delta_{\gamma_2}\mathrm{Arg}\left(1+\frac{2z^3-2z+10}{z^4}\right)$

$=2\pi+\varepsilon_R \quad R\to\infty.\ \varepsilon_R\to 0.$

$\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}P(z)=\Delta_{\gamma_3}\mathrm{Arg}\,(y^4+10-2iy(y^2+1))=0-\mathrm{Arg}(R^4+10-2iR(R^2+1))$

$=-\mathrm{Arg}\left((R^4+10)\left(1-2i\frac{R(R^2+1)}{R^4+10}\right)\right)$

$=-\mathrm{Arg}\left(1-2i\frac{R(R^2+1)}{R^4+10}\right)=\varepsilon'_R \quad \lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon'_R=0.$

综上 $\Delta_{\gamma}\mathrm{Arg}\,P(z)=2\pi$

定理（开映射定理）若 $f(z)$ 在区域 Ω 中全纯，非常值，则 f 将开集映为开集

$f=u+iv$.

$f: \underset{(x,y)}{R^2}\longrightarrow \underset{(u(x,y),\,v(x,y))}{R^2}$

证：即证若 $w_0=f(z_0)$ $\exists\varepsilon,\ \forall w_1$ $|w_1-w_0|<\varepsilon$，则存在 z_1，$|z_1-z_0|<\delta$，$f(z_1)=w_1$

即（等证）$\underbrace{f(z)-w_0}_{F}$ 与 $\underbrace{f(z)-w_1}_{G}$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 中零点个数相同。$(\delta\to 0)$

在 $|z-z_0|=\delta$ 上，$|F-G|=|w_0-w_1|$ 令 $\varepsilon_0=\min\limits_{|z-z_0|=\delta}|f(z)-w_0|>0$.（零点孤立）

$|F|=|f(z)-f(z_0)|$

取 w_1 满足 $|w_1-w_0|<\varepsilon_0$ 故 $|z-z_0|=\delta$，$|F-G|<|F|$.

4.5 最大模原理和 Schwarz 引理.

定理（最大模原理）设 f 在区域 Ω 中全纯，非常值.

则 $|\underset{\Delta}{f(z)}|$ 在 Ω 内部不能达到最大值. $\parallel |w_0|$

证. 设 f 在 Ω 中达到最大模. 设 $z_0\in\Omega$，$|f(z_0)|$ 最大.

则 $\exists\,\delta$. $B(z_0,\delta)\subset\Omega$. 且 $f(B(z_0,\delta))$ 是开集.

因为 $w_0\in f(B(z_0,\delta))$ 故 $\exists\,\varepsilon$ 使 $B(w_0,\varepsilon)\subset f(B(z_0,\delta))$

在 $B(w_0,\varepsilon)$ 中存在 w_1 s.t. $|w_1|>|w_0|$. $w_1\in f(B(z_0,\delta))$. 矛盾.

最小模：例 $f(z)=z^2$ 在 $z=0$ 处 $|f(z)|$ 有最小值.

例：f 在 Ω 中全纯 无零点 $\exists p\in\Omega$ $|f(p)|\le|f(z)|$ $\forall z\in\Omega$ 则 f 为常数.

证. $g=\frac{1}{f}$. $\forall z\in\Omega$ $|g(z)|=\frac{1}{|f(z)|}\le\frac{1}{|f(p)|}=|g(p)|\Rightarrow g$ 为常数 f 为常数.

定理 设 $0\in D$. $f(0)=0$. f 在 D 全纯. 若 0 是 f 的 m 重零点. 且不恒为0 则对 $\forall\rho>0$ (ρ 任意)
$\exists\,\delta>0$. 当 $0<|w_0|<\delta$ 时 $f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中有 m 个不同零点 $(m\ge2)$ $\forall w_0$

(例：$f(z)=z^m$. $z=0$, $f(z)=0$ (m 重)
令 $f(z)=\varepsilon$. $z=\varepsilon e^{\frac{1}{m}2k\pi i}$ $k=0,1,2,\cdots,m-1$ m 个.)

证：① 对任意小的 $\rho>0$. $f(z)$ 与 $f'(z)$ 在 $0<|z|<\rho$ 上无零点.

$f(z)=a_mz^m(1+h(z))$ $a_m\ne0$. $h(0)=0$.

$f'(z)=ma_mz^{m-1}(1+h(z))+a_mz^mh'(z)=a_mz^{m-1}(zh'+m(1+h))$

② 要证 $f(z)-w_0$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ 中零点数相同. $0<|w_0|<\delta$.

令 $\delta=\min\limits_{|z|=\rho}|f(z)|>0$.

当 $|z|=\rho$ 时. $|f(z)-(f(z)-w_0)|=|w_0|<\delta\le|f(z)|$.

(取 w_0 $0<|w_0|<\delta$).

故 $f(z)$ 与 $f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中有相同零点. (m 个).

③ $f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中无重根.

由于 $(f(z)-w_0)'$ 在 $0<|z|<\rho$ 中不为0. 故 $f(z)-w_0$ 在 $0<|z|<\rho$ 中无重根. (所有根均为一重根)

由于 $w_0\ne0$. 故 $f(z)-w_0$ 在 $z=0$ 处不为0.

当 $0<|w_0|<\rho$ 时 $f(z)-w_0$ 在 $|z|<\rho$ 中无重根.

开映射定理

推论 若 $f(z_0)=w_0$. 则对任意充分小 ρ $\exists\,\delta$. 使 $B(w_0,\delta)\subset f(B(z_0,\rho))$

推论：若 f 在 Ω 上全纯非常值，$D\in\Omega$.

则 ① 若 D 开. 则 $f(D)$ 开

② 若 D 为区域 则 $f(D)$ 为区域

(单叶、全纯函数)

单叶函数：若 f 在 D 中 对 $z_1 \neq z_2$ $f(z_1) \neq f(z_2)$

$f: D \to G$ 双射

(反函数定理) 若 $w = f(z)$ 在 D 中单叶、全纯，$G = f(D)$

则反函数 $z = g(w)$ 在 G 中单叶全纯，且 $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$

证：① g 在 G 上连续　f 开 $\Rightarrow$ $\forall \rho > 0$ $\exists \delta > 0$ $B(w_0, \delta) \subset f(B(z_0, \rho))$

$\Rightarrow$ $g(B(w_0,\delta)) \subset B(z_0, \rho)$ $\Rightarrow$ g 在 w_0 连续

② g 在 w_0 在 G 上可导

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\frac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\frac{f(g(w))-f(g(w_0))}{g(w)-g(w_0)}} \quad (g\text{ 连续})$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

定理：若 $f(z)$ 在 D 中单叶全纯，则 $f'(z) \neq 0$，$\forall z \in D$

证：若存在 $z_0 \in D$，$f'(z_0) = 0$，则 z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的 $m \geq 2$ 阶零点

若 $w_1 \to f(z_0)$，$f(z) - w_1$ 在 z_0 附近有 m 个不同的零点 $\Rightarrow$ f 不是单叶函数

≥ 2

定理：设 $f(z)$ 在 D 中全纯，$f'(z_0) \neq 0$，则 f 在 z_0 点附近单叶

(即 $\exists \delta > 0$，f 在 (z_0, δ) 中单叶)

证①：$f'(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ z_0 是 $f(z) - f(z_0)$ 的一阶零点

$\Rightarrow$ 当 w_1 靠近 $f(z_0)$，$f(z) - w_1$ 在 z_0 附近只有一个零点

即 $\forall \rho > 0$ (充分小)，$\exists \varepsilon > 0$，$\forall w_1$ $w_1 \in B(w_0, \rho)$，$f(z) - w_1$ 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中只有一个零点

f 连续 $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$，$f(B(z_0, \delta)) \subset B(w_0, \rho)$

则 f 在 $B(z_0, \delta)$ 单叶

证②：设 $z_0 = 0$，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $|z| < R$

$a_1 = f'(0) \neq 0$

$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1} + \cdots$ $(|z| < R)$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \rho^{n-1}$ 收敛，且当 $\rho \to 0$ 时趋于 0

$\forall z_1, z_2.\ |f(z_1)-f(z_2)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_1^n - z_2^n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_1-z_2)(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+\cdots+z_2^{n-1})\right|$

$= |z_1-z_2|\left|a_1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_1^{n-1}+\cdots+z_2^{n-1})\right|$

$\geq |z_1-z_2|\left(|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|(|z_1|^{n-1}+\cdots+|z_2|^{n-1})\right) \quad |z_1|.|z_2|<\rho.$

$\geq |z_1-z_2|\cdot\left(|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}\right)$

设 $0<\rho<\rho_0$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} < \frac{1}{2}|a_1|$.

$|f(z_1)-f(z_2)| \geq \frac{1}{2}|a_1||z_1-z_2|.\quad \forall z_1, z_2 \in B(0,\rho_0)$

(Hurwitz)

定理: 设 ① $f_n(z)$ 在 D 中全纯. 内闭一致收敛到 $f(z)$. $f(z)$ 不恒为 0.

② 设 γ 闭且不经过 f 的零点.

则 $\exists N.\ \forall n\geq N.$ f_n 与 f 在 γ 内的零点个数相同.

证: 在 γ 上 $|f_n(z)-f(z)| < |f(z)|$. 令 $\varepsilon_0 = \min_\gamma |f(z)|$

$(\exists N>0.\ \forall n\geq N)$ $\quad f_n \underset{\gamma}{\rightrightarrows} f$

定理. 若 ① f_n 在 D 中全纯单叶

② f_n 内闭一致收敛到 f. f 非常数.

则 f 在 D 中单叶全纯.

证: ① f 全纯.

② 单叶. 若 $f(z_0)=f(z_1)=w_0$.

取 $\gamma_1: |z-z_0|=\varepsilon$ 时 $f_n(z)=w_0$. $f(z)-w_0$ 在 z 附近, 故 $f_n(z)-w_0$ 在 γ_1 内至少有一个零点

取 $\gamma_2: |z-z_1|=\varepsilon$ 时 - - - - - - - - - - - - - - - - $f_n(z)-w_0$ 在 γ_2 内至少有个零点.

$\Rightarrow f_n(z)$ 不单叶. 矛盾.

最大模

引理: 若 f 在 $|z-a|<R$ 内全纯. 则 $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta.\ (0<r<R)$

证: $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}d(a+re^{i\theta})$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{i\theta})\,re^{i\theta}i}{re^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta.$

证明：设 $M=\sup_{\Omega}|f(z)|<+\infty$. $M>0$.

令 $\Omega_1=\{z\in\Omega \mid |f(z)|=M\}$ 闭

$\Omega_2=\{z\in\Omega \mid |f(z)|<M\}$. 开.

下证 Ω_1 开：设 $a\in\Omega_1$ $|f(a)|=M$.

由于 $a\in\Omega$. $\exists B(a,\delta)\subset\Omega$. 故 $0<r<\delta$ 时 $M=|f(a)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta\right|$
$\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{i\theta})|d\theta\le$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}(M-|f(a+re^{i\theta})|)d\theta\le 0$.

$\Rightarrow |f(z)|=M$. $\forall z\in B(a,\delta)\Rightarrow \Omega_1$ 开.

调和函数也有此性质.

推论：设 Ω $\boxed{有界}$. $f(z)$ 在 Ω 中全纯. 且 $\bar{\Omega}$ 连续. 则

$$|f(z)|\le\max_{\partial\Omega}|f(z)|\ (\forall z\in\Omega).$$

问题：若 Ω 无界？

例：$\Omega=\{-2\pi<\operatorname{Im} z<2\pi\}$.

$f(z)=e^{iz}$

$$\max_{\partial\Omega}|f(z)|=\max_{\partial\Omega}\left|e^{i(x\pm 2\pi i)}\right|=e^{2\pi}.$$

调和 $\Delta u=0$

$u(x,y)$ $|z|<R$ 中调和. $u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(z+re^{i\theta})d\theta$
$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)d\theta$

定理. 设 $u(x,y)$ 在区域 Ω 中调和. 非常值. 则 u 在 Ω 内部不能达到最大值，最小值.

证：$M=\sup_{(x,y)\in\Omega}u(x,y)$ 若 $M=+\infty$ 显之.

设 $M<+\infty$. 若 $\exists a\in\Omega$ $u(a)=M$. 取 r. $B(a,r)\subset B(a,R)\subset\Omega$.

$M=u(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(a+re^{i\theta})d\theta$

$\Rightarrow 0\ge\int_0^{2\pi}(u(a+re^{i\theta})-M)\,d\theta$

$\Rightarrow u(a+re^{i\theta})=M$ $(\forall\ 0<r<R,\ 0\le\theta<2\pi)$

Ω_1, Ω_2. Ω_1 为 Ω 即开又闭的子集. 若 $\Omega_1\ne\phi$. 则 $\Omega_1=\Omega$.

例 f 在 $0<r_1<|z|<r_2$ 内全纯，在边界连续，令 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$

则 $\log M(r) \le \dfrac{\log r_2-\log r}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_1)+\dfrac{\log r-\log r_1}{\log r_2-\log r_1}\log M(r_2)$

证. $g(z)=\alpha\log|z|+\log|f(z)|$ $\quad \alpha\in R$

设 $f(z)$ 在 $\Omega=\{z \mid r_1<|z|<r_2\}$ 的零点为 $z_1 \cdots z_n$. $\quad f(z)\in H(\Omega)$

$\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n}B(z_k,\varepsilon)$

$g(z)$ 在 Ω_ε 上有定义且为调和. 由极值原理. $g(z)$ 在 $\partial\Omega_\varepsilon$ 上达最大

$\forall z\in\Omega$. $g(z)\le\max\{\max\limits_{|z|=r_1}g(z),\max\limits_{|z|=r_2}g(z)\}$.

$\forall\, r_1<r<r_2$.

$\alpha\log r+\log M(r) \le \max\{\alpha\log r_1+\log M(r_1),\ \alpha\log r_2+\log M(r_2)\}$.

取 α s.t. $\max\limits_{|z|=r_1}g(z)=\max\limits_{|z|=r_2}g(z) \Rightarrow \alpha=\dfrac{\log M(r_2)-\log M(r_1)}{\log r_1-\log r_2}$

$\Rightarrow \log M(r)\le\alpha\log r_1+\log M(r_1)-\alpha\log r$.

$\qquad = \log M(r_1)+\dfrac{\log r_1-\log r}{\log r_1-\log r_2}(\log M(r_2)-\log M(r_1))$

Schwarz 引理. 设 $f: D\to D$ 全纯. $D=\{|z|<1\}$. $f(0)=0$. $|f(z)|\le 1$.

则 ① $|f(z)|\le|z| \quad \forall z\in D$

② 若对 $z_0\neq 0$ $|f(z_0)|=|z_0|$. 则 $f(z)=e^{i\theta}z \ (\theta\in R)$

③ $|f'(0)|\le 1$ 等号成立则 $f(z)=e^{i\theta}z \ (\theta\in R)$

证: f 在 D 中全纯 $f(0)=0$. $\quad f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots \quad z\in D$

令 $\varphi(z)=a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots = \begin{cases}\dfrac{f(z)}{z} & 0<|z|<1 \\ a_1=f'(0) & z=0\end{cases}$

$\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯 收敛半径.

$\forall r\in(0,1)$ 令 $\Omega_r=\{|z|<r\}$. $\quad \max\limits_{\Omega_r}|\varphi(z)|\le\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)|$

$\forall\, 0<|z|<r \quad \left|\dfrac{f(z)}{z}\right|\le\max\limits_{|z|=r}\dfrac{|f(z)|}{r}\le\max\limits_{|z|=r}\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r}$.

令 $r\to 1 \quad \left|\dfrac{f(z)}{z}\right|\le 1 \quad |f(z)|\le|z|$.

由条件 $f(0)=0$ $\therefore \forall z\in D$ $\quad |f(z)|\le|z|$.

若对 $z_0\neq 0$ $\quad |f(z_0)|=z_0$. 若 $|\varphi(z_0)|=1$ 故 $\varphi(z)$ 在 z_0 处达最大.

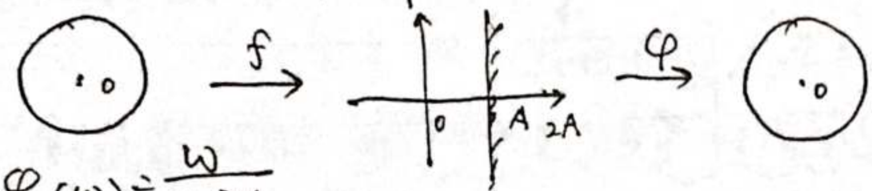
$\Rightarrow \varphi(z)$ 在 D 中为常数 $e^{i\theta}$ $(\theta\in R)$.

若 $|f'(0)|=1$. 则 $|\varphi(z)|$ 在 $z=0$ 处达到最大

例: 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 全纯 $f(0)=0$. $\mathrm{Re} f(z)\le A$, $A>0$.

证: $|f(z)|\le \dfrac{2A|z|}{1-|z|}$ $(|z|<1)$.

证:



$\varphi(w)=\dfrac{w}{w-2A}$

$\varphi(w)=\dfrac{w}{w-2A}$

$\varphi\circ f: D\to D$ $\quad |\varphi\circ f(z)|\le|z|$

$0\to 0.$ $\quad \left|\dfrac{f(z)}{f(z)-2A}\right|\le|z|.$

令 $t=\dfrac{f(z)}{f(z)-2A}$ $\quad |t|\le|z|<1.$

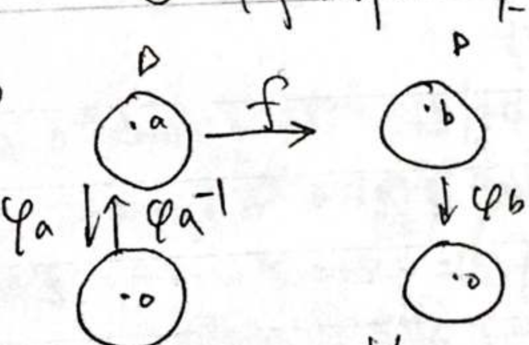
$f=tf-2At$ $\quad f=\dfrac{-2At}{1-t}$ $\quad |f|=\dfrac{2A|t|}{|1-t|}\le\dfrac{2A|t|}{1-|t|}\le\dfrac{2A|z|}{1-|z|}$.

定理: 设 $f: D\to D$ 全纯. $D=\{|z|<1\}$.

则 ① $\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_2)}f(z_1)}\right|\le\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\bar z_2 z_1}\right|$ $\forall z_1,z_2\in D$.

② $|f'(z)|\le\dfrac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$ $\forall z\in D$ 若 $\exists z_0\in B(0,1)$ s.t. 等号成立. 则 $f\in \mathrm{Aut}(B(0,1))$

证 ①



$\varphi_b\circ f\circ\varphi_a^{-1}: D\to D$ $(0\to 0)$.

☆ $\boxed{\varphi_a(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar a z} \quad \varphi_b(z)=\dfrac{z-b}{1-\bar b z}}$

Schwarz $\forall u\in D$ $|\varphi_b\circ f\circ\varphi_a^{-1}(u)|\le|u|$

令 $z=\varphi_a^{-1}(u)$ $\quad u=\varphi_a(z)$.

$|\varphi_b\circ f(z)|\le|\varphi_a(z)|$. $\quad$ 令 $a=\cancel{f(z_2)}\,z_2$, $b=f(a)=f(z_2)$.

$\left|\dfrac{f(z)-b}{1-\bar b f(z)}\right|\le\left|\dfrac{z-a}{1-\bar a z}\right|$

② $|(\varphi_b\circ f\circ\varphi_a^{-1})'(0)|\le 1.$

$|\varphi_b'(b)|\cdot|f'(a)|\cdot\dfrac{1}{|\varphi_a'(0)|}\le 1$

$|f'(a)|\le\dfrac{|\varphi_a'(0)|}{|\varphi_b'(b)|}=\dfrac{1-|b|^2}{1-|a|^2}$

例: 设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 全纯, $|z|=R$ 上连续. 设 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$, $A(r)=\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re} f(z)$, 则 $\forall\, r\in(0,R)$ $M(r)\le \frac{2r}{R-r}A(R)+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|$ ☆

证: ① 若 $f(z)$ 为常数 C.

处理 $\mathrm{Re} f(z)$: ① $\max|f(z)| \frown \mathrm{Re} f(z)$ ② $\mathrm{Re} f(z)$ 调和

左 $=|C|$

右 $=\frac{2r}{R-r}\mathrm{Re}\,C+\frac{R+r}{R-r}|C|$

右 − 左 $=\frac{2r}{R-r}\mathrm{Re}\,C+\frac{2r}{R-r}|C|=\frac{2r}{R-r}(\mathrm{Re}\,C+|C|)\ge 0$.

② 若 f 不为常值, $f(0)=0$

$F(z)=f(Rz)$ $\quad(|z|<1)$

$F(0)=0$. $\mathrm{Re}F(z)=\mathrm{Re} f(Rz)$

若 $\forall\, r\in(0,R)$ $\mathrm{Re} f(z)$ 在 $|z|\le r$ 上调和.

$\max\limits_{|z|\le r}\mathrm{Re} f(z)\le\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re} f(z)=A(r)$

故 $\forall z\in D$ $\mathrm{Re}F(z)=\mathrm{Re} f(Rz)\le A(R)$

故 $\forall z\in D$ $|F(z)|\le\frac{2A(R)}{1-|z|}|z| \Leftrightarrow |f(u)|\le\frac{2A(R)}{1-\frac{|u|}{R}}\cdot\frac{|u|}{R}=\frac{2A(R)}{R-|u|}\cdot|u|$.

令 $u=Rz$ $\quad z=\frac{1}{R}u$. $\quad\Rightarrow M(r)=\max\limits_{|u|=r}|f(u)|\le\frac{2A(R)}{R-r}r$.

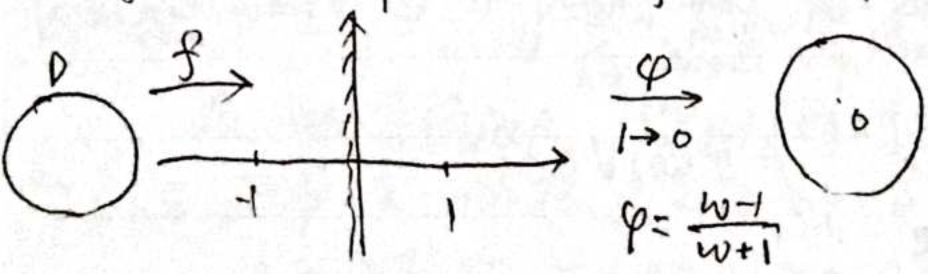
③ 若 $f(0)\ne 0$. 令 $g(z)=f(z)-f(0)$, $g(0)=0$. g 在 D 上全纯.

用② $\max\limits_{|z|=r}|g(z)|\le\frac{2r}{R-r}\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}\,g(z)$ $\quad\mathrm{Re}\,g=\mathrm{Re} f-\mathrm{Re} f(0)\le\mathrm{Re} f+|f(0)|$

$\le\frac{2r}{R-r}\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re} f(z)+\frac{2r}{R-r}|f(0)|$

$\max\limits_{|z|=r}|g(z)|\ge\max\limits_{|z|=r}|f(z)|-|f(0)|$

例: 设 f 在 D 中全纯 ($=\{|z|<1\}$), $\mathrm{Re} f(z)\ge 0$. $f(0)=1$. 则 $\frac{1-|z|}{1+|z|}\le|f(z)|\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$.



应用 Schwarz

$\varphi\circ f: D\to D$

$0\to 0$

$|\varphi\circ f(z)|\le|z|$

$\left|\frac{f(z)-1}{f(z)+1}\right|\le|z|$.

令 $t=\frac{f(z)-1}{f(z)+1} \Rightarrow |t|\le|z|$

$f-1=tf+t \Rightarrow f=\frac{t+1}{1-t}$ $\quad |f|=\left|\frac{t+1}{1-t}\right|\le\frac{1+|t|}{1-|t|}\le\frac{1+|z|}{1-|z|}$

同时 $|f|=\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\ge\frac{1-|t|}{1+|t|}\ge\frac{1-|z|}{1+|z|}$

定义：(全纯自同构) 若 $f:\Omega\to\Omega$ 单叶全纯 且 $f(\Omega)=\Omega$

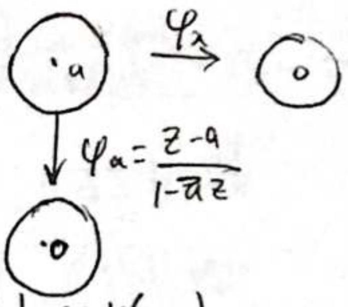
则称 f 为 Ω 的全纯自同构. 所有 Ω 的全纯自同构集合设为 $Aut(\Omega)$

$Aut(\Omega)$ 关于复合构成一个群. $\forall f,g\in Aut(\Omega)$. $\left.\begin{array}{l} f^{-1}\in Aut(\Omega) \quad f\circ g\in Aut(\Omega) \\ I(\Omega)\in Aut(\Omega)\end{array}\right\}$ 群

定理 设 $D=\{|z|<1\}$. 则 $Aut(D)=\left\{e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \,\middle|\, |\alpha|<1.\ \theta\in R\right\}$.

