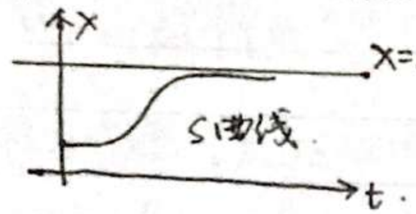
例 新产品销售模型

令 $x(t)$ 为 t 时刻销量. 因性能良好具有宣传效应. 销量增长率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $x(t)$ 成正比. 同时考虑市场容量 N, $\frac{dx}{dt}$ 与未销量 $N-x(t)$ 成正比. 从而 $\frac{dx}{dt}=kx(t)(N-x(t))$ ($k>0$ 比例系数).

即 分离型: $\frac{dx}{kx(N-x)}=dt \xrightarrow{\text{积分}} x(t)=\frac{N}{1+Ce^{-kNt}}$

Logistic方程



由 $\frac{d^2x}{dt^2}=k\frac{dx}{dt}(N-2x)$ 知 $x=\frac{N}{2}$ 时, $\frac{dx}{dt}$ 最大. 最畅销.

$x<\frac{N}{2}$ 时 $\frac{dx}{dt}\nearrow$. $x>\frac{N}{2}$ 时 $\frac{dx}{dt}\searrow$

初期: 小批量生产并加强宣传

用户: 20%~80% 大批量生产.

用户: >80%. 适时转产

§2 一阶方程的初等解法.

$M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$ ... (1)

§2.1 分离变量法

定义: 若 $M(t,x)=T(t)X_1(x)$ $N(t,x)=T_1(t)X(x)$ 则称(1)为变量分离方程 $T(t)X_1(x)dt+T_1(t)X(x)dx=0$ (2)

1° $T_1(t)$, $X_1(x)\neq 0$ 时有 $\frac{T(t)}{T_1(t)}dt+\frac{X(x)}{X_1(x)}dx=0$. (3)

即 $\frac{T(t)}{T_1(t)}dt=-\frac{X(x)}{X_1(x)}dx \xrightarrow{\text{积分}}$

$$\int\frac{T(t)}{T_1(t)}dt=-\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx+C.$$

2° $\exists$ 实数 a(或 b) 使 $T_1(a)=0$ 或 $X_1(b)=0$. 则 $t=a$ 或 $x=b$ 为(2)的解. 但不满足(3) (可能遗漏的特解).

故(2)通积分 $\int\frac{T(t)}{T_1(t)}dt+\int\frac{X(x)}{X_1(x)}dx=C$ 而 $t=a_i$ $(i=1,2\cdots)$ 和 $x=b_j$ $(j=1,2\cdots)$ 为特解. 其中 a_i, b_j 为 $T_1(t)=0$ $X_1(x)=0$ 的零点.

若特解包含于通积分中则可省略

例 $(t^2+1)(x^2-1)dt+tx\,dx=0$.

$t(x^2-1)\neq 0$ 时. $\frac{t^2+1}{t}dt=-\frac{x}{x^2-1}dx$

$\xrightarrow{\text{积分}}$ $t+\ln t^2+\ln|x^2-1|=C_1$, 即 $x^2=1+C\frac{e^{-t^2}}{t^2}$ $(C=\pm e^{c_1}\neq 0)$

特解 $t=0$. $x=\pm 1$.

$\therefore$ 通解 $x^2=1+C\frac{e^{-t^2}}{t^2}$, C为任常数, $t=0$为特解.

△ 通过适当变换化为变量分量方程.

例 $\frac{dx}{dt}=f(t+x)$.

令 $t+x=u$ $\frac{du}{dt}-1=f(u)$

① 定义: 若 $M(st,sx)=s^m M(t,x)$ $N(st,sx)=s^m N(t,x)$, $m\in R$.

则称(1)为m次齐次方程

作变换 $\underset{\text{隐含}t\neq 0}{x=tu}$. $dx=t\,du+u\,dt$. $M(t,x)=M(t,tu)=t^m M(1,u)$

$N(t,x)=N(t,tu)=t^m N(1,u)$

$\Rightarrow$ $t^m[M(1,u)+uN(1,u)]dt+t^{m+1}N(1,u)du=0$. 分离型

$t=0$为上述方程的解. 但不一定为原方程的解.

另外, 齐次方程 $\Leftrightarrow$ $\frac{dx}{dt}=g(\frac{x}{t})$.

证: $\because$ $\frac{dx}{dt}=-\frac{M(t,x)}{N(t,x)}=-\frac{s^m M(t,x)}{s^m N(t,x)}=\frac{-M(st,sx)}{N(st,sx)}\xrightarrow[\text{令}s=\frac{1}{t}]{t\neq 0}-\frac{M(1,\frac{x}{t})}{N(1,\frac{x}{t})}=g(\frac{x}{t})$.

例 $\frac{dx}{dt}=f(\frac{at+bx+c}{a_1t+b_1x+c_1})$

1° $c=c_1=0$. 齐次方程.

2°. $c^2+c_1^2\neq 0$ (c, c_1 不同时为0).

1) $\Delta=ab_1-ba_1\neq 0$. 由 $\begin{cases}at_0+bx_0=c.\\a_1t_0+b_1x_0=c_1\end{cases}$ 解得 $t_0=\frac{cb_1-bc_1}{\Delta}$, $x_0=\frac{ac_1-a_1c}{\Delta}$.

$\Rightarrow$ $\frac{at+bx+c}{a_1t+b_1x+c_1}=\frac{a(t+t_0)+b(x+x_0)}{a_1(t+t_0)+b_1(x+x_0)}=\frac{a\hat{t}+b\hat{x}}{a_1\hat{t}+b_1\hat{x}}$

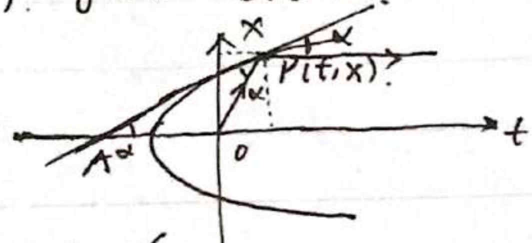
OURSTORYBEGINS

⇒ $\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = f\left(\frac{a\tilde{t}+b\tilde{x}}{a_1\tilde{t}+b_1\tilde{x}}\right)$ 化为1°.

2> $\Delta = ab_1 - a_1 b = 0$.

令 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$, $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{at+bx+c}{\lambda_1(at+bx)+c_1}\right)$. 令$u=at+bx$

$\frac{du}{dt}=a+b\frac{dx}{dt}=a+bf\left(\frac{u+c}{\lambda u+c_1}\right)=g(u)$. 分离型



例. 探照灯反射镜形状

OP = OA. ⋯ (1)

$AO = AQ - OQ = x\cot\alpha - t$ $\tan\alpha = x'$

$OP = \sqrt{x^2+t^2}$ 代入(1)得 $\frac{x}{x'} - t = \sqrt{x^2+t^2}$. 由对称性不妨设 $x>0$.

$\frac{dt}{dx} = \frac{t}{x} + \sqrt{1+(\frac{t}{x})^2}$ 齐次方程

令 $t=xu$. ⇒ $\frac{dt}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = u+\sqrt{1+u^2}$. 分离型

⇒ $\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln x - \ln C$ ⇒ $u+\sqrt{1+u^2}=\frac{x}{C}$. 或 $(\frac{x}{C}-u)^2 = 1+u^2$.

代入 $t=xu$ $x^2 = 2C(t+\frac{C}{2})$ 抛物线

P21 5.8.9.30(P32)

附加作业: 设A湖水量为V. 每年排入A中含砷的污水量与不含砷的水量均为$V/3$. 流出水量为$\frac{2}{3}V$. 已知2016年度A中含砷量为$3m_0$ 超过国家标准. 为治理污染. 从2017年起限定排入A含砷浓度不超过$\frac{m_0}{V}$. 假定砷在A中均匀分布

1) 求第t年砷最大量 $m(t)$ 满足的微分方程.

2) 至少经多少年使A中砷含量降至m_0?

OURSTORYBEGINS

§2.2 一阶线性方程

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t) \quad \cdots (4)$$

$Q(t)\equiv 0$ 称为齐次方程. $Q(t)\not\equiv 0$ 非齐次方程.

齐次方程分离变量得通解 $x=Ce^{-\int p(t)dt}$.

积分因子法：若∃ $\mu(t,x)\neq 0$. 使 $\mu(t,x)[M(t,x)dt+N(t,x)dx]=0$. 化为可求积分的方程. 称 $\mu(t,x)$ 为积分因子.

非齐次：

(4) $\mu(x,t)=e^{\int p(t)dt}\neq 0 \Rightarrow e^{\int p(t)dt}\left(\frac{dx}{dt}+xp(t)\right)=\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right)=e^{\int p(t)dt}Q(t)$

$$\xRightarrow{积分} xe^{\int p(t)dt}=\int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt+C.$$

$$\Rightarrow 通解\ x=e^{-\int p(t)dt}\left[C+\int Q(t)e^{\int p(t)dt}dt\right]=\underbrace{C(t)}_{常数变易法}e^{-\int p(t)dt}$$

☆ 初值问题 $x(t_0)=x_0$ 的解

$$x=e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}\left[x_0+\int_{t_0}^{t}Q(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(t)dt}ds\right]$$

通过变换化为线性方程. Bernoulli. $\frac{dx}{dt}+p(t)x=Q(t)x^{\alpha}$ $(\alpha\neq 0,1)$ 非线性方程.

$x=0$，特解.

$x\neq 0$，同乘 $(1-\alpha)x^{-\alpha}\Rightarrow \underline{(1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{dx}{dt}}+(1-\alpha)x^{1-\alpha}p(t)=(1-\alpha)Q(t)$.

$y=x^{1-\alpha}$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}+(1-\alpha)p(t)y=(1-\alpha)Q(t).$$

例 $\frac{dx}{dt}=\frac{tx^2+\sin t}{2x}$ 即 $\frac{dx}{dt}-\frac{t}{2}x=\frac{\sin t}{2}\cdot x^{-1}$

解：$\because x\neq 0$ $\therefore y=x^2$. $\frac{dy}{dt}-ty=\sin t \Rightarrow$ 通解, $y=e^{-\int -t dt}\left[C+\int \sin t\, e^{\int -t dt}dt\right]$

$=e^{t^2/2}\left[C+\int \sin t\, e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]>0$ $\therefore x=\pm e^{\frac{t^2}{4}}\left[C+\int \sin t\, e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]^{1/2}$.

Riccati 方程. $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$.

§2.3 $\underset{\text{恰当方程}}{\underline{\text{全微分方程}}}$与积分因子法

定义：若∃可微函数 $u(t,x)$ 使 $du(t,x)=M(t,x)dt+N(t,x)dx$.

即 $\frac{\partial u}{\partial t}=M$. $\frac{\partial u}{\partial x}=N$. 则称(1)为全微分方程.

$\Rightarrow$ $u\equiv C$. $\Rightarrow x=\varphi(t)/t=\varphi'(x)$ (隐函数定理.)

定理. 设 $M(t,x)$. $N(t,x)\in \underset{\text{区域D上连续}}{\underline{C(D)}}$. 且 $\frac{\partial M}{\partial x}$. $\frac{\partial N}{\partial t}\in C(D)$. 则

(1) 恰当 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$.

此时通解 $u(t,x)=\int_{t_0}^{t} M(t,x)dt+\int_{x_0}^{x} N(t_0,x)dx$

$=\int_{t_0}^{t} M(t,x_0)dt+\int_{x_0}^{x} N(t,x)dx=C$. 其中 $(t_0,x_0)\in D$ 任取

证: (1) 恰当 $\Rightarrow$ ∃ $u\in C^1(D)$ 使 $\frac{\partial u}{\partial t}=M$ $\frac{\partial u}{\partial x}=N$.

从而 $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$

(2) 设 $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial t}$. 构造 $u(t,x)$ 满足 $\frac{\partial u}{\partial t}=M$. $\frac{\partial u}{\partial x}=N$,

令 $u(t,x)=\int_{t_0}^{t} M(t,x)dt+\varphi(x)$, 考虑 $\frac{\partial u}{\partial x}=N$,

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{t_0}^{t} M(t,x)dt+\varphi'(x)\underset{\text{一致收敛条件}}{=}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}dt+\varphi'(x)=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial N}{\partial t}dt$

$+\varphi'(x)=N(t,x)-N(t_0,x)+\varphi'(x)=N(t,x)$. 取 $\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}N(t_0,x)dx$.

即可得知∃恰当方程 $u(t,x)=0$.

同样 构造u时先考虑 $\frac{\partial u}{\partial x}=N$ 得 $\tilde{u}(t,x)=\int_{x_0}^{x}N(t,x)dx+\int_{t_0}^{t}M(t,x_0)dt$

由 $du(t,x)-d\hat{u}(t,x)=0$. 知 u. $\hat{u}$ 至多差一个常数

又∵ $u(t_0,x_0)=\hat{u}(t_0,x_0)=0$. ∴ $u\equiv\hat{u}$

积分因子求法.

由积分因子定义及上述定理知. $\mu(t,x)\neq 0$ 为积分因子 $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \quad \text{即} \quad N\frac{\partial\mu}{\partial t} - M\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu . \cdots (8)$$

可考虑特殊情形) 1° μ 仅依赖于 t 或 x. (8) 为常微分方程.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)}{N}dt} \quad (\text{或 } \mu(x)=e^{\int\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)}{M}dx}$$

2° 若. (1) 具有形如 $\mu=\mu(t^a+x^b)$ 积分因子 $\Leftrightarrow$ $\mu=\mu(t^a+x^b) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}}{bx^{b-1}M - at^{a-1}N} d(t^a+x^b)}$

实际上. 令 $z=t^a+x^b$, 则 $\frac{\partial z}{\partial t}=at^{a-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=bx^{b-1}$.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = M\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}+\mu\frac{\partial M}{\partial x} = bx^{b-1}M\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{\partial M}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial t} = at^{a-1}N\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{dN}{dt}.$$

$$\overset{(8)}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}}{bx^{b-1}M-at^{a-1}N}.$$

△ 里卡蒂方程 $\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$. (1)

$p(x)\neq 0$.

定理: (1)的特解 $y=\varphi_1(x)$. 则可用积分法求其通解.

对(1)作变换 $y=u+\varphi_1(x)$.

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dx}=p(x)[u^2+2\varphi_1(x)u+\varphi_1^2(x)]+q(x)[u+\varphi_1(x)]+r(x)$$

$$\frac{du}{dx}=p(x)[u^2+2\varphi_1(x)u]+q(x)u=[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)]u+p(x)u^2$$

伯努利方程

且 $\mu(Pdx+Qdy)=d\Phi$.

△ 积分因子的分组求法: 若 $\mu(x,y)$ 是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的积分因子

则 $\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$ 也是积分因子. $g(\cdot)$ 任一可微函数

μ_1, μ_2. 寻找 g_1, g_2 s.t: $\mu_1 g_1(\Phi_1)=\mu_2 g_2(\Phi_2)$.

△ 齐次方程的积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$

§3. 一阶隐式方程 $F(t,x,x')=0$.

i) $x=g(t,p)$, $p=x'=\frac{dx}{dt}$

对t微分. $p=g'_t+g'_p\frac{dp}{dt} \Rightarrow (g'_t-p)dt+g'_p dp=0$. (1)

若(1)有通解 $p=\varphi(t,c) \Rightarrow x=g(t,\varphi(t,c))$ 求得p后代入原方程而不是再次积分.

若(1)有通解 $t=\psi(p,c)$ 则原方程通解为 $\begin{cases} t=\psi(p,c) \\ x=g(\psi(p,c),p) \end{cases}$ (p: 参数)

例 clairant 方程. $x=tp+f(p)$, $p=x'$, $f''(p)\neq 0$ (凸函数).

对t微分. $p=p+t\frac{dp}{dt}+f'(p)\frac{dp}{dt}$

$\Rightarrow (t+f'(p))\frac{dp}{dt}=0$.

$t+f'(p)=0$ 时. 特解为 $\begin{cases} t=-f'(p) \\ x=-f'(p)p+f(p) \end{cases}$ (p参数)

由 $f''(p)\neq 0$ 及 $t=-f'(p)$. 由反函数定理可知 $p=w(t)$.

$\Rightarrow$ 特解 $x=tw(t)+f(w(t))$.

而 $\frac{dp}{dt}=0$ 知 $p=C$. 通解 $x=tc+f(c)$.

另外 $w'(t)=\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dp}}=-\frac{1}{f''(p)}\neq 0$. 非常数.

特解不包含在通解中.

而过特解任一点 (t_0,x_0) 的切线方程为 $x=x_0+w(t_0)(t-t_0)$.

$=t_0w(t_0)+f(w(t_0))+w(t_0)t-w(t_0)t_0=C_0t+f(C_0)$.

与通解形式相同

$\Rightarrow$ 在特解的任一点, 均有通解中某一解与特解相切. 称此特解为原方程的奇解

ii) $t=h(x,p)$ $p=\frac{dx}{dt}$ 即 $dt=\frac{dx}{p}$.

对t微分 $1=h'_x\cdot p+h'_p\frac{dp}{dt}=ph'_x+h'_p\frac{dp}{\frac{dx}{p}}$ (2)

若(2)有通解 $p=\varphi_1(x,c) \Rightarrow$ 通解 $t=h(x,\varphi_1(x,c))$

若(2)有通解 $x=\psi_1(p,c) \Rightarrow$ 通解 $\begin{cases} t=h(\psi_1(p,c),p) \\ x=\psi_1(p,c) \end{cases}$

(iii) $F(x,p)=0$. (或 $F(t,p)=0$).

因方程在 Oxp (或 Otp) 表示曲线. 设有参数表示 $\begin{cases} x=a(s) \\ p=b(s) \end{cases}$ (或 $\begin{cases} t=a(s) \\ p=b(s) \end{cases}$) ($s$: 参数). 由 $dt=\frac{dx}{p}=\frac{a'(s)ds}{b(s)}$ (或 $dx=pdt=b(s)a'(s)ds$).

$(p\neq 0)$. 找到 dt (dx) 与 s 的关系式

则通解为 $\begin{cases} t=\int \frac{a'(s)}{b(s)}ds+C \\ x=a(s). \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t=as. \\ x=\int b(s)a'(s)ds+C \end{cases}$,

例 $p^2+x^2=1$.

令 $x=\cos s$, $p=\sin s$. 则 $\begin{cases} t=\int \frac{(\cos s)'}{\sin s}ds+C=-s+C. \\ x=\cos s. \end{cases}$ (s参数)

消去 s 有 $x=\cos(t-C)$. 另有特解 $p=0$. $x=\pm 1$.

§4. 高阶方程的降阶

$F(t,x,x',\cdots x^{(n)})=0$. $n\geq 2$.

i) $F(t,x^{(k)},\cdots x^{(n)})=0$ (1) $1\leq k\leq n$. 不显含 x.

令 $y=x^{(k)} \Rightarrow F(t,y,\cdots y^{(n-k)})=0$ $n-k$阶.

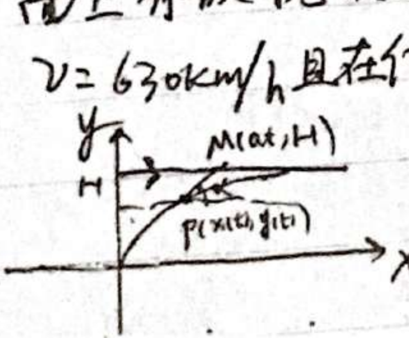
若上述

ii) $F(x,x',\cdots x^{(n)})=0$ (2) "自治系统" 不显含 t.

令 $y=x'$. 易由归纳法证 $x^{(k)}$ 可用 y, y'_x, $\cdots$ $y_x^{(k-1)}$ 表示. $k\leq n$.

(2) 写成 $G(x,y,y'_x,\cdots y_x^{(n-1)})=0$ $n-1$阶

例 导弹追踪问题: 某导弹基地发现正北方向 $H=120$ km 处海面上有敌舰以 $a=90$ km/h 速度向正东方向行驶后立即发射 $v=630$ km/h 且在任一时刻对准敌舰的导弹. 导弹何处击中敌舰?



OURSTORYBEGINS

易知. $\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}. \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{v}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} \quad (*). \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{H-y(t)}{at-x(t)} \xRightarrow{\text{对t求微分}} \dfrac{d^2x}{dy^2}\dfrac{dy}{dt}(H-y(t)) + \dfrac{dx}{dy}\left(-\dfrac{dy}{dt}\right) = a - \dfrac{dx}{dt} \quad (**) \end{cases}$

即: $\dfrac{dx}{dy}(H-y(t)) = at - x(t)$

$(*)+(**) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dy^2}\dfrac{H-y}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \dfrac{a}{v} \\ \dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=0} = 0 \quad x|_{y=0} = 0. \end{cases}$ 二阶自治系统.

令 $p = \dfrac{dx}{dy}$, $\lambda = \dfrac{a}{v}$. $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp}{dy}\dfrac{H-y}{\sqrt{1+p^2}} = \lambda \Rightarrow \dfrac{dp}{dy} = \dfrac{\lambda\sqrt{1+p^2}}{H-y} \\ p|_{y=0} = 0. \end{cases}$ 分离变量).

$p + \sqrt{p^2+1} = \left(\dfrac{H}{H-y}\right)^{\lambda}$. 即 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = p = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{H}{H-y}\right)^{\lambda} - \left(\dfrac{H-y}{H}\right)^{\lambda}\right] \\ x|_{y=0} = 0. \end{cases}$ (分离变量).

$\Rightarrow$ 解: $x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(H-y)^{\lambda+1}}{H^{\lambda}(\lambda+1)} - \dfrac{H^{\lambda}(H-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right] + \dfrac{\lambda H}{1-\lambda^2}$

设 导弹击中于 (L, H). $L = \dfrac{\lambda H}{1-\lambda^2} = 17.5\,\text{km}$.

击中时刻 $T = \dfrac{L}{a} = 0.19\,h$

作业: $p^3 - 4xtp + 8x^2 = 0$. $p = x'$.

P40 8. 11. 21

P50 1. 3

(iii) $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=\frac{d}{dt}\Phi(t,x,x',\cdots x^{(n-1)})=0$ 全微分方程

$\xRightarrow{积分}$ $\Phi(t,x,x',\cdots x^{(n-1)})=C$.

类似1阶情形 引入积分因子 $\mu(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)})$ 使 $\mu F=0$ 成为全微分方程.

例 1) $mx''-f(x)=0$.

令 $p=x'$. $x''=p'=\frac{dp}{dx}\cdot p \Rightarrow mp\frac{dp}{dx}=f(x)$. 分离型.

2) $x'(mx''-f(x))=\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}m(x')^2-\int_{x_0}^{x}f(s)ds]=0$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}m(x')^2-\frac{1}{2}m(x')^2\Big|_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(s)ds$.

§5. 微分方程组的初等积分法与首次积分.

任意阶显式方程(组)均可化为标准一阶微分方程组.

$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$. ……1)

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\vec{f}(t,\vec{x})=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\\vdots\\f_n\end{pmatrix}$ $(t,x_1,\cdots,x_n)\in C^1(D)$. $D\in R^{n+1}$

例. $\begin{cases}\frac{d^2u}{dt^2}=F(t,u,\frac{du}{dt},v,w,\frac{dw}{dt},\frac{dw^2}{dt^2}).\\ \frac{dv}{dt}=G(\cdots\cdots\cdots)\\ \frac{d^3w}{dt^3}=H(\cdots\cdots\cdots)\end{cases}$

令 $x_1=u$ $x_2=\frac{du}{dt}$ $x_3=v$ $x_4=w$ $x_5=\frac{dw}{dt}$ $x_6=\frac{dw^2}{dt^2}$

$\Rightarrow$ $\frac{dx_1}{dt}=x_2$.

$\frac{dx_2}{dt}=F$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$

$\frac{dx_3}{dt}=G$

$\frac{dx_4}{dt}=x_5$ $\vec{f}=\begin{pmatrix}x_2\\F\\G\\x_5\\x_6\\H\end{pmatrix}$

$\frac{dx_5}{dt}=x_6$

$\frac{dx_6}{dt}=H$

方法1：化为高阶方程，利用(1)化为某个未知函数的n阶方程。

例 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-y \\ \frac{dy}{dt}=x \end{cases}$ $\Rightarrow$ 对t微分 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dy}{dt}=-x$.

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+x=0$. 分离型

$\Rightarrow p^2+x^2=A^2 \xrightarrow{\text{积分}}$ $x=A\sin(t+B)$ 或 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$

$y=-\frac{dx}{dt}=C_1\sin t-C_2\cos t$.

定义：若标量函数 $\Phi(t,\vec{x})\in C^1(D)$ 非常数且(1)在 $D_0\subset D$ 内任一曲线下：$\vec{x}=\vec{x}(t)$ 函数 Φ 取常数，则 $\Phi(t,\vec{x})=C$ 为(1)在 D_0 内的一个首次积分

n个首次积分独立 $\Leftrightarrow \frac{\partial(\Phi_1,\cdots\Phi_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\neq 0$

上例中有 $\frac{d(x^2+y^2)}{dt}=0 \Rightarrow \Phi: x^2+y^2=C_1$ 为一个首次积分。

定理1. 若 $p_0(t_0,\vec{x})\in D$ 则 $\exists P_0$ 某邻域 $D_0\subset D$ 使(1)在 D_0 内有且只有n个独立首次积分。

略证：$\forall$ 初值 $\vec{x}(t_0)=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\vec{c}$ 使 (t,c) 在 p_0 某邻域内 $\xrightarrow{\text{解对初值可微性定理}}$

(1)+$\{\vec{x}(t_0)=\vec{c}\}$ 的解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{c})$ 对 $(t,\vec{c})$ 连续可微且

$\xRightarrow{\text{隐函数定理}}$ $c_j=\varphi_j(t,\vec{x})$ 在某邻域 D_0 内成立。$\Rightarrow \varphi_j(t,\vec{x})=c_j$ 为(1)在 D_0 内的n个独立首次积分。

若(1)在 D_0 内有n+1个首次积分，$\varphi_j(t,\vec{x}(t))=c_j$ $1\le j\le n+1$. 则

$$\frac{d\varphi_j}{dt}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}+\nabla_{\vec{x}}\varphi_j\cdot\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}f_k=0.$$

易知 $(1,f_1,\cdots,f_n)$ 为上述线性方程组的非零解。

系数行列式 $\frac{\partial(\varphi_1\cdots\varphi_{n+1})}{\partial(x_1,\cdots x_n)}=0$

$\Rightarrow$ 任何n+1个首积分函数相关。

OURSTORYBEGINS

定理2 由(1)在D内的n个独立首次积分 $\Phi_j(t,\vec{x}(t))=C_j$ $1\le j\le n$. 可得到(1)在D内的通解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,C_1,\cdots,C_n)$.

上例中,将第一个首积分 $x^2+y^2=C_1^2 \Downarrow$ $x=\pm\sqrt{C_1^2-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\pm\sqrt{C_1^2-y^2} \Rightarrow \pm\arcsin\frac{y}{C_1}=t+C_2$

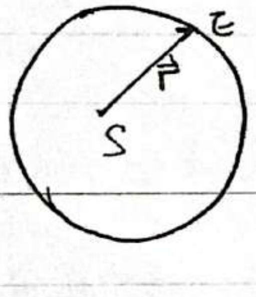
即 $\pm\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2$. "第二个首次积分".

$$\xRightarrow{\text{定理2}} \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=C_1 \\ \pm\arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2. \end{cases}$$

例 二体问题.

设M(太阳)静止于原点,地球m向量坐标 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

$$m\ddot{\vec{r}}=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}=-\frac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \ddot{y}=-\frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \ddot{z}=-\frac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (A_1).$$

由(A_1) $z\ddot{y}-y\ddot{z}=0=\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z}) \Rightarrow$ 第一个首次积分 $z\dot{y}-y\dot{z}=C_1$ (A_2)

类似
$$\begin{cases} x\dot{z}-z\dot{x}=C_2 & (A_3). \\ y\dot{x}-x\dot{y}=C_3 & (A_4). \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1x+C_2y+C_3z=0$ (观察) 平面方程 不妨令 $z=0$. 令 $\mu=GM$.

$$\xRightarrow{A_1\text{代入}} \begin{cases} \ddot{x}=-\frac{\mu x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y}=-\frac{\mu y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (A_5)$$

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=-\frac{\mu(x\dot{x}+y\dot{y})}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]=0.$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2+\dot{y}^2-\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2}}=C_4$$

由极坐标. $x=r\cos\theta$. $y=r\sin\theta$. (A_6).

$$\Rightarrow \dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2-\frac{2\mu}{r}=C_4 \quad (A7)$$

(A1)代入(A4) 有 $r^2\dot{\theta}=C_3>0$ (A8). 开普勒第二定律.

$$(A7)+(A8) \Rightarrow \frac{dr}{d\theta}=\pm\frac{r^2}{C_3}\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2-\left(\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}\right)^2} \quad \text{分离型.}$$

$$\Rightarrow \text{通解} \quad \frac{\frac{C_3}{r}-\frac{\mu}{C_3}}{\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2}}=\cos(\theta+C_5)$$

即 $r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$. $p=\frac{C_3^2}{\mu}>0$. $\theta_0=C_5$. $e=\frac{C_3}{\mu}\sqrt{C_4+\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2}>0$.

$0<e<1$ 椭圆.

P50 10. 13. 15

P62 5. 9

P63 14.

第二章 线性微分方程组

§1 高阶常系数线性微分方程

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{(k)} = f(t) \quad (1) \qquad n\geq 2. \quad \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^{(k)} = 0 \quad (2) \text{ 齐次}$$

$a_k (0\leq k\leq n)$ 是实常数 $a_0\neq 0$. $f\in C(I)$.

叠加原理. 设 L 为线性微分算子. B 为某线性算子.

则 $\begin{cases} Lu=f & \text{in } D \\ Bu|_{\partial D}=\varphi \end{cases}$ 的解 $u=v+w$. 其中 v, w 满足

$\begin{cases} Lv=0 & \text{in } D \\ Bv|_{\partial D}=\varphi \end{cases}$ $\begin{cases} Lw=f \\ Bw|_{\partial D}=0. \end{cases}$ $\begin{cases} Lu=Lv+Lw=0+f=f \\ Bu|_{\partial D}=Bv|_{\partial D}+Bw|_{\partial D}=\varphi+0=\varphi. \end{cases}$

推论 (1)通解 = (2)通解 + (1)特解

定义. 称 $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} \overset{\in R}{a_{n-k}} \lambda^k = 0$ (3) 为(2)的特征方程.

定理1: 设特征方程(3)有 m 个互不相同的特征根 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. 相应重数为 $n_1, \dots, n_m$ $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$. 则函数组 $t^j e^{\lambda_k t}$ $(0\leq j\leq n_k-1$, $1\leq k\leq m)$ 是(2)的一个线性无关解组. 即(2)的通解为

$$x(t)=\sum_{\substack{0\leq j\leq n_k-1\\ 1\leq k\leq m}} C_{jk} t^j e^{\lambda_k t} \qquad C_{jk} \text{ 为任意常数 } \in C$$

证明: 由 $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda^k = a_0 \prod_{k=1}^{m} (\lambda-\lambda_m)^{n_k}$.

$P(\lambda_k) = P'(\lambda_k) = \cdots = P^{(n_k-1)}(\lambda_k) = 0$, $P^{(n_k)}(\lambda_k)\neq 0$.

$\because$ $L[e^{\lambda t}] = P(\lambda)e^{\lambda t}$, $\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} e^{\lambda t} = t^j e^{\lambda t}$ $(0\leq j\leq n_k-1)$

$\therefore$ $L[t^j e^{\lambda_k t}] = L\left[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_k}\right] = \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left[L e^{\lambda t}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_k}$

$= \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\left[P(\lambda)e^{\lambda t}\right]_{\lambda=\lambda_k}$

$= \sum_{l=0}^{j} \frac{j!}{l!(j-l)!} P^{(l)}(\lambda) t^{j-l} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_k} = 0.$

$\Rightarrow$ $t^j e^{\lambda_k t}$ 为(2)的解.

OURSTORYBEGINS

下证线性无关 若 $\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k-1} c_{jk}t^j e^{\lambda_k t}=0$ 则 $\overset{需证}{c_{jk}=0}$.

若多项式 $\sum_{k=0}^{N} c_k t^k=0$ 对 $\forall t\in I$ 成立. 则 $c_k=0$ $0\le k\le N$.

故只需证 若 $\sum_{k=1}^{m} b_k(t)e^{\lambda_k t}=0$. $b_k(t)$ 为多项式 则必有 $b_k(t)\equiv 0$.
$1\le k\le m$.

对 m 用归纳法. $m=1$ 时 成立.

设 $\sum_{k=1}^{m} b_k(t)e^{\lambda_k t}=0 \Rightarrow b_k(t)=0$ $1\le k\le m$.

若 $\sum_{k=1}^{m+1} b_k(t)e^{\lambda_k t}=0$. $\underset{(1\le k\le m+1)}{\lambda_k}$ 互不相同, 则 $\sum_{k=1}^{m} b_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}+b_{m+1}(t)=0$

$\because b_{m+1}(t)$ 为多项式. $\exists s\in N$. 使 $\frac{d^s}{dt^s}b_{m+1}(t)=0$. 对上式微分 s 次.

$\sum_{k=1}^{m} g_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}=0$. $g_k(t)$ 为多项式

由假设 $g_k(t)=0$. 由此必有 $b_k(t)=0$. $1\le k\le m$.

若不然 由 $\frac{d}{dt}\left[b_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}\right]=\left[b_k'(t)+\underbrace{(\lambda_k-\lambda_{m+1})}_{\neq 0}b_k(t)\right]e^{(\lambda_k-\lambda_{m+1})t}$

知 $g_k(t)$ 与 $b_k(t)$ 同次. $\Rightarrow g_k\neq 0$ 矛盾.

