第一章 线性方程组的解法

Date. . .

· 两方程组等价 （系数性质？ 全不为0）

方程组(1)与方程组(2)互为线性组合，且解集合相同

· 数域 (number field)

F为复数集合的子集，包含0,1，并且在+、-、×、÷（不含÷0）下封闭，则称F为数域

(ps: 所有数域都包含有理数域)

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & b_m \end{pmatrix}$$

· 定理 1.3.1

若齐次线性方程组未知数个数 > 方程个数，则齐次方程组有非零解，从而有无穷多解

§1 第一章 定义与运算 多项式 (polynomials)

定义1 用$\mathbb{C}$表示复数域 $F\subset\mathbb{C}$称为数域

(1) F至少含两元素 $0,1$

(2) F在四则运算下封闭

数域可有无限多 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+\sqrt{2}b \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

最小数域为有理数集

定义2 设F为数域，x-未知，n-非负整数 $a_0,a_1,\dots a_n\in F$

称形如 $a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$

的式子为多项式，记为$f(x)$ a_nx^n为首项

n称为多项式次数，记为$\deg(f(x))$，0为特殊多项式，次数$-\infty$

运算

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x_1+a_0$

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x_1+b_0$ 体现结合律

乘法 $f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k$

$F[x]$ - 对加、乘封闭 - 环 - 一元多项式环

性质

？怎么出性质

· $f(x)g(x)=0 \Rightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=0$ 除转为多项式

$f(x)h(x)=h(x)g(x)$ - - $h(x)\neq 0 \Rightarrow f(x)=g(x)$ $(f(x)-g(x))h(x)=0$

最高次决定deg

· $\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))$

自洽性： 令$g(x)=0$ $\deg(0)=\deg(f(x))+\deg(0)$

§2 整除与最大公因子

定义1 $f(x), g(x) \in F[x]$ 如果存在 $q(x) \in F[x]$ s.t. $f(x) = g(x)q(x)$ 称 $g(x)$ 整除 $f(x)$

记为 $g(x) | f(x)$ 也称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因子，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式

定理1 整除性质

1. $h(x) | g(x)$ $g(x) | f(x)$ $\rightarrow h(x) | f(x)$

2. $g(x) | f_1(x)$, $g(x) | f_2(x)$ $\Rightarrow g(x) | h_1(x) f_1(x) + h_2(x) f_2(x)$ $h_1(x), h_2(x) \in F[x]$

3. $f(x) | g(x)$, $g(x) | f(x)$ $\Rightarrow \exists \lambda \neq 0 \in F$ s.t. $f(x) = \lambda g(x)$

定理2 $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$ 则存在唯一多项式 $q(x), r(x) \in F[x]$ s.t.

$f(x) = q(x) g(x) + r(x)$ 其中 $\deg(r(x)) < \deg(g)$ 带余除法

比g小

$q(x)$ - 商 (quotient) $r(x)$ - 余式 (remainder)

$Quo(f, g, x)$ $Rem(f, g, x)$

证明 先证唯一性

$f(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x) = q_2(x) g(x) + r_2(x)$

$\therefore (q_1 - q_2) g = r_2 - r_1$

又 $\deg(q_1 - q_2) + \deg(g) = \deg(r_2 - r_1)$

再证 存在性 (归纳法) - 算法

$\deg(f) = n$

假设 对 $\deg(f) < n$ 结论成立

对 $\deg(f) = n$ $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

不妨设 $n \geq m$ $g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

$f - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g(x) = f_1(x)$ $\deg(f_1) < \deg(f) = n$

由归纳假设 存在 $q_1(x)$ $r_1(x) \in F[x]$

s.t. $f_1(x) = q_1(x) g(x) + r_1(x)$

$f = (\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + q_1(x)) g(x) + r_1(x)$ …… 原理同大除法

推论1 $g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow$ 余数 $\underline{Rem}(f,g,x)=0$

推论2 $a\in F$ $f(x)\in F[x]$ 则存在 $g(x)\in F[x]$

st. $f(x)=g(x)(x-a)+f(a)$ 常数 $\quad (f(x)$ 带a $\Rightarrow r(a)=f(a)$ 类Taylor展开性质 $f(x)=g(x)(x-a)+r(x))$

推论3 $a\in F$ $f(x)\in F[x]$ 若 $x-a \mid f(x) \Leftrightarrow f(a)=0$

定义2 $f(x), g(x), h(x), d(x)\in F[x]$，若 $h(x)\mid g(x)$, $h(x)\mid f(x)$ 则 $h(x)$ 为 g、f 的公因式。若对 f 与 g 的任意公因式都有 $h(x)\mid d(x)$，d(x)为f,g公因式 则称 $d(x)$ 为 g、f 最大公因子 (greatest common devisor) — GCD

$d(x)=GCD(f(x),g(x))$

2018.9.5

· 两种特殊情况的定义

- $gcd(0,0)=0$, $gcd(f(x),0)=f(x)$
- 多项式中最大公因式必为首一多项式

定理3 两个非零多项式的最大公因式存在唯一

证：(唯一性)

假设 $d_1(x), d_2(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

逻辑式 $d_1(x)\mid d_2(x)$ $\quad d_2(x)\mid d_1(x) \Rightarrow d_2(x)=\lambda d_1(x)$ $(\lambda\neq 0)$ $(\Rightarrow \lambda=1)$

构造式 (存在性)

Euclidean algorithm (辗转相除) — 带余除法简化问题

$gcd(f,g)=gcd(g,r)=gcd(r,r_1)\ldots$

证：$d(x)=gcd(f,g)$

$f=qg+r$ $\quad r=f-qg$ $\quad d\mid f, d\mid g \Rightarrow d\mid r \Rightarrow d\mid gcd(g,r)$

· 若算得常数，则最大公因子必为常数

定义3 $f(x), g(x) \in F[x]$，若 $\gcd(f,g)=1$，称 f 与 g 互素 (relatively prime)

最大gcd可写为组合形式　　　　⇓ Euclid 构造即得

定理4 $f(x), g(x) \in F[x]$，$d(x)=\gcd(f,g)$ 则存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ s.t.

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

证 $r_k(x)=d(x)$ 要证 $r_i(x)=u_i(x)f(x)+v_i(x)g(x)$　$i=0,1,\dots,k$

$$\begin{cases} f(x)=q(x)g(x)+r(x) \\ g(x)=q_1(x)r(x)+r_1(x) \\ r(x)=r_2(x)\cdot q_2(x)+r_3(x) \end{cases}$$

$\cdots$

$r(x)=r_0(x)=f(x)-q(x)g(x)$

$r_1(x)=g(x)-q_2(x)r_0(x)=-q_1(x)f(x)+(1+q_1(x)q(x))g(x)=\dots$

「计算应用」反推代入

　　　　　　　　　　　　　　理想

$\cdot\, S=\{u(x)f(x)+v(x)g(x) \mid u(x), v(x) \in F[x]\} \subset F[x]$

$=\langle d(x)\rangle=\{d(x)h(x) \mid h(x) \in F[x]\}$

　　　　由最大公因式×任意多项式组成

推论4 $f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists\, u(x), v(x) \in F[x]$ s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x)=1$　$(u-u_0)f(x)=(v_0-v)g(x)$　作差，分析染法因子

$\Rightarrow f \mid v-v_0$　$g \mid u-u_0$ ～

定理5 互素多项式的性质 因为是⇔充要条件，性质很好

(1) $\gcd(f,g)=1$　$\gcd(f,h)=1 \Rightarrow \gcd(f,gh)=1$

证: $\gcd(f,g)=1 \Rightarrow \exists\, u,v \in F[x]$ s.t. $uf+vg=1$

$\Rightarrow ufh+vgh=h$　$d=\gcd(f,gh)$

$d \mid f$, $d \mid gh \Rightarrow d \mid \gcd(f,h)=1$　$d=1$

推论1　$g(x)\mid f(x) \Leftrightarrow \underset{余数}{Rem}(f,g)(x)=0$

推论2　$a\in F$　$f(x)\in F[x]$　则存在 $g(x)\in F[x]$

s.t. $f(x)=g(x)(x-a)+f(a)$　常数　　($f(x)$ 带a $\Rightarrow r(a)=f(a)$　类Taylor展开性质 $f(x)=g(x)(x-a)+r(x)$)

推论3　$a\in F$　$f(x)\in F[x]$　若 $x-a\mid f(x) \Leftrightarrow f(a)=0$

定义2　$f(x), g(x), h(x), d(x)\in F[x]$，若 $h(x)\mid g(x)$，$h(x)\mid f(x)$　则 $h(x)$ 为 g、f 的公因式。若对 f 与 g 的任意公因式都有 $h(x)\mid d(x)$，（$d(x)$为f,g公因式）则称 $d(x)$ 为 g、f 最大公因子（greatest common devisor）—GCD

$d(x)=GCD(f(x),g(x))$

2018.9.5

· 两种特殊情况的定义

- $gcd(0,0)=0$，$gcd(f(x),0)=f(x)$
- 多项式中最大公因式必为首一多项式

定理3　两个非零多项式的最大公因式存在唯一

证：（唯一性）

假设 $d_1(x), d_2(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式

逻辑式　$d_1(x)\mid d_2(x)$　$d_2(x)\mid d_1(x) \Rightarrow d_2(x)=\lambda d_1(x)$　$(\lambda\neq 0)$　$(\Rightarrow \lambda=1)$

构造式（存在性）

Euclidean algorithm（辗转相除）—带余除法简化问题

$gcd(f,g)=gcd(g,r)=gcd(r,r_1)\ldots$

证：$d(x)=gcd(f,g)$

$f=gq+r$　$r=f-gq$　$d\mid f$，$d\mid g \Rightarrow d\mid r \Rightarrow d\mid gcd(g,r)$

· 若算得常数，则最大公因子必为常数

定义3 $f(x), g(x) \in F[x]$，若 $\gcd(f,g)=1$，称 f 与 g 互素 (relatively prime)

最大gcd可写为组合形式 ⇐ Euclid 检法即得

定理4 $f(x), g(x) \in F[x]$, $d(x)=\gcd(f,g)$ 则存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ s.t.

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

证 $r_k(x)=d(x)$ 要证 $r_i(x)=u_i(x)f(x)+v_i(x)g(x)$ $i=0,1,\dots,k$

$$\begin{cases} f(x)=q(x)g(x)+r(x) \\ g(x)=q_1(x)r(x)+r_1(x) \\ r(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x) \end{cases}$$

$\dots$

$r(x)=r_0(x)=f(x)-q(x)g(x)$

$r_1(x)=g(x)-q_1(x)r_0(x)=-q_1(x)f(x)+(1+q_1(x)q(x))g(x)=\dots$

「计算应用」反推代入

理想

$\cdot\ S=\{u(x)f(x)+v(x)g(x) \mid u(x),v(x)\in F[x]\} \subset F[x]$

$=\langle d(x)\rangle=\{d(x)h(x) \mid h(x)\in F[x]\}$

由最大公因式 × 任意多项式组成

推论4 $f(x), g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists\, u(x), v(x) \in F[x]$ s.t. $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

$u_0(x)f(x)+v_0(x)g(x)=1$ $(u-u_0)f(x)=(v_0-v)g(x)$ 作差，分析其余因子

$\Rightarrow f \mid v-v_0$ $g \mid u-u_0$

定理5 互素多项式的性质 因为是⇔ 充要条件，性质很好

(1) $\gcd(f,g)=1$ $\gcd(f,h)=1 \Rightarrow \gcd(f,gh)=1$

证: $\gcd(f,g)=1 \Rightarrow \exists\, u,v\in F[x]$ s.t. $uf+vg=1$

$\Rightarrow ufh+vgh=h$ $d=\gcd(f,gh)$

$d\mid f,\ d\mid gh \Rightarrow d\mid\gcd(f,h)=1$ $d=1$

↑ 成为含f项±含h(加g项)

(2) $\gcd(f,g)=1$, $f\mid gh \Rightarrow f\mid h$

证 $\exists u,v$. s.t. $uf+vg=1 \Rightarrow \underset{f}{\underline{ufh+vgh}}=h \Rightarrow f\mid h$

(3) $f\mid h$, $g\mid h$, $\gcd(f,h)=1 \Rightarrow fg\mid h$

$h=d_1f=d_2g$ …… 假设因子 $\Rightarrow f\mid d_2g \Rightarrow f\mid d_2 \Rightarrow d_2=\underline{d_3f}$ 因子设

$\therefore h=d_2g=d_3fg \Rightarrow fg\mid h$

- -

$\Rightarrow$ ~~$-v_0-v=-hf$~~ $\Rightarrow \begin{cases} v=v_0+hf \\ u=u_0-hg \end{cases}$ $h\in F[x]$ $\begin{cases} \deg(v_0)<\deg(f) \\ \deg(u_0)<\deg(g) \end{cases}$

- -

例4 求多项式 $u(x)$, $v(x)$ st. $x^m u(x)+(1-x)^n v(x)=1$

解: $\gcd(x^m,(1-x)^n)=1$ $\deg(u)<n$ $\deg(v)<m$ (唯一 最简)

待定系数法: $u(x)=\sum_{i=0}^{n-1}u_ix^i$ $v(x)=\sum_{i=0}^{m-1}v_ix^i$

Taylor

$u(x)=x^{-m}(1-(1-x)^n v(x))$ $u(1)=1$ $u'(1)=-m$ … $u^{(n-1)}(1)=-m(-m+1)\cdots(-m+n-1)$

$u(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{u^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i=\sum_{i=0}^{n-1}\underline{C_{m+i-1}^{i}}(1-x)^i$ 同理求出?

直接判别是否互素

$\begin{cases} f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0 & a_n\neq 0 \\ g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0 & \underset{不等于0}{a_m\neq 0} \end{cases}$ 利用性质

引理 若f,g存在公因式 $\Leftrightarrow$ ∃多项式 $A(x)$、$B(x)$ $\deg(A)<m$, $\deg(B)<n$

st. $A(x)f(x)+B(x)g(x)=\underline{0}$

$\Leftarrow$ $Af+Bg=0$ 假设 $\gcd(f,g)=1$ 次数问题

$Af=-Bg \Rightarrow g\mid Af \Rightarrow g\mid A \Rightarrow A=0$ 矛盾

$f\mid B \Rightarrow B=0$ 矛盾

$A=\sum_{i=0}^{m-1}A_i x^i \quad B=\sum_{j=0}^{n-1}B_j x^j$

$Af+Bg=0 \Rightarrow \sum A_i x^i \sum a_j x^j + \sum B_i x^i \cdot \sum b_j x^j = 0$

$f(x)=a_n x^n+\dots+a_1x+a_0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & & b_0 \\ a_n & & \vdots & b_n & & \vdots \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_n & & & b_n \end{bmatrix}}_{(m+n)\times(m+n)} \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{m-1} \\ B_0 \\ \vdots \\ B_{m-1} \end{bmatrix} = 0$$

m列 n列

Sylvester

$syl(f,g,x)$

定理6 f与g有公因式 $\Leftrightarrow$ $\det(syl(f,g,x))=0$ 行列式

↑ 结式(Resultant)

↓ 有非0解

补：称 $Res(f,g,x)=\det(syl(f,g,x))$ 为f与g的结式(Resultant)

E.g.1. $f(x)=x^4-4$ $\quad g(x)=x^3+x^2-2x-2$ 7阶

$$Res(f,g,x)=\begin{vmatrix} -4 & & & -2 & & & \\ 0 & -4 & & -2 & -2 & & \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 0 & & & 1 & 1 \\ & & 1 & & & & 1 \end{vmatrix} = 0$$

结式应用2：消元

E.g.2 $\begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ 9x^2+y^2-2x-y-1=0 \end{cases}$ $\quad g(y)=Res(①,②,x)$

(多项式 n元性质)

· 定义5 $f_1(x),\dots,f_s(x), h(x), d(x)\in F[x]$ 如果 $d(x)$ 为 $f_1(x),\dots,f_s(x)$ 的公因式，且对它们任一公因式 $h(x)$ 都有 $h(x)\mid d(x)$ 称 $d(x)$ 为 $f_1(x),\dots,f_s(x)$ 的最大公因式

$\Rightarrow gcd(0,0,\dots,0)=0 \quad gcd(0,f_1(x),0,0,\dots,f_s(x))=gcd(f_1(x),f_2(x),\dots,f_s(x))$

· 定理7 最大公因式存在唯一且

$gcd(f_1,\dots,f_s)=gcd(gcd(f_1,\dots,f_{s-1}),f_s)$

证明：唯一性 与 $s=2$ 相同

存在性 记 $\tilde{d}=gcd(f_1,\dots,f_{s-1}) \quad gcd(f_1,\dots,f_s)=d$

$\Leftrightarrow$ 证 $d=gcd(\tilde{d},f_s)$ ∴ 算2项

① $\tilde{d}\mid f_1,\dots,f_{s-1} \quad d\mid\tilde{d} \Rightarrow d\mid f_1,\dots,f_s$ 证公因

另一方面 $d\mid f_1,\dots,f_s \Rightarrow d$ 为 $(f_1,\dots,f_s)$ 公因式

② 设 $h(x)$ 为 $(f_1,\dots,f_s)$ 公因式 $h(x)\mid f_i \quad i=1,2,\dots,s$ 证最大

$\Rightarrow h\mid\tilde{d},\ h\mid f_s \quad \therefore h\mid gcd(\tilde{d},f_s)=d$

定理8 $f_1,\dots,f_s\in F[x] \quad gcd(f_1,\dots,f_s)=d$ 存在 $u_1,\dots,u_s\in F[x]$ s.t.

$u_1f_1+u_2f_2+\dots+u_sf_s=d$

证明：用归纳法 $s=2$ 成立

设对 $s-1$ 成立，下证 s：

存在 $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_{s-1}\in F[x]$ s.t. $\tilde{u}_1f_1+\tilde{u}_2f_2+\dots+\tilde{u}_{s-1}f_{s-1}=\tilde{d}$

又 $d=gcd(\tilde{d},f_s)$ 为2元

$\exists\ h, u_s$ s.t. $h\tilde{d}+u_sf_s=d$

$\therefore h(\tilde{u}_1f_1+\tilde{u}_2f_2+\dots+\tilde{u}_{s-1}f_{s-1})+u_sf_s=d$ #

ADD: 环论的理想

· 定义6 称 $f_1(x),\dots,f_s(x)$ 互素，若 $\gcd(f_1,\dots,f_s)=1$

· 定理9 $f_1(x),\dots,f_s(x)$ 互素 $\Leftrightarrow \exists u_1,\dots,u_s\in F[x]$ s.t.

$u_1f_1+\dots+u_sf_s=1$

互素 $\not\Rightarrow$ 两两互素 $(x-1)(x-2)$ $(x-2)(x-3)$ $(x-3)(x-1)$

$\Leftarrow$

$\not\Rightarrow$

· 定义7 $f_1(x),\dots,f_s(x)\in F[x]$ 如果 $f_i(x)\mid h(x)$ $i=1,\dots,s$ 称 $h(x)$ 为 $f_1\dots f_s$ 公倍式

如果 $d(x)$ 为 $f_1\dots f_s$ 公倍式 且对 $f_1,\dots,f_s$ 任何公倍式 h 都有 $d\mid h$

则称 d 为 $f_1\dots f_s$ 的最小公倍式 (least common multiplier)

$\triangleright$ $d(x)=\mathrm{lcm}(f_1,\dots,f_s)$

· 定义8 设 $f_1(x),f_2(x),g(x)\in F[x]$ 如果 $g(x)\mid f_1-f_2$ 称 f_1 与 f_2 模 g 同余

(congruent module $g(x)$) $f_1(x)\equiv f_2(x)\ (\mathrm{mod}\ g(x))$

~~整除~~ 与模的联系

一命题 若 $f_1\equiv h_1\ (\mathrm{mod}\ g)$ $f_2\equiv h_2\ (\mathrm{mod}\ g)$

$f_1\pm f_2\equiv h_1\pm h_2\ (\mathrm{mod}\ g)$ $f_1f_2\equiv h_1h_2\ (\mathrm{mod}\ g)$

证: $g\mid f_1-h_1$ $g\mid f_2-h_2$

~~满足~~同余 $g\mid f_1+f_2-(h_1+h_2)=(f_1-h_1)+(f_2-h_2)$

$f_1f_2-h_1h_2=f_1f_2-f_2h_1+f_2h_1-h_1h_2=f_2(f_1-h_1)+h_1(f_2-h_2)$

·推论1 ∴ f与g互素 $\Leftrightarrow \exists u\in F[x]$ s.t. $uf\equiv 1 \pmod g$

$\Updownarrow$ $uf+vg=1$ $\quad \begin{cases} uf+vg\equiv 1 \pmod g \\ vg\equiv 0 \pmod g \end{cases} \Leftrightarrow uf\equiv 1 \pmod g$ ← 来回推证明

同余意义下 u为f之逆元，"相乘"为1

·推论2 $f_1\dots f_s$互素 $f_1\times\dots\times f_s$与g互素

证 $\exists u_1,\dots,u_s$ s.t. $u_if_i\equiv 1 \pmod g$

$\Rightarrow u_1f_1\times\dots\times u_sf_s\equiv 1 \pmod g \Leftrightarrow \underline{u_1\times\dots\times u_s}\times f_1\times\dots\times f_s\equiv 1 \pmod g$

利用上充要关系1 $\Leftrightarrow f_1\times\dots\times f_s$与$g$互素

定理10 中国剩余定理 (Chinese Remainder Theorem)

$g_1,\dots g_s$两两互素 $f_1,\dots,f_s$为任意多项式 最精最小化 求出存在满足所有余式要求的$f(x)$

则存在多项式$f(x)$ s.t. $f(x)\equiv f_i(x) \pmod{g_i}$ $i=1,2,\dots,s$

证:

找$h_i(x)$ s.t.