证: $\forall f\in Aut(D)$ $\quad f(a)=0$.

考虑 $g=f\circ\varphi_a^{-1}$ $\quad D\to D$, $0\to 0$



故 $|g'(0)|\le 1$.

因为 $g\in Aut(\Omega)$ $\quad g^{-1}: D\to D$, $0\to 0$ $\quad$ 故 $\Big|\underbrace{(g^{-1})'(0)}_{\frac{1}{g'(0)}}\Big|\le 1$ $\quad |g'(0)|\ge 1$

$\Rightarrow |g'(0)|=1$ $\therefore \exists\theta\in R$ $\quad g(u)=e^{i\theta}u$ $\quad \forall u\in D$.

令 $z=\varphi_a^{-1}(u)$

$\varphi_a(z)=u$ $\quad$ 故 $f(z)=e^{i\theta}\varphi_a(z)=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

无界区域的最大模原理.

例: 设 $F(z)$ 在 $G=\{0<Im z<1\}$ 上全纯有界 且在 $\bar{G}$ 连续. 若 $|F(z)|\le 1$ $(\forall z\in\partial G)$ 则 $\forall z\in G$. $|F(z)|\le 1$

构造 $F_\varepsilon(z)\in H(G)$ 满足

① $|F_\varepsilon(z)|\le 1$ $z\in\partial G$ (可放宽). ② $\lim\limits_{\substack{z\in G\\|z|\to\infty}}|F_\varepsilon(z)|=0$ ③ $\forall z\in G$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(z)=F(z)$

证① 令 $F_\varepsilon(z)=F(z)e^{-\varepsilon z^2}\in H(G)\cup C(\bar{G})$ $(\varepsilon>0)$

若 $z\in R$. $z=x\in R$.

$|F_\varepsilon(z)|=|F(x)|\cdot e^{-\varepsilon x^2}\le|F(x)|\le 1$.

若 $Im z=1$. $z=x+i$. $x\in R$.

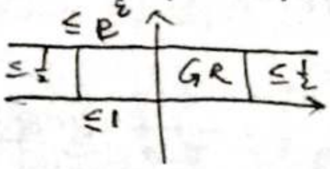
$$|F_\varepsilon(z)| = |F(z)||e^{-\varepsilon(x+i)^2}| = |F(x+i)|e^{-\varepsilon(x^2-1)} \le e^{-\varepsilon(x^2-1)} \le \begin{cases} e^{\varepsilon} & 若|x|<1 \\ 1 & 若|x|\ge 1 \end{cases} \le e^{\varepsilon}$$

若 $0<\operatorname{Im} z<1$ $z=x+iy$ 设 $M=\sup\limits_G|f(z)|$. $(0<y<1)$

$$|F_\varepsilon(z)| = |F(z)||e^{-\varepsilon(x+iy)^2}| = |F(z)|e^{-(x^2-y^2)\varepsilon} \le Me^{\varepsilon(y^2-x^2)} \to 0\ (x\to\infty)$$

故 $\exists R$ (使 $Me^{(1-R^2)\varepsilon}=\frac{1}{2}$) s.t. $|F_\varepsilon(z)|\le\frac{1}{2}$ $\forall |\operatorname{Re} z|\ge R$.

故 $\forall z\in G$. $|F_\varepsilon(z)| \le \max\{\frac{1}{2}, \max\limits_{G_R}|F_\varepsilon(z)|\} \le \max\{\frac{1}{2}, e^{\varepsilon}\} \le e^{\varepsilon}$.



令 $\varepsilon\to 0$ 有 $|F(z)| \le \lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\varepsilon} = 1$ $\forall z\in G$.

证②: 令 $F_\varepsilon(z) = F(z)\dfrac{1}{1-i\varepsilon z}$ 在G上全纯 (分母零点 $z=\frac{1}{i\varepsilon}=-\frac{1}{\varepsilon}i\notin G$).

若 $z=x+iy$ $|F_\varepsilon(z)| = |F(z)|\cdot\dfrac{1}{|1-i\varepsilon(x+iy)|} = |F(z)|\dfrac{1}{|1-i\varepsilon x+\varepsilon y|} = |F(z)|\dfrac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon y)^2+(\varepsilon x)^2}}$

$\le |F(z)| \le 1$ (若 $y=0$ 或 1).

若 $0<y<1$. 则 $|F_\varepsilon(z)| \le \dfrac{M}{\sqrt{(1+\varepsilon y)^2+(\varepsilon x)^2}} \le \dfrac{M}{\varepsilon|x|}$

取 $R=\frac{2M}{\varepsilon}$ $|F_\varepsilon(z)|\le\frac{1}{2}$ 若 $|x|\ge R$.

故 $\forall z\in G$ $|F_\varepsilon(z)|\le 1$. 令 $\varepsilon\to 0$. $|f(z)|\le 1$ $(\forall z\in G)$

全纯函数的Laurent展开

定义: Laurent级数 $\underbrace{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(a)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{(b)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{(c)}$

若(b)(c)都收敛,则称(a)收敛

若(b)(c)有一个发散. 则称(a)发散.

求(a)的收敛域?

① (b)收敛半径为R. 则(b)在 $|z-z_0|<R$ 上收敛.

② 令 $w=\frac{1}{z-z_0}$ (c)为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ 幂级数

设收敛半径为 ρ. 故(c)在 $|w|<\rho$ 上收敛. ⇒在|……

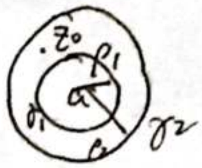
③ 综上. 若 $\frac{1}{\rho}<R$. (a)在 $\frac{1}{\rho}<|z-z_0|<R$ 上内闭一致收敛

且和函数在 $\frac{1}{\rho}<|z-z_0|<R$ 上全纯

定理. 若 $f(z)$ 在 $\Omega=\{r<|z-a|<R\}$ 上全纯 $(0\le r<R\le+\infty)$　且展式唯一.

则 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$. 其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$.　$\forall\rho\in(r,R)$

证: ① C_n 与 ρ 的选取无关



② 展开 取 ρ_1,ρ_2 使 $R>\rho_2\ \big(>|z_0-a|>\big)\ \rho_1>r$

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\underbrace{\int_{\gamma_2}}_{\text{正向}}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi.$$

当 $\xi\in\gamma_2=\{|z-a|=\rho_2\}$. $\frac{1}{\xi-z_0}$ 在 a 点展开

$$\frac{1}{\xi-z_0}=\frac{1}{(\xi-a)-(z_0-a)}=\frac{1}{\xi-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z_0-a}{\xi-a}}\right)=\frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0-a}{\xi-a}\right)^n$$

当 $\xi\in\gamma_1=\{|z-a|=\rho_1\}$.　$(\rho_1<|z_0-a|<\rho_2)$

$$\frac{1}{\xi-z_0}=\frac{1}{(\xi-a)-(z_0-a)}=-\frac{1}{z_0-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^n}{(z_0-a)^n}$$

$$f(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)(z_0-a)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n}}d\xi\right)(z_0-a)^{-n-1}$$

令 $-n-1=m$

$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{m+1}}d\xi\right)(z_0-a)^m$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-m+1}}d\xi}_{C_{-m}}(z_0-a)^{-m}.$$

唯一性 若 $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}C_n'(z-a)^n$.

积分. $\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}C_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^{n-m-1}dz=2\pi i C_m$
$=2\pi i C_m'$

定义: 若 f 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上全纯 z_0 处无定义. 则称 z_0 为孤立奇点.

奇点
- 孤立
  - 可去　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限
  - 极点　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$
  - 本性奇点　$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在.
- 非孤立

性质. 若 z_0 是 f 的孤立奇点. 则下面等价.

可去奇点: ① $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限

② $f(z)$ 在 z_0 某空心邻域中有界. (减弱 $|f(z)|\le\frac{M}{|z-z_0|^\alpha}$ $(\alpha\in(0,1))$).

③ $f(z)$ 的 Laurent 展式中负次幂项系数均为0.

满足上述之一. 称奇点为可去奇点. 补充定义后 f 在 z_0 全纯
$f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$.

证: ①⇒② 显然.

②⇒③ 设 $n>0$. ($n\geq 1$). $\forall \rho>0$

$$|c_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho} f(\xi)(\xi-z_0)^{n-1}d\xi\right|\leq\frac{1}{2\pi}M\rho^{n-1}2\pi\rho=M\rho^n\to 0\ (\rho\to 0)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n+1}}d\xi.$$

③⇒① 显然.

定理 设 z_0 是 f 的孤立奇点.

极点

① $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$

② $\exists\, m\in N$. $f(z)=\frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^m}$ $\tilde{h}(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 上全纯且恒不为0. $0\leq|z-z_0|<\delta$

③ $f(z)$ 展式中只有有限多负次幂项

④ $\exists\, m\in N$. $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ 存在且不为0.

⑤ $\exists\, m\in N$. $g=\frac{1}{f}$ 以 z_0 为 m 阶零点. 此时称 z_0 为 m 阶极点.

证: ①⇒② 设 f 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 上恒不为0. ($\exists\delta$)

$$g(z)=\begin{cases}\frac{1}{f(z)} & 0<|z-z_0|<\delta.\\ 0 & z=z_0\end{cases}$$

⇒ $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 上全纯 且 z_0 为零点.

⇒ $g(z)=(z-z_0)^m h(z)$ $h(z)$ 全纯 且 $h(z_0)\neq 0$.

⇒ $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{h(z)}=\tilde{h}(z)$
全纯 可展开为幂级数

定理: 设 z_0 为 f 的孤立奇点. 则下列等价.

本性奇点

① f 展式中有无穷多负幂次项

② 对任何复数 $A\in\mathbb{C}$. 或 $A=\infty$. 在 z_0 的任何空心邻域中
可找到互异的 $z_n\to z_0$. $\lim_{n\to\infty}z_n=A$.

③ 不存在有限或无限的 $\lim_{z\to z_0}f(z)$.

证: ①⇒② 若 $A=\infty$ 因为 z_0 不是可去奇点, 故 $f(z)$ 在 z_0 附近无界.
故在任何 $0<|z-z_0|<\delta$ 中可找到 $z_n\to z_0$ 使 $f(z)\to\infty$.

若$A\in\mathbb{C}$. 若z_0的任何邻域$0<|z|<\delta$中都存在$f(z)-A$的零点, 则②成立.

否则$\exists\ 0<|z_0-z|<\delta_0$. s.t. $f(z)-A$恒不为0.

$g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ 在$0<|z_0-z|<\delta_0$中全纯.

若$g(z)$在$0<|z-z_0|<\delta_0$中有界. 则z_0是g的可去奇点.

$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=\lambda\in\mathbb{C}$. 故$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\begin{cases} A+\frac{1}{\lambda} & \lambda\neq 0 \\ \infty & \lambda=0 \end{cases}\Rightarrow$ 矛盾.

故$g(z)$在$0<|z-z_0|<\delta_0$中无界. 故$\exists$ 点列$z_n\to z_0$ 使$\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)=\infty$.

故$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$

无穷远奇点.

定义: ① $z=\infty$是$f(z)$的可去奇点/极点/本性奇点.

$\Longleftrightarrow$ $w=\frac{1}{z}=0$是$f(\frac{1}{w})$的可去/极点/本性奇点.

② 若$\exists R$, $f(z)$在$|z|>R$上全纯. 则称$z=\infty$为f的孤立奇点.

例: ∞不是$\dfrac{1}{\sin z}$的孤立奇点

$f(z)=z$. 令$w=\frac{1}{z}$. $f(z)=\frac{1}{w}$. 故$z=\infty$是$f(z)=z$的一阶极点

一般 $g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_dz^d$ $d\geq 1$. $a_0\neq 0$.

$z=\frac{1}{w}$ $g(z)=a_0+\dfrac{a_1}{w}+\cdots+\dfrac{a_d}{w^d}$ $w=0$是d阶极点

$\Longleftrightarrow$ $z=\infty$是$f(z)$的d阶极点

定理: 设f为整函数.

① ∞是f的可去奇点$\Longleftrightarrow$ f为常数.

② ∞是f的极点$\Longleftrightarrow$ $f(z)$非零多项式.

③ ∞是f的本性奇点$\Longleftrightarrow$ $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$中无穷多$c_n\neq 0$.

证: ① $\Leftarrow$ ✓

$\Rightarrow$ 令$w=\frac{1}{z}$. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{w^n}=g(w)$

0是$g(w)$的可去奇点. $a_n=0$ $n\geq 1$. $\therefore f(z)=a_0$.

②. ③ 由定义显然

定理: ① $Aut(\mathbb{C})=\{az+b \mid a\neq 0\}$

~~② $Aut(\overline{\mathbb{C}})=\{$分式线性变换$\}$~~

证: ① 设 $f\in Aut(\mathbb{C})$ f是整函数.

若 ∞可去. 则 f为常数 不可能

若 ∞本性奇点. $\exists\ z_n\to\infty$. $f(z_n)\to A\ (\in\mathbb{C})$.

$f^{-1}\in Aut(\mathbb{C})\Rightarrow f^{-1}$在$A$连续. $z_n=f^{-1}(f(z_n))\to \underline{f^{-1}(A)}<\infty$ 矛盾.

故∞为f的极点. f为非零多项式

f单叶 $\Rightarrow d=1$.

② 设 $f\in Aut(\overline{\mathbb{C}})$.

a) 若 $f(\infty)=\infty$ 则 f是$\mathbb{C}$上的自同构 $\Rightarrow f=a+bz.\ (b\neq 0)$

b) 若 $f(\infty)=a\in\mathbb{C}$. 则 $\overline{\mathbb{C}}\xrightarrow{f}\overline{\mathbb{C}}\xrightarrow{\varphi=\frac{1}{z-a}}\overline{\mathbb{C}}$

$\infty\longrightarrow a\longrightarrow\infty$.

故 $\varphi\circ f\in Aut(\overline{\mathbb{C}}):\infty\to\infty.\ \Rightarrow \varphi\circ f=c+dz.\ (c\neq 0)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{f(z)-a}=cz+d\Rightarrow f(z)=a+\frac{1}{cz+d}$$

定义: 亚纯函数. 若f在$\Omega(\subset\overline{\mathbb{C}})$上除了极点外处处全纯. 则称$f$为$\Omega$上亚纯函数. ($f$在$\Omega$上无本性奇点. 无非孤立奇点)

认为可去奇点是全纯的点.

若有无限个极点则其极限点一定在$\partial\Omega$上.

$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ $z_k=\frac{1}{k\pi}$. 极点. 在$\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$为亚纯函数. 但在$\mathbb{C}$上不是亚纯函数

0是非孤立奇点

定理. 若f在$\overline{\mathbb{C}}$上亚纯. 则f为有理函数.

证明. f只有有限个极点.

设极点为$\{z_1,z_2,\cdots z_n\}\cup\{\infty\}$, $z_i\in\mathbb{C}$.

$f(z)$在z_0处 $f(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n}_{\text{主要部分}\varphi}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n}_{\text{全纯部分}\varphi}$. ($z_0$处Laurent展)

设f在z_j处 主要部分

$$\psi_j(z)=\frac{C_{-1}^{(j)}}{z-z_j}+\cdots+\frac{C_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^{m_j}}.\ m_j\geq 1.\ C_{-m_j}^{(j)}\neq 0.$$

$f(z)$在∞展式 $= \sum_{-\infty}^{-1} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

令 $\psi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_m z^m$

$F(z) = f(z) - \psi(z) - \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z) \quad \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$\Rightarrow F(z)$在 $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, \cdots, z_n, \infty\}$ 上全纯

在 z_j 点 $\lim_{z \to z_j} F(z) = \lim_{z \to z_j} \left(f(z) - \psi_j(z) - \psi(z) - \sum_{i \neq j} \psi_i(z) \right)$

$= \varphi_j(z_j) - \psi(z_j) - \sum_{i \neq j} \psi_i(z_j) \in \mathbb{C}$

在 ∞ 点 $\lim_{z \to \infty} F(z) = \lim_{z \to \infty} (f(z) - \psi(z))$

$= \lim_{z \to \infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n \right) = 0.$

$\Rightarrow F(z)$在 $\mathbb{C}$ 上全纯且 $\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$. $\therefore F(z)$在$\mathbb{C}$上为常数 0.

故 $f(z) = \psi(z) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(z)$ 为有理函数

定理. 若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上亚纯, 单射 则 $f(z)$ 为分式线性变换.

证: 设 $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$. P_n. Q_m 无公共根.

○ 若 $n > m$. $f: \infty \to \infty$ f 单. Q_m 在$\mathbb{C}$上无零点

$\therefore Q_m$为常数. $f(z) = c \cdot P_n(z)$ 为多项式. f 单 $\Rightarrow P_n(z)$只有1个零点 z_0

$f(z) = c(z - z_0)^n$ $\forall b \neq 0$. $f(z) = b$ 有n个不同的根.

故 $n = 1$. $\therefore f(z)$为线性函数.

○ 若 $n < m$ $f: \infty \to 0$. 故 P_n 在$\mathbb{C}$上无零点. P_n为常数.

$f(z) = \dfrac{c'}{Q_m(z)}$. f 单 $Q_m(z) = \frac{1}{c}$ 只有一根

$\Rightarrow m = 1$. $\Rightarrow f(z) = \dfrac{a}{cz + d}$.

○ 若 $n = m$. $f(z) = 0$ 有一根 z_0 故 $P_n(z) = 0$ 只有一根 z_0.

$P_n(z) = a(z - z_0)^n$ $a \neq 0$. $f(z) = \infty$ 只有一根 z_1, $Q_m(z) = b(z - z_1)^n$ $z_0 \neq z_1$.

$f(z) = c\left(\dfrac{z - z_0}{z - z_1} \right)^n = 1$ 只有一个根 $\Rightarrow n = 1$.

$\therefore f(z)$为分式线性变换.

$f(0)=0$

幅角原理：f 在 $z=0$ 处 $f=a_m z^m + a_{m+1}z^{m+1} \cdots\cdots$ $m\geq 1$

$\frac{f'}{f} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1+h(z)}$ h 在 $z=0$ 处全纯. $h(0)=0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon} \frac{f'}{f}\,dz = m.$$

设 $f(z)$ 在 $z=0$ 处为极点或零点.

$f(z)=a_m z^m + a_{m+1}z^{m+1} + \cdots$ $m\in\mathbb{Z}$.

若 $m\geq 1$. 则 0 为 m 重零点 $\Rightarrow \mathrm{ord}_z = m$

若 $m\leq -1$ 则 0 为 $(-m)$ 阶极点. $\Rightarrow \mathrm{ord}_z = m = -(-m)$

定义 $\mathrm{ord}_0 f = m$, 则 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \mathrm{ord}_0 f$

定理：若 f 在 Ω 内亚纯. $\gamma\subset\Omega$. 简单闭. f 在 γ 上无零点.

则 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\text{在}\gamma\text{内}} \mathrm{ord}_z f = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$.

所有零点重数和　所有极点阶数和

例：设 f 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯. 在 $0.\infty$ 本性奇点 设 $A(r) = \max_{|z|=r} \mathrm{Re} f(z)$

则 ① $\lim_{r\to\infty} A(r)$

② $\lim_{r\to 0} \frac{\log A(r)}{\log\frac{1}{r}} = \infty$.

证：Step 1. 若①成立则②成立.

令 $w=\frac{1}{z}$ $g(w)=f(\frac{1}{w})=f(z)$ $g(w)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全纯. 0 与 ∞ 本性.

$\lim_{r\to\infty}\frac{\log A(r)}{\log r}=\infty$. $A_g(r) = \max_{|w|=r} \mathrm{Re}\, g(w) = \max_{|w|=r} \mathrm{Re} f(\frac{1}{w})$

$= \max_{|z|=\frac{1}{r}} \mathrm{Re} f(z) = A_f(\frac{1}{r})$.

$\lim_{r\to\infty}\frac{\log A(\frac{1}{r})}{\log r} \to \infty$. 令 $\frac{1}{r}=\rho\to 0$ ② 成立.

Step 2 设 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯 ∞ 本性. 令 $M(r) = \max_{z=|r|} |f(z)|$

当 $0<r<+\infty$. $M(r) \leq \frac{2r}{R-r}A(R) + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|$

由最大模原理 $M(r)$ 是 r 的增函数 $\lim\limits_{r\to\infty} M(r)=\infty$ (∞ 是本性).

取 $r=\frac{R}{2}$ $M(\frac{R}{2})\le 2A(R)+3|f(0)|$

$$A(R)\ge \frac{1}{2}(M(\frac{R}{2})-3|f(0)|)>0.$$

Step 3 设 $M_n(r)=\max\limits_{|z|=r}|f^{(n)}(z)|$ 由于 ∞ 本性

故 ∞ 是 $f^{(n)}$ 本性. $\lim\limits_{r\to\infty} M_n(r)\to\infty$.

下证存在常数 $C(n)$ 使 $M_n(\frac{R}{2})\le \frac{C(n)}{R^n}(A(R)+|f(0)|)$

设 $|z_0|=R/2$. $C_\delta: |\xi-z_0|=\frac{R}{2}-\delta$

$$|f^n(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_\delta}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi\right|\le C(n)\frac{2\pi(\frac{R}{2}-\delta)}{(\frac{R}{2}-\delta)^{n+1}}\max_{C_\delta}|f(\xi)|$$

$$\le\frac{C(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}\max_{C_\delta}|f(\xi)|\le\frac{C(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}\max_{|z|=R-\delta}|f(z)|.$$

$$\therefore |f^n(z_0)|\le\frac{C(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}M(R-\delta)\le\frac{C_n}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}\left(\frac{2(R-\delta)}{R-(R-\delta)}A(R)+\frac{R+R-\delta}{R-(R-\delta)}|f(0)|\right)$$

$$\le\frac{C(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n}\left[\frac{2(R-\delta)}{\delta}A(R)+\frac{2R-\delta}{\delta}|f(0)|\right]$$

$$\le\underbrace{\frac{2RC(n)}{(\frac{R}{2}-\delta)^n\delta}[A(R)+|f(0)|]}\quad 令\ \delta=\frac{R}{4}$$

$$\frac{2RC(n)}{(\frac{R}{4})^n\cdot\frac{R}{4}}[A(R)+|f(0)|]=\frac{C_n}{R^n}[A(R)+|f(0)|].$$

故 $M_n(\frac{R}{2})\le\frac{C(n)}{R^n}[A(R)+|f(0)|]$.

$$A(R)\ge\frac{R^n}{C(n)}[M_n(\frac{R}{2})-|f(0)|]\ge C(n)R^nM_n(\frac{R}{2}).$$

$$\frac{\log A(R)}{\log R}\ge\frac{\log(C(n)R^nM_n(\frac{R}{2}))}{\log R}\ge n.$$

$\varphi(\infty)\ge -C$.

$\ge \mathrm{Re}\,\psi-C$

$\mathrm{Re}f=\mathrm{Re}\varphi+\mathrm{Re}\psi$

~~$A_f(R)\le A_\varphi(R)+A_\psi(R)$~~

$A_f(R)\ge A_\psi(R)-C$

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 全纯. 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 有 Laurent 展开

$$f(z)=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1}a_kz^k}_{\text{主要部分 }\varphi(z)\text{ 在}\infty\text{有界}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k}_{\mathbb{C}\text{上全纯 }\psi(z)}$$

在0附近有界

$$\frac{\log A_f(R)}{\log R}\ge\frac{\log(A_\psi(R)-C)}{\log R}\ge\frac{\log(\frac{1}{2}A_\psi(R))}{\log R}\xrightarrow[R\to\infty]{}\infty.$$

要证: $\forall n>0.\ \exists r_n\ \forall r\geq r_n\ \ M(r)\geq r^n$.

证: 令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{z^n}$ $g(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯. ∞本性.

取定 $\varepsilon>0$. 令 $M=\max\limits_{|z|=\varepsilon}|g(z)|$

$\exists\ r_n>\varepsilon$ s.t.: $\max\limits_{|z|=r_n}|g(z)|\geq M+1$. ($\infty$本性. $A=\infty$. $\exists\{z_k\}\to\infty$ $f(z_k)\to A$).

对$\forall\ r\geq r_n$. 在 $\varepsilon<|z|<r$ 上 $|g(z)|$ 的最大值只能在 $|z|=r$ 上达到

且 $\max\limits_{|z|=r}|g(z)|\geq\max\limits_{|z|=r_n}|g(z)|\geq M+1$.