~~再~~可知 $b_{m+1}(t)\equiv 0$, 得证.

例 ① $x''-x-2=0$.

特征方程 $\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)=0$

线性无关解组为 $e^{-t}.\ e^{2t}$

② $x^{(5)}-3x^{(4)}+4x^{(3)}-4x''+3x'-x=0$.

特征方程 $\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=0=(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)$.

$\lambda_1=1\ (n_1=3)$ $\lambda_2=i$ $\lambda_3=-i$ $(n_2,n_3=1)$.

线性无关解组. $e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ e^{-it},\ e^{it}$

为求实解. 若 $\varphi(t)$ 为原方程复值解 令 $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$.

则 $0=L[\varphi]=\underset{0}{L[u]}+i\underset{0}{L[v]}$

$u.v$ 均为原方程的实解.

取 e^{it} 实部 $\cos t$. 虚部 $\sin t$ (线性无关).

实通解 $x = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4\cos t + c_5\sin t$

定理2. $x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$ 的通解为

$$x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_1'(s)\varphi_2(s)} f(s)\,ds.$$

$\varphi_1(t)$. $\varphi_2(t)$ 为 $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ (1). 的两个线性无关解

证. 令 $x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$ (*)

$x'(t) = c_1\varphi_1' + c_1'\varphi_1 + c_2\varphi_2' + c_2'\varphi_2$ (**) 令 $c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0$.

则 $x''(t) = c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2''$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = f \\ c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

$c_1' = -\frac{\varphi_2 f}{w}$, $c_2' = \frac{\varphi_1 f}{w}$, $w = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}$ wronsky行列式.

积分即得结论

例 $a_0x'' + a_1x' + a_2x = f(t)$ 取 $a_0 = 1$.

$x'' + a_1x' + a_2x = 0$ 两线性无关解 $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

则 $w(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)s} \neq 0.$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\varphi_2(s)}{w(s)} = K(t-s).$$

$$\therefore x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \int K(t-s)f(s)\,ds.$$

P74 2 P84 4(5)

P85 9

P96 4(2). 5

$f(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} g(t,x)\,dx$. $f'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial g(t,x)}{\partial t}\,dx + b'(t)g(t,b(t)) - a'(t)g(t,a(t))$.

习题课.

P40. 8. $(\dot{x}-1)t+x\dot{x}(\dot{x}-1)=0$.

① $\dot{x}-1=0$. $\frac{dx}{dt}=1$ $x=c+t$.

② $\dot{x}-1\neq0$. 令 $p=\dot{x}$ 则 $t=\frac{x(p^2-p)}{p-1}=-px$

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}=-(\frac{dp}{dx}\cdot x-p)$

☆ 11. $\dot{x}^4=4x(t\dot{x}-2x)^2$

令 $\dot{x}=p$. 则 $t=\pm\frac{p}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{p}$ ($x=0$ 满足方程).

1) $t=\frac{p}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{p}$ 时.

对 x 微分. $(2p^2\sqrt{x}-8x^2)\frac{dp}{dx}=\frac{p^3}{\sqrt{x}}-4xp$.

i) $2p^2\sqrt{x}-8x^2=0$ 时. 特解 $x=\frac{1}{16}t^4$ (无常数. 需代回方程求解).

ii) $2p^2\sqrt{x}-8x^2\neq0$ 时 有 $\frac{p}{2x}=\frac{dp}{dt}\Rightarrow p=c\sqrt{x}$ $(c\neq0)$.

$x=(31t+c_1)^2$

---

21. $\dot{x}=p$. $(xp)^2+x^2=a^2$. 令 $\begin{cases}x=a\sin u\\ p=\frac{a\cos u}{\sin u}\end{cases}$.

P50. 3. $a^2(\frac{d^2x}{dt^2})^2=[1+(\frac{dx}{dt})^2]^3$ $(a>0)$.

令 $y=\frac{dx}{dt}$

$a^2(\frac{dy}{dt})^2=[1+y^2]^3$.

令 $y=\tan u$.

附. 1) $\underline{p^3-4x^2=0}$ 时. $t=(\frac{27}{4}x)^{\frac{1}{3}}$ (无常数. 等待求情况求出的为特解)

一阶微分方程总结.

$$F(x,y,y')=0 \Rightarrow \begin{cases} y'=f(x,y) \\ y=f(x,y') \\ x=f(y,y') \\ F(x,y')=0 \\ F(y,y')=0 \end{cases}$$

一般常见

1) $y'=g(x)h(y)$

2) $y'=f(x)y+Q(x)$

3) $y'=\varphi(\frac{y}{x})$

4) $y'=g(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ } 线性变换.

5) $y'=-P(x)y+Q(x)y^n$ 伯努利方程.

6) $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$. Ricatti

7) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$. 全微分方程.

1). $h(y)=0$ 特解

2) $y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(x)dx}[y_0+\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int p(x)dx}dx]$.

6) 有特解 用积分因子法.

7) 记: $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$

$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$.

视情况取值

或 $\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx=C$.

$\begin{cases} y=f(x,p) \\ x=f(y,p) \end{cases}$ 微分法. $\begin{cases} F(x,y')=0 \\ F(y,y')=0 \end{cases}$ 参数法

解的存在唯一性定理. 解的延拓性

OURSTORYBEGINS

$\mathcal{L}x=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^{(k)}=f(t)$ (1) 特征方程 $P(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda^{k}=0$. (2)

对一般 $f(t)$ 较难求解. 但对某些情况可用待定系数法

1° $f(t)=P_l(t)e^{\mu t}$. $P_l(t)$: l 次多项式.

a) μ 非(2)的根. 可令 $Q_l(t)e^{\mu t}$ 为特解. 代入(1)确定 $Q_l(t)$ 系数.

b) μ 为(2)的 k 重特征根. 可令 $t^k Q_l(t)e^{\mu t}$ 为特解.

$Q_k(t)e^{(\alpha-\beta i)t}$ $P_k(t)e^{(\alpha+\beta i)t}$ 实部 $[P_k(t)\cos\beta t+Q_k(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$

2° $f(t)=[P_l(t)\cos\beta t+Q_m(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$ P_l, Q_m 多项式.

令 $t^k[C_s(t)\cos\beta t+D_s(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$ 确定多项式 $C_s(t), D_s(t)$ 系数.

其中 k 为(2)特征根 $\alpha\pm\beta i$ 的重数 (非特征根 $k=0$). $s=\max\{l,m\}$.

(2°为1°的特例!)

例: $x^{(3)}+3x^{(2)}+3x'+x=e^{-t}(t-5)+e^{t}+\sin t$.

特征方程: $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$ $\lambda=-1$ (3重).

线性无关解组: $e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}$

利用叠加原理: 1)对应1°(b). $k=3$. 令特解 $x_1=t^3Q_1(t)e^{-t}$

$=t^3(a_1+b_1t)e^{-t}$. 代入方程 $(6a_1+24b_1t)e^{-t}=e^{-t}(t-5)$, $a_1=-\frac{5}{6}$, $b_1=\frac{1}{24}$

2)对应1°(a), $k=0$. 令特解 $x_2=a_2e^{t} \Rightarrow 8a_2e^{t}=e^{t}$, $a_2=\frac{1}{8}$

3)对应2° $k=0$. 令 $x_3=a_3\cos t+b_3\sin t$

$\Rightarrow (2b_3-2a_3)\cos t-(2a_3+2b_3)\sin t=\sin t \Rightarrow a_3=b_3=-\frac{1}{4}$

非齐次方程通解 $x=(c_1+c_2t+c_3t^2)e^{-t}+t^3(-\frac{5}{6}+\frac{1}{24}t)e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}-\frac{1}{4}\cos t-\frac{1}{4}\sin t$.

另一求法: $K(t)$ 是齐次常系数线性方程

$a_0\frac{d^nx}{dt^2}+\cdots+a_nx=0$ 的解且满足

$K(0)=\dot{K}(0)=\cdots=K^{(n-2)}(0)=0$. $K^{(n-1)}(0)=1$.

则 $x(t)=\int_0^t K(t-s)\frac{f(s)}{a_0}ds$ 是非齐次的解

OURSTORYBEGINS

§2. 运算子法.

$\mathcal{L}x := P(D)x = f(t) \quad \cdots (1) \qquad P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} D^k.$

为求(1)特解. 形式记为 $x = \frac{f(t)}{P(D)}$

算子 $P(D)$ 满足 (加法和乘法) 结合律与交换律. 基本性质.

(a) $P(D)e^{at} = P(a)e^{at}$

(b) $P(D)[e^{at}x(t)] = e^{at}P(D+a)x(t)$.

(c) $P(D^2)\sin wt = P(-w^2)\sin wt$

$P(D^2)\cos wt = P(-w^2)\cos wt$.

例. 1° $P(D)x = e^{at}$. 由a. $P(D)\left[\frac{e^{at}}{P(a)}\right] = e^{at}$ 知. $x = \frac{e^{at}}{P(a)}$ 为特解.

如 $a=1$. $P(D) = D^5+1$. 特解 $x = \frac{e^t}{P(1)} = \frac{1}{2}e^t$

2° $P(D)x = Q_k(t)$ $\quad Q_k(t)$: k次多项式

设 $P(\lambda) = \lambda^l g(\lambda)$, $g(\lambda) \neq 0$. 在 $\lambda = 0$ 处有 Taylor 展开.

$\frac{1}{g(\lambda)} = \sum_{j=0}^{k} c_j \lambda^j + \underbrace{\frac{\varphi(\lambda)}{g(\lambda)} \lambda^{k+1}}_{\varphi(\lambda)多项式\ 余项}$

即 $g(\lambda)\sum_{j=0}^{k} c_j\lambda^j + \varphi(\lambda)\lambda^{k+1} = 1 \Rightarrow [g(D)\sum_{j=0}^{k} c_j D^j + \underline{\varphi(D)D^{k+1}}]Q_k(t) = Q_k(t)$

$\because P(D) = D^l g(D)$. $\therefore P(D)\underbrace{\left[\frac{1}{D^l}\sum_{j=0}^{k} c_j D^j Q_k(t)\right]}_{x} = Q_k(t)$. $=0$.

得特解: $x = \frac{1}{D^l}\sum_{j=0}^{k} c_j D^j Q_k(t)$, $\frac{1}{D^l}$: l 重积分.

如 $(D^3-D)x = t$, 特解: $x = \frac{1}{D(D^2-1)}t = \frac{-1}{D(1-D^2)}t = -\frac{1}{D}(1+D^2+\cdots).t$ $\quad D^2t\cdots=0.$

$= -\frac{1}{D}t = -\frac{1}{2}t^2$.

如上节例 $P(D) = D^3+3D^2+3D+1 = (D+1)^3$.

3° $P(D)x = e^{at}\cdot g(t)$ 任意给定的连续可微函数.

特解: $x = e^{at}\frac{1}{P(D+a)}g(t)$

实际上 $P(D)\left[e^{at}\frac{1}{P(D+a)}g(t)\right] \xlongequal{(b)} e^{at}P(D+a)\cdot\frac{1}{P(D+a)}g(t) = e^{at}g(t)$

如 $P(D) = D^2+1$. $f(t) = te^t\sin t$. $a = 1+i$. $g(t) = t$.

先考虑 $P(D)x = te^{(1+i)t} = te^t\cdot e^{it} = te^t(\cos t + i\sin t) := F(t)$ 的特解.

$x = \frac{F(t)}{P(D)} = e^{(1+i)t}\frac{1}{P(D+1+i)}t = e^{(1+i)t}\frac{1}{1+2i+2(1+i)D+D^2}t.$

$= e^{(1+i)t}\left\{\frac{1}{1+2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2}D + \cdots\right\}t. = e^{(1+i)t}\left\{\frac{t}{1+2i} - \frac{2(1+i)}{(1+2i)^2}\right\}.$

$= e^{(1+i)t}\left\{\frac{1-2i}{5}t + \frac{-2+14i}{25}\right\}.$

取虚部即得特解 $x = \frac{e^t}{25}[(14-10t)\cos t + (-2+5t)\sin t]$.

P85 11(4)

P96 8

P97 10

P103 3.5.

OURSTORYBEGINS

§3 常系数线性方程组.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x} \qquad (4)$$ A: n阶常矩阵.

n=1. (4)通解 $x=e^{At}\cdot C$.

n≥2 $\vec{x}=\underbrace{e^{At}}_{矩阵}\cdot\vec{C}$?

§3.1 矩阵指数函数

令 $M_n=\{A\mid A为n阶矩阵\}$ $\forall A,B\in F^{m\times n}$ 内积 $\langle A,B\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\bar{b}_{jk}$.

定义模(范数). $\|A\|=\sum_{j,k=1}^{n}|a_{jk}|$ 或 $\max_{j,k}|a_{jk}|$ 或 $\left(\sum_{j,k}|a_{jk}|^2\right)^{1/2}=\sqrt{\langle A,A\rangle}$

三种模等价. $\|\cdot\|_1$ 以 $\|\cdot\|_2$ $\Leftrightarrow \exists M>0$ s.t. $M\|\cdot\|_1\le\|\cdot\|_2\le M^{-1}\|\cdot\|_1$

模的性质: 1° (非负) $\|A\|\ge 0$ 且 $\|A\|=0\Leftrightarrow A=0$.

2° (三角不等式) $\forall A,B\in M_n$. $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$.

3° (Cauchy-Schwarz不等式) $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$. (对max: $\|AB\|\le n\|A\|\|B\|$)

易知 $\forall k\in N$ $\|A^k\|\le\|A\|^k$. (max: $\|A^k\|\le n^{k-1}\|A\|^k$).

规定 $A^0=E$ (单位阵) $|\langle A,B\rangle|\le\|A\|\|B\|$.

命题1 矩阵A的幂级数 $E+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{A^k}{k!}t^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$ 在M_n中收敛.

证: $\forall m\in N$. $\left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{A^k t^k}{k!}\right\|\overset{2^\circ}{\le}\sum_{k=0}^{m}\frac{\|A^k t^k\|}{k!}\overset{3^\circ}{\le}\|E\|+\sum_{k=1}^{m}\frac{\|A\|^k}{k!}\le n-1+e^{\|A\|}$.

$m\to\infty$得证.

定义 称 ($A\in M_n$) $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$ 为A的矩阵指数函数.

命题 ✓1) $\forall A,B\in M_n$. 若$AB=BA$ 则 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

✓2) $\forall A\in M_n$ e^{At}可逆且 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$

✓3) 若$P\in M_n$. $\det P\ne 0$. 则 $e^{PAP^{-1}t}=Pe^{At}P^{-1}$

§ 3.2 解矩阵

Thm3 e^{At} 为 (4) 的基解矩阵.

证. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}$ 在 t 轴上任一闭区间一致收敛. 故 e^{At} 在 t 轴上处处可微

且其导数可逐项求导得出

$$\frac{de^{At}}{dt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}=Ae^{At}.$$

另外. $\det e^{A0}=\det E=1$. 及 Liuwille 公式 $\det e^{At}=\det E\cdot e^{\int_0^t tr(A)ds}>0$

$\Rightarrow e^{At}$ 为基解矩阵. (线性无关). $e^{At}=(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n)$.

$c=(c_1\cdots c_n)^T$.

推论: $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{f}(t)$ (5) 通解.

$\vec{x}=e^{At}\cdot\vec{c}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds.$

而 (5) 在初值 $\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$ 下的解. $\vec{x}=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}+\int_0^t e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds$

证: 解的结构 $\vec{x}=e^{At}\vec{c}+\vec{x}^*$. $\vec{x}^*$: 特解.

利用常数变易法 $\vec{x}^*=e^{At}\vec{c}^*(t)$ $\vec{c}^*(t)$ 待定. 代入 (5).

$$\cancel{\vec{c}\cdot\frac{de^{At}}{dt}}+\frac{de^{At}}{dt}\vec{c}^*(t)+e^{At}\frac{d\vec{c}^*(t)}{dt}=A\cancel{e^{At}(\vec{c}+\vec{c}^*(t))}+\vec{f}(t)$$

$$\Rightarrow\quad\frac{d\vec{c}^*(t)}{dt}=e^{-At}\vec{f}(t)$$

取 $\vec{c}^*(t)=\int_{t_0}^{t}e^{-As}\vec{f}(s)ds$

∴ (5) 通解 $\vec{x}=e^{At}\vec{c}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds.$

初值问题 $\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$, 有 $\vec{c}=e^{-At_0}\vec{x_0}$ 得 $\vec{x}=e^{A(t-t_0)}\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)d$

例: 1° $A=diag(a_1,\cdots,a_n)$. $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}\vec{x}$.

$A^k=\begin{pmatrix}a_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k\end{pmatrix}$ $\quad e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}diag\left(\frac{(a_1t)^k}{k!},\cdots,\frac{(a_nt)^k}{k!}\right)$

$=diag(e^{a_1t},\cdots,e^{a_nt}).$

2° $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\vec{x}$.

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=E+Z$ $\quad$ Z 幂零阵 $\exists k\in\mathbb{Z}_+, Z^k=0$

2次幂零阵.

$$e^{At} = e^{(E+Z)t} = \underbrace{e^{Et}\cdot e^{Zt}}_{\text{都收敛}} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}(E+Zt) \quad (Z^k=0,\ k\geq 2).$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

§3.3. 利用Jordan标准型求基解矩阵

Jordan定理 $\forall A\in M_n$. $\exists P$ s.t. $A=PJP^{-1}$ $\det P\neq 0$.

其中 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}$ 为Jordan型. $J_i=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$ 为n_j阶方阵.

且 $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$. λ_j为A的特征值.

由命题2及上例知 $e^{At}=e^{(PJP^{-1})t}=Pe^{Jt}P^{-1}=P\,\mathrm{diag}(e^{J_1t},\dots,e^{J_mt})P^{-1}$.

而 $J_i=\lambda_i E_{n_j}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}=\lambda E_{n_j}+Z_{n_j}$ $\boxed{Z_{n_j}^{n_j}=0}$ n_j次幂零.

$$e^{J_it}=e^{\lambda_i E_{n_j}t}\cdot e^{Z_{n_j}t}=e^{\lambda_i t}E_{n_j}\left\{E_{n_j}+Z_{n_j}t+\cdots+Z_{n_j}^{n_j-1}\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\right\}.$$

$$=e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Phi(t):=e^{At}P=P\begin{pmatrix} e^{J_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_mt} \end{pmatrix}$ 为(4)的基解矩阵.

P116 4(2)、6.

§3.4 待定指数函数法

(一) A 只有单特征值

设A的特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 互不相同. 则A的 Jordon 标准形

$J = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 基解矩阵 $\Phi(t) = e^{At}P = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$.

特征向量 $\vec{r_1}, \cdots, \vec{r_n}$.

(令 $\vec{r_j}$ 为P的第j列, 即 $P = (\vec{r_1}, \cdots, \vec{r_n})$.)

$= (e^{\lambda_1 t}\vec{r_1}, \cdots, e^{\lambda_n t}\vec{r_n})$

定理4. 设n阶阵A有n个互不相同的特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$. 则 $\Phi(t)$ 是 (4). 的基解矩阵. 其中 $\vec{r_j}$ $(1 \le j \le n)$ 为A对应 λ_j 的特征向量.

证: 由 $A\vec{r_j} = \lambda_j \vec{r_j}$ 知 $\frac{d\Phi(t)}{dt} = (\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\vec{r_1}, \cdots, \lambda_n e^{\lambda_n t}\vec{r_n})$.

$= (e^{\lambda_1 t}(\lambda_1\vec{r_1}), \cdots, e^{\lambda_n t}(\lambda_n\vec{r_n})) = (e^{\lambda_1 t}A\vec{r_1}, \cdots, e^{\lambda_n t}A\vec{r_n})$.

$= A(e^{\lambda_1 t}\vec{r_1}, \cdots, e^{\lambda_n t}\vec{r_n}) = A\Phi(t)$.

$\Rightarrow \Phi(t)$ 为方程组 (4) 的解矩阵.

另外. 由线性代数理论知. $\vec{r_1}, \cdots, \vec{r_n}$ 线性无关.

$\det\Phi(0) = \det P = \det(\vec{r_1}, \cdots, \vec{r_n}) \neq 0$.

由 Liouville 公式. $\det\Phi(t) = \det\Phi(0)\, e^{\int_0^t trA\, ds} \neq 0$.

$\Rightarrow \Phi(t)$ 为 (4) 的基解矩阵.

例 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$

特征方程: $\det(A - \lambda E) = 0$.

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0$, 特征值 $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

对 $\lambda_1 = 1+i$. 求 $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21}\end{pmatrix}$ s.t. $(A - \lambda_1 E)\vec{r_1} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21}\end{pmatrix} = 0$.

(求解线性方程组). 取 $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

类似对 $\lambda_2 = 1-i$ 取 $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

OURSTORYBEGINS

(为求实的通解)

$\Phi(t)$的第一列为 $e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1 = e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

显然实部、虚部线性无关，且均为(4)的解.

则实通解 $\vec{x} = c_1e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix} + c_2e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$. $(c_1, c_2 \in R)$

(二) A有相重特征值.

定理5: 设A有互不相同的特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$. 对应重数 $n_1, \cdots, n_m$. $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$. 则(4)有基解矩阵

$\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t}\vec{R}_1^{(1)}(t), \cdots, e^{\lambda_1 t}\vec{R}_{n_1}^{(1)}(t), \cdots, e^{\lambda_m t}\vec{R}_1^{(m)}(t) \cdots e^{\lambda_m t}\vec{R}_{n_m}^{(m)}(t))$.

其中 $\vec{R}_k^{(j)}(t) = \vec{r}_{k0}^{(j)} + t\vec{r}_{k1}^{(j)} + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\vec{r}_{k\,n_j-1}^{(j)}$.

$\vec{r}_{k0}^{(j)}$ $(1\le k\le n_j)$ 为 $(A-\lambda_j E)^{n_j}\vec{r}=0$ 的 n_j 个线性无关解.

而 $\vec{r}_{kl}^{(j)}$ $(1\le k\le n_j, 1\le l\le n_j-1, 1\le j\le m)$ 满足: $\vec{r}_{kl}^{(j)} = (A-\lambda_j E)^{l}\vec{r}_{k0}^{(j)}$.

证: 对$\Phi(t)$的任一列 $\vec{\varphi}_k^{(j)}(t) = e^{\lambda_j t}\vec{R}_k^{(j)}(t)$ $(1\le k\le n_j, 1\le j\le m)$ 有

$\frac{d\vec{\varphi}_k^{(j)}}{dt} = \lambda_j e^{\lambda_j t}\vec{R}_k^{(j)}(t) + e^{\lambda_j t}(\vec{r}_{k1}^{(j)} + \cdots + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\vec{r}_{k\,n_j-1}^{(j)})$.

$= \lambda_j\vec{\varphi}_k^{(j)} + e^{\lambda_j t}(A-\lambda_j E)\cdot(\vec{r}_{k0}^{(j)} + t\vec{r}_{k1}^{(j)} + \cdots + \vec{r}_{k\,n_j-2}^{(j)}\cdot\frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} + \vec{0})$

$= \lambda_j\vec{\varphi}_k^{(j)} + e^{\lambda_j t}(A-\lambda_j E)\cdot(\vec{r}_{k0}^{(j)} + t\vec{r}_{k1}^{(j)} + \cdots + \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!}\vec{r}_{k\,n_j-2}^{(j)} + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\vec{r}_{k\,n_j-1}^{(j)})$.

$(e^{\lambda_j t}(A-\lambda_j E)\vec{r}_{k\,n_j-1}^{(j)} = e^{\lambda_j t}(A-\lambda_j E)\cdot(A-\lambda_j E)^{n_j-1}\vec{r}_{k0}^{(j)} = e^{\lambda_j t}(A-\lambda_j E)^{n_j}\vec{r}_{k0}^{(j)} = \vec{0})$

$= \lambda_j\vec{\varphi}_k^{(j)} + \underbrace{e^{\lambda_j t}\cdot\vec{R}_k^{(j)}(t)}_{(A-\lambda_j E)} = \lambda_j\vec{\varphi}_k^{(j)} + (A-\lambda_j E)\cdot\vec{\varphi}_k^{(j)}(t) = A\vec{\varphi}_k^{(j)}(t)$.

$\Rightarrow$ $\Phi(t)$为(4)的解矩阵. 由Liouville公式知, 若$\Phi(t)\ne 0$ 需证$\Phi(0)\ne 0$.

由代数基本结论: 设V为n维列向量组成的线性空间, 则

<a $V_j = \{\vec{r}\in V \mid (A-\lambda_j E)^{n_j}\vec{r}=0\}$ 是A的n_j维不变子空间. 即 $AV_j = V_j$

<b $V = V_1\oplus\cdots\oplus V_m$.

由<a 在V_j中选取线性无关的一组基 $\{\vec{r}_{k0}^{(j)}\}_{1\le k\le n_j}$. 而$\Phi(0) =$
$(\vec{r}_{10}^{(1)}, \cdots, \vec{r}_{n_1 0}^{(1)}, \cdots, \vec{r}_{10}^{(m)}, \cdots, \vec{r}_{n_m 0}^{(m)})$

由<b 知 $\Phi(t)$各列构成线性无关的一组基.

OURSTORYBEGINS

例 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = A\vec{x}$.

特征方程: $\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2$.

$\lambda_1=-2\ (n_1=1)\quad \lambda_2=1\ (n_2=2)$.

$\lambda_1=-2$时. 特征向量 $\vec{\eta_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\lambda_2=1$时 $(A-\lambda_2 E)^2\vec{r} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\28&44&9\end{pmatrix}\vec{r}=0$, 其中 $\vec{r} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

有 $28a+44b+9c=0$. 设 $\vec{r_1}=(a_1,b_1,c_1)^T$, $\vec{r_2}=(a_2,b_2,c_2)^T$. 使 $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ 无关

取 ($\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\neq 0$.) $a_1=11\quad b_1=-7 \Rightarrow c_1=0$

$a_2=3\quad b_2=-6 \Rightarrow c_2=20$.

即 $\vec{r_{10}}=(11,-7,0)^T\quad \vec{r_{20}}=(3,-6,20)^T$.

从而 $\vec{r_{11}}=(A-\lambda_2 E)\vec{r_{10}} = \begin{pmatrix}15\\-30\\100\end{pmatrix}\quad \vec{r_{21}}=\vec{0}$.

由定理5. 基解矩阵 $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t(11+15t) & 3e^t \\ 0 & e^t(-7-30t) & -6e^t \\ e^{-2t} & e^t 100t & 20e^t \end{pmatrix}$.

P139 1.(3)(6)(9) 2.

P140 9.

定理6 如 $A\in F^{n\times n}$. 特征值 λ_j, $\mathrm{Re}\lambda_j \le \alpha\ (j=1,2,\dots,n)$.

且 $\mathrm{Re}\lambda_j=\alpha$ 的 λ_j 对应的 $R_k^{(j)}(t)$ 次数为0 则 $\exists\, M>0$.

$|x(t)| \le M|x(0)|e^{\alpha t}$.

特别的若 $\mathrm{Re}\lambda_j<\alpha\ (j=1,2,\dots,n)$ 则上式成立.

[illegible]都不大于α. 且$Re\lambda_j=\alpha$的特征值重数为1

那么对$\exists M>0$ s.t: $\|x(t)\| \le M\|x(0)\|e^{\alpha t}$

推论：(4)任一解满足 $\lim\limits_{t\to\infty}|\vec{x}(t)|=0 \Leftrightarrow Re\lambda<0$. $\forall A$的特征值均成立

证：(充分性) 若 $\forall Re\lambda<0$ $\exists \alpha>0$ s.t: $Re\lambda<-2\alpha$.

由定理5知 $\Phi(t)$任一列可写成 $e^{\lambda t}\vec{p}(t)$，$p(t)$为多项式.

易知 $\exists M>0$. s.t. $|\vec{p}(t)| \le Me^{\alpha t}$，$\forall t\ge 0 \Rightarrow |e^{\lambda t}\vec{p}(t)| \le e^{Re\lambda}|\vec{p}(t)|$

$\le Me^{(Re\lambda+\alpha)t} \le Me^{-\alpha t}\to 0\ (t\to+\infty)$

$\Rightarrow |\Phi(t)| \to 0\ (t\to+\infty)$. $|\vec{x}(t)|=|\Phi(t)\vec{c}|\to 0\ (t\to+\infty)$.

(必要性) 设(4)任一解 $\vec{x}(t)\to 0\ (t\to+\infty)$ 而 $\vec{x}(t)=\Phi(t)\cdot\vec{c} \Rightarrow |\Phi(t)|\to 0$.

任一列 $|e^{\lambda t}\vec{p}(t)|\to 0$，$\vec{p}(t)$多项式 $\Rightarrow e^{Re\lambda t}=|e^{\lambda t}|\to 0$.

$\Rightarrow Re\lambda<0$.

§4 线性微分方程组解的结构.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x} \quad (5)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+f(t) \quad (6) \qquad A(t).\ f(t)\text{在}I\text{上连续}.$$

齐次方程组基本解组定理.

(5)在I上有n个线性无关的解 $\vec{\varphi}_1(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$.

其通解为 $\vec{x}(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\vec{\varphi}_j(t)$ c_j.任意常数.

证：先证一个引理.

令 $S=\{\vec{x}(t) \mid \frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x},\ t\in I\}$. 则$S$为线性空间. $\dim S=n$.

由解的存在唯一性定理　　　　叠加原理

知$\forall$固定$t_0\in I$. $\forall \vec{x_0}\in R^n$在S中存在唯一元素 $\vec{x}(t)$ s.t. $\vec{x}(t_0)\to x_0$.

即$\exists$映射 $H: R^n\longmapsto S$，$H(\vec{x_0})=\vec{x}(t)$ (下证H.同构映射).

$\forall\ \vec{x}(t)\in S$ 有 $\vec{x}(t_0)\in R^n$ 且 $H(\vec{x}(t_0))=\vec{x}(t)$. $\Rightarrow H$满

$\forall\ \vec{x_0},\vec{x_0^*}\in R^n$ 若 $\vec{x_0}\ne\vec{x_0^*}$ 由解的唯一性. $H(\vec{x_0})\ne H(\vec{x_0^*}) \Rightarrow H$单.

另外由叠加原理及解的唯一性 知H线性

$\therefore \dim S=\dim R^n=n$

OURSTORYBEGINS

由引理知，S 存在一组基，设为 $\{\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t)\}$，则 $\forall \vec{x}(t)\in S$ 可表示为
$\vec{x}(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j\vec{\varphi_j}(t)$

定义：设 $\vec{\varphi_1}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}\\ \varphi_{21}\\ \vdots\\ \varphi_{n1}\end{pmatrix}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}\\ \varphi_{2n}\\ \vdots\\ \varphi_{nn}\end{pmatrix}(t)$ 为 S 的解.

称行列式 $W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$

为解组 $\{\vec{\varphi_1}(t),\cdots,\vec{\varphi_n}(t)\}$ 的 Wronsky 行列式.

Liouville 公式 $W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$ $(t\in I_0)$ $trA(s)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(s)$

（推论）$W(t)$ 恒为 0 或恒不为 0.

证：由行列式性质及 (5) 有

$$\frac{dW(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n}\\ \frac{d\varphi_{k1}}{dt} & \cdots & \frac{d\varphi_{kn}}{dt}\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\varphi_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{kj}\varphi_{jn}\end{vmatrix}$$

$\vec{\varphi_k}=(\varphi_{1k},\cdots,\varphi_{nk})^T$

对 $j\neq k$，以 $-a_{kj}$ 乘第 j 行加到 k 行

第 k 列 $\frac{d\vec{\varphi_k}}{dt}=A(t)\vec{\varphi_{(k)}}$ 第 i 行 $\frac{d\varphi_{ik}}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)\cdot\varphi_{jk}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{kk}\varphi_{k1} & \cdots & a_{kk}\varphi_{kn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(t)W(t)=W(t)\cdot trA(t)$$

积分 ⟹ 结论.

def $\vec{\varphi_1}(t)\cdots\vec{\varphi_n}(t)$ 线性无关
若 $c_1\vec{\varphi_1}(t)+c_2\vec{\varphi_2}(t)+\cdots+c_n\vec{\varphi_n}(t)$ 在 $\alpha<t<\beta$ 上 $\equiv 0$
则 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$.

定理6 解组 $\vec{\varphi_1}(t)\cdots\vec{\varphi_n}(t)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow W(t)\neq 0$. $\forall t\in I$.
" " 相关 $\Longleftrightarrow \exists t_0\in I$ $W(t_0)=0$

证 由 Liouville 公式. $W(t)\neq 0\Longleftrightarrow W(t_0)\neq 0\Longleftrightarrow n$ 个常列向量 $\vec{\varphi_1}(t_0),\cdots,\vec{\varphi_n}(t_0)$
线性无关.

即若 $\sum_{k=0}^{n}c_k\vec{\varphi_k}(t)=0$ 则 $c_k=0$ $1\le k\le n$)

由引理证明 $H(\sum c_k\varphi_k(t_0))=\sum c_kH(\varphi_k(t_0))=\sum c_k\varphi_k(t)$

故 $\vec{\varphi_1}(t_0)\cdots\vec{\varphi_n}(t_0)$ 无关 $\Leftrightarrow$ $\vec{\varphi_1}(t)\cdots\vec{\varphi_n}(t)$ 无关

$$\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(s)=U(t,s)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t,s) & \varphi_2(t,s)\\ \varphi_1'(t,s) & \varphi_2'(t,s)\end{pmatrix}$$

常数变易公式. 二阶情形. φ_1,φ_2 都是(7)的解 且 $\varphi_1(s,s)=1$ $\frac{\partial\varphi_1(t,s)}{\partial t}\big|$

推论. 设 $\Phi(t)=(\vec{\varphi}_1(t)\cdots\vec{\varphi}_n(t))$ 为(5)的基解矩阵 $\varphi_2(s,s)=0$ $\frac{\partial\varphi_2(t,s)}{\partial t}\big|$

则(6)通解为 $\vec{x}(t)=\Phi(t)\underbrace{\left(\vec{C}_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds\right)}_{\vec{C}(t)}$.