$\begin{cases} h_i(x)\equiv 0 \pmod{g_j} & i\neq j \\ h_i(x)\equiv 1 \pmod{g_i} \end{cases}$ $\Rightarrow f(x)=\sum_{i=1}^{s} f_i(x)h_i(x)$

(h_i存在)

∵ $\gamma_i(x)=\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} g_j(x) \Rightarrow \gamma_i(x)\mid h_i(x)$

$h_i\equiv 1 \pmod{g_i}$

∵ $\gcd(\gamma_i,g_i)=1$

$\Rightarrow \exists u_i$ s.t. $\underbrace{u_i\gamma_i}_{h_i}\equiv 1 \pmod{g_i}$

↓

同余1 ⇒ 做线性组合

数字 $n\equiv 1 \pmod 2$

$n\equiv 2 \pmod 3$

$n\equiv 3 \pmod 5$

$\begin{cases} n\equiv 1 \\ n\equiv 0 \\ n\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 15$ $\quad \begin{cases} n\equiv 0 \\ n\equiv 1 \\ n\equiv 0 \end{cases} \Rightarrow 10$ $\quad \begin{cases} n\equiv 0 \\ n\equiv 0 \\ n\equiv 1 \end{cases} \Rightarrow$

∴ $n=15\times 1+2\times 10+3\times 6$

Date. Mathematic, Maple

§3 因式分解定理

· 不可约多项式与数域相关 $(x-1)$ 最小　　$f_1, f_2 \in F[x]$

· 定义1. $f(x) \in F[x]$ $\deg(f) \geq 1$ 如果 $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ $\deg(f_1) \geq 1$ $\deg(f_2) \geq 1$

则称 $f(x)$ 为可约多项式，称 $f(x)$ 为可约多项式 (reducible)

否则 ... 不可约 (irreducible)

2018.9.12

(关于不可约多项式两个简单的性质)

(1) $p(x)$ 在 F 上不可约，则 $\lambda p(x)$ 也不可约　($\lambda \neq 0 \in F$，λ 为常数)

(2) $f(x), p(x) \in F[x]$，$p(x)$ 在 F 上不可约　$p(x) | f(x)$ 或 $\gcd(f, p) = 1$　仅2种关系

$\gcd(f, p) = 1$ 显然 / $\gcd(f, p) = d$　$\deg d \geq 1$ ∴ $d = \lambda p$ $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow d | f \Rightarrow p | f$　($d | p$)

(3) $f, p, g \in F[x]$，$p(x)$ 在 F 上不可约，且 $p | fg \Rightarrow p | f$ or $p | g$

定理1 (因式分解的唯一性)

设 $f(x) \in F[x]$ 为次数 ≥ 1 的多项式，则 $f(x)$ 可以分解为有限个不可约多项式之积，且在相差下意义下唯一：即设 $f(x)$ 有两个不可约分解

$f(x) = p_1 \cdots p_s(x) = q_1 \cdots q_t(x)$　则 $s = t$ 且 $p_i(x) = c_i q_i(x)$　$(c_i \neq 0)$

证明：(存在性)　对 $n = \deg f$ 归纳

(第二数归)

$n = 1$　f 不可约

可约至最简

设结论对 $\deg < n$ 的多项式均成立，现证 n

i) $f(x)$ 不可约 ✓

ii) $f(x)$ 可约　$f(x) = f_1(x) \times f_2(x)$　$\deg f_1 < n$ $\deg f_2 < n$

由归纳假设　$f_1(x) = p_1(x) \cdots p_k(x)$　$f_2(x) = p_{k+1}(x) \cdots p_s(x)$

$\Rightarrow f(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$　#

·唯一性

$f(x)=p_1(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)\cdots q_t(x)$

$\Rightarrow p_1(x)\mid q_1(x)\cdots q_t(x)$ 不妨设 $p_1\mid q_1 \Rightarrow q_1=c_1p_1\ (c_1\neq 0)$ ← 都不可约

$\Rightarrow p_2(x)\cdots p_s(x)=c_1q_2(x)\cdots q_t(x)$ …… 一直进行 #

$\therefore q_i(x)=c_ip_i(x)\ (c_i\neq 0,\ i=1,2,\dots s=t)$

· $f(x)=p_1(x)^{k_1}p_2(x)^{k_2}\cdots p_s(x)^{k_s}$ 标准形式 $k_i>0$

k_i 为 $p_i(x)$ 的重数 $p_i^{k_i}(x)\mid f(x)$ 且 $p_i^{k_i+1}\nmid f(x)$

$k_i>0$ $p_i(x)$ 为 $f(x)$ 的重因子 ($p_i(x)$ 不可约)

·判断重因子

$f(x)=p^k(x)g(x)$

$f'(x)=kp(x)^{k-1}p'(x)g(x)+p^k(x)g'(x)=p(x)^{k-1}[kp'(x)g(x)+p(x)\cdot g'(x)]$

$\Rightarrow \gcd(f(x),f'(x))\neq 1$ $\Leftrightarrow$ 充要，反向也成立 f 有重因子

$\Leftrightarrow \mathrm{Res}(f,f')=0$ 结式判别

·E.g.

$\begin{cases} f(x)=p_1^{k_1}(x)\cdots p_s^{k_s}(x) & k_s>0 \\ g(x)=q_1^{l_1}(x)\cdots q_s^{l_s}(x) & l_s>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gcd(f,g)=p_1(x)^{\min(k_1,l_1)}\cdots p_s(x)^{\min(k_s,l_s)} \\ \mathrm{lcm}(f,g)=p_1(x)^{\max(k_1,l_1)}\cdots p_s(x)^{\max(k_s,l_s)} \end{cases}$

· $\gcd(f,g)\times\mathrm{lcm}(f,g)=f(x)g(x)=p_1^{k_1+l_1}(x)\cdots p_s^{k_s+l_s}(x)$

E.g. 在 $\mathbb{Q}$ 上因式分解 $x^{15}-1$

$x^{15}-1=(x^5)^3-1=(x^5-1)(x^{10}+x^5+1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1)$

$=(x^3)^5-1=(x^3-1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x^{12}+x^9+x^6+x^3+1)$

$=x^{15}-1=(x-1)(x^{14}+x^{13}+\dots+x+1)$ $=(x-1)(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^6-x^5+2x^4+\cdots$

No. ※其中求导起重要因子观察作用

Date.

§4 实数域及复数域上的因式分解

$f(c)=0 \Leftrightarrow x-c \mid f(x)$ 求根与因式分解紧切相关

定义1 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \in F[x]$ $c\in F$ 如果 $f(c)=0$，称 c 为 $f(x)$ 的根

如果 $f(c)=f'(c)=\dots=f^{(k-1)}(c)=0$ $f^{(k)}(c)\neq 0 \Rightarrow c$ 为 $f(x)$ k 重根 ($k=1$ 单根)

定理1 c 为 $f(x)$ 的 k 重根 $\Leftrightarrow (x-c)^k \mid f(x)$ $(x-c)^{k+1} \nmid f(x)$

Taylor 展开 从 $f(c)=0$ 点展开!!! ↗ 证思路

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j=\sum_{j=k}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j=(x-c)^k\Big[\underbrace{\frac{f^{(k)}(c)}{k!}}_{\neq 0}+\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-c)+\dots\Big]$$

定理2 $f(x)\in F[x]$，$\deg f=n$ 则 f 至多有 n 个不同根 与解、根性质相连

① deg 性质

② 假设有 $n+1$ 个不同根 $f(c_i)=0$ $i=0,1,\dots,n$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_0 & \cdots & c_0^n \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & c_n & \cdots & c_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a_i=0$$

范德蒙行列式 Review

$\neq 0$

定理3 (代数学基本定理)

$f(x)\in \mathbb{C}[x]$ $\deg f=n$ 则 f 含 n 个复根

即 $f(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n)$

$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

Vieta 公式 $\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} c_{j_1}\cdots c_{j_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} \Rightarrow \begin{cases} c_1\cdots c_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n} \\ \sum_{j=1}^{n}c_j=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\end{cases}$

$\cdot f(x)=(x-c_1)^{n_1}\cdots(x-c_s)^{n_s}$ $c_1,\dots,c_s$ 互不相同 $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$

「命题1」 实系数多项式的复根共轭成对出现

证 $c\in\mathbb{C}$ $f(c)=0=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\dots+c_0=0$ ($a_n,\dots,a_1$ 为实数)

同取同轭：$a_n\bar{c}^n+a_{n-1}(\bar{c})^{n-1}+\dots+\bar{c}_0=0=f(\bar{c})$

共轭与取等式性质

任何实系数多项式可分为1次or 2次不可约$p_i(x)$相乘

「命题2」实系数多项式$p(x)$不可约 且 $\deg(p)=1$或2

证明：1° 设$p(x)$实根 $(x-c)\mid p(x)$ $\Rightarrow p(x)=\lambda(x-c)$ $(\lambda\neq 0)$

2° $p(x)$无实根 $\Rightarrow$ $p(x)$必有复根c

又由命题1，根有$\bar{c}, c$ $\Rightarrow$ $(x-c)(x-\bar{c})\mid p(x)$ $\Rightarrow p(x)=\lambda((x+a)^2+b^2)$

$=(x-a)^2+b^2$

定理2 实系数多项式有以下不可约分解：

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{m_1}\cdots(x-c_r)^{m_r}(x^2-a_1x+b_1)^{n_1}\cdots(x^2-a_sx+b_s)^{n_s}$$

$\Delta<0$

$a_i^2-4b_i<0$

有复根

Eg. $f(x)=(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x^2+\frac{1}{2}x+1)^2-\frac{5}{4}x^2=(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1)(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1)$

为啥???

有理数域上不可分解

Date. 2018.9.17

课堂小测

2. $f(x)$ 满足 $x^2 \mid f(x)$ $(x+1)^3 \mid f(x)-1$ $(x-1)^3 \mid f(x)+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \equiv 0 \pmod{x^2} \\ f(x) \equiv 1 \pmod{(x+1)^3} \\ f(x) \equiv -1 \pmod{(x-1)^3} \end{cases}$$

构造 $f_2(x), f_3(x)$ $\begin{cases} f_2(x) \equiv 0 \\ f_2(x) \equiv 1 \\ f_2(x) \equiv 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} f_3(x) \equiv 0 \\ f_3(x) \equiv 0 \\ f_3(x) \equiv 1 \end{matrix}$

$\therefore f_2(x) = x^2(x-3)^2 g_2(x)$

$(x+1)^3 \mid x^2(x-3)^3 g(x) - 1 = f_2(x) - 1$

$\Leftrightarrow f_2(-1) - 1 = 0$ $f_2'(-1) = 0$ $f_2''(-1) = 0$ $\Leftrightarrow g_2(-1)$ $g_2'(-1)$ $g_2''(-1)$

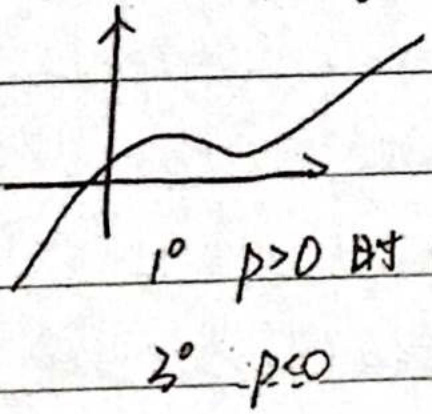
导出2次

……

中国剩余定理

$\Rightarrow$ 一定会存在

3. $f(x) = x^3 + px + q$



一定有一实根

$f'(x) = 3x^2 + p$

1° $p>0$ 时 ✓ 2° $p=0$ $q \neq 0$

3° $p<0$ $x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$

极大 $-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ 极小 $+\sqrt{-\frac{p}{3}}$

$f(-\sqrt{-\frac{p}{3}}) = \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$

$f(\sqrt{-\frac{p}{3}}) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}}$

$f(-\sqrt{-\frac{p}{3}}) f(\sqrt{-\frac{p}{3}}) > 0 \Leftrightarrow \underline{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 > 0}$

因式分解

$f(x)\in \mathbb{C}[x]$ $f(x)=a_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_s)^{n_s}$

$f(x)\in \mathbb{R}[x]$ $f(x)=a_n(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_r)^{n_r}(x^2-a_ix+b_i)\cdots$ $(a_i^2<4b_i)$

例2 在$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$上分别分解 x^n-1

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1)$

$x^n=1$ 复数的三角表示 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ $\Rightarrow \underset{1}{r^n}\underset{1}{e^{in\theta}}=1$

$\therefore x=e^{i\theta} \Leftrightarrow \cos n\theta+i\sin n\theta=1$

$\therefore \cos n\theta=1$ $n\theta=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ $\Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\dots,n-1)$

$\therefore x_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,\dots,n-1)=w_k$ $\Leftarrow$ 上方程的复根表示

$x^n-1=$

$\mathbb{C}$: $(x-w_0)(x-w_1)\cdots(x-w_{n-1})$

$$\begin{cases} w_0+w_1+\dots+w_{n-1}=0 & \text{几何对称，高阶韦达} \\ w_1+\dots+w_{n-2}+w_{n-1}=-1 \end{cases}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}=-1$ $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$ $w_k=\overline{w_{n-k}}$ 分奇偶讨论配对情况

$(n=2m$ $w_m=-1)$

验证

$$\begin{cases} n=2m,\ w_m=-1 \quad x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m-1}(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1) & (1-w_k)(1-w_{n-k})=(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1) \\ n=2m+1 \quad x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1) \end{cases}$$

例3：求 $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$n=2m+1$ $\prod_{k=1}^{m}(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}x+1)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+\dots+x+1$

令$x=1$ $\prod_{k=1}^{m}2(1-\cos\frac{2k\pi}{n})=\prod_{k=1}^{m}4\sin^2\frac{k\pi}{n}=n$ $\Rightarrow \boxed{\prod_{k=1}^{m}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{4^m}=\frac{n}{2^{n-1}}}$

又$\sin\frac{k\pi}{n}=\sin\frac{(n-k)\pi}{n}$

$(x+1)^n+(x-1)^n=$ 因式分解 $\Rightarrow$ $(x+1)^n+(x-1)^n=0$ $\Rightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n=-1$

§5 有理系数多项式的因式分解

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Q}[x]$

$=\underline{\frac{a}{b}g(x)}$ $\quad g(x)\in\mathbb{Z}[x]$

系数非1提前

⇒ 转化为讨论整系数多项式分解

· 定义1 $g(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $\gcd(a_n,\dots,a_1,a_0)=1$

称 $g(x)$ 为本原多项式 (primitive polynomial)

<u>Gauss 引理</u>

两个本原多项式乘积也是本原多项式

证: $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 为本原多项式

$g(x)=b_mx^m+\dots+b_1x+b_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+\dots+c_1x+c_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$c_k=\sum_{i+j=k} a_ib_j$ 要证 $\gcd(c_0,c_1,\dots,c_{n+m})=1$

(反证)

$\gcd(c_1\dots c_{m+n})=d>1$ 取 d 的素因子 p

$p\mid a_0\ p\mid a_1\ \dots\ p\mid a_{i-1}\ \ p\nmid a_i$

$p\mid b_0,\ p\mid b_1,\dots\ p\mid b_{j-1}\ \ p\nmid b_j$

$p\mid c_{i+j}=a_0b_{i+j}+a_1b_{i+j-1}+\dots\underbrace{+a_ib_j}_{p\nmid}+\dots+a_{i+j}b_0$ 矛盾

故不存在该素因子 p

推论1 $f(x),g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ $g(x)$ 为本原多项式 且 $g(x)\mid f(x)$ 则 $g(x)=\frac{f(x)}{h(x)}\in\mathbb{Z}[x]$

且若 $f(x)$ 也为本原, 则 $g(x)$ 也为本原多项式

证: $g(x)=\frac{r}{s}h(x)$ $\quad h(x)$ - 本原 $\quad$ 且 $\gcd(r,s)=1$

$f(x)=g(x)g(x)=\frac{r}{s}h(x)g(x)$ 本原 $\in\mathbb{Z}[x]$ $\xRightarrow{\text{二次分析}} s=1$

可约 $\Leftrightarrow$ 可约

定理1 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Z}$ 不可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约

证: $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上可约 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约

$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上可约 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ $f_1, f_2\in\mathbb{Q}[x]$ $c_1, c_2, c\in\mathbb{Q}$

由引理1, $\cdots c\in\mathbb{Z}$ $=c_1g_1(x)c_2g_2(x)=c\,g_1(x)g_2(x)$ $g_1, g_2\in\mathbb{Z}$ 本原

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 可约

定理2 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 则 $f(x)$ 可唯一分解为

$f(x)=a_0f_1(x)\cdots f_s(x)$ $a_0\in\mathbb{Z}$, $f_i(x)$ 为不可约的本原多项式

证 $f(x)=\tilde{a}_0\tilde{f}_1(x)\cdots\tilde{f}_s(x)$ 有理上分解 $\tilde{a}_0\in\mathbb{Q}$ $\tilde{f}_i\in\mathbb{Q}$

$=\underbrace{\tilde{a}_0c_1\cdots c_s}_{a_0\in\mathbb{Z}}f_1(x)\cdots f_s(x)$ $\tilde{f}_i(x)=c_if_i(x)$

有理根定理 $(tx-s)$

定理3 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ 设 $f(x)$ 有有理根 $c=\frac{s}{t}$ $(\gcd(s,t)=1)$

则 $t\mid a_n$, $s\mid a_0$

$a_n\left(\frac{s}{t}\right)^n+\cdots+a_1\left(\frac{s}{t}\right)+a_0=0 \Leftrightarrow a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}t+\cdots+a_0t^n=0$

$\Rightarrow s\mid a_nt^n$ $\gcd(s,t)=1$ $\Rightarrow s\mid a_0$, $t\mid a_ns^n \Rightarrow t\mid a_n$

P_{263}

7 8 9 11

No.

Date.

清华徐著华 张贤科

线性代数

2018.9.19

周一回顾：

1. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约
2. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $f(x) = a_0 g_1(x) \cdots g_s(x)$ $a_0 \in \mathbb{Z}$，$g_1, \ldots, g_s$ 为不可约本原多项式
3. $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ 有有理根 $c = \frac{t}{s}$ $(\gcd(t,s)=1)$ ($f(x)$ 有一次因式 $sx-t$) $\Rightarrow$ $s \mid a_n$，$t \mid a_0$

外

~~好结论：找一次因子~~

Eg.1 $f(x) = 6x^3 - 11x^2 - 4x + 4$ 在 $\mathbb{Z}$ 上做因式分解

$s \mid 6$，$t \mid 4$ $\quad s = \{1,2,3,6\}$ 依次找

$t = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)(6x^2+x-2) = (x-2)(2x-1)(3x+2)$

Eg.2 $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$ 问 $f(x)$ 是否可约 ×

$\Rightarrow$ 有 $\deg f_1 = 1$ $\deg f_2 = 2$ 又无一次因子（矛盾）

（变：令 $y = 2x$，$g(y) = y^3 - 3y + 1$ …… 简化首项 *）

问：$\cos 20^\circ$ 为有理数还是无理数？

$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$ 令 $\cos 20^\circ = x$

$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$ $\Rightarrow$ 不可约（3次 $\mathbb{Q}$）$\Rightarrow$ 有无有理数 $\Rightarrow$ $\cos 20^\circ$ 为无理数

定理4（Eisenstein 判别法）

设 $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ 如果存在素数满足（素数 p!!!）

素因子？

(1) $p \nmid a_n$，(2) $p \mid a_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ (3) $p^2 \nmid a_0$

则 $f(x)$ 不可约

（PS：无通用法则区分可约 vs 不可约；单向判定）

证：(反证) 设 $f(x)$ 可约，即存在 $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ s.t. $f(x)=g(x)h(x)$

利用同余大胆简化：

$(f(x)=g(x)h(x)) \bmod p \qquad a_i = r_i \bmod p \ (0,\dots,p-1)$

$f(x) \bmod p = r_n x^n + 0 + \dots + 0 = r_n x^n$ — $h_1(x) = h(x) \bmod p$

$\equiv g_1(x)h_1(x) \bmod p \quad (g_1(x) = g(x) \bmod p \ \dots)$

$g_1(x) = b_m x^m + \dots + b_s x^s \quad p \nmid b_s$ 第一次

$h_1(x) = c_k x^k + \dots + c_t x^t \quad p \nmid c_k \dots$ 再模

$\therefore g_1(x)h_1(x) = b_m c_k x^{m+k} + \dots + b_s c_t x^{s+t} = r_n x^n \pmod p$

← 想致有 p 倍数

$\Rightarrow g_1(x) = b_m x^m. \quad h_1(x) = c_k x^k$

$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = p g_0(x) + b_m x^m \\ h(x) = p h_0(x) + c_k x^k \end{cases}$ 把常数项单独弄出来

$f(x) = g(x)h(x) = \boxed{p^2 g_0 h_0 +} \, p b_m x^m h_0 + p c_k x^k g_0 + b_m c_k x^{k+m}$

a_0

又与 $p^2 \nmid a_0$ 矛盾

非万能判断反例：

Eg3 证 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上不可约

(1) $f(x) = x^n + 2$ Eisenstein $p=2$ ✗

(2) $f(x) = x^{p-1} + \dots + x + 1$ 取不到素数 把奇怪常数项弄掉

可约性相同

令 $x = y+1 \quad g(y) = f(y+1) = \dfrac{(y+1)^p - 1}{(y+1) - 1} = y^{p-1} + C_p^1 y^{p-2} + \dots + C_p^{p-2} y + C_p^{p-1}$