$=\max\limits_{|z|=r}\dfrac{|f(z)|}{|z|^n}$

$M(r)=$

$\Rightarrow \max\limits_{|z|=r}|f(z)|\geq(M+1)r^n.\ \geq r^n$

留数　　a是f的孤立奇点

定义: f在 $0<|z-a|<r$ 全纯　$\mathrm{Res}(f,a)=(-)\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\substack{|z-a|=\delta\\|z|=\delta}} f(z)\,dz$.　$0<\delta<r$

f在 $|z|>r$ 全纯　$\mathrm{Res}(f,\infty)$　　$\delta>r$

计算:

① 若f在 $0<|z-a|<r$ 上 $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 一致收敛

$\displaystyle\int_{|z-a|=\rho}f(z)\,dz=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\int_{|z-a|=\rho}(z-a)^n\,dz=2\pi i\,c_{-1}$ 交换顺序

$\Rightarrow\ \mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}$

如果求Laurent展式

② 若a是可去奇点 $\mathrm{Res}(f,a)=0$.

③ 若a是一阶极点. $\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}=\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.

④ 若 $f=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ $\varphi(a)\neq0$. $\psi(a)=0$. $\psi'(a)\neq0$

$\mathrm{Res}(f,a)=\lim\limits_{z\to a}(z-a)\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$

(φ. ψ在a处全纯)

⑤若 a 是 m 阶极点.

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m} \quad m\geq 1.\ g(a)\neq 0.$$

$$Res(f,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}dz$$

$$=\frac{(m-1)!}{2\pi i}\int_{|z-a|\rho}\frac{g(z)}{(z-a)^m}dz\cdot\frac{1}{(m-1)!}=g^{(m-1)}(a)\cdot\frac{1}{(m-1)!}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}\Big|_{z=a}.$$

例: $f(z)=\sin\frac{1}{z}$. $Res(f,0)=1$

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!\,z^3}+\cdots\cdots$$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4-1} \quad Res(f,1)=\frac{\sin z}{(z^4-1)'}\Big|_{z=1}=\frac{\sin 1}{4}$$

定理(留数定理) 设 f 在 $D\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 全纯 在 $\bar{D}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 连续

则 $$\int_{\partial D}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k)$$

证: $$\int_{\partial D}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\int_{|z-z_k|=\rho}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k)$$

设 f 在 $|z|>R$ 全纯, 定义

$$Res(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho\,(逆)}f(z)dz \quad \rho>R.$$

设 f 在 ∞ 的展式 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n z^n \quad |z|>R.$

$$Res(f,a)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n z^n dz=-c_{-1}$$

例 $f(z)=\frac{1}{1-z} \quad Res(f,\infty)=-1$

$$f(z)=\frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\underbrace{\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\cdots\right)}_{展开在|z|>R上收敛}$$

定理 设 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯则 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上所有留数之和为0.

证: $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k).$$

$\|$

$-\mathrm{Res}(f,\infty).$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)+\mathrm{Res}(f,\infty)=0 \Rightarrow \sum_{z\in\overline{\mathbb{C}}}\mathrm{Res}(f,z)=0.$$

例: $I=\int_{|z|=2}\frac{z^5}{1+z^6}dz$ $\quad z^{k}_{6}=-1$

$$I=2\pi i\sum_{k=0}^{6}\mathrm{Res}(f,z_k)=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty)=2\pi i$$

$$\frac{z^5}{1+z^6}=\frac{z^5}{z^6(1+\frac{1}{z^6})}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\cdots\right) \quad c_{-1}=1$$

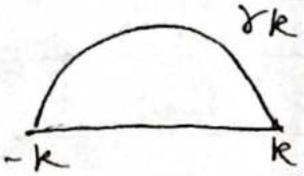
实积分计算

① $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

定理: 设 $f(z)$ 在 $\{\mathrm{Im}\,z>0\}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 全纯

$\{\mathrm{Im}\,z\geq 0\}\setminus\{a_1,\cdots,a_n\}$ 连续. 若 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$ 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$$



证: $$\int_{-R}^{R} f(x)dx+\int_{\gamma_R} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right|=\left|\int_{\gamma_R} zf(z)\cdot\frac{1}{z}dz\right|\leq\max_{\gamma_R}|zf(z)|\int_{\gamma_R}\frac{1}{|z|}d|z|$$

$$=\max_{\gamma_R}|zf(z)|\frac{1}{R}\cdot 2\pi R\to 0 \quad (z\to\infty)$$

推论: 若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ P. Q无因子. Q无实根, $\deg Q-\deg P\geq 2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right)$$ a_k 为 $Q(z)$ 在上半平面的零点.

例: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}, i\right) = 2\pi i \frac{1}{n!}\left[(z-i)^{n+1}\frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}\right]^{(n)}\Big|_{z=i}$

$= \frac{2\pi i}{n!}\left(\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right)^{(n)}\Big|_{z=i} = 2\pi \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$.

定理: 设 $f(z)$ 在 $\{\operatorname{Im} z>0\}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ 全纯, 在 $\{\operatorname{Im} z\geq 0\}\setminus\{a_1,\dots,a_n\}$ 连续. 若 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$, 则对 $\forall \alpha>0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(e^{i\alpha z}f(z), a_k).$$

证. $\int_{-R}^{R} e^{i\alpha x}f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z}f(z)\,dz = 2\pi i\sum_k \operatorname{Res}(e^{i\alpha z}f(z), a_k)$

$\boxed{\text{引理 若 } \lim_{z\to\infty}f(z)=0.\ \alpha>0 \text{ 则 } \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz=0.}$

证. 令 $M_R=\max_{\gamma_R}|f(z)|$

$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi e^{i\alpha R(\cos\theta+i\sin\theta)} f(ze^{i\theta})Rie^{i\theta}\,d\theta\right|$

$\leq RM_R\int_0^\pi e^{-\alpha R\sin\theta}\,d\theta$

$=2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta}\,d\theta$

$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$.

$\leq 2RM_R\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\theta}\,d\theta$

$=2RM_R \frac{1}{\frac{2}{\pi}\alpha R}\left(1-e^{-\frac{2}{\pi}\alpha R\frac{\pi}{2}}\right)$

$=\frac{M_R\pi}{\alpha}(1-e^{-\alpha R})\to 0$ (当 $R\to\infty$). 例: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ $f(x)$在$\mathbb{R}$上有奇点

例: $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$

$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ $\quad f(z)=\frac{\sin z}{z}$ $\quad \int_{-R}^R f(x)\,dx+\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=0$?

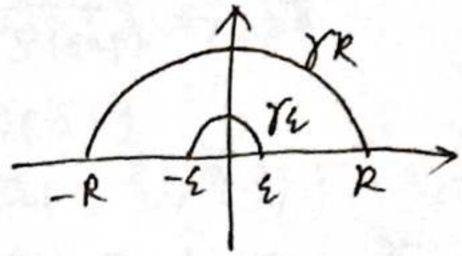
$\int_{-R}^{-\rho}+\int_{\gamma_\rho}+\int_\rho^R+\underbrace{\int_{\gamma_R}}_{R\to\infty\ =0}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=0.$

下求 $\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$.

$z=\varepsilon e^{i\theta}$ $\quad \theta: 0\to\pi$.

$$\int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta = i\int_0^\pi e^{i\varepsilon(\cos\theta+i\sin\theta)}\, d\theta \to \pi i \ (\varepsilon\to 0).$$

例. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}}_{f(x)}dx$$

令 $F(z)=\frac{3e^{iz}-e^{i3z}}{4z^3}$ $\quad \mathrm{Im}F(z)=f(x)$

由引理 $\int_{\gamma_R}F(z)dz=0$. $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}F(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon^+}F(z)dz$.

求 $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{3e^{iz}-e^{3zi}}{4z^3}dz$

$e^z=1+z+\frac12z^2+\boxed{\frac16z^3+\cdots}$

$e^{zi}=1+zi-\frac12z^2+\boxed{\frac16(iz)^3}$

$e^{3zi}=1+3zi-\frac12 9z^2+\boxed{\cdots}$

$3e^{iz}-e^{3zi}=2+3z^2+\boxed{\cdots}$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{2+3z^2}{4z^3}dz$$

设 $k\in\mathbb{Z}$ $\quad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon}z^kdz=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^\pi \varepsilon^k e^{ik\theta}\varepsilon e^{i\theta}\, i\,d\theta$

$$=\varepsilon^{k+1}i\int_0^\pi e^{i(k+1)\theta}d\theta = i\varepsilon^{k+1}\frac{1}{i(k+1)}e^{i(k+1)\theta}\Big|_0^\pi$$

$$=i\varepsilon^{k+1}\frac{1}{i(k+1)}\left[e^{i(k+1)\pi}-1\right]=\begin{cases}0 & k为奇 \\ -\frac{2\varepsilon^{k+1}}{k+1} & k为偶 \end{cases}\ k\neq-1. \qquad \pi i \quad k=-1$$

④ $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ $\quad R(x,y)$ 有理函数

令 $z=e^{i\theta}$ $\quad \cos\theta=\frac12(z+\frac1z)$ $\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac1z)$

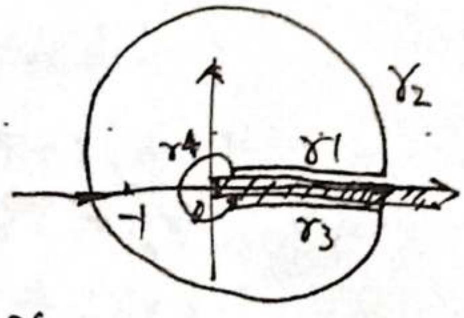
$$I=\int_{|z|=1}R\left(\frac12(z+\frac1z),\ \frac1{2i}(z-\frac1z)\right)\frac{dz}{iz}$$

$dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$.

例. $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+\cos\theta+\sin\theta}=\int_{|z|=1}\frac{1}{3+\frac12(z+\frac1z)+\frac1{2i}(z-\frac1z)}\frac{dz}{iz}=\pi$.

⑤ 多值函数相关积分

例: $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}\ (0<\alpha<1)$



$F(z)=\frac{1}{(1+z)z^\alpha}$ 设 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$

$\int_\gamma F(z)dz=2\pi i\,Res(F,-1)$

取 $z=x_上>0$ 时 $z^\alpha=x^\alpha$

$z^\alpha\Big|_{\substack{z=x_下\\x>0}}=|z|^\alpha e^{i\alpha \operatorname{Arg}z|_{z=x_下}}=|x|^\alpha e^{i\alpha(0+\Delta_c \operatorname{Arg}z)}=x^\alpha e^{2\pi\alpha i}$

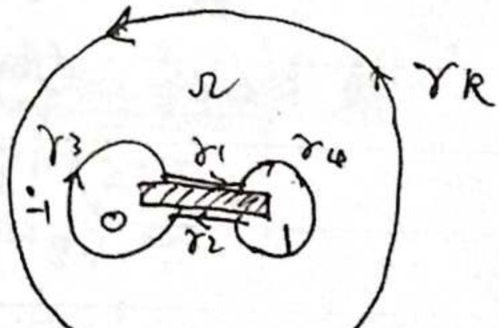
$\int_{\gamma_1}F(z)dz=\int_\varepsilon^R\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$ $\varepsilon\to0, R\to\infty$

$\left|\int_{\gamma_2}F(z)dz\right|\le\int_{|z|=R}\frac{1}{|1+z||z|^\alpha}|dz|\sim\frac{1}{R^{1+\alpha}}2\pi R\sim\frac{1}{R^\alpha}\to0\ (R\to\infty)$

$\left|\int_{\gamma_4}F(z)dz\right|\le\int_{|z|=\varepsilon}\frac{1}{|1+z||z|^\alpha}|dz|\sim\frac{1}{\varepsilon^\alpha}2\pi\varepsilon\sim\varepsilon^{1-\alpha}\to0\ (\varepsilon\to0).$

$\int_{\gamma_3}F(z)dz=\int_R^\varepsilon\frac{1}{(1+x)\underbrace{x^\alpha e^{2\pi\alpha i}}_{x_下=(x\cdot e^{2\pi i})^\alpha}}dx\to-e^{-2\pi\alpha i}\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x)x^\alpha}$

$Res(F,-1)=\lim_{z\to-1}\frac{1}{z^\alpha}=e^{-\pi\alpha i}$



例 $\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx$

解. 令 $F(z)=\frac{\sqrt[3]{z^2(1-z)}}{(1+z)^3}$ 支点 $z=0,1.\ \infty$不是支点.

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4\cup\gamma_R$

$\int_\gamma F(z)dz=2\pi i\,Res(F,-1)$

① $\int_{\gamma_1}=\int_0^1\frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx$

② $\left|\int_{\gamma_3}F(z)dz\right|\le\int_{|z|=\varepsilon}\frac{|z|^{\frac23}|1-z|^{\frac13}}{|1+z|^3}|dz|\sim\varepsilon^{\frac23}2\pi\varepsilon\to0$

③ $\left|\int_{\gamma_4}F(z)dz\right|\le\int_{|z-1|=\varepsilon}\frac{|z|^{\frac23}|1-z|^{\frac13}}{|1+z|^3}|dz|\sim\varepsilon^{\frac13}2\pi\varepsilon\sim\varepsilon^{\frac43}\to0.$

④ $\left|\int_{\gamma_R}F(z)dz\right|\le\int_{|z|=R}\frac{|z|^{\frac23}|1-z|^{\frac13}}{|1+z|^3}|dz|\sim\frac{R^{\frac23}R^{\frac13}}{R^3}\cdot2\pi R\sim\frac1R\to0\ (R\to\infty)$

⑤ $\int_{\gamma_2} F(z)dz \to \int_1^0 F(z)\Big|_{x_T} dz = -e^{\frac{4}{3}\pi i}\int_0^1 F(x)dx$

$F(z)\Big|_{z=x_T} = |F(x)|e^{i\operatorname{Arg}F(x_T)} = F(x)e^{i\Delta_c \operatorname{Arg} F}$

$\Delta_c \operatorname{Arg} F = \frac{2}{3}\Delta_c \operatorname{Arg} z + \frac{1}{3}\Delta_c \operatorname{Arg}(z-1) = \frac{2}{3}\cdot 2\pi + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{4}{3}\pi$

$(1-e^{\frac{4}{3}\pi i})\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}dx = 2\pi i \operatorname{Res}(F,-1) = 2\pi i\left(\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right)^{(2)}\cdot\frac{1}{2!}\Big|_{z=-1}$

$= \pi i\left(\sqrt[3]{z^2(1-z)}\right)''\Big|_{z=-1}$

$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log z + 2k\pi i)}$

$\boxed{(z^\alpha)' = e^{\alpha(\log z+2k\pi i)}\alpha(\log z + 2k\pi i)' = \frac{\alpha}{z}z^\alpha}$ $\alpha z^{\alpha-1}$

设 $R(z) = z^2(1-z)$

$G(z) = \sqrt[3]{R(z)}$

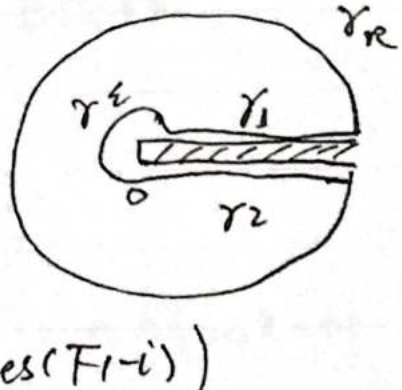
$G(-1) = |R(z)|^{\frac{1}{3}}\cdot e^{i\frac{1}{3}\operatorname{Arg}R(z)|_{z=-1}} = 2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$(G(z))' = \left(\sqrt[3]{R(z)}\right)' = (R(z))'\frac{1}{3R(z)}R(z)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}R(z)^{-\frac{2}{3}}(R(z))' = \frac{1}{3}\frac{G(z)}{R(z)}(R(z))'$

$(G(z))'' = -\frac{1}{3}\frac{G(z)}{(R(z))^2}(R(z)')^2 + \frac{1}{3}(R(z))^{-1}\left(G'(z)(R(z))' + G(z)(R(z))''\right)\Big|$

$= -\frac{1}{18}2^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi i}$

例 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$



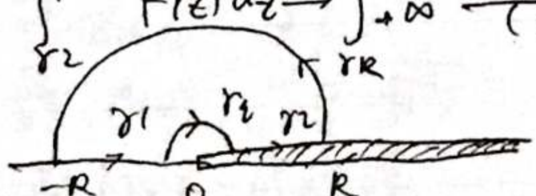
解: $F(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{(1+z^2)^2}$

$\int_\gamma F(z)dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(F,i) + \operatorname{Res}(F,-i))$

$\int_{\gamma_1} F(z)dz \to \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log}x}{(1+x^2)^2}dx$

$\int_{\gamma_2} F(z)dz \to \int_{+\infty}^0 \frac{\operatorname{Log}x + 2\pi i}{(1+x^2)^2}dx = -\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log}x + 2\pi i}{(1+x^2)^2}dx$

方法一:
(换区域)



$\int_{\gamma_2} F(z) \to \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log}x}{(1+x^2)^2}dx$

$\int_{\gamma_1} F(z) \to \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Log}(-x)+\pi i}{(1+x^2)^2}dx \xrightarrow{y=-x} -\int_{+\infty}^0 \frac{\operatorname{Log}y + \pi i}{(1+y^2)^2}dy = \int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log}x+\pi}{(1+x^2)^2}$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} F(z)\right| \le \int_{|z|=\varepsilon} \frac{|\mathrm{Log}\,z|}{|1+z^2|^2}|dz| \le \frac{(|\log\varepsilon|+2\pi)\cdot 2\pi\varepsilon}{C} \to 0.$$

$$\left|\int_{\gamma_R} F(z)\right| \le \int_{|z|=R} \frac{|\mathrm{Log}\,z|}{|1+z^2|^2}|dz| \le \frac{(\log R+2\pi)}{R^4}\cdot 2\pi R \to 0.$$

方法二（換函數） 取 $F(z)=\dfrac{(\mathrm{Log}\,z)^2}{(1+z^2)^2}$

$$\int_{\gamma_1} F(z) \to \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_{\gamma_2} F(z) \to -\int_0^\infty \frac{(\log x+2\pi i)^2}{(1+x^2)^2} = -\int_0^\infty \frac{(\log x)^2+4\pi i\log x-4\pi^2}{(1+x^2)^2}$$

解析开拓

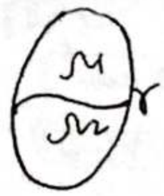
设区域 $\Omega\subset\Omega'$ f是Ω上全纯函数. F在Ω'全纯且 $F(z)|_{\Omega}=f(z)$.

则称$F(z)$是 $f(z)$在Ω'上的全纯开拓.

例 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\Omega=\{|z|<1\}$.

$F(z)=\frac{1}{1-z}$ $\Omega'=\mathbb{C}\setminus\{1\}$. 则 $F(z)|_{\Omega}=f(z)$ F是f在Ω'全纯

存在性 (Painleve原理) 设区域Ω被曲线γ分为Ω_1、Ω_2 f在Ω上连续且f在Ω_1、Ω_2中全纯. 则f在Ω上全纯.



证明: 只要对任何内部属于Ω的简单闭曲线C证.

① $C\subset\gamma\cup\Omega_1$ 或 $C\subset\gamma\cup\Omega_2$. 则$\Omega_1$或$\Omega_2$中的柯西定理知 $\int_C f(z)dz=0$.

②  C若如图所示

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz=0.$$

定理 (Schwarz对称) 设Ω关于实轴对称. 若f满足

① f 在 $\Omega^+:=\Omega\cap\{\operatorname{Im} z>0\}$ 上全纯

② f在 $\overline{\Omega^+}$ 上连续

③ f在 $\{\operatorname{Im} z=0\}\cap\Omega$ 取实值.

则 $F(z)=\begin{cases} f(z) & \forall z\in\overline{\Omega^+} \\ \overline{f(\bar z)} & \forall z\in\Omega^-=\Omega\cap\{\operatorname{Im} z<0\}\end{cases}$

是f在Ω上的全纯开拓.

证: ① 若 $z_0\in\Omega^-$. 下证 $F(z)$在z_0处全纯.

若$z\in\Omega^-$. $\bar z\in\Omega^+$.

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}F(z)=\frac{\partial}{\partial\bar z}\overline{f(\bar z)}=\overline{\frac{\partial f(\bar z)}{\partial z}}=0$$

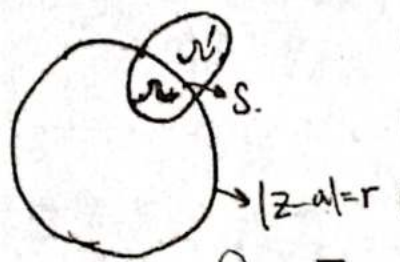
② F在$\{\operatorname{Im} z=0\}$连续

设$z\in\Omega^-$. $x_0\in I:=\Omega\cap\{\operatorname{Im} z=0\}$.

$$\lim_{z\to x_0}=\lim_{z\to x_0}\overline{f(\bar z)}=\lim_{\substack{w\to x_0\\ w\in\Omega^+}}\overline{f(w)}=\overline{f(x_0)}=F(x_0).$$

$\boxed{(z^*-a)\overline{(z-a)}=r^2}$

推广：定理：设① Ω 与 Ω' 关于圆 $|z-a|=r$ 对称.



② f 在 Ω 中全纯，在 $\Omega\cup S$ 上连续.

③ $f(S)$ 为一段圆弧 Γ

④ Γ 的圆心 $b\notin f(\Omega)$，则

$f(z)$ 可以全纯开拓到 $\Omega\cup S\cup\Omega'$（甚至可以双全纯开拓，要求①②单叶）.

设 $z\in\Omega'$ 则 $z^*=a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\in\Omega$. 定义

$F(z)=\left(f(z^*)\right)^*$ 关于 Γ 所在的圆 (b,R)

z^*：关于 $|z-a|=r$

$$= b+\frac{R^2}{\overline{f(z^*)}-\bar b} = b+\frac{R^2}{\overline{f\left(a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\right)}-\bar b} \quad (\forall z\in\Omega').$$

若 $z\in\Omega\cup S$. 定义 $F(z)=f(z)$.

下证：① F 在 Ω' 上全纯.

② F 在 $\Omega\cup S\cup S'$ 连续.

证① 若 $z\in\Omega'$.

$$\frac{\partial F(z)}{\partial\bar z}=\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{R^2}{\overline{f(z^*)}-\bar b}\right)=-\frac{R^2}{\left(\overline{f(z^*)}-\bar b\right)^2}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\overline{f(z^*)}-\bar b\right)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\overline{f(z^*)}=\overline{\frac{\partial}{\partial z}f(z^*)}=\overline{\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z^*}{\partial z}}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}z^*=\frac{\partial}{\partial z}\left(a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\right)=0.$$

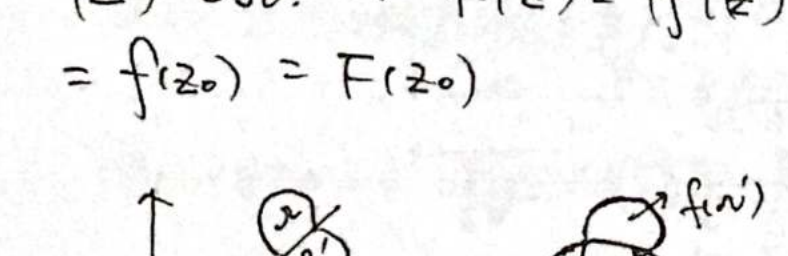
② 设 $z_0\in S$ $z'\in\Omega'$ $z'\to z_0$. 要证 $F(z')\to F(z_0)$

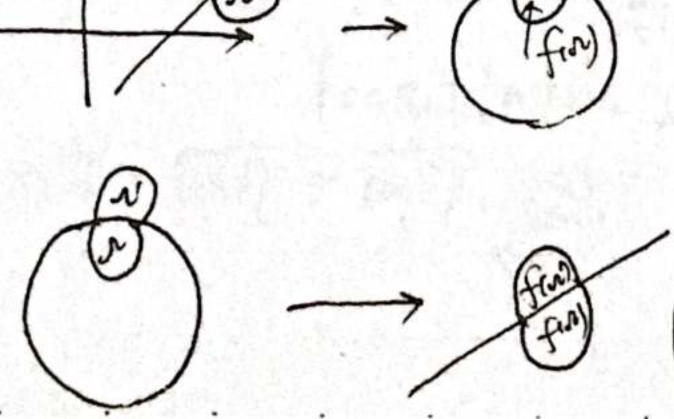
因为 $z'\to z_0 \Rightarrow (z')^*=a+\frac{r^2}{\bar z-\bar a}\to a+\frac{r^2}{\bar z_0-\bar a}=z_0\in S$.