常向量

§5. 二阶线性微分方程

定理7. 设 $\varphi(t)$ 为 $x''+p(t)x'+q(t)x=0$. (7)

的一个非零特解. $p(t),q(t)\in C(I)$. 则(7)通解

$$x(t)=\varphi(t)\left[C_1+C_2\int_{t_0}^{t}\varphi^{-2}(s)e^{\int_{t_0}^{s}p(m)dm}ds\right]$$

P157 2

P158 6(2) 7(7)

证: 不妨设 $\varphi(t)\neq 0$ 令 $x(t)$ 为任一解. 由 Liouville 公式.

$$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi(t) & x(t)\\ \varphi'(t) & x'(t)\end{vmatrix}=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}-p(s)ds}.$$

$\Rightarrow$ $\varphi x'-\varphi' x=C_2e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$ $C_2=W(t_0)$

$\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{\varphi}\right)=\frac{C_2}{\varphi^2}e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$

$\xRightarrow{\text{积分}}$ 结论.

定理8 (广义幂级数解). 设 $p(t),q(t)$ 在 t_0 点附近可展开成 $(t-t_0)$ 的收敛幂级数. $p^2(t_0)+q^2(t_0)\neq 0$. 则 $(t-t_0)^2x''+(t-t_0)p(t)x'+q(t)x=0$. 在 t_0 的邻域有收敛的广义幂级数解 $x=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(t-t_0)^{k+\rho}$ ρ. C_k 常数

(至少有一个)

$x=(t-t_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(t-t_0)^k$ $C_0\neq 0$.

△ 对(7) 若 $p(t),q(t)$ 在 $|t|<r$ $(r>0)$ 内可展开为收敛的幂级数.

$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kt^k$, $q(t)=\sum_{k=0}^{\infty}q_kt^k$. 那么(7)的每一解 在 $|t|<r$ 内也可展开为收敛的幂级数 $x=\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^k$.

$\frac{t(s)}{\,}\Big|_{t=s}=0$

$\frac{\dot{t}(s)}{t}\Big|_{t=s}=1.$

例 Bessel 方程 $t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0.\quad n\geq 0.$

由定理8. 方程有广义幂级数解

$x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k t^{k+\rho}\quad C_k.\ \rho$ 待定. 且 $C_0\neq 0.$

代入方程有 $C_0(\rho^2-n^2)t^{\rho}+C_1[(1+\rho)^2-n^2]t^{\rho+1}+\sum\limits_{k=2}\{C_k[(k+\rho)^2-k^2]+C_{k-2}\}=0.$

$\rho_{1,2}=\pm n\ ,\ C_1(1\pm 2n)=0,\quad C_k\,k(k\pm 2n)+C_{k-2}=0\ (k\geq 2.)$

1° $\rho_1=n\geq 0.$ 则 $C_1=0,\ C_k=-\frac{C_{k-2}}{k(k+2n)}$

$\Rightarrow\ \begin{cases} C_{2k+1}=0\\ C_{2k}=-\frac{C_{2k-2}}{2k(2k+2n)}=\frac{(-1)^k\,\Gamma(n+1)}{2^{2k}\,k!\,\Gamma(k+n+1)}C_0.\quad k\in N.\end{cases}$

(Γ 函数: $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt.\ s>0.\quad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$)

取 $C_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ 有幂级数解 $J_n(t)=\sum\limits_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}.$

且 $\lim\limits_{t\to 0^+}J_n(t)=\begin{cases}0 & n>0\\ 1 & n=0.\end{cases}$ 第一类 Bessel 函数 收敛半径 $+\infty$.

2° $\rho_2=-n\ (n\geq 0)$

① $2n$ 非整数. $C_k=\frac{C_{k-2}}{-k(k-2n)}$ $C_1=0$ 类似有另一形式解

$J_{-n}(t)=\sum\limits_{k=0}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-n}\quad \lim\limits_{t\to 0^+}J_n(t)=+\infty$

$J_n(t)$ 与 $J_{-n}(t)$ 线性无关. 通解 $x=C\,J_n(t)+D\,J_{-n}(t).$

② $2n=2m+1$ (奇数) 只需令 $C_{2m+1}=0.$ 仍有 $J_{-n}(t)$

③ $n=m$ 时. 易验证 $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t).$

另一线性无关解可用定理7求出. $J_m(t)\int J_m^{-2}(t)\,e^{-\int\frac{dt}{t}}dt.$

3° 另一方法表示通解.

$m\in Z_{\geq 0}$

① $n\neq m.$ 令 $N_n(t)=\frac{\cos n\pi}{\sin n\pi}J_n(t)-\frac{1}{\sin n\pi}J_{-n}(t).$ 第二类 Bessel 函数

② $n=m$ 令 $N_m(t)=\lim\limits_{n\to m}N_n(t)$ 由洛必达法则.

$N_m(t)=\frac{2}{\pi}J_m(t)\left(\ln\frac{t}{2}+\gamma\right)-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m}-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\cdot\left(\sum\limits_{l=0}^{m+k-1}\frac{1}{l+1}+\sum\limits_{l=0}^{k-1}\frac{1}{l+1}\right)\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+m}$

$\gamma=0.5772$ (Euler 常数)

……函数是(7)的解，且满足 $K(s,s)=0$, $\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\Big|_{t=s}=1$.
则 $x=\int_{t_0}^{t}K(t,s)f(s)ds$ 是非齐次方程满足 $x(t_0)=x'(t_0)=0$ 的解，
为此，求解非齐次二阶微分方程要知道(7)的两个无关非零解 若已知一个非零解
由定理(7)可得(7)通解.

$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} N_m(t)=-\infty$.

$\therefore N_m(t)$ 与 $J_m(t)$ 线性无关.

$\therefore \quad x=CJ_n(t)+DN_n(t)$ 为通解.

§6 Sturm-Liouville 边值问题.

S-L 问题

$$\begin{cases} [k(x)X'(x)]'-q(x)X(x)+\lambda p(x)X(x)=0. & a<x<b. \text{ 令 } \mathcal{L}X(x)=\lambda(x) \\ \alpha_1 X(a)-\beta_1 X'(a)=0、\ \alpha_2 X(b)+\beta_2 X'(b)=0 & (*) \\ X(a)=X(b) \quad X'(a)=X'(b) & (**)\ \text{周期情型} \end{cases}$$

其中 $0<k(x)\in C'[a,b]$, $0\le q(x)$; $0<p(x)\in C[a,b]$,

$\alpha_j, \beta_j\ge 0.\ \ \alpha_j^2+\beta_j^2\ne 0.\ \ j=1,2.$

定义：称(S-L)有非零解的常数λ为(S-L)的特征值 相应非零解为特征函数.

介绍：△ 空间 $L^2[a,b]=\{f(x)\mid\int_a^b|f(x)|^2dx<+\infty\}$.

△ 内积：$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$ 模 $\|f\|=(\int_a^b|f(x)|^2dx)^{1/2}$.

△ 正交基：称 $\{X_j(x)\}$ 为正交基.($L^2[a,b]$)中

若 $\langle X_j,X_k\rangle=\|X_j\|^2\delta_{jk}$ $\quad \delta_{jk}=\begin{cases}0 & j\ne k\\ 1 & j=k.\end{cases}$

且 $\forall f\in L^2[a,b]$. $f(x)=\sum_j c_jX_j(x)$ $\quad c_j=\langle f,X_j\rangle/\|X_j\|^2$.

"广义 Fourier 展开". 其中 $\lim_{N\to\infty}\|f(x)-\sum_{j=1}^{N}c_jX_j(x)\|=0$

: 均方收敛.

△ 自共轭算子：$L^2[a,b]$(或其子空间)上的线性变换 $\mathcal{L}$:

$\langle \mathcal{L}f,g\rangle=\langle g,\mathcal{L}f\rangle$

在 $L^2_\rho[a,b]=\{f(x) \mid \int_a^b |f(x)|^2\rho(x)dx<+\infty\}$ 定义加权内积

$\langle f,g\rangle_\rho=\int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$. 则易验证

$$\mathcal{L}=-\frac{d}{\rho(x)dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}\right)+\frac{q(x)}{\rho(x)}$$

在 $\{f(x)\in L^2_\rho[a,b]\cap C^2[a,b] \mid f(x)$ 满足(*)$\}$ 上是自共轭算子.

P169 2.3

P170 10.

S-L定理. (S-L)问题所有特征值 $\{\lambda_n\}$ 均为非零实数(若为零当且仅当 $q(x)=0$. 且 $\alpha_1=\alpha_2=0$) 且满足 $\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty$

相应的特征函数 $\{X_n(t)\}$ 在 $L^2_\rho[a,b]$ 上构成一组正交基.

(仅证非负性和正交性)

非负性 $\lambda\|X\|^2=\lambda\langle X,X\rangle=\langle\lambda X,X\rangle=\langle\mathcal{L}X,X\rangle$.

$=\int_a^b\{-[k(x)X'(x)]'X(x)+q(x)X^2(x)\}dx$

$=\underbrace{-k(x)X'(x)X(x)\Big|_a^b}_{\geq 0\ (利用(*)式)}+\underbrace{\int_a^b k(x)X'^2(x)dx}_{\geq 0}+\underbrace{\int_a^b q(x)X^2(x)dx}_{\geq 0}\geq 0. \Rightarrow \lambda\geq 0.$

正交性 $\lambda\neq\tilde{\lambda}$ 时 $(\lambda-\tilde{\lambda})\langle X,\tilde{X}\rangle_\rho=\lambda\langle X,\tilde{X}\rangle_\rho-\tilde{\lambda}\langle X,\tilde{X}\rangle_\rho$

$=\langle\mathcal{L}X,\tilde{X}\rangle_\rho-\langle X,\mathcal{L}\tilde{X}\rangle_\rho=0$ (自共轭). $\because \lambda-\tilde{\lambda}\neq 0$.

$\therefore \langle X,\tilde{X}\rangle_\rho=0$. X 与 $\tilde{X}$ 正交.

对周期条件(**) 结论类似. 除了每个特征值对应两个正交特征向量为简并

例 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0. & 0<x<1. \\ X(0)=X(1)=0. \end{cases}$

S-L定理. $\Rightarrow \lambda\geq 0$

i) $\lambda=0$ $X(x)=Ax+B \Rightarrow A=B=0$. 无非零解,

ii) $\lambda=w^2>0, w>0$. 通解 $X(x)=A\cos wx+B\sin wx$ (二阶常系数)

$X(0)=A=0$. $X(1)=B\sin w=0 \xrightarrow[B\neq 0]{} w=n\pi$. $n\in N^+$

∴ 特征值 $\lambda=w^2=(n\pi)^2$ 特征函数 $X_n(x)=\sin n\pi x$（取 $B=1$）.

第三章 常微分方程基本理论（书第四章）

§1 初值问题解的存在唯一性.

定义：若 $\vec{f}(t,\vec{x})$（向量值函数）（未知向量值）在区域 D 内满足 $|\vec{f}(t,\vec{x_1})-\vec{f}(t,\vec{x_2})|\le L|\vec{x_1}-\vec{x_2}|$

$L>0$ 常数．称 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 D 内满足 Lipschitz 条件（L 条件）
（连续，但一定可微）

例 $|\vec{x}|$ 满足 L 条件．连续，但不可微

Picard 定理．若 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 矩形区域 $D=\{(t,\vec{x})\in R^{n+1}\,\big|\,|t-t_0|<a,$
$|\vec{x}-\vec{x_0}|\le b\}$ 内 连续且满足 L 条件 则 $\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0)=\vec{x_0}\end{cases}$ --- (1).
在区间 $I=[t_0-h,t_0+h]$ 上存在唯一的解
$h=\min(a,\frac{b}{M})$ $M=\max\limits_{(t,\vec{x})\in D}|\vec{f}(t,\vec{x})|$

∴ 局部唯一性定理（存在唯一的范围较小）.

证明方法一：（逐次逼近法）.
首先易知 (1) 与积分方程 $\vec{x}(t)=\underbrace{\vec{x}(t_0)}_{=\vec{x_0}}+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x}(s))ds$ (2) 等价
构造 Picard 序列．令 $\vec{x_0}(t)=\vec{x_0}$，$\vec{x_k}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x_{k-1}}(s))ds$.
$t\in I$．$k\ge 1$．　$\vec{\varphi}(t)$　$\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s))$

从而由条件知．$\vec{x_k}(t)$ 连续可微．且 $|\vec{x_k}(t)-\vec{x_0}|=|\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x_{k-1}}(s))ds|$
$\le|\int_{t_0}^{t}M\,ds|\le M|t-t_0|\le Mh\le b\Rightarrow(t,\vec{x_k}(t))\in D$．$\forall t\in I$.
$M=\max|\vec{f}(t,\vec{x})|$

若能证 Picard 序列 $\{\vec{x_k}(t)\}$ 在 I 上一致收敛于某可微函数 $\vec{\varphi}(t)$
则令 $k\to+\infty$．即知 $\vec{\varphi}(t)$ 为 (1) 的解，

因 $\vec{x_k}(t)=\vec{x_0}+\sum\limits_{j=1}^{k}[\vec{x_j}(t)-\vec{x_{j-1}}(t)]$．须证 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\vec{x_k}(t)-\vec{x_{k-1}}(t)]$ 在 I 上一致收敛.

OURSTORYBEGINS

P177 1　P205 1(2). P206 4,7(1). (※)

下证 $|\vec{x}_k(t)-\vec{x}_{k-1}(t)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^k}{k!}$，$\forall k\ge 1$.（级数逼项若是估计）

$k=1$ 显然成立　$|x_1(t)-x_0(t)| = |\int_{t_0}^{t} \vec{f}(s,\vec{x}_0(t))\,ds| \le M|t-t_0|$

假设对 k 成立，则

$|\vec{x}_{k+1}(t)-\vec{x}_k(t)| = |\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(s,\vec{x}_k(s))-\vec{f}(s,\vec{x}_{k-1}(s))]ds|$

$\le |\int_{t_0}^{t} L|\vec{x}_k(s)-\vec{x}_{k-1}(s)|ds|$

假设 $\le L|\int_{t_0}^{t}\frac{M}{L}\frac{(L|s-t_0|)^k}{k!}ds| = ML^k\frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L}\frac{(L|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \Rightarrow$ (※)成立

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}|\vec{x}_k(t)-\vec{x}_{k-1}(t)| \le \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(L|t-t_0|)^k}{k!} \le \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!} = \frac{M}{L}(e^{Lh}-1)$　$\forall t\in I$

数项级数收敛

故上述论断成立

即 $\vec{x}=\varphi(t)=\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k(t)$

唯一性. 设小有两解 $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$. 令 $J=[t_0-d,t_0+d]$ 为共同的存在区间

$(0\le d\le h)$. 则由(2)有

$|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)| = |\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(s,\vec{x}_1(s))-\vec{f}(s,\vec{x}_2(s))]ds|$

$\le L|\int_{t_0}^{t}|\vec{x}_1(s)-\vec{x}_2(s)|ds| \le LK|t-t_0|$. $K=\max_{t\in J}|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)|$

再用上式 有 $|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)| \le K\frac{(L|t-t_0|)^2}{2!}$，如此递推有

$|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)| \le K\frac{(L|t-t_0|)^N}{N!} \le K\frac{(Ld)^N}{N!} \to 0^+$ $(N\to+\infty)$.

唯一性的另证明 "Gronwall 不等式"

设连续函数 $a(t)>0$. 连续函数 g 与常数 C 均非负.

若 $g(t)\le C\pm\int_{t_0}^{t}a(s)g(s)ds$.　$\begin{cases} t\ge t_0 + \\ t<t_0 - \end{cases}$

则 $g(t)\le Ce^{\pm\int_{t_0}^{t}a(s)ds}$.（证明：不等式两边同乘 $a(t)e^{\mp\int_{t_0}^{t}a(s)ds}$

由前知. $|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)| \le L|\int_{t_0}^{t}|\vec{x}_1(s)-\vec{x}_2(s)|ds|$. 令 $g(t)=|\vec{x}_1(s)-\vec{x}_2(s)|$,

$C=0$. $a(t)\equiv L$.　$0\le g(t)\le 0$　$g(t)\equiv 0 \Rightarrow \vec{x}_1(t)\equiv\vec{x}_2(t)$

Picard定理

推论：设 $f(t,x)$ 在 D 内连续. 且在 D 的任一有界闭子区域 $\bar{D}$ 上 $f(t,x)$ 关于 x 满足 L 条件.（L 可能与 $\bar{D}$ 有关）那么对 $\forall (t_0,x_0)\in D$. (1) 的解 $x=\varphi(t)$ 存在且唯一

证明方法二：(压缩映象原理)

设 X 为完备距离空间(度量空间)，映射 $A: X\to X$ 是压缩映射，即 $\exists\,\theta\in(0,1)$

$\forall\, x,y\in X$ 都有 $\|A(x)-A(y)\|\le\theta\|x-y\|$，则 A 在 X 中存在唯一的不动点。

即 $x=A(x)$

证明：存在性 $\forall\, x_0\in X$，构造序列 $\{x_k\}\subset X$：$x_{k+1}=A(x_k)$ $k\geq 0$。

由条件有 $\|x_{k+1}-x_k\|=\|A(x_k)-A(x_{k-1})\|\le\theta\|x_k-x_{k-1}\|\le\cdots\le\theta^k\|x_1-x_0\|$ $(k\ge 1)$

$=\theta^k\|A(x_0)-x_0\|$

$\xRightarrow{\text{三角不等式}}$ $\|x_{k+m}-x_k\|\le\sum_{j=1}^{m}\|x_{k+m+1-j}-x_{k+m-j}\|\le\sum_{j=1}^{m}\theta^{k+m-j}\|Ax_0-x_0\|$. $\forall\, m\in\mathbb{N}$

$\to 0\ (k\to+\infty)$

则 $\{x_k\}$ 是 cauchy 列。

$\xRightarrow{X\text{完备}}$ $\exists\, x\in X$ s.t. $x_k\to x$.

易知 A 连续，故在 $x_{k+1}=A(x_k)$ 两边取极限，$k\to+\infty$，得 $x=Ax$.

x_n 为函数列则 $\{x_k(t)\}$ 一致收敛。

唯一性：设 x_1,x_2 为 A 的不动点，$x_j=A(x_j)$，$j=1,2$.

则 $\|x_1-x_2\|=\|A(x_1)-A(x_2)\|\le\theta\|x_1-x_2\|$. 即 $\underbrace{(1-\theta)}_{>0}\underbrace{\|x_1-x_2\|}_{\geq 0}\le 0$

$\therefore\ \|x_1-x_2\|=0$. $\Rightarrow x_1=x_2$

Picard 定理的证明：

(1) 与 (2) 等价 (同上一种证明的第一步)

令 $X=\{\vec{x}(t)\in(C(I))^n \mid |\vec{x}(t)-\vec{x}_0|\le b\}$，在 X 中定义距离

$\|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)\|=\max_{t\in I}\{e^{-L|t-t_0|}|\vec{x}_1(t)-\vec{x}_2(t)|\}$.

易验证 X 为完备的距离空间

定义在 X 中的映射 $A: X\to X$. $A(\vec{x}(t))=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x}(s))\,ds$.

由 $\vec{x}(t)\in(C(I))^n$，知 $A(\vec{x}(t))\in(C(I))^n$

$|A(\vec{x}(t))-\vec{x}_0|\le\left|\int_{t_0}^{t}|\vec{f}(s,\vec{x}(s))|ds\right|\le M|t-t_0|\le Mh\le b$. $\Rightarrow A(\vec{x}(t))\in X$.

对 $\forall\,\vec{x}_1,\vec{x}_2\in X$，由 $A(\vec{x}_1(t))-A(\vec{x}_2(t))=\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(s,\vec{x}_1(s))-\vec{f}(s,\vec{x}_2(s))]ds$

有 $e^{-L|t-t_0|}|A(\vec{x}_1(t))-A(\vec{x}_2(t))|\le L\left|\int_{t_0}^{t}e^{-L|t-s|}e^{-L|s-t_0|}|\vec{x}_1(s)-\vec{x}_2(s)|ds\right|$

$\le(1-e^{-L|t-t_0|})\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|\le(1-e^{-Lh})\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|$

$\Rightarrow\|A(\vec{x}_1(t))-A(\vec{x}_2(t))\|\le\underbrace{(1-e^{-Lh})}_{<1}\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|$. 压缩映射

OURSTORYBEGINS

故由压缩映射原理知 A ∃! 不动点 $\vec{x}(t)$：$\vec{x}(t)=\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{x}(s))ds$

是(1)唯一的解.

Osgood 条件. $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\le F(|x_1-x_2|)$. 其中 $F(r)>0$ 连续且

$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=+\infty$ ($r_1>0$: 常数).

Osgood 定理：设 $f(t,x)$ 在区域 D 对 x 满足 O 条件 则 $\forall (t_0,X_0)$.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$ 解存在唯一

证：(存在性) Peano 定理

(唯一性). 设两解 $x_1(t)$. $x_2(t)$, 且 $\exists t_1\ne t_0$ $x_1(t_1)\ne x_2(t_2)$.

不妨设 $t_1>t_2$. $x_1(t_1)>x_2(t_1)$.

令 $r(t)=x_1(t)-x_2(t)$ $\bar{t}:=\sup\limits_{t\in[t_0,t_1]}\{t\,|\,r(t)=0\}$. $\Rightarrow r(t_0)=0=r(\bar{t})$.

$r(t_1)>0$ 且 $r(t)>0, t\in[\bar{t},t]$

由条件知 $t\in[\bar{t},t_1]$ 时

$r'(t)=x_1'(t)-x_2'(t)=f(t,x_1(t))-f(t,x_2(t))\le F(|x_1(t)-x_2(t)|)=F(r(t))$.

即 $\frac{dr}{F(r(t))}\le dt$ $\xrightarrow[\bar{t}\text{到}t_1\text{积分}]{}$ $\underbrace{\int_0^{r(t_1)}\frac{dr}{F(r(t))}}_{=+\infty}\le t_1-\bar{t}\le t_1-t_0<+\infty$. 矛盾.

解的延伸：

延伸定理：设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在区域(开集) D 内连续且 Γ 为 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$ 过 D 内任一点 $P_0(t_0,\vec{x_0})$ 的任一积分曲线(解). 则 Γ 在 D 内可延伸到 D 的 $\boxed{\text{边界}}$.

与 D 的性质有关

① D 若有界. 则可达边界

② 若 D 无界. 则可能达不到边界

~~(以下讨论基于 Peano 定理)~~.

作业. Gronwall 不等式

P207 13. P214 1 P217 3

☆ (Peano 定理) $f(t,x)$ 在 D 上连续. 则微分方程 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 过 D 内任意点 (t_0,x_0) 至少存在一个解.

线性微分方程组解的存在区间是方程系数在其上连续的区间.

Γ: $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$, $t\in J$. J为Γ的最大存在区间. 考虑右侧延伸. $J^*:=J\cap[t_0,+$

1) $J^*=[t_0,+\infty)$ 显然

2) $J^*=[t_0,t_1]$ (闭区间), $t_0<t_1<+\infty$. 因D为开集 $\exists$ 矩形区域 $R_1=\left\{(t,\vec{x})\,\middle|\,\begin{array}{l}|t-t_1|\le a_1\\ |x-\varphi(t_1)|\le b_1\end{array}\right\}$

$\subset D$, 其中 $a_1, b_1>0$ 充分小.

由Piano定理 知 方程在R_1内至少有一解 $\vec{x}=\vec{\psi}(t)$ 满足 $\vec{\psi}(t_1)=\vec{\varphi}(t_1)$

$(\,|t-t_1|\le h_1=\min(a_1,\frac{b_1}{\max|\vec{f}|})\,)$.

$\therefore$ $\vec{x}(t)=\begin{cases}\vec{\varphi}(t) & t_0\le t\le t_1\\ \vec{\psi}(t) & t_1\le t\le t_1+h_1\end{cases}$ 满足方程. 即Γ存在区间$\supset[t_0,t_1+h)$

与J^*矛盾

3) $J^*=[t_0,t_1)$ $t_1<+\infty$.

若Γ不能延伸到D的边界. 则$\exists$有界闭区域 $D_1\subset D$. s.t. $(t,\vec{\varphi}(t))\in D_1$

$\forall t\in J^*$. 由中值定理 $|\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(\tilde{t})|=|\vec{\varphi}'(\theta)(t-\tilde{t})|=|\vec{f}(\theta,\vec{\varphi}(\theta))|\,|t-\tilde{t}|$

$\le K|t-\tilde{t}|$ $\forall t,\tilde{t}\in J^*$. $(K=\max\limits_{D_1}|\vec{f}|)$.

由函数极限的Cauchy收敛准则. 知 $\lim\limits_{t\to t_1}\vec{\varphi}(t)=\vec{x_1}$存在.

则 $\vec{\varphi}^*(t)=\begin{cases}\vec{\varphi}(t) & t_0\le t\le t_1\\ \vec{x_1} & t=t_1\end{cases}$ 在$[t_0,t_1]$连续 且满足

$\vec{\varphi}^*(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\varphi(s))\,ds$. 故$\Gamma$可延伸到$[t_0,t_1]$

例 $\frac{dx}{dt}=t^2+x^2$ 任一解的存在区间有界

证: 因$f(t,x)=t^2+x^2$光滑. 满足$x(t_0)=x_0$的解 $x=x(t)$ 在平面内

延伸到无穷远处. 设 $J^*=[t_0,+\infty)$. $a=|t_0|+1\le t<+\infty$

$t^2+x^2\ge a^2+x^2\ge 1$ 即 $\frac{x'}{a^2+x^2}\ge 1$ $\xrightarrow{积分}$ $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2}\ge\int_0^{+\infty}dt$

即 $\frac{\pi}{a}\ge\frac{1}{a}(\arctan\frac{x(t)}{a}-\arctan\frac{x(0)}{a})\ge+\infty$ 矛盾

解的存在区间J^*一定是有界区间

· 若$f(t,x)$满足Picard定理推论中的条件. 则 ① $J^*=[\alpha,\beta]\xrightarrow{必可延展}J=[\alpha,\beta+h]$

② $J^*=(\alpha,\beta)$ $\begin{cases}\text{若 }\varphi(\beta-0)\text{存在且 }(\beta,\varphi(\beta-0))\in D\text{ 则 }\xrightarrow{可延展}J=(\alpha,\delta)\quad \delta>\beta.\\ \exists\{t_n\}\subset(\alpha,\beta)\quad t_n\to\beta-0\text{ 且 }\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n)=C\text{ 存在 }(\beta,C)\in D.\end{cases}$

0.119 定理1 设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在区域 $S=\{(t,\vec{x})\mid \alpha<t<\beta,\ |\vec{x}|<+\infty\}$ 内连续
且 $|\vec{f}(t,\vec{x})|\le A(t)|\vec{x}|+B(t)$，$A(t),B(t)\ge 0$ 在 (α,β) 连续
则 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$ 任一解均以 (α,β) 为其最大存在区间

§ 解对初值的连续依赖性和可微性定理

定义：设 $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0^*)=\vec{x}_0^*\end{cases}$ 解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)$ 在 $[a,b]$ 上存在.

若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\delta(\varepsilon,t_0^*,\vec{x}_0^*)>0$ s.t. 对满足 $|t_0-t_0^*|<\delta$，$|\vec{x}_0-\vec{x}_0^*|<\delta$.

(1) $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$ 的解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 均在 $[a,b]$ 上存在，且

D1 $|\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)|<\varepsilon$，$\forall t\in[a,b]$.

引| 则称(1)解 $\vec{x}=\varphi(t,t_0,\vec{x}_0)$ 在点 $(t_0^*,\vec{x}_0^*)$ 连续依赖于初值 $(t_0,\vec{x}_0)$

解对初值连续依赖定理：设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在区域 D 对 $\vec{x}$ 满足 L 条件
若 $(t_0^*,\vec{x}_0^*)\in D$ 且 $\begin{cases}\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0^*)=\vec{x}_0^*\end{cases}$ 有解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)$ 且 $t\in[a,b]$
时 $(t,\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*))\in D$ 则(1)的解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)$ 在 $(t_0^*,\vec{x}_0^*)$ 连续依赖于 $(t_0,\vec{x}_0)$

证：$\forall\varepsilon>0$ 取 $0<\delta_1<\varepsilon$ 使闭区域 $U=\{(t,\vec{x})\mid a\le t\le b,\ |\vec{x}-\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)|\le\delta_1\}\subset D$ ($\because D$ 为开集). 取 $0<\delta<\frac{\delta_1}{M+1}e^{-L(b-a)}$，$M=\max\limits_U|\vec{f}(t,\vec{x})|$.
且 $R=\{(t,\vec{x})\mid |t-t_0^*|\le\delta,\ |\vec{x}-\vec{x}_0^*|\le\delta\}\subset U$
由 Picard 定理 $\forall(t_0,\vec{x}_0)\in R$ 在 t_0 某邻域(1)有唯一解
$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)$. 且在其有定义的区间上 $\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s,t_0,\vec{x}_0))ds$
另外. $\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)=\vec{x}_0^*+\int_{t_0^*}^{t}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s,t_0^*,\vec{x}_0^*))ds$.
由上式及 L 条件 $|\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x}_0^*)|\le|\vec{x}_0-\vec{x}_0^*|+\left|\int_{t_0^*}^{t}[\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s,t_0,\vec{x}_0))-\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s,t_0^*,\vec{x}_0^*))]ds\right|+\left|\int_{t_0}^{t_0^*}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s,t_0,\vec{x}_0))ds\right|$
$\le\delta+L\left|\int_{t_0^*}^{t}|\vec{\varphi}(s,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(s,t_0^*,\vec{x}_0^*)|ds\right|+M|t_0^*-t_0|$.
$\le(1+M)\delta+L\left|\int_{t_0^*}^{t}|\vec{\varphi}(s,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(s,t_0^*,\vec{x}_0^*)|ds\right|$.

由Gronwall不等式得 $\leq (1+m)\delta e^{L|t-t_0^*|} \leq (1+m)\delta e^{L(b-a)} \leq \delta_1 < \varepsilon$.

故须证 $\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x_0})$ 在 $[a,b]$ 上有定义

(下仅证在 $[t_0,b]$ 上有定义)

因解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x_0})$ 不能越过曲线 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0^*,\vec{x_0^*})\pm\varepsilon$ (唯一性)

而由延伸性知 $\vec{x}$ 可延伸到 D 的边界，故其在延伸必由 $t=b$ 穿出 U.

从而 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x_0})$ 必在 $[t_0,b]$ 上有定义.

定理2. 设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在区域 D 内连续且对 $\vec{x}$ 满足 L 条件. 则(1)解

$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{x_0})$ 在 D 内关于 t, $\vec{x_0}$ 连续

略证: $|\vec{\varphi}(t,\vec{x_0})-\vec{\varphi}(t,\vec{x_0^*})| \leq |\vec{x_0}-\vec{x_0^*}| + L|\int_{t_0}^{t} |\vec{\varphi}(s,\vec{x_0})-\vec{\varphi}(s,\vec{x_0^*})|ds|$.

初始点不变 t_0
初值变

$G \leq |\vec{x_0}-\vec{x_0^*}|e^{L|t-t_0|}$

P206 8

附加作业: 1) $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t^2+x^2}$ 最大存在区间.

2) $\frac{dx}{dt}=tx\sin^2 x$

P222 1(1) (3)

解对初值的可微性定理.

设 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 与 $\nabla_{\vec{x}} f(t,\vec{x})$ 在定义域 D: $|t-t_0|\leq a$ $|\vec{x}-\vec{x_0}|\leq b$ 上连续.

则初值问题(1)的解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t;\vec{x_0})$ 在区域 U: $|t-t_0|\leq\frac{a}{2}$. $|\vec{x_0}-\vec{x}|\leq\frac{b}{2}$

上连续可微.

OURSTORYBEGINS

一阶微分

方程组的平衡位置，奇点

与解的稳定性

$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x})$ (3)

$\vec{f}(t,\vec{x}) \in C(R\times \underset{\subset R^N}{G})$，$\vec{x}\in R^N$ 对 $\vec{x}$ 满足 L 条件.

设(3)有一解 $\underset{(平衡解)}{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}$ 在 $t_0\le t<+\infty$ 有定义.

定义：若 $\varepsilon>0$. $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$. s.t: $|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta$ 时. (3)以 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 为初值的解 $\vec{x}(t;t_0;\vec{x}_0)$ 在 $t\ge t_0$ 上有定义且满足 $|\vec{x}(t;t_0;\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t)|<\varepsilon$.

$\forall t\ge t_0$ 则称(3)解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 是稳定的.

而不稳定指 $\exists\ \varepsilon_0>0$. $\forall\delta>0$. $\exists\ \vec{x}_0$ 满足 $|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta$，以 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 为初值的解 $\vec{x}(t;t_0;\vec{x}_0)$ 至少在某时刻 $t_1>t_0$ 时. $|\vec{x}(t_1;t_0;\vec{x})-\vec{\varphi}(t_1)|\ge\varepsilon_0$.

例 $\begin{cases} x'=\pm x \\ x(0)=\eta \end{cases}$ $\begin{cases} y'=\pm y \\ y(0)=\eta+\varepsilon \end{cases}$

解 $\Rightarrow$ $y(t)-x(t)=\varepsilon e^{\pm t}$ $\begin{cases} y(t)-x(t)=\varepsilon e^{t} & 不稳定 \\ y(t)-x(t)=\varepsilon e^{-t} & 稳定 \end{cases}$

定义：若(3)解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 稳定且存在 δ_1 $(0<\delta_1<\delta)$ 只要 $|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta_1$.

就有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\vec{x}(t;t_0;\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t)|=0$. 则称 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 渐近稳定

称 $\underset{满足|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta的区域}{D}$ 为解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 的渐近稳定域(吸引域).