(p 为素数，则 $p \mid C_p^k \ 1 \le k \le p-1$) —— 性质

$\Rightarrow g$ 不可约 $\Rightarrow f$ 不可约

"分圆多项式" Search

∨ 在有理域有 n 个根 减常数就破坏了 (第一项=倍数关系)

(3) $f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1$ 这里 $a_i \in \mathbb{Z}, n \ge 2$

$f(a_i) = -1$ 设 $f(x) = h(x)g(x)$ 可约

$\Rightarrow g(a_i)h(a_i) = -1 \quad \therefore$ 不妨 $g(a_i) = 1 \quad h(a_i) = -1$

$\therefore g(a_i)+h(a_i)=0 \quad (i=1,2,\dots,n)$

$\Rightarrow a_i \dots$ 为 $g(x)+h(x)$ 的根 ← 或deg 不符 (有解 → deg 掉

又 $\deg(g+h)<n$ ← 小于n次多项式,不可能有n个根

$\Rightarrow$ 只有可能 $h(x)=-g(x) \Rightarrow f(x)=-(g(x))^2\le 0$

又 $f(x)$ 首项系数为 +1 $\quad f(x)\to+\infty$ 矛盾 $\quad \times$

§6 多元多项式 (multivariate polynomials)

定义1 F为数域, $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为未定元,称 $a_{k_1\dots k_n}x^{k_1}\dots x^{k_n}$ 为一个单项式 (nomials)
$a_{k_1\dots k_n}\in F$ 为单项式系数 (coefficient) $\quad k_1+\dots+k_n$ 称为多项式的次数 (degree)
多项式为有限个单项式的和,多项式次数定义为其中单项式次数最大值
齐次多项式 (homogenous)

$\mathbb{Z}^n_{\ge 0}=\{(k_1,\dots,k_n)\mid k_i\in\mathbb{Z}_{\ge0}\}$

$x=(x_1,\dots,x_n) \quad \alpha\in\mathbb{Z}^n_{\ge0} \quad ; a_\alpha x^\alpha, \ a_\alpha x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \quad a_\alpha\in F$

$\underline{I\subset\mathbb{Z}^n_{\ge0}}$ 有限指标集 $\quad f(x)=\sum_{\alpha\in I}a_\alpha x^\alpha$

定义2 (字典序) $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n_{\ge0} \quad \alpha>_{lex}\beta \Leftrightarrow$ (lexicographical)

$\alpha-\beta$ 的最左边的第一个非0分量为正

$x^3y^3z>_{lex}x^2y^4z^6 \quad (3,3,1)>(2,4,6)$

定义3 (分级字典序) $\alpha>_{grlex}\beta \Leftrightarrow |\alpha|>|\beta|$

或 $|\alpha|=|\beta|$ 且 $\alpha>_{lex}\beta$

$F[x_1,\dots,x_n]$ 多元多项式环

加、减、乘

Date 2018.9.26

定义3 $f\in F[x]$ f的首项为f中按某一序排位最高的多项式

$LT(f) := LM(f)\times LC(f)$
term monomial coefficient

· $x_1,x_2,\dots,x_n$ 为 $f(x)$ 的根

$\sigma_k=(-1)^k a_k \quad (k=1,2,\dots,n)$

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x_1+a_n$

$=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}+\dots+(-1)^n\sigma^n$ (注意本身正负)

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\dots+x_n\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n\\ \vdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$$

$\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ 为 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 的基本对称多项式

定义4 设 $f(x_1,\dots,x_n)\in F[x_1,\dots,x_n]$ 如果对 $1,2,\dots,n$ 的任一排序 $j_1,j_2,\dots,j_n$ 都有

$f(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_n})=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

则称f为对称多项式

$g(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 反向表示性质 $\xrightarrow{?}$ 表象

任一 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ 可如此表示，且后者对称

定理1 设 $f(x_1,\dots,x_n)\in F[x_1,x_2,\dots,x_n]$ 为对称多项式，则存在唯一多项式 $g(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F[\cdots$
满足 $f(x_1,\dots,x_n)=g(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$

证明：(存在性) 用字典序

$LT(f)=a_kx^k \quad (k_1\geq k_2\geq\dots\geq k_n) \quad k=(k_1,k_2,\dots,k_n)$

$g(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=a_k\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$ ← σ_i 仅先看为单纯未知数

$LT(g)=a_kx_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1\cdots x_n)^{k_n}$

首项分析

令 $f_1(x_1,\dots,x_n)=f(x_1\dots x_n)-g_1(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ ↙ 简单对称

找 $g_2(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ s.t. $LT(f_1)=LT(g(\sigma_1\dots\sigma_n))$

…… 依此操作 有限次 f

$f=g_1(\sigma_1\dots\sigma_n)+\dots+g_n(\sigma_1\dots\sigma_n)$

(唯一性)

$f=g(\sigma_1\dots\sigma_n)=h(\sigma_1\dots\sigma_n)\Rightarrow g=h$

$LT(f)=LT(g(\sigma_1\dots\sigma_n))=LT(h(\sigma_1\dots\sigma_n))\Rightarrow LT(g)=LT(h)$

Eg1 设 x_1,x_2,x_3 为 x^3+px+q 的三根，求以 x_1^2,x_2^2,x_3^2 为根的三次多项式

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+x_3=0\\ \sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=p\\ \sigma_3=x_1x_2x_3=-q\end{cases}\qquad \begin{cases}\sigma_1'=x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p\\ \sigma_2'=x_1^2x_2^2+\dots=(x_1x_2+x_1x_3+\dots)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)\\ \sigma_3'=x_1^2x_2^2x_3^2=q^2\end{cases}$$
……

Eg2 p, q 为实数，求 x^3+px+q 有三个实根的条件 D 复数性质

设计判别式 $D=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_1)^2$ ↙ 很多

设 x_1 为实根

(1) $x_2,x_3\in\mathbb{R}$ $D\geq0$ ↙ 利用复数平方<0 反对称性

(2) $x_2,x_3\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ $x_2,x_3=a\pm bi$ $(b\neq0)$

$D=(x_1-a-bi)^2(x_1-a+bi)^2\underline{(-4b^2)}<0$ $=((x_1-a)^2+b^2)(-4b^2)<0$

$D=-((\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2)$ ×2 方法 解析 vs. 代数 Vieta 内核

- $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$

$S_k=x^k+y^k+z^k+\dots$

$S_1,S_2,\dots,S_n\Leftrightarrow\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ 可互推

定理3 (Newton 恒等式)

$k \le n$: $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^k k\sigma_k = 0$

$k > n$: $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0$

P283 3 4 5

2018.10.8

小测讲解

1. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ 无重根

$\Leftrightarrow$ $f(x), f'(x)$ 有(无)公共根 $f'(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$x = a$ 为公共根, $\Rightarrow f(a) = 0$ $f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{a^n}{n!} = 0 \Rightarrow a = 0$

又 $1 = f(a) \ne 0$ 矛盾

3. (1) $x^2 + x + 1 / x^{3p} + x^{3n+1} + x^{3m+2}$

法一: 由模的性质 $x^3 \equiv 1 \pmod{(x^2+x+1)}$ $\Rightarrow f(x) \equiv x^2 + x + 1 \ (\mathrm{mod} \dots)$

$x^{3m} \equiv 1 \ (\mathrm{mod} \dots)$ $f(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod} \dots)$

$x^{3n+1} \equiv x \ (\mathrm{mod} \dots)$

问:

$x^2 - x + 1 \mid x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ $m, n, p \in \mathbb{Z}_+$ 条件成立 $\Leftrightarrow$ m, n, p 同奇偶

$(\Rightarrow)$

证: 由 $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ ω_1, ω_2 为 $x^2 - x + 1$ 两根

又 $\begin{cases} g(\omega_1) = (-1)^m - (-1)^n \omega_1 + (-1)^p \omega_1^2 = 0 \\ g(\omega_2) = (-1)^m - (-1)^n \omega_2 + (-1)^p \omega_2^2 = 0 \end{cases}$ Vieta. $\begin{cases} \omega_1 \omega_2 = 1 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = -1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$2(-1)^m - (-1)^n - (-1)^p = 0$

分析奇偶即可

$(\Leftarrow)$

分析 若 $\begin{cases} g(\omega_1) = 0 \\ g(\omega_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (x - \omega_1) / g(x) \\ (x - \omega_2) / g(x) \end{matrix} \Rightarrow (x - \omega_1)(x - \omega_2) \mid g(x)$

$g(w_1)=(-1)^m-(-1)^n w_1+(-1)^p w_1^2$ 同奇偶 $\Rightarrow$ $1-w_1+w_1^2=0$

$\therefore$ w_2 同理，综上即证

9' $f(x)=x^3-x^2-2x+1$ $g(x)=x^2-2$ α,β,γ 为 $f(x)$ 的根，求以 $g(\alpha),g(\beta),g(\gamma)$ 为根的三次方程

法一：

证 $g(\alpha)=\alpha^2-2$ $g(\beta)=\beta^2-2$ $g(\gamma)=\gamma^2-2$

$f(x)=(x-1)g(x)-1$

$$\begin{cases} f(\alpha)=(x-1)g(\alpha)-1=0 \Rightarrow g(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1} \\ f(\beta)=(x-1)g(\beta)-1=0 \quad g(\beta)=\frac{1}{\beta-1} \\ f(\gamma)=(x-1)g(\gamma)-1=0 \quad g(\gamma)=\frac{1}{\gamma-1} \end{cases}$$

$\therefore x=\frac{1}{\alpha-1}$ $\boxed{\alpha=\frac{1}{x}+1}$ 倒过来

$f(\frac{1}{x}+1)=f(\alpha)=0$ $\Rightarrow$ x 满足 $f(\frac{1}{x}+1)$ 满足题意

法二：Vieta 定理

共轭关系：$e^{i\theta}=e^{i(2\pi-\theta)}$

3. $x^{2n}+x^n+1=(x^n)^2+x^n+1$

$\therefore ((x^n)^3-1)=(x^n-1)((x^n)^2+x^n+1)$

$\Rightarrow x^{3n}=1 \Rightarrow w_k=e^{i\frac{2k\pi}{3n}}$ $1\le k\le 3n$

$x^{3n}-1=\prod_{i=1}^{3n}(x-w_i)$

$x^n-1=\prod(x-w_k)$ $w_k^n=1$ $k=3t$（幅角值分割）

$\therefore \Rightarrow x^{2n}+x^n+1=\prod_{j=0}^{n-1}\underbrace{(x-w_{3j+1})}\underbrace{(x-w_{3j+2})}$ 恰好可组成共轭对

$w_{3t+1}=e^{i\frac{2(3t+1)\pi}{3n}}$

$e^{i\frac{2(3t+2)\pi}{3n}}$

$\overline{w_{3t+1}}=e^{i[2\pi-\frac{2(3t+1)\pi}{3n}]}=e^{i\frac{6n-6t-2}{3n}\pi}\cdots \rightarrow e^{i\frac{6(n-t-1)+4}{3n}\pi}$

$(x-w_{3t+1})(x-\overline{w_{3t+1}})=x^2-(2\cos\frac{6t+2}{3n}\pi)x+1$

$\therefore x^{2n}+x^n+1=\prod_{t=0}^{n-1}(x-w_{3t+1})(x-\overline{w_{3t+1}})=\prod_{t=0}^{n-1}(x^2-(2\cos\frac{6t+2}{3n}\pi)x+1)$

6' $f(x)\in \mathbb{Z}[x]$, $g(y)=y^n f(\frac{1}{y})$ $n=\deg f$

$f(x)$ $g(y)$ 在Q上不可约性相同 $f(x)$ $\underbrace{x=\frac{1}{y}}$ $f(\frac{1}{y})y^n$

e.g. $2x^3+6x^2+8x+1$ ⇒ 性质确实，意义在于颠倒首尾系数 用 Einstein 判别

y^3+8y^2+6y+1

7. $x^n-C_{2n}^2x^{n-1}+C_{2n}^4x^{n-2}+\dots+(-1)^nC_{2n}^{2n}$

证：令 $x=y^2$ $f(y)=0=y^{2n}-C_{2n}^2y^{2n-2}+\dots+(-1)^nC_{2n}^{2n}$

$$\begin{cases}(y+i)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j(y)^{2n-j}(i)^j \\ (y-i)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}C_{2n}^j y^{2n-j}(i)^j(-1)^j\end{cases}$$ ← 取 i 保证 +、− 交替

$\therefore 2f(y)=(y+i)^{2n}+(y-i)^{2n}$ 又由 $(x+1)^n+(x-1)^n$ 类比

$\therefore (\frac{y+i}{y-i})^{2n}=-1$ $\frac{y+i}{y-i}=e^{i\frac{2k\pi-\pi}{2n}}=w_k$ $(1\le k\le 2n)$

$\therefore y=i\frac{1+w_k}{1-w_k}=i\frac{(1+w_k)(1-\bar{w}_k)}{1-w_k^2}=\dots=\frac{\cos\frac{-\pi+2k\pi}{2n}}{-\sin\frac{-\pi+2k\pi}{2n}}=-\cot(\frac{-\pi+2k\pi}{2n})$

$=\cot(\pi-\frac{-\pi+2k\pi}{2n})=\cot(\frac{2(n-k)+1}{2n})\pi$

又相反数 $\underline{\pi-\theta=-\theta}$

找到相反数

Date. 2018.10.10 补充习题课

1. (1) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

(2) $\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

Sol: (1) $x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1)$

$x=-1$

$\therefore -2=-2\prod_{k=1}^{n}2(1+\cos\frac{2k\pi}{2n+1})=(-2)\,2^n\prod_{k=1}^{n}2\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}$

$\prod_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^{2n}}$

(2) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1)$ $\prod_{k=1}^{n-1}(2-2\cos\frac{k\pi}{n})=\prod_{k=1}^{n-1}2\cdot2\sin^2\frac{k\pi}{2n}=n$

2. a,b,c 都为正数 $\Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c>0\\ ab+bc+ca>0\\ abc>0\end{cases}$

解: $(x-a)(x-b)(x-c)=f(x)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ $x\le0$ $f(x)<0\Rightarrow$ 全正

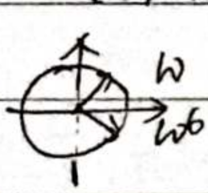
3. $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=\frac{1}{2}$

$w=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$ $w^7=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$\therefore x^7+1=0$

$x^7+1=(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$\therefore 1-w+w^2-w^3+w^4-w^5+w^6=0$ $\Rightarrow$ $\bar{w}+w=2\cos\frac{\pi}{7}$



对称 $\underbrace{w^k\cdot w^{7-k}}=-1$ $\overset{=w^7}{}$ $w^{7-k}=-w^{-k}$

$1-(w+w^{-1})+(w^2+w^{-2})-\underbrace{(w^3+w^{-3})}=0$

$\Rightarrow 1-2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{2}{7}\pi-2\cos\frac{3}{7}\pi=0$

4. $a_1,a_2,\dots,a_n$ 求证:

$\begin{cases}a_1^{n-1}x_1+a_1^{n-2}x_2+\cdots+a_1=-a_1^n\\ a_2^{n-1}x_1+a_2^{n-2}x_2+\cdots+a_2=-a_2^n\\ \cdots\\ a_n^{n-1}x_1+\cdots+a_n=-a_n^n\end{cases}$ 有唯一解 且得解

法一：$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & & a_1 \\ & & \\ a_n^{n-1} & & a_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1^n \\ \\ -a_n^n \end{pmatrix}$ 　　Vandermonde 行列式

$\det = \prod_{i<j} (a_i - a_j) \neq 0$

反向表示

法二：写为 $a_i^n + x_1 a_i^{n-1} + \cdots + x_{n-1} a_i + x_n = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$f(x) = x^n + x_1 x^{n-1} + \cdots + x_{n-1} x + x_n \qquad f(a_i) = 0$

$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$

$\therefore \sigma_k = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \prod a_{i_k}$ 　$(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (-\sigma_1, \sigma_2, \ldots, (-1)^k \sigma_k, \ldots, (-1)^n \sigma_n)$

5. a, b 为方程 $x^4 + x^3 - 1 = 0$ 的 2 个根

ab 为 $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ 根 　　$(4 \to C_4^2 = 6$ 次数$)$

$f(x)$

Sol 1: $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

Vieta: $a+b+c+d = -1 = abcd \Rightarrow \boxed{ab = -\frac{1}{cd}}$

$\because f(a) = 0 \therefore a^4 + a^3 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^3(1+a) = 1 \\ b^3(1+b) = 1 \end{cases} \Rightarrow (ab)^3(1+a)(1+b) = 1$

$\therefore \underbrace{(ab)^3(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}_{\parallel} = (1+c)(1+d)$

$(-1-a)(-1-b)(-1-c)(-1-d) = f(-1) = -1$

$f(x)$

$\underline{(1+c)(1+d) = -(ab)^3}$

$(1+a)(1+b) = -(cd)^3$

$\therefore -(ab)^3 - (cd)^3 = 2 + (a+b+c+d) + (ab+cd) = \boxed{1 + ab + cd}$

代 $2 \times \square$

$-(ab)^3 + (\frac{1}{ab})^3 = 1 + ab - \frac{1}{ab} \quad \therefore (ab)^6 + (ab)^4 + (ab)^3 - (ab)^2 - 1 = 0$

算多项式

Sol 2: $\sigma_1 = a+b+c+d = -1$ 　　$g(x) = (x-ab)(x-ac)(x-ad)\cdots(x-cd)$

$\begin{cases} \sigma_2 = ab + bc + \cdots = 0 \\ \sigma_3 = abc + \cdots = 0 \\ abcd = -1 \end{cases}$ 　　$= x^6 + p_1 x^5 + p_2 x^4 + \cdots + p_6$

$p_1 = -\sigma_2 = 0 \qquad p_6 = (abcd)^3 = -1$

又 $g(x) = 0$ 　　$(-\frac{1}{x})^6 + p_2(-\frac{1}{x})^4 + p_3(-\frac{1}{x})^3 + \cdots - 1 = 0$

$\Updownarrow\ g(-\frac{1}{x}) = 0$ 　　$x^6 + p_5 x^5 - p_4 x^4 + p_3 x^3 - p_2 x^2 - 1 = 0 \Rightarrow p_5 = 0 \quad p_4 = -p_2$

$\therefore g(x) = x^6 + p_3x^4 + p_3x^3 - p_2x^2 - 1$

又 $g(x) = [x^2 - (ab+cd)x - 1][x^2 - (ac+bd)x - 1][x^2 - (bc+ad) - 1]$。

$p_3 = -3 + (ab+cd)(ac+bd) + (ab+cd)(ad+bc) + (ac+bd)(ab+dc)$

$= -3 + a(abc + bcd + acd) + b(\_\_\_\_) = 1$ （暴力算）

前期 Review 2018.10.15

1、$F[x]$ 带余除法 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ $\deg(r) < \deg(g)$

2、$\gcd(f, g) = d(x) \Leftrightarrow \exists u(x), v(x)$ st. $u(x)f(x) + vg = d(x)$

3、Euclid 算法

4、中国剩余定理

$g_1(x), \dots g_s(x)$ 两两互素 $\exists f(x)$ 满足 $f(x) \equiv f_1(x) \pmod{g_1}, \dots f(x) \equiv f_s(x) \pmod{g_s}$

5、因式分解 $f(x) = p_1(x)^{\alpha_1} \cdots p_s(x)^{\alpha_s}$

$\mathbb{C}$ 上 $f(x) = a_n(x-c_1)^{\alpha_1} \cdots (x-c_s)^{\alpha_s}$ $c_i \in \mathbb{C}$ $\underline{a_i^2 - 4b_i < 0}$

$\mathbb{R}$ $f(x) = a_n(x-c_1)^{\alpha_1} \cdots (x-c_s)^{\alpha_s}(x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+a_tx+b_t)^{\beta_t}$

$\mathbb{Q}$ $f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ $\Leftarrow$ 难度大

$x = \frac{t}{s}$ $\gcd(s, t) = 1$ $\underline{s \mid a_n,\ t \mid a_0}$

Eisenstein 判别法

$p \nmid a_n,\ p \mid a_i$ $i = 0, 1, \dots, n-1$ $p^2 \nmid a_0$

6、多元多项式

单元各性质仍可沿用？

New

· $f(x_1,\dots,x_n)$ 为对称多项式 则∃ $g(x_1,\dots,x_n)\in k[x_1,\dots,x_n]$ s.t.

$f=g(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ $\quad\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$ 为基本对称多项式

· $f=f_1+f_2+\dots+f_n$ $\quad f_k$ 为k次齐次多项式 ???