$(z')^*\in\Omega$. $\therefore$ $F(z')=\left(f((z')^*)\right)^*=b+\frac{R^2}{\overline{f(z'^*)}-\bar b}\to b+\frac{R^2}{\underbrace{\overline{f(z_0)}}_{\in\Gamma}-\bar b}$

$=f(z_0)=F(z_0)$

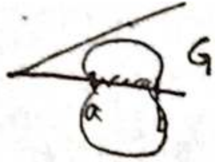
推广：





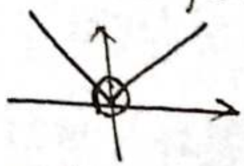
（此时④条件可省略.
直线的圆心在∞）

P117.7.



说明: Painleve原理对光滑函数不成立.

例:



幂级数的全纯开拓.

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 收敛半径为R. $D=\{|z|<R\}$

与 是否收敛 无明显联系

① 正则点 若 $\xi_0\in\partial D$. 若∃ $B_\delta(\xi_0)$ 及全纯 $g(z)$. 使 $f(z)=g(z)\big|_{D\cap B_\delta(\xi_0)}$

② 奇异点. 若 $\xi_0\in\partial D$ 不是正则点则为奇异点

定理 在幂级数收敛圆周上至少有一个奇异点.

定义: 设 f 在 D_1 中全纯. g 在 D_2 中全纯 且 $D_1\cap D_2\neq\phi$

$g|_{D_1\cap D_2}=f|_{D_1\cap D_2}$ 则记 $(f,D_1)\sim(g,D_2)$

(f 与 g 互为全纯开拓)

证明: $C_R:=\{|z|=R\}$ 每点都正则. 则存在有限个点 $\{\xi_i\}\subset C_R$.

使 $C_R\subset\bigcup_{i=1}^{m} B(\xi_i,\delta_i)$ $\delta_i>0$.

全纯函数 $f_i(z)$ 定义在 $B(\xi_i,\delta_i)$ 上. 使 $(f,B(0,R))\sim(f_i,B(\xi_i,\delta_i))$

若 $B(\xi_i,\delta_i)\cap B(\xi_j,\delta_j)\neq\phi$. 则 $(f_i,B(\xi_i,\delta_i))\sim(f_j,B(\xi_j,\delta_j))$

定义 $F(z)=\begin{cases} f(z) & \forall z\in B(0,R) \\ f_i(z) & \forall z\in B(\xi_i,\delta_i)\end{cases}$

故 $\exists\,\varepsilon>0$ s.t: $B(0,R+\varepsilon)\subset B(0,R)\cup\bigcup_{i=1}^{m} B(\xi_m,\delta_m)$.

问题：如何求幂级数在收敛圆周上的奇异点？

① $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$ 则 z_0 是奇异点.

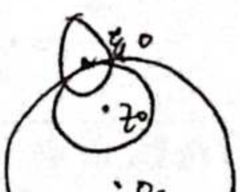
② 若 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|\ne+\infty$，将 f 在 $\underbrace{z_0}_{\forall z_0\in\Omega.\ 0\text{与}z_0\text{连线上}}$ 展开 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

(1) 收敛半径为 ρ. 若 $\rho>R-|z_0|$ 则 f 在 ζ_0 处可解析开拓.

(2) 若 $\rho=R-|z_0|$ 则 ζ_0 是 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的奇异点.

因为 $\sum\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0|=\rho$ 上至少有一个奇异点，即为 ζ_0.

若 ζ_0 为 $\sum a_nz^n$ 的正则点 则 ζ_0 也为 $\sum\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 的正则点.



③ $f(z)$ 与 $f'(z)$ 有相同的正则或奇异点.

④ $f(z)$ 在 $|z|=R$ 上收敛/发散 与 正则/奇异 无关

例：① $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ $z=-1$ 发散，但正则

② $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ $z=1$ 收敛 且正则

③ $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ 在 $z=1$ 发散且奇异

④ $f(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n(n-1)}$，$z=1$ 收敛，在 $z=1$ 处奇异.

$f''(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}z^{n-2}$

例：单位圆 $|z|<1$ 上 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{2^n}$ 在 $|z|=1$ 上每点都奇异. $\partial B(0,1)$ 为 f 的自然边

证：① $z=1$ 只要证 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\in\mathbb{R}}}f(x)=+\infty$.

② $f(z)=z^2+z^4+z^8+\cdots+z^{2^n}+\cdots$
$=z^2+f(z^2)$.

$f(z^2)$ 在 $z^2=1$ 处奇异. $f(z^2)$ 在 $z=-1$ 处奇异. $f(z)$ 在 $z=\pm1$ 处奇异

③ $f(z)=z^2+z^4+f(z^4)\Rightarrow z^4=1$ 处奇异

同样 $\forall n\in N$. $z^{2^n}=1$ 的根均奇异.

$\Rightarrow$ 若 z_0 正则 则在 z_0 附近都正则. 与奇异点稠密矛盾

$B(z_0,r)$ 全正则　$\forall\zeta\in B(z_0,r)\cap\partial B(0,1)$ 正则

($\exists n_0, \forall n \geq n_0$)

例：设 $f(z)=\sum a_n z^n$ 收敛半径为 R $(0<R<\infty)$，$\underline{a_n \geq 0}$，则 $z=R$ 奇异.

证：若 $z=R$ 正则，则 f 在 $\frac{R}{2}$ 展开.

$$f(z)=\sum \frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!}\left(z-\frac{R}{2}\right)^n \quad \frac{1}{\rho}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{f^{(n)}(\frac{R}{2})}{n!}}$$

$$f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)=\sum_{m\geq n} m(m-1)\cdots(m-n+1)\,a_m\left(\frac{R}{2}\right)^{m-n}\geq 0.$$

$$f(z) \text{ 在 } R \text{ 正则} \Rightarrow \rho>\frac{R}{2}.$$

考虑 $z=Re^{i\theta}$ $\quad \left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2}Re^{i\theta}\right)\right| \leq \sum_{m\geq n} m(m-1)\cdots(m-n+1)\,a_m\left(\frac{1}{2}R\right)^{m-n}$

$$= f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\rho'}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\frac{1}{2}Re^{i\theta})|}{n!}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(\frac{1}{2}R)|}{n!}}=\frac{1}{\rho}.$$

$\rho'>\rho>\frac{R}{2}$. $\partial B(0,R)$ 上任一点都正则，矛盾.

黎曼映照定理：设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 单连通，则 Ω 与 ① 全纯同构（$|z|<1$）

对任何 $z_0 \in \Omega$，存在唯一的共形映射 $F: \Omega \to D$ 使 $F(z_0)=0$，$F'(z_0)>0$

思路：① 考虑 $\mathcal{F} = \{f \text{ 全纯} \mid f: \Omega \to D \mid f(z_0)=0,\ f \text{ 单叶}\}$，非空，一致有界

② 存在 $\mathcal{F}$ 中元素 f 使 $|f'(z_0)|$ 达到最大。

f 为 $\Omega \to D$ 的同构

定义：

回忆

Montel 定理：设 $\{f_n(z)\}$ 在 Ω 中全纯且在 Ω 中内闭一致有界，则存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 Ω 中 $\underset{\text{内闭}}{\underline{\text{一致收敛}}}$。

证明：① 设 K 是 Ω 中任一紧集 $\{f_n\}$ 在 K 一致有界，下证 $\{f_n\}$ 在 K 上等度连续。

$$|f_n(z_1)-f_n(z_2)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z_1}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z_2}dw\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f_n(w)\frac{dw}{(w-z_1)(w-z_2)}\right| \cdot |z_1-z_2| \le \underbrace{\frac{1}{2\pi}M\frac{L(\gamma)}{r^2}}_{\text{与 } f_n \text{ 无关}}|z_1-z_2|$$

设 $K \subset \Omega$，$d(K, \partial\Omega) > 3r > 0$。

$\forall z \in K$，$B_{3r}(z) \subset \Omega$。

设 $z_1, z_2 \in K$ 且 $|z_1-z_2|<r$，则 $z_2 \in B_r(z_1)$，取 $\gamma = \partial B_{2r}(z_1)$

则 $d(z_1,\gamma)>r$，$d(z_2,\gamma)>r$

故 $\{f_n\}$ 在 K 上等度连续

②下证存在一列紧集 $\{K_s\}_{s=1}^{\infty}$ 使 $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \cdots \subset K_s \subset \cdots \Omega$

且 $\Omega = \bigcup_{s=1}^{\infty} K_s$.

证: 定义 $K_s = \{ z \in \Omega \cap \overline{B_s(z_0)} \mid d(z, \partial\Omega) \geq \frac{1}{s} \}$. $z_0 \in \Omega$.

③ $\{f_n\}$ 在 K_1 上一致有界 $\Rightarrow \{f_{n1}\}$ 在 K_1 上一致收敛 $\to f_{1,1}$

$\{f_{n1}\}$ 在 K_2 上一致有界 $\Rightarrow \{f_{n1}\}$ 有子列 $\{f_{n2}\}$ 在 K_2 上一致收敛 $\to f_{2,2}$

……

$\{f_{ni}\}$ 在 K_{i+1} 上一致有界 $\Rightarrow \{f_{ni}\}$ 有子列 $\{f_{n,i+1}\}$ 在 K_{i+1} 上一致收敛 $\to f_{i+1,i+1}$

取得 $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 上内闭一致收敛

任取紧集 $K \subset \Omega$, 存在 $S > 0$ s.t. $K \subset K_S$. $\{f_{nS}\}$ 在 K_S 上一致收敛

$\{f_{S,S}, f_{S+1,S+1}, \cdots\} \subset \{f_{nS}\}$ 在 K 上一致收敛.

黎曼映照定理: 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 单连通, 则 Ω 与 $D = \{|z| < 1\}$ 全纯同构.

对 $\forall z_0 \in \Omega$, 存在唯一的全纯 $F: \Omega \to D$ 使 $F(z_0) = 0$, $F'(z_0) > 0$.

证: ① 要证: 设 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 单连通, 则存在 $G \subseteq D$, $0 \in G$, 使 G 与 Ω 全纯同构.

证: 取 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \Omega$. 令 $g(z) = \log(z - \alpha)$ $g(z)$ 在 Ω 中有单值分支.

a) g 在 Ω 上单叶. 若 $g(z_1) = g(z_2)$. $z_1 - \alpha = e^{g(z_1)} = e^{g(z_2)} = z_2 - \alpha \Rightarrow z_1 = z_2$.

b) 令 $w_0 = g(z_0)$ 则 $w_0 + 2\pi i \notin g(\Omega)$

设 $\widetilde{w_0} = w_0 + 2\pi i \in g(\Omega)$ $\exists\, \widetilde{z_0} \in \Omega$ s.t. $g(\widetilde{z_0}) = \widetilde{w_0} = w_0 + 2\pi i$.

$\widetilde{z_0} - \alpha = e^{g(\widetilde{z_0})} = e^{g(z_0) + 2\pi i} = e^{g(z_0)} = z_0 - \alpha \Rightarrow \widetilde{z_0} = z_0$.

$\Rightarrow g(\widetilde{z_0}) = g(z_0)$ 矛盾.

c) 存在 $\delta > 0$ $B_\delta(\widetilde{w_0})$ 不在 g 的值域中

否则 $\exists \{z_n\} \in \Omega$. $g(z_n) \to \widetilde{w_0}$

$z_n - \alpha = e^{g(z_n)} \to e^{\widetilde{w_0}} = e^{w_0 + 2\pi i} = z_0 - \alpha$. 故 $z_n \to z_0$

$g(z_n) \to g(z_0) = w$

d) 令 $f(z)=\dfrac{1}{g(z)-\hat{w_0}}$ 由c) $\forall z\in G.\ |g(z)-\hat{w_0}|\ge\delta.$

$\Rightarrow |f(z)|\le\frac{1}{\delta}$. 定义 $\hat{f}(z)=f(z)-f(z_0)$ $\hat{f}(z_0)=0.$

且 $|\hat{f}(z)|\le\underline{\frac{1}{\delta}+|f(z_0)|}$. 令 $F(z)=\frac{1}{2M}\hat{f}(z)$

则 $F(z_0)=0.$ $|F(z)|\le\frac{M}{2}<1$ $\forall z\in\Omega.$

② 只要考虑 $0\in\Omega\subset D$ 情形.

定义 $\mathcal{F}=\{$单叶全纯 $f:\Omega\to D\mid f(0)=0\}$.

a) $\mathcal{F}$ 非空 (恒等映射在 $\mathcal{F}$ 中)

b) $\mathcal{F}$ 一致有界

c) $\forall f\in\mathcal{F}.$ $|f'(0)|$ 一致有界 (cauchy 不等式)

($0\in\Omega.$ $\exists\varepsilon>0.$ $B_\varepsilon(0)\subset G.$ Cauchy 不等式. $|f'(0)|\le\frac{1}{\varepsilon}$ $\forall f\in\mathcal{F}$)

d) 令 $\lambda=\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}|f'(0)|$,则 $\exists\{f_n\}\subseteq\mathcal{F}$. s.t. $|f_n'(0)|\to\lambda$.

$0<\lambda<\infty$
($\lambda\ge1$). 恒等映射

由Montel定理. $\{f_n\}$ 有子列在 G 上内闭一致收敛到全纯 $f_\infty:\Omega\to D$

(d1) f_∞ 不是常数

(d2) $|f_\infty(z)|<1.$ $\forall z\in\Omega.$ (由于 $|f_\infty(z)|\le1$. 由最大模原理. 若 $\exists$ $z\in\Omega.$ $|f_\infty(z)|=1.$ 则 f_∞ 为常数)

$(|f_n(z)|<1)$.

(d3) $f_\infty(z)$ 单叶.

(定理: 若 ① $\{f_n\}$ 在 G 中单叶全纯.

② $\{f_n\}$ 在 G 中内闭一致收敛 f, f 不是常数.

则 f 在 G 中单叶全纯.)

③ $f_\infty(G)=D$. 即证 f_∞ 是满射.

若 $f_\infty(G)\subsetneq D$. $\exists$ $\alpha\in D$ $\alpha\notin f_\infty(G)$

$\varphi_\alpha=\dfrac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$ 则 $\varphi_\alpha: D\to D$, $\alpha\to0$ 则 $\varphi_\alpha\circ f_\infty: G\to\varphi_\alpha\circ f_\alpha(G)$

的共形映射.

则 (a) $\psi_\alpha \circ f_\infty(G)$ 单连通.

(b) $\psi_\alpha \circ f_\infty(G)$ 不包含 0.

定义 $R(z)=\sqrt{\psi_\alpha \circ f_\infty(z)}$ $z\in G$. 在 G 上有单值分支且单叶.

若 $R(z_1)=R(z_2)$. $\Rightarrow z_1=z_2$

由于 $R(0)=\sqrt{\alpha}$. 令 $\beta=\sqrt{\alpha}$. $\psi_\beta=\dfrac{\beta-z}{1-\bar\beta z}$ $\psi_\beta: D\to D$, $\beta\to 0$

定义 $F(z)=\psi_\beta \circ R(z)$. : $G\to D$, $0\to 0$. 全纯单叶

$F(z)=\underbrace{(\psi_\beta\circ S\circ\psi_\alpha)}\circ f_\infty(z)$ $S(w)=\sqrt{w}$. $S^{-1}(z)=z^2: D\to D$.

$f_\infty(z)=\underbrace{(\psi_\beta\circ S\circ\psi_\alpha)^{-1}}_{T}\circ F(z)$ $T: D\to D$, $0\to 0$. 全纯函数. 非单叶

$T=\psi_\alpha^{-1}\circ S^{-1}\circ\psi_\beta^{-1}$ 由Schwarz引理. $|T'(0)|<1$

$\lambda=|f_\infty'(0)|=|T'(0)|\cdot|F'(0)|<|F'(0)|$. $F\in\mathcal{F}$. 矛盾.

④ 设 $G'\neq\mathbb{C}$ 单连通 设 $\varphi: G'\to G\subseteq D$ 为①中构造的映射.

则 $G'\xrightarrow{\varphi} G\xrightarrow{f_\infty} D$, $0\to 0\to 0$

则 $f_\infty\circ\varphi: G''\to D$ 共形, $0\to 0$.

设 $(f_\infty\circ\varphi)'(z_0)=r_0e^{i\theta_0}$ 则令 $F(z)=e^{-i\theta_0}(f_\infty\circ\varphi)(z)$

则 $F(z_0)=0$. $F'(z_0)=r_0>0$. F 为所构造的函数.

唯一性. $f_1: G\to D$, $z_0\to 0$ $f_2: G\to D$, $z_0\to 0$.

$F=f_2\circ f_1^{-1}$ $D\to D$, $0\to 0$. $|F'(0)|\le 1$.

定理 设 $F: D\to P$（$D=\{|z|<1\}$，P 闭多边形）共形，则

①F 可连续延拓到 $\bar{D}\to \bar{P}$ 的双射.

② $F: \partial D\to \partial P$ 是双射

证. Step 1: 若 $f: U\to f(U)$ 共形，则 $Area(f(U))=\int_U |f'(z)|^2 dxdy$.

Step 2:

Step3: 设 $z_0\in\partial D$ 则 $\lim\limits_{\substack{z\in D\\ z\to z_0}} F(z)$ 存在.

证. ① 否则，取 $z_i\to z_0$, $z_i'\to z_0$. 使 $F(z_i)\to \xi$. $F(z_i')\to \xi'$ ($\xi\neq\xi'$ 为有限复数)

② $\xi,\xi'\in\partial P$. 若 ξ 在 P 内部. 则 $F(z_i)\to\xi$.

故 $\underset{\substack{\| \\ z_i}}{F^{-1}(F(z_i))} \to F^{-1}(\xi)$

$z_i \to F^{-1}(\xi)\in D$ 与 $z_i\to z_0\in\partial D$ 矛盾.

令 $d=|\xi-\xi'|>0$. 取 δ 小. 使 $B_\delta(\xi)\cap B_\delta(\xi')=\phi$.

取连续曲线 $\Lambda.\Lambda'$. 使 $F(z_i)\in\Lambda$. $F(z_i')\in\Lambda'$

记 $\gamma=F^{-1}(\Lambda)$ $\gamma'=F^{-1}(\Lambda')$

由于 $\left.\begin{matrix} z_i\in\gamma & z_i\to z_0 \\ z_i'\in\gamma' & z_i'\to z_0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$ 任意小的 r $\underset{(|z-z_0|=r)}{C_r}$ 与 $\gamma.\gamma'$ 都相交.

交点为 z_r, z_r'

Step 4. $F: \bar{D}\to\bar{P}$ 连续.

证. 定义 $\forall z_0\in\partial D$. $F(z)=\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} F(z)$

只证 $\forall z_0' \in \partial D\ |z_0'-z_0|<\delta$. 则 $|F(z_0')-F(z_0)|<\varepsilon$.

$\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta>0.\ \forall z\in D\cap B_\delta(z_0)\quad |F(z)-F(z_0)|<\varepsilon$.

取 $z_0'\in\partial D$. $|z_0'-z_0|<\delta$. 取 w. 使 $|w-z_0|<\delta$.

$|F(z_0')-F(w)|<\varepsilon$.

故 $|F(z_0')-F(z_0)|\le|F(z_0')-F(w)|+|F(w)-F(z_0)|<2\varepsilon$.

Step 5 设 $F: D\to P$ 反函数 $G: P\to D$ 则 G 可延拓到 $\overline{P}\to\overline{D}$ 的连续函

即证: $\forall z\in\overline{D}$. $G(F(z))=z$.

设 $z_0\in\overline{D}$. 则 $\exists z_i\in D\quad z_i\to z_0.\quad F(z_i)\to F(z_0)$.

故 $G(F(z_0))=z_0$. $\qquad z_i=G(F(z_i))\to \underbrace{G(F(z_0))}_{z_0}$

同理 $\forall w\in\overline{P}\quad F(G(w))=w$.

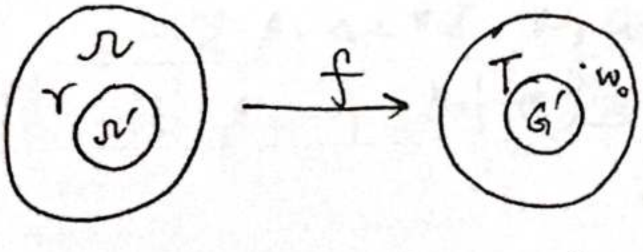
说明. 上述结论可推广到 $F: D\to\Omega$. Ω 单连通且满足

$\forall \alpha\in\partial\Omega$. 任意 $\{z_n\}\subset\Omega$. $z_n\to\alpha$ 且存在连续曲线 $\gamma: [a,b]\to \mathbb{C}$. $t\mapsto z$.

使 $\gamma(b)=\alpha$. $\gamma(t)\in\Omega$, $\forall t\ne b$ 且 $\exists t_n\in[a,b]$, $\gamma(t_n)=z_n$.

且 $a<t_1<t_2<\cdots$. $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=b$.

定理. 设 Ω 区域. $\gamma\subset\Omega$. γ 内部 $\subset\Omega$. 若 f 在 Ω 中全纯. 将 γ 双方单值映为 Γ. 则 f 在 Ω' 中单叶. 将 Ω' 映为 Γ 内部 G'



证. 设 $w_0\in\Gamma\qquad f(z)-w_0$ 在 γ 内零点个数

$f:\gamma\to\Gamma\qquad N=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dw}{w-w_0}$.

若 f 将 γ 正映为 Γ 正取向

若 w_0 在 Γ 外部. 故 $N=0$. $f(z)-w_0$ 在 γ 内无零点

故 $f(\Omega')\subseteq G'$..

若w_0在G中 故$N=\pm 1$ ⇒ $f(z)-w_0$在Ω'中只有一个零点. 单叶.

$G'\subseteq f(\Omega')$

$\therefore f(\Omega')=G'$

推论: 设$f(z)$在$\Omega\setminus\{z_0\}$全纯. z_0为f的一阶极点. $\gamma\subset\Omega$

γ内部$\Omega'\subset\Omega$, $z_0\in\Omega'$ $f:\gamma\to\Gamma$双射. 且将γ正向映为Γ负向

则f将Ω'单叶映为Γ外部G'.

证: 设$w_0\in G'$. G'为Γ外部.

$$N-P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w-w_0}=0.$$

$P=1\Rightarrow N=1$. 故$f(z)-w_0$在Ω'中只有一根.

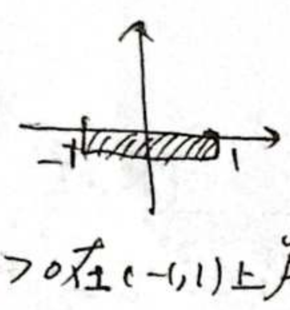
故$G'\subset f(\Omega')$

若w_0在Γ内部 则

$N-P=-1$ $\quad P=1\Rightarrow N=0$.

$f(z)-w_0$在γ内部无零点. $f(\Omega')\subset G'$ ($\gamma\to\Gamma$双射 故不在边界)

问题: 如何求出共形 $f:\Omega\to D$? (多边形)



例: 设$f(z)=\int_0^z \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}}$ 求H在f下的像

解: 取$\frac{1}{(1-\xi^2)^{1/2}}$的单值分支$g(\xi)$. 且$g(\xi)>0$在$(-1,1)$上岸.

$f(0)=0$

$f(1)=\frac{\pi}{2}$

$f(-1)=-\frac{\pi}{2}$

若$\xi>1$. $\quad g(\xi)=(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} g(\xi)=-\frac{1}{2}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1-\xi^2)=-\frac{1}{2}\Delta_\gamma\operatorname{Arg}(\xi^2-1)$$

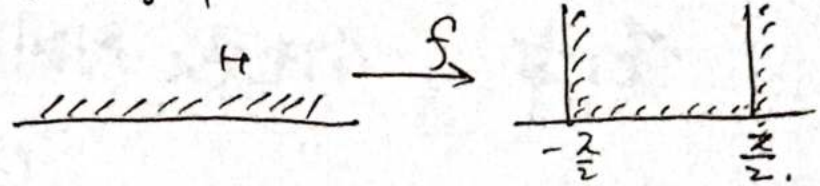
$$=-\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\Delta_\gamma \operatorname{Arg}\,\xi-1}_{-\pi}+\underbrace{\Delta_\gamma\operatorname{Arg}\,\xi+1}_{0}\Big)=\frac{\pi}{2}$$

$$g(\xi)=|g(\xi)|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \forall\ \xi=x>1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$f(x) = f(1) + \int_1^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{2} + i\int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$

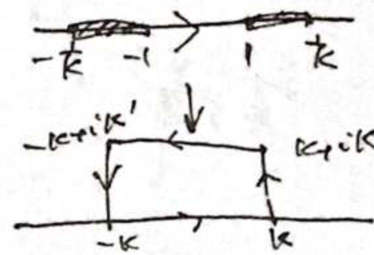
同理可求 $\xi = x < -1$.