不妨设 $\vec{f}(t,\vec{0})=\vec{0}$ (若 $\vec{\varphi}(t)$ 为(3)的解，令 $\vec{y}=\vec{x}-\vec{\varphi}(t)$ 可知 $\frac{d\vec{y}}{dt}=\frac{d\vec{x}}{dt}-\vec{\varphi}'(t)$
$=\vec{f}(t,\vec{y}+\vec{\varphi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t)):=\vec{F}(t,\vec{y})$ 且满足 $\vec{F}(t,\vec{0})=\vec{0}$)

☆ 故只需考虑零解的稳定性.

$A(t)=\left.\frac{\partial\vec{f}(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}=0}$

· 方法1：线性近似.

将 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 $\vec{x}=\vec{0}$ 展开 $\vec{f}(t,\vec{x})=\vec{f}(t,\vec{0})+A(t)\vec{x}+\vec{N}(t,\vec{x})=A(t)\vec{x}+\vec{N}(t,\vec{x})$

$A(t)$：连续 n 阶矩阵函数 $\vec{N}(t,\vec{x})$ 在 $[0,+\infty)\times G$ 上连续

$G_n = \{\vec{x} \in R^n \mid |\vec{x}| \le n\}$. 并对 $\vec{x}$ 满足L-条件. 且 $\vec{N}(t,\vec{0}) = \vec{0}$

$\lim_{|\vec{x}| \to 0} \frac{|N(t,\vec{x})|}{|\vec{x}|} = 0$ (4). 对 $t \ge t_0$ 一致成立.

则(3)化为 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{N}(t,\vec{x})$ (5)

称 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x}$ 为(5)的线性化方程.

定理3. 设(5)中 $A(t) \equiv A$ (常矩阵). A所有特征值的实部 <0. 则(5)的零解渐近稳定. 若A有一实部为正的特征值. 则(5)的零解不稳定

仅证第一部分结论

第一步: 先证引理. 设A的所有特征值λ满足 $Re\lambda < \alpha$, 则 $|e^{At}| \le Ce^{\alpha t}$ $\forall t \ge 0$. $C>0$. 由线性方程组理论知 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的基解矩阵 $\Phi(t)$ 任一列可写成 $e^{\lambda t}\vec{P}(t)$ 多项式 知 $\exists\, \tilde{C} > 0$. s.t. $|\vec{p}(t)| < \tilde{C}e^{(\alpha - Re\lambda)t}$ $\forall t \ge 0$.

即 $|e^{\lambda t}\vec{p}(t)| \le \tilde{C}e^{\alpha t}$

$\Rightarrow |\Phi(t)| \le \tilde{C}e^{\alpha t}$, $|e^{At}| = |\Phi(t)\Phi^{-1}(0)| \le Ce^{\alpha t}$.

第二步: 由条件及引理 知 $\exists C>0$. 及 $\beta > 0$ s.t: $Re\lambda < -\beta$.

$|e^{At}| \le Ce^{-\beta t}$ (6) 由(4) 知 $\exists\, \delta$. $|\vec{x}| < \delta$. $t \ge 0$ 有 (最后说明)

$|\vec{N}(t,\vec{x})| \le \frac{\beta}{2C}|\vec{x}|$ (7)

只须证: 若 $|\vec{x}(0)| \le \varepsilon < \frac{\delta}{2C}$, 则 $|\vec{x}(t)| \le C\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}$ (8)

($|\vec{x}_0|$.) $\lim_{t\to\infty} |\vec{x}(t)| = 0$.

第三步: 易知(5)满足 $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ 的解为

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\vec{N}(s,\vec{x}(s))\,ds$$

由(6)(7)知. 只要 $|\vec{x}| \le \delta$. 则 $|\vec{x}(t)| \le Ce^{-\beta t}|\vec{x}_0| + \int_0^t Ce^{-\beta(t-s)}\frac{\beta}{2C}|\vec{x}(s)|\,ds$

令 $\varphi(t) = e^{\beta t}|\vec{x}(t)| \Rightarrow \varphi(t) \le C\varepsilon + \frac{\beta}{2}\int_0^t \varphi(s)\,ds \underset{G}{\Rightarrow} \varphi(t) \le C\varepsilon e^{\frac{\beta}{2}t}$

即 $|\vec{x}(t)| \le C\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}$

更确切的方法应为延拓 $\vec{x}(t)$ 的存在区间而不是先假设 $|\vec{x}| < \delta$.

一阶微分

OURSTORYBEGINS

方程组的平衡位置. 奇点

与解的稳定性

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \quad (3)$$

$\vec{f}(t,\vec{x})\in C(R\times \underset{\subset R^N}{G})$, $\vec{x}\in R^N$ 对 $\vec{x}$ 满足 L 条件.

设 (3) 有一解 $\underset{(未受扰动解)}{\underline{\vec{x}=\vec{\varphi}(t)}}$ 在 $t_0\le t<+\infty$ 有定义.

定义: 若 $\varepsilon>0$. $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$. s.t: $|\vec{x_0}-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta$ 时. (3) 以 $\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$ 为初值的解 $\vec{x}(t;t_0;\vec{x_0})$ 在 $t\ge t_0$ 上有定义且满足 $|\vec{x}(t;t_0;\vec{x_0})-\vec{\varphi}(t)|<\varepsilon$. $\forall t\ge t_0$ 则称 (3) 解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 是稳定的.

而不稳定指 $\exists\ \varepsilon_0>0$. $\forall\delta>0$. $\exists\ \vec{x_0}$ 满足 $|\vec{x_0}-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta$, 以 $\vec{x}(t_0)=\vec{x_0}$ 为初值的解 $\vec{x}(t;t_0;\vec{x_0})$ 至少在某时刻 $t_1>t_0$ 时. $|\vec{x}(t_1;t_0;\vec{x})-\vec{\varphi}(t_1)|\ge\varepsilon_0$.

例 $\begin{cases} x'=\pm x. \\ x(0)=\eta \end{cases}$ $\begin{cases} y'=\pm y. \\ y(0)=\eta+\varepsilon \end{cases}$

解 $\Rightarrow$ $y(t)-x(t)=\varepsilon e^{\pm t}$ $\begin{cases} y(t)-x(t)=\varepsilon e^{t} & 不稳定 \\ y(t)-x(t)=\varepsilon e^{-t} & 稳定. \end{cases}$

定义: 若 (3) 解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 稳定且存在 δ_1 $(0<\delta_1<\delta)$ 只要 $|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta_1$. 就有 $\lim\limits_{t\to+\infty}|\vec{x}(t;t_0;\vec{x_0})-\vec{\varphi}(t)|=0$. 则称 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 渐近稳定

称 D 为解 $\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$ 的渐近稳定域 (吸引域).

满足 $|\vec{x_0}-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta$ 的区域.

不妨设 $\vec{f}(t,\vec{0})=\vec{0}$ (若 $\vec{\varphi}(t)$ 为 (3) 的解. 令 $\vec{y}=\vec{x}-\vec{\varphi}(t)$ 可知 $\frac{d\vec{y}}{dt}=\frac{d\vec{x}}{dt}-\vec{\varphi}'(t)$ $=\vec{f}(t,\vec{y}+\vec{\varphi}(t))-\vec{f}(t,\vec{\varphi}(t)):=\vec{F}(t,\vec{y})$. 且满足 $\vec{F}(t,\vec{0})=\vec{0}$)

☆ 故只要考虑零解的稳定性.

方法1: 线性近似. $A(t)=\left.\frac{\partial\vec{f}(t,\vec{x})}{\partial\vec{x}}\right|_{\vec{x}=0}$

将 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 在 $\vec{x}=\vec{0}$ 展开 $\vec{f}(t,\vec{x})=\vec{f}(t,\vec{0})+A(t)\vec{x}+N(t,\vec{x})=A(t)\vec{x}+N(t,\vec{x})$

$A(t)$: 连续 n 阶矩阵函数 $\vec{N}(t,\vec{x})$ 在 $[0,+\infty)\times G$ 上连续

$G:=\{\vec{x}\in R^n \mid |\vec{x}|<n\}$ 而对 $\vec{x}$ 满足(一条件) 且 $\vec{N}(t,\vec{0})=\vec{0}$

$\lim\limits_{|\vec{x}|\to 0}\dfrac{|N(t,\vec{x})|}{|\vec{x}|}=0$ (4). 对 $t\geq t_0$ 一致成立.

则 (3) 化为 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{N}(t,\vec{x})$ (5)

称 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ 为 (5) 的线性化方程.

定理 3. 设 (5) 中 $A(t)\equiv A$ (常矩阵). A 所有特征值的实部 <0. 则 (5) 的零解渐近稳定. 若 A 有一实部为正的特征值. 则 (5) 的零解不稳定

仅证第一部分结论

第一步: 先证引理. 设 A 的所有特征值 λ 满足 $Re\lambda<\alpha$, 则 $|e^{At}|\leq Ce^{\alpha t}$ $\forall t\geq 0$. $C>0$. 由线性方程组理论. 知 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ 的基解矩阵 $\Phi(t)$ 任一列可写成 $e^{\lambda t}\underbrace{\vec{P}(t)}_{\text{多项式}}$ 知 $\exists\ \tilde{C}>0$. s.t: $|\vec{p}(t)|<\tilde{C}e^{(\alpha-Re\lambda)t}$ $\forall t\geq 0$.

即 $|e^{\lambda t}\vec{p}(t)|\leq\tilde{C}e^{\alpha t}$

$\Rightarrow |\Phi(t)|\leq\tilde{C}e^{\alpha t}$, $|e^{At}|=|\Phi(t)\Phi^{-1}(0)|\leq Ce^{\alpha t}$.

第二步: 由条件及引理 知 $\exists C>0$. 及 $\beta>0$ s.t: $Re\lambda<-\beta$.

$|e^{At}|\leq Ce^{-\beta t}$ (6) 由 (4) 知 $\exists\ \delta$. $|\vec{x}|<\delta$. $t\geq 0$ 有

(最后证明)

$|\vec{N}(t,\vec{x})|\leq\dfrac{\beta}{2C}|\vec{x}|$ (7)

只须证: 若 $\underset{(|\vec{x}_0|\cdot)}{|\vec{x}(0)|}\leq\varepsilon<\dfrac{\delta}{2C}$, 则 $|\vec{x}(t)|\leq C\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}$ (8).

$\lim\limits_{t\to\infty}|\vec{x}(t)|=0$.

第三步: 易知 (5) 满足 $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ 的解为

$\vec{x}(t)=e^{At}\vec{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}\vec{N}(s,\vec{x}(s))ds$

由 (6)(7) 知. 只要 $|\vec{x}|\leq\delta$. 则 $|\vec{x}(t)|\leq Ce^{-\beta t}|\vec{x}_0|+\int_0^t Ce^{-\beta(t-s)}\dfrac{\beta}{2C}|\vec{x}(s)|ds$

令 $\varphi(t)=e^{\beta t}|\vec{x}(t)|\Rightarrow\varphi(t)\leq C\varepsilon+\dfrac{\beta}{2}\int_0^t\varphi(s)ds\underset{G}{\Rightarrow}\varphi(t)\leq C\varepsilon e^{\frac{\beta}{2}t}$.

即 $|\vec{x}(t)|\leq C\varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}t}$

更确保的方法应为延拓 $\vec{x}(t)$ 的存在区间而不是先假设 $|\vec{x}|<\delta$.

OURSTORYBEGINS

P295. 2. 5 (3) (4)

例 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sin x + ay - \cos^2 t\,(x^2+y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = -ax - 2y + \sin^2 t\,(x^2-y^2). \end{cases}$

具有零解 $(x, y) = \vec{0}$

线性近似方程 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -ax - 2y. \end{cases} \Rightarrow \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9-4a^2}}{2} \xrightarrow{\text{定理3}}$

$\begin{cases} \text{渐近稳定} & |a| > \sqrt{2} \\ \text{不稳定} & |a| < \sqrt{2} \end{cases}$? $|a| = \sqrt{2}$ 无法判断.

方法二：(Lyapunov 第二方法) $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x})$ (9) $\vec{v}(\vec{0}) = \vec{0}$.

定义 考标量函数 $V(\vec{x}) \in C(G)$ 且满足 $V(\vec{0}) = \vec{0}$. $V(\vec{x}) > 0$

$(V$

$\dfrac{dV(\vec{x}(t))}{dt} := \dot{V}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{v}(\vec{x})}_{\frac{d\vec{x}}{dt}} \cdot \underbrace{\nabla V(\vec{x})}_{(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n})} \leq 0$. $(\dot{V}(\vec{0}) = 0$

定理1 若 $\varphi_j(x)=c_j\ (j=1,\cdots,n-1)$ 为(2')在D内的 $n-1$ 个独立首次积分

$\xi_i=c_i,\ 1\le i\le n-1$；$\xi_1=\varphi_1,\cdots,\xi_{n-1}=\varphi_{n-1}$

则对 $u(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 的常微分方程 $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}+cu=f$

$u=u(\xi_n)$

积分便可得(1)通解. 特别的. $c\equiv f\equiv 0$ 时 (1)通解为

$u=g(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{n-1}(x))$, $g\in C^1$：任意可微函数. $\xi_j=\varphi_j,\ j=1,\cdots,n$,

$\varphi_n(x)$ 为满足 Jacobi行列式 $\dfrac{D(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)}\ne 0$ 的任意函数

证明. $k=1,\cdots,n-1$ 时由条件及(2)有.

$$0=\frac{d\varphi_k(x(t))}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\frac{dx_j(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\quad(k=1,\cdots,n-1)$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial u}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n} b_j\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial\xi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_k}=\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi_n}$$

$$=f-cu$$

令量取 φ_n 只与 $\varphi_1\cdots$ 相关

$\Rightarrow$ u 为(1)的解. $c\equiv f\equiv 0$ 时 $\dfrac{\partial u}{\partial\xi_n}=0$. $\Rightarrow u=g(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$

将 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$ ($\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}$) 看成常数 $u(\cdots,\xi_n)=u(\xi_n)$

例: $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$. $x.y.z>0$.

特征方程 $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=\dfrac{dz}{z}$ 首次积分: $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=c_1\\ 2\sqrt{y}-\ln z=c_2\end{cases}$ 独立.

$\overset{\text{定理1}}{\Longrightarrow}$ 通解 $u=g(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln z)$.

例: $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u+xy & (t,x,y)\in R^3\\ u|_{t=0}=a(x,y)\end{cases}$

$b_1=1$. $b_2=-x$, $b_3=-y$. $c=-1$, $f=xy$.

特征方程: $\dfrac{dt}{1}=\dfrac{dx}{-x}=\dfrac{dy}{-y}$

首次积分: $xe^t=c_1$, $ye^t=c_2$.

令 $\xi_1=xe^t$, $\xi_2=ye^t$, $\xi_3=t$ Jacobi行列式 $\dfrac{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(t,x,y)}=e^{2t}>0$.

$\dfrac{\partial u}{\partial\xi_3}=u(\xi_1,\xi_2,\xi_3)+\xi_1\xi_2e^{-2\xi_3}$ 与 ξ_3 无关的任意函数 $\overset{\text{对应}}{\Longleftrightarrow}$ c

通解为 $u=e^{\xi_3}\left[g(\xi_1,\xi_2)+\int\xi_1\xi_2e^{-2\xi_3}e^{-\xi_3}d\xi_3\right]$

$=g(\xi_1,\xi_2)e^{\xi_3}-\frac{1}{3}\xi_1\xi_2e^{-3\xi_3}$

由 $u|_{t=0}=a(x,y)=g(x,y)-\frac{1}{3}xy\Rightarrow g(x,y)=\frac{1}{3}xy+a(x,y)$

$\therefore u=u(t,x,y)=[\frac{1}{3}xye^{2t}+a(xe^t,ye^t)]e^t-\frac{1}{3}xye^{-t}$

§一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = C(x,u) \quad (4) \qquad x\in D\subset R^n \quad n\geq 2$$

与上节类似，只须求解
$$\begin{cases} \dfrac{dx_j(t)}{dt} = b_j(x(t), u(x(t))) \\ \dfrac{du(x(t))}{dt} = c(x(t), u(x(t))) \end{cases} \quad (5')$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dx_1(t)}{b_1(x,u)} = \frac{dx_2}{b_2(x,u)} = \cdots = \frac{dx_n}{b_n(x,u)} = dt = \frac{du}{c(x,u)} \quad (5)$$

"完全特征方程"

有n个独立首次积分 $\varphi_j(x,u)=C_j \quad j=1,\cdots,n$.

设(5)的解 $x_{n+1}=u(x)$ 由隐函数 $V(x,x_{n+1})=0$ 得到 则

$$\frac{\partial}{\partial x_j}V_{(x_1\cdots x_n)} = \frac{\partial V(x,x_{n+1})}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j} = 0 \text{ 即 } \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j} = -\frac{\partial V}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}\right)^{-1} \quad j=1,\cdots,n$$

$$\overset{(4)}{\Longrightarrow} -\sum_{j=1}^{n} b_j(x,x_{n+1})\frac{\partial V}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}\right)^{-1} = C(x,x_{n+1}) \quad \text{令 } x'=(x,x_{n+1}) \text{ 则}$$

有 $\sum_{j=1}^{n} b_j(x')\frac{\partial V}{\partial x_j} + c(x')\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} = 0 \quad (6)$ 关于V的线性偏微分方程

由定理1知(6)的通解 $V=g(\varphi_1(x,u),\cdots,\varphi_n(x,u))$.

$\Rightarrow$ (4)隐式通解为 $g=0$.

例 $\begin{cases} xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0 \\ u\big|_{xy=a^2} = h \end{cases}$

特征方程：$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-xy}$，由前式得一个首次积分 $\frac{y}{x}=C_1$

将 $y=C_1x$ 代入 $\frac{dx}{xu} = \frac{du}{-xy}$ 有另一个首次积分 $xy+u^2=C_2$ (独立)

从而隐式通解为 $g(\frac{y}{x}, xy+u^2)=0$. 由条件 $g(\frac{a^2}{x^2}, a^2+h^2)=0 \ \forall x\neq 0$

$\Rightarrow g(xy+u^2) = g(a^2+h^2) = 0 \ \forall x,y\in R^2$ 成立.

$\therefore xy+u^2 = a^2+h^2$ 即 $u=\pm\sqrt{a^2+h^2-xy}$

OURSTORYBEGINS

考虑 Cauchy 问题 (7) $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} b_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}=C(x,u)\\ u|_{x=\alpha(s)}=\theta(s)\end{cases}$ $s=(s_1,\dots,s_{n-1})$ $x=\alpha(s)=(\alpha_1(s),\dots,\alpha_n(s))$ 初始曲线

(4) 的任一解 $z=u(x)$ 在 $R^{n+1}=\{(x,z)\}$ 表示一曲面 Σ

易知 Σ 在点 (x_0,z_0) $(z_0=u(x_0))$ 的法向量 $\vec{n}(u_{x_1}(x_0),\dots,u_{x_n}(x_0),-1)$

令 $\vec{b}(x,u)=(b_1(x,u),\dots,b_n(x,u))$ 由 (4) 知

$(\vec{b}(x,u),c(x,u))$ 与 $\vec{n}$ 在 (x_0,z_0) 垂直. 即 $\langle(\vec{b},c),\vec{n}\rangle|_{(x_0,z_0)}=\sum_{j=1}^{n} b_j(x_0,z_0)u_{x_j}-C(x_0,z_0)=0$

定义: 称(5')的解 $(x,u)=(x(t),z(t))$ 为(4)的特征曲线.

等价定理: $u(x)$ 为(4)在 D 内的解 $\Longleftrightarrow$ $\forall x_0\in D$. 过点 $\underbrace{(x_0,u(x_0))}_{\text{注:点在}t_0\text{取到}}$ 的特征曲线在点 x_0 位于 $u(x)$ 上.

$(x,z)=(\alpha(s),\theta(s))$ $J=\det(\vec{b}^T(x,z),D_s\alpha(s))\neq0$ 则 (7) 有唯一解

定理2. 设 $(x_0,z_0)=(\alpha(s_0),\theta(s_0))$ 且 (*) $J=\det(b^T(x_0,z_0)\,D_s\alpha(s_0))$

$$=\begin{vmatrix} b_1(x_0,z_0), & \frac{\partial\alpha_1(s_0)}{\partial s_1}, & \dots, & \frac{\partial\alpha_1(s_0)}{\partial s_{n-1}} \\ \vdots & & & \\ b_n(x_0,z_0). & & & \end{vmatrix}\neq0.$$

则 (7) 解在 $x=x_0$ 某邻域存在唯一. (局部结论)

证. 设(5')在初始条件 $(x,u)|_{t=t_0}=(\alpha(s),\theta(s))$ 下的解为 $(x(t,s),z(t,s))$

由(5')及(*) $$\frac{\partial x(t,s)}{\partial(t,s)}\Big|_{(t_0,s_0)}=\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dt}, & \frac{\partial x_1}{\partial s_1}, & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial s_{n-1}} \\ \vdots & & & \\ \frac{dx_n}{dt} & \frac{\partial x_n}{\partial s_1}, & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix}_{(t_0,s_0)}=J\neq0.$$

由反函数定理

此时令 $u(x)=z(\varphi(x),\psi(x))$. 则对 x_0 某邻域任一点 x^*. 过 $(x^*,u(x^*))$ 的特征曲线在点 x^* 位于 $u(x)$ 上. 由等价定理知 $u(x)$ 满足方程(4). 而由 $u(\alpha(s))=z(t_0,s)=\theta(s)$ 知 $u(x)$ 亦满足初值条件.

另外. 由常微分方程解的唯一性知 $x(t,s)$ 和 $z(t,s)$ 是唯一的 再由等价定理知 $u(x)$ 亦是唯一的

求解(1)的步骤.

1° 从初值条件找出初始曲线的参数表示: $u(\alpha(s))=\theta(s)$. $s=(s_1,\cdots,s_{n-1})$.

2° 验证 $J=\det(\vec{b}^T(x_0,z_0), D_s\alpha(s_0))\neq 0$. $\det(\vec{b}^T(\alpha(s),u(s)), D_s(\alpha(s)))$

3° 求出 $\begin{cases} \frac{dx(t,s)}{dt}=\vec{b}(x,z). \quad \frac{dz(t,s)}{dt}=c(x,z) & \text{的解 } (x(t,s), z(t,s)). \\ (x,z)\big|_{t=t_0}=(\alpha(s),\theta(s)) & \end{cases}$ (s看成参数 常微分方程组)

4° 从 $x=x(t,s)$ 解出 $(t,s)=(\varphi(x),\psi(x))$

5° 解 $u(x)=z(\varphi(x),\psi(x))$.
$u(x,y)$

$a_j(x)$

$)=0$.

曲线

例 $\begin{cases} (\rho-y-Nu)\frac{\partial u}{\partial x}=cNn\frac{\partial u}{\partial y}+c, \ y<\rho, \ \rho,c,n,N: \text{常数} \\ u\big|_{x=0}=0. \end{cases}$

参数 $s=s_1$. 由 $u\big|_{\underset{(0,y)}{x=0}}=0$ 知 令 $\underset{=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))}{\alpha(s)}=(0,s)$ $\theta(s)=0$. $u(\alpha(s))=\theta(s)$

而 $b_1(\alpha(s),u(s))=\rho-s-N\theta(s)=\rho-s$.

$b_2(\alpha(s),u(s))=-cNn$

$c=c$.

$J=\begin{vmatrix} \rho-s & 0 \\ -cNn & 1 \end{vmatrix}=\rho-s>0 \ (\because y=s<\rho)$.

解 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\rho-y-Nz, \ \frac{dy}{dt}=-cNn, \ \frac{dz}{dt}=c \\ (x,y,z)\big|_{t=t_0}=(0,s,0). \end{cases}$

有 $\begin{cases} x=(\rho-s)t+\frac{1}{2}cN(n-1)t^2. \\ y=-cNnt+s \\ z=ct \end{cases}$

从前两式解出t代入第三式.

$u(x,y)=[(\rho-y)-\sqrt{(y-\rho)^2-2cN(n+1)x}\,]/N(n+1)$.

)

例 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u^2 \\ u\big|_{y=0}=g(x) \end{cases}$

$\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))=(s,0)$. $\theta(s)=g(s)$.

$b_1=b_2=1 \quad c=u^2 \quad J=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=1 \quad \frac{dy}{dt}=1 \quad \frac{du}{dt}=u^2 \\ (x,y,u)\big|_{t=0}=(s,0,g(s)). \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t+s \\ y = t \\ u = \dfrac{g(s)}{1-tg(s)} \end{cases}$$

由前两式，$t=y$ $s=x-y$

解：$u = u(x,y) = z = \dfrac{g(x-y)}{1-yg(x-y)}$.

§3 一般情形

$$F(x,u,Du)=0 \quad (8)$$

令 $F = F(x,z,p) = F(x_1,\cdots,x_n,z,p_1,\cdots,p_n)$ 光滑.

$z=u(x)$. $p = Du(x) = \nabla u(x) = (u_{x_1},\cdots,u_{x_n}) = (p_1,\cdots,p_n)$

则 $\begin{cases} D_xF = (F_{x_1},\cdots,F_{x_n}) \\ D_zF = F_z. \\ D_pF = (F_{p_1},\cdots,F_{p_n}) \end{cases}$

§3.1 全积分，包络，奇积分

定义. 称 $u=u(x;a)$ 为 (8) 的全积分 若.（a 参数）

1°. $u(x;a)$ 满足 (8). $\forall a=(a_1,\cdots,a_n)\in A\subset R^n$. A: 参数集.

2° $\operatorname{rank}(D_au, D^2_{xa}u) = n$. 其中 $(D_au, D^2_{xa}u)$ （矩阵）

$$= \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1a_1} & \cdots & u_{x_na_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1a_n} & \cdots & u_{x_na_n} \end{pmatrix} \quad n\times(n+1).$$

条件2°保证. $u(x,a)$ 依赖于 n 个独立参数 $a_1,\cdots,a_n$.

实际上，若 $u(x;a)$ 仅依赖于 $n-1$ 个独立参数 $b_1,\cdots,b_{n-1}$

即 $\exists \psi: A\to B\subset R^{n-1}$ $\psi=(\psi^1,\cdots,\psi^n)$. $\psi_1(a)\cdots\psi_n(a)$ 有2个相同 $=(\psi^1\cdots\psi^{n-1})$.

使 $u(x;a) = v(x;\psi(a))$. v 满足 (8)

由 $u_{x_ja_k}(x;a) = \sum_{l=1}^{n-1} v_{x_jb_l}(x;\psi(a))\psi^l_{a_k}(a)$ $(1\le j,k\le n)$.

知 $\det(D^2_{xa}u) = \sum_{l_1,\cdots,l_n=1} v_{x_1b_{l_1}}\cdots v_{x_nb_{l_n}} \det\begin{pmatrix} \psi^{l_1}_{a_1} & \cdots & \psi^{l_1}_{a_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi^{l_n}_{a_1} & \cdots & \psi^{l_n}_{a_n} \end{pmatrix} = 0$

因 $u_{a_j}(x;a) = \sum_{l=1}^{n-1} v_{b_l}(x;\psi(a))\psi^l_{a_j}(a)$ $(1\le j\le n)$ 类似讨论可知 $(D_au, D^2_{xa}u)$

任一n阶子阵的行列式为0. $\Rightarrow rank(D_a u, D^2_{xa} u) < n$.

例 几何光学方程 $|Du|=1$. 即 $\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 = 1$
令积分为 $u(x;\vec{a},b) = \vec{a}\cdot\vec{x}+b$.
其中a在n维单位球面. $b\in R$. ((a,b)依赖于n个独立参数)

定义 若可微函数族 $u(x;a)$ 满足的方程 $D_a u(x;a)=0$ $a\in A\subset R^n$
有可微解 $a=\phi(x)$ 则称 $v(x) := u(x;\phi(x))$ 为 $\{u(x;a)\}_{a\in A}$ 的包络
$u=u(x;a)$ $F(x,u(x,a),Du(x,a))=0$

定理3 设 $u(x;a)$ $(a\in A)$ 为(8)的解, $v(x)$ 为 $\{u(x;a)\}_{a\in A}$ 的包络.
则 $v(x)$ 为(8)的解(奇积分).

证: $\forall 1\le j\le n$. $v_{x_j}(x) = u_{x_j}(x;\phi(x)) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_{a_k}(x;\phi(x))\phi^k_{x_j}(x)}_{=0}$.
$\equiv u_{x_j}(x;\phi(x))$.

$\Rightarrow F(x, v(x), Dv(x)) = 0$.

例 $u^2(1+|Du|^2)=1$ $x\in R^n$.
令积分 $u(x;a)=\pm\sqrt{1-|x-a|^2}$, $|x-a|<1$.
而 $D_a u = \dfrac{\mp(x-a)}{\sqrt{1-|x-a|^2}} = 0$. $\Rightarrow a=\phi(x)=x$.
$\Rightarrow v(x)=u(x;x)=\pm1$ 为原方程的奇积分.(包络).

P309 11

P310 20. P319 4.7.

P320 9.

包络面: 曲面族(含参) $\Phi(x,z,a)=0$
则由 $\Phi(x,z,a)=0$. $\frac{\partial}{\partial a}\Phi(x,z,a)=0$ 确定的曲面(消去a得 $f(x,z)=0$)
为曲线族的包络面的判别曲面 若 Φ_x. Φ_z 不同时为0. 则为包络面
固定a. $f(x,z)=0$ 与 $\Phi(x,z,a)$ 相交的曲线为特征曲线
族中曲面沿特征线与包络面相切

OURSTORYBEGINS

$F(x,y,z,p,q)=0.$ (1)

通积分: 全积分 $\underline{z=\varphi(x,y,a,b)}$ a.b为独立参数 单参数曲面族的包络面为方程的解

设 $b=w(a) \Rightarrow \underline{z=\varphi(x,y,a,w(a))}$

包络面: $z=\varphi(x,y,a,w(a))$ $\varphi_a+\varphi_b w'(a)=0$ 消去a可得.

于是得到含有一个任意函数的积分曲面族. 称为通积分 (二元函数)

令 $A'\subset \mathbb{R}^{n-1}$, 定义可微函数 $w: A'\to \mathbb{R}$. s.t. $(a', w(a'))\in A$.

其中 $a=(a_1,\dots,a_n)=(a',a_n)\in A$. $a'=(a_1,\dots,a_{n-1})\in A'$, $a_n=w(a')$

定义: 称 $\{u(x;a',w(a'))\}_{a'\in A'}$ 的包络 $v'(x)$ 为通积分

例: $|Du|=1$, $n=2$.

全积分. $u(x;a)=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1+a_2$ $x,a\in \mathbb{R}^2$.

令 $a_2=w(a_1)=0$ $\forall a_1\in \mathbb{R}$ $u(x;a_1,0)=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1$.

由 $D_{a_1}u(x;a_1,0)=-x_1\sin a_1+x_2\cos a_1=0 \Rightarrow a_1=\arctan\frac{x_2}{x_1}$

通积分 $v'(x)=u(x;\arctan\frac{x_2}{x_1},0)=x_1\cos(\arctan\frac{x_2}{x_1})+x_2\sin(\arctan\frac{x_2}{x_1})=\pm|x|$.

$x\in \mathbb{R}^2$. 满足 $|Dv'|=1$ $(x\neq 0)$

§3.2 特征方程与Cauchy问题 → 对于一般的偏微分方程 $F(x,z,p)=0$.

与前面节类似. 令 $z(t)=u(x(t))$. $p(t)=Du(x(t))$

则 $\frac{dz}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u(x(t))}{\partial x_j}\frac{dx_j(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)\frac{\partial F}{\partial p_j}(x(t),z(t),p(t))$

$=D_pF(x(t),z(t),p(t))\cdot p(t)$. $\boxed{\left(令\ \frac{dx_j(t)}{dt}=\frac{\partial F}{\partial p_j}(x(t),z(t),p(t))\ 1\le j\le n\right)}$

$\frac{dp_k(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}u_{x_kx_j}(x(t))\frac{dx_j(t)}{dt}=\underline{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x(t),z(t),p(t))\cdot u_{x_kx_j}(x(t))}$

$=-\frac{\partial F}{\partial x_k}(x(t),z(t),p(t))-\frac{\partial F}{\partial z}(x(t),z(t),p(t))p_k(t)$

上式中对 $F(x,u,Du)=0$ 关于x_k微分

$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,u,Du)+\frac{\partial F}{\partial z}(x,u,Du)+\underline{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_j}(x,u,Du)u_{x_jx_k}}=0.$

OURSTORYBEGINS

例1) $\Rightarrow$ 特征方程(9)
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt} = D_p F(x(t), z(t), p(t)). \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = D_p F(x(t), z(t), p(t)) \cdot \vec{p}(t). \quad \text{内积} \\ \dfrac{d\,p(t)}{dt} = -D_x F(x(t), z(t), p(t)) - D_z(x(t), z(t), p(t))\vec{P}(t) \end{cases}$$

例: Hamilton - Jacobi 方程.

$F(\underbrace{x, t}_{n+1\text{个变量}}, u, D_x u, u_t) = u_t + H(x, D_x u) = 0.$

令 $\underbrace{q \triangleq (\vec{p}, p_{n+1})}_{\text{变量微分}}$. $y \triangleq (x, t)$. $z = u(s)$. 则 $F(y, z, q) = p_{n+1} + H(x, \vec{p}) = 0.$

F 对 $y.\ z.\ q$ 求偏导.

$D_q F = (D_p H(x, p), 1)$. $D_y F = (D_x H(x, p), 0)$.

$D_z F = 0$. 引入变量 s 后. 可得特征方程. (只考虑 $\vec{x}$ 变量).

$$\overset{(9)}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x}(s) = D_p H(x(s), p(s)) & (a) \\ \dot{z}(s) = D_p H(x(s), p(s)) \cdot \vec{p}(s) + p_{n+1} \\ \dot{p}(s) = -D_x H(x(s), p(s)) & (b) \end{cases}$$

1.