$\boxed{f对称 \Rightarrow f_k对称}$

f_k 首项为 $a_k x^k$ $(x^k=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n})$

[待定系数法] $g_1(x_1,\dots,x_n)=a_k x_1^{k_1-k_2}\cdots x_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}x_n^{k_n}$

$g_1(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ 首项也为 $a_k x^k$

$b_l x^l$ $\quad l_1\ge l_2\ge\dots\ge l_n$

$g_l(x_1,\dots,x_n)=b_l x_1^{l_1-l_2}\cdots x_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}x_n^{l_n}$

$g(x_1,\dots,x_n)=\sum_{l\in I} a_l x^l \quad x^l\le x^k \quad (l_1\ge l_2\ge\dots\ge l_n)$

方法

e.g.1 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\le i<j<k\le n}(x_i^2x_j^2x_k+x_i^2x_jx_k^2+x_ix_j^2x_k^2)$

$=g(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$

首项 $x_1^2x_2^2x_3 \quad x_1^2x_2x_3x_4 \quad x_1x_2x_3x_4x_5$

∴ $g(x_1,\dots,x_n)=x_1^{2-2}x_2^{2-1}x_3^{1}+Ax_1^{2-1}x_2^{1-1}x_3^{1-1}x_4^{1}+Bx_1^{1-1}x_2^{1-1}x_3^{1-1}x_4^{1-1}x_5^{1}$

?推

$g(x_1,\dots,x_n)=x_2x_3+Ax_1x_4+Bx_5$

$f(x_1,\dots,x_n)=g(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=\sigma_2\sigma_3+A\sigma_1\sigma_4+B\sigma_5$

取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ $\quad x_5=\dots=x_n=0$ $\quad$ Vieta 形式

$\sigma_1=4\quad\sigma_2=6\quad\sigma_3=4\quad\sigma_4=1\quad\sigma_5=\dots=0$

$\underbrace{(1,2,3\quad 1,2,4\quad 1,3,4\quad 2,3,4)\times 3}$

$24+4A=12 \Rightarrow A=-3$ $\quad$ 组合考虑

∴ $f(1,1,1,1,0,\dots)=12$

取 $x_1=x_2=\dots=x_5=1$ $\quad 0\dots$

$\sigma_1=\binom{5}{1}=5\quad\sigma_2=\binom{5}{2}=10\quad\sigma_3=10\quad\sigma_4=5\quad\sigma_5=1$

$100+25A+B=30 \Rightarrow B=5$

$f(1,1,1,1,1,0,\dots)=3\times\binom{5}{3}=30$

引入another一形式多项式

$S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k \quad k=0,1,\dots$

Newton 恒等式

$$\begin{cases} k\le n & S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0 \quad \text{注意} \\ k>n & S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{k-n+1} + (-1)^n \underbrace{\sigma_n S_{k-n}} = 0 \end{cases}$$

递推 不断代入

$k=1 \quad S_1 = \sigma_1 = x_1 + \dots + x_n$

$k=2 \quad S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 = 0 \Rightarrow S_2 = \sigma_1 S_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

$k=3 \quad S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1 - 3\sigma_3$.

$\Rightarrow S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

$\vdots$

$S_k = g_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$

反表示 $S \sim \sigma$

$\Downarrow \quad \sigma_1 = S_1$

$\sigma_2 = \frac{1}{2}[-S_2 + \sigma_1 S_1] = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$

$\sigma_3 = \frac{1}{3}[S_3 - \sigma_1 S_2 + \sigma_2 S_1] = \frac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3)$

$\vdots$

$\sigma_n = h_k(S_1, S_2, \dots S_k)$

$\Rightarrow \sigma, S$ 相互可表示 -- 线性代数意义下等价

推论 $f \in k[x_1,\dots,x_n]$ 是对称多项式 则存在唯一 $h \in k[x_1,\dots,x_n]$ s.t. -- 对应

$f(x_1,\dots,x_n) = h(S_1,\dots,S_n)$

-- N-T

证明: $k=n \quad S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n S_0 = 0$

$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

$= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)\sigma^n$

令 $x = x_i \qquad x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n = 0$

全相加 $\underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^n}_{S_n} - \sigma \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^{n-1}}_{S_{n-1}} + \dots + (-1)^n \underbrace{n}_{S_0} \sigma_n = 0$

30

2° $k>n$ $S_k-\sigma_1 S_{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{k-n+1}+(-1)^n\sigma_n S_{k-n}=0$

$\Rightarrow x^{k-n}f(x)=x^k-\sigma_1 x^{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n x^{k-n}$

令 $x=x_i$ …… 其余同 1°

$k\sigma_k$ 不对称

3° $k<n$ $S_k-\sigma_1 S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k\sigma_k \underline{S_0}=(-1)^k(n-k)\sigma_k$

$(x^n-\sigma_1 x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n)(S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k)$ 的 x^n 的系数

$\Rightarrow f(x)(S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k)$

$=f(x)\left(\left(\sum_{i=1}^n 1\right)x^k+\sum_{i=1}^n x_i x^{k-1}+\cdots+\sum_{i=1}^n x_i^{k-1}x+\sum_{i=1}^n x_i^k\right)$ 推导 ~~repeat~~

$= f(x)\cdot\sum_{i=1}^n(x^k+x_i x^{k-1}+\cdots+x_i^k)$

$\deg<n$

$=f(x)\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}=f(x)\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}}{x-x_i}-\boxed{f(x)\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}}$ 不管

$\parallel$

$x^{k+1}\underline{\sum_{i=1}^n\frac{f(x)}{x-x_i}}\Rightarrow f'(x)$

$=x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}(nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^k(n-k)\sigma_k x^{n-k-1})$ 再次转换形式

$=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^k(n-k)\sigma_k x^n+\cdots+\cdots$

e.g.2 证明 三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ 的三根实部均为0

$\Leftrightarrow$ $a>0$ $ab-c>0$ $c>0$

x_1,x_2,x_3 为三根 $\begin{cases}1^\circ\ x_1,x_2,x_3 \text{ 均为实数}\\ 2^\circ\ x_1=\alpha,\quad x_2=\beta+\gamma i\quad x_3=\beta-\gamma i\end{cases}$

1° $a=-\sigma_1=-(x_1+x_2+x_3)>0$

$c=-\sigma_3>0$

P283 1,2

P293 5,6,8

充 必要性

第二章 行列式与矩阵 (Determinants Matrices)

§1 行列式的定义与性质

定义1 $\det(a_{11})=a_{11}$ $\det(A)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}$$

定义2 $\det(A)=\sum_{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

定义3 $\det(A)=\det(\vec{a_1},\dots,\vec{a_n})$ $\vec{a_1},\dots,\vec{a_n}$ 为A的n个行向量

满足 ① 反对称 $\det(\dots\vec{a_i}\dots\vec{a_j}\dots)=-\det(\dots\vec{a_j}\dots\vec{a_i}\dots)$ 关于行向量

② 多重线性性 $\det(\dots\lambda\vec{a_i}+\mu\vec{a_i'}\dots)=\lambda\det(\dots\vec{a_i}\dots)$
$+\mu\det(\dots\vec{a_i'}\dots)$

③ 规范性 $\det(\vec{e_1},\vec{e_2},\dots,\vec{e_n})=1$

定义3 → 定义2

$\vec{a_i}=(a_{i1},\dots,a_{in})=\sum_{j_i=1}^{n}a_{ij_i}\vec{e_{j_i}}$???

$\det(A)=\det(\vec{a_1},\dots,\vec{a_n})=\det(\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\vec{e_{j_1}},\dots,\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}\vec{e_{j_n}})$

$\overset{\text{提出来}}{=}\sum_{j_1=1}^{n}a_{1j_1}\det(\vec{e_{j_1}},\dots,\sum_{j_n=1}^{n}a_{nj_n}\vec{e_{j_n}})$ …… 顺序相乘 (单位向量序列)

$=\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\det(\vec{e_{j_1}},\dots,\vec{e_{j_n}})$

$=\sum_{\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\det(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$

行列式性质

(1) 互换两行行列式变号

(2) 某一行公因子可以提取行列式外面 $\det(\dots\lambda\vec{a_i},\dots)=\lambda\det(\dots\vec{a_i}\dots)$

(3) 某一行拆成两向量之和，则行列式为对应两行列式之和

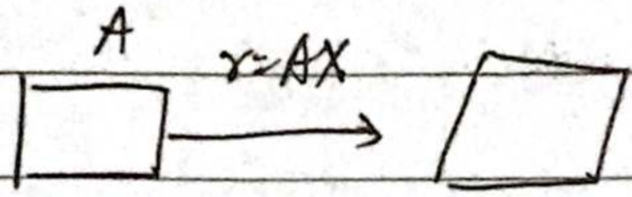
$\det(\dots\vec{a_i}+\vec{b_i}\dots)=\det(\dots\vec{a_i}\dots)+\det(\dots\vec{b_i}\dots)$

(4) 两行相等, 行列式为0

(5) … 成比例, … —

(6) 某一行乘一个常数加到另一行, 行列式不变

1*: 行列式的几何意义:



$\det(AB)=\underbrace{\det(A)\det(B)}_{面积变换比值}$

(详题..)

定理1 $AA^* = A^*A = \det(A) I$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \det A\,\delta_{ij}$ $\begin{pmatrix} i=j \\ i\neq j \end{pmatrix}$

n维空间 n-1个向量欧差积 → 唯一向量

Rie

定理2 (Laplace 展开定理) 行列:

$$\det A = \sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le n} A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_p \\ j_1 \cdots j_p \end{pmatrix}(-1)^{i_1+\dots+i_p+j_1+\dots+j_p} A\begin{pmatrix} i_{p+1} \cdots i_n \\ j_{p+1} \cdots j_n \end{pmatrix}$$

证明: $\boxed{i_1=1,\dots, i_p=p}$ key:

$$\det A = \det(\vec a_1,\dots,\vec a_n) = \det\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\vec e_{j_1},\dots,\sum_{j_p=1}^{n} a_{pj_p}\vec e_{j_p},\vec a_{p+1},\dots,\vec a_n\Big)$$

展开多重Σ

$$= \underbrace{\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_p=1}^{n}}_{\sum_{1\le j_1\dots j_p\le n,\ j_1\dots j_p 互不相同}} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\det(\vec e_{j_1},\dots,\vec e_{j_p},\vec a_{p+1},\dots,\vec a_n)$$

故换序

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{1k_1} & \cdots & a_{1k_p} \\ 0 & a_{pk_1} & \cdots & a_{pk_p} \\ & & \vec a_i & \\ & & \vec a_n & \end{vmatrix}$$

合为2Σ (换形式) //

$$= \sum_{1\le k_1<\dots<k_p\le n}\ \sum_{\binom{k_1,\dots,k_p}{j_1,\dots,j_p}} a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\det(\vec e_{j_1},\vec e_{j_2},\dots,\vec e_{j_p},\vec a_{p+1},\dots$$

$$= \sum_{1\le k_1<\dots<k_p\le n}(-1)^{k_1-1+k_2-2+\dots+k_p-p}\begin{vmatrix} a_{1k_1} & \cdots & a_{1,k_p} & \boxed{0} \\ a_{pk_1} & \cdots & a_{pk_p} & a_{p+1,k_{p+1}} \\ & \boxed{\times} & & a_{nk_{p+1}} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le n}(-1)^{1+2+\cdots+p+k_1+\cdots+k_p} A\begin{pmatrix}1 & \cdots & p\\ k_1 & \cdots & k_p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1 & \cdots & n\\ k_{p+1} & \cdots & k_n\end{pmatrix}$$

定理3 (Binet-Cauchy公式) $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times m}$

$$\det(AB)=\begin{cases}0 & n<m \quad (\text{非满秩}) \quad () \\ \det(A)\det(B) & n=m \quad ()() \\ \displaystyle\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots m\\ j_1,j_2\cdots j_m\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}j_1\, j_2\cdots j_m\\ 1\ 2\ \cdots\ m\end{pmatrix} & n>m \quad \text{取范围以求值}\end{cases}$$

3项证明:

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=\begin{pmatrix}\vec{b_1}\\ \vdots\\ \vec{b_n}\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}a_{11}\vec{b_1}+\cdots+a_{1n}\vec{b_n}\\ a_{m1}\vec{b_1}+\cdots+a_{mn}\vec{b_n}\end{pmatrix}$

$$\det(AB)=\det\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}\vec{b_{j_1}},\cdots,\sum_{j_m=1}^{n} a_{mj_m}\vec{b_{j_m}}\right)$$

$$=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\det(\vec{b_{j_1}},\cdots,\vec{b_{j_m}})$$

肯定会在数量出现0项 → 99

(1) $n<m$ 由0补足方阵 0 P117 完全展开

(2) $n=m$ $=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_n\le n} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}\det(\vec{b_1},\cdots,\vec{b_n})$ (倒序数) 6子 ($\det(\lambda I-A$ 加入多项式

$=\det(A)\det(B)$ 分开拆出 P140 2 3

(3) $n>m$

$$=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_m\le n}\ \sum_{\begin{pmatrix}k_1\cdots k_m\\ j_1\cdots j_m\end{pmatrix}} a_{1j_1}\cdots a_{mj_m}\det(\vec{b_{j_1}}\cdots\vec{b_{j_m}})$$

本 方阵

位置不一致,故拆项计算

多本理解三月去

定理4 $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times p}$ $C=AB\in F^{m\times p}$

$$C\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1,\dots,i_r \\ k_1,\dots,k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1,\dots,k_r \\ j_1,\dots,j_r \end{pmatrix} \quad \dots \text{挑出中间}$$

① $r\le n$ 按上式正常算

② $r>n$ 补0 $=0$

证: $A=\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_m} \end{pmatrix}$ $B=(\vec{b_1},\dots,\vec{b_l})$ $AB=\begin{pmatrix} \vec{a_1}\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_1}\vec{b_l} \\ \vec{a_m}\vec{b_1} & \cdots & \vec{a_m}\vec{b_l} \end{pmatrix}$

$$C_1=\begin{pmatrix} \vec{a_{i_1}}\vec{b_{j_1}} & \cdots & \vec{a_{i_1}}\vec{b_{j_r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{a_{i_r}}\vec{b_{j_1}} & \cdots & \vec{a_{i_r}}\vec{b_{j_r}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{a_{i_1}} \\ \vdots \\ \vec{a_{i_r}} \end{pmatrix}(\vec{b_{j_1}},\dots,\vec{b_{j_r}})=A_1B_1 \quad A_1\in F^{r\times n} \quad B_1\in F^{n\times r}$$

$$\therefore \det(C_1)=\det(A_1B_1)=\sum_{1\le k_1<\dots<k_r\le n} A_1\begin{pmatrix} 1,\dots,r \\ k_1,\dots,k_r \end{pmatrix} B_1\begin{pmatrix} k_1,\dots,k_r \\ 1,\dots,r \end{pmatrix}$$

E.g.1 (Cauchy不等式) $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)$$

等号成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$

证. $A=\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ $AA^T=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum a_ib_i \\ \sum a_ib_i & \sum b_i^2 \end{pmatrix}$

$$\because \det(AA^T)=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-(\sum a_ib_i)^2\ge 0$$

$$=\sum_{1\le j_1<j_2\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\sum_{1\le j_1<j_2\le n}\left(A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}\right)^2\ge 0$$

等号成立 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow a_{j_1}b_{j_2}-a_{j_2}b_{j_1}=0 \Rightarrow \frac{a_{j_1}}{b_{j_1}}=\frac{a_{j_2}}{b_{j_2}}$

定理5 (Cramer 法则)　　　$\lor$ 否则多维解

$A\in F^{n\times n}$ $b\in F^n$ … $\underline{\det(A)\neq 0}$ 则 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有唯一解

$\Rightarrow x=\left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)},\frac{\det(A_2)}{\det(A)},\dots,\frac{\det(A_n)}{\det(A)}\right)^T$　　$A_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 第j列

$\vec{x}=A^{-1}b=\frac{A^*}{\det(A)}\vec{b}$ … 原理

§2 行列式计算

1. 化行列式为三角形式

Eg.1 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\\ \vdots & & & & \\ \vdots & n & & & \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1\end{vmatrix}$ 差分 $=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 1 & 1 & & n-1\\ 1 & 1 & 1 & n-1 & \\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$ 各列 $=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & - & - & & -n\\ 1 & & & & & \\ 1 & & & =n & & \\ 1 & -n & - & - & & 0\end{vmatrix}$ $\times\frac{1}{n}+1$列 $=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n} & 1 & 2 & \cdots & n\\ 0 & & & & -n\\ \vdots & & & & -n\\ 0 & & & -n & \end{vmatrix}$

$=(-1)^{[\frac{n}{2}]}\begin{vmatrix} \frac{n+1}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ & -n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & -n\end{vmatrix}=(-1)^n(-1)^{[\frac{n}{2}]}n^{n-1}\times\frac{n+1}{2}$

2. 建立递推公式

$R_i=0 \Leftrightarrow$ 两两不相等

Eg.2 (Vandermonde)

行 $\times x_1$ 相减

$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_n^2\\ \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & (x_2-x_1) & & x_n-x_1\\ \vdots & x_2(x_2-x_1) & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}=(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)\Delta_{n-1}(x_2\dots$

$\Delta_2=x_2-x_1$

$\therefore \Delta_n=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$ …… 结合递归

E.g.3 $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & a & b & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2}$ $\quad \begin{cases} \Delta_1 = a \quad \Delta_2 = a^2 - bc \\ \Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \end{cases}$

改写为 $\Delta_n - a\Delta_{n-1} + bc\Delta_{n-2} = 0$ 为特征多项式解 $t = \lambda_1, \lambda_2$

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 & \Delta_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \\ \lambda_1 = \lambda_2 & \Delta_n = (c_1 + nc_2)\lambda_1^n \end{cases}$$

key: 考虑行行作差降阶

E.g.4 $\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$

从基础观察，行与行相减

$$\frac{1}{a_i+b_j} - \frac{1}{a_1+b_j} = \frac{a_1-a_i}{(a_i+b_j)(a_1+b_j)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & & & \\ & & & \\ \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & & & \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \end{vmatrix} = (a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n) \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & & & \frac{1}{(a_2+b_n)(a_1+b_n)} \\ \frac{1}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & & & \frac{1}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n) \cdot \frac{1}{a_1+b_1} \cdot \frac{1}{a_1+b_2} \cdots \frac{1}{a_1+b_n} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

求和，类行变换地做列变换

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{a_2+b_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \qquad = \frac{\prod_{i=2}^{n} (a_1-a_i)(b_1-b_i)}{\prod_{j=1}^{n} (a_1+b_j)(a_j+b_1)} \cdot \Delta_{n-1} = \frac{\prod_{1\le k<i\le n} (a_k-a_i)(b_k-b_i)}{\prod_{j=1}^{n} (a_k+b_j)(a_j+b_k)}$$

3、拆行(列)、… 利用线性性

E.g.5 $\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_nb_1 & \cdots & & x_n+a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & & \\ & & & \\ a_nb_1 & & & x_n+a_nb_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & & \vdots \\ & & & \\ a_nb_1 & & & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$

$$= x_1 \begin{vmatrix} x_2+a_2b_2 & & a_2b_n \\ & \ddots & \\ a_nb_1 & & x_n+a_nb_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & x_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{vmatrix} \Leftarrow a_1b_1x_2x_3\cdots x_n$$

$$= a_1b_1x_2\cdots x_n + x_1\left(x_2\begin{vmatrix} x_3+a_3b_3 & & a_3b_n \\ & \ddots & \\ & & x_n+a_nb_n\end{vmatrix} + a_2b_2x_3\cdots x_n\right)$$

$$= a_1b_1x_2\cdots x_n + a_2b_2x_1x_3\cdots x_n + \cdots + a_nb_nx_1\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_n = x_1x_2\cdots x_n\left(1+\frac{a_1b_1}{x_1}+\frac{a_2b_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n}\right)$$

$x_i \neq 0$

E.g.6

$$\Delta_n(x,y,a_1,a_2,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x\\ y & a_2 & \ddots & x\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ y & \cdots & y & a_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x\\ & a_2 & & \vdots\\ & & \ddots & \\ y & \cdots & y & x\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x\\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_n-x\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-y & x-y & \cdots & x-y & 0\\ 0 & a_2-y & \ddots & x-y & \vdots\\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}-y & 0\\ y & y & \cdots & y & x\end{vmatrix}$$

$$+(a_n-x)\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x\\ y & a_2 & \ddots & x\\ \vdots & & \ddots & \\ y & \cdots & y & a_{n-1}\end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{对称性质}}$ $= x(a_1-y)(a_2-y)\cdots(a_{n-1}-y)+(a_n-x)\Delta_{n-1}$ ⇒ 算出 Δ_{n-1} 代回得解

$= y(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+(a_n-y)\Delta_{n-1}$

四、加边

E.g.7

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & & & a_1b_n\\ & x_2+a_2b_2 & & \\ & & \ddots & \\ a_nb_1 & \cdots & & x_n+a_nb_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & x_1+a_1b_1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & x_n+a_nb_n\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_n\\ -a_1 & x_1 & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ -a_n & 0 & & x_n\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{a_1b_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_nb_n}{x_n} & b_1 & \cdots & b_n\\ 0 & x_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & x_n\end{vmatrix} = x_1\cdots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)$$

P130 4 (1)(3)(4)

P140 1.(4)(5) ✓

Date Self

行列式定义 ↙正三角序→顺

$$\Delta=\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}(-1)^{\tau(i_1,i_2,\dots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}\cdots a_{i_nn}\quad\cdots①$$

[redacted] $=\sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\dots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\quad\cdots②$

证上式相等 $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ 来自不同的列

按所在列指标从小到大重排：$a_{i_11}a_{i_22}\dots a_{i_nn}$

其中每个 i_j $(1\le j\le n)$ 是原列指标 $j_{i_j}=j$ 的行指标 i 按排序 i_j ① 大 排法列排

看 $a_{1j_1}, a_{2j_2}\dots$ 重排

列指标 j_p 与 j_q 对换时，引起行指标 p, q 对换

可逆性 设列指标排列 $(j_1,\dots,j_n)$ 经 s 次对换变为标准排列 $(1,2,\dots,n)$

⇒ 乘积中各因子的顺序相应地重新排列为 $a_{i_11}a_{i_22},\dots a_{i_nn}$

各行指标排列由标准排列经 s 次对换变为 $(i_1,i_2,\dots,i_n)$

s 为偶时 $(j_1,\dots,j_n)$ 与 $(i_1,\dots,i_n)$ 与标准排列同为偶排列

s 为奇时，$(\dots$ 与 $(\dots)$ 与标准排列相反，为奇排列

∴ $(-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)}=(-1)^{s}=(-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)}$