例: $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$ $z \in H$. $0<k<1$.

取 $g(\xi)$ 的单值分支 $(-1,1)$ 上岸为正.

① $f(0)=0$ $K = f(1)$ $-K = f(-1)$.



② 若 $1<\xi<\frac{1}{k}$

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} g(\xi) = -\frac{1}{2}\left(\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-1) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z+1) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z-\tfrac{1}{k}) + \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z+\tfrac{1}{k})\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}.$$

当 $1<\xi<\frac{1}{k}$ 时 $g(\xi) = |g(\xi)|\, i$

$$f(x) = \int_0^1 + \int_1^x = K + i\int_1^x |g(y)|\, dy = K + i\int_1^x \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

记 $K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$

则 $f[1,\frac{1}{k}] \to [K, K+iK']$

$$S(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{(\xi-A_1)^{\beta_1}(\xi-A_2)^{\beta_2}\cdots(\xi-A_n)^{\beta_n}}$$

① $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$

② $\beta_i \in \mathbb{R}$. $\beta_i < 1$

当 $\sum \beta_i = 2$ 时. 像由 $a_k = S(A_k)$ 所连成多边形

$1 < \sum \beta_i < 2$ 时 则 a_∞ 的外角为 $(2-\sum_{i=1}^n \beta_i)\pi$

若 $\beta_i = 1$ 则 开多边形. $a_\infty = S(\infty)$

第2章 全纯定义. 判别

- ① 定义
- ② Morera
- ③ 函数列极限

分式线性

第3章

第4.5章

级数展开

零点孤立.

奇点
- 非孤立.
- 孤立
  - 可去
  - 极点.
  - 本性

辐角原理.

最大模原理 Schwarz引理.

留数 广义积分.

第6章 全纯开拓. 幂级数开拓.

代数结构

(吕敏 lvmin05@ustc.edu.cn)

作业 + 提问 + 考试 (期末)

周四课前交作业.

第一章 集合

§1.1 集合的基本概念

1. 集合：$a \in A$

确定性. 无序性. 互异性

集合 { 有限；无限 { 可数；不可数 } }

集合的表示：列举法. 描述法. 归纳定义.

2. 集合的关系

① 相等 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ 且 $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$.

性质：自反性 $A=A$

对称性 $A=B$ 则 $B=A$.

传递性 $A=B.\ B=C$ 则 $A=C$.

② 包含：$A \subseteq B$. $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

性质：自反性 $A \subseteq A$.

反对称性 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 则 $A=B$

传递性 $A \subseteq B.\ B \subseteq C.$ 则 $A \subseteq C$

3. 幂集

$P(A) = \{x \mid x \in A\}$. $|A|=n.\ |P(A)| = C_n^0 + \cdots + C_n^n = 2$

e.g. $A=\{1.2\}$. $P(A) = \{\phi.\ \{1\}.\ \{2\}.\ \{1.2\}\}$.

$|P(A)| = 2^{|A|}$

4. 积集（笛卡尔积集）.

$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots a_k) \mid a_i \in A_i\ \ i=1.2 \sim k\}$ 有序对

e.g. $A=\{1.2\}$ $B=\{a, b.c\}$.

$A \times B = \{(1,a).\ (1,b).\ (1,c).\ (2,a).\ (2,b).\ (2.c)\}$.

$B \times A$

① $A\times B \neq B\times A$ 无交换律.

② $|A_1\times\cdots\times A_k| = |A_1|\cdot\cdots\cdot|A_k|$.

§1.2. 集合的运算 (交. 并. 补. 差)

$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$

$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$

$\bar{A} = E-A$. E: 全集 (所有集合)

$A-B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\} = A-A\cap B$ (以A为全集的B的补).

$\neq B-A$.

运算律 (P6)

§1.3 集合的归纳定义

1. 形式

①基础语句: 说明无法用其他元素构造的元素 (越少越好).

②归纳语句: 构造法则

③终结语句: 除了有限次使用①和②产生的元素之外没有其余元素 (完备性)

eg. Σ: 符号集合.

x: 长为K的行 (字符串) $x=a_1\cdots a_k$ 另有 $y=b_1\cdots b_l$ ($a_i, b_j\in\Sigma$)

连接: $xy = a_1\cdots a_k b_1\cdots b_l$. (无交换律)

空行: 长为0的行. 记为λ. $\lambda x = x\lambda = x$.

①非空行集合 Σ^+:

基础语句: 若 $a\in\Sigma$. 则 $a\in\Sigma^+$

归纳语句: 若 $x\in\Sigma^+$ 且 $a\in\Sigma$. 则 $ax\in\Sigma^+$

终结语句: 〃

② 所有行集合 Σ^*: $(\Sigma^+\cup\{\lambda\}$

$\lambda\in\Sigma^*$.

〃

〃

第二章 数论初步

§2.1 整除性

1. 整除：$a, b \in \mathbb{Z}$（正负整数和零）（Z 全体整数）

$a|b$：$\exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $b = ka$　a整除b，b是a的倍数，a是b的因子

性质：自反性：$a|a$

反对称性：$a|b$ 且 $b|a$ 则 $a = \pm b$.

传递性：$a|b$ 且 $b|c$ 则 $a|c$.

其他性质：① $a|b$ 且 $a|c$ 则 $a \mid bx+cy$ $(x, y \in \mathbb{Z})$. 整线性组合.

② $a|b$ 且 $a|c$ 则 $a \mid b\cdot c$

2. 最大公因子 (a, b).

$(a,b) = ax_0 + by_0$. $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

记 $A \triangleq \{ax+by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

$\pm a, \pm b \in A$. 则A中有正整数.

设 d 为最小正整数.

① $\forall\ c \in A \Rightarrow d|c$.

设 $c = qd + r$ 若 $r \neq 0$. $r = c - qd = (ax_1+by_1) - q(ax_2+by_2)$

$(q \in \mathbb{Z}, 0 \le r < d)$　　$= a(x_1 - qx_2) + b(y_1 - qy_2) \in A$

$\because r < d$ 矛盾 $\therefore r = 0$. $d|c$.

② $a \in A$, $b \in A$ $\therefore d|a$ 且 $d|b$.

$\therefore d \mid (a,b)$.

$$\left.\begin{array}{l} \because d \in A \quad \therefore \exists\ x_0, y_0 \text{ s.t. } d = ax_0 + by_0 \\ \text{又} \because (a,b)|a,\ (a,b)|b \end{array}\right\} \Rightarrow (a,b) \mid d$$

$\therefore d = (a, b)$.

推论1：n 能表示为 $ax+by \Leftrightarrow (a,b) \mid n$.

$(a,b)=(a,b+ax)\ (\forall x\in\mathbb{Z})$

3. 辗转相除法. 求 (a,b) 及 x_0, y_0. (不妨设 $a\geq b>0$)

$$a=q_0b+r_0$$
$$b=q_1r_0+r_1$$
$$r_0=q_2r_1+r_2$$
$$\vdots$$
$$r_i=q_{i+2}r_{i+1}+r_{i+2}.\quad 0\leq\cdots<r_{i+2}<r_{i+1}\cdots<r_0<b.$$
$$r_{i+1}=q_{i+3}r_{i+2}$$

则 $(a,b)=r_{i+2}$.

$$r_{i+2}=r_i-q_{i+2}r_{i+1}=r_i-q_{i+2}(r_{i-3}-\text{——})\text{----}$$

可得 x_0, y_0 s.t. $(a,b)=x_0a+y_0b$.

$\boxed{\text{可知 } r_{j+2}<\frac{1}{2}r_j.}$

$$r_j=q_{j+2}r_{j+1}+r_{j+2},$$

① $r_{j+1}<\frac{1}{2}r_j\quad r_{j+2}<r_{j+1}<r_j$

② $\frac{1}{2}r_j<r_{j+1}<r_j$:

$$\left.\begin{array}{l} r_j=1\cdot r_{j+1}+r_{j+2} \\ r_{j+2}<r_{j+1}\end{array}\right\}\Rightarrow r_{j+2}<\frac{1}{2}r_j.$$

4. $c\mid ab$. $(c,b)=1$ 则 $c\mid a$.

证 $\exists\, x_0, y_0$. s.t. $cx_0+by_0=1$.

$$a=a\cdot 1=a(cx_0+by_0)=acx_0+aby_0$$

$\therefore c\mid a$.

作业 P_{10} 7(3), P_{33} 1(2), P_{34} 4

① $m\in\mathbb{Z}^+$ $(ma,mb)=m(a,b)$

$\Rightarrow (a,b)=d \Rightarrow \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1. \Rightarrow \begin{cases} mb_1=b \\ ma_1=a\end{cases}$ $(a,b)=m(a_1,b_1)\rightarrow m\mid(a,$

② $(a,m)=(b,m)=1\rightarrow(ab,m)=1$

§2.1.3 最小公倍数

$(a,b)=ax_0+by_0 \quad x_0, y_0\in Z.$

1. $[a,b]$

① $a\mid[a,b],\ b\mid[a,b].$

② $\forall e.\ s.t.\ a\mid e,\ b\mid e$ 则 $[a,b]\underset{(\le)}{\mid} e.$

2. $S=\{a.b$的公倍数$\}$.

① $\forall c.d\in S.$ 则 $c\pm d\in S.$

② $\forall\ c\in S,\ k\in Z$ 则 $kc\in S.$

③ 设 d 是 S 中最小正整数 则 $\forall c\in S.\ d\mid c.$

3. $(ma,mb)=m(a,b)$

$[ma,mb]=m[a,b].$

4. $[a,b](a,b)=ab.$

先考虑互素情况.

证: ① $(a,b)=1$ 时. 设 $[a,b]=am_1.\ \because b\mid am_1\ \because (a,b)=1\ \therefore b\mid m_1.$

$\therefore m_1=b.\quad\therefore [a,b](a,b)=am_1=ab.$

② $(a,b)=d>1.\quad \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1.$

由① $\left[\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right]\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=\frac{ab}{d^2}=\frac{1}{d^2}[a,b](a,b).$

$\therefore [a,b](a,b)=ab$

§2.1.4. 素因子分解唯一性定理

1. 任意大于1的正整数可唯一表示成素数的乘积.

$$n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_t^{l_t}$$

$$(p_1<p_2<\cdots<p_t)$$

§2.2 线性不定方程

1. $a_1x_1+\cdots+a_tx_t=n$

2. 二元不定方程 $ax+by=n$. (1)

有解 $\Longleftrightarrow (a,b)\mid n$.

设 x_0, y_0 是 (1) 的解. 则

通解 $\begin{cases} x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t \\ y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{Z})$ (2)

证: $\left(\begin{array}{l} (a,b)=ax_1+by_1. \text{ (辗转相除)} \\ n=\dfrac{n}{(a,b)}(ax_1+by_1)=\dfrac{nx_1}{(a,b)}\cdot a+\dfrac{ny_1}{(a,b)}\cdot b. \end{array}\right)$ 一种解法.

① (2) 是 (1) 的解.

② 设 x, y 是 (1) 的任一解.

$\begin{cases} ax+by=n. \\ ax_0+by_0=n. \end{cases} \Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$

$b(y-y_0)=-a(x-x_0).$

$\Downarrow$

$\dfrac{b}{(a,b)}(y-y_0)=-\dfrac{a}{(a,b)}(x-x_0).$

$\therefore \underline{b\mid a(x-x_0)}$

$\Downarrow$

$\dfrac{b}{(a,b)}\,\Big|\,\dfrac{a}{(a,b)}(x-x_0)$ $\quad\because \left(\dfrac{b}{(a,b)},\dfrac{a}{(a,b)}\right)=1$ $\quad\therefore \dfrac{b}{(a,b)}\,\Big|\,(x-x_0)$

$\therefore x-x_0=\dfrac{b}{(a,b)}t$ $\quad x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t$. 代入 (1) 或类似对 y 求解.

$\therefore \begin{cases} x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t \\ y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t. \end{cases}$

§2.3 同余式

1. 同余. $a\equiv b\pmod m$.

若 $m\mid a-b$ (a. b 除以 m 余数相同). m 称为模数.

2. 同余的性质.

① 自反性 $\quad a\equiv a\pmod m$

② 对称性 $\quad a\equiv b\pmod m$. $b\equiv a\pmod m$.

③ 传递性 $\quad a\equiv b$, $b\equiv c\pmod m$. 则 $a\equiv c\pmod m$

$m\mid a-b$, $m\mid b-c \Rightarrow m\mid a-c$.

3. 同余式的性质

$a \equiv b \pmod m$

$c \equiv d \pmod m$

运算 ① $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$; $ac \equiv bd \pmod m$ } $f(x)=a_n x^n + \cdots + a_0$, $f(a) \equiv f(b) \pmod m$.

② 若 $(c,m)=1$. $c|a$. $c|b$ 则 $\frac{a}{c} \equiv \frac{d}{c} \pmod m$

证. $\because m \mid a-b$. $\Rightarrow m \mid \frac{a}{c}-\frac{d}{c}$

$a-b=km$ $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{km}{c}$ 若 $(c,m)=1$ $\therefore c \mid k$.

$\therefore m \mid \frac{a}{c}-\frac{b}{c}$. 若 $(c,m) \neq 1$ 则 $\frac{k}{c}$ 不一定是整数

只能得出 $\frac{m}{c} \mid \frac{a}{c}-\frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \pmod{\frac{m}{c}}$

模数 ③ $a \equiv b \pmod m$ $d \mid m$. $\Rightarrow a \equiv b \pmod d$.

④ $a \equiv b \pmod{m_1}$, $a \equiv b \pmod{m_2}$ $\Leftarrow a \equiv b \pmod{m_1 m_2}$

$\not\Rightarrow$

$\xRightarrow{(m_1,m_2)=1}$

$\Longrightarrow a \equiv b \pmod{[m_1,m_2]}$

4 线性同余方程(一元)

$ax \equiv b \pmod m \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} m \mid ax-b \Longleftrightarrow ax-b=my$

$\Longleftrightarrow ax-my=b$

有解 $\Leftrightarrow (a,m) \mid b$.

且有解时. 有 (a,m) 个不同余的解

→ 解模m不同余

证: ① $(a,m)=1$ 时.

$\exists\ x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ $x_0 a + y_0 m = 1$.

$\therefore a x_0 \equiv 1 \pmod m$

$a(b x_0) \equiv b \pmod m$.

$\therefore b x_0$ 是方程的解

设 x. x' 为它的解.

$ax \equiv b \pmod m$ $ax' \equiv b \pmod m$

$\therefore a(x-x') \equiv 0 \pmod m$ $(a,m)=1$ $\therefore x-x' \equiv 0 \pmod m$

$\therefore x \equiv x' \pmod m$.

② $(a,m)=d>1$ $d \mid b$. 设 $ax \equiv b \pmod m$.

$\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$ (2) 此与需求原.小模数求解

由① (2)有解 x_0.

$\therefore x_0 + \frac{m}{d}t$ 是(1)的解. $(t \in \mathbb{Z})$.

$\underbrace{x_0,\ x_0+\frac{m}{d},\ x_0+\frac{2m}{d},\ \cdots,\ x_0+\frac{(d-1)m}{d}}_{(a,m)\text{个解}}$ $\left(x+\frac{dm}{d}\right.$ 与前解同余. $\left.\cdots\cdots\right)$

5. 线性同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases} \quad (5)$$

$m_1 \cdots m_r$两两互素. 则(5)有唯一解

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \underline{M_i b_i a_i} \pmod{m_1 \cdots m_r}$$

$M_i b_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ $i \neq j$

$M_i = \frac{m_1 \cdots m_r}{m_i}$ $M_i b_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.

$[\ (M_i, m_i)=1 \Rightarrow M_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$ 有解(唯一) $]$

证:

代入第i个方程 $x \equiv \sum_{j=1}^{r} M_j b_j a_j \pmod{m_1 \cdots m_r}$.

$$x \equiv M_i b_i a_i + \sum_{j \neq i, j=1}^{r} M_j b_j a_j \pmod{m_i}$$
$$= a_i$$

推论 若$(a,m)=1$ 存在b.使 $ab \equiv 1 \pmod m$ 称b为a模m的逆元.

pf: $ax_0+my_0=1 \Rightarrow m \mid ax_0-1$.

$\therefore ax_0 \equiv 1 \pmod m$

x_0即为逆元b.

(应用) $ax \equiv n \pmod m$ 若$(a,m)=1$. $\exists b$ s.t. $ab \equiv 1 \pmod m$.

$abx \equiv bn \pmod m \Rightarrow x \equiv bn \pmod m$.

例. $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 3 \ ① \\ 2x \equiv 5 \pmod 7 \ ② \end{cases}$ 先解出 ① ② 若有多个解, 组合成方程组.

例 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{15} \\ x \equiv 3 \pmod{20} \end{cases}$

反向替换法

解 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 & ① \\ x \equiv 3 \pmod 5 & ② \\ x \equiv 2 \pmod 7 & ③ \end{cases}$

① $x = 3t+2$

代入② $3t+2 \equiv 3 \pmod 5$

$3t \equiv 1 \pmod 5$

$t \equiv 2 \pmod 5$

$\therefore t = 5k+2 \quad x = 3(5k+2)+2 = 15k+8.$

代入③ $15k+8 \equiv 2 \pmod 7.$

$15k \equiv 1 \pmod 7$

$k \equiv 1 \pmod 7$

$\therefore k = 7u+1 \quad x = 15k+8 = 15(7u+1)+8 = 105u+23$

$x \equiv 23 \pmod{105}$

$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x = a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$

有解 $\Longleftrightarrow (m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$，此时解模 $[m_1, m_2]$ 唯一

Pf: (1) $\Rightarrow \begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{(m_1, m_2)} \\ x \equiv a_2 \pmod{(m_1, m_2)} \end{cases}$

$a_1 - a_2 \equiv 0 \pmod{(m_1, m_2)}.$

$\Longleftrightarrow (m_1, m_2) \mid a_1 - a_2$

(2) 设 $x_1 . x_2$.

$\begin{matrix} x_1 \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x_2 \equiv a_1 \pmod{m_1} \end{matrix} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{m_1} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{[m_1, m_2]}$

同理 $x_1 \equiv x_2 \pmod{m_2}$

中国剩余定理应用：
大整数的计算机计算
计算机：仅处理100以内的算数。

$a+b$

$a=(a \bmod m_1, \cdots, a \bmod m_k)$ $\quad \underline{m_i \le 100}$

$b=(b \bmod m_1, \cdots, b \bmod m_k)$ $\quad$ 模数 m_i, m_j 两两互素

$\Rightarrow a+b=((a+b) \bmod m_1, \cdots, (a+b) \bmod m_k)$ $\quad$ 且 $\prod_{i=1}^{k} m_i > a.\ b.\ a+b.$

$\begin{cases} a=123684 \\ b=413456 \end{cases} \sim 10^6 \quad m: 99.\ 98.\ 97.\ 95.$

§2.4 欧拉定理与欧拉函数.

1. 完系. $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 若两两模 m 不同余. 称之为模 m 的完系.

$[x_i]=\{km+x_i \mid k \in \mathbb{Z}\}$. $i=1, \cdots, m$.

---

2. 欧拉函数 $\phi(m)=$ 完系中与 m 互素的元素个数 与 m 互素的同余类.

缩系：完系中与 m 互素的元素集合.

3. 完系与缩系的判断 不唯一

① 完系. $\{x_1 \cdots x_t\}$

1) 个数 $t=m$

2) 两两不同余.

② 缩系.

欧拉函数的值无法确定.

1) 两两不同余

2) x_i 与 m 互素. $i=1, \cdots, t$.

3) $\forall x, (x,m)=1$. 则 $\exists x_i (1 \le i \le t)$ s.t. $x \equiv x_i \pmod m$.

$(a,m)=1$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} a\cdot \text{完系} \\ a\cdot \text{缩系} \end{matrix}\right\} \to \begin{matrix} \text{完系} \\ \text{缩系} \end{matrix}$

4. $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是模m的完系. $(a,m)=1$

① 则 $\{ax_1,\cdots,ax_m\}$ 是模m的完系.

$\{x_1+b,\cdots,x_m+b\}$ 是完系

② $\{x_1\cdots x_t\}$ 是缩系 $(a,m)=1$. 则 $\{ax_1\cdots ax_t\}$ 是缩系.

pf: ① 个数 √

若 $ax_i\equiv ax_j \pmod m$ $(a,m)=1$

$\Rightarrow x_i\equiv x_j \pmod m$ 矛盾

② 个数 √. 两两不同余 由① √

ax_i 与 m 互素.

$(a,m)=1,\ (x_i,m)=1 \Rightarrow (ax_i,m)=1$

(反证. 若 $(ax_i,m)=d>1$.

$\begin{cases} d\mid m \xrightarrow{(x_i,m)=1} (x_i,d)=1 \\ d\mid ax_i \end{cases}$

$\searrow\ d\mid a,\ (a,m)=d>1$. 矛盾.

5. $\phi(m)=?$

$\phi(p)=p-1$. $\phi:\cdots,p-1$

$\phi(p^l)=p^{l-1}(p-1)$.

$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ p+1 & p+2 & \cdots & 2p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & p^l \end{matrix}\right\}$ p^{l-1} 行.

$\forall m\in\mathbb{Z}$

$\phi(m)=?$ $m=p_1^{l_1}\cdots p_t^{l_t}$

※ $(m,n)=1$ $\phi(mn)=\phi(m)\cdot\phi(n)$

$\therefore \phi(m)=\phi(p_1^{l_1})\cdots\phi(p_t^{l_t})$.

$=\dfrac{m}{p_1\cdots p_t}(p_1-1)\cdots(p_t-1)=m(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_t})$

6. 欧拉定理

$(a,m)=1$. 则 $a^{\phi(m)}\equiv 1 \pmod m$

Pf: 设 $\{x_1,\cdots,x_{\phi(m)}\}$ 为模m的缩系.

$\{ax_1,\cdots,ax_{\phi(m)}\}$ 亦为缩系.

$\forall a x_i$, $\exists x_j$ s.t. $a x_i \equiv x_j \pmod m$

共 $\phi(m)$ 个同余式. $a^{\phi(m)} \underbrace{x_1 \cdots x_{\phi(m)}} \equiv x_1 \cdots x_{\phi(m)} \pmod m$.

$\Rightarrow a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$ $\quad (x_1 \cdots x_{\phi(m)}, m) = 1$.

例 $2^{340} \bmod 341$.

$\phi(341) = \phi(11 \times 31) = \phi(11) \times \phi(31) = 10 \times 30 = 300$.

费马定理 p是素数 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ $a^p \equiv a \pmod p$.

$2^{340} \pmod{11}$. $2^{300} \pmod{31}$. $\Rightarrow \begin{cases} 2^{340} \equiv 1 \pmod{11} \\ 2^{340} \equiv 1 \pmod{31} \end{cases}$

$\quad \| \ 1 \pmod{11}$ $\quad \| \ 2^{10} \pmod{31}$ 同余方程组

※ $\underline{(2, 11) = 1}$ $\quad = (2^5)^2 \pmod{31} = 1$. $\Rightarrow 2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$

7. 费马小定理

p是素数 $p \nmid a$. 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

例 $9x \equiv 7 \pmod{13}$

$(9, 13) = 1$ 唯一解. $(3, 13) = 1$ $\therefore 3^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 9 \cdot 3^{10} \equiv 1 \pmod{13}$

3^{10}: 9 mod 13 的逆元.

$9 \cdot 3^{10} x \equiv 7 \cdot 3^{10} \pmod{13} \Rightarrow x \equiv 7 \cdot 3^{10} \pmod{13}$

$\equiv 9^5 \cdot 7 \pmod{13} \equiv (-4)^5 \cdot 7 \pmod{13}$

$\equiv (-28) \times 16^2 \pmod{13}$ 绝对值最小的元素

$\equiv (-2) \times 3^2 \pmod{13}$ $(-6, \cdots 0, \cdots 6)$

$\equiv -5 \pmod{13} = 8 \pmod{13}$

8. 卡米切尔数 n.

合整数n. $\forall (b, n) = 1$. 有 $b^{n-1} \equiv 1 \pmod n$.

9. 威尔逊定理

Lemma: ① p是素数 $\Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod p$ 恰有两个解 $1, -1, \pmod p$.

p.f.: ① $p = 2$ ✓. ② $p > 2$.

1. -1 是解

$p \mid x^2-1 \Rightarrow p \mid (x-1)(x+1)$.

∵ $(x+1)-(x-1)=2$. $p \nmid (x+1)-(x-1)$. $p \nmid (x+1, x-1)$.

∴ p 恰整除其中之一. ∴ $p \mid x+1$ 或 $p \mid x-1$

∴ $x \equiv -1 \pmod p$. 或 $x \equiv 1 \pmod p$.