(a), (b) 会称为 Hamilton 方程

方程

例 Cauchy 问题 (对一般一阶偏微分方程)
$$\begin{cases} u_x u_y = u. & x > 0. \\ u|_{x=0} = y^2 \end{cases}$$

1.

$F(x, y^{(t)}, z, \vec{p}) = p_1 p_2^{(t)} - z(t)$ 特征方程
$$\begin{cases} \dot{x} = p_2, \ \dot{y} = p_1. \\ \dot{z} = 2p_1 p_2. \\ \dot{p} = 1 \cdot p \Rightarrow \dot{p}_1 = p_1, \ \dot{p}_2 = p_2. \\ (x, y, z)|_{t=0} = (0, y_0, y_0^2). \end{cases}$$

$D_{\vec{p}} F = (p_2, p_1)$. $\vec{p} = (p_1, p_2)$.

$D_z F = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = c_2(e^t - 1), \ y = y_0 + c_1(e^t - 1). \\ z = z_0 + c_1 c_2 (e^{2t} - 1) \xrightarrow{\text{代入}} y_0^2 + c_1 c_2 (e^{2t} - 1). \\ p_1 = c_1 e^t \quad p_2 = c_2 e^t \end{cases}$$

$c_2 = p_2|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{t=0} = 2y|_{t=0} = 2y_0$. $c_1 c_2 = p_1 p_2|_{t=0} = u|_{t=0} = y_0^2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = 2y_0(e^t - 1) \\ y(t) = \frac{y_0}{2}(e^t + 1) \\ z(t) = y_0^2 e^{2t} \\ p_1(t) = \frac{y_0}{2} e^t \quad p_2(t) = 2y_0 e^t \end{cases}$$

解得 $u(x,y) = z = \left(\frac{4y-x}{4}\right)^2 \left(\frac{x+4y}{4y-x}\right)^2 = \frac{(x+4y)^2}{16}$

例 $\begin{cases} u_t + u_x = 0, \quad t>0, \; x \in R. \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$

$u_1 \equiv 0$ 为解. 而 $u_2(t,x) = \begin{cases} x & |x|>t \\ x-t & 0 \le x \le t \\ -x-t & -t \le x \le 0. \end{cases}$ 是Lipschitz连续且几乎处处满足方程 ($x=0, \pm t$ 除外).

$\downarrow$ 强解. $\downarrow$ 弱解.

附加作业:

Burger方程:
(交通流方程) $\begin{cases} u_t + u u_x = 0, \quad t>0, \; x \in R. \\ u|_{t=0} = x^2. \end{cases}$

在何处有唯一解?

期末1月19日.
Chapter 1~10 (除 5.8).

第五章 三类典型的二阶偏微分方程

§1. 三类典型偏微分方程(PDE)的导出

例：波动方程 $u_{tt}=c^2\Delta u$. c：波速

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}=\partial_{x_1}^2+\cdots+\partial_{x_n}^2$$

热方程 $u_t=\overset{\nearrow\text{扩散系数}}{k}\Delta u$.

位势方程 $\Delta u=f$ (Poisson方程) 对于一般的 f.

$f=0$ (调和方程, Laplace方程)

Schrödinger方程 $iu_t+\Delta u=\underset{\text{势函数}}{q}u$. $i=\sqrt{-1}$

极小曲面方程 $(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$.

KdV方程 $u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$.

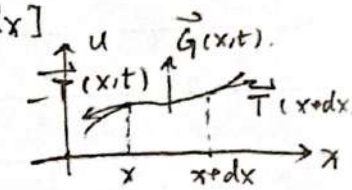
Monge-Ampère方程 $\det(D^2u)=f$

Maxwell方程

$$\begin{cases}\vec{E}_t=\nabla\times\vec{B}\\ \vec{B}_t=-\nabla\times\vec{E}\end{cases}$$

OURSTORYBEGINS

波动方程. 考虑弦的微小振动. 取x轴为平衡位置. 则$u(x,t)$表示质点x时刻t的横向位移. 取一微元$[x, x+dx]$



由牛顿定律 $\vec F = m\vec a$ 有

$$-\vec T(x,t)+\vec T(x+dx,t)+\vec G(x,t)dx$$
$$= \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\vec u_0$$
$$\approx \frac{\partial \vec T}{\partial x}dx + g(x,t)dx\,\vec u_0$$

$\vec G = g\cdot\vec u_0$. g 外力密度

令T_1, T_2分别为$\vec T$在$\vec x_0$, $\vec u_0$方向的分量.上式化为

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + g(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases}$$

因张力沿切向作用 $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\partial u}{\partial x} = \tan\alpha$ 代入上式.

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x,t) + T_1(t)\frac{\partial u}{\partial x^2}$$

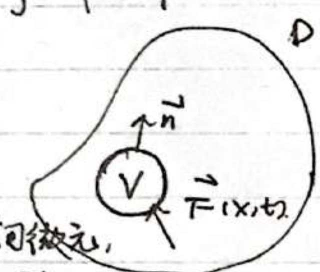
由假设 $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| << 1$. 知张力大小 $T = \sqrt{T_1^2+T_2^2} = T_1\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2} \approx T_1$.

而弧长 $ds = \sqrt{dx^2+du^2} = dx\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2} \approx dx$.

由胡克定律知 T不变.为常数

$\therefore$ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$. $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$: 波速. f: 单位外力

三维弹性体的微小自由振动: 任取区域V



$$-\int_{\partial V}\vec F\cdot\vec n\,ds = \frac{d^2}{dt^2}\int_V u\,dx = -\int_V \mathrm{div}\vec F\,dx$$

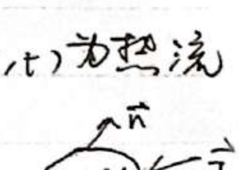
三维空间微元

$$= \int_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx.$$

由V的任意性. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\nabla\cdot\vec F$ $|\nabla u| << 1$.时. $\vec F = -c^2\nabla u$. $c>0$常数

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\cdot\nabla(\nabla\cdot u) = c^2\Delta u.$$

热方程. 令$u(x,t)$为物体在x点t时刻的温度. $\vec J(x,t)$为热流密度. $f(x,t)$为热源的变化率. 设密度比热均为1.



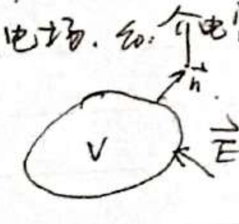
$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}dx = \frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V}\vec J\cdot\vec n\,ds + \int_V f(x,t)dx.$$
$$= \int_V(-\nabla\vec J + f)dx.$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec J + f$.

由Fourier热传导定律.有 $\vec J = -k\nabla u$. $k>0$.常数 $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f$.

OURSTORYBEGINS

位势方程. 考虑真空静电场. $\rho(x)$ 电荷密度. $\vec{E}(x)$ 电场. ε_0 介电常数.



任取子区域 V. 由 Gauss 定律

$$\int_{\partial V} \vec{E}\cdot\vec{n}\, ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(x)\, dx$$

$$= \int_V \nabla\cdot\vec{E}\, dx \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \rho(x)/\varepsilon_0.$$

由法拉第定律及 stokes 公式知 $\vec{E}$ 无旋 ∃势函数 φ 使 $\vec{E}=-\nabla\varphi$.

$$\Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = f(x).$$ Poisson 方程, 若 $f(x)\equiv 0$. Laplace 方程.

$x \triangleq \vec{x}=(x,y,z)$

定解问题与适定问题.

定解条件

初始(值)条件.

边界条件. 空间区域 D. 边界 ∂D.

(D) 第一类边界条件 (Direcelet) 边界条件. $u|_{\partial D}=\varphi$.

(N) 第二类边界条件 (Neumann) 边界条件. $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial D}=\psi$.

单位外法向

(R) 第三类边界条件 (Robin) 边界条件.

$$\left(au+b\frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial D}=R.$$

适定性. 称某偏微分方程的定解问题适定. 若:

1° 解存在., 2° 解唯一. 3° 解连续依赖于问题所给数据(稳定性)

例. (非适定)
$$\begin{cases} u_t=u_{xx} & 0\le t<T,\ x\in\mathbb{R} \\ u|_{t=T}=0. \end{cases} \Longrightarrow u|_{t=T}=\frac{\sin Nx}{N}.$$

反向热方程问题

$$u_N(x,t)=\frac{e^{N^2(T-t)}}{N}\sin Nx \to 0 \quad (N\to+\infty).$$

§3 二阶PDE的分类

$$\sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}(x)u_{x_ix_j}}_{\text{非线性方程的线性主部}} + F(x,u,Du)=0$$

$A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$：实对称阵 $x=(x_1\cdots x_n)\in R^n$ $(n\ge 2)$

其线性主部 $\sum_{i,j} a_{ij}u_{x_ix_j}$ 是方程分类的判别关键点

在 x^0 点分类如下：

1° 若 $A(x^0)$ 所有特征值非零且同号：椭圆方程

2° 若 $A(x^0)$ 所有特征值非零只有一个异号：双曲方程

3° 若 $A(x^0)$ 有特征值为零：抛物方程

P19.4

P24.4

例如 $a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+F(x,y,u)=0$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda E)=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)$

为确定 λ_1,λ_2 符号，计算判别式 $d=-\lambda_1\lambda_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$

$d<0$ 椭圆型 位势方程

$d=0$ 抛物型 热方程

$d>0$ 双曲型 波动方程

§4: 波与扩散

§4.1 波动方程

初值问题 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0,\ x\in R \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$ (1)

方法1° 方程分解 $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u}_{v} = 0$

一般形式

考虑 $\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + b\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(x,t) & b\text{: 常数} \\ w|_{t=0} = \beta(x). & t>0,\ x\in R \end{cases}$

任意固定 x,t. 令 $z(s) = w(x+bs, t+s)$. $\frac{dz(s)}{ds} = b\frac{\partial w(x+bs,t+s)}{\partial(x+bs)} + \frac{\partial w(}{\partial(t+s)}$
$= \alpha(x+bs, t+s)$ $\int_{-t}^{0} dz(s) = z(0) - z(-t) = w(x,t) - w(x-bt, 0)$
$= \underline{w(x,t)} - \beta(x-bt) = \int_{-t}^{0} \alpha(x+bs, t+s)\,ds = \int_0^t \alpha(x+b(s-t), s)\,ds.$

$\Rightarrow w(x,t) = \beta(x-bt) + \int_0^t \alpha(x+b(s-t), s)\,ds.$ (*)

对 v: $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ v|_{t=0} = \psi(x) - c\varphi'(x). \end{cases}$ $\xRightarrow{(*)}$ $v(x,t) = \psi(x-ct) - c\varphi'(x-ct).$

对 u: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = v \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$ $\xRightarrow{(*)}$ $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \int_0^t v(x-c(s-t), s)\,ds.$

$= \varphi(x+ct) + \int_0^t [\psi(\underbrace{x-c(s-t)-cs}_{\overset{\parallel}{S}}) - c\varphi'(x- \quad)]ds$

$= \varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} [\psi(s) - c\varphi'(s)]\,ds$

$= \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds.$ (2)

d'Alembert 公式.

方法2° 令 $\xi = x-ct,\ \eta = x+ct$, $x = \frac{\xi+\eta}{2}$, $t = \frac{\eta-\xi}{2c}$.

$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right).$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi} = 0 \xRightarrow[\text{积分两次}]{} u = f(\eta) + g(\xi). = f(x+ct) + g(x-ct)$

代入条件 $u|_{t=0}=f(x)+g(x)=\varphi(x)$

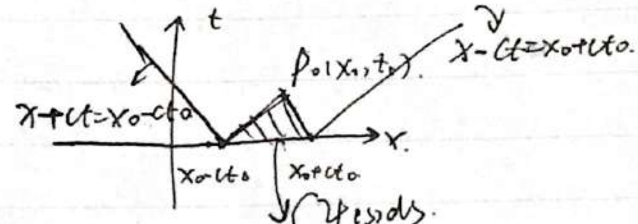
$u_t|_{t=0}=cf'(x)-cg'(x)=\psi(x)$ $\xlongequal{积分}$ $f(x)-g(x)=\frac{1}{c}\int_0^x\psi(s)ds+A$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_0^x\psi(s)ds+A]$

$g(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_0^x\psi(s)ds-A]$

∴解 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds.$

由上式可知.



$\forall\, p_0(x_0,t_0)$ 称 $I_0=[x_0-ct_0,x_0+ct_0]$ 为p_0的依赖区间.

△区域称为I_0的确定区域

无界区域为I_0的影响区域

若在(1)中 $\varphi,\psi\in C_0^\infty(R)$ 无论且支集有界

无穷次可微

在R的有界区间上不为0.

紧支集

支集 $\mathrm{supp}\,\varphi=\{x\in R\mid\varphi(x)\neq0\}$

对此问题定义"能量"

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_R(u_t^2+c^2u_x^2)dx.$$

由条件及(2)知. $E(t)$关于t一致收敛

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_R(u_tu_{tt}+c^2u_xu_{xt})dx$$

$$\overset{(1)}{=}c^2\int_R(u_tu_{tt}+u_xu_{xt})dx$$

$\xlongequal{分部}$ $c^2u_tu_x\Big|_{-\infty}^{\infty}+c^2\int_R(-u_{tx}u_x+u_xu_{xt})dx$ $=0$

$=0.$

$\Rightarrow E(t)=E(0)=E_0.$ 能量守恒

A

§4.2 热方程

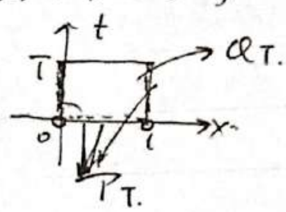
(3) $\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $t>0$. $x\in R$. $k>0$. 散热(扩散)系数.

令 $Q_T=(0,l)\times(0,T]$

$\Gamma_T=\overline{Q_T}/Q_T$ ✓

$=(0,l)\times\{0\}+\{0,l\}\times[0,T]$

= 底线+侧线



最大值原理 (3)的任一解u.满足 $\underset{\overline{Q_T}}{\overset{(\min)}{\max}}\, u=\underset{\Gamma_T}{\overset{(\min)}{\max}}\, u$.

仅证: $\max_{\overline{Q_T}} u=\max_{\Gamma_T} u$ 显然左≥右.

反证 设 $\max_{\overline{Q_T}} u>\max_{\Gamma_T} u$, 令 $v=u+\varepsilon x^2$. 则 $\varepsilon>0$充分小时

$\max_{\overline{Q_T}} v>\max_{\Gamma_T} v$ 令(x_0,t_0)为v在$\overline{Q_T}$中的最大值点. 则$(x_0,t_0)\notin\Gamma_T$

即 $0<x_0<l$, $0<t_0\le T$. 且 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0)\le 0$ $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\ge 0$
驻点条件

故 $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0)=\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\ge k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0)+\underbrace{2\varepsilon k}_{>0}$

$>k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0)$ 矛盾.

P31 2.6

P36 2

P37 8.9

最值原理的应用 (4) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & 0<x<l.\ t>0.\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & 0\le x\le l.\\ u|_{x=0}=g(t),\ u|_{x=l}=h(t) & t>0.\end{cases}$

至多有一解(唯一性).

证: 设(4)有两解 $u_1.u_2$ 令 $w=u_1-u_2$. 则w满足

OURSTORYBEGINS

$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0. \\ w|_{t=0} = w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0. \end{cases}$ 由最大值原理 $\max\limits_{\bar{Q}_T}|w| = \max\limits_{\Gamma_T}|w| = 0 \Rightarrow w=0$

能量法. 考虑 $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l w^2(x,t)\,dx$. 则 $\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l w w_t\,dx$.

$= k\int_0^l w w_{xx}\,dx \xlongequal{\text{分部积分}} \underbrace{kww_x\Big|_0^l}_{=0} - k\int_0^l w_x^2\,dx \le 0$.

$\Rightarrow 0 \le E(t) \le E(0) = 0. \Rightarrow w \equiv 0$, $u_1 \equiv u_2$.

稳定性 设(4)中 $f=g=h=0$. u_1, u_2 为对应初值 φ_1, φ_2 的解 令 $w = u_1 - u_2$.

由最大值原理 $\max\limits_{\bar{Q}_T}|w| = \max\limits_{\Gamma_T}|w| \Rightarrow \max\limits_{0\le x\le l}|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \le \max\limits_{\bar{Q}_T}|u_1-u_2|$

$= \max\limits_{0\le x\le l}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|$ 因 $T>0$ 任意, 故上式对 $\forall t>0$ 成立.

从而 (4) 在最大模 $(\sup|\cdot|)$ 下稳定.

另, 由能量法知 $\int_0^l (u_1(x,t)-u_2(x,t))^2\,dx \le \int_0^l [\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]^2\,dx$

$\Rightarrow$ (4) 在 L^2 模的意义下稳定

初值问题

(5) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x\in R,\ t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$

$\delta: C(R) \to R$

Dirac-δ 函数. $\forall v(x) \in C(R)$ 能满足下式的线性泛函. (线性连续)

$\int_R \delta(x) v(x)\,dx = \langle \delta, v \rangle = v(0)$. 为 δ 函数

易知. i) $\delta(x) \equiv 0\ (x \ne 0)$. $\delta(0) = +\infty$. (取 $x=0$ 的小邻域)

ii) $\int_R \delta(x) = 1$. (取 $v(x) \equiv 1$).

iii) $\mu\delta(\mu x) = \delta(x)$.

i) $\int_R \delta(x)v(x)dx = \int_R \delta(x)(v(x)-v(0))dx = 0.$

$\Rightarrow \operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$

iii) $\int_R \mu\delta(\mu x)v(x)dx \xlongequal{y=\mu x} \int_R \delta(y)v(\frac{y}{\mu})dy = v(0).$

定义(5)的基本解. $S(x,y,t)$: $\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = k\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} & x,y\in R,\ t>0. \quad (y:参数) \\ \lim\limits_{t\to 0^+} S(x,y,t) = \delta(x-y) \end{cases}$

令 $K(x,t)$ 为 $\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} = \underbrace{k}_{常数}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, & x\in R,\ t>0. \\ \lim\limits_{t\to 0^+} K(x,t) = \delta(x) \end{cases}$ 的唯一解(唯一性后证).

易知 $K(x-y,t) = S(x,y,t)$.

下证 $\forall\lambda>0.$ $\underbrace{\lambda K(\lambda x, \lambda^2 t) = K(x,t)}_{相似性}\overbrace{= G(|x|,t)}^{径向对称性}.$ (*)

实际上. 令 $\tilde{K}(x,t) = \lambda K(\lambda x, \lambda^2 t)$ 有

$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = \lambda^3 \frac{\partial K(\lambda x,\lambda^2 t)}{\partial t}$ $= \lambda^3 k \frac{\partial^2 (K(\ \ ))}{\partial x^2}$ $= k\frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial x^2}$ $\quad \frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial x^2} = \lambda^3 \frac{\partial^2(K(\lambda x,\lambda^2 t))}{\partial x^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 \tilde{K}}{\partial x^2}$, 而 $\lim\limits_{t\to 0}\tilde{K}(x,t) = \lambda\lim\limits_{\lambda^2 t\to 0}K(\lambda x,\lambda^2 t) = \lambda\delta(\lambda x) = \delta(x).$

$\xRightarrow{唯一性} \tilde{K}(x,t) = K(x,t)$

(*) 第二式可由方程及初始条件的旋转不变性得到.

由(*) 令 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 时. $\overbrace{K(x,t)}^{=K(x,t)} = t^{-\frac{1}{2}}K(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1).$ (**).

另外. $0 = \frac{d}{d\lambda}K(x,t)\Big|_{\lambda=1} = K(\lambda x,\lambda t^2) + \lambda x\frac{\partial K}{\partial x}(\lambda x,\lambda^2 t) + \lambda\cdot 2\lambda t\frac{\partial K}{\partial t}$

$\underline{\underline{立即}}$ $K(x,t) + x\frac{\partial K}{\partial x}(x,t) + 2tk\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t).$

再令 $t=1$ 有 $\underline{K(x,1) + x\frac{\partial K}{\partial x}(x,1) + 2k\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,1) = 0.}$ 二阶线性常微分方程.

令 $\underline{w(x)} = K(x,1).$

则 $2kw''(x) + xw'(x) + w = 0.$ 中自由方程.

$(2kw')' + (xw)' = 0 \Rightarrow$ 通解 $w(x) = C_1 e^{-\frac{x^2}{4k}} + C_2 e^{-\frac{x^2}{4k}}\int_0^x e^{\frac{s^2}{4k}}ds.$

由能量守恒. $\int_R K(x,t)dx = \int_R K(x,0)dx = \int_R \delta(x)dx = 1.$

$$\Rightarrow 1=\int_R w(x)\,dx = \underbrace{c_1\int_R e^{-\frac{x^2}{4k}}dx}_{\substack{\text{概率积分}\\ =\sqrt{4k\pi}}} + c_2 \underbrace{\int_R e^{-\frac{x^2}{4k}}\int_0^x e^{\frac{s^2}{4k}}ds\,dx}_{\text{发散}}$$

$$\Rightarrow c_1=\frac{1}{\sqrt{4k\pi}} \quad c_2=0.$$

$$\Rightarrow K(x,t)=t^{-\frac{1}{2}}K\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)=t^{-\frac{1}{2}}w\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

基本解 $S(x,y,t)=\cancel{K(x,y,t)}=K(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$

从而(5)解 $u(x,t)=\int_R S(x,y,t)\varphi(y)\,dy$

$$=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)\,dy.$$

(说明u为(5)的解).

有关δ函数的性质

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\int_R\left(\frac{\partial S}{\partial t}-k\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\right)\varphi(y)\,dy=0$$

$$\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=\int_R \lim_{t\to 0^+}S(x,y,t)\varphi(y)\,dy=\int_R \delta(x-y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x).$$

OURSTORYBEGINS

§4 波与扩散的比较

	波	扩散
速度	有限	无限
$t>0$ 奇异性	沿特征线	瞬间消失
$t>0$ 适定性	成立	成立
$t<0$ 适定性	成立	不成立
最大值原理	不成立	成立
$t\to+\infty$	不衰减	衰减
信息	传播	逐渐消失

§5 反射与源

§5.1 反射（半直线问题）

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x>0,\ t>0. \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x). & x\geq 0. \quad 初始 \\ u|_{x=0}=0. & 边界. \end{cases}$

相容条件：$\varphi(0)=\psi(0)=0$.

"延拓法" 对 u. φ. ψ 作奇延拓.

$U=\begin{cases} u & x\geq 0\ t\geq 0 \\ -u & x<0\ t\geq 0. \end{cases}$ $\quad \Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x) & x\geq 0 \\ -\varphi(x) & x<0 \end{cases}$ $\quad \Psi(x)=\begin{cases} \psi(x) & x\geq 0 \\ -\psi(x) & x<0. \end{cases}$

则 $U(x,t)$ 满足 (2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & x\in R\ t\geq 0. \\ U|_{t=0}=\Phi(x),\quad U_t|_{t=0}=\Psi(x). & x\in R. \end{cases}$

$$u(x,t)=U(x,t)\Big|_{x\geq 0}=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds & 0\leq t\leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)\,ds & t>\frac{x}{c}. \end{cases}$$

若边界条件为 $u_x|_{x=0}=0$. 则考虑偶延拓

$$U(x,t)=\begin{cases} u(x,t) & x\ge 0,\ t>0 \\ u(-x,t) & x<0,\ t>0 \end{cases}$$

$$\Phi(x,t)=\begin{cases} \varphi(x) \\ \varphi(-x) \end{cases}$$

$$\Psi(x,t)=\begin{cases} \psi(x) \\ \psi(-x) \end{cases}$$

此时 $U_x|_{x=0}=0$ 自动成立.

$\left(f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}=-f'(0)=0\right)$

同样满足 (2)

得解 $$u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds & 0\le t\le \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(ct-x)]+\frac{1}{2c}\left[\int_0^{x+ct}\psi(s)ds+\int_0^{ct-x}\psi(s)ds\right] & t>\frac{x}{c} \end{cases}$$

类似地. (3) $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x>0,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u|_{x=0}=0\ (\text{或 } u_x|_{x=0}=0) \end{cases}$$

(3)解 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\right]\varphi(y)dy$ (奇延拓)

(或 $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_0^{+\infty}\left[e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}+e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}}\right]\varphi(y)dy$ (偶延拓)).

§5.2 冲量(非齐次问题).

(4) $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & x\in R,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

Duhamel 原理. (齐次化原理, 冲量原理).

若 $z(x,t,\tau)$ 满足齐次方程 $$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & x\in R,\ t>\tau>0 \\ z|_{t=\tau}=0. & z_t|_{t=\tau}=f(x,t) \end{cases}$$

则 $W(x,t)=\int_0^t z(x,t,\tau)d\tau$. 满足

OURSTORYBEGINS

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = k\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t) & x\in R,\ t>0. \\ W|_{t=0} = W_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

注. W可视为外力冲量 $f(x,t)\,dt\ (0\le \tau\le t)$ 在时刻t引起的位移 $z(x,t,\tau)\,dt$ 关于 dt 的叠加.

证: $W|_{t=0}$ 自动成立. $W_t|_{t=0} = z(x,t,t)\Big|_{t=0} + \int_0^t \dfrac{\partial z(x,t,\tau)}{\partial t}d\tau\Big|_{t=0} = 0.$

而 $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \dfrac{\partial z(x,t,\tau)}{\partial t}\Big|_{t=\tau} + \int_0^t \dfrac{\partial^2 z(x,t,\tau)}{\partial t^2}d\tau.$

$$= f(x,t) + c^2\underbrace{\int_0^t \frac{\partial^2 z(x,t,\tau)}{\partial x^2}d\tau}_{\text{关于}x\text{一致收敛}} = f(x,t) + c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

一般的Duhamel原理.

设 $\mathcal{L}$ 为t与x的线性微分算子且关于t最高阶导数 $\le m-1$. 则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m W}{\partial t^m} = \mathcal{L}W + f(x,t) & x\in R^n,\ t>0. \\ W|_{t=0} = W_t|_{t=0} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-1} W}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

的解 $w(x,t) = \int_0^t z(x,t,\tau)\,dt$

其中 $z(x,t,\tau)$ 满足. $\begin{cases} \dfrac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z & x\in R^n\quad t>\tau \\ z|_{t=\tau} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}z|_{t=\tau} = 0,\ \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}z|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases}$

由叠加原理和Duhamel原理. (4) $u = v+w$.

v满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v|_{t=0} = \varphi(x),\ v_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$ $\rightarrow$ d'Alembert公式

W满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t) \\ W|_{t=0} = 0\quad W_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$ $\longrightarrow$ 转化为齐次问题.

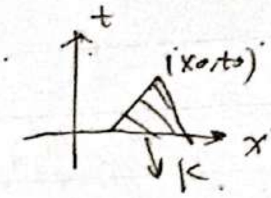
$$z|_{t'=0} = 0,\quad z_t|_{t'=0} = f(x,t).$$

在z的方程中. 令 $t\longrightarrow t' = t-\tau$. 可有 $z(x,t,\tau) = g(x,t') = \dfrac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)$

(4)的解 $u(x,t) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \dfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds$

$$+ \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau)\,ds\,d\tau.$$

OURSTORYBEGINS



定理. 问题(4)在有限时间T内适定.

证. 存在性由(5)给出.

下证唯一性. 只需证 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x\in R\ t>0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 只有零解.

$\forall$ 固定 $x_0\in R$. $t_0>0$. 考虑"特征锥" $K=\{(x,t)\in R^2 \mid |x-x_0|\le c(t_0-t),\ 0\le t\le t_0\}$.

定义(6)能量 $\underset{\text{有限}}{\underline{E(t)}} = \frac{1}{2}\int_{|x-x_0|\le c(t-t_0)} (u_t^2 + c^2 u_x^2)\,dx$, $0\le t\le t_0$.

则 $\frac{dE(t)}{dt} = \int_K (2u_t u_{tt} + 2c^2 u_x u_{xt})\,dx - \frac{c}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\Big|_{|x-x_0|=c(t-t_0)}$.

$\overset{\text{分部积分}}{=} 2\int_{|x-x_0|\le c(t-t_0)} u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_{=0}dx + \underbrace{c(cu_x u_t - \frac{u_t^2}{2} - \frac{c^2}{2}u_x^2)}_{\le 0}\Big|_K$ (Cauchy不等式).

P54 1. P58 3.5 P64. 6

稳定性 令 u_1, u_2 分别对应 $f_1, \underset{<\delta}{\varphi_1}, \psi_1$ 与 f_2, φ_2, ψ_2 的解. $w=u_1-u_2$.

由(5)知 $|w(x,t)| \le \max_R |\varphi_1-\varphi_2| + \frac{1}{2c}\max_R \overset{<\delta}{|\psi_1-\psi_2|}\cdot 2ct +$

使用sup函数 $\frac{1}{2c}\max_{(x,t)\in R\times[0,T]} |f_1-f_2|\,ct\cdot t \le \frac{T^2}{2}\max\overset{<\delta}{|f_1-f_2|}$

$\le (1+T+\frac{T^2}{2})\delta \to 0$ (as $\delta\to 0^+$)

有限时间.

半直线源问题

(7) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & x>0\ t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x)\quad u_t|_{t=0} = \psi(x) & x\ge 0. \\ u|_{x=0} = h(t)\ (\text{或 } u_x|_{x=0} = h(t)). \end{cases}$

相容条件 $\varphi(0)=h(0)$ $\psi(0)=h'(0)$ (或 $\varphi'(0)=h(0)$. $\psi'(0)=h'(0)$.)

先考虑边界齐次化 $v(x,t)=u(x,t)-h(t)$ (或 $v(x,t)=u(x,t)-xh(t)$).

$\Rightarrow v_x(x,t)|_{x=0} = u_x(x,t)|_{x=0} - h(t)|_{x=0}$

$\Rightarrow v_x(x,t)|_{x=0} = v_x(0,t) = 0$.

则 $\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h''(t) + f(x,t) = \tilde{f}(x,t). \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - h(0) = \tilde{\varphi}(x).\quad v_t|_{t=0} = \psi(x) - h'(0) = \tilde{\psi}(x). \\ v|_{x=0} = 0 \end{cases}$

定理2 若(9)存在Lyapunov函数则(9)零解稳定. 若 $\dot V(\vec x)<0$ $(\vec x\in G, \vec x\neq 0)$ 则(9)零解渐近稳定, 若存在函数 $V(\vec x)\in C^1(G)$ 满足 $V(\vec 0)=\vec 0$. $V(\vec x)>0$ $(\vec x\neq\vec 0)$
$\dot V(\vec x)=\vec v(\vec x)\cdot\nabla V(\vec x)>0$ $(\vec x\in G,\ \vec x\neq\vec 0)$ 则(9)零解不稳定.

证明: 1° 稳定. $\forall\, 0<\varepsilon<M$ 令 $l:=\inf\limits_{\{|\vec x|=\varepsilon,\ \vec x\in R^n\}} V(\vec x)$

设 $\vec x(t)$ 为 $\begin{cases}\frac{d\vec x}{dt}=\vec v(\vec x)\\ \vec x(0)=\vec x_0\end{cases}$ 的解. 其中 $0<|\vec x_0|<\delta<\varepsilon$ δ 充分小 s.t. $V(\vec x_0)<l$ 由 $\dot V(\vec x(t))\le 0$ 知

$V(\vec x(t))\le V(\vec x(0))=V(\vec x_0)<l$. $\forall t\in\{t\,|\,\overset{且\, t\ge 0}{|\vec x(t)|}\le M\}$. $(\triangle)$

故必有 $|\vec x(t)|<\varepsilon$. $\forall t\ge 0$ $(*)$. 事实上 因 $\delta<\varepsilon$. 由 $\vec x(t)$ 连续性知 $(*)$ 对充分小 t 成立.

若 $\exists\, T>0$ s.t. $|\vec x(T)|=\varepsilon<M$. $\Rightarrow V(\vec x(T))\ge l$. 与 $(\triangle)$ 矛盾. 由稳定性定义及 $(*)$ 得命成立.

2° 渐近稳定. 由1°知零解稳定. 故 $\dot V(\vec x(t))<0$. $\forall t\ge 0$. (否则 $\vec x(T)=\vec 0\Rightarrow \vec x(t)\equiv\vec 0$, 与 $\vec x_0$ 矛盾,

(需证 $\lim\vec x(t)=\vec 0$)

下证 $\lim\limits_{t\to\infty}V(\vec x(t))=0$. 反证: 若 $\alpha=\lim\limits_{t\to\infty}V(\vec x(t))>0$ 由 V 连续 知

$|\vec x(t)|\ge\overset{\exists}{\beta}>0$ 故 $b:=\sup\limits_{\{\beta\le|\vec x(t)|\le M\}}\dot V(\vec x(t))$ 存在. 即 $\dot V(\vec x(t))\le\overset{\exists}{-b}$ $(b>0)$

然而 $V(\vec x(t))=V(\vec x(0))+\int_0^t\dot V(\vec x(s))ds\le V(\vec x_0)-bt$. $\forall t\ge 0$

$t\to+\infty$. 上式与 $V\ge 0$ 矛盾

3° 不稳定: 证 $\forall\delta>0$ $\exists\,\vec x_0$. $0<|\vec x_0|\le\delta$ s.t. $\begin{cases}\frac{d\vec x}{dt}=\vec v(\vec x)\\ \vec x(0)=\vec x_0\end{cases}$ 的解 $|\vec x(t)|>M$, t 足够 >0

反证法. 设 $|\vec x(t)|\le M$. $\forall t>0$ $(**)$. 因 $\dot V(\vec x(t))>0$. $V(\vec x(t))>V(\vec x_0)>0$. $\forall t>0$.

故由 V 的连续性及 $V(\vec 0)=0$ 知 $\exists\lambda$ s.t. $|\vec x(t)|\ge\lambda$ 成立 $\forall t\ge 0$.