$(-1)^{\tau(j_1,\dots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(i_1,\dots,i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\dots a_{i_nn}$

加权完备性 当 $(j_1,\dots,j_n)$ 取遍所有 n 元排列时，$(i_1,i_2,\dots,i_n)$ 也取遍所有 n 元排列

\#

P130 4.(2)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & a_{n-1} & 0 \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}$$

$\Delta_1=a_1\qquad \Delta_2=a_1a_2-b_2c_2$

$\Delta_3=a_3(a_1a_2-b_2c_2)+c_3(-a_2b_3)$

$=a_1a_2a_3-a_2b_3c_3-a_3b_2c_2$

$n\ge 3$ 时

$$\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}+(-1)^{n+1}c_n\begin{vmatrix} b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & 0 & \\ & \ddots & \\ & a_{n-1} & 0\end{vmatrix}=a_n\Delta_{n-1}-c_nb_na_2\cdots a_{n-1}$$

递推：$\Delta_n=a_na_{n-1}\cdots a_3(a_1a_2-b_2c_2)-c_nb_na_2\cdots a_{n-1}-c_{n-1}b_{n-1}a_2\cdots a_{n-2}a_n\cdots$

$=a_1a_2\cdots a_n-a_2a_3\cdots a_n\left(\frac{b_2c_2}{a_2}+\frac{b_3c_3}{a_3}+\dots+\frac{b_nc_n}{a_n}\right)$

设 $a_2 \cdots a_n \neq 0$ $n \geq 3$ 时

$\therefore$ $\Delta_n = a_2 a_3 \cdots a_n \left(a_1 - \frac{b_2 c_2}{a_2} - \cdots - \frac{b_n c_n}{a_n}\right)$

换写法:

$$\Delta_n = a_1 \cdots a_n - \sum_{j=2}^{n} b_j c_j \prod_{2 \leq i \leq n, i \neq j} a_i$$

P130 5

① 反对称 $A^T = -A$ 结论: 奇数阶反对称方阵的行列式为 0

② 偶数阶反对称方阵所有元代数余子式之和为 0

证: ① $\det(A^T) = \det(A) = (-1)^n \det(A)$ $\Rightarrow$ $\det(A) = 0$

② A_{ii} 为反对称方阵 $\det(A_{ii}) = 0$

$$\det(A_{ij}) = \det(A_{ji}^T) = (-1)^{2n-1} \det(A_{ij}) = -\det(A_{ij})$$

$$\det(A_{ij}) + \det(A_{ji}) = 0$$

行列式展开

· 定理 2.3.3

$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{ij} = \begin{cases} \Delta, & k = i; \\ 0, & k \neq i; \end{cases}$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ij} \begin{cases} \Delta & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$;

P133

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_n = 2\cos\theta\, \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

$\Delta_1 = 2\cos\theta$ $\Delta_2 = 4\cos^2\theta - 1 = 1 + 2\cos 2\theta$

由特征值法 解为 $\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{i\theta}, e^{-i\theta}$

$$\begin{cases} x + y = \Delta_1 \\ q_1 x + q_2 y = \Delta_2 \end{cases}$$

$$\Delta_n = x q_1^{n-1} + y q_2^{n-1}$$

$$= \frac{\Delta_1 q_2 q_1^{n-1} - \Delta_2 q_1^{n-1} + \Delta_2 q_2^{n-1} - \Delta_1 q_1 q_2^{n-1}}{q_2 - q_1}$$

$$= \frac{\Delta_1 q_1 q_2 (q_1^{n-2} - q_2^{n-2}) + \Delta_2 (q_2^{n-1} - q_1^{n-1})}{q_2 - q_1}$$

$q_1 \cdot q_2 = 1$ $q_2 - q_1 = 2i\sin\theta$

$q_2^{n-1} - q_1^{n-1} = (\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta) - (\cos(n-1)\theta + i\sin(n-1)\theta)$

$= 2i\sin(n-1)\theta$ $q_1^{n-2} - q_2^{n-2} = -2i\sin(n-2)\theta$

$\Delta_1 = 2\cos\theta \qquad \Delta_2 = 1+2\cos 2\theta$

$$\Delta_n = \frac{2\cos\theta\,[-2i\sin(n-2)\theta] + (1+2\cos 2\theta)[2i\sin(n-1)\theta]}{2i\sin\theta}$$

$$= \frac{-2\cos\theta\sin(n-2)\theta + \sin(n-1)\theta + 2\cos 2\theta\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{-[\sin(n-1)\theta + \sin(n-3)\theta] + \sin(n-1)\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(n-3)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

P140 1.(5) 最后一点步骤

$x^2 \neq 1$ 时 $\Delta_n = \frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1} = x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + 1$

显然 Δ_n 为 x 的多项式，因而为 x 的连续函数。因此，$x^2=1$ 时

$$\Delta_n = \lim_{x^2 \to 1}(x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + 1) = n+1$$

可见对所有 x 均成立

P140 1.(3)

$$\begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & a+b & a & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_{n-1} - a\begin{vmatrix} b & a & & \\ 0 & a+b & b & \\ \vdots & & \ddots & b \\ 0 & \cdots & & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)\Delta_{n-1} - ab\Delta_{n-2} \dots$$

1.(2)

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & & & \\ \vdots & & \ddots & & a \\ -a & & & -a & x \end{vmatrix} \qquad \Delta_n = D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ -a & x & & \\ & & \ddots & a \\ -a & & -a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x & a & a \\ \vdots & & \ddots & a \\ -a & & -a & x \end{vmatrix}$$

D_1 第一行加到各行

（处理为上三角）

$$a\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x+a & 2a \cdots & 2a \\ & & x+a & \\ 0 & \cdots & 0 & x+a \end{vmatrix} = a(x+a)^{n-1} = D_1 \qquad D_2 = (x-a)\Delta_{n-1}$$

$\therefore \Delta_n = a(x+a)^{n-1} + (x-a)\Delta_{n-1}$

Δ_n中将a换为$-a$ 得转置 $\Delta_n^T = (-a)(x+a)^{n-1} + (x+a)\Delta_{n-1}^T$

又 $\Delta_n^T = \Delta_n$

$a \neq 0$时 $\Delta_{n-1} = \dfrac{a(x+a)^{n-1} + a(x-a)^{n-1}}{(x+a)-(x-a)} = \dfrac{(x+a)^{n-1} + (x-a)^{n-1}}{2}$

$\therefore \Delta_n = \dfrac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$

$a \neq 0$时 $\Delta_n = x^n = \dfrac{(x+0)^n + (x-0)^n}{2}$ $\Rightarrow \Delta_n = \dfrac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$ 对所有a成立

Date 2018.10.25

↙解多项式,找根

6. 视行列式为某个变量的多项式

Eg.8
$$\begin{vmatrix} x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & & \vdots \\ a_1 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & x \end{vmatrix}_{n\times n} = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1x + c_0 = f(x)$$

又 $x-a_1 \mid f(x)$

← 全加第一列: $x+a_1+\cdots+a_{n-1}$

$$\Delta = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})(x+a_1+\cdots+a_{n-1})$$

Eg.9 排列组合 $\pm x_{i_1}^{1} x_{i_2}^{2}\cdots x_{i_n}^{n-1}$ → $\deg(f) = \frac{n(n-1)}{2}$

x_i 为主变元 令 $x_i = x_j$ $(x_i-x_j) \mid f$

$\downarrow$

x_2-x_1

x_3-x_2 x_3-x_1

$\cdots\cdots$

$\Rightarrow \prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \mid f$

$\therefore f = C\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$ $C=1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ x_1^2 & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$ Vandermonde

补全为 $(n+1)\times(n+1)$, 且加入未知 x

Eg.10
$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & & \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n & x \\ x_1^k & x_2^k & & x_n^k & x^k \\ x_1^n & x_2^n & & x_n^n & x^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_j-x_i)\,\underline{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

$$= (-1)^{n+2}\Delta_0 + (-1)^{n+3}\Delta_1 x + \cdots + (-1)^{n+k+1}\Delta_k x^k + \cdots$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(x_j-x_i)(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}x^k + \cdots)$$

$$= \prod_{1\le j<i\le n}(x_j-x_i)(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}(x_1,\ldots,x_n) = (-1)^{n+k+1}\Delta_k$$

$\Rightarrow$?

E.g.11

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix} = f(a_1,\dots a_n, b_1,\dots,b_n)$$

$$f = C\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i) \qquad \begin{cases} a_i = \frac{1}{2}+ix \\ b_j = \frac{1}{2}-jx \end{cases}$$ 取特殊值 $\to C$

6. 利用矩阵乘法 $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times m}$

$\det(AB) = \det A\det B$ $\det(I^{(m)}-AB) = \det(I^{(n)}-BA)$

E.g.12 $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & & s_n \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{n-1} & \cdots & & s_{2n-2}\end{vmatrix}$ $s_k = x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$

若矩阵各元为好多项相加

$\Rightarrow$ 考虑分为2个矩阵乘积

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & & & \\ s_{n-1} & \cdots & & s_{2n-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

E.g.13 $f_k(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) = \overset{k-1次}{x^{k-1}} + c_{k-1,k-2}x^{k-2}+\dots+c_{k-1,0}$

$f_1(x)=1$ …节省

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & (x_3-x_1)(x_3-x_2) & & 0 \\ 1 & & & & (x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ & 1 & \ddots & c_{n,n-1} \\ & & & 1\end{pmatrix} (c_{ii}=1)$$

行列式基础运算

E.g.14 $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & & a_2b_n \\ a_nb_1 & \cdots & & 1+a_nb_n\end{vmatrix} = I^{(n)} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}(b_1 \cdots b_n)$

$\therefore \det(A) = 1+(b_1\dots b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$

$= 1+a_1b_1+\dots+a_nb_n$

$= 1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

E.g.15 $\begin{vmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n \\ \cos 2\theta_1 & & & \\ & & & \\ \cos n\theta_1 & & & \cos n\theta_n \end{vmatrix}$

$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos(k\theta) = P_k(\cos\theta) \quad P_k(x) = 2^{k-1}x^k + \cdots$

$$= \begin{pmatrix} P_1(\cos\theta_1) & \cdots & P_1(\cos\theta_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_n(\cos\theta_1) & \cdots & P_n(\cos\theta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 2 \ddots & \\ 0 & & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cdots & \cos\theta_n \\ \cos^2\theta_1 & & \vdots \\ \vdots & & \\ \cos^n\theta_1 & \cdots & \cos^n\theta_n \end{pmatrix}$$

Vandermonde 模型

循环矩阵

E.g.16 $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$

令 w 为 $x^n = 1$ 的 n 次单位根 $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & w & w^{n-1} \\ w^{n-1} & 1 & w^{2(n-1)} \\ w & w^2 & w^{n(n-1)} \end{pmatrix}$

$AB = B\,\mathrm{diag}(f(1), f(w), \ldots, f(w^{n-1}))$

P155 1, 2, 3

Date: 2018.10.30

小测讲解

1. $$\begin{vmatrix} 1+x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_1+y_n \\ & 1+x_2+y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+x_n+y_n \end{vmatrix} \overset{\text{加边}}{=} \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_n \\ 0 & 1+x_1+y_1 & & \\ \vdots & & 2+x_2+y_2 & \\ 0 & & & 1+x_n+y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_n \\ -1 & 1+x_1 & \cdots & x_1 \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & x_n & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

EASY变形　　降阶公式

$$= \left|\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & y_1 & \cdots & y_n \\ \hline x_1 & -1 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_n & -1 & & & 1 \end{array}\right| = \det\left(I^{(n)} + \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(I^{(2)} + \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}\right)$$

3. $A, B \in F^{n\times n}$　　AB与BA k阶主子式之和相等

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (AB)\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} (BA)\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

$$\text{左} = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

$$\text{右} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} B\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det(\lambda I^{(n)} - AB) = \det(\lambda I^{(n)} - BA)$$ #

注

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \sum_{1\le j_1\le n} A\begin{pmatrix} j_1 \\ j_1 \end{pmatrix}\lambda^{n-1} + \sum_{1\le j_1<j_2\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix}\lambda^{n-2} + \cdots + (-1)^k \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\lambda^{n-k}$$

$$\cdots + (-1)^n \det(A)$$

§3 矩阵运算

1. 线性运算—加、数乘

满足八条运算规则

(1) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (2) $A+B=B+A$

(3) $A+O=O+A=A$ (4) $A+(-A)=O$

(5) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(7) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ (8) $1\cdot A=A$

$\Rightarrow$ 构成线性空间 $F^{m\times n}$

2. 乘法

$\rightarrow$ 引入线性映射概念 乘 $\leftrightarrow$ 线性映射的复合

注: ① $AB=AC$ $A\neq 0$ $\not\Rightarrow$ $B=C$

+ A^{-1} 存在 $\longrightarrow$ $B=C$

② $A^2=-I$ (求) $\leftarrow$ 从几何本质理解

$-I=\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}}$ 绕原点转 π

$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

3. 初等变换

① P_{ij} 交换两列 列: $P_{ij}A$ 行: AP_{ij} ② $D_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$ 列数乘

$=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & 1\end{pmatrix}$

将 i 列乘 λ 加 j 行

③ $T_{ij}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1\end{pmatrix}$ (λ 在 i 行 j 列) $T_{ij}(\lambda)A$

4. 逆矩阵 · 基元素个数 = 维度

$A\in F^{n\times n}$ 找 $X\in F^{n\times n}$ s.t. $AX=I^{(n)}$

① $A^{-1}=\frac{A^*}{\det(A)}$

② 解 $AX=I$

Eg.1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 A^{-1}:

$\Delta_n=\det A=n+1$ 设 $i\le j$ $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{i-1}\Delta_{n-j}$

$=(-1)^{i+j}((n+1)\min(i,j)-ij)$

③ 初等变换

$(A,I)\xrightarrow{\text{行变换}}(I,\underset{\sim}{A^{-1}})$

④ 找矩阵的化零多项式

$f(A)=0$ $f(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_1x+a_0$

$A^k+a_{k-1}A^{k-1}+\dots+a_0I=0$ $A\boxed{(A^{k-1}+a_{k-1}A^{k-2}+\dots+a_1I)}=-a_0I$

Eg.2 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$N=A+I\to N^2=nN$ $(A+I)^2=n(A+I)$ $A^2+(2-n)A+(1-n)I=0$

$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{n-2}{n-1}I+\frac{1}{n-1}A$

5. 分块运算

Schur公式

$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ \underline{-CA^{-1}} & I^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & -A^{-1}B \\ 0 & I^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$

*相乘 打洞法

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ -CA^{-1} & I^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & -A^{-1}B \\ & I^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

E.g.3 $A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{array}\right)$ 求A^n

$=\begin{pmatrix} B & I \\ & B \end{pmatrix}$ $A^n=\begin{pmatrix} B^n & nB^{n-1} \\ & B^n \end{pmatrix}$ …

E.g.4 $A, B, C, D\in F^{n\times n}$ 且$AC=CA$ 证明: $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det(AD-CB)$

1°. A可逆

$$\begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ -CA^{-1} & I^{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$\therefore \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)=\det(AD-CB)$

2° A不可逆 (摄动法)

$A_\varepsilon=\varepsilon I+A$ $A_\varepsilon C=CA_\varepsilon$ 理解

$\det(A_\varepsilon)=\det(\varepsilon I+A)=\varepsilon^n+\dots+\det(A)$

$\exists\delta>0$, $\varepsilon\in(0,\delta)$ A可逆

$\det\begin{pmatrix} A_\varepsilon & B \\ C & D \end{pmatrix}=\det(A_\varepsilon D-CB)$ 令$\varepsilon\to0^+$

E.g.5 $\det(I^{(m)}-AB)=\det(I^{(n)}-BA)$ $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times m}$

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & A \\ B & I^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 \\ -B & I^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I^{(m)}-AB & A \\ 0 & I^{(n)} \end{pmatrix}$$

E.g.6 求 $\begin{pmatrix} A & S \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1}$ $A \in F^{m\times m}$ $B \in F^{n\times n}$ $S \in F^{m\times n}$、A、B 求逆

$$\begin{pmatrix} A & S \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A^{-1}S \\ & I \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} I & S \\ & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -S \\ & I \end{pmatrix}$$

P175 7 P124 4

P195 2 8

P214 1 4 5

例7. $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times m}$ 且 $I^{(m)}-AB$ 可逆，证明：$I^{(n)}-BA$ 可逆，并求其逆 2018.10.31

可逆：$\det(I^{(m)}-AB)=\det(I^{(n)}-BA)\neq 0$

key 求逆：

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ -B & I^{(n)}\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} I^{(m)} & A\\ B & I^{(n)}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} I^{(m)} & -A\\ 0 & I^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ 0 & I^{(n)}-BA\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & -A\\ 0 & I^{(n)}\end{pmatrix}\boxed{\begin{pmatrix} I^{(m)} & A\\ B & I^{(n)}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ -B & I^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I^{(m)}-AB & 0\\ 0 & I^{(n)}\end{pmatrix}$$

key. 行列变换及其对应初等阵 ※建立联系

逆过：

$$\begin{pmatrix} I^{(m)} & A\\ B & I^{(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ B & I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & 0\\ 0 & I^{(n)}-BA\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & A\\ 0 & I^{(n)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I^{(m)} & A\\ 0 & I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)}-AB & \\ & I^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I^{(m)} & \\ B & I^{(n)}\end{pmatrix}$$

两边求逆：$(I^{(n)}-BA)^{-1}=I^{(n)}+B(I_m-AB)^{-1}A$.

前提
正定阵 ⇒ 对称阵

顺序
例8：$A\in R^{n\times n}$ A的各阶主子式均为正，且非对角元均为负。

证明：A^{-1} 的所有元素均为正

证：归纳法 $n=1$ 时 显然 $A^{-1}=a_{11}^{-1}>0$

设结论对 $n-1$ 成立

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & \alpha\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix} \quad A_1\in F^{(n-1)\times(n-1)}$$

列向量

左行右列

$$\begin{pmatrix}I^{(n-1)} & 0\\ -\beta^T A_1^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & \alpha\\ \beta^T & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(n-1)} & -A_1^{-1}\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & C\end{pmatrix} \quad C=a_{nn}-\beta^T A_1^{-1}\alpha$$

两边取行列式 $\det(A)=\det(A_1)\cdot C$ $C>0$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}I^{(n-1)} & -A_1^{-1}\alpha\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & \\ & C^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I^{(n-1)} & 0\\ -\beta^T A_1^{-1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}+CA_1^{-1}\alpha\beta^T A_1^{-1} & \overset{\text{正}}{\underline{-C^{-1}A_1^{-1}\alpha}}\\ \underset{\text{正}}{\underline{-C^{-1}\beta^T A_1^{-1}}} & C^{-1}\end{pmatrix}$$

§4 秩与相抵 (矩阵的运算技巧)

定义1 $A\in F^{m\times n}$ A的非零子式的最大阶数称为A的秩 记为 $\mathrm{rank}(A)=r(A)$

(代数,行列式定义)

性质 最多有多少行/列线性无关

$r\uparrow$ 相关性$\downarrow$

定理1 $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times p}$

(1) $r(AB)\le\min(r(A),r(B))$

(2) P,Q可逆 $r(PAQ)=r(PA)=r(AQ)=r(A)$

特别地,初等变换不改变矩阵的秩

证: (1) $\min(r(A),r(B))=r$ 不妨设$r(A)=r$

$(AB)\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{r+1}\\ j_1\cdots j_{r+1}\end{pmatrix}=\sum\limits_{1\le k_1<\cdots<k_{r+1}\le n} A\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{r+1}\\ k_1\cdots k_{r+1}\end{pmatrix}B\begin{pmatrix} k_1\cdots k_{r+1}\\ j_1\cdots j_{r+1}\end{pmatrix}=0$

$\uparrow$ 从最大阶+1=0证

$r(AB)<r$

几何: 两个空间复合的生成空间维度小 (交集)

(2) P可逆

$\swarrow$ 生成空间对象→写法

$A=P^{-1}PA$ $r(A)\le r(PA)$ $r(PA)\le r(A)$

初等变换

定理2 $A\in F^{m\times n}$ 则存在可逆方阵P,Q,使 $A=P\begin{pmatrix} I^{(r)} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$ $r=r(A)$

定义2 $A,B\in F^{m\times n}$ B是A经过有限次初等变换所得矩阵,则称 $A\sim B$

A与B相抵 (Equivalent)

$A\sim\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 相抵标准形

根据rank分

定理3 $A\sim B \Leftrightarrow \exists$可逆阵$P,Q$ st. $B=PAQ \Leftrightarrow r(A)=r(B)$

最多 $1+\min(m,n)$

⇒ 具体例子. 关系与应用

例4: $A\in F^{m\times n}$ $B\in F^{n\times p}$ $C\in F^{p\times q}$ 证 $r(AB)+r(BC)-r(B)\le r(ABC)$

令 $B=I^{(n)}$ $r(A)+r(C)-n\le r(AC)$ ← 估计上下界 (+上)

$\Leftrightarrow$ $r(AB)+r(BC)\le r(ABC)+r(B)$

$$r\begin{pmatrix} AB & \\ & BC \end{pmatrix} \le r\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix}$$ 消

初等变换变形

$$r\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} BC & B \\ & AB \end{pmatrix}$$

$$\ge r(BC)+r(AB)$$

例5 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$

$$r\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \ge r(A+B)$$ 任何矩阵 rank ≥ 子矩阵 rank