② p 是奇素数. ($\Leftrightarrow$ p 素且 $p>2$)

$a = 1, \cdots, p-1$

设 a' 为 $ax \equiv 1 \pmod p$ 的解. → (mod p 同余). (a 的逆元)

若 $a \not\equiv b \pmod p$, 则 $a' \not\equiv b' \pmod p$.

若 $a \equiv a' \pmod p$. 则 $a \equiv \pm 1 \pmod p$

pf: (1) 逆元唯一. $ax \equiv 1 \pmod p$ 解的个数为 1.

(2) 反证. 若 $a' \equiv b' \pmod p$ 同乘 ab.

$$aa'b \equiv abb' \pmod p \Rightarrow b \equiv a \pmod p. \text{ 矛盾.}$$

(3) $a \equiv a' \pmod p$

$a^2 \equiv aa' \pmod p \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod p$

素数 缩系中的逆元唯一且各不相同.

(4) 逆元 a' 与 p 互素.

反证. $p \mid a'$ $p \mid aa' \Rightarrow p \mid 1$ 矛盾. ($p>2$)

$p=7$	a	1	2	3	4	5	6
	a'	1	4	5	2	3	6

($p-1-2$) 个 缩系中的 数两两互逆.

p 为素数 $\Longleftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$.
$p \geq 2$ ✓.

pf: $\Rightarrow$ $1 \sim p-1$, 构成 $\frac{p-3}{2}$ 组互逆的数

$\Rightarrow (p-1) \equiv -1 \pmod p$.

$\Leftarrow$ 反证. 若 p 不是素数. 则有因子 d. $1<d<p$.

∴ $d \mid (p-1)!$ 又∵ $p \mid (p-1)!+1$

$\Rightarrow d \mid (p-1)!+1. \Rightarrow d \mid (p-1)!+1-(p-1)! \Rightarrow d \mid 1.$ 矛盾

整除线性组合

形如 2^p-1 的素数（p 是素数）$\Rightarrow$ 梅森素数

§2.5 整数的因子及完全数

$n = p_1^{l_1} \cdots p_t^{l_t}$

1. $d(n)$：n 的正因子数 $= \prod_{i=1}^{t}(l_i+1)$

$\sigma(n)$：所有正因子的和 $= \sum_{x_1 \cdots x_t} p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t}$

n 的任一因子形如 $p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t}$ $(0 \le x_i \le l_i)$

$$\sigma(n) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{t-1}} p_1^{x_1} \cdots p_{t-1}^{x_{t-1}} \left(\sum_{x_t} p_t^{x_t}\right) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{t-1}} p_1^{x_1} \cdots p_{t-1}^{x_{t-1}} \cdot \left(\frac{p_t^{l_t+1}-1}{p_t-1}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{t} \frac{p_i^{l_i+1}-1}{p_i-1}$$

2. 若 $\underline{(m,n)=1}$ 则 $d(mn) = d(m)d(n)$. $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.

3. 完全数 n：若 $\sigma(n) = 2n$. 则称 n 为完全数

目前发现的完全数均为偶数.

4. 若 2^p-1 也是素数 则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是(偶)完全数.
（p 是素数）

Pf: $\sigma(\underbrace{2^{p-1}(2^p-1)}_{\text{互素}}) = \sigma(2^{p-1})\,\sigma(2^p-1) = \frac{2^p-1}{2-1} \cdot (1+2^p-1) = 2^p(2^p-1)$
$= 2(2^{p-1}(2^p-1))$

5. n 是偶完全数. 则存在素数 p s.t. $n = 2^{p-1}(2^p-1)$. 且 2^p-1 也为素数

Pf. $n = 2^k \cdot m$ $\quad 2 \nmid m$. $\quad \because n$ 为完全数 $\quad 2n = \sigma(n)$.

$2 \cdot 2^k \cdot m = \sigma(2^k) \cdot \sigma(m) \Rightarrow 2^{k+1} m = \frac{2^{k+1}-1}{2-1}(m+l)$.

l：m 的真因子之和.

$2^{k+1} m = (2^{k+1}-1)m + (2^{k+1}-1)l$

$m = (2^{k+1}-1)l. \quad \therefore l = 1.$

$m = 2^{k+1}-1$. 且 m 只有 1. m 两个因子. $\therefore m$ 是素数

若 $k+1$ 不是素数 设 $k+1 = c \cdot d \quad (1 < c, d < k+1)$.

$m=2^{k+1}-1=2^{c\cdot d}-1=(2^c)^d-1=\underbrace{(2^c-1)}_{>1}\cdot\underbrace{((2^c)^{d-1}+\cdots+1)}_{>1}$

与m是素数矛盾.

$\therefore k+1=p \quad n=2^{p-1}(2^p-1)$.

3. 梅森素数：形如2^p-1的素数（p是素数）. 记M_p

注 梅森数：形如2^p-1的整数.

§2.6 原根与指数

1. 阶：$ord_m a$（a模m的阶）

使 $a^n\equiv 1 \pmod m$ 的最小正整数.

（条件：$(a,m)=1$）$ord_m a\le\varphi(m)$

2. 阶的性质.

① $ord_m a \mid \varphi(m)$ $\quad 1\le n\le\phi(m-1)$ $\xrightarrow{检验}$ $\xleftarrow{求}$

例1. $m=7$. a在m的缩系中.

a	1	2	3	4	5	6
$ord_a m$	1	3	6	3	6	2

② 设$ord_m a=t$. a^1 ---- a^t 模m不同余.

（或 $a^0 \cdots a^{t-1}$）

（若$ord_m a=\phi(m)$. 则可用a的乘方表示m的缩系）

一般的 a的连续t个次方两两不同余

pf: $a^i\equiv a^j \pmod m$ $\quad 1\le i<j\le t$. $j-i<t$.

$1\equiv a^{j-i} \pmod m$

③ 若 $ord_m a=\varphi(m)$ 则$a^1,\cdots,a^{\phi(m)}$构成m的缩系

3. 原根 阶为 $\phi(m)$ 的正整数 a. 记为 g.

m的缩系. $g^1, \cdots\cdots, g^{\phi(m)}$

或 $g^0, \cdots\cdots, g^{\phi(m)-1}$.

4. 模m原根存在 $\Longleftrightarrow$ ① $m=2, 4, p^k$ 或 $2p^k$. (p为奇素数)

② $x^2 \equiv 1 \pmod m$ 恰有2个解.

例 $m=18$ $\phi(m)=\phi(2\times3^2)=\frac{18}{2\times3}\times1\times2=6 \Longrightarrow 1.2.3$次方

a	1	5	7	11	13	17
$ord_{18}a$	1	6	……		……	2

5. 指数 ind x.

模数 m 的原根 g. $\forall x, (x,m)=1$. 记为 $ind_g x$.

使 $g^y \equiv x \pmod m$ 成立 y, 称为模m以g为底的指数(离散对数)

$(1 \le y \le \phi(m))$ 原根不唯一.

设 y 为满足 $g^y \equiv x \pmod m$ 的整数. 则

$y \equiv ind_g x \pmod{\phi(m)}$.

6. ind x 的4个性质.

① $ind_g(ab) \equiv ind_g a + ind_g b \pmod{\phi(m)}$.

② $ind_g a^n \equiv n\, ind_g a \pmod{\phi(m)}$

例 $x^8 \equiv 3 \pmod{11}$.

解: 取11的原根2.

$8\, ind_g x \equiv ind_g 3 \pmod{10}$.

$\Rightarrow 8y \equiv ind_g 3 \pmod{10}$.

	11
0	0
1	1
2	8
3	2
4	4
⋮	⋮

① 验证2是原根 ② 建立以2为底的指数表.

$8\, ind_2 x \equiv 8 \pmod{10}$ $(8,10)=2$

$\Rightarrow 4\, ind_2 x \equiv 4 \pmod 5$

$\Rightarrow ind_2 x \equiv 1 \pmod 5$ $ind_2 x \equiv 1$ 或 $6 \pmod{10}$ $x \equiv 2, 9 \pmod{11}$

$x \equiv 2^1, 2^6 \pmod{11}$

应用：解同余方程 $\begin{cases} x^k \equiv b \pmod m \\ ax \equiv b \pmod m \\ a^x \equiv b \pmod m \end{cases}$

例：$5x \equiv 7 \pmod{11}$

解①：利用 $\varphi(m)$

$\varphi(11)=10 \quad 5^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 5\cdot 5^9 \equiv 1 \pmod{11}$

$\Rightarrow x \equiv \underbrace{7\cdot 5^9}_{\text{降低次数}} \pmod{11}$.

解②. 11的原根为2.

取以2为底的指数 $\text{ind}_2 5 + \text{ind}_2 x \equiv \text{ind}_2 7 \pmod{10}$ ☆

$4 + \text{ind}_2 x \equiv 7 \pmod{10}$.

$\text{ind}_2 x \equiv 3 \pmod{10}$

$x \equiv 8 \pmod{11}$

例：$x^8 \equiv 3 \pmod{143}$

解：$143 = 11 \times 13$

☆ $x^8 \equiv 3 \pmod{143} \quad (11, 13) = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x^8 \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow x = a_1 — a_i \pmod{11} & ① \\ x^8 \equiv 3 \pmod{13} \Rightarrow x = b_1 — b_t \pmod{13} & ② \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = a_i \pmod{11} \\ x = b_j \pmod{13} \end{cases} \quad \forall i, j$

① $x = 2 \cdot 9 \pmod{11}$

② 原根2.

$8\,\text{ind}_2 x \equiv \text{ind}_2 3 \pmod{12}$.

$8\,\text{ind}_2 x \equiv 4 \pmod{12}$.

$2\,\text{ind}_2 x \equiv 1 \pmod 3$

$\text{ind}_2 x = 2 \pmod 3 \Rightarrow \text{ind}_2 x \equiv 2.5.8.11 \pmod{12}$

$\Rightarrow x \equiv 4.6.9.7 \pmod{13}$

8组 解(中国剩余定理)

密码学应用.

Diffie-Hallman 秘钥交换

(p, g)

A	B
a_1	b_1
$g^{a_1} \pmod p$	$g^{b_1} \pmod p$
g^{b_1}	$g^{a_1} = K_A$

P足够大可保证离散对数不可解

$PK = (g^{b_1})^{a_1} \equiv (g^{a_1})^{b_1}$ 公共密钥

加密机制 ElGamal：p, g, PK

$m \xrightarrow{a_1} (C_1, C_2)$

随机选 $r \in [1, \cdots, p-1]$

$C_1 = g^r \pmod p$

$C_2 = m(K_A)^r \pmod p$.

解密 $W = (C_1^{K_A})^{-1} \pmod p$

明文 $m = C_2 W \pmod p$

阶 $\mathrm{ord}_m a = t$.

$a^1 \cdots a^t$ 两两不同余 且 $\mathrm{ord}_m a^i = \frac{t}{(i,t)}$

推论：g是模m的原根，则模m的所有原根为 $\{g^i : (i, \varphi(m)) = 1\}$ 共 $\varphi(\varphi(m))$ 个原根

Pf. ① $(a^i)^{\frac{t}{(i,t)}} \equiv 1 \pmod m$. ✓

② $\frac{t}{(i,t)}$ 最小.

$\forall k$ s.t. $(a^i)^k \equiv 1$，均有 $\frac{t}{(i,t)} \mid k$.

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} a^{ik} \equiv 1 \pmod m \\ \mathrm{ord}_m a = t \end{array}\right\} \Rightarrow t \mid ik \Rightarrow \frac{t}{(i,t)} \,\Big|\, \frac{i}{(i,t)} \cdot k \Rightarrow \frac{t}{(i,t)} \,\Big|\, k$$

第三章 映射

§3.1 映射的基本知识

1. 映射：$f: A \to B$

使 $\forall a \in A$，B中有唯一的元素b与之对应（一对一，多对一）

记作 $b = f(a)$

A、B是数集，称映射 $f: A \to B$ 为函数

2. $A = A_1 \times \cdots \times A_n$，B。

$f: A \to B$

$(a_1, \cdots, a_n) \longrightarrow b$

3. $f: A \to B$

$a \longrightarrow f(a)$　或 $(x, f(x))\ \forall x \in A$

或 $b = f(a) \Longleftrightarrow (a, b) \in f$

e.g. $f: R \to R$

$x \to x^2$

$(2,4) \in f$，$(2,5) \notin f$

4. 从A到B的映射个数 $|B|^{|A|}$

（B^A：所有从A到B的映射）

§3.2 特殊映射

1. 满射：若f的值域 $R_f = B$

2. 单射：若 $f(a_1) = f(a_2)$ 则 $a_1 = a_2$

3. 双射：（一一映射）既单又满

4. 逆映射 f^{-1}：$B \to A$

$b \to a\ (b = f(a))$

$f^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in f\}$

例. n元集合 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$

$f: P(A) \to \{0,1\}^n$

$B \longrightarrow (b_1, \cdots, b_n)$　其中 $b_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B \\ 0, & a_i \notin B \end{cases}$

$f(\phi) = (0, \cdots, 0)$　$f(A) = (1, \cdots, 1)$　$\{a_1, a_2, a_5\} \longrightarrow (1,1,0,0,1,\cdots)$

双射

§3.3 映射的合成

1. $f: A\to B \quad g: B\to C$.

$f\circ g \neq g\circ f$

$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

2. I_A: $A\to A$ 的恒等映射

$f: A\to A$ 的双射.

$f^{-1}\circ f = I_A = f\circ f^{-1}$.

$f\circ I_A = I_A\circ f = f$

§3.4 置换

1. 置换：有限集合A上的双射

$\sigma: A \longrightarrow A$ 记作 $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$

$a \longmapsto \sigma(A)$

$\triangleq \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$

2. $S_n = \{\sigma \mid \sigma$ 是n元集合A上的置换$\}$.

$|S_n| = n!$

$\sigma(1)\cdots\sigma(n)$: $1\sim n$ 的全排列

$\sigma(i)\in\{1,\cdots,n\}$. 两两不同

n元置换 $\Longleftrightarrow$ n元全排列.

3. 逆置换.

σ^{-1}: σ 两行互换, 调整列的顺序

4. 奇置换: $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$ 是奇排列. 即逆序数为奇数.

逆序数: n元排列 $i_1,\cdots,i_n$ 中. $i_{t_1} > i_{t_2}$ $(t_1 < t_2)$ 的数对 (i_{t_1}, i_{t_2}) 的个

5. 置换的合成 ⇒ 仍是置换.

保持. 单. 满. 双

通常称为积. 记作 $\sigma_i\sigma_j$

6. 轮换.

σ是$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$的一个置换. $a_1,\cdots,a_r$是A的r个元素.

$\sigma(a_1)=a_2,\cdots,\sigma(a_{r-1})=a_r,\ \sigma(a_r)=a_1.$ $\boxed{\sigma(a_i)=a_i\ (i>r).}$

称 $a_1,\cdots,a_r$ 是一个轮换 记作 $(a_1\cdots\cdots a_r)$. 长为r的轮换.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(23)(1)\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(132).$$

7. 轮换的性质 → 同为某个有限集合上的置换.

若 $\tau=(a_1a_2\cdots a_r)$, $\sigma=(b_1\cdots b_t)$

若 $\{a_1,\cdots,a_r\}\cap\{b_1,\cdots,b_t\}=\phi$

则 $\tau\sigma=\sigma\tau$

Pf. 设$A=\{1,\cdots,n\}$

证: $\forall i\in A.\ \tau\sigma(i)=\sigma\tau(i).$

(1) $i\in\{a_1,\cdots,a_r\}$. 设$i=a_j$.

$\tau\sigma(i)=\tau(\sigma(i))=\tau(i)=a_{j+1}.$

$\sigma\tau(i)=\sigma(\tau(i))=\sigma(a_{j+1})=a_{j+1}.$

(2) $i\in\{b_1,\cdots,b_t\}$ 同理.

(3) $i\in A-\{a_1,\cdots,a_r\}-\{b_1,\cdots,b_t\}$.

$\tau(\sigma(i))=\sigma(\tau(i))=i.$

8. 置换的轮换分解

任一置换可表示成若干不相交的轮换之积 (不考虑乘积顺序, 分解唯一).

Pf: σ是 $A=\{1,\cdots,n\}$上的置换. 任取 $i\in A$. $i, \sigma(i), \sigma^2(i), \cdots\cdots$

$\because A$有限 $\therefore \exists\, l<k$ s.t. $\sigma^l(i)=\sigma^k(i)$. 设 l, k为最小的指数.

则 $l=0$. 否则 $l\geq 1$ 两边同取 $(\sigma^l)^{-1}=(\sigma^{-1})^l \Rightarrow i=\sigma^{k-l}(i)=\sigma^0(i)$

$\therefore$ 得到轮换 $\{i, \sigma(i), \cdots, \sigma^{k-1}(i)\}$.

若 $A-\{i, \cdots, \sigma^{k-1}(i)\}\neq\phi$. 重复上述过程直到 ϕ为止.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = (12)(678)(4)(135)$$

9. 置换的阶: 使 $\sigma^n=\underset{\text{恒同置换}}{\underline{\sigma_I}}$成立的最小正整数 n.

轮换的阶 = 轮换的长度

置换的阶 = 各轮换因子长度的最小公倍数

---

10. 对换: $(i, j)\rightarrow(j, i)$

置换可表示为一些对换的积. 表示不唯一,但对换的个数奇偶性相同

$\sigma(a_1 a_2 \cdots a_r)=(a_1 a_r)(a_1 a_{r-1})\cdots\cdots(a_1 a_3)(a_1 a_2)$.

§3.5 开关函数

1. 开关函数 $f: F_2^n\rightarrow F_2=\{0,1\}$.

$(x_1,\cdots,x_n)\longrightarrow 0$或$1$.

n元开关函数的个数 2^{2^n}

e.g. $n=2$ (真值表)

x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1\cdot x_2$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1
		逻辑加	逻辑乘

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

逻辑补.

3. 开关函数的运算

f, g：n元开关函数.

$$\overline{f}(x_1,\cdots,x_n)=\overline{f(x_1,\cdots,x_n)}$$

$$(f+g)(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+g(x_1,\cdots,x_n)$$

$$(f\cdot g)(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)\cdot g(x_1,\cdots,x_n)$$

4. 运算律

① 交换律. $f+g=g+f \quad f\cdot g=g\cdot f$

② 结合律. $f+(g+h)=(f+g)+h \quad f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$

③ 分配律. ☆ $f+(g\cdot h)=(f+g)\cdot(f+h)$

$f\cdot(g+h)=(f\cdot g)+(f\cdot h)$

④ $f+0=f$

$f+1=1$

$f\cdot 0=0$

$f\cdot 1=f$

⑤ $f+\overline{f}=0$

$f\cdot\overline{f}=0.$

⑥ De-Morgen 律

$\overline{f+g}=\overline{f}\cdot\overline{g}$

⑦ 吸收律.

$f+(f\cdot g)=f$

$f\cdot(f+g)=f$

$P(A)$	$\longrightarrow$ 开关函数
$\cap$	$\cdot$
$\cup$	$+$
$-$	$-$
ϕ	0
E	1

5. 集合的特征函数

$\chi_A: E\to F_2.$

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A.\end{cases}$$

其中 $A\subset E$

若 $E=F_2^n$ =n元集合的幂集. 共 2^{2^n} 个子集.

每个子集$A \longleftrightarrow$ 特征函数 $\chi_A \longleftrightarrow$ n元开关函数.

6 小项表达式

① 小项（最小项/极小项）

f 是 n 元函数，这 n 个变量自身或补形式出现且仅出现一次的积项

形如 $a_1 \cdots a_n$ $a_i = x_i$ 或 $\bar{x}_i$

② 小项性质：2^n 个小项

$x_1, \cdots, x_n$ 的每种取值恰使其中一个小项为 1，其余为 0

③ $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{a_i = 0,1} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} f(a_1 \cdots a_n)$ $\begin{cases} x^1 = x \\ x^0 = \bar{x} \end{cases}$

$f(x_1 \cdots, x_n) =$ 使 f 为真（$=1$）的 $x_1 \cdots x_n$ 取值对应的小项之和

☆ §4.4 集合的势

1. 势：度量集合的规模

有限集合的势 = 集合中元素的个数

2. 等势：若存在双射 $f: A \to B$

称集合 A 与 B 等势，记作 $A \sim B$

3. 无限可数集合：若 $\exists$ 双射 $f: A \to N$，即 $A \sim N$，则 A 无限可数

4. $(0,1)$ 无限不可数

Pf. (1) 无限

$A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\} \in (0,1)$

$f: A \to N$

$\frac{1}{n} \mapsto n-2$

(2) 不可数

反证：设 $(0,1)$ 可数

则 $(0,1)$ 中元素为 $b_0 = 0.b_{00}b_{01}\cdots$

$b_1 = 0.b_{10}b_{11}\cdots$

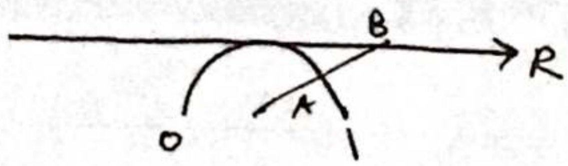
$b_2 = 0.b_{20}b_{21}\cdots$

$\vdots$

构造 $b = 0.b_0b_1b_2\cdots$

$b_i \neq b_{ii}$ 矛盾

5. $(0,1)\sim R$



$f: (0,1)\longrightarrow R$

$A \longmapsto B$.

6. 势的小于等于:

若A与B的一个子集等势. 称B支配A. A的势小于等于B的势.

记作 $A\precsim B$

若 $A\precsim B$ 且 $A\nsim B$. 则称A严格小于B的势. $A\prec B$.

e.g. $N\prec (0,1)$.

e.g. $A\prec \underbrace{P(A)}$. 幂集

pf: (1) $A\longrightarrow S\triangleq\{\{a\}\mid a\in A\}\subseteq P(A)$.

$A\sim S$. $S\subseteq P(A)$ $A\precsim P(A)$.

(2) $A\nsim P(A)$.

反证: 若 $A\sim P(A)$ 双射 $g: A\longrightarrow P(A)$.

$a\longrightarrow g(a)$.

$a\in g(a)$ 或 $a\notin g(a)$.

内部成员 外部成员.

令 $B=\{x\mid x\notin g(x)\}\in P(A)$. $\exists b$ s.t. $g(b)=B$

① $b\in B$. $\Rightarrow b\notin g(b)=B$

② $b\notin B\Rightarrow b\in g(b)=B$

7. 每个无限集合都含有可数无限子集. $N\precsim$ 无限集

8. 无限集合与它的一个真子集等势.

(有限集合 $\nsim$ 其真子集).

pf: A无限集合

$S=\{a_0,a_1,\cdots\}\subset A$.

$f: A\rightarrow A-\{a_0\}$.

$f(a)=\begin{cases} a. & a\in S. \\ a_{i+1} & a=a_i\end{cases}$

第四章 二元关系

§4.1

关系的表示

① 集合表示：$xRy \Longleftrightarrow (x,y)\in R$.

$x \not R y \Longleftrightarrow (x,y)\notin R$.

A上的几个关系

空关系 ϕ.

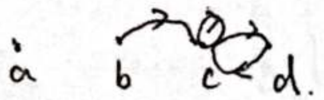
全域关系 $\{(x,y).\ \forall x.y\in A\}$

恒等关系 $\{(x,x).\ x\in A\}$

小于等于关系. 整除关系. 真包含关系.

类似可定义n元关系

(R)	自反性	反自反	对称	反对称	传递性
关系矩阵	主对角全为1	主对角全为0	对称阵	$r_{ij}=1, r_{ji}=0\ (i\neq j)$ $(r_{ij}\cdot r_{ji}=0)$	
关系图	每个顶点都有环	没有环.	无单向边	无对称边.	x y连接则 xRy 便于判断.
表达式	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\phi$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R\circ R\subseteq R$ $(x,y)\in R$ $(y,z)\in R$ $\Rightarrow (x,z)\in R$.



关系的运算

① 集合运算

② 映射运算

③ 闭包运算

$M_R \quad \begin{array}{cc} & B \\ A & \boxed{} \end{array}$

$M_S \quad \begin{array}{cc} & C \\ B & \boxed{} \end{array} \qquad M_{S\circ R} \quad \begin{array}{cc} & C \\ A & \boxed{} \end{array}$

合成： $R: A \to B \quad S: B \to C$

$S\circ R: A \to C. = \{(a,c) \mid (\exists b)(b \in B \wedge aRb \wedge bSc)\}$.

矩阵表示： $M_{S\circ R} = M_R \cdot M_S$

无交换律.

幂运算：

$R.\ n \in N.\ R^n.$

(1) $R^0 = I_A$

(2) $R^{n+1} = R \circ R^n$

逆： $R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$.

$(R\circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

逆运算保持五条性质

§5.2 群定义的进一步表示

2 有限群可以用群表表示.