于是 $\dot V(\vec x(t))\ge\gamma>0$. $t>0$ $\therefore V(\vec x(t))=V(\vec x_0)+\int_0^t\dot V(\vec x(s))ds\ge V(\vec x_0)+\gamma t$

令 $t\to+\infty$. $V(\vec x(t))\to+\infty$ 与 $|\vec x(t)|\le M$ 矛盾.

第四章 一阶偏微分方程

§1. 一阶线性偏微分方程与首次积分

$F(x,u,Du,\dots,D^k u)=0$ $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$. $n\ge 2$. $u=u(x)$ 未知函数.

线性偏微分方程 $\sum\limits_{|\alpha|\le k}P_\alpha(x)D^\alpha u=f(x)$. $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 多重指标. $\alpha_i\ge 0$. $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$.

不能依赖于 u. $D^\alpha u=\partial^{\alpha_1}_{x_1}\cdots\partial^{\alpha_n}_{x_n}u$. $\partial^0_{x_j}u=u$.

半线性偏微分方程 $\sum\limits_{|\alpha|=k}\underbrace{P_\alpha(x)D^\alpha u}_{最高阶系数不依赖未知函数u.}+G(x,u,Du,\dots,D^{k-1}u)=0$.

拟线性偏微分方程 $\sum\limits_{|\alpha|=k}P_\alpha(x,u,Du,\dots,D^{k-1}u)D^\alpha u+G(x,u,Du,\dots,D^{k-1}u)=0$.

最高阶系数依赖于 x 和 u 的低阶偏导数

一般的一阶线性偏微分方程 $\sum\limits_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u=f(x)$. (1) $n\ge 2$.

$b_j(x)$. $c(x)$. $f(x)\in C(D)$. $D\subset R^n$ 开区域.

的解 $u=u(x)$. 视为 R^{n+1} 空间中的曲面.

"特征线法" 化(1)为常微分方程问题. 找一曲线在其上可计算 u.

设此曲线有参数表示 $x(t)$. $\dfrac{dx_j(t)}{dt} = b_j(x(t))$ (2)

则 $\dfrac{d u(x(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u(x(t))}{\partial x_j} \dfrac{dx_j(t)}{dt} = f(x(t)) - c(x(t))u(x(t))$ (3)

为求解(1). 只须求解

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j(t)}{dt} = b_j(x(t)),\ j=1,2,\cdots,n. & (2). \to (x_1,\cdots,x_n,t) \text{自治系统} \\ \dfrac{du(x(t))}{dt} = f(x(t)) - c(x(t))u(x(t)) & (3) \end{cases}$$

而(2) $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{dx_1(t)}{b_1(x(t))} = \cdots = \dfrac{dx_n(t)}{b_n(x(t))} = (dt)$. (2′) "对称形式".

称为(1)的特征方程.

例. $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ (*) 的积分因子 $\mu(t,x)$. 满足一阶线性偏微分方程

$N\dfrac{\partial \mu}{\partial t} - M\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial N}{\partial t}\right)\mu$. (**) 其特征方程 (2′) 恰好是原常微分方程(*).

$\dfrac{dx}{ds} = -M$ $\qquad \dfrac{dx}{-M} = \dfrac{dt}{N} = ds$

$\dfrac{dt}{ds} = N$ $\qquad N dx + M dt = 0.$

或 $\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t) - xh''(t) = c\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \tilde{f}(x,t) \\ V|_{t=0} = \varphi(x) - xh(0) = \tilde{\varphi}(x) \quad V_t|_{t=0} = \psi(x) - xh'(0) = \tilde{\psi}(x) \\ V_x|_{x=0} = 0. \end{cases}$

再利用延拓法.化为直线问题.利用(5)给出(7)解的表达式. $\boxed{\text{作业}}$

(先延拓再分解)

对热方程的非齐次问题.

(8) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x\in R, t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

类似于波动情形. 利用叠加原理和齐次化原理 (8)的解 $u = v + w$.

$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ V|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = k\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x,t) \\ W|_{t=0} = 0. \end{cases}$

其中 $W(x,t) = \int_0^t Z(x,t,\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}\int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y,\tau)\,dy\,d\tau.$

$Z(x,t,\tau)$: $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} = k\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \quad x\in R.\ t>\tau>0. \\ Z|_{t=\tau} = f(x,\tau). \end{cases}$

(8)的解 $\Rightarrow$ $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_R e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)\,dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}\int_R e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}} f(y,\tau)\,dy$

§5.3 扩散的光滑性(正则性).

光滑性定理. 若 $\varphi(x)$ 在 R 上有界. 则(9) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad x\in R\ t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

的解 $u(x,t)$ 关于 $x\in R, t>0$ 是光滑的 (C^∞).

$u = S * \varphi$

u_x, u_t 与 φ 无关.

且 S 只有在 $t=0$ 处有奇性.

证: 令 $\|\varphi\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_R |\varphi(x)|$

去掉 $\varphi(x)$ 的零测集.

由基本解 知(9)解 $u(x,t) = S*\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)\,dy.$

而 $\frac{\partial S(x,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial K(x-y,t)}{\partial x} = -\frac{x-y}{2kt}K(x-y,t) = O\left(\frac{|x-y|}{t^{3/2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\right).$

知 $\forall$ 固定 $x\in R$. $t>0$. 上式作为 y 的函数在 $y\to\infty$ 处速降为0.

故. $\int_R \frac{\partial S(x,y,t)}{\partial x}\varphi(y)\,dy$ 关于 $x\in R$ 一致收敛 $\Rightarrow \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \int_R \frac{\partial S}{\partial x}\varphi(y)\,dy.$

$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \int_R \left|\frac{\partial S(x,y,t)}{\partial x}\right| |\varphi(y)| dy \le \|\varphi\|_{L^\infty} M \int_R \frac{|x-y|}{t^{3/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}} dy$

$\underline{z=\frac{x-y}{\sqrt{4kt}}}$ $\frac{4kM}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty} \int_R |z| e^{-|z|^2} dz := \frac{M_1}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty} \quad \forall x \in R.$

$\Rightarrow \left\| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right\|_{L^\infty} \le \frac{M_1}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty}.$

同理可得 $\left\| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty} \le \frac{M_2}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty}$. ------ 常数 M_k 与 $\varphi(x)$ 无关.

$\left\| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\|_{L^\infty} \le \frac{M_3}{\sqrt{t}} \|\varphi\|_{L^\infty}.$

不断重复此类估计可得结论.

§6 边值问题.

§6.1 分离变量法 Direclet 边界条件 ✓

1) $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l.\ t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x).\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0,l} = 0 \end{cases}$

相容条件 $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$

先考虑驻波解. 即 $X(x)T(t) \neq 0$ 且 $X(0)=X(l)=0$ 的特解.

代入方程 $X(x)T''(t) = c^2 X''(x) T(t)$

即 $\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda.$

$\Rightarrow$ 特征值问题

(D) $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \xrightarrow{S-L定理} \lambda \ge 0.$

i) $\lambda = 0$. 通解 $X(x) = Ax + B \Rightarrow A = 0.\ B = 0.$

ii) $\lambda = w^2 > 0$. 通解 $X(x) = A\cos wx + B\sin wx \Longrightarrow A = 0.\ B\sin wl = 0.$

$wl = n\pi.\ n \ge 1.$ $\therefore$ 特征值 $\lambda_n = w_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.\ n \ge 1.$

特征函数. $X(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x.$

对每个 λ_n. $T_n = C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t.$

令 $u(x,t) = \sum_{n\ge1} X_n(x) T_n(t). = \sum_{n\ge1} (C_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + D_n \sin\frac{n\pi c}{l}t) \sin\frac{n\pi}{l}x.$ (*) 级数解

为 1) 的"形式解" 易知级数逐项满足方程及齐次边界条件.

$u|_{t=0}=\sum_{n\geq 1} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$.

$\xRightarrow{\text{Fourier}} \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\varphi(x)\,dx$.

P76 3 P77 5. P78 13. P81 2.

$u_t|_{t=0}=\sum_{n\geq 1} D_n \frac{n\pi c}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x) \Rightarrow D_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

(1) 形式解为 将 C_n D_n 代入 (*)

作业：$\boxed{\text{证明 } \varphi.\ \psi \text{ 光滑时上式定义函数为(1)的经典解}}$

☆

对一般情形

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \quad 0<x<l.\ t>0.$

$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad u_t|_{t=0}=\psi(x). \quad 0\leq x\leq l.$ 相容条件 $\varphi(0)=g(0)$

$\underline{u|_{x=0}=g(t) \quad u|_{x=l}=h(t)}$ (Dirichlet). $\varphi(l)=h(0).\ \psi(0)=g'(0).$ $\psi(l)=h'(0)$.

求解分三步. ① 边界齐次化. 令 $p(x,t)=(1-\frac{x}{l})g(t)+\frac{x}{l}h(t)$.

易知 $p|_{x=0}=g(t)$ $p|_{x=l}=h(t)$

② 叠加原理 $u=p+q$ ，q 满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+f-h''(t) := c^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\tilde f & 0<x<l.\ t>0. \\ q|_{t=0}=\varphi(x)-p|_{t=0}:=\tilde\varphi(x) \quad q_t|_{t=0}=\psi(x)-p_t|_{t=0}=\tilde\psi(x) \\ q|_{x=0,l}=0 \end{cases}$$

(由此可利用 (1) 的解法).

$q=v+w.$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0<x<l,\ t>0. \\ v|_{t=0}=\tilde\varphi(x),\ v_t|_{t=0}=\tilde\psi(x). \\ v|_{x=0,l}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\tilde f(x,t) \\ w|_{t=0}=w_t|_{t=0}=w|_{x=0,l}=0. \end{cases}$$

③ Duhamel 原理. $w=\int_0^t z(x,t,\tau)\,d\tau$.
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & 0<x<l.\ t>\tau>0 \\ z|_{t=\tau}=0.\ z_t|_{t=\tau}=\tilde f(x,\tau) \\ z|_{x=0,l}=0. \end{cases}$$

(2) 的解 $u(x,t)=p(x,t)+v(x,t)+\underbrace{\int_0^t z(x,t,\tau)d\tau}_{w(x,t)}$

∴ 满足 $x=0.\ l$ 时 $w(x,t)=0$

OURSTORYBEGINS

考虑热方程

$$(3)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l.\ t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{x=0,l} = 0 \end{cases}$$

相容条件: $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

考虑分离解 $X(x)T(t)\neq 0$. 且 $X(0)=X(l)=0$.

代入方程有 $\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$.

⇒ 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & 0<x<l. \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

特征值 $\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.

〃 〃 函数 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n\geq 1$.

而 $T_n(t)=C_n e^{-\lambda_n kt}$

令 (3) 形式解 $u(x,t)=\sum_{n\geq 1} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n\geq 1} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}$.

⇒ $u|_{t=0} = \sum_{n\geq 1} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x) \xrightarrow[\text{Fourier}]{} C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

⇒ 得形式解 $u(x,t)$

---

§6.2 Neumann 与 Robin 边界条件

对 Neumann 型特征问题 (N)

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0. & 0<x<l. \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases}$$

(特殊的 S-L 边值问题)

特征值 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 特征函数 $X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}$ ($n\geq 0$).

从而 $$(4)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0<x<l.\ t>0\ (k=1) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u'|_{x=0,l} = 0 \end{cases}$$

形式解 $u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx+\sum_{n\geq 1}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}}\cos\frac{n\pi x}{l}$.

对混合型特征值问题 (R)

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l \\ \underbrace{X(0)=0.}_{(D)}\ \underbrace{X'(l)+a_l X(l)=0}_{(R)} & \boxed{a_l>0} \end{cases}$$

OURSTORYBEGINS

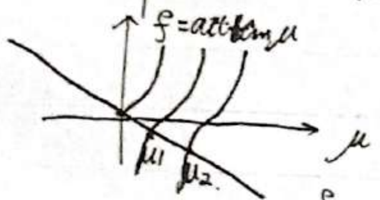
$(a_l>0)$
由S-L定理 $\lambda=w^2>0$, $w>0$.

通解 $X(x)=A\cos wx+B\sin wx$.

$X(0)=A=0$.

$X'(l)+a_lX(l)=B(w\cos wl+a_l\sin wl)=0 \Longrightarrow -w=a_l\tan wl$, 即 $\begin{cases}-\mu=a_l l\tan\mu \\ \mu=wl \ (\mu>0)\end{cases}$

由图解法知此方程有无穷多解 μ_n $n\geq1$ 且 $\mu_n\to+\infty$



特征值 $\lambda_n=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2$.

特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{\mu_n}{l}x$ $n\geq1$ (取 $B=1$).

从而(5) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ $0<x<l$. $t>0$ $(k=1)$

$u|_{t=0}=\varphi(x)$.

$u|_{x=0}=0$. $(u_x+a_lu)|_{x=l}=0$.

解 $u(x,t)=\sum\limits_{n\geq1}\frac{\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\mu_nx}{l}dx}{\int_0^l\sin^2\frac{\mu_nx}{l}dx}e^{-\frac{\mu_n^2}{l^2}t}\sin\frac{\mu_nx}{l}$.

Robin型特征值问题 (R) $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l. \\ X'(0)-a_0X(0)=0, & X'(l)+a_lX(l)=0.\end{cases}$

仅考虑三种情形.

1°. $a_0>0$. $a_l>0$. 由S-L定理 $\lambda_n>0$ $n\geq1$. ✓

2° $a_0<0$ $a_l>0$ 先考虑正特征值 $\lambda=w^2>0$.

通解 $X(x)=A\cos wx+B\sin wx$

$\Rightarrow\begin{cases}X'(0)-a_0X(0)=Bw-a_0A=0. \\ X'(l)+a_lX(l)=(Bw+a_lA)\cos wl+(-Aw+a_lB)\sin wl=0.\end{cases}$

消去B有 $A[(a_0+a_l)\cos wl+(-w+\frac{a_0a_l}{w})\sin wl]=0$.

令 $A\neq0$ 则 $\tan wl=\frac{(a_0+a_l)w}{w^2-a_0a_l}$ 由图解法知此方程有无穷多解.

w_n:

i) $a_0+a_l>-a_0a_l l$. $\lambda_n>0$. $n\geq1$ ✓

ii) $a_0+a_l=-a_0a_l l$. $\lambda_0=0$. $\lambda_n>0$ $n\geq1$. ✓

iii) $a_0+a_l<-a_0a_l l$. $\lambda_0<0$ $\lambda_n>0$. $n\geq1$. ✓

(?)

§6.3 一般化问题

(6) $\begin{cases} \mathcal{L}_t u + \mathcal{L}_x u = f(x,t) & a<x<b,\ t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ \left(\alpha_1 u - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a} = g_1(t),\ \left(\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b} = g_2(t). \end{cases}$

$\mathcal{L}_t,\ \mathcal{L}_x$：线性微分算子。

(若 $\mathcal{L}_t$ 为二阶的情形)

求解步骤：

1° 边界齐次化：取 x 的一次函数 $h(x,t) = A(t)x + B(t)$.

$\Rightarrow \begin{cases} (\alpha_1 a - \beta_1) A(t) + \alpha_1 B(t) = g_1(t) \\ (\alpha_2 b + \beta_2) A(t) + \alpha_2 B(t) = g_2(t) \end{cases} \xrightarrow{\text{求解}} A(t),\ B(t)$

若上式无解：取 x 的二次函数

2° 叠加原理 $u = h + v$. v 满足

(7) $\begin{cases} \mathcal{L}_t v + \mathcal{L}_x v = f(x,t) - \mathcal{L}_t h - \mathcal{L}_x h := \tilde{f}(x,t) \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - h|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x). \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) - h_t|_{t=0} = \tilde{\psi}(x). \\ \text{边界条件齐次}.\ (g_1, g_2 = 0) \end{cases}$

3° 分离变量法 对(7)对应的齐次化问题求解特征值 $\{\lambda_n\}$ 与特征函数 $\{X_n(x)\}$.

(即：$\begin{cases} \mathcal{L}_x X(x) = \lambda X(x). & a<x<b. \\ \text{齐次边界}. \end{cases}$)

再作广义 Fourier 展开. $v(x,t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$,

$\tilde{f}(x,t) = \sum_n \tilde{f}_n(t) X_n(x)$.

$\tilde{\varphi}(x,t) = \sum_n \tilde{\varphi}_n X_n(x)$.

$\tilde{\psi}(x,t) = \sum_n \tilde{\psi}_n X_n(x)$

P87 4.6

P90 2

P98 6

P99 12

代入(7) $\begin{cases} \mathcal{L}_t T_n(t) + \lambda_n T_n(t) = \tilde{f}_n(t) \\ T_n(0) = \tilde{\varphi}_n \quad T_n'(0) = \tilde{\psi}_n \end{cases} \Rightarrow T_n(t)$

$\Rightarrow$ 形式解 $v(x,t) = \sum_n X_n(x) T_n(t)$.

考虑二维 Poison 方程 $u_{xx} + u_{yy} = -f(x,y) \quad (x,y) \in D \subset R^2$

$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\partial D} = \varphi(x,y)$

仅对某些特征区域 如矩形 圆盘 扇形 可用变量分离法求解.

例: 稳态温场. $\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad x^2+y^2 < a^2 \\ u|_{x^2+y^2=a^2} = F(x,y). \end{cases}$

令 $x = r\cos\theta. \quad y = r\sin\theta \quad \Delta_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$

有 $\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \quad r < a \\ u|_{r=a} = F(a\cos\theta, a\sin\theta) = f(\theta) \quad \theta \in R. \end{cases}$

分离解 $X(\theta)T(r)$ 非0 且 $X(\theta+2\pi) = X(\theta)$ 代入方程

$\frac{1}{r}(rT'(r))'X(\theta) + \frac{1}{r^2}T(r)X''(\theta) = 0$

即 $\frac{-r^2T''(r) + rT'(r)}{T(r)} = \frac{X''(\theta)}{X(\theta)} =: -\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(\theta) + \lambda X(\theta) = 0. \\ X(\theta+2\pi) = X(\theta) \end{cases}$

1° $\lambda < 0$ 通解 $X(\theta) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$ 无非零周期解.

2° $\lambda = 0 \quad X(\theta) = A\theta + B$ 周期解 $X_0(\theta) = 1$.

3° $\lambda > 0. \quad X(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\cos\sqrt{\lambda}\theta. \quad \lambda_n = n^2. \; n \geq 1$ $\quad \} \; \lambda_n = n^2 \quad n \geq 0.$

且此时 $r^2T''(r) - rT'(r) - n^2T(r) = 0$ Euler 方程.

令 $r \to t = \ln r$ 上式化为 $\frac{d^2T}{dt^2} - n^2T = 0$ 通解

$\begin{cases} T_0(t) = C_0 + D_0 t \Rightarrow T_0(r) = C_0 + D_n \ln r \\ T_n(t) = C_n e^{nt} + D_n e^{-nt} \Rightarrow T_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \end{cases}$

$\therefore T_0 = 1. \quad T_n(r) = r^n \quad (\because |T_n(0)| < +\infty. \therefore D_n = 0. \; n \geq 0)$.

令 $u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq1} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$.

代入边界条件. $\frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq1}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) = f(\theta)$.

$\Rightarrow$ Fourier级数 $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$ $(n\geq 0)$ $B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$ $(n\geq 1)$

形式解 $u(r,\theta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}\, d\varphi$ "Poison公式"

$\left(u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\left[1+2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\varphi-\theta)\right]d\varphi \cdots\right)$

注 1° 圆外 $(r>a)$ $u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{a}{r}\right)^n (A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$

2° 圆环 $(a_1<r<a_2)$ $u(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2}\ln r + \sum_{n\geq 1}(C_n r^n + D_n r^{-n})$

§7 调和方程(解为调和函数)与 Green 函数

§7.1 Laplace 方程

$\Delta u = 0$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in R^n$ $n\geq 2$.

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$\boxed{\Delta\text{ 旋转不变性}}$. 设 B 为正交阵(n阶). $(BB^T=E)$. 在新坐标 $x'=Bx$ 下 Laplace 方程 $\Delta u = \sum_{1\leq k,l\leq n}\left(\sum_{1\leq i,j\leq n} b_{ki}\delta_{ij}b_{lj}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l}$

$= \sum_{k,l}\left(\sum_i b_{ki}b_{li}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} = \sum_{k,l}\underset{\overset{\|}{E}}{(BB^T)_{kl}}\frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l} = \sum_{k,l=1}^n \delta_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x'_k \partial x'_l}$

$= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x'_k} = 0$.

$\boxed{\Delta\text{ 的极坐标形式}}$ 二阶: 令 $x=r\cos\theta$. $y=r\sin\theta$.

则 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$

逆变换矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$

从而 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$

$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$

$\therefore \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2$

$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$.

OURSTORYBEGINS

三维 $x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta \quad r\ge 0. \quad 0\le\theta\le\pi \quad 0\le\varphi\le 2\pi$

$\forall\ v(x,y,z)\in C_0^\infty(R^3)$ 则 $\int v\Delta u\,dxdydz \xlongequal{\text{分部积分}}$

(有紧支集函数)

$= -\int \nabla v\cdot\nabla u\,dxdydz \xlongequal{\text{三重积分 球坐标变换}} -\int \left(\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) r\sin\theta\,drd\theta d\varphi \xlongequal{\text{再次分部积分 换回变量}} \int \frac{v}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] dxdydz$

左右对比

$$\Delta u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} ✓$$

最大值原理. 设 $D\subset R^n$ 有界. $u\in C^2(D)\cap C(\bar D)$. 在 D 中调和.

则 $\max\limits_{\bar D} u = \max\limits_{\partial D} u \quad (1)$, $\min\limits_{\bar D} u = \min\limits_{\partial D} u \quad (2)$

证: 仅证式(1) 反证: 设 $\max\limits_{\bar D} u > \max\limits_{\partial D} u$ 令 $v = u + \varepsilon|x|^2$. $\varepsilon>0$. 充分小.

$\max\limits_{\bar D} v > \max\limits_{\partial D} v$ 令 x_0 为 $\bar D$ 中最大值点 则 $x_0\notin\partial D$. $\Delta v(x_0)\le 0$.

而 $\Delta v(x_0) = \underbrace{\Delta u(x_0)}_{=0} + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$. 矛盾 $\therefore \max\limits_{\bar D} u = \max\limits_{\partial D} u$

P154 6.9

唯一性 令 $f\in C(D)$. $g\in C(\partial D)$ 则 Poisson 方程边值问题 $\begin{cases}\Delta u = f & x\in D.\\ u|_{\partial D} = g\end{cases}$

至多有一个解 $u\in C^2(D)\cap C(\bar D)$

证明方法1° 设两解 u_1, u_2 则令 $w = u_1 - u_2$ 为调和函数. 且 $w|_{\partial D}\equiv 0$

$\xRightarrow{\text{最大值原理}} 0 = \min\limits_{\partial D} w \le w(x) \le \max\limits_{\partial D} w = 0$, $\Rightarrow w = 0$. $u_1 = u_2$.

方法2° 定义 w 的能量. $E = \int_D |\nabla w|^2\,dx$.

由 Guass 公式 $\int_D \nabla\cdot(w\nabla w)\,dx = \int_{\partial D} w\nabla w\cdot\gamma\,ds = \int_{\partial D} w\frac{\partial w}{\partial\gamma}\,ds$

$= \int_D (w\Delta w + |\nabla w|^2)\,dx$

$\therefore 0\le E = \underbrace{\int_{\partial D} w\frac{\partial w}{\partial\gamma}ds}_{=0,\ (w|_{\partial D}=0)} - \underbrace{\int_D w\Delta w\,dx}_{=0\ (调和)} = 0 \Rightarrow |\nabla w| = 0 \Rightarrow w\equiv 常数 = 0.$

OURSTORYBEGINS

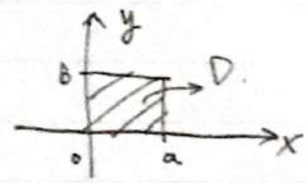
附加作业 设 $u\in C^2(D)\cap C^1(\bar{D})$ ($D\subset R^n$ 有界光滑. $n\geq 2$) 为

$$\begin{cases}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+c(x)u=f(x) & x\in D.\\ u|_{\partial D}=\varphi.\end{cases}$$

的解. 其中 a_{ij}, c, f, φ 适当光滑 $c(x)\leq 0$. $(a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ 在D内对称正定. 证明: 解唯一.

§7.2 分离变量法

例1. (矩形问题).
$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a \quad 0<y<b\\ u|_{x=0}=0. \quad u|_{x=a}=f(y).\\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,b}=0\end{cases}$$



先考虑分离解. $X(x)Y(y)\neq 0$. 代入方程

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}:=-\lambda.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}Y''(y)+\lambda Y(y)=0, & 0<y<b.\\ Y'(0)=Y'(b)=0.\end{cases}$$

特征值 $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$.

特征函数 $Y_n(y)=\cos\frac{n\pi y}{b}$ $n\geq 0$.

相应的 $X_0=C_0+D_0x$. $X_n(x)=C_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+D_n\sinh\frac{n\pi x}{b}$ $n\geq 1$.

(其中 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

全形式解 $u(x,y)=\sum_{n\geq 0}X_n(x)Y_n(y)=C_0+D_0x+\sum_{n\geq 1}\left(C_n ch\frac{n\pi x}{b}+D_n sh\frac{n\pi x}{b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}$

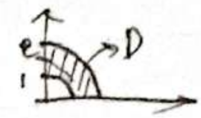
由条件 $u|_{x=0}=C_0+\sum_{n\geq 1}C_n\cos\frac{n\pi y}{b}=0. \Rightarrow C_n=0\ (n\geq 0)$

$u|_{x=a}=D_0a+\sum_{n\geq 1}D_n sh\frac{n\pi a}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}=f(y).$

$\xRightarrow{\text{Fourier级数}}$ $D_0=\frac{1}{ab}\int_0^b f(y)dy$, $D_n=\frac{2}{b\, sh\frac{an\pi}{b}}\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy$ $(n\geq 1)$

$\Rightarrow$ 形式解 $u(x,y)=\frac{x}{ab}\int_0^b f(y)dy+\sum_{n\geq 1}\frac{2}{b}\left(sh\frac{an\pi}{b}\right)^{-1}\int_0^b f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy\left(sh\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\right)$

例2（扇形问题）
$$\begin{cases} \Delta_2 u=0 & 1<r<e,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ u|_{r=1,e}=0 & \text{(齐次边界条件)} \\ u|_{\theta=0}=0 \quad u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=g(r) \end{cases}$$



$$\Delta_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \Rightarrow r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

考虑分离解 $R(r)\Theta(\theta)\neq 0$ 代入方程有

Euler方程 $1<r<e$

$$-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=:-\lambda \Rightarrow \begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda R(r)=0 \\ R(1)=R(e)=0. \end{cases}$$

作变换 $r\to t=\ln r$ 记 $Z(t)=R(r)=R(e^t)$ 则 $\begin{cases} Z''(t)+\lambda Z(t)=0. & 0<t<1 \\ Z(0)=Z(1)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_n=(n\pi)^2 \quad Z_n(t)=\sin n\pi t \quad n\geq 1.$

即 $\{R_n(r)=\sin(n\pi\ln r)\}$ 为 $L^2_{\frac{1}{r}}[1,e]$ 的正交基.

相应的 $\Theta_n(\theta)=A_n\operatorname{ch}n\pi\theta+B_n\operatorname{sh}n\pi\theta$

令形式解 $u(r,\theta)=\sum_{n\geq1}(A_n\operatorname{ch}n\pi\theta+B_n\operatorname{sh}n\pi\theta)\sin(n\pi\ln r)$

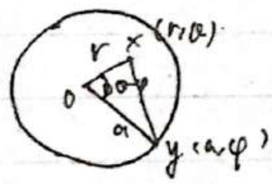
由条件 $u|_{\theta=0}=\sum_{n\geq1}A_n\sin(n\pi\ln r)=0 \quad A_n=0.$

$$u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\sum_{n\geq1}B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi^2}{2}\sin(n\pi\ln r)=g(r) \xrightarrow[\text{展开}]{\text{广义Fourier}}$$

$$B_n=\frac{\langle g(r),\sin(n\pi\ln r)\rangle}{\operatorname{sh}\frac{n\pi^2}{2}\|\sin(n\pi\ln r)\|^2}$$

注. 对圆内问题由二维Poisson公式给出

且 $u(\vec{x})=\frac{a^2-|\vec{x}|^2}{2\pi a}\int_{|\vec{y}|=a}\frac{u(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}ds(\vec{y}) \quad x=(x_1,x_2)\in\{|x|<a\}.$



§7.3 Green第一与第二公式

设 $D\subset R^n$ 为有界区域，ν 为 ∂D 的单位外法向. 在Guass公式

$\int_D \nabla\cdot\vec{F}\,dx=\int_{\partial D}\vec{F}\cdot\nu\,ds$ 中 分别取 $\vec{F}=v\nabla u$ 及 $\vec{F}=u\nabla v$ 有

$$\left.\begin{aligned} \int_D v\Delta u\,dx &= \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial\nu}ds-\int_D\nabla v\cdot\nabla u\,dx. \\ \int_D u\Delta v\,dx &= \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial\nu}ds-\int_D\nabla u\cdot\nabla v\,dx \end{aligned}\right\} \text{Green 1st}$$

$$\int_D (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)ds.\quad \text{Green 2nd}$$

平均值公式. 设 $D\subset R^n$ 为开集. $u\in C^2(D)$ 则

$u(x)$ 调和 $\Longleftrightarrow$ $\forall B_r(x)\subset D$ 成立

$$u(x) = \frac{1}{n w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y) \quad \text{球面平均}$$

$$= \frac{1}{w_n r^n}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy \quad \text{球体平均}.$$

其中 w_n 为单位球的体积. $w_n = \pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 单位球面积 $n w_n$.

$$\begin{pmatrix} n=2. & w_2=\pi. \\ n=3 & w_3=\frac{4}{3}\pi. \end{pmatrix}$$

证明: (1)必要性) 令 $\varphi(r,x) = \frac{1}{n w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y)$

$$\underset{y=x+rz}{=} \frac{1}{n w_n}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,d\hat{S}(z), \quad dS(y) = r^{n-1}d\hat{S}(z).$$

则 $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{n w_n}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+rz)\cdot z\, d\hat{S}(z).$

$$\underset{y=x+rz}{=} \frac{1}{n w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y)\cdot \underbrace{\frac{y-x}{r}}_{=\nu}\,dS(y).$$

$$= \frac{1}{n w_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\,dS(y)$$

$$\underset{\text{Green 1st}}{=} \frac{1}{n w_n r^{n-1}}\int_{B_r(x)} \underbrace{\Delta u(y)}_{\shortparallel\, 0}\,dy = 0.$$

$$\therefore \varphi(r,x) = \lim_{r\to 0^+}\varphi(r,x) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{n w_n}\int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\,d\hat{S}(z) = u(x).\ ① = u(x).$$

$=u(x)$.

而 $\frac{1}{w_n r^n}\int_{B_r(x)} u(y)\,dy = \frac{1}{w_n r^n}\int_0^r d\tau\int_{\partial B_\tau(x)} u(y)\,dS(y)$

$$\underset{\text{球面平均}}{=} \frac{1}{w_n r^n}\int_0^r n w_n \tau^{n-1} u(x)\,d\tau = u(x)$$

P158. 3

P168 11. 13

Green 1st 令 $v=1$.

(反证)
充分性 若$\Delta u \neq 0$. 不妨设$\exists x_0 \in D$ s.t. $\Delta u(x_0) > 0$
由Δu的连续性 $\exists B_r(x_0)$ ($r>0$充分小)使 $\Delta u(y) > 0$ $\forall y \in B_r(x_0)$
由平均值公式必要性的证明知
$$0 = \frac{\partial u(x)}{\partial r} = \frac{\partial \varphi(r,x)}{\partial r} = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x_0)} \underbrace{\Delta u(y)}_{>0} dy > 0 \quad 矛盾.$$

强最大值原理. 设$D \subset \mathbb{R}^n$为有界连通区域. $u \in C^2(D) \cup C(\bar{D})$ 调和 且
$\exists x_0 \in D$ (区域内部) s.t. $u(x_0) = \max_{\bar{D}} u$ (或 $u(x_0) = \min_{\bar{D}} u$)
则 $u \equiv$ 常数 in D
证: 反证max情形. 令 $M = u(x_0) = \max_{\bar{D}} u$. 由平均值公式.
$\forall\, 0 < r < dist(x_0, \partial D)$ 有 $M = u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} \underbrace{u(y)dy}_{\leq M} \leq M$.
等号成立 $\Leftrightarrow$ $u(y) = M$. $\forall y \in B_r(x_0)$.
对$\forall x \in D$ $\exists$有限个开球 $B_{r_i}(x_i)$ $(0 \leq i \leq m)$ 使得 $x_i \in B_{r_{i-1}}(x_{i-1})$ 在D.
且 $x_m = x$. 由前述知每个球内 $u \equiv M$ 由x任意性 知 $u \equiv M$ in D.
由强最大值原理可推得最大值原理

Dirichlet原理 令 $E[w] = \frac{1}{2}\int_D |\nabla w|^2 dx$. $w \in A := \{w \in C^2(\bar{D}) \mid w|_{\partial D} = h(x)\}$. 容许集.
则 $u \in C^2(\bar{D})$ 为 $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = h(x) \end{cases}$ 的解 $\Leftrightarrow$ $E[u] = \min_{w \in A} E[w]$. 能量最小函数.
证.(必要性). 任取 $w \in A$ 则
$$0 = \int_D (u-w)(-\Delta u) dx \overset{\text{Green 1st}}{=\!=\!=} -\int_{\partial D} \underbrace{(u-w)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_D \nabla(u-w) \cdot \nabla u\, dx$$
$$= \int_D (|\nabla u|^2 - \nabla w \cdot \nabla u)\, dx.$$
$$\Rightarrow \int_D |\nabla u|^2 dx = \int_D \nabla w \cdot \nabla u\, dx \leq \int_D |\nabla w| \cdot |\nabla u|\, dx \leq \int_D \left(\tfrac{1}{2}|\nabla w|^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2\right) dx$$
$$\Rightarrow E[u] \leq E[w] \quad \forall w \in A.$$
(充分性) $\forall \, v \in C_0^\infty(D)$, 令 $e(t) = E[u+tv]$ $t \in \mathbb{R}$ 易知 $u + tv \in A$. $t \in \mathbb{R}$
D的边界为0
$e(t)$ 在 $t=0$ 取最小. $e'(0) = 0$.
而 $e(t) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla u + t\nabla v|^2 dx = \int_D (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + t\nabla u \cdot \nabla v + \frac{t^2}{2}|\nabla v|^2) dx$
$$\Rightarrow 0 = e'(0) = \int_D \nabla u \cdot \nabla v\, dx \overset{\text{Green 1st}}{=\!=\!=} \int_{\partial D} \underbrace{v}_{=0} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_D (-\Delta u) v\, dx.$$
$\Rightarrow \int_D v(-\Delta u)\, dx = 0$ 由v的任意性. $\Delta u = 0$ 且 $u|_{\partial D} = h(x)$ $\therefore u$为解.