例6 $A\in F^{n\times n}$ 则 $A^2=A \Leftrightarrow r(A)+r(I-A)=n$

$(A(A-I)=0)$

$$r\begin{pmatrix} A & \\ & I-A \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & A \\ A & -I \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A^2-A & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \underline{r(A^2-A)+n}$$

例7 $A\in F^{m\times n}$ 求 $X\in F^{m\times n}$ 满足 $\underline{A^TX=X^TA}$ ⇒ 转置仍用标准形

$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ 从0开始构造

$$Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{P^TXQ^{-1}}_{Y} = X^TP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Y = Y^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ 则 $Y_{11}^T=Y_{11}$ $Y_{12}=0$ $P^TXQ^{-1}=Y=\begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X=(P^{-1})^T\begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix}Q$ 其中 $\underline{Y_{11}^T=Y_{11}}$

Last Step:
回带验证

P225
1 5 7
P232
1 4

基本题证

例1：$r\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$ 相加→相乘

证：$r(A)=r$ $r(B)=s$

$A\begin{pmatrix}i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r\end{pmatrix}\neq 0$ $B\begin{pmatrix}i_1' \cdots i_s' \\ j_1' \cdots j_s'\end{pmatrix}\neq 0$

① 定义证

② 相抵标准形证

思路：

① 就是标准形，怎么处理

② 处理成标准形证

$A=P_1\begin{pmatrix}I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1$ $B=P_2\begin{pmatrix}I_s & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_2$

$$\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & \\ & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{r0} & \\ & I_{s0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1 & \\ & Q_2\end{pmatrix}$$

← 化需行变换

例2：$A\in F^{m\times n}$ 列满秩 ⟺ ∃m阶可逆阵P s.t. $A=P\begin{pmatrix}I^{(n)} \\ 0\end{pmatrix}$

证：$A=P\begin{pmatrix}I^{(n)} \\ 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}Q \\ 0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}Q & \\ & I^{(m-n)}\end{pmatrix}=\tilde{P}\begin{pmatrix}I^{(n)} \\ 0\end{pmatrix}$ ← Q拿左边 前提单位阵性质好

引：行满秩 $A=\begin{pmatrix}I^{(n)} & 0\end{pmatrix}Q$

例3：$A\in F^{m\times n}$ 证明：$r(A)=r$ ⟺ ∃列满秩阵 $B\in F^{m\times r}$ 及行满秩阵 $C\in F^{r\times n}$

s.t. $A=BC$

$$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{m\times n}=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{m\times r}\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}_{n\times r}$$

↙ 数据压缩原理！

数据结构！！

$m=n=1000$ $r=10$

⇒

证：$A=\begin{pmatrix}I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\end{pmatrix}$

$PAQ=\underbrace{P\begin{pmatrix}I_r \\ 0\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}I_r & 0\end{pmatrix}Q}_{C}$

⇐ $A=BC=P\begin{pmatrix}I_r \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q$

Date 2018.11.5

相抵应用

Eg.8 $A\in F^{n\times n}$: $A^2=A$ 证明:存在可逆方阵 P s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ 这里 $r=rank(A)$

证明: $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

$\cancel{P}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\cancel{Q}=\cancel{P}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\cancel{Q}$

实用技巧: 矩阵分块

令 $QP=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}$ 代入上式 $\begin{pmatrix}R_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow R_{11}=I_r$

对 R_{12}, R_{21}, R_{22} 无要求, 任意都满足...

$\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}I_r&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}P^{-1}$ $\quad A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}I_r&R_{12}\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ 相似

→ 作相似变换

$\begin{pmatrix}I_r&R_{12}\\0&I_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&R_{12}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&-R_{12}\\0&I_{n-r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 新 $P'=\left(P\begin{pmatrix}I_r&-R_{12}\\&I_{n-r}\end{pmatrix}\right)^{-1}$

Eg.9 $A\in R^{m\times n}$ 证: $r(A)=r(AA^T)$

设 $r(A)=r$ 存在可逆阵 P, Q s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

$AA^T=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\underbrace{QQ^T}_{\text{分块}}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^T$ 令 $Q=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$ $QQ^T=\begin{pmatrix}Q_1Q_1^T&Q_1Q_2^T\\Q_2Q_1^T&Q_2Q_2^T\end{pmatrix}$

$\rightarrow r \Leftrightarrow |Q_1Q_1^T|\neq 0$

$r(AA^T)=r\left(\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}QQ^T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix}Q_1Q_1^T&0\\0&0\end{pmatrix}$

$Q_1\in R^{r\times n}$ $\quad \det(Q_1Q_1^T)=\sum_{1\le j_1<\dots<j_r\le n}Q_1\begin{pmatrix}1&\cdots&r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}Q^T\begin{pmatrix}j_1&\cdots&j_r\\1&\cdots&r\end{pmatrix}$

$=\sum_{1\le j_1<\dots<j_r\le n}Q_1\begin{pmatrix}1&\cdots&r\\j_1&\cdots&j_r\end{pmatrix}^2$ >0

Cauchy-Schwarz

Eg.10 A为实对称方阵且 $r(A)=r$, 证明: A至少有一个r阶主子式非0

pf: $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$ $\quad A=A^T$ $\quad P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q=Q^T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^T$

$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q(P^T)^{-1}=P^{-1}Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$ 令 $P^{-1}Q^T=R=\begin{pmatrix}R_{11}&R_{12}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}$

T

$\begin{pmatrix}I_r&0\\0&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-R_{11}&R_{22}\\R_{21}&R_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{11}^T&R_{22}^T\\R_{21}^T&R_{22}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

套路

标准形
↓
A条件
↓
P,Q关系
↓
常用求特征

相抵

$\Rightarrow R_{11}^T = R_{11} \quad R_{21}=0 \qquad \therefore P^{-1}Q^T = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \quad R_{11}=R_{11}^T$ 对称

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{11}^T & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}P^T = P\begin{pmatrix} R_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^T$$

$$\Rightarrow A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ i_1 \cdots i_r \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 \cdots r \\ i_1 \cdots i_r \end{pmatrix}^2 \underbrace{\det(R_{11})}_{\neq 0}$$

$\exists\ 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ s.t. $P\begin{pmatrix} 1 \cdots r \\ i_1 \cdots i_r \end{pmatrix} \neq 0$

E.g.11 设 $A \in F^{m\times n} \quad B \in F^{n\times m} \qquad \lambda^n \det(\lambda I^{(m)} - AB) = \lambda^m \det(\lambda I^{(n)} - AB)$

证明: $r(A)=r \quad A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q \qquad \lambda I^{(m)} - AB = \lambda I^{(m)} - P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QB$

$$= P\left(\lambda I^{(m)} - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QBP\right)P^{-1}$$

$\therefore \det(\lambda I^{(m)} - AB) = \det\left(\lambda I^{(m)} - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QBP\right)$

$\det(\lambda I^{(n)} - BA) = \det\left(\lambda I^{(n)} - QBP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

令 $QBP = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(\lambda I^{(m)} - AB) = \det\left(\lambda\begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$$= \lambda^{m-r}\det(\lambda I_r - R_{11})$$

$\therefore \lambda^n \det(\lambda I^{(m)} - AB) = \lambda^{n+m-r}\underbrace{\det(\lambda I_r - R_{11})}$ 巧为中间项

11月11日 下午3:00-5:00

多项式、行列式、矩阵

§5 广义逆矩阵

定义1 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 称 $X \in F^{n\times m}$ 为 A 的 penrose 广义逆

若
$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ \overline{(AX)}^T = AX \\ \overline{(XA)}^T = XA \end{cases}$$
记为 A^+

定理一: $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ Penrose 广义逆存在唯一, 且 $A=BC$ 为 A 的满秩分解, 则 $A^+ = \bar{C}^T(C\bar{C}^T)^{-1}(\bar{B}^TB)^{-1}\bar{B}^T$

证明: 唯一性, 设 X_1, X_2 均为 A 的广义逆, 证 $X_1 = X_2$

$$X_1 = X_1AX_1 = X_1AX_2AX_1 = X_1\overline{(AX_2)}^T\overline{(AX_1)}^T = X_1\overline{(AX_1AX_2)}^T = X_1\overline{(AX_2)}^T = X_1AX_2$$

· key 利用已知条件重新组合

$$= X_1AX_1$$

$= \overline{X_1 A}^T X_2 = \overline{(X_1 A X_2 A)}^T X_2 = \overline{(X_2 A)}^T \cdot \overline{(X_1 A)}^T X_2 = X_2 A X_1 A X_2 = X_2 A X_2 = X_2$

存在性，构造 A^+，验证其满足性质即可

A^+ 构造：

设 $r(A)=r$ $B\in \mathbb{C}^{m\times r}$ $C\in \mathbb{C}^{r\times n}$ $r(B)=r(C)=r$

$B=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ $C=(I_r, 0)Q$ $A=BC=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$

① $P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q X P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ $QXP=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_{11}=I_r$

$\Rightarrow X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P^{-1}$

$XAX=X$

② $Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P^{-1} P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P^{-1} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P^{-1}$

$\therefore \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow X_{22}=X_{12}X_{21}$

$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{12}X_{21} \end{pmatrix}P^{-1} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ X_{21} \end{pmatrix}(I_r \ X_{12})P^{-1}$

$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}Q\overline{Q}^T = Q\overline{Q}^T\begin{pmatrix} I_r & \overline{X_{21}}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 记 $\overline{P}^T P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ $Q\overline{Q}^T=\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_{11}=\overline{B}^T B$ 可逆 $Q_{11}=C\overline{C}^T$ 可逆

$X_{12}=P_{11}^{-1}P_{12}$ $X_{21}=\overline{Q_{12}}^T Q_{11}^{-1}$

$\therefore X=Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & P_{11}^{-1}P_{12} \\ \overline{Q_{12}}^T Q_{11}^{-1} & \overline{Q_{12}}^T Q_{11}^{-1} P_{11}^{-1}P_{12} \end{bmatrix}P^{-1} = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ \overline{Q_{12}}^T Q_{11}^{-1} \end{pmatrix}(I_r \ \ P_{11}^{-1}P_{12})P^{-1}$

$=Q^{-1}\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ \overline{Q_{12}}^T & Q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}(P_{11}^{-1} \ 0)\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ \overline{P_{12}}^T & P_{22} \end{pmatrix}P^{-1}$

$=Q^{-1}(\underbrace{Q\overline{Q}^T)\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}}_{C}Q_{11}^{-1}P_{11}^{-1}\underbrace{(I_r \ 0)(\overline{P}^T P)}_{B}P^{-1}$

广义逆性质　规定 $0^+=0$

(1) $(A^+)^+=A$

(2) $(\lambda A)^+=\lambda^+A^+$

(3) $(\bar{A}^T)^+=\overline{(A^+)^T}$　　X: $(AB)^+=B^+A^+$　　P_{233}

8, 9, 10

定理一 (Steinitz 替换定理)

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 为一组线性无关向量，可用 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 线性表示 则 $s\le t$ 且可以用 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 替换 $\beta_1,\dots,\beta_t$ 中 s 个向量，不妨设为 $\beta_1,\dots,\beta_s$ s.t. $\{\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_{s+1},\dots,\beta_t\}\sim\{\beta_1,\dots,\beta_t\}$

Pf: 对 s 归纳

$s=1$ $\alpha_1\neq0$ $\alpha_1=\lambda_1\beta_1+\dots+\lambda_t\beta_t$ $1\le t$

不妨设 $\lambda_1\neq0$ $\therefore \beta_1=\frac{1}{\lambda_1}\alpha_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\beta_2-\dots-\frac{\lambda_t}{\lambda_1}\beta_m\in\langle\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_m\rangle$

$\langle\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle\sim\langle\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle$
$\langle\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle\sim\langle\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle$ $\Rightarrow \langle\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle\sim\langle\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n\rangle$

假设对 $s-1$ 成立

$\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_{s-1}$ 线性无关 $\Rightarrow$ { 且 $s-1\le t$; $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1},\beta_s,\dots,\beta_n\rangle\sim\langle\beta_1,\dots,\beta_n\rangle$

$\alpha_s\in\langle\beta_1,\dots,\beta_n\rangle\sim\langle\alpha_1,\dots,\alpha_{s-1},\beta_s,\dots,\beta_n\rangle$

$\alpha_s=\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_{s-1}\alpha_{s-1}+\lambda_s\beta_s+\dots+\lambda_n\beta_n$ (不妨设 $\lambda_s\neq0$)

同上交换证 $\sim$

$\Rightarrow \beta_s=\frac{\alpha_s}{\lambda_s}-\frac{\lambda_1}{\lambda_s}\alpha_1-\dots-\frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\alpha_{s-1}-\dots-\frac{\lambda_n}{\lambda_s}\beta_n\in\underline{\langle\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_{s+1},\dots,\beta_n\rangle}$

· 推论1：设 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$，$\beta_1,\dots,\beta_t$ 分别线性无关，且 $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_s\rangle\sim\langle\beta_1,\dots,\beta_t\rangle\Rightarrow s=t$

P40 9.8.9

· 推论2：S 中任意两个极大无关组元素个数相等

P51 5.6.7

定义五 向量组的极大无关组元素个数称为该向量组的秩

$A\in F^{m\times n}$ $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=(\beta_1\dots\beta_n)$ $r(A)=r(\alpha)$ $r(A)=r(\beta)$

$r(A)=r$ $A\begin{pmatrix}i_1\dots i_r\\ j_1\dots j_r\end{pmatrix}\neq0$

子式所在行列线性无关

$\Rightarrow \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_r}$ 线性无关，$\beta_{j_1}\dots\beta_{j_r}$ 线性无关 存在非零子式 $\Rightarrow$ 找出 r 个无关个数

思路：反证法 引申出来证

2018.11.12

期中讲解

1. $f(x)\equiv x^2(x+1)^2 g_1(x)\equiv 1 \pmod{(x+1)^2}$

$[(x+1)-1]^2[(x+1)-2]^2 \equiv [\cdot(x+1)^2-3(x+1)+2]^2 \equiv [-3(x+1)+2]^2$

$\equiv 4[-3(x+1)+1]\, g_1(x)\equiv 1 \pmod{(x+1)^2}$

$\uparrow$

$\frac{1}{4}[3(x+1)+1]$ …… 就很快 TAT

or $f(x)=x^2g(x)$ $\begin{cases} x^2g(x)+1 = u(x)(x+1)^2 \\ x^2g(x)-1 = v(x)(x+1)^2 \end{cases}$

2. $D=(A+B)^2-4AB=(A-B)^2$

书 P229

3. $(I_n-BA)^{-1}=I_n+B(I_m-AB)^{-1}A$

4. $A=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}V$ $\quad A=D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots\lambda_r)$

$AXA=A\quad XAX=X\quad (AX)^T=AX\quad \underline{XA=(XA)^T}$

$X=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{13}&X_{14}\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}D^{-1}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D^{-1}&X_{12}\\X_{21}&X_{21}X_{22}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{X=V^T\begin{pmatrix}D^{-1}&0\\0&0\end{pmatrix}U^T}$ 广义逆

5. $A^T=-A\quad r(A)=r$

$A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q\qquad Q^T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^T=-P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

$=P\begin{pmatrix}R_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}P^T$

R_{11} 可逆 $\qquad R_{11}^T=-R_{11}$

$A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\i_1\cdots i_r\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\1\cdots r\end{pmatrix}^2\det R_{11}\neq 0$

6. $\Rightarrow$ 假设 A 为标准形试一下（若可逆）

$A=\begin{pmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r(AB)=r(B_1)=r$

$B_1=(I_r,0)^T$

分析：可惜点 ① $D=[A+B]^2-4AB$ 相似

② 可逆公式 该证性（推一下）T_T 多看课本

③ 计算不熟练 $\longrightarrow$ 难题压死结论，以后得好好做作业

题目风格分析：① 贴近 LS 2 1 为容

② 考到大量结论

③ 注重（运算）技巧处理，结论运用和记忆

定义6 V 为 F 上线性空间 $S\subset V$ 集合 称 S 为 V 的一组基

如果：(1) S 线性无关 (2) V 中任何一个向量都可由 S 线性表示

若 S 有限，称 V 为有限维线性空间，称 $|S|$ 为 V 的维数；非有限维 称为无限维……

设 $\dim V=n$ $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 为 V 的一组基 任意性 $\forall\alpha\in V$ 可唯一地表示为

$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x^T$

称 $(x_1,\dots,x_n)$ 为在基 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 下的坐标 $x=(x_1,\dots,x_n)$

基本结论

1. 任何有限维线性空间均有一组基；
2. n 维线性空间中，线性无关向量组最多有 n 个元素；
3. 一组线性无关向量可扩充为 V 的一组基。

n 维空间 $\Leftrightarrow$ n 个基

Eg. $V=\mathbb{C}$ $F=\mathbb{C}$ 基 $\{1\}$ 维度 $\dim V=1$

$F=\mathbb{R}$ 基 $\{1,i\}$ $\dim V=2$

$V=F[x]$ $\dim V=+\infty$ 基 $\{1,x,x^2,\dots,x^n,\dots\}$ 线性无关（易验证）

$V=F_n[x]$ $\dim V=n+1$ $\{1,x,\dots,x^n\}$

$V=F^{n\times m}$ $\dim V=n\times m$ 基 $\{E_{ij}\}$

*区分 B1 教材!! 基变换在后 (坐标在前)

基变换 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 为V的两组基

$(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)T$　T为n阶可逆方阵

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)T^{-1}$

α在$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$下坐标为 $x=(x_1,\dots,x_n)$ $\Rightarrow$ $(\beta_1,\dots,\beta_n)y^T=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x^T$ 基变换下

$\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ - - - $y=(y_1,\dots,y_n)$　$\boxed{y^T=T^{-1}x^T}$ 坐标变换

(基上的坐标变换)

§2 子空间及其运算

定义一 V为F上线性空间　$W\subset V$ 子集合

如果: (1) $\alpha,\beta\in W\Rightarrow\alpha+\beta\in W$; (2) $\lambda\in F$ $\alpha\in W\Rightarrow\lambda\alpha\in W$　封闭性

称W为V的子空间　验证2条性质

例1 $S\subset V$　$\langle S\rangle:=\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i\mid\alpha_i\in S,\lambda_i\in F\}$ 为由S生成的(V的)子空间。pf: 为包含S的最小子空间。

pf: 设$S\subset W$　W为V的子空间 $\Rightarrow$ $\langle S\rangle\subset W$

$\forall\lambda_i\in F$, $\alpha_i\in S\subset W\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i\in W\Rightarrow\langle S\rangle\subset W$
子空间特性

1. 求交

定理一 $W_i\subset V$ 为子空间, $i\in I$ 则 $\bigcap_{i\in I}W_i$ 为子空间 (子空间的交仍为子空间)

pf: $\alpha,\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i\Rightarrow\alpha,\beta\in W_i,\ \forall i\in I\Rightarrow\alpha+\beta\in W_i\ \forall i\in I\Rightarrow\alpha+\beta\in\bigcap_{i\in I}W_i$

$\alpha\in\bigcap_{i\in I}W_i\Rightarrow\alpha\in W_i\ i\in I\Rightarrow\lambda\alpha\in W_i\ i\in I\Rightarrow\lambda\alpha\in\bigcap_{i\in I}W_i$

↓ 方法

例2 $V=F^4$ $W_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$ $W_2=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ 求 $W_1\cap W_2$

$\alpha_1=(1,2,1,0)$ $\alpha_2=(-1,1,1,1)$ $\alpha_3=(0,3,-2,1)$ $\beta_1=(2,-1,0,1)$ $\beta_2=(1,-1,3,7)$ 方法：列变量

$\alpha\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \alpha=\underbrace{x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=y_1\beta_1+y_2\beta_2}_{\text{两边都能单独表示}} \Rightarrow (y_1,y_2)=(3,-1)t$

$\Rightarrow \alpha=(5,-2,-3,-4)t$ $W_1\cap W_2=\langle(5,-2,-3,-4)\rangle$

2 求和

$W_1,\ldots,W_k\subset V$ 子空间 $W_1+\cdots+W_k:=\{\alpha_1+\cdots+\alpha_k\mid\alpha_i\in W_i\}$

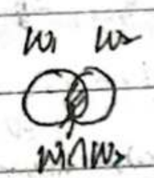
定理2 $W_1,W_2,\ldots,W_k$ 为V的子空间 则 $W_1+\cdots+W_k$ 也为子空间

pf: $\alpha\in W_1+\cdots+W_k \Rightarrow \alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ $\alpha_i\in W_i$

$\beta\in W_1+\cdots+W_k \Rightarrow \beta=\beta_1+\cdots+\beta_k$ $\beta_i\in W_i$

$\therefore \alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)\in W_1+W_2+\cdots+W_k$

又 $\lambda\alpha=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2+\cdots+\lambda\alpha_k\in W_1+W_2+\cdots+W_k$ ... #



定理3 设 W_1,W_2 为V的子空间 则

$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$

P64 2 6

P69 2 3 6 8

Date. 2018.11.14

最小子空间概念：

定理2：$W_1,\dots,W_k$ 为 V 的子空间，则 $W_1+\dots+W_k:=\{\alpha_1+\dots+\alpha_k \mid \alpha_i\in W_i\}$ 也为 V 的子空间，且是包含 $W_1\cup\dots\cup W_k$ 的最小子空间 $\Rightarrow W_1+\dots+W_k=\langle W_1\cup\dots\cup W_k\rangle$

↑ ∪ 定义？

推论1：设 M_i 为子空间 W_i 的一组基 $i=1,\dots,k$　$W_1+\dots+W_k=\langle M_1\cup\dots\cup M_k\rangle$

推论2：$\dim(W_1+\dots+W_k)\le \dim W_1+\dim W_2+\dots+\dim W_k$

等号成立当且仅当 $M_1\cup\dots\cup M_k$ 是线性无关（合成空间的基）

$W_1+W_2=\langle M_1\cup M_2\rangle$　M 一基

定理3：W_1,W_2 为 V 的子空间 则 $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$

证明：$W_1\cap W_2$ 一组基 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$

W_1: $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_s$　扩充基

W_2: $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\gamma_1,\dots,\gamma_t$

思路：① W_1+W_2 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_s,\gamma_1,\dots,\gamma_t$ 线性表示

② $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\dots,\beta_s,\gamma_1,\dots,\gamma_t$ 线性无关

∴ 设 $\underbrace{\lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\dots+\mu_s\beta_s}_{\in W_1}+\underbrace{\delta_1\gamma_1+\dots+\delta_t\gamma_t}_{\in W_2}=0$

$\Rightarrow \lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\dots+\mu_s\beta_s=-\delta_1\gamma_1+\dots+-\delta_t\gamma_t\in W_1\cap W_2$

∴ $-\delta_1\gamma_1+\dots+-\delta_t\gamma_t=6_1\alpha_1+\dots+6_r\alpha_r$ ← 基性质 无关 $\delta_i=0$

$\Rightarrow \lambda_1\alpha_1+\dots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\dots+\mu_s\beta_s=0\Rightarrow \lambda_i=\mu_i=0$　#

推论1：$\dim(W_1+W_2)\le\dim W_1+\dim W_2$　等号成立 $\Leftrightarrow W_1\cap W_2=\{0\}$

推论2：$\dim(W_1\cap W_2)\ge\dim W_1+\dim W_2-\dim V$

若 $\dim W_1+\dim W_2>\dim V \Rightarrow W_1\cap W_2\ne\{0\}$

二、3：$\dim(W_1+\dots+W_k)\le\dim W_1+\dim W_2+\dots+\dim W_k$ 等号成立 $\Leftrightarrow (W_1+\dots+W_i)\cap W_{i+1}=0$
$i=1,2,\dots,k-1$

pf: $k=2$ 之 递归

$\dim(W_1+W_2+W_3)\le\dim(W_1+W_2)+\dim W_3-\dim((W_1+W_2)\cap W_3)$

$\le\dim W_1+\dim W_2+\dim W_3-\dim(W_1\cap W_2)-\dim((W_1+W_2)\cap W_3)$

#

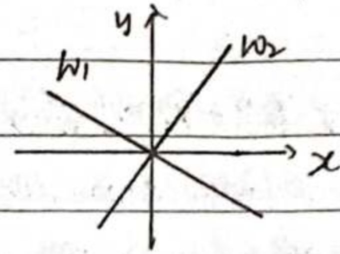
线性空间比欧氏更广，无度量运算，无角度... Date.