*	e	a_2	……	a_n
e				
a_2				
⋮				
a_n				

① e 所在的行.列与表头一致

② 每一行\列为 n 个两两不同的元素

例. 低阶群

① 一阶群

*	e
e	e

② 二阶群

*	e	a
e	e	a
a	a	$\boxed{e}$

$G=\{e.a\}$.

其中 $e=a^2$.

③ 三阶

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$G=\{e, a, a^2\}$

a^3

④ 四阶 (1)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$\left.\begin{array}{l} a*a=e \\ b\times b=e \\ c\times c=e \end{array}\right|$ $a\times a=b\,(c)$

$G=\{e,a,b,c\}\triangleq K_4$

$e=a^2=b^2=c^2$

Klein

(2)

a	e
e	a

$\left.\begin{array}{l} b*b=a \\ b*c=e \\ e=a^2=b^4 \end{array}\right\}\Rightarrow c=b^3$

$G=\{e,b,b^2,b^3\}\triangleq C_4$.

循环群

(3)

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b			
c	c			

$b=a^2$

$c=b*a=a^3$ $G=\{e,a,a^2,a^3\}\triangleq C_4$.

§5.3 子群

1. 群 $\langle G,*\rangle$ $H\neq\phi$. $H\subset G$.

若 (1) 封闭性 $\forall a.b\in H$ $a*b\in H$

(2) 逆元 $\forall a\in H$ $a'\in H$.

或 $\forall a.b\in H$ $a*b'\in H$.

称 $\langle H,*\rangle$ 为 $\langle G,*\rangle$ 的子群. 记作 $H\leq G$.

2. 平凡子群 $\langle\{e\},*\rangle$. $\langle G.*\rangle$.

对于有限群 子群只需满足(1).

Pf: 只须证明 $a'\in H$. $\forall a\in H$.

$a,a^2,\cdots\in H$, H有限 $\Rightarrow$ $\exists a^i=a^j$ $i<j$

$a^i,a^j\in H<G$. 根据G中消去律.

$e=a^{j-i}=a\cdot\underbrace{a^{j-i-1}}:=a'$

3. 生成子群

群 $\langle G,*\rangle$ $\phi\neq S\subseteq G$

$A=\{H\mid S\subseteq H.\ H\leq G\}$.

令 $K=\bigcap\limits_{H\in A}H$ 则 $K\leq G$.

Pf: $K\leq G$

(1) 封闭 $\forall x.y\in K$. 对 $\forall H\in A$. $x.y\in H\Rightarrow x*y\in H\Rightarrow x*y\in K$.

称K为S的生成子群. 记作 $K=\langle S\rangle$

$\langle S\rangle = \{a_1^{e_1}\cdots a_n^{e_n} \mid a_i\in S\} \triangleq T$. $e_i=1$ 或 -1 逆元

pf: (1) $\langle S\rangle \subseteq T$.

§5.4 循环群

1. 循环群 若存在 $g\in G$. s.t. $\forall x\in G$ $x=g^i$ $(i\in \mathbb{Z})$ 称G为循环群. g称为生成元. $i<0$ 代表逆元的次方

记 $G=\langle g\rangle$. 生成元不唯一.

$\mathbb{Z}_p^* = \{1,\cdots,p-1\}$. $\langle \mathbb{Z}_p^*, \times_p\rangle$

$\mathbb{Z}_p^* = \langle g\rangle$. g为模p的原根

(推广. $\mathbb{Z}_m^* \to$ 模m的缩系 (m有原根). $\langle \mathbb{Z}_m^*, \times_m\rangle$ 为循环群

$\mathbb{Z}_m^* = \langle g\rangle$

2. G是循环群. a是k阶元, 则 $\langle a\rangle$ 是G的k阶子群.

pf: ① $\langle a\rangle \le G$ ② $|\langle a\rangle| = k$

3. 设G是循环群. $\forall H\le G$. $\exists a\in G$ $H=\langle a\rangle$. 循环群的子群是循环群

若 $H=\{e\}=\langle e\rangle$.

若 $H\ne\{e\}$. $\forall b\ne e$ (设 $G=\langle g\rangle$) $b=g^i$

设a是H中正次数最小的, 记 $a=g^t$.

$b=g^i$ $i=qt+r$ $(0\le r<t)$

若 $r\ne 0$. $0<r<t$. $r=i-qt$ $g^r = g^i (g^{-t})^q = b\cdot (a^{-1})^q \in H$.

矛盾. $r=0$. $b=a^q$

4. $G=\langle a\rangle$ $H\le G$. $H=\langle b\rangle=\langle a^s\rangle$ $|G|=n=|a|$

$H=|b|=\dfrac{n}{(n,s)}$ $\Rightarrow |H| \mid |G|$.

4. 循环群是交换群

$x*y = g^s * g^t = g^{s+t} = g^{t+s} = g^t * g^s = y*x$.

§5.5 置换群

1. n次对称群 $\langle S_n, \cdot \rangle$

$S_n = \{n$元集合上的置换$\}$.

n次置换群：S_n的子群

$|\sigma_I|$：n次1阶置换群

S_n：n次 $n!$阶置换群

旋转　翻转

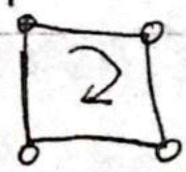
$S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

三次二面体群 D_3.

$|S_4| = 24$　　$D_4 = \{\rho_0 \sim \rho_3, \mu_1, \cdots, \mu_4\}$

4次二面体群

$\rho_0 \sim \rho_3$



$\mu_1 \sim \mu_4$　　$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{对边}}}{\frac{n}{2}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{对顶点}}}{\frac{n}{2}}$

$\Rightarrow D_n = \{\rho_0, \cdots, \rho_{n-1}, \mu_1, \cdots, \mu_n\}$

n次二面体群.

2. $S_n = \langle \{(1,2), \cdots, (1,n)\} \rangle$

(1) $\supseteq$：$(1,2), \cdots, (1,n) \in S_n$.

$(1i)$ 逆元 $(1i)$

$x = a_1^{e_1} \cdots a_s^{e_s} \in S_n$.

(2) $\subseteq$：归纳. $n=2$.

① $\sigma_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (12)^2$　$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$.

② 假设$n=k$时成立.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix}$ 可表示为$(12), \cdots, (1k)$之积.

当 $n=k+1$ 时.

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(k) & \sigma(k+1) \end{pmatrix}$$

1° $\sigma(k+1)=k+1$. $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) \end{pmatrix}$ 轮换.

2° $\sigma(k+1)\neq k+1$.

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots & l & \cdots, & k, & k+1 \\ & & & \underset{\sigma(l)}{\overset{k+1}{\shortparallel}} & & & \sigma(k+1) \end{pmatrix}$$

考察 $\sigma_l=\sigma(l,k+1)$. $k+1\to l \xrightarrow{\sigma} k+1$.

$\sigma_l=(1,2)\cdots(1k)$ 之积.

$\sigma=\sigma_l\cdot\underbrace{(l,k+1)}_{\text{分解为1的对换}}=$

$(1\,l)(1\,k+1)(1\,l)$

§5.6 群的同构.

1. 群的同构 $\langle G_1,*\rangle$. $\langle G_2,*\rangle$ 是两个群.

若存在双射 ϕ. $G_1\to G_2$

且保持运算 $\phi(a*b)=\phi(a)*\phi(b)$

称 G_1. G_2 同构. 记 $G_1\cong G_2$ 双射 ϕ 称为同构映射.

2 若 φ 是 G_1. G_2 的同构映射. e_1、e_2 是 G_1. G_2 的单位元. $a\in G_1$.

(1) $\varphi(e_1)=e_2$

(2) $\varphi(a')=(\varphi(a))'$ $\forall a\in G_1$

3. 同构是等价关系

① 自反. ② 对称 ③ 传递

4. $G=\langle a\rangle$ 则

(1) 若 a 无限阶，则 $G\cong\langle Z,+\rangle$

(2) 若 a 有限阶，则 $G\cong\langle Z_n\ +_n\rangle$.

Pf: (1) $\varphi: G\to Z$

$$a^m\to m$$

$$\varphi(a^{m_1}*a^{m_2})\overset{?}{=}\varphi(a^{m_1})+\varphi(a^{m_2})$$

$$\varphi(a^{m_1+m_2}) = m_1+m_2$$

(2) 设 $|a|=n$.

$G=\{a^0,a^1,\cdots,a^{n-1}\}$

$a^m=a^{kn+r}=(a^n)^k\cdot a^r=a^r$

$\varphi: G\to Z_n$

$a^i\longrightarrow i$

$$\varphi(a^{i_1}\cdot a^{i_2})\overset{?}{=}\varphi(a^{i_1})+_n\varphi(a^{i_2})$$

$$\varphi(a^{i_1+i_2})=\varphi(a^{(i_1+i_2)\bmod n})=(i_1+i_2)\bmod n=\varphi(a^{i_1})+_n\varphi(a^{i_2})$$

$\cancel{i_1+i_2}$

5. 任一个群都与一个置换群同构.

Pf. 设 $\langle G,*\rangle$ 是任一个群

① $\forall a\in G$. 定义 G 上的一个置换

$f_a=\{a*x\}$ $f(a): G\to G\}$.

单: $a*x=a*x'\Rightarrow x=x'$

满: $\forall x\in G$. 原像 $a'*x$

∴ f_a 是 G 上的置换

② 令 $G'=\{f_a\mid a\in G\}$.

则下证 G' 是一个群. $\langle G',\circ\rangle$.

封闭: $f_a\circ f_b\overset{?}{=}f_c$

$\quad\quad\quad\quad = f_{(a*b)}(x)$

结合律 ✓ 单位元: f_e.. 逆元 $(f_a)^{-1}=f_{a'}$.

③ 令 $\varphi \quad G \longrightarrow G'$

$\quad a \longmapsto f_a$

下证保持运算.

$$\varphi(a*b) \overset{?}{=} \varphi(a)\circ\varphi(b)$$

$$f_{a*b} = f_a\circ f_b$$

例. 与 C_n 同构的置换群 $\langle (a^0,\cdots,a^{n-1})\rangle$

pf: $C_n=\langle a\rangle=\{a^0,a^1,\cdots,a^{n-1}\}$

令 $G'=\{f_{a^0},\cdots,f_{a^{n-1}}\}$.

$f_{a^i}=(f_a)^i \quad G'=\langle f_a\rangle$.

$$f_a=\begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^0 \end{pmatrix} = (a^0,\cdots,a^{n-1}).$$

长为 n 的轮换.

$|f_a|=n$.

第6章 商群

§6.1 陪集与 Lagrange 定理

1. 模 H 同余: 群 G. $H\le G$

$\forall a.b\in G$. 若 $a*b'\in H$ 称 a 与 b 模 H 同余. 记 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ H)$ (右 | 左)

$a'*b\in H$

2. 模 H 同余的性质.

① 自反 $\quad a*a'=e\in H.\quad a\equiv a\ (\mathrm{mod}\ H)$

② 对称 $\quad a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ H)\Rightarrow a*b'\in H \overset{H是子群}{\Rightarrow} b*a'\in H \Rightarrow b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ H).\quad H\le G$

③ 传递 $\quad a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ H),\ b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ H) \Rightarrow a*b',\ b*c'\in H \Rightarrow (a*b')*(b*c') = a*c'\in H$

∴ 模 H 同余是等价关系 $\quad ah \quad aH \quad$ 左陪集

3. 模 H 同余的等价类 $[a]_R=\{ha\mid h\in H\}\triangleq Ha$. 称为右陪集

$=\{b\mid b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ H)\}=\{b\mid b*a'\in H\}$.

4. 右陪集的性质

① $Ha\ne\phi.\quad a\in Ha$.

② $\forall a.b\quad Ha=Hb\Leftrightarrow a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ H)$. 否则 $Ha\cap Hb=\phi$.

③ $H_e=H$.

④ $H_a=H\quad \forall a\in H$.

一般左右陪集不相同

5. $S_L=\{aH \mid a\in G\}$. $S_R=\{Ha \mid a\in G\}$.

则 S_L 与 S_R 等势

Pf: $f: S_L \to S_R$ 　　$a\equiv b \pmod H) \Rightarrow aH=bH$. $\Rightarrow f(a)=f(b)$.

$aH \to \underline{Ha'}$ (Ha 不可)

良定: ① $aH=bH \Rightarrow f(aH)=f(bH)$

$\Rightarrow Ha'=Hb'$ 　$a'*b\in H$ 　$(a'*b)'=b'*(a')'\in H$. 　$Hb'=Ha'$.

② 满射.

$\forall Ha\in S_R$, $a\in G$ 　$a'\in G$. $\exists a'H\in S_L$ s.t. $f(a'H)=Ha$

③ 单射

若 $f(aH)=f(cH) \overset{?}{\Rightarrow} aH=cH \Rightarrow a'*c\in H$.

即 $Ha'=Hc' \Rightarrow a'*(c')'\in H$

6. 指数 $[G:H]$: 子群 H 在 G 中的指数 $\triangleq$ G 关于 H 的左.右陪集的个数

7. Lagrange 定理

$|G|=[G:H]\cdot|H|$

Pf: 以右陪集为例

(1) 所有右陪集等势于 H.

$f: H \to Ha$

$h \to ha$

(2) $|G|=|Ha_1|+\cdots+|Ha_t|=[G:H]\cdot|H|$

推论1: $|H| \mid |G|$ 　设 $a\in G$ 　a 的阶为 m 则 令 $H=\{a^0,\cdots,a^{m-1}\}$. 　$m \mid |G|$.

推论2: 素数阶群必是循环群

Pf: 设 $|G|=p$ 则 G 只有 1阶 \ p阶 元素

$|\langle a\rangle|=1$ 或 p. 　$\begin{cases} |\langle a\rangle|=1 \Rightarrow a=e \\ |\langle a\rangle|=p=|G|. \Rightarrow \langle a\rangle=G \end{cases}$

$\boxed{p\text{是素数}}$

例] G是有限交换群. $p \mid |G|$. 则G中必有一个p阶元. $p=1$ e.
(p≥2)

Pf: 对|G|归纳证明.

(1) $|G|=2$. $p=2 \mid |G|$ $G=\{e,a\}=\langle a\rangle \leftarrow$ 二阶元

(2) 假设 $|G|<k$ 时结论成立.

则当 $|G|=k$ 时 $p \mid k$

$\forall e\neq a\in G$. 设 $|a|=t$, $t \mid k$.

1° $p \mid t$. 则 $a^{\frac{t}{p}}$ 是p阶元

2° $p \nmid t$ $\left.\begin{array}{l}\langle a\rangle \leq G. \\ G\text{是交换群}\end{array}\right\} \Rightarrow \langle a\rangle \lhd G.$

商群 $G/\langle a\rangle$ $|G/\langle a\rangle|=\frac{k}{t}<k.$

$\left.\begin{array}{l}p \mid k \\ p\nmid t\end{array}\right\} \Rightarrow p \mid |G/\langle a\rangle|$. $G/\langle a\rangle$有一个p阶元. 设为 $b\langle a\rangle$

即 $(b\langle a\rangle)^p=\langle a\rangle$ 且 $b\in G$ $|b|=u$.

$(b\langle a\rangle)^u=b^u\langle a\rangle=\langle a\rangle$. 而 $|b\langle a\rangle|=p$

$\therefore p \mid u$. $b^{\frac{u}{p}}$ 是p阶元.

反例] $A_4=\{4\text{次偶置换}\}\subseteq S_4$.

$|A_4|=12=2\times 6$ 而 A_4 无6阶元.

A_4: e. 3个二阶元. 8个三阶元.

设H是 A_4 的6阶子群.

H

§6.3 群的同态

1. 同态：群 $\langle G_1, * \rangle$. $\langle G_2, \cdot \rangle$ 若存在映射 $\varphi: G_1 \to G_2$

若G_2不是群 $\varphi(G_1)$也是群.

保持运算 $\varphi(a*b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

称 φ 是 G_1 到 G_2 的同态映射.

同构：单同态. 满同态.

2. 同态性质： $\varphi(e_1) = e_2$.

$\varphi(a') = (\varphi(a))'$

3. 同态核. $\mathrm{Ker} f = \{x \mid f(x) = e_2, x \in G_1\} \leq G_1$.

$\mathrm{Ker} f \neq \phi$ $\quad e_1 \in \mathrm{Ker} f$

① $\mathrm{Ker} f \lhd G_1$

② f 是单同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{e_1\}$.

Pf: ① (a) $\mathrm{Ker} f \leq G_1$.

$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Ker} f$. $f(x_1) = e_2$, $f(x_2) = e_2$

$\Rightarrow f(x_1 * x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) = e_2 \Rightarrow x_1 * x_2 \in \mathrm{Ker} f$

$\forall x_1 \in \mathrm{Ker} f \quad f(x_1') = (f(x_1))' = (e_2)' = e_2 \Rightarrow x_1' \in \mathrm{Ker} f$.

(b) $\forall g \in G_1, h \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow g' * h * g \in \mathrm{Ker} f$.

$f(g' * h * g) = f(g') * f(h) * f(g) = f(g') * f(g) = f(g' * g) = e_2$

② $\Rightarrow \checkmark$.

$\Leftarrow \quad \forall a_1, a_2 \quad f(a_1) = f(a_2) = g_2$.

$f(a_1) \cdot (f(a_2))' = g_2 \cdot g_2' = e_2 = f(a_1 * a_2')$.

$a_1 * a_2' = e \Rightarrow a_1 = a_2$.

零同态. $\varphi: G_1 \to G_2$. $\varphi(a) = e_2$. $\forall a \in G_1 \quad \mathrm{Ker}\varphi = G_1$.

自然同态. $N \lhd G$.

$\varphi: \quad G \to G/N$. $\quad \mathrm{Ker}\varphi = \{x \mid xN = N\}$

$a \to aN$. $\quad = \{x \mid x \equiv e_1 (\mathrm{mod}\, N)\}$.

$= N$.

例. $G_1=\langle Z,+\rangle$. $G_2=\langle C,\cdot\rangle$

$f: Z\to C$

$m \to i^m$

$4k \to 1$
$4k+1 \to i$
$4k+2 \to -1$
$4k+3 \to -i$

$\operatorname{ran} f \subsetneq C$.

$f(m+m_1)=i^{m+m_1}=i^m\cdot i^{m_1}=f(m)\cdot f(m_1)$ 同态.

$\ker f=\{m \mid i^m=1\}=\{4k \mid k\in Z\}$.

4. $f: G_1\to G_2$ 的同态映射.

则 ① $H\le G_1$. 则 $f(H_1)\le G_2$ ($f(G_1)$)

特别的 $f(G_1)\le G_2$.

↑同态像.

② $H_1 \lhd G_1$ 则 $f(H_1)\lhd f(G_1)$　$f(G_1)$是群.

③ $H_2\le f(G_1)$ 则 $f^{-1}(H_2)\le G_1$.

④ $H_2\lhd f(G_1)$ 则 $f^{-1}(H_2)\lhd G_1$

且 $G_1/f^{-1}(H_2)\cong f(G_1)/H_2$.

pf: ② $f(H_1)\le f(G_1)$ ✓

$\forall y\in f(G_1),\ z\in f(H_1) \overset{?}{\Longrightarrow} y^{-1}\cdot z\cdot y\in f(H_1)$

$y=f(g)$, $\exists g\in G_1$; $z=f(h)$, $\exists h\in H_1$.

$y^{-1}\cdot z\cdot y=(f(g))^{-1}\cdot f(h)\cdot f(g)$

$=f(g^{-1})\cdot f(h)\cdot f(g)=f(\underbrace{g^{-1}*h*g}_{\in H_1})\in f(H_1)$.

③ $f^{-1}(H_2) < G_1$.

1) $\forall h_1,h_2\in f^{-1}(H_2) \overset{?}{\Rightarrow} h_1*h_2\in f^{-1}(H_2)$ ($\Leftrightarrow f(h_1*h_2)\in H_2$).

$f(h_1*h_2)=f(h_1)\cdot f(h_2)\in H_2$.

$f^{-1}(H_2)\le G$.

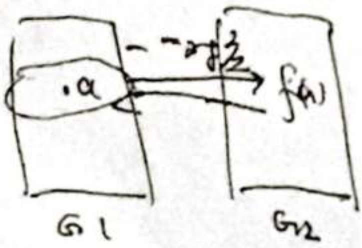
2) $\forall h\in f^{-1}(H_2) \overset{?}{\Rightarrow} h^{-1}\in f^{-1}(H_2)$.

$\therefore f^{-1}(H_2)\le G$.

5. $f^{-1}(H)=\{x \mid f(x)\in H\}$. 原像集合

$f^{-1}(f(a)) \ni a$ ✗

$f(f^{-1}(b)) \ni b$ ✓



(3) 同态映射 $f: G_1\to G_2$, 则 $f^{-1}(f(a)) = a\ker f$

已有: $f(a\ker f)=f(a)$.

Pf. $f^{-1}(f(a))=\{x\in G_1 \mid f(x)=f(a)\}$.

即 $f(a)$的原像集.

① $f^{-1}(f(a)) \subseteq a\ker f$: a关于kerf的(左)陪集.

$x\in a\ker f$

$a'*x\in\ker f$.

$\forall x\in f^{-1}(f(a)) \Rightarrow f(x)=f(a)$ $\quad f(a'*x)=f(a')*f(x)=e_2$

② $a\ker f \subseteq f^{-1}(f(a))$.

$\forall y\in f(G_1)$. y与$G_1/\ker f$的元素一一对应.

6. 群同态定理

① G_1的任意商群都是G_1的同态像 $f(G_1)$.

② 任一同态 $f: G_1\to G_2$ $\quad f(G_1)\cong G_1/\ker f$.

Pf: ① 对G_1和G_1的任一个商群构造一个同态像.

$G_1/N \quad N\triangleleft G_1$.

$=\{aN, bN\cdots\}$

$$f:\quad G_1 \longrightarrow G_1/N$$
$$a \longrightarrow aN.$$

满V. $f(a*b)=(a*b)N=aN\cdot bN=f(a)\cdot f(b)$.

② 令 $\hat f$: $G_1/\ker f \longrightarrow f(G_1)$.

$a\ker f \longrightarrow f(a)$

(1) $\hat f$与代表元无关.

(2) 单 若 $\hat f(a\ker f)=\hat f(b\ker f)$.

$\Rightarrow a\ker f = b\ker f$

即 $f(a)=f(b) \Rightarrow a'*b\in\ker f$

(3) 满 $\forall y \in f(G_1)$ $\therefore \exists a \in G_1$ 使 $f(a)=y$.

$\therefore \exists a\ker f \in G_1/\ker f$. $\hat{f}(a\ker f) = f(a) = y$.

(4) 运算: $\hat{f}(a\ker f \cdot b\ker f)$

$= \hat{f}(a*b\ker f)$

$= f(a*b) = f(a) * f(b) = \hat{f}(a\ker f) \cdot \hat{f}(b\ker f)$

4. ④ $G_1/f^{-1}(H_2) \cong f(G_1)/H_2$

Pf: $\hat{f}: G_1 \longrightarrow f(G_1)/H_2$. (如果是一个满同态 $(\hat{f})$, 则与 $G_1/\ker\hat{f}$ 同构) $f(G_1)/H_2$

$a \longrightarrow f(a)H_2$.

同态: $\hat{f}(a*b) \Rightarrow \hat{f}(a) \cdot \hat{f}(b)$

满: $\forall y \cdot H_2 \in f(G_1)/H_2$

$\exists a \quad y = f(a) \quad \hat{f}(a) = y \cdot H_2$.

$\ker\hat{f} = \{x \mid f(x)H_2 = H_2\}$

$= \{x \mid f(x) \in H_2\} = f^{-1}(H_2)$.

$\therefore f(G_1)/H_2 \cong G_1/f^{-1}(H_2)$

例. $H. K$ 是 G 的正规子群

$K \subseteq H$ 则 $G/H \cong \dfrac{G/K}{H/K}$

$|G/H| < |G/K|$

$= \dfrac{|G|}{|H|} = \dfrac{|G|/|K|}{|H|/|K|}$ $\quad = |G|/|K|$

证. ① $K \lhd H$

$K \leq H \checkmark$ K 正规

$\left.\begin{matrix} K \lhd H \\ H \lhd G \end{matrix}\right| \not\Rightarrow K \lhd G$. $\quad \left.\begin{matrix} H \lhd G \\ K \lhd G \\ K \subseteq H \end{matrix}\right| \Rightarrow K \lhd G$.

② $\exists f: G/K \longrightarrow G/H$? 且 f 满

令 $f: G/K \longrightarrow G/H$

$aK \longrightarrow aH$.

要证满同态: 代表元. 满. 保持运算.

(1) $aK = bK \Rightarrow aH = bH$.

$a^{-1}*b \in K \subseteq H$. $\therefore aH = bH$.