OURSTORYBEGINS

§7.4 Green函数

(1) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \subset \mathbb{R}^n \quad n \geq 2 \\ u|_{\partial D} = h(x) \end{cases}$

$\forall u \in C^2(\bar{D})$ $\forall x \in D$. 令 $\varepsilon > 0$ 充分小. 由Green第二公式有

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon(x)} [u(y) \underbrace{\Delta v(y-x)}_{=0} - v(y-x)\Delta u(y)]\, dy = \Big(\int_{\partial D} \underbrace{-}_{\text{球面单位外法向与边界法向相反}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Big) \Big[u(y)\frac{\partial v(y-x)}{\partial \nu} - v(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big] dS(y) \quad (2)$$

其中 $v(y-x) = v(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x-y| & n=2 \\ -\frac{|x-y|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n} & n \geq 3 \end{cases}$ Δu在全空间的基本解 在$y \neq x$处调和.

仅考虑 $n=3$ 的情形, $v(y-x) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}$ $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Δ 易知 $v\big|_{\partial B_\varepsilon(x)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}$.

对(2)右端作如下估计.

$$\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} v(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y)\Big| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\partial B_\varepsilon(x))} \underbrace{\|v\|_{L^\infty(\partial B_\varepsilon(x))}}_{\frac{1}{4\pi\varepsilon}} 4\pi\varepsilon^2$$

$$\leq \underbrace{\|\nabla u\|_{L^\infty(D)}}_{\text{有界区域上的max}} \varepsilon \to 0 \quad (\text{as } \varepsilon \to 0)$$

Δ 易知 $\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial B_\varepsilon(x)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$.

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial v(y-x)}{\partial \nu} dS(y) \xlongequal{y = x+\varepsilon z} -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\underset{\text{origin}}{\partial B_1(0)}} u(x+\varepsilon z)\varepsilon^2 dS(z) \to -u(x) \quad (\text{as } \varepsilon \to 0)$$

在(2)中令 $\varepsilon \to 0$.
$$u(x) = \int_{\partial D}\Big[u(y)\frac{\partial v(y-x)}{\partial \nu} - v(y-x)\underset{?}{\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}}\Big] dS(y) + \int_D v(y-x)\underbrace{\Delta u(y)}_{=0} dy \quad (3)$$

若要求解(1) 需解决 $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}$

引入"修正函数" $H(y,x)$: $\begin{cases} \Delta_y H(y,x) = 0, & y \in D, \ x \in D \text{参数} \\ H|_{\partial D} = -v(y-x). \end{cases}$

$$0 = \int_D [H(y,x)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y H(y,x)]\, dx \xlongequal{G_2} \int_{\partial D}\Big[H(y,x)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial H(y,x)}{\partial \nu}\Big] dS(y)$$
$$= \int_{\partial D}\Big[-v(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial H(y,x)}{\partial \nu}\Big] dS(y).$$

$$\Rightarrow -\int_{\partial D} v(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} dS(y) = \int_{\partial D} u(y)\frac{\partial H(y,x)}{\partial \nu} dS(y)$$

由(3)知小解

$$u(x) = \int_{\partial D} h(y)\frac{\partial}{\partial \nu}[v(y-x)+H(y,x)]\,dS(y) := \int_{\partial D} h(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\,dS(y)$$ "Poisson公式"

定义：D上Green函数为 $G(x,y) := v(y-x)+H(y-x)\quad x,y\in\bar D$

易知 $\begin{cases}\Delta_y G(x,y) = \Delta_y v(y-x) = \delta(x-y)\\ G\big|_{\partial D}=0.\end{cases}$

P175 3.5. P178 2 P181 2

Green函数性质：

1° $\int_{\partial D}\frac{\partial G}{\partial \nu}dS = 1$ （令 $u=1$）

2° $v(y-x) < G(x,y) < 0,\ \forall x\in D\ x\neq y$

$\Delta_y G(x,y) = \delta(x-y)\geq 0$ （下调和函数），由强最大值原理及

$G\big|_{\partial D}=0$ 知，$G(x,y) < \sup G = 0$.

而 $H(y,x)$ 调和 $\Rightarrow H(y,x) > \min\limits_{\partial D}(-V(y-x)) > 0 \Rightarrow V(y-x) = G(x,y)-H(x,y) < G(x,y)$

3° 对称性 $G(x,y)=G(y,x)\ \forall x,y\in D\ x\neq y$.

$\forall$ 固定 $x,y\in D$. $x\neq y$. 令 $\varphi(z) = G(x,z)$ $\psi(z) = G(y,z)$

则 $\Delta\varphi(z)=0\ (z\neq x)$. $\Delta\psi(z)=0\ (z\neq y)$ 且 $\varphi|_{\partial D}=\psi|_{\partial D}=0$. 对 φ. ψ 用于 D_ε.

对充分小 $\varepsilon>0$. 由 G2 $\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)dS = \int_{\partial B_\varepsilon(y)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)dS$ (4)

因 ψ 在 x 附近调和. $\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\nu}dS\right| \leq C\underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_\varepsilon(x))}}_{O(\varepsilon^{-1})}\varepsilon^2\to 0.\ (\varepsilon\to 0)$.

$\varphi(z) = G(x,z) = v(x,z)+H(x,z)$

而 $\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}dS = \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\psi\frac{\partial v}{\partial\nu}dS + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\psi\frac{\partial H}{\partial\nu}dS$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_1(0)}\psi(x+\varepsilon\xi)\,\varepsilon^2 dS(\xi) + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\psi\frac{\partial H}{\partial\nu}dS \to \psi(x)\ (\varepsilon\to 0)$.

$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{G(y,z)}_{=\psi(z)}\frac{\partial v}{\partial\nu}dS(z)$. $|z-x|=\varepsilon$.

$\int_{\partial B_1(0)}\psi(x+\varepsilon\xi)\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\varepsilon^2 dS(\xi)$.

(4) 左端 $\to \psi(x)\ (\varepsilon\to 0)$

(4) 右端 $\to \varphi(y)\ (\varepsilon\to 0)$

$\therefore G(x,y) = \varphi(y) = \psi(x) = G(y,x)$.

形式证明：$\forall$ 固定 $x_0\neq y_0\in D$. 由(3)及Green函数定义知

$$u(x) = \int_{\partial D} u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}dS(y) + \int_D G(x,y)\Delta u(y)\,dy$$

OURSTORYBEGINS

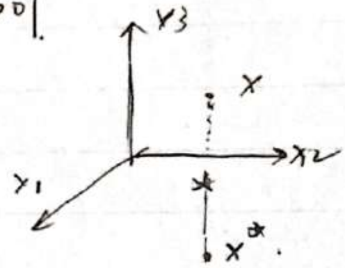
令 $u(y)=G(x_0,y)$，$y=y_0$ 则 $G(x_0,y_0)=\int_D G(y_0,y)\Delta G(x_0,y)\,dy$.

$=\int_D G(y_0,y)\delta(x_0-y)\,dy = G(y_0,x_0)$

§7.5 半空间及球上的Green函数

仅考虑 $n=3$ 情形.

半空间 $R^3_+=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3 \mid x_3>0\}$.



(5) $\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } R^3_+\\ u|_{\partial R^3_+}=h(x_1,x_2)\end{cases}$

定义 称 $(x_1,x_2,x_3)\in R^3_+$ 关于 $\{x_3=0\}$ 的对称点为 $x^*=(x_1,x_2,-x_3)$.

令 $H(y,x)=-V(y-x^*)$ $x,y\in R^3_+$. ∵ $x^*\notin R^3_+$. $x^*\neq y$.

∴ $\Delta_y H(y,x)=0$.

若 $y\in\partial R^3_+$ 则 $H(y,x)=-V(y-x^*)=-V(|y-x^*|)=-V(|y-x|)$

$=-V(y-x)$

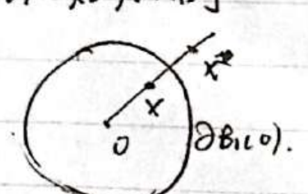
⇒ $H(y,x)$ 满足修正函数条件.

此时 $G(x,y)=V(y-x)+H(y,x)=V(y-x)-V(y-x^*)=-\frac{1}{4\pi|y-x|}+\frac{1}{4\pi|y-x^*|}$

而 $\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{y\in\partial R^3_+} = -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{y_3-x_3}{|y-x|^3}+\frac{y_3+x_3}{|y-x^*|^3}\right) = \frac{x_3}{2\pi|y-x|^3}$

$\xRightarrow{\text{Poisson}}$ $u(x)=\frac{x_3}{2\pi}\int_{\partial R^3_+}\frac{h(y_1,y_2)}{|y-x|^3}\,dS(y)=\frac{x_3}{2\pi}\int_{R^2}\frac{h(y_1,y_2)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2]^{3/2}}\,dy_1dy_2$

球: 先考虑单位球 (6) $\begin{cases}\Delta u=0 & \text{in } B_1(0)\\ u|_{\partial B_1(0)}=h(x)\end{cases}$



定义 若 $x\in R^3\backslash\{0\}$ 称 $x^*=\frac{x}{|x|^2}$ 为 x 关于单位球面的对称点.

即 $x\cdot x^*=1$.

先找修正函数 $H(y,x)$: $\begin{cases}\Delta_y H(x,y)=0 & y\in B_1(0)\ x\in B_1(0)\\ H|_{\partial B_1(0)}=-V(y-x)\end{cases}$

易知 $V(y-x^*)$ 调和

$y\in\partial B_1(0)$, $x\neq0$ 时 $|y-x|^2=1-2y\cdot x+|x|^2=|x|^2\left(\frac{1}{|x|^2}-\frac{2y\cdot x}{|x|^2}+|y|^2\right)$.

$= |x|^2 \left| y - \frac{x}{|x|^2} \right|^2 = |x|^2 |y - x^*|^2$. (*)

$\Rightarrow \quad |y-x|^{-1} = (|x||y-x^*|)^{-1} \Rightarrow -\Gamma(y-x) = -\Gamma(|x|(y-x^*))$.

令 $H(y,x) = -\Gamma(|x| \cdot (y-x^*))$ 即为所求修正函数

从而 $G(x,y) = \Gamma(y-x) + H(y,x) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{1}{4\pi|x|(y-x^*)}$

此时 $\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}\right|_{\partial B_1(0)} = \sum_{i=1}^{3} \nu_i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} y_i \left[\frac{y_i - x_i}{|y-x|^3} - \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y-x^*|)^3} \right]$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{3} y_i \frac{y_i(1-|x|^2)}{|y-x|^3} = \frac{1-|x|^2}{4\pi|y-x|^3} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} y_i^2}_{=1}$

$\overset{\text{Poisson}}{\Longrightarrow} \quad u(x) = \int_{\partial B_1(0)} h(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} dS(y) = \frac{1-|x|^2}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \frac{h(y)}{|y-x|^3} dS(y)$.

对(7) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_a(0),\ a>0. \\ u|_{\partial B_a(0)} = h(x) \end{cases}$

令 $x' = \frac{x}{a}$ 则 $\tilde{u}(x') := u(ax') = u(x)$. 满足 $\Delta_{x'} \tilde{u}(x') = 0$ in $B_1(0)$

$\tilde{u}|_{\partial B_1(0)} = h(ax')$.

(7)的解 $\overset{u(x)}{\tilde{u}(x')} = \frac{1-|x'|^2}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \frac{h(ay')}{|y'-x'|^3} d\tilde{S}(y')$

$\xlongequal[y' = \frac{y}{a}]{x' = \frac{x}{a}} \quad \frac{a^2 - |x|^2}{4\pi a} \int_{\partial B_a(0)} \frac{h(y)}{|y-x|^3} dS(y)$

$= \frac{a^2(a^2-r^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{h(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{[a^2+r^2-2ar(\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]^{3/2}}$.

其中 x对应坐标 (r, θ_0, φ_0). "Poisson 公式"

相应Green函数 $G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{a}{4\pi|x|(y-x^*)}$.

P186 3

P187 9. 11. 13

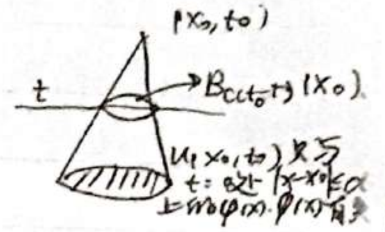
P188 18

OURSTORYBEGINS

§8 空间中的波

§8.1 高维波动方程初值问题解的唯一性

唯一性定理 (1) $\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u = f(x,t) & x\in R^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$



证 仅证明 (2) $\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0 \\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0 \end{cases}$ 只有零解.

任意固定 $x_0\in R^3$, $t_0>0$. 在特征锥 (→有界区域) $C=\{(x,t)\in R^4 \mid |x-x_0|\le c(t_0-t),\ 0\le t\le t_0\}$ 中定义(2)的能量为 $E(t)=\frac12\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx \quad 0\le t\le t_0$.

则 $\frac{dE(t)}{dt}=\frac12\frac{d}{dt}\int_0^{c(t_0-t)}dr\int_{\partial B_r(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dS$

$=\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_tu_{tt}+c^2\nabla u\nabla u_t)dx-\frac c2\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dS$

$\overset{G.1}{=}\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}u_t\underbrace{(u_{tt}-c^2\Delta u)}_{\parallel 0}dx+c\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}\underbrace{\left(cu_t\frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{u_t^2}{2}-\frac{c^2}{2}|\nabla u|^2\right)}_{\le 0}dS$

≤ 0.

$cu_t\frac{\partial u}{\partial\nu}\le|u_t|\left|c\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|\le|u_t||c\nabla u|\le\frac{u_t^2}{2}+\frac{|c\nabla u|^2}{2}$

$\Rightarrow 0\le E(t)\le E(0)=0$. 故C中 $u_t=0$, $\nabla u\equiv\vec{0}$. 即 $u\equiv$ 常数 $=0$.

由 x_0,t_0 任意性知 $u\equiv 0\ \forall x\in R^3,\ t>0$.

注: 对应 Neumann 与 Robin 条件的能量为

$E_N(x)=\frac12\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx$

$E_R(x)=\frac12\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx+\frac{c^2}{2}\int_{\partial B_{c(t_0-t)}(x_0)}bu^2dS$.

R: $\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}+bu\right)\Big|_{\partial D}=0$.

§8.2 高维齐次波动方程初值问题的解

(3) $\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0 & x\in R^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

利用球面平均法化为一维问题

任意固定 $x\in R^3$. $U(r,t)=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\partial B_r(x)}u(y,t)dS(y) \overset{y=x+rz}{=} \frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1}u(x+rz,t)d\tilde{S}(z)$

则 $\underline{\int_{|y-x|\le r}u_{tt}(y,t)dy}=\int_{|y-x|\le r}c^2\Delta u(y,t)dy=\int_0^r d\rho\int_{\partial B_\rho(x)}u_{tt}(y,t)dS(y)$

$\overset{Gauss}{=} c^2\int_{|y-x|=r}\nabla u(y,t)\cdot\nu\,dS(y) \overset{y=x+rz}{=} c^2r^2\int_{|z|=1}\nabla u(x+rz,t)\cdot z\,d\tilde{S}(z)$

$=c^2r^2\int_{|z|=1}\frac{\partial u(x+rz,t)}{\partial r}d\tilde{S}(z)=4\pi c^2r^2\int_{|z|=1}\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u(x+rz,t)}{\partial r}d\tilde{S}(z)$

极坐标 $\frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\frac{r\psi(x_1+r\cos\theta, x_2+r\sin\theta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}d\theta dr+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\int_0^{ct}\int_0^{2\pi}\frac{r\varphi(x_1+r\cos\theta, x_2+r\sin\theta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}d\theta dr\right]$ "Poisson 公式"

注：对非齐次方程 $\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=f(x,t) & x\in R^3, t>0. \\ u|_{t=0}=\varphi(x). & u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$

可用齐次化原理，(Duhamel 原理)

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\psi(y)ds(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\varphi(y)ds(y)\right]$$
$$+\frac{1}{4\pi c^2}\int_{|y-x|\le ct}\frac{f(y,t-\frac{|y-x|}{c})}{|y-x|}dy$$

P222 6. 8(a).

P228 7.9.

P229. 19.

§8.3 波动方程的特征曲面与几何光学近似

定义 三维波动方程 (6) $u_{tt}=c^2\Delta u$ 的特征曲面 $S: \varphi(x,t)=0$ 是，满足 $\varphi_t^2-c^2|\nabla\varphi|^2=0$ (7) 的曲面. 若 $\varphi=\varphi(x,t)$ 为 (7) 的一个解 则 $\varphi(x,t)=$ 常数 $=K$ 为三维波动方程的特征曲面族. 对 (7) 任一解 $\varphi=\varphi(x,t)$. 考虑 $F(\varphi_t,\nabla\varphi)=\frac{1}{2}(\varphi_t^2-c^2|\nabla\varphi|^2)=0$ 的特征方程组 $\frac{dt}{ds}=F_{\varphi_t}(\varphi_t,\nabla\varphi)=\varphi_t(x,t)$

$\frac{dx}{ds}=F_{\nabla\varphi}(\varphi_t,\nabla\varphi)=-c^2\nabla\varphi \quad x=(x_1,x_2,x_3).$

则任一解 $t=t(s)$ $x=x(s)$ 均称为 (6) 的光线.

定理1. (6) 的光线均为直线：$x-x_0=c\alpha(t-t_0)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. $|\alpha|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}=1.$

注 $\left|\frac{dx}{dt}\right|=c.$

证. $\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{d}{ds}\varphi_t(x(s),t(s))=\varphi_{tt}(x(s),t(s))\underset{\varphi_t(x,t)}{\underset{\parallel}{\frac{dt(s)}{ds}}}+\sum_{j=1}^{3}\varphi_{tx_j}(x(s),t(s))\cdot\underset{-c^2\varphi_{x_j}(x(s),t)}{\underset{\parallel}{\frac{dx_j(s)}{ds}}}$

$=0.$ (对 (7) 关于 t 微分)

类似有 $\frac{d^2x_j}{ds^2}=0.$

∴ 一切光线均为直线. 即沿任一光线 $\varphi_t=\tilde{\alpha_0}=\text{const}$, $\varphi_{x_j}=\tilde{\alpha_j}$ $(j=1,2,3)$

从而 $\tilde{\alpha_0}^2-c^2\sum_{j=1}^{3}\tilde{\alpha_j}^2=0\Rightarrow\frac{dx_j}{dt}=-c^2\frac{\varphi_{x_j}}{\varphi_t}=c^2\frac{\tilde{\alpha_j}}{\tilde{\alpha_0}}=c\alpha_j.$

$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2=1.$

$= 4\pi c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} U(r,t).$

$\Rightarrow \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u_{tt}(y,t)\,dS(y) = 4\pi c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} U(r,t)$ 对r微分

$4\pi r^2 U_{tt} = \int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y,t)\,dy = 4\pi c^2 \frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r)$

$\left(4\pi r^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\partial B_r(x)} \frac{1}{4\pi r^2} u(y,t)\,dy\right)$ $= 4\pi c^2 (2r U_r + r^2 U_{rr})$

$= 4\pi c^2 r (rU)_{rr}.$

$\Rightarrow (rU)_{tt} = c^2 (rU)_{rr}.$ $rU = rU(r,t) = (rU)(r,t).$

通解 $rU = f(r+ct) + g(r-ct)$ 令 $r\to 0$ 先有

$-f(ct) = g(-ct) \Rightarrow rU = f(r+ct) - f(ct-r)$ (4).

$\therefore u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U = \lim_{r\to 0} \frac{f(r+ct)-f(ct-r)}{r} = 2f'(ct).$

(4) 对r·t微分后 令 $t=0$ 有.

$(rU)_r|_{t=0} = f'(r) + f'(-r)$ $(rU)_t|_{t=0} = cf'(r) - cf'(-r)$

$\therefore 2f'(r) = \frac{1}{c}(rU)_t|_{t=0} + (rU)_r|_{t=0}.$

$= \frac{1}{4\pi c r}\int_{\partial B_r(x)} u_t(y,0)\,dS(y) + \left(\frac{1}{4\pi r}\int_{\partial B_r(x)} u(y,0)\,dS(y)\right)_r.$

$\Rightarrow$ (3) 解 $u(x,t) = 2f'(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} \psi(y)\,dS(y).$

$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)} \varphi(y)\,dS(y)\right]$ "Kirchhoff" 公式.

二维情形.

$$(5)\begin{cases} u_{tt} - c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = 0. & (x_1,x_2)\in R^2 \quad t>0. \\ u|_{t=0} = \varphi(x_1,x_2) & u_t|_{t=0} = \psi(x_1,x_2) \end{cases}$$

"降维法" 令 $\Sigma_{ct}(x_1,x_2) = \{(\xi,\eta)\in R^2 \mid (\xi-x_1)^2 + (\eta-x_2)^2 \le (ct)^2\}.$

由第一型曲面积分公式. 及上(下)球面方程 $\partial B^{\pm}_{ct} = \{(\xi,\eta,\zeta)\in R^3 \mid \zeta = \pm\sqrt{(ct)^2 - r^2} + x_3,\ r = \sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-x_2)^2},\ (\xi,\eta)\in\Sigma_{ct}(x_1,x_2)\}$

知: $\int_{\partial B^{+}_{ct}(x)} \frac{\psi}{4\pi c^2 t}\,dS = \frac{1}{4\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\psi(\xi,\eta)}{ct}\sqrt{1+\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2}\,d\xi\,d\eta$

$= \frac{1}{4\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}}\,d\xi\,d\eta.$

$\Rightarrow \int_{\partial B_{ct}(x)} \frac{\psi}{4\pi c^2 t}\,dS = \frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\,d\xi\,d\eta.$ 类似处理第二项

(5) 的解

$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}}\,d\xi\,d\eta + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\,d\xi\,d\eta\right]$

$r^2 = (\xi-x_1)^2 + (\eta-x_2)^2$

定理2. (6)的任一特征曲面均由光线组成. 从而是直纹面

证: ∵ $\frac{d\varphi(x(s),t(s))}{ds} = \varphi_t(x(s),t(s))\frac{dt}{ds} + \nabla\varphi(x(s),t(s))\cdot\frac{dx(s)}{ds}$

$= \varphi_t^2(x(s),t(s)) - c^2|\nabla\varphi(x(s),t(s))|^2 = 0.$

∴ $\varphi(x,t)=k$ 是特征方程的一个首次积分. 从而若某光线有一点在特征曲面 $\varphi(x,t)=k_0$ 上. 则此光线必在此曲面上.

几何光学近似. (6) 高频振动解 $u(x,t)=e^{i\omega t}v(x)$　$\omega \gg 1$.

代入(6)有 $\Delta v(x) + \frac{\omega^2}{c^2}v = 0$. Helmholtz 方程.

取 $v(x) = e^{-i\omega\gamma(x)}\sum_{j=0} g_j(x)(i\omega)^{-j}$, 有

$\Delta v + \frac{\omega^2}{c^2}v = e^{-i\omega\gamma(x)}\{[-i\omega\Delta\gamma - \omega^2\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\gamma}{\partial x_k})^2 + \frac{\omega^2}{c^2}]\sum_{j=1} g_j(x)(i\omega)^{-j}$

$-2i\omega\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=0}\frac{\partial g_j}{\partial x_k}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}(i\omega)^{-j} + \sum_{j=0}\Delta g_j(i\omega)^{-j}\} = 0.$

比较 ω^{-j} 系数有 $\begin{cases} (\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\gamma}{\partial x_k})^2 - \frac{1}{c^2})g_0 = 0, \quad g_0 \neq 0 & j\geq 0. \\ 2\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\gamma}{\partial x_k}\frac{\partial g_j}{\partial x_k} + \Delta\gamma g_j - \Delta g_{j-1} - (\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial\gamma}{\partial x_k})^2 - \frac{1}{c^2})g_{j+1} = \end{cases}$

$\Rightarrow |\nabla\gamma| = \frac{1}{c} \Rightarrow$ 曲面 $\varphi(x,t) = t - \gamma(x) =$ 常数 为(6)的特征曲面族.

若 γ 给出则沿任一光线,成立 $\frac{2}{c^2}\frac{dg_j}{dt} + \Delta\gamma g_j = \Delta g_{j-1}$　$j\geq 0$.

若在 X 空间中与通过光线横截的一族超曲面上给定 g_j 值便可求解 g_j.

§8.4 高维热方程与 Schrödinger 方程.

热方程. (8) $\begin{cases} u_t = k\Delta u & x\in R^3, t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \in L^\infty(R^3)\cap C(R^3). \end{cases}$

热方程基本解 S 满足 $\begin{cases} S_t = k\Delta S. & x,y\in R^3. t>0. \\ \lim_{t\to 0} S(x,y,t) = \delta(x-y) = \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)\delta(x_3-y_3) \end{cases}$

一维热方程基本解 $S_j(x_j,y_j,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{|x_j-y_j|^2}{4t}}$

满足 $\begin{cases} \frac{\partial S_j}{\partial t} = k\frac{\partial^2 S_j}{\partial x_j^2} & j=1.2.3. \\ \lim_{t\to 0} S_j(x_j,y_j,t) = \delta(x_j-y_j) \end{cases}$

令 $\tilde{S}(x,y,t) = \prod_{j=1}^{3} S_j(x_j,y_j,t)$ 则 $\tilde{S}_t = \frac{\partial S_1}{\partial t}S_2S_3 + \frac{\partial S_2}{\partial t}S_1S_3 + \frac{\partial S_3}{\partial t}S_1S_2$

$= k\frac{\partial^2 S_1}{\partial x_1^2}S_2S_3 + k\frac{\partial^2 S_2}{\partial x_2^2}S_1S_3 + k\frac{\partial^2 S_3}{\partial x_3^2}S_1S_2 = k\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_j^2} = k\Delta\tilde{S}.$

而 $\lim_{t\to 0}\tilde{S} = \delta(x,y,t) \Longrightarrow S = \tilde{S}$.

(8) 解 $u(x,t) = S * \varphi = \int_{R^3} S(x,y,t)\varphi(y)dy = \frac{1}{(4\pi kt)^{3/2}}\int_{R^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy$

Schrödinger 方程 (9) $\begin{cases} -i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u & x\in R^3, t\in R. \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$

方程化为 $u_t = \frac{i}{2}\Delta u := k\Delta u$ 由上式知 (9) 解

$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi i t)^{3/2}}\int_{R^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{2it}}\varphi(y)dy$. $x\in R^3$. $t\in R$. 其中 $i^{\frac{1}{2}} = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$
$= e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Fourier 变换方法.

定义. 设 $f\in L^1(R^3)$ (即 $\int_{R^3}|f(x)|dx < +\infty$). f 的 Fourier 变换为
勒贝格可积.

$\mathcal{F}_f = \hat{f}(\xi) := \int_{R^3} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx$. $\xi\in R^3$.

Fourier 逆变换为 $\check{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^3} e^{ix\cdot\xi}f(x)dx$

重要性质: 1) 微分 $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\xi)$. $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

2) 卷积 $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$

$(f*g)(x) = \int_{R^3} f(x-y)g(y)dy = \int_{R^3} f(y)g(x-y)dy$

P235 3.7.9

P240 1.

$f.g.fg$ 可积 $f.g$ 在无穷远处速降为 0.

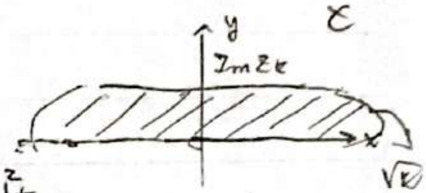
证. 由条件知. $e^{-ix\xi}f(x-y)g(y)$ 在 $R^3\times R^3$ 上可积.

由 Fubini 定理 $\widehat{f*g}(\xi) = \int_{R^3}(f*g)(x)e^{-ix\xi}dx = \int_{R^3}\int_{R^3} f(x-y)g(y)dye$
$= \int_{R^3} g(y)e^{-iy\xi}\int_{R^3} f(x-y)e^{-i(x-y)\xi}dxdy = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$.

3) $\check{\hat{f}} = f$.

OURSTORYBEGINS

对Schrödinger方程关于x作Fourier变换



中转化(1) $-i\frac{d\hat{u}}{dt}=\frac{1}{2}i^2|\xi|^2\hat{u}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt}+\frac{i}{2}|\xi|^2\hat{u}=0 \\ \hat{u}|_{t=0}=\hat{\varphi}(\xi) \end{cases} \Rightarrow \hat{u}=e^{-\frac{i}{2}|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\xi)$$

$\overset{(2)(3)}{\Longrightarrow}$ $u(x,t)=\left(e^{-\frac{i}{2}|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\xi)\right)^{\vee}=\varphi * g$. $\hat{g}(\xi)=e^{-\frac{i}{2}|\xi|^2 t}$

$(\frac{\pi}{2})^{\frac{1}{2}}$

$g=\left(e^{-\frac{i}{2}|\xi|^2 t}\right)^{\vee}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{R^3}e^{-\frac{i}{2}|\xi|^2 t+ix\cdot\xi}d\xi$

引理 $\mathrm{Re}\, a\geq 0$. $a\neq 0$时 $\int_{R^3}e^{ix\cdot\xi-a|\xi|^2/2}d\xi=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2}e^{-|x|^2/2a}$

$\mathrm{Re}\, a>0$. 左 $=\prod_{k=1}^{3}\int_R e^{ix_k\xi_k-a\xi_k^2/2}d\xi_k=\prod_{k=1}^{3}e^{-\frac{x_k^2}{2a}}\int_R e^{-a(\xi_k-\frac{ix_k}{a})^2/2}d\xi_k$

$\overset{z_k=\xi_k-\frac{ix_k}{a}}{=\!=\!=}e^{-\frac{|x|^2}{2a}}\prod_{k=1}^{3}\int_{\mathrm{Im}\, z_k=-\frac{\mathrm{Re}\, a}{|a|^2}x}e^{-az_k^2/2}dz_k$ $\overset{复变函数Cauchy定理(全平面解析)}{=\!=\!=}$ $e^{-\frac{|x|^2}{2a}}\prod_{k=1}^{3}\int_R e^{-az_k^2/2}dz_k$

$=\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{3/2}e^{-\frac{|x|^2}{2a}}$

$\mathrm{Re}\, a=0$. 考虑对 $\mathrm{Re}\, a>0$取极限

在引理中令$a=it$ $g=(2\pi i t)^{-3/2}e^{-\frac{|x|^2}{2it}}$ 用Fourier变换求解(8)

∴(9)解 $u(x,t)=\varphi * g$

一维谐振子 $-iu_t=u_{xx}-x^2u$, $x\in R$ $u\to 0\ (|x|\to+\infty)$

考虑分离解 $u=V(x)T(t)$ $\frac{-iT'}{T}=\frac{V''-x^2V}{V}=-\lambda\Rightarrow V''+(\lambda-x^2)V=0$

$|x|\to+\infty$时 有界解 $V(x)\sim e^{-\frac{x^2}{2}}$. 故只须求形如$V(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H(x)$的解

代入方程 $H''-2xH'+(\lambda-1)H=0$ "Hermite"方程.

考虑幂级数解 $H(x)=\sum_{k\geq 0}a_kx^k$, 易知 $(k+2)(k+1)a_{k+2}=(2k+1-\lambda)a_k$ $k\geq 0$.

$e^{-ix\xi}dx$

为使V有界. 此级数包含有限项. 其条件为 $\lambda=2k+1$ $k\geq 0$ H是k次多项式

此时波函数 $u(x,t)=H_k(x)e^{-\frac{x^2}{2}-i(2k+1)t}$

OURSTORYBEGINS

§8.6 有界区域上的定解问题

仅以高维热方程为例

$$(10)\begin{cases} u_t = k\Delta u & x\in D\subset R^n,\ t>0,\ n\geq 2. \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u|_{\partial D}=0 \end{cases}$$

考虑形如 $u=V(x)T(t)$ 的分离解. 有

$$\frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{\Delta V(x)}{V(x)}:=-\lambda. \Rightarrow \text{特征问题}\begin{cases}\Delta V+\lambda V=0 & x\in D \\ V|_{\partial D}=0.\end{cases}$$

与 S-L 定理类似成立

(1) 所有特征值 $\{\lambda_j\}$ 构成可数集 且 $0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\leq\lambda_j\nearrow+\infty$

(2) 相应特征函数系 $\{V_j(x)\}_{j\geq1}$ 构成 $L^2(D)$ 的完备正交基.

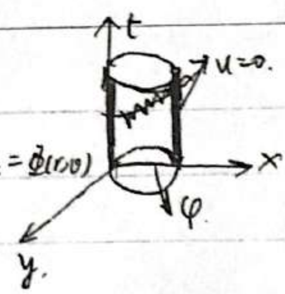
从而 (10) 形式解 $u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty} c_j V_j(x)e^{-\lambda_j kt}$.