（定义） （与部分相关）

定义2 设 W_1, W_2 为 V 的子空间，如果 $W_1 \cap W_2 = 0$，则称 W_1+W_2 为 W_1 与 W_2 的直和，记为：$W_1 \oplus W_2$

Eg.1 $V=\mathbb{R}^2$ $W_1=\{\lambda\alpha_1 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ $W_2=\{\lambda\alpha_2 \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$W_1 \oplus W_2 = V$



定理4 下列命题等价（结论可推广至n维）

(1) W_1+W_2 为直和； key: 任何分解唯一

(2) $\forall \alpha \in W_1+W_2$ 则分解 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 是唯一的 $(\alpha_1\in W_1, \alpha_2\in W_2)$

(3) $0=\alpha_1+\alpha_2$ $(\alpha_1\in W_1, \alpha_2\in W_2) \Rightarrow \alpha_1=0, \alpha_2=0$

(4) $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2$

(5) 设 M_i 为 W_i 的一组基，则 $M_1\cup M_2$ 为 W_1+W_2 的一组基

pf: (1) $W_1\cap W_2=0 \Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) ...

(2)$\Leftrightarrow$(3) (3)$\Rightarrow$(2) 反证同一 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2$ $\alpha_1,\beta_1\in W_1$ $\alpha_2,\beta_2\in W_2$

$\Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)=0$ --> 只能为0 $\Rightarrow \alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2$

再证 (1)$\Leftrightarrow$(3) $W_1\cap W_2\neq 0 \Leftrightarrow 0=\alpha+(-\alpha)$ $\alpha\in W_1\cap W_2$

$\Rightarrow \exists\alpha\neq 0$ $\alpha\in W_1\cap W_2 \Leftrightarrow 0=\alpha+(-\alpha)\in W_1+W_2$ 矛盾

($\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 线性无关，$\langle\alpha_1\rangle+\langle\alpha_2\rangle+\dots+\langle\alpha_k\rangle$ 直和)

Eg.2 $V\in F^{n\times n}$ $S=\{A\in F^{n\times n} \mid A^T=A\}$（对称） $K=\{A\in F^{n\times n} \mid A^T=-A\}$（反对称） 证明：$V=S\oplus K$

证：① $V=S+K$ ② $S+K$ 为直和 $S\cap K=0$

① $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$

② $A=A^T=-A^T \Rightarrow A^T=0=A$ 唯一性 直和

§2 同构与商空间

定义1 V_1,V_2 为 F 上的两个线性空间，若 $\exists\ V_1\to V_2$ 的一一映射 σ 满足：

(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ (2) $\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\alpha)$

则称 σ 为 $V_1\to V_2$ 的一个同构映射；若存在 $V_1\to V_2$ 的同构映射，则称 V_1 与 V_2 同构 $V_1\sim V_2$

e.g. $F_n[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in F\} \Leftrightarrow (a_0,a_1,\ldots,a_n)\in F^{n+1}$

定理1 同构映射性质 (θ_1,θ_2 为空间)

(1) $\sigma(\theta_1)=\theta_2$ (2) $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$ (3) $\sigma\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sigma(\alpha_i)$

(4) $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ $\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关（无关）

(5) $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 为 V_1 的基 $\Leftrightarrow$ $\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_n)$ 为 V_2 的基

(6) $V_1\sim V_2 \Rightarrow \dim V_1=\dim V_2$ 实质：一种等价关系

等价关系：① $V\sim V$

② $V_1\overset{\sigma}{\sim}V_2 \Leftrightarrow V_2\overset{\sigma^{-1}}{\sim}V_1$

③ $V_1\overset{\sigma_1}{\sim}V_2,\ V_2\overset{\sigma_2}{\sim}V_3 \Rightarrow V_1\sim V_3\ (\sigma_1\sigma_2)$

定理2 V_1 与 V_2 是 F 上线性空间，则 V_1 与 V_2 同构 $\Leftrightarrow \dim V_1=\dim V_2$

pf: $\Rightarrow$ 显然

$\Leftarrow$ $\dim V_1=n$ $\dim V_2=n$, $V_1\sim F^n$ $V_2\sim F^n \Rightarrow V_1\sim V_2$

e.g.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in V$ 线性无关

(1) 证明：$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1$ 线性无关

(2) 确定向量组：$S=\{\alpha_1-\lambda\alpha_2,\ \alpha_2-\lambda\alpha_3,\ \alpha_3-\lambda\alpha_1\}$ 的秩

pf: $W=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\subset V$ $\sigma: W\to F^3$

$\sigma(\alpha_i)=e_i\ \ i=1,2,3$ $\sigma(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\sigma(\alpha_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\sigma(\alpha_3)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\sigma(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\sigma(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\sigma(\alpha_3+\alpha_1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

or $(\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \to \det \neq 0$

例 $\text{rank}(\alpha_1-\lambda\alpha_2, \alpha_2-\lambda\alpha_3, \alpha_3-\lambda\alpha_1) = \text{rank}\begin{pmatrix}1\\-\lambda\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix}1&0&-\lambda\\-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\end{bmatrix}$

Ex: $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关 $\beta_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j \quad i=1,\dots,m$

pf: $\dim\langle\beta_1,\dots,\beta_m\rangle = \text{rank}(A) \quad A=(a_{ij})_{m\times n}$

$\sigma: V=\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle \cong F^n \quad \sigma(\alpha_i)=e_i$

$\sigma(\beta_i)=A_i \quad (i=1,2,\dots,m)$ $\qquad (\beta_1,\dots,\beta_m)=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)A^T$

P86 1 3 4

P96 1 3 4 5

2018.11.19

• $V=W_1\oplus W_2 \Leftrightarrow V=W_1+W_2$ 且 $W_1\cap W_2=0$ (W_2称为W_1的补空间)

定理3: W为V的子空间, 则存在子空间$W'\subset V$ 使 $V=W\oplus W'$

pf: 设$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$为$W$的一组基, 扩充为$V$的一组基$\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$

令$W'=\langle\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\rangle$ 则$V=W\oplus W'$

$\underbrace{F\times\dots\times F}_{k}=F^k$

定义: 迪卡尔积 $W_1,\dots,W_k$为V的子空间: $W_1\times W_2\times\dots\times W_k=\{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\mid\alpha_i\in W_i\}$

加法 $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)+(\beta_1,\dots,\beta_k)=(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_k+\beta_k)$

数乘 $\lambda(\beta_1,\dots,\beta_k)=(\lambda\beta_1,\dots,\lambda\beta_k)$

$\tilde{W_i}=\{(0,\dots,\alpha_i,\dots,0)\mid\alpha_i\in W_i\}\subset W_1\times W_2\times\dots\times W_k$ 子空间 $\qquad$ 代数角度: 迪卡尔积与直和意义相同

$W_1\times\dots\times W_k=\tilde{W_1}\oplus\dots\oplus\tilde{W_k}\sim W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_k$

$\tilde{W_i}\xleftarrow{\sigma_i}W_i \quad \sigma_i:(0,\dots,\alpha_i,\dots,0)\in\tilde{W_i}\to\alpha_i\in W_i$

$\Rightarrow \dim(W_1\times\dots\times W_k)=\dim W_1+\dots+\dim W_k$

V/W

· 商空间　W为V的子空间　一种等价关系

$\alpha,\beta\in V$ 称 $\alpha\equiv\beta \pmod W \Leftrightarrow \alpha-\beta\in W$　（称：模W同余）

$\Rightarrow$ 等价关系，将V中元素分类

与α同余类：$\bar{\alpha}:=\{\alpha+\gamma \mid \gamma\in W\}=\alpha+W$

$V/W:=\{\bar{\alpha} \mid \alpha\in W\}$ ← 所有类构成集合

· 定义运算（集合间）：$\bar{\alpha}+\bar{\beta}:=\overline{\alpha+\beta}$　　$\lambda\bar{\alpha}:=\overline{\lambda\alpha}$

有效性 pf：若 $\alpha'\in\bar{\alpha}$　$\beta'\in\bar{\beta}$　$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha'+\beta'}$

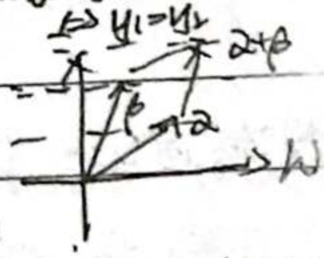
$\alpha'-\alpha\in W,\ \beta'-\beta\in W$

$\Rightarrow (\alpha'+\beta')-(\alpha+\beta)\in W \Rightarrow \overline{\alpha'+\beta'}=\overline{\alpha+\beta}$

Eg.1　$V=\mathbb{R}^2$　$W=\{(x_1,0) \mid x_1\in\mathbb{R}\}$　$\alpha\equiv\beta \pmod W \Leftrightarrow (x_1-x_2,\ y_1-y_2)\in W$
$\Leftrightarrow y_1=y_2$

$\alpha=(x_1,y_1)$　$\beta=(x_2,y_2)$　$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\{(x',\ y_1+y_2) \mid x'\in\mathbb{R}\}$

运算特性　$\lambda\bar{\alpha}=\{(x',\ \lambda y_1) \mid x'\in\mathbb{R}\}$



$V=W\oplus W'$　　$\sigma: W'\leftrightarrow V/W$　$\alpha\mapsto\bar{\alpha}$　商空间与补空间为一同构

$\dim(V/W)=\dim W'=\dim V-\dim W$

§4 线性映射及其矩阵表示

· 矩阵的几何意义 线性映射 $F^n \to F^m$ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $y=AX$ $X\in F^n$ $y\in F^m$

线性映射 $\begin{cases} \text{几何：直线} \to \text{直线 平行} \to \text{平行} \\ \text{代数：} \mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}\alpha+\mathscr{A}\beta \quad \mathscr{A}(\lambda\alpha)=\lambda\mathscr{A}(\alpha) \end{cases}$

同构与线性映射：同构为特殊线性映射

定义一 U, V 为 F 线性空间，称 $\mathscr{A}$ 为 U 到 V 上的线性映射，如果：$\mathscr{A}(\lambda\alpha+\mu\beta)=\lambda\mathscr{A}(\alpha)+\mu\mathscr{A}(\beta)$

线性映射性质：

(1) $\mathscr{A}(0)=0$ (2) $\mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n}\lambda\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\mathscr{A}(\alpha_i)$

(3) $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ $\mathscr{A}\alpha_1,\dots,\mathscr{A}\alpha_m$ 线性相关 (*) 可逆性

$\mathscr{A}: U\to V$ 线性映射 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 为 U 的一组基 $\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$ 为 V 的一组基

$\boxed{\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_m)A}$ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $\mathscr{A}\Leftrightarrow A$

$\{\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\alpha}_n\}$ 为 U 另一组基 $(\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\alpha}_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)Q$ Q 可逆

$\{\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_m\}$ V $(\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_m)=(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}$ P 可逆

$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1,\dots,\tilde{\alpha}_n)=(\tilde{\beta}_1,\dots,\tilde{\beta}_n)\tilde{A}$

$\Rightarrow \mathscr{A}((\alpha_1,\dots,\alpha_n)Q)=(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}\tilde{A}$

$=\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)Q=(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}\tilde{A}=(\beta_1,\dots,\beta_n)AQ$

$\Rightarrow \tilde{A}=PAQ$ ～ 矩阵的相抵关系 相抵：同样的线性变形在不同基下的表现

定理一 $\mathscr{A}$ 为 U 到 V 的线性映射 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵彼此相抵 反之亦是

Eg. $\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\beta_1,\dots,\beta_m)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\underbrace{r=\mathrm{rank}(\mathscr{A})}$ 定义秩

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathscr{A}\alpha_i=\beta_i & (i=1,\dots,r) \\ \mathscr{A}\alpha_i=0 & (i=r+1,\dots,n) \end{cases}$

P310 2 3 9 11 13

$\mathscr{A}: U \to V$ 线性映射 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为 U 的基 $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ 为 V 的基

$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) A \quad A \in F^{m \times n}$

$\mathscr{A} \Leftrightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\mathscr{A}} & V \\ \sigma_1 \updownarrow & & \updownarrow \sigma_2 \\ F^n & \xrightarrow{A} & F^m \end{array} \quad X \to AX$$

$\mathscr{A}(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n) = (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n) \tilde{A} \quad \tilde{A} = PAQ$

$A: U \to V$ 存在 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 及 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ st. $\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r = r(A) = r(\tilde{A})$

$\mathscr{A}\ \mathscr{B}$: $U \to V$ 线性映射

定义 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha) := \mathscr{A}\alpha + \mathscr{B}\alpha \quad \forall \alpha \in U \quad (\lambda\mathscr{A})(\alpha) := \lambda\mathscr{A}(\alpha)$

$\mathscr{A}+\mathscr{B}$, $\lambda\mathscr{A}$ 为 $U \to V$ 线性映射

$L(U,V) = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A}: U \to V$ 线性映射$\}$ 构成线性空间

~~协同构做突破~~

定理2 $\dim U = n \quad \dim V = m$ 则 $\dim L(U,V) = mn$

证明: $L(U,V) \cong F^{m \times n}$ (矩阵 $\Leftrightarrow$ 映射)

取 U 的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$V \dots \quad \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) A$

$\sigma: L(U,V) \to F^{m \times n} \quad \sigma(\mathscr{A}) = A \quad \sigma(\mathscr{A}+\mathscr{B}) = A+B \quad \sigma(\lambda\mathscr{A}) = \lambda\sigma(\mathscr{A}) \to$ 满合同构性质

线性映射的复合

$\mathscr{A}. U \to V \quad \mathscr{B}: V \to W \quad \mathscr{B}\circ\mathscr{A} = U \to W \quad (\mathscr{B}\circ\mathscr{A})(\alpha) = \mathscr{B}(\mathscr{A}(\alpha))$

$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_m) A$

$\mathscr{B}(\beta_1, \dots, \beta_m) = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) B \Rightarrow (\mathscr{B}\circ\mathscr{A})(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathscr{B}(\beta_1, \dots, \beta_n) A = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) BA$

$\mathscr{A}: U \to V$ 线性映射 如果存在 $\mathscr{B}: V \to U$ 线性映射 使 $\mathscr{B} \circ \mathscr{A} = \mathscr{E}_U$ $\mathscr{A} \circ \mathscr{B} = \mathscr{E}_V$

称 $\mathscr{A}$ 可逆，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的逆映射，记为 $\mathscr{A}^{-1}$

定理3 $\mathscr{A}: U \to V$ 为可逆线性映射 则 $\dim U = \dim V$ 取好映射 → 化为矩阵问题

$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)A \Rightarrow \mathscr{A}^{-1}(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A^{-1}$

§2 像与核

定义一 $\mathscr{A}: U \to V$ 线性映射 称 $\operatorname{Im}\mathscr{A} := \{\mathscr{A}\alpha \mid \alpha \in U\}$ 为 U 在 $\mathscr{A}$ 下的像 (Image)

称 $\operatorname{Ker}(\mathscr{A}) = \{\alpha \in U \mid \mathscr{A}\alpha = 0\}$ 为 $\mathscr{A}$ 的核 (kernel) ← 齐次方程的解

定理1 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 为 V 的子空间，$\ker\mathscr{A}$ 为 U 的子空间

证: $\alpha, \beta \in \operatorname{Im}\mathscr{A} \Rightarrow \alpha = \mathscr{A}(\alpha')$ $\alpha' \in U$ $\beta = \mathscr{A}(\beta')$ $\beta' \in U$

$\alpha + \beta = \mathscr{A}\alpha' + \mathscr{A}\beta' = \mathscr{A}(\alpha' + \beta')$ $\alpha' + \beta' \in U$ … 为子空间

…

$\alpha, \beta \in \ker\mathscr{A}$. $\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \underset{0}{\mathscr{A}\alpha} + \underset{0}{\mathscr{A}\beta} = 0$ $\alpha + \beta \in \ker\mathscr{A}$

定理2 设 $\mathscr{A}: U \to V$ 线性映射 $r(\mathscr{A}) = r \Rightarrow \dim(\operatorname{Im}\mathscr{A}) = r$

pf: $\mathscr{A}: F^n \to F^m$ $X \to AX$ $r(\mathscr{A}) = r(A) = r$

$\operatorname{Im}\mathscr{A} = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ 列生成空间

定理3 $\mathscr{A}: U \to V$ 线性映射，则 $U/\ker\mathscr{A} \cong \operatorname{Im}\mathscr{A}$

pf: $\sigma: U/\ker\mathscr{A} \to \operatorname{Im}\mathscr{A}$ $\forall \alpha' \in \bar{\alpha}$ $\alpha' = \alpha + \nu$ $\nu \in \ker\mathscr{A}$

$\bar{\alpha} = \alpha + \ker\mathscr{A} \to \mathscr{A}\alpha$ $\mathscr{A}\alpha' = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\nu = \mathscr{A}\alpha$

$\bar{\beta} = \beta + \ker\mathscr{A} \to \mathscr{A}\beta \Rightarrow \mathscr{A}(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta \in \ker\mathscr{A}$ $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$

推论: $\dim \ker \mathscr{A} = \dim U - \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}$

定4 $\mathscr{A}$ 为 $U \to V$ 线性映射 则 $\mathscr{A}$ 满射 $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \mathscr{A} = V$

$\mathscr{A}$ 单射 $\Leftrightarrow \ker \mathscr{A} = 0$ $(0 \to 0)$ $\Leftrightarrow \dim U = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}$

证 线性映射 $\mathscr{A}: U \to V$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 下列条件中任意两个成立

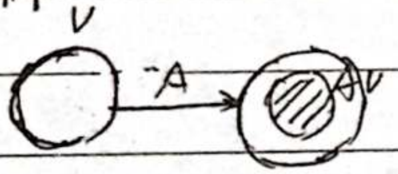
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dim U = \dim V$ $\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \operatorname{Im} \mathscr{A} = V$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \ker \mathscr{A} = 0$

g.1 $A \in F^{n \times n}$ $\exists k$ s.t. $r(A^k) = r(A^{k+1}) = \cdots$

pf: $n \geq r(A) \geq r(A^2) \geq \cdots \geq r(A^k) \geq r(A^{k+1}) \geq \cdots \geq 0$

几何理解



$V \supset AV \supset A^2V \supset \cdots \supset A^kV \cdots$

思路: 1. 必有一个相等 2. 第1次有个相等, 则后面都 $=$ ← 可推广g.1

2 $A \in F^{n \times n}$ 证: $\underline{r(A^k) - r(A^{k+1}) \geq r(A^{k+1}) - r(A^{k+2})}$ $\Rightarrow$ Forbenius 秩不等式

pf: $V = F^n$ $\mathscr{A}: V \to V$ $X \to AX$

$W_1 = \operatorname{Im} \mathscr{A}^k = \mathscr{A}^k V$ $W_2 = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+1}$ $W_3 = \operatorname{Im} \mathscr{A}^{k+2}$

↙A限制在 W_1 上

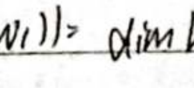
$\mathscr{A}|W_1$ $W_1 \to W_2$ $\dim(\operatorname{Im} \mathscr{A}|W_1) = \dim W_1 - \dim(\ker(\mathscr{A}|W_1))$

$\mathscr{A}|W_2$ $W_2 \to W_3$ $= \dim(W_2)$

$\Rightarrow \dim(\ker(\mathscr{A}|W_1)) = \dim W_1 - \dim W_2 = r(A^k) - r(A^{k+1})$

$\Rightarrow \dim(\ker(A|W_2)) = \dim W_2 - \dim W_3 = r(A^{k+1}) - r(A^{k+2})$

→ 像空间的维数 ⇒ 秩!