(2) $f(aK \cdot bK) = f(a*bK) = a*bH = aH \cdot bH = f(aK) \cdot f(bK)$

(3) 满. $\forall aH \in G/H$ $\exists aK \in G/K$. s.t. $f(aK) = aH$

$\ker f = \{aK \mid f(aK)=H\} = \{aK \mid aH=H\} = \{aK \mid a\in H\} = H/K$.

$\therefore G/H \cong \dfrac{G/K}{H/K}$.

第7章 环和域

§7.1 环的定义

1° R上定义两个运算 +. ·

若 (1) $\langle R,+\rangle$ 是交换群.（+单位元: 0元）（逆元: 负元）

(2) $\langle R,\cdot\rangle$ 是有单位元的半群（封闭、单位元、结合律）（·单位元: 1元）（逆元）

(3) · 对 + 有分配律（双向）

$$\begin{cases}(a+b)\cdot c = ac+bc \\ c\cdot(a+b) = ca+cb.\end{cases}$$

称R是环、记作 $\langle R,+,\cdot\rangle$.

注: 交换环: ·有交换律

域: R一切关于·都有逆元.

例: $\langle Z,+,\cdot\rangle$ $\langle Q,+,\cdot\rangle$

$\langle R,+,\cdot\rangle$ $\langle C,+,\cdot\rangle$

Z_n 整数矩阵 $\langle Z_n,+,\cdot\rangle$. 非交换环

$\langle P(A),\cap,\cup\rangle$ $\langle P(A),\cup,\cap\rangle$

$\langle Z_n,+,\cdot\rangle$ Z_n剩余类

例. $\langle G,\dot{+}\rangle$ 交换群.

$E=\{f \mid f: G\to G$ 同态映射$\}$.

$\langle E,+,\circ\rangle$. $(f+g)(a) := f(a)\dot{+}g(a)$

① $\langle E,+\rangle$ 交换群?

1° 封闭 $\forall f,g\in E \Rightarrow f+g\in E$.

$\forall a\in G$. $(f+g)(a) = f(a)+g(a) \in G$.

保持运算 $(f+g)(a+b) \overset{?}{=} (f+g)(a)+(f+g)(b)$.

个 G是交换群.

2° 结合律.

$(f+g)+h \overset{?}{=} f+(g+h)$.

3° 单位元 (0元) $f_0: G \to G$

$a \to \underset{G中零元}{\underline{0_G}}$.

4° 负元: $-f: G \to G$.

$a \to -f(a)$

(2) $\langle E, \circ \rangle$ 含1半群.

1° $f \circ g \in E$. 封闭性.

2° 结合律.

3° 单位元. $f_1: x \to x$.

(3) · 对 + 有分配律.

$f \circ (g+h) \overset{?}{=} f \circ g + f \circ h$. $\langle E, +, \circ \rangle$ 为非交换环.

2. 零元0和乘法单位元1的性质.

(1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(2) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

特别的 $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$

(3) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

① $0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

· $\langle R, + \rangle$ 是群 有消去律. $0 \cdot a = 0$.

② $a \cdot (-b) + a \cdot b \overset{?}{=} 0$

$\Rightarrow a \cdot (-b+b) = a \cdot 0$

③ $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$

3 平凡环 $R=\{0\} \Leftrightarrow 0_R = I_R$

4 可逆元 $\exists a'$ 使 $a \cdot a' = 1$.（乘法逆元）

令 $S = \{r \mid r$ 是可逆元$\}$. $1 \in S$

$\langle S, \cdot \rangle$ 是群

① 封闭 ② 结合 ③ 单位元 ④ 逆元

$\langle P(A), \oplus, \cap \rangle$ 零元 $\phi = 0$. 负元 B 单位元 A.（交换环

§7.2 格环和域

1. 左零因子 a: $a \neq 0$ 若 $\exists b \neq 0$ s.t. $a \cdot b = 0$
（右）

（此时 b 为右零因子）.

零因子: a 既是左零因子又是右零因子.

2. 环 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 有左.右消去律 $\Leftrightarrow$ R 中没有左（右）零因子.

Lemma. Pf: (1) R 中没有左零因子 $\Leftrightarrow$ R 中没有右零因子

反证 $\Rightarrow$ 若 b 是右零因子. 则 $b \neq 0$ $\exists a \neq 0$ s.t. $a \cdot b = 0$

则 a 为左零因子矛盾.

$\Leftarrow$

Pf: 2. $\Rightarrow$ 有（左）消去律. $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

$a \cdot (b-c) = 0$

反证. 若 a 是左零因子 $\exists b \neq 0$. 矛盾

$a \cdot b = 0 = a \cdot 0$ 左消去律 $\Rightarrow b = 0$

$\Leftarrow$ $\forall a \cdot b = a \cdot c$ $(a \neq 0)$ $\Rightarrow b = c$.

$a \cdot (b-c) = 0$ 若 $a \neq 0$. 无左零因子 $\therefore b - c = 0$. $b = c$

3. 整环：非平凡交换环 + 无零因子.

实数二阶矩阵

$\langle M_2(R), +, \cdot \rangle$ 环.

$\langle Z_n, +_n, \times_n \rangle$ $\langle Z_p, +_n, \times_n \rangle$ 是整环（p 素数）

$Z_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$.

4. 加阶 $\forall a \in R$ 使

$na = a + \cdots + a = 0$ 成立的最小正整数

5. 在整环中 $\forall a \neq 0$. a 的加阶是 ∞ 或素数.

整环的特征：$\forall k$ $p \mid k$

则 $ka = 0$. $\forall a \in R$

$(a+b)^p = a^p + b^p$

pf. (1) 1的加阶与非0元加阶的关系.

设1的加阶为 $\underbrace{m}_{\text{无限 有限}}$. $m \cdot 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m} = 0$.

$\forall a \neq 0$. 设加阶为 t $t \cdot a = \underbrace{a + \cdots + a}_{t} = a \cdot 1 + \cdots + a \cdot 1$

$= a \cdot (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{t}) = 0$.

若1的加阶无限 $\forall a \neq 0$. a 的加阶无限.

若1的加阶 $m < \infty \Rightarrow m$ 是素数 p 且 $\forall a \neq 0$ 的加阶也是 p.

(反证)若 $m = n_1 n_2$ $1 < n_1, n_2 < m$.

$0 = m \cdot 1 = (n_1 \cdot n_2) \cdot 1 \underset{1\cdot 1 = 1}{=} (n_1 \cdot 1) \cdot (n_2 \cdot 1)$ (消去律) 整环 | $n_1 \cdot 1 = 0$ 或 $n_2 \cdot 1 = 0$. 矛盾.

$$\begin{tikzcd}
\text{环}(R, +, \cdot) \arrow[r, "\substack{\text{交换环}\\ \text{无零因子}}"] \arrow[d, "\substack{\text{交换环}\\ \forall\text{非0元有逆}}"'] & \text{整环} \arrow[dl, Rightarrow, shift left, "\substack{+\text{有限}\\ \text{反例}(Z, +, \cdot)}"] \\
\text{域} \arrow[ur, Rightarrow, shift left] &
\end{tikzcd}$$

整环 $\begin{cases} 1\text{的加阶无限} \\ 1\text{的加阶为素数} \end{cases}$

2. 域是整环

Pf: $(F,+,\cdot)$ 是域 $\forall a\neq 0$ $a^{-1}\in F$.

若 $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0$ 或 $b=0$.

若 $a=0$ ✓

若 $a\neq 0$ $a^{-1}\cdot a\cdot b=a^{-1}\cdot 0=0 \Rightarrow b=0$. $\therefore F$ 是整环.

3. 有限整环是域

Pf: 设 $R=\{a_1,\cdots,a_n\}=\{0,\underbrace{1,a_2,\cdots,a_n}\}$ 整环.

$\forall j=2,\cdots,n$ $a_j\cdot R=\{0,a_j,a_j\cdot a_2,\cdots,a_j\cdot a_n\}\subseteq R$.

$a_i\neq a_k \Rightarrow a_ja_i\neq a_ja_k$

$\left.\begin{array}{l}\therefore |a_jR|=|R| \\ a_jR\subset R\end{array}\right\} \Rightarrow a_jR=R$.

$\exists i$ s.t. $a_i\cdot a_j=1$. $a_i=a_j^{-1}$ $\therefore R$ 是域

例 $(\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\},+,\cdot)\triangleq(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot)$ 是域.

Pf: $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+)$ 交换群

$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\cdot)$ 含1半群. 交换.

分配律

$\forall a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 有逆元. $c+d\sqrt{2}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}$

§7.3 子环和同态

1. 子环: 在环 $(R,+,\cdot)$ 中 $S\subset R$.

若 (1) $(S,+)$ 是 $(R,+)$ 的子群.

(2) S 对 $\cdot$ 封闭.

(3) $1\in S$.

则称 S 为 R 的子环.

例 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ 是 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ 的子环

例 已知 $(R,+,\cdot)$ 是环

令 $Z(R)=\{x \mid x\in R,\ \forall a\in R\quad xa=ax\}$.

则 $(Z(R),+,\cdot)$

(1) 对 + 封闭 $\forall x,y\in Z(R)\quad \forall a\in R\quad a(x+y)\overset{?}{=}(x+y)a$

$ax+ay=xa+ya=?$

(2) 对负元封闭

$\forall x\in Z(R)\quad (-x)\cdot a=-(x\cdot a)=-(a\cdot x)=a\cdot(-x)$.

(3) 对 · 封闭

$\forall x\cdot y\in Z(R)\quad (x\cdot y)\cdot a\overset{?}{=}a\cdot(x\cdot y)$

$x\cdot(y\cdot a)=x\cdot(a\cdot y)=(a\cdot x)\cdot y$

(4) $1\cdot a=a=a\cdot 1\quad 1\in Z(R)$.

2. 环同态.

$(R_1,+,\cdot)$ 和 $(R_2,*,\circ)$ 是两个环.

若 ∃ 映射 $f: R_1\to R_2$ 满足

$$\begin{cases} f(a+b)=f(a)*f(b) \\ f(a\cdot b)=f(a)\circ f(b) \\ f(1_{R_1})=f(1_{R_2}) \end{cases}$$

称 f 为 $R_1\to R_2$ 环同态映射. 是 $(R_1,+)\to(R_2,*)$ 的群同态

f 单 单同态……

满 满同态……

双 同构……

例 $\langle \mathbb{Z}_{24},+,\cdot\rangle\quad \langle \mathbb{Z}_4,+,\cdot\rangle\quad f:[a]_{24}\to[a]_4$

pf. ① f 与代表元无关

② $f([a]_{24}\dot{+}[b]_{24})=f([a\dot{+}b]_{24})=[a\dot{+}b]_4=[a]_4\dot{+}[b]_4$

③ $f([1]_{24})=f([1]_4)$.

满同态.

3. f 是 $R_1 \to R_2$ 的环同态.

则 (1) $f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$
(2) $f(-a) = -f(a)$ } 群同态性质.
(3) 若 a 是 R_1 的可逆元. 则 $f(a)$ 是 R_2 的可逆元. 且 $f(a') = f(a)'$
(4) $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

4. 环同构 $f: R_1 \to R_2$

若 R_1 是整环(域) 则 R_2 是整环(域)

Pf: (1) ① 非平凡 $0_{R_1} \neq 1_{R_1}$

$f(0_{R_1}) = 0_{R_2} \neq f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

② 交换 $\forall\ y_1 y_2 \in R_2$

$y_1 y_2 = f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2) = f(x_2 \cdot x_1) = y_2 y_1$

③ 无零因子

若 $y_1 \cdot y_2 = 0_{R_2} \Rightarrow y_1 = 0_{R_2}$ 或 $y_2 = 0_{R_2}$.

$0_{R_2} = y_1 \cdot y_2 = f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1 \cdot x_2)$.

$x_1 \cdot x_2 = 0_{R_1}$ R_1 无零因子.

(2) ③ $\forall\ y \neq 0_{R_2}$.

$\exists\ x \in R_1$ $y = f(x)$

$x \neq 0_{R_1}$, R_1 为域 $\Rightarrow x$ 有逆元 x'

$f(x') \cdot y = f(x') \cdot f(x) = f(x' \cdot x) = f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

5. 已知 $\langle R_1, +, \cdot \rangle$ 为环. 代数结构 $\langle R_2, +, \cdot \rangle$

若 $\exists$ 映射 f: $R_1 \to R_2$
(满)

$f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

则 R_2 是环

§7.4 理想与商环

1. 理想：$I \subseteq R$. $I \neq \phi$. 若

(1) $\forall x, y \in I$. $x - y \in I$.

(2) $\forall x \in I$. $\forall r \in R$.

$x \cdot r \in I$. $r \cdot x \in I$

性质 ① $\left\{\begin{matrix} R \\ \{0\} \end{matrix}\right.$ 是平凡理想.

② (1) ⇒ $\langle I, + \rangle$ 是 $\langle R, + \rangle$ 的子群 $0_R \in I$.

③ 理想是子环? $1 \notin I$. ×

④ 子环是理想? ×

2. 真理想：非平凡理想.

例：$\langle Z_6, +_6, \times_6 \rangle$ $I = \{[0], [3]\}$

$\langle Z \times Z, +, \cdot \rangle$ $I = \{(0, n) \mid n \in Z\}$

模I同余：$x - y \in I$

3. 环R的理想I：

模I同余：$x - y \in I$.

① 等价关系. 自反. 对称. 传递

② 等价类 $[r]_I = \{x \mid x - r \in I\} = \{x \mid x = r + i, i \in I\} = r + I$.

$Z \times Z/I = \{\{(i, y) \mid y \in Z\} \ i = 0, 1, \cdots\}$

③ 商集 $R/I = \{r + I \mid r \in R\}$.

定义运算 $+$. $\cdot$

$[x] + [y] = [x + y]$

$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]$

④ $\langle R/I, +, \cdot \rangle$ 构成环. 商环.

Pf: (1) 运算 +, · 与代表元无关.
(2) R/I 关于 + 构成交换群
· 构成含 1 半群
· 对于 + 有分配律

4. 若理想 I 含有可逆元 r, 则 $I=R$
$\Rightarrow 1_R \in I$
$\Rightarrow I=R$

5. 域 F 只有平凡理想 {0} 和 F.
商域 $F/F=\{F\}$. $F/\{0\}=\{\{x\} \mid x\in F\}$

6. 主理想
R 是 $\boxed{交换}$ 环. $a\in R$
$(a)=\{a\cdot r \mid r\in R\}$ 是 R 的一个理想, 称为主理想
① $a\cdot r_1-a\cdot r_2=a\cdot(r_1-r_2)\in(a)$
② $a\cdot r_1\cdot r= a\cdot(r_1\cdot r)\in(a)$ 交换环.
推广: $S=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 生成的理想.
$\{r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_ma_m \mid r_i\in R\}$.

7. 主理想环: 若 R 的所有理想都是主理想.
例 $\langle Z,+,\cdot\rangle$ 是主理想环
Pf: ∀ 理想 I.
① $I=\{0\}=(0)$.
② $I\neq\{0\}$. I 含有非 0 元
令 a 是 I 中最小正整数
$\forall x\in I.\ x=qa+r \Rightarrow r=0$.
若 $r\neq 0$. $r=\underbrace{x}_{\in I}-\underbrace{qa}_{\in I}\in I$. $r<a$ 矛盾.

§7.5 多项式环

1. 环上多项式 $\langle R,+,\cdot\rangle$ $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

   $a_0,\cdots,a_n\in R$. $a_n\neq 0$.

   次数 $\deg(p(x))=n$. 非零常数:0次. 0_R: 零多项式. 次数任意

2. $R[x]$ = 环上多项式的集合.

   $\langle R[x],+,\cdot\rangle$ 是环. 多项式环.

3. R是整环. $\Rightarrow$ $R[x]$是整环.

4. 域上多项式.

   $F[x]$=域F上多项式的集合.

   ① 若 $g(x)\neq 0$ 则 $\forall f(x)\in F[x]$. 存在$q(x)$. $r(x)\in F[x]$.

   使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$.

   ②. $x-a$ 是$f(x)$的因式 $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$

   ③ $F[x]$是主理想环.

5. 域上的多项式商环.

   $F[x]$的 $I=(p(x))$

   $F[x]/p=\{f(x)+p \mid f(x)\in F[x]\}=\{p+\underbrace{b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}}_{\text{模}p\text{余式}}\}$.

   $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$.

   $[f(x)]_I=\{g(x)\mid g(x)-f(x)\in I\}$. $f(x)=\underbrace{g(x)p(x)}_{\in I}+r(x)$. $\Rightarrow f(x)-r(x)\in I$

例 $p(x)=x^2+x+1$. $Z_2[x]$ $Z_2=\{0,1\}$.

   $Z_2[x]/p=\{[0].[1].[x].[x+1]\}$.

§7.6. 环同态定理

1. 环同态. $R_1\longrightarrow R_2$

   核 $\ker\varphi=\{x\in R_1\mid \varphi(x)=0_{R_2}\}$.

2. $\ker\varphi$是R_1的理想

3. 环同态定理

   ① R_1的任意商环都是R_1的同态像

   ② $\varphi: R_1\longrightarrow R_2$.同态

   则 $R_1/\ker\varphi\cong R_2$

4. 环同态性质

① 0元 负元 逆元 单位元

② 不能保持整环、域（同构√）

③ 子环 理想

§8.1 格的定义与性质

1. 格的定义（部分序集）

设部分序关系 $\langle A, \preceq \rangle$ 若 $\forall a, b \in A$，都有最小上界、最大下界。存在一定唯一

上界 c. $a \preceq c$ 且 $b \preceq c$

最小上界 c_0. $\forall$ 上界 c. $c_0 \preceq c$.

则称 $\langle A, \preceq \rangle$ 为格

最小上界：$a \oplus b$ a 与 b 的和.

最大下界：$a * b$ a 与 b 的积

例：数集上的小于等于关系，

$\langle P(A), \subseteq \rangle$ $\begin{cases} a * b = a \cap b \\ a \oplus b = a \cup b \end{cases}$

$\langle Z, | \rangle$ $\begin{cases} a * b = (a, b) \\ a \oplus b = [a, b] \end{cases}$

$\langle L(G), \overset{(\subseteq)}{\leq} \rangle$ $\begin{cases} a * b = a \cap b \\ a \oplus b = \langle a, b \rangle \text{ 生成子群} \end{cases}$

G的子群簇

$\langle N(G), \subseteq \rangle$ $\begin{cases} a * b = a \cap b \\ a \oplus b = \langle a, b \rangle = ab \end{cases}$

G的正规子群

2. 格 $\langle A, \preceq \rangle$ 的性质

① 幂等律：$a * a = a$；$a \oplus a = a$

② 交换律：$a * b = b * a$

$a \oplus b = b \oplus a$

③ 结合律. $a*(b*c)=(a*b)*c$. $a\oplus(b\oplus c)=(a\oplus b)\oplus c$.

证: 令 $d=a*(b*c)$

$d'=(a*b)*c$.

下证 $d\leq d'$, $d'\leq d$.

只证 $d\leq a*b$

$d\leq c$.

④ 吸收律. $a*(a\oplus b)=a$

$a\oplus(a*b)=a$.

3. 格 $\langle A,\preceq\rangle$ 中

$\underset{①}{a\preceq b}\Longleftrightarrow \underset{②}{a*b=a}.\Longleftrightarrow \underset{③}{a\oplus b=b}$.

①⇒②

②⇒③ $b=b\oplus(a*b)=b\oplus a=a\oplus b$.

③⇒① $a\preceq a\oplus b=b$.

4. 分配不等式.

$a\oplus(b*c)\leq(a\oplus b)*(a\oplus c)$

$(a*b)\oplus(a*c)\leq a*(b\oplus c)$.

5. 若 $b\preceq c$

$a\oplus b\preceq a\oplus c$.

$a*b\preceq a*c$.

pf: $(a*b)*(a*c)=(a*a)*(b*c)=a*b$

6. 对偶原理.

格 $\langle A,\preceq\rangle$. 将命题 P 中的 $*$. $\oplus$. $\preceq$ 换成 $\oplus$ $*$. $\geq$. 得 P^*.

P^* 为 P 的对偶命题. P 为真 $\Longleftrightarrow P^*$ 为真.

7. 格 $\langle A, \preceq \rangle$. A的任意有限子集都有最大下界和最小上界

pf: 对子集S的基数归纳.

(1) $|S|=2$.

(2) 假设 $|S|=k$ 成立.

当 $|S|=k+1$ 时. 设 $S=\{a_1 \cdots a_k, a_{k+1}\}$

令 $S'=\{a_1, \cdots, a_k\}$. 最大下界 b' 最小上界 c'

令 $b=b' * a_{k+1}$. $c=c' \oplus a_{k+1}$

$\Rightarrow$ b是 $S=\{a_1 \cdots a_k, a_{k+1}\}$ 的最大下界

$b \preceq a_{k+1}$. $b \preceq b' \preceq a_i$ $i=1, \cdots, k$.

b是S的下界

$\forall \bar{b}$ 是S的下界

$\begin{cases} \bar{b} \preceq a_i & i=1, \cdots, k \Rightarrow \bar{b} \preceq b' \\ \bar{b} \preceq a_{k+1} \end{cases}$ $\Rightarrow \bar{b} \preceq b' * a_{k+1} = b$.

§ 8.2 几种特殊的格.

1. 完全格: 任一子集有最小上界. 最大下界 (例. A有限集)

有界格: 格 $\langle A, \preceq \rangle$ 有最大元1. 最小元0. ($\forall a \in A$. $0 \preceq a \preceq 1$).

补元: 有界格 $\langle A, \preceq, 1, 0 \rangle$ 中若 $a, b \in A$ 使

$\begin{cases} a \oplus b = 1 \\ a * b = 0 \end{cases}$ 称a, b互为补元

① $\forall a \in A$ a不一定有补元

② 补元不一定唯一

2. 有补格: 有界格 $\langle A, \preceq, 1, 0 \rangle$ $\forall a \in A$. a至少有一个补元

3. 分配格: 格 $\langle A, \preceq \rangle$ 中.

$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$,

$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c)$

① 线性序集是分配格.

pf: $\forall a.b.c.$

① $a\le b$或$a\le c$.

$a*(b\oplus c) \ngeq (a*b)\oplus(a*c)$

$\overset{\parallel}{a}$ $\quad$ $\overset{\parallel}{a}\oplus(a*c)=a$.

② $b\le a$且$c\le a$.

$a*(b\oplus c) \ngeq (a*b)\oplus(a*c)$

$\overset{\parallel}{b\oplus c} \quad = \quad \overset{\parallel}{b\oplus c}$

② 分配格$\langle A,\preceq\rangle$ $\forall a.b.c\in A$. 则有消去律.

$$\begin{cases} a\oplus b=a\oplus c \\ a*b=a*c \end{cases} \Rightarrow b=c.$$

pf: $b=b\oplus(b*a)=b\oplus(a*c)=(b\oplus a)*(b\oplus c).=(a\oplus c)*(b\oplus c)$

$=c\oplus(a*b)=c\oplus(a*c)=c.$

③ 分配有补格补元唯一

4. 布尔格: 有补分配格 $\langle A,\oplus,*,\text{①}^{\text{补}},1,0\rangle$

§ 8.3 格—代数系统

1. 格. $\langle A,*,\oplus\rangle$若

(1) 交换律 $a*b=b*a$ $\quad a\oplus b=b\oplus a$

(2) 结合律 $(a*b)*c)=a*(b*c)$ $\quad (a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$

(3) 吸收律 $a*(a\oplus b)=a$ $\quad a\oplus(a*b)=a$

称$\langle A,*,\oplus\rangle$为格

2. 推论: 格有幂等律

$a*a=a*(a\oplus(a*b))=a$.

3. 格的两个定义等价.

Pf. (1) 部分序集 $\Rightarrow$ 代数系统

(2) …………… $\Leftarrow$ ……………

① 部分序集 $\langle A, \leq \rangle$.

② $\forall a, b \in A$. a与b有最大下界. 最小上界

① 在A上定义二元关系:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a * b = a$$

另: $a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b$.

事实上: $\Rightarrow$: $a \oplus b = (a * b) \oplus b = b$.

$\Leftarrow$: $a * b = a * (a \oplus b) = a$.

$\preceq$: 自反: 反对称: 传递: $\checkmark$

② $a \oplus b$是最小上界. $a * b$是最大下界.

上界 $\begin{cases} a \leq a \oplus b \\ b \leq a \oplus b \end{cases}$

最小 $\forall c$. $a \leq c$. $b \leq c \Rightarrow a \oplus b \leq c$.

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus c \oplus b = c \oplus b = c.$$

4. 子格: 格 $\langle A, *, \oplus \rangle$ $B \subseteq A$. $B \neq \phi$

若B对$*$. $\oplus$封闭称 $\langle B, *, \oplus \rangle$为$\langle A, *, \oplus \rangle$的子格.

子格是格.