代入初始条件 $\sum_{j=1}^{\infty} c_j V_j(x)=\varphi(x)$.

$$c_j=\frac{\langle\varphi,V_j(x)\rangle}{\|V_j\|^2}\quad \text{其中 } \langle f,g\rangle=\int_D f(x)g(x)dx \quad \|f\|^2=\langle f,f\rangle$$

例 圆柱体冷却问题.

$$\begin{cases} u_t=k\Delta_2 u \\ u|_{t=0}=\varphi(r\cos\theta,r\sin\theta):=\Phi(r,\theta) \\ u|_{r=a}=0 \end{cases}$$



$$u_t=k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right].$$

考虑分离解 $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ 代入方程 逐次分离.

$$T'+\lambda kT=0 \qquad \begin{cases}\Theta''+\mu\Theta=0 \\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi).\end{cases} \quad \mu_m=m^2\ \ m\geq0.$$

$T=Ce^{-\lambda kt}$. 特征函数 $\Theta_m(\theta)=\cos m\theta$ 或 $\sin m\theta$

$$\text{及 } (*)\begin{cases}\frac{1}{r}(rR')'+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0 & 0<r<a. \\ |R(0)|<+\infty \quad R(a)=0\end{cases}$$

由 S-L 定理知 $\lambda=w^2>0$. $w>0$. 令 $x=wr$, $y(x)=R\left(\frac{x}{w}\right)=R(r)$.

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0 & 0<x<wa \\ |y(0)|<+\infty,\ y(wa)=0\end{cases}\quad m\text{阶“Bessel 方程”}$$

通解 $y(x)=AJ_m(x)+BN_m(x)$ 由条件及 $N_m(x)\to(-\infty)$ $(x\to0)$ 知 $B=0$.

从而由 $J_m(wa)=0$ 的第 j 个正根 w_{mj} 知 (**) 的特征值 $\lambda_{mj}=w_{mj}^2$

特征函数 $y_{mj}(x)=R_{mj}(r)=J_m(w_{mj}\cdot r)$. 由 S-L 定理知 $\forall f(r)\in L^2_r[0,a]$

有广义 Fourier 展开. $f(r)=\sum_{j\geq1}\frac{\langle f(r),J_m(w_{mj}\cdot r)\rangle}{\underbrace{\|J_m(w_{mj}\cdot r)\|^2}_{\frac{a^2}{2}J_{m+1}^2(w_{mj}\cdot a)}}J_m(w_{mj}\cdot r)$.

形式解 $u(r,\theta,t)=\sum_{m\geq0}\sum_{j\geq1}(C_{mj}\cos\theta+D_{mj}\sin m\theta)J_m(w_{mj}\cdot r)e^{-kw_{mj}^2t}$.

代入条件确定 C_{mj}. D_{mj}.

P240 5. P241 7

热方程能量 $\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx$ 衰减

OURSTORYBEGINS

波动方程的能量守恒

$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0. \quad \Omega \times [0,+\infty)$

$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0. \quad \partial\Omega \times [0,+\infty)$

$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$

$$0 = \int_\Omega (u_{tt} - a^2 \Delta u) u_t \, dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 \, dx - a^2 \int_\Omega \Delta u \cdot u_t \, dx$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 dx \right) - a^2 \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} ds + \underbrace{a^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx}_{= \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx}$$

$\alpha = 0.\ u|_{\partial\Omega} = 0. \quad u_t|_{\partial\Omega} = 0$

$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + a^2 |\nabla u|^2 dx \right]}_{= E(t)}. \qquad E(t) \equiv E(0).$$

$\alpha \neq 0. \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\alpha} u$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dx \right] + \frac{a^2 \sigma}{\alpha} \underbrace{\int_{\partial\Omega} u u_t \, ds}_{= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} u^2 ds \right)}$$

$$= \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + |\nabla u|^2 dx + \frac{a^2 \sigma}{2\alpha} \int_{\partial\Omega} u^2 ds \right]}_{E(t)} \qquad E(t) \equiv E(0).$$

$Lu=f$. $L=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial}{\partial x_j}+c$.

定解条件 $\begin{cases} \text{初值条件}(\Omega)\ u|_{t=0}=\varphi(x) \quad u_t|_{t=0}=\psi(x) \\ \text{边界条件}(|_{\partial\Omega})\ D.\ N.\ R \end{cases}$

叠加原理 有限. $\boxed{\text{级数. 积分}}$

齐次化原理.

☆ 变量分离法 $X(x)\,T(t)$. $u_{tt}+u_{xx}=0$. $u_t+a^2u_{xx}=0$. → Sturm-Liouville定理.

$R(r)\,\Theta(\theta)$. $\Delta u=0$.

$$\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\theta}.$$

$$\Delta_3=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

唯一性. 能量法

Green公式. I: $\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}ds=\int_\Omega v\Delta u+\nabla u\nabla v\,dx$.

II: $\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}=\int_\Omega v\Delta u-u\Delta v\,dx$.

$u_{tt}=c^2u_{xx}=c^2\Delta u$.

波动方程 2种能量.

热方程. $\frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx$.

$u_t=\Delta u$.

调和函数 Dircelet原理. (D边界条件的解).

$A=\{u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar\Omega)\mid u|_{\partial\Omega}=f\}$.

$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{\partial\Omega}=f\end{cases}$ 解$u(x)$. $E(u)=\frac{1}{2}\int_D|\nabla u|^2dx$. $E(u)=\min\limits_{v\in A}E(v)$

唯一性的另一个方法. 最大值原理.

调和函数. (强)最大值原理.

热方程

其它方法.

①波动方程 D'Alembert公式

②把偏微分看作常微分方程求解.

Fourier 系数的求法.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_m: \int_\Omega f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx=\int_\Omega a_m \sin^2\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

$$=a_m\int_\Omega \sin^2\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx$$

偏微分方程知识总结

(参照教材[Walter. A. Strauss]及笔记整理).

(一) 调和函数、格林公式、格林函数.

(教材 Chapter 6、7. 笔记 §7).

(1) Laplace方程与调和函数. (2维/3维 $\Delta u = \nabla\cdot\nabla u$)

静态扩散、波动方程中 $u_t = 0$, $u_{tt} = 0$. $\Longrightarrow \Delta u = 0$.

- Laplace方程的解称为调和函数.
- 非齐次Laplace方程 $\Delta u = f$ 称为Poisson方程.
- 性质:

$\boxed{A}$ 最大值原理. (调和函数的性质)

D为连通有界开集. $u \in C^2(D) \cup C(\bar{D})$ u在D中调和. ① 则u的最大(小)值在边界取到 ($\max\limits_{\bar{D}} u = \max\limits_{\partial D} u$, $\min\limits_{\bar{D}} u = \min\limits_{\partial D} u$)

② 且若 $\exists x_0 \in D$ st: $u(x_0) = \max\limits_{\bar{D}} u$. 则 $u \equiv const$ in D) (强最大值原理)

$\Longrightarrow$ 可证 $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ u = h & \text{on } \partial D \end{cases}$ 解的唯一性.

$\boxed{B}$ 不变性 (under all rigid motions = 平移(显然). 旋转). (Laplace方程的性质).

旋转不变性:

$(x,y) \longrightarrow (x',y') \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j'^2} \quad (x_1, \cdots, x_n) \xrightarrow[\text{转}]{\text{旋}} (x_1', \cdots, x_n')$$

$\Longrightarrow$ Δ在极坐标下的形式:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$\Longrightarrow$ 特殊的调和函数(自身旋转不变). $(ru_r)_r$

2维: $u(r,\theta) = u(r)$. $0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r \Rightarrow u = c_1 \boxed{\ln r} + c_2$

3维: $u(r,\theta,\varphi) = u(r)$ $0 = \Delta u = (r^2 u_r)_r \Rightarrow u = -c_1 \boxed{r^{-1}} + c_2$

C 平均值原理（调和函数）

$D \subseteq R^n$ $u \in C^2(D)$ 则 $\Delta u = 0$ in D

$\Leftrightarrow$ $\forall B_r(x) \subset D$ ($\forall x$ in D) 成立：
$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{n w_n r^{n-1}} \displaystyle\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS(y) & \text{面平均} \\ u(x) = \dfrac{1}{w_n r^n} \displaystyle\int_{B_r(x)} u(y)\, dy & \text{体平均} \end{cases}$$

w_n: n维单位球体积

$w_n = \pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2}+1)$ $\quad n=2$ $w_n = \pi$ $\quad n=3$ $w_n = \frac{4}{3}\pi$.

D 可得出 $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$ $u \equiv 0$ 的另一方法：能量法。

能量：$\boxed{\int_D |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dS(x)}$

$$\int_D |\nabla u|^2 + u \Delta u \, dx = \int_D \nabla \cdot (u \nabla u)\, dx \xrightarrow{\text{Gauss}} \int_{\partial D} \underline{u} \frac{\partial u}{\partial n} dS(x)$$

(2) 特殊区域D上用分离变量法求解 $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ \text{BC} & (D.N.R) \end{cases}$

(rectangle and cube, circle, wedge, annuli)

exterior of a circle.

圆形区域(2维) Dirichlet 问题的解（Poisson 公式）$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0<r<a,\ 0<\theta<2\pi \\ u|_{r=a} = h(\theta) \end{cases}$

$$u(r,\theta) = \frac{(a^2-r^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\phi)}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2} d\phi.$$

另一种表达：

$$u(x) = \frac{a^2-|x|^2}{2\pi a} \int_{|x|=a} \frac{u(x')}{|x-x'|^2} \underline{ds(x')} \quad (= a\,d\phi)$$

$h(\phi) = u(x') \in C$ on ∂D. Poisson 公式给出唯一的调和函数（in $D \subseteq R^2$）满足：

$\lim_{x \to x_0} u(x) = h(x_0)$ $\quad \forall x_0 \in \partial D$.

OURSTORYBEGINS

√(2) 格林公式与格林函数.

[A] Green's 1 st:

$$\begin{cases}\int_D v\Delta u\,dx = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \int_D \nabla v\cdot\nabla u\,dx.\\ \int_D u\Delta v\,dx = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds - \int_D \nabla u\cdot\nabla v\,dx.\end{cases}$$

记号: (三维为例) $\mathrm{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$ (向量场) $= \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$

$\Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$

$|\nabla u|^2 = u_x^2+u_y^2+u_z^2$

散度定理: $\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\,dx = \iint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds.$

⇒ Dirichlet 原理. 对于边值问题(*) $\begin{cases}\Delta u=0 \text{ in } D\\ u=h(x) \text{ on } \partial D\end{cases}$:

令 $E[w] = \frac{1}{2}\int_D |\nabla w|^2 dx$

$\mathcal{A} := \{w\in C^2(\bar{D}) \mid w|_{\partial D} = h(x)\}$

则 $u\in C^2(\bar{D})$ 为(*)的解 $\Longleftrightarrow E[u] = \min_{w\in\mathcal{A}} E[w]$

⇒ 令 $v=1$ $\int_D \Delta u\,dx = \int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial n}ds$. 考虑(*) $\begin{cases}\Delta u = f(x) \text{ in } D\\ \frac{\partial u}{\partial n} = h(x) \text{ on } \partial D.\end{cases}$

⇒ $\int_D f\,dx = \int_{\partial D} h\,dS(x)$ (*)的解不具有唯一性 且(*)不适定.

[B] Green's 2 st:

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

Def. 边界条件对称(关于Δ): $\forall$ u. v 满足条件 $\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds = 0$

D. N. R 均对称.

⇒ 代表方程. $\Delta u=0$ in D 则对 $\forall x\in D$

$$\boxed{u(x_0) = \iint_{\partial D}\left(u(x)\frac{\partial V(x-x_0)}{\partial n} + V(x-x_0)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right)dS(x).} \quad (**)$$

$n=2$ $V(x-y) = V(y-x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|.$

$n\geq 3$. $V(x-y) = V(y-x) = -\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\cdot\frac{1}{n(n-2)\omega_n}$ $n=3$ $V(x-y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}$

$\Longrightarrow$ Green 函数的导出.

为研究 Direchlet 问题 $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } D. \\ u|_{\partial D} = h(x) \end{cases}$

修正 $V(y-x)$ 函数使得 (**) 中未知项 $\frac{\partial u(y)}{\partial n}$ 消失.

C Def：格林函数 $G(x)$ $(G(x,x_0))$ (关于 Δ. D 与 $x_0 \in D$.) 是 $\forall x \in D$ 上的函数满足：

(i) $x \neq x_0$: $G(x) \in C^2(D)$ 且 $\Delta G = 0$ in D.

(ii) $G(x)|_{\partial D} = 0$.

(iii) $G(x) - V(x-x_0)$ 在 D 上调和无奇点.

$G(x,x_0)$ 存在且唯一.

$\Longleftrightarrow$ $G(x,x_0) = V(x-x_0) + H(x,x_0)$, 其中 $\begin{cases} \Delta_x H(x,x_0) = 0 \text{ in } D \\ H|_{\partial D} = -V(x-x_0)|_{\partial D} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\partial D} \left(u(x) \frac{\partial H(x,x_0)}{\partial n} - H(x,x_0) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) dS(x)$$

$$\Rightarrow \quad u(x_0) = \int_{\partial D} \left[u(x) \frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n} - G(x,x_0) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] dS(x).$$

$$= \int_{\partial D} \underbrace{h(x)}_{BC} \frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n} dS(x).$$

格林函数的性质：

① $\int_{\partial D} \frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n} dS(x) = 1$.

② $V(x-x_0) < G(x,x_0) < 0$. $\forall x \in D$ $x \neq x_0$.

③ $G(x,x_0) = G(x_0,x)$. $\forall x. x_0 \in D$. $x \neq x_0$.

D $\begin{cases} \Delta u = f \text{ in } D \\ u|_{\partial D} = h. \end{cases}$ $\quad u(x_0) = \int_{\partial D} h(x) \frac{G(x,x_0)}{\partial n} dS + \int_D f(x) G(x,x_0) dx.$

(3) 格林函数的运用.

半空间：$G(x,x_0) = -\frac{1}{4\pi|x-x_0|} + \frac{1}{4\pi|x-x_0^*|}$.

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial D} = -\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z+z_0}{|x-x_0^*|^3} - \frac{z-z_0}{|x-x_0|^3}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{|x-x_0|^3}$$

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\iint_{R^2}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z_0)^2]^{-3/2}h(x,y)\,dx\,dy.$$

球面. $x_0^* = \frac{a^2 x_0}{|x_0|^2}$.

$$G(x,x_0) = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho^*}\cdot\frac{a}{|x_0|},\ \rho = |x-x_0|,\quad \rho^* = |x-x_0^*|$$

$$= -\frac{1}{4\pi|x-x_0|} + \frac{1}{4\pi\left|\frac{r_0}{a}x - \frac{a}{r_0}x_0\right|} \qquad r_0 = |x_0|. \quad (x_0 \neq 0)$$

$$G(x,0) = -\frac{1}{4\pi|x|} + \frac{1}{4\pi a}.$$

$$\frac{\partial G(x,x_0)}{\partial n} = \nabla_x G(x,x_0)\cdot\vec{n} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{a}\Big|_{\partial D}\ (|\vec{x}|=a).$$

$$\nabla G = \frac{x-x_0}{4\pi\rho^3} - \frac{a}{r_0}\frac{x-x_0^*}{4\pi\rho^{*3}} \qquad \rho^* = \frac{a}{r_0}\cdot\rho.$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho^3}\left[x - x_0 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 x + x_0\right].$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{x}{a}\cdot\nabla G = \frac{a^2-r_0^2}{4\pi a\rho^3}$$

$$\therefore\ u(\vec{x}_0) = \frac{a^2-|\vec{x}_0|^2}{4\pi a}\int_{|x|=a}\frac{h(x)}{|x-x_0|^3}\,dS(x).$$ 三维Poisson公式,

(二) 波与扩散

(1) 全直线上的波动方程. 热方程.

① 波动方程 $u_{tt}=c^2u_{xx}$

初值问题 $\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & -\infty<x<+\infty \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

d'Alembert 公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds.$$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{确定区域: 影响区域} \\ \text{依赖区间.} \end{cases}$

假设 $\phi.\ \psi$ 有紧支集 $|x|\le R$. $u(x,t).\ u_t(x,t)$ 在 $|x|>R+ct$ 外为 0.

$\Rightarrow$ 能量. $E(t)=\frac{1}{2}\int_R(u_t^2+c^2u_x^2)dx.$ 方程 $\rho u_{tt}=Tu_{xx}.$

$KE=\underline{\frac{1}{2}\rho\int u_t^2dx.}$

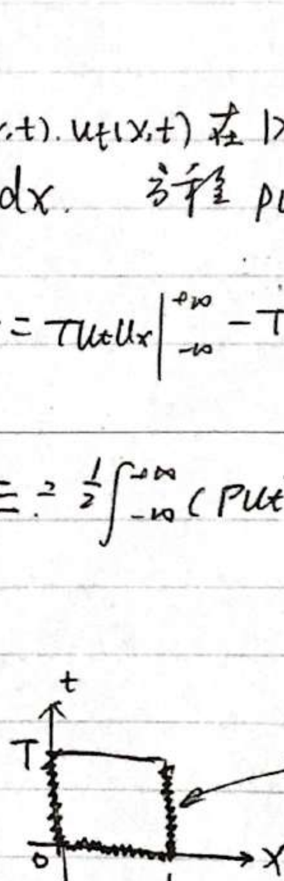
$\frac{dKE}{dt}=\rho\int u_tu_{tt}dx=T\int u_tu_{xx}dx=Tu_tu_x\Big|_{-\infty}^{+\infty}-T\int u_{tx}u_xdx.$

$\Rightarrow\ \frac{dKE}{dt}=-\frac{d}{dt}\int\frac{1}{2}Tu_x^2\,dx.$

令 $PE=\underline{\frac{1}{2}T\int u_x^2dx.}$ $E=PE+KE=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho u_t^2+Tu_x^2)dx$

$\frac{dE(t)}{dt}=0.$ 能量守恒.

② 热方程 $u_t=ku_{xx}.$



$Q_T=(0,l)\times(0,T]$

$\Gamma_T=\bar{Q}_T/Q_T.$

$\boxed{A}$ 最大值原理. (弱形式).

$u_t=ku_{xx}.\ (0\le x\le l.\ 0\le t\le T.)$

$u(x,t)$ 满足: $\max\limits_{\bar{Q}_T}u=\max\limits_{\Gamma_T}u$ (min 同理)

$\Downarrow$

$\boxed{B}$ 唯一性 $\begin{cases} u_t-ku_{xx}=f(x,t) & 0<x<l.\ t>0. \\ \text{(*) IC}\quad u|_{t=0}=\varphi(x). \\ \text{BC}\quad u|_{x=0}=g(t) & u|_{x=l}=h(t). \end{cases}$

$\Downarrow$

$\boxed{C}$ 证明唯一性的另一方法 "能量法" $w=u_1-u_2$

$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l w^2(x,t)dx.$ $\frac{dE(t)}{dt}\le 0.$

四 稳定性:

(3) $f=g=h=0$. u_1, u_2 分别为初值 φ_1, φ_2 的解
则方程在 (sup|·|) 及 L^2 模下稳定.
适定性: a. 存在 b. 唯一 c. 稳定.

五 初值问题 (全直线)

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & (-\infty < x < \infty, \ \underline{0 < t < \infty}) \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{IC} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\,\phi(y)\,dy.$$

$$S(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \quad (t>0).$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, \phi(y)\,dy.$$

(2) 反射问题：半直线上的波动方程、热方程 ✓

$\boxed{A}$ 波动：

DE：$V_{tt}-c^2V_{xx}=0$ $\quad 0<x<+\infty \quad -\infty<t<+\infty$

IC：$V(x,0)=\phi(x) \quad V_t(x,0)=\psi(x) \quad 0<x<+\infty$

BC：$\begin{cases} V(0,t)=0 & ① \\ V_x(0,t)=0 & ② \end{cases} \quad -\infty<t<+\infty$

① $x>c|t|$ $\quad V(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy$

$0<x<c|t|$ $(t>0)$ $\quad V(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)-\phi(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(y)dy+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}-\psi(-y)dy$

$=\frac{1}{2}[\phi(ct+x)-\phi(ct-x)]+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(y)dy$

② $x>ct$ $\quad V(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)dy$

$0<x<ct$ $\quad V(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(ct+x)+\phi(ct-x)]+\frac{1}{2c}[\int_0^{x+ct}\psi(y)dy+\int_{x-ct}^{0}\psi(-y)dy]$

$=\frac{1}{2}[\phi(ct+x)+\phi(ct-x)]+\frac{1}{2c}[\int_0^{x+ct}\psi(y)dy+\int_0^{ct-x}\psi(y)dy]$

$\boxed{B}$ 热方程同理

$u(x,t)=\int_0^{\infty}S(x-y,t)\phi(y)dy-\int_{-\infty}^{0}S(x-y,t)\phi(-y)dy$

$=\int_0^{\infty}[S(x-y,t)-S(x+y,t)]\phi(y)dy$

$u(x,t)=\int_0^{\infty}S(x-y,t)\phi(y)dy+\int_{-\infty}^{0}S(x-y,t)\phi(-y)dy$

$=\int_0^{\infty}[S(x-y,t)+S(x+y,t)]\phi(y)dy$

(3) 源问题：半直线源问题 ✓

$\boxed{A}$ Duhamel 原理

$\mathcal{L}$ 对 x 与 t 的线性微分算子 且关于 t 的最高阶导数 $\leq m-1$

$\begin{cases} DE: \frac{\partial^m w}{\partial t^m}=\mathcal{L}w+f(x,t) & x\in R^n \; t>0 \\ IC: w|_{t=0}=\cdots=\frac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=0}=0 & x\in R^n \end{cases}$

则 $w=\int_0^t z(x,t-\tau)d\tau$

$z(x,t-\tau)$ 满足：$\begin{cases} \frac{\partial^m z}{\partial t^m}=\mathcal{L}z \\ z|_{t=\tau}=\cdots=\frac{\partial^{m-2}z}{\partial t^{m-2}}\Big|_{t=\tau}=0 \quad \frac{\partial^{m-1}z}{\partial t^{m-1}}\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$

OURSTORYBEGINS

方程 边界条件均非齐次的半直线问题

B. 边界齐次化. (叠加原理 + Duhamel 原理). 延拓法.

C 源问题 $\begin{cases} \text{DE: } u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t) & -\infty<x<+\infty,\ t>0. \\ \text{IC: } u|_{t=0}=\varphi(x) \quad u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$

在有限时间T内 是适定的

存在 唯一 连续

D 波动方程的半直线源问题

$$\begin{cases} v_{tt}-c^2v_{xx}=f(x,t) & 0<x<+\infty,\ t>0. \\ v(x,0)=\phi(x) \quad v_t(x,0)=\psi(x) \\ v(0,t)=h(t). \quad BC \end{cases}$$

$x>ct$ 时 BC 不起作用.

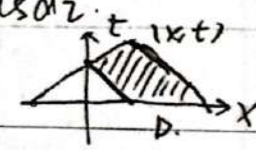
$$v(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

☆

$x<ct$ 时

$$v(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds+\frac{1}{2c}\boxed{\iint_{D}}f(s,\tau)\,ds\,d\tau$$

$$\boxed{+\ h\left(t-\frac{x}{c}\right)}$$ ☆



(3) 热方程的正则性

(三) 边值问题 ✓

分离变量法求解. 方程: $u_{tt}=c^2u_{xx}$ $0<x<l$

IC: $u(x,0)=\varphi(x)$. $u_t(x,0)=\psi(x)$.

(1) Dirichlet 边界

[A] $u(0,t)=u(l,t)=0$ (齐次)

令 $u(x,t)=T(t)X(x)$ $\Rightarrow \frac{T''}{c^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$.

$\lambda=0 \Leftrightarrow X'(0)=X'(l)=0$

$[k(x)X'(x)]'+\lambda\rho(x)X(x)=0$

$\Rightarrow$ 特征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$

SL定理: $\lambda\geq 0$ $\lambda_n=w_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $n\geq1$ $\Rightarrow$ 代入解 $T_n(t)$

$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$ (特征函数)

$\therefore u(x,t)=\sum_{n\geq1}^{\infty}X_n(x)\cdot T_n(t)$ (含 C_n. D_n 待定) $T_n(t)=C_n\cos(\sqrt{\lambda_n}ct)+D_n\sin(\sqrt{\lambda_n}ct)$

代入 IC. 求解 C_n. D_n (Fourier 展开).

[B] $\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+\underbrace{f(x,t)}_{\text{(非齐次)}} \quad \text{IC } u(x,0)=\varphi(x).\ u_t(x,0)=\psi(x). \\ \text{BC } u(0,t)=g(t) \quad u(l,t)=h(t) \text{ (非齐次)}. \end{cases}$

边界齐次化. $p(x,t)=(1-\frac{x}{l})g(t)+\frac{x}{l}h(t)$

再用叠加原理 $u=p+q$ q: 满足的边界条件齐次.

再令 $q=v+w$. v: 方程. 边界条件齐次 可变量分离

w: 既用齐次化原理, 且满足齐次边界条件 (初始条件非齐次).

$\Rightarrow \int_0^t z(x,t,\tau)d\tau$. 对 z 附加齐次边界

[C] 热方程: $\begin{cases} u_t=ku_{xx} \quad 0<x<l \quad t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u(0,t)=u(l,t)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=:-\lambda$. $\lambda_n=w_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$. $n\geq1$.

$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n\geq1}X_n(x)T_n(t)$

(2) Neumann 边界

$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(l)=0. \end{cases} \xrightarrow{S.L.} \lambda\geq0$ $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n\geq0)$

$\boxed{A}$ $(k=1)$

对于热方程
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<l \quad t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0 \end{cases}$$
$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n t}$ $(n\geq 0)$.

$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n\geq 0} C_n e^{-\lambda_n t} \cos\frac{n\pi x}{l}$

$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} C_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x)$. $C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$. $(n\geq 1)$

$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx$.

$\boxed{B}$ 波动方程

$n=0$, $T_n''(t) = 0 \Rightarrow T_n(t) = A + Bt$

$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n\geq 1} T_n(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}$.

(3) 混合型边界.

D+N. D+R.

---

(4) Robin 边界 ☆

$$\begin{cases} X' - a_0 X = 0 & x=0 \\ X' + a_l X = 0 & x=l \end{cases}$$

$a_0>0$ $a_l>0$ radiation

$a_0<0$ $a_l<0$ absorption

$a_0 = a_l = 0$ insulation

$\boxed{A}$ $\lambda>0$ 设 $\lambda=\beta^2$.

$\Rightarrow (\beta^2 - a_0 a_l)\tan\beta l = (a_0+a_l)\beta$. 或 $\boxed{\cos\beta l = 0 \text{ 且 } \beta = \sqrt{a_0 a_l}}$

对应 $X(x) = C(\cos\beta x + \frac{a_0}{\beta}\sin\beta x)$ $(\forall C\neq 0)$

$\beta\neq\sqrt{a_0 a_l}$ 时: $\tan\beta l = \frac{(a_0+a_l)\beta}{\beta^2 - a_0 a_l}$.

Case 1. $\underset{(r)}{a_0>0}$ $\underset{(r)}{a_l>0}$. $(n\frac{\pi}{l})^2 < \lambda_n < [(n+1)\frac{\pi}{l}]^2$. $\lim_{n\to\infty}\beta_n = n\frac{\pi}{l}$. $(n\geq 0)$.

Case 2: $\underset{(a)}{a_0<0}$ $\underset{(r)}{a_l>0}$, $\underset{(a<r)}{a_0+a_l>0}$. 1个负数或 $(n\geq 0$ 或 $n\geq 1)$

$n\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{a_0+a_l}{a_0 a_l} > l \Leftrightarrow a_0+a_l > -a_0 a_l l$ Other Case much more r than a

$\boxed{B}$ $\lambda=0$ $\Leftrightarrow$ $a_0+a_l = -a_0 a_l l$ $a_0 \cdot a_l$ 异号且 $l = -\frac{a_0+a_l}{a_0 a_l}$

$\boxed{C}$ $\lambda<0$ $=-\gamma^2$ $\tanh\gamma l = -\frac{(a_0+a_l)\gamma}{\gamma^2+a_0 a_l}$

$X(x) = \cosh\gamma x + \frac{a_0}{\gamma}\sinh\gamma x$.

Case1: $a_0>0$. $a_l>0$ 无根.

Case2: $a_0<0$ $a_l>0$ 且 $a_0+a_l>0$

$\Rightarrow$ $a_0+a_l<-a_0a_l l$ $\Leftrightarrow$ 有1个非正特征值.

Case 1: 只有实正特征值

Case 2: $\begin{cases} a_0+a_l>-a_0a_l\cdot l & \lambda_n>0 \ (n\geq 0) \\ a_0+a_l=-a_0a_l\cdot l & \lambda_0=0 \quad \lambda_n>0 \ (n\geq 1) \\ a_0+a_l<-a_0a_l\cdot l & \lambda_0<0 \quad \lambda_n>0 \ (n\geq 1) \end{cases}$

(5) 一般化问题.(非齐次方程)

DE. $\mathcal{L}_t u+\mathcal{L}_x u=f(x,t)$ $a<x<b$. $t>0$. ($\mathcal{L}_t$ 为二阶线性微分算子)

IC: $u|_{t=0}=\varphi(x)$ $u_t|_{t=0}=\psi(x)$

BC: $\left(\alpha_1 u-\beta_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=a}=g_1(t)$ $\left(\alpha_2 u-\beta_2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=b}=g_2(t)$

---

① 边界齐次化.(找 u 满足 BC 的特解).

设 $h(x,t)=A(t)x+B(t)$ 求解 $A(t)$. $B(t)$

若无解 设 h 为 x 的二次函数

② $u=h+v$ (*) $\begin{cases} \mathcal{L}_t v+\mathcal{L}_x v=\tilde{f}(x,t) \\ v|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x) \quad u_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(x) \\ \text{边界条件齐次.} \end{cases}$

③ 分离变量. 对(*)对应的齐次问题 ($\mathcal{L}_t v+\mathcal{L}_x v=0$, 齐次边界). 求特征值 特征函数.

$\{\lambda_n\}$. $\{X_n(x)\}$.

④ 广义 Fourier 展开 $\tilde{f}\cdot\tilde{\varphi}\cdot\tilde{\psi}$ $\tilde{f}=\sum_n f_n(t)X_n(x)$. $\tilde{\varphi}=\sum_n\varphi_n X_n(x)$ $\tilde{\psi}=\sum_n\psi_n X_n(x)$

设 $v=\sum_n X_n(x)\cdot T_n(t)$

⑤ 代入(*) $\begin{cases} \mathcal{L}_t T_n(t)+\lambda_n T_n(t)=f_n(t) \\ T_n(0)=\varphi_n. \quad T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$ $\Rightarrow T_n(t)$.

(四) 高维波动方程

$\boxed{A}$ 唯一性定理

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=f(x,t) & x\in R^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$ 有唯一解

$\Longleftrightarrow$ $$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0 \\ u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0\ (IC) \end{cases}$$ 只有零解（齐次IC下的解）

① 证明思路与一维波动方程下类似，$\forall$ 固定的 (x_0,t_0)

取特征锥 $C=\{(x,t)\in R^4 \mid |x-x_0|\le c(t_0-t),\ 0<t\le t_0\}$.

定义能量 $E(t)=\frac{1}{2}\int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)}(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx$. 则 $\frac{dE(t)}{dt}\le 0$. $E(0)=0$.
$\Rightarrow E(t)=0$

$\Rightarrow u\equiv 0$.

②关于能量

$$0=\int_\Omega(u_{tt}-c^2\Delta u)u_t\,dx=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2dx-c^2\int_\Omega\Delta u\,u_t\,dx$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2\,dx\right)-c^2\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial n}dS(x)+c^2\int_\Omega\nabla u_t\cdot\nabla u\,dx$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx\right]-c^2\int_{\partial\Omega}u_t\frac{\partial u}{\partial n}dS(x).$$

设边界条件为 $a\frac{\partial u}{\partial n}+bu=0$. on $\partial\Omega$.

$a\ne 0\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{b}{a}u$

$$0=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx\right]+\underbrace{\frac{c^2b}{a}\int_{\partial\Omega}u_tu\,dS(x)}_{=\frac{c^2b}{2a}\frac{d}{dt}\int_{\partial\Omega}u^2dS}$$

$$0=\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega(u_t^2+c^2|\nabla u|^2)dx+\frac{c^2b}{2a}\int_{\partial\Omega}u^2dS}_{E(t)\text{ 守恒}}\Big].$$

若给定BC:

则 N: $E_N(t)$

R: $E_R(t)$

$\boxed{B}$ 齐次波动方程初值问题的解

① $n=3$

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0 & x\in R^3,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) & u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\psi(y)\,dS(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\phi(y)\,dS(y)\right]$$

② $n=2$

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi c}\iint_{\underbrace{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)}_{\text{圆面}}}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-(\xi-x_1)^2-(\eta-x_2)^2}}d\xi\,d\eta+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c}\iint_{\Sigma}\frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2-(\xi-x_1)^2-(\eta-x_2)^2}}d\xi\,d\eta\right]$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi c}\left[\iint_{|y-x|\le ct}\frac{\psi(y)}{\sqrt{(ct)^2-|y-x|^2}}dy+\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|y-x|\le ct}\frac{\phi(y)}{\sqrt{(ct)^2-|y-x|^2}}dy\right.$$

C 非齐次高维波动方程

$n=3$

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\psi(y)\,dS(y)+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\partial B_{ct}(x)}\phi(y)\,dS(y)\right]$$

$$+\frac{1}{4\pi c^2}\int_{\underbrace{|y-x|\le ct}_{B_{ct}(x)}}\frac{f\left(y,t-\frac{|y-x|}{c}\right)}{|y-x|}dy.$$

D 高维热方程 $u_t=k\Delta u$

一维热方程基本解 $S(x-y,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}$

二维 $S(x,y,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$

三维 $S(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$