§3.6 线性变换及特征值 *

$\mathscr{A}^{+} \leftrightarrow A^{+}$ $\mathscr{A}$可逆 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\ker \mathscr{A}=\{0\}}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} \mathscr{A}=V$

$\begin{cases} \mathscr{A}(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)B \\ (\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P \end{cases} \Rightarrow \underline{B=P^{-1}AP}$ 相似为一种等价关系

Q: (1) A与B相似的充要条件?

(2) 相似标准型

最简单形式: $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1} \Leftrightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow Ax_i=\lambda_i x_i \quad i=1,2,\dots,n$ $\longleftarrow$ 引出特征值

定义- $\mathscr{A}: V\to V$ 为线性变换 如果存在非零向量α 及数$\lambda\in F$ 满足 $\mathscr{A}\alpha=\lambda\alpha$, 称$\lambda$为$\mathscr{A}$的特征值, α称为λ对应的特征向量

$\boxed{\text{几何意义}}$: 沿该方向做线性变换方向不变 $\to$ 特征向量

λ为变换性质: 拉伸/压缩

基$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$: $\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A$

$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)X$ $\mathscr{A}\alpha=\lambda\alpha \Leftrightarrow AX=\lambda X$ -- 坐标 从变换到矩阵

$F=\mathbb{C}$

· 特征多项式 $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ $\lambda_1\dots\lambda_i$互不相等 $\sum n_k=n$

性质1 A与B相似 $P_A(\lambda)=P_B(\lambda)$ 从而特征值相似

性质2 ...... 则对任意多项式 $f(A)$与$f(B)$相似 $\underline{A\sim B \Rightarrow A^k\sim B^k}$ k为任取!

e.g. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B^2=0$ ×

性质3 $Tr(A)=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ $\quad \det(A)=\lambda_1\cdots\lambda_n$

$$P_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n-(a_{11}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+\underline{\underline{(-1)^n\det A}}$$

$$=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

(2同上: 某一特征值为0 → 降维不可逆)

性质4 $A=\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$ $\quad P_A(\lambda)=P_B(\lambda)P_C(\lambda)$

性质5. (Caley-Hamiltom) $\boxed{P_A(A)=0}$.硬算 代入多项式

proof: $(\lambda I-A)(\lambda I-A)^*=\det(\lambda I-A)$ 展开

$(\lambda I-A)(\lambda^{n-1}B_{n-1}+\cdots+\lambda B_1+B_0)=P_A(\lambda)I$

$=\lambda^n B_{n-1}+(B_{n-2}-AB_{n-1})\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda(B_0-AB_1)-AB_0=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0)I$

$$\Rightarrow\begin{cases}B_{n-1}=I\\ B_{n-2}-AB_{n-1}=a_{n-1}\\ \vdots\\ B_0-AB_1=a_1I\\ -AB_0=a_0I\end{cases}\Rightarrow A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_0I=0$$

定义2 $A\in F^{n\times n}$ 如果存在非零多项式 $f(\lambda)$ s.t. $f(A)=0$ 称 $f(\lambda)$ 为A的化零多项式

次数最低的首一化零多项式 称为 A的最小多项式

性质6 最小多项式存在且唯一

proof: $S=\{f(\lambda)\in F[\lambda]\mid f(A)=0\}$ ① $f,g\in S\Rightarrow f+g\in S$ ② $f\in S, h\in F[\lambda]$ $hf\in S$

$S\neq\phi$ $=\{d(x)h(x)\mid h(x)\in F[\lambda]\}$

* 任何化零多项式为任意多项式×最小多项式

$$f(\lambda)=q(\lambda)d(\lambda)+\underset{0}{r(\lambda)}$$ 唯一性由相互整除可得

$P d_A(\lambda) P^{-1} = d_B(\lambda)$

性质7 $A \sim B$ 则它们最小多项式相等 $d_A(\lambda) = d_B(\lambda)$ $(d_A(A) = d_B(A) = 0)$

$B = PAP^{-1} \Rightarrow d_B(\lambda) \mid d_A(\lambda)$ 反面同理

性质8 C 为 $P_B(\lambda)$ 根 $\Leftrightarrow$ C 为 $P_A(\lambda)$ 的根

A 与 B 相似 $\Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ 　但 $\Leftarrow$ X: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow d_A(\lambda) = d_B(\lambda)$

Eg.1 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 证明：AB、BA 特征值相同

$\Leftrightarrow \det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$

Eg.2 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ 若 A 可对角化，求 A 的最小多项式

解：$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I^{(n_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I^{(n_k)} \end{pmatrix} P^{-1}$ $f(A) = P \begin{pmatrix} f(\lambda_1) I^{(n_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_k) I^{(n_k)} \end{pmatrix} P^{-1} = 0$

f 化零 $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda_i) = 0$ $i = 1, 2, \ldots, k$

$\Rightarrow f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k) g(\lambda)$ $\therefore d_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_k)$ 满足题意

P330

2 3 4 8

P340

4 5

2018.11.28

$A \sim B$ 则特征多项式不变 $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

$\det(\mathscr{A}) = \det(A)$ $\Rightarrow$ $Tr(\mathscr{A}) = Tr(A)$? $\mathscr{A}$. A 区别

... 相似不变量 (ps: 一个相似不变量相同 $\nrightarrow$ 相似)

▶ 相似标准型. (1) $A \sim B$ 充要条件? (2) 标准型

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ A 相似于对角阵充要条件?

定义4 $\mathscr{A}: V \to V$ 线性变换 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 A 的特征值 称 $V_\lambda: \{\alpha \in V \mid \mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha\}$ 为 A 关于 λ 的特征子空间, 记为 V_λ

除特征向量, 还有 $\vec{0}$

称 $\dim V_\lambda$ 为 λ 的几何重数 (线性无关向量个数)

(同矩阵 A 中定义 $V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \mid AX = \lambda X\}$ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 λ 的特征子空间 ... 几何重数)

命题1 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个不同特征值, 则 $V_1 + \dots + V_s$ 为直和

反证法. $0 = v_1 + v_2 + \dots + v_s$ $v_i \in V_{\lambda_i}$ 下证 $v_i = 0$

$\therefore 0 = Av_1 + Av_2 + \dots + Av_s = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s \overset{\times A}{=} \lambda_1^2 v_1 + \dots + \lambda_s^2 v_s$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_s \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_s^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{Vandermonde} \neq 0$$

#

命题2 设 $\mathscr{A}$ $V \to V$ 线性变换 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为特殊值 则 λ 的几何重数 $\leq$ 代数重数

$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{n} \cdots$

proof: V_{λ_0} 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 为 V_{λ_0} 的一组基 $\mathscr{A}\alpha_i = \lambda_0 \alpha_i$ $i = 1, \dots, m$.

将 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 \ddots \lambda_0 & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right)$$

$P_A(\lambda) = \underline{(\lambda - \lambda_0)^m} \det(\lambda I^{(n-m)} - A_{22})$

代数重数至少为 m

#

78

定理1 $\mathcal{A}: V\to V$ 线性变换 $\dim V=n$ $P_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ $m_i=\dim V_{\lambda_i}$

则下列命题等价：

(1) $\mathcal{A}$ 可对角化 (2) $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关特征向量

(3) $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$ (4) $m_i=n_i$ $i=1,\dots,s$

(5) $\mathcal{A}$ 的最小多项式无重根

$P\to(x_1,\dots,x_n)$

proof: (1) $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1} \Leftrightarrow AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $A(x_1,\dots,x_n)=(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)$

$\Leftrightarrow Ax_i=\lambda_ix_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ①$\Leftrightarrow$②

③$\Leftrightarrow$② ③$\Leftrightarrow$④ $\sum m_i=\sum n_i=n$ ②成立 $\sum m_i=n=\sum n_i$

(5) A 相似于对角阵 $\Rightarrow d_A(\lambda)$ 无重根 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

设 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)\Rightarrow A$ 可相似为对角阵

$f_i(\lambda)=d_A(\lambda)/(\lambda-\lambda_i)$ $i=1,\dots,s$

$\Rightarrow u_1(\lambda),\dots,u_s(\lambda)$ st. $u_1(\lambda)f_1(\lambda)+\cdots+u_s(\lambda)f_s(\lambda)=1$

代入矩阵 $u_1(A)f_1(A)+u_2(A)f_2(A)+\cdots+u_s(A)f_s(A)=I$

$\forall\alpha\in V$ $\alpha=\underbrace{u_1(A)f_1(A)\alpha}_{\in V_{\lambda_1}}+\cdots+\underbrace{u_s(A)f_s(A)\alpha}_{\in V_{\lambda_s}}=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$ $\alpha_i\in V_{\lambda_i}$

$\Rightarrow V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$ $\alpha=\cdots$ 视为直和

技巧!!

$(A-\lambda_1I)\alpha_1=u_1(A)\overbrace{(A-\lambda_1I)f_1(A)}^{d_A(A)=0}\alpha\Rightarrow u_1(A)d_A(A)\alpha=0\Rightarrow(A-\lambda_1I)\alpha_1=0$ $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$

矩阵中的 $\lambda-\lambda_i$

α_1 为 λ_1 特征向

例1 $A\in F^{n\times n}$ 且满足 $A^2=I$ 证明：A 相似于 $\begin{pmatrix}I^{(r)} & 0\\ 0 & -I^{(n-r)}\end{pmatrix}$

proof: (1) $A=I$ 或 $A=-I$ 满足 设 $A\neq\pm I$

$d_A(\lambda)=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$ 无重根 $\to$ A 相似于对角阵

(2) $V=V_1\oplus V_{-1}$ $V_1=\{X\in F^n\mid(A-I)X=0\}$ $V_{-1}=\{X\in F^n\mid(A+I)X=0\}$

$\Updownarrow$

$\dim V=\dim V_1+\dim V_{-1}=n$ 问题的转化

$\Leftrightarrow n-r(A-I)+n-r(A+I)=n\Leftrightarrow r(A-I)+r(A+I)=n$

例2 $A\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ a_n & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_2 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$ 求证A相似于对角阵

$= a_1 I + a_2 K + a_3 K^2 + \cdots + a_n K^{n-1}$ $K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$

$P_K(\lambda)=\lambda^n-1$ 根 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$

$\therefore K = P\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}}P^{-1}$ ……

$\therefore A=f(K)=P\begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}P^{-1} \Rightarrow \det(A)=f(1)\cdots f(\omega^{n-1})$

之前求det的做法：构造P（回顾）

例3 $A, B \in F^{n\times n}$ 均可对角化，且 $AB=BA$（可交换） 证明：AB，BA可同时对角化

proof：$A=P_1\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 I^{(n_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I^{(n_s)} \end{pmatrix}}_{\Lambda \text{ 对角阵}}P_1^{-1}$ $AB=BA$

$\Leftrightarrow P_1\Lambda P_1^{-1}B=BP_1\Lambda P^{-1} \Leftrightarrow \Lambda \underbrace{P_1^{-1}BP_1}_{B_1}=\underbrace{P_1^{-1}BP_1}_{B_1}\Lambda$

问题转化为：

$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1 I^{(n_1)}, \ldots, \lambda_s I^{(n_s)})$ B_1 可对角化

B_1 分块 $B_1=(B_{ij})_{s\times s}$ 由 $\Lambda B_1=B_1\Lambda \Rightarrow B_1=\mathrm{diag}(B_{11}, B_{22}, \ldots, B_{ss})$

B_1 可对角化 $\Leftrightarrow$ 所有 B_{ii} 可对角化

$\Leftrightarrow \forall Q_i$ s.t. $Q_i^{-1}B_{ii}Q_i=D_i$ —— 对角阵

$\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{ss} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_s \end{pmatrix}$ 又 $\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}^{-1}\Lambda\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}=\Lambda$

例4 $A, B \in F^{n\times n}$ 且A与B无公共特征值 证明：$\mathcal{A}: X\in F^{n\times n} \to AX-XB$ 可逆

proof：$\ker\mathcal{A}=\{0\} \Leftrightarrow AX-XB=0 \Rightarrow X=0$

$\underbrace{AX=XB \quad A(AX)=AXB=XB^2 \Rightarrow A^kX=XB^k \Rightarrow}$ 不断递推 $\boxed{f(A)X=Xf(B)}$

$\therefore 0=d_A(A)X=Xd_A(B)$ 再说明 $d_A(B)$ 可逆

(数学归纳法)

定理2 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则A相似于上三角阵

proof: $Ax_1=\lambda x_1$ $\quad A(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)\left(\begin{array}{c|c}\lambda_1 & * \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{array}\right)$ 证

定理3 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $p_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 则A相似于

$\mathrm{diag}(A_{11},A_{22},\dots,A_{ss})$ $\quad A_{ii}=\begin{pmatrix}\lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$ 准上三角阵?

proof: 归纳法 $s=1$ $A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ 0 & \ddots & \lambda_1\end{pmatrix}$ 设结论对 $s-1$ 成立

s: $A\sim\left(\begin{array}{ccc|c}A_{11} & & & A_{1s} \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \hline & 0 & & A_{ss}\end{array}\right)$ 可找到一矩阵 s.t. $A\sim\left(\begin{array}{ccc|c}A_{11} & & & * \\ & \ddots & & \\ & & A_{s-1,s-1} & \\ \hline & 0 & & A_{ss}\end{array}\right):=\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} \\ 0 & D_{22}\end{pmatrix}$

其中 D_{11}, D_{22} 都为准对角阵

$$\begin{pmatrix}I & S \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12} \\ & D_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -S \\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11} & -D_{11}S+SD_{22}+D_{12} \\ & D_{22}\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ 无公共特征值 可逆

选取 S s.t. $-D_{11}S+SD_{22}+D_{12}=0 \iff \underline{D_{11}S-SD_{22}=D_{12}}$ 有解

P_{344} 1, 3, 4

P_{352} 1, 5, 7

第四章 Jordan 标准型

§1 Jordan 标准型及其计算

定义 $a\in\mathbb{C}$ 称 m 阶方阵 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a\end{pmatrix}_{m\times m}$ 为一个 Jordan 块，记为 $J_m(a)$。由 Jordan 块构成的标准对角阵 $J=diag(J_{m_1}(a_1),\dots,J_{m_k}(a_k))$ 记为 Jordan 型矩阵

命题1 $r((J_m(a)-aI)^k)=\begin{cases} m-k & k\le m \\ 0 & k>m\end{cases}$ $\qquad (J_m-aI)X=0$

命题2 $J_m(a)$ 的特征多项式与最小多项式均为 $(\lambda-a)^m$ 且 $\dim V_a=1$

proof: $d_{J_m(a)}=(\lambda-a)^e$ ← 由零化多项式性质

定理1 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ $P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ (λ_i 均不相等 $\sum n_i=n$)

则 A 相似于 Jordan 标准型 $J=Diag(J_1,J_2,\dots,J_s)$

$J_i=Diag(J_{i1},J_{i2},\dots,J_{im_i})$ $\boxed{m_i=\dim V_{\lambda_i}}$ $J_{ij}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}_{l_{ij}\times l_{ij}}$

且 J 在不计较 Jordan 块次序下是唯一的 $\quad l_{i1}\le l_{i2}\le\dots\le l_{im_i}$ $\quad$ 相加为 n_i

key: 化为零多项式

· 推论1 $d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_{1m_1}}(\lambda-\lambda_2)^{l_{2m_2}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{sm_s}}$

$J_1=\begin{pmatrix}J_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{1m_1}\end{pmatrix}$ $\qquad (J_1-\lambda_1 I)^k=\begin{pmatrix}(J_{11}-\lambda_1 I)^k & & \\ & (J_{12}-\lambda_1 I)^k & \\ & & \ddots (J_{1m_1}-\lambda_1 I)^k\end{pmatrix}=0$

几何重数=代数

推论2: A 相似于对角阵 $\Leftrightarrow l_{ij}=1 \Leftrightarrow m_i=n_i \quad i=1,2,\dots,s$

$\Leftrightarrow d_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

推论3. $A\sim B \Leftrightarrow$ A, B 有相同 Jordan 标准型 $\Leftrightarrow$

(1) 特征多项式相同；(2) 每个特征值的特征子空间维数相同

(3) 对每个 λ_i，$\{l_{ij}\}_{j=1}^{m_i}$ 相同

E.g.1 $\quad A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 3 & -6 & 5\end{pmatrix}$ 求 A 的 Jordan 标准型..

$r(P^{-1}AP-2I)=r(A-2I)=1$ ..

E.g.2 $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 求A的Jordan标准型

解: $P_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^3$ $J=\begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix}$ $J_1\in\mathbb{C}^{2\times2}$ $J_2\in\mathbb{C}^{3\times3}$

$J_1=J_{11}=\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ $J_{12}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}$ $J_2=J_{21}=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ $J_{22}=\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix}$

$r(J-2I)=r\begin{pmatrix} J_1-2I & \\ & J_2-2I \end{pmatrix}=r(J_1-2I)+r(J_2-2I)=3+r(J_1-2I)$

$r(J-3I)=2+r(J_2-3I)$

$\Rightarrow r(J-2I)=r(A-2I)=4$ $r(J-3I)=r(A-3I)=3$

$\Rightarrow J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$

· key: 利用rank性质

· 一般计算

$P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

$r_k^i=\text{rank}(A-\lambda_i I)^k=\text{rank}(J-\lambda_i I)^k$

$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$ $J_i\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$ $J_i=\begin{pmatrix} J_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{im_i} \end{pmatrix}$

设$\underset{\sim}{J_i}$中含p阶Jordan块为δ_p^i个 $\sum_{p=1}^{n_i} p\,\delta_p^i=n_i$

$r_k^i=\text{rank}(J-\lambda_i I)^k=\sum_{j=1}^{s}\text{rank}(J_j-\lambda_i I)^k=\text{rank}(J_i-\lambda_i I)^k+n-n_i$

又 $r((J_i-\lambda_i I))=\sum_{p=2}^{n_i}(p-1)\delta_p^i$ $=\sum_{p=k}^{n_i}(p-k)\delta_p^i+n-n_i=r_k^i$

$=\sum_{p=k-1}^{n_i}(p+1-k)\delta_p^i+n-n_i=r_{k-1}^i$

$\therefore \sum_{p=k}^{n_i}\delta_p^i=r_{k-1}^i-r_k^i=d_k$ $\Rightarrow \boxed{\delta_k=d_k-d_{k+1}}$ ↑反向

Eg.3 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}$ 求 Jordan 标准型

solue:

$P_A(\lambda)=(\lambda-a)^n$

$r_k=\text{rank}(A-aI)^k=\begin{cases} n-2k & 2k\le n \\ 0 & 2k>n \end{cases}$

(1) $n=2m$ $d_k=r_{k-1}-r_k=\begin{cases} 2 & k\le m \\ 0 & k\ge m+1 \end{cases}$ $\delta_k=d_k-d_{k+1}=\begin{cases} 2 & k=m \\ 0 & k\ne m \end{cases}$

$\therefore J=\begin{pmatrix} J_m(a) & \\ & J_m(a) \end{pmatrix}$ $m=\frac{n}{2}$

(2) $n=2m+1$ $J=\begin{pmatrix} J_m(a) & \\ & J_{m+1}(a) \end{pmatrix}$

Eg.4 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 求 P st. $P^{-1}AP=J=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right)$

解: $AP=PJ$

令 $P=(X_1,X_2,X_3)$ $A(X_1,X_2,X_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} (A-2I)X_1=0 \\ \underline{(A-2I)X_2=X_1} \\ (A-2I)X_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A-2I)\underset{\sim}{X_2^2}=0 \\ (A-2I)X_2=X_1 \\ (A-2I)X_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2=(1,0,0)^T \\ X_1=(1,2,3)^T \\ X_3=(-1,0,1)^T \end{cases}$ ~~$X_2\in\ker(A-2I)^k$~~ 不全为特征向量

Eg.5 $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x-2y+z \\ \frac{dy}{dt}=2x-2y+2z \\ \frac{dz}{dt}=3x-6y+5z \end{cases}$ 令 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\frac{dX}{dt}=AX$ $A=PJP^{-1}$

令 $X=P\tilde{X}$ $\Rightarrow \frac{d\tilde{X}}{dt}=J\tilde{X} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt}=2\tilde{x}+\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt}=2\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{z}}{dt}=2\tilde{z} \end{cases}$ ...

Eg.6 $A^2=I$ 证: $A\sim\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}$

设 A Jordan 标准型 J $A^2=I \Rightarrow J^2=I$

$J=\text{diag}(J_{ij})$ $J_{ij}^2=\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 2\lambda_{n-1} \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$ $J_{ij}^2=I \Rightarrow \lambda_i^2=1 \Rightarrow \underset{\sim}{\lambda_i=\pm1}$

方法总结

1. 找 P s.t. $P^{-1}AP$ 尽量简单 $A\sim diag(A_{11},\dots,A_{ss})$ $A_{ii}=\begin{pmatrix}\lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}$

2. 几何方法 A相似于对角阵 $\Leftrightarrow$ $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$ P371 3(2)(4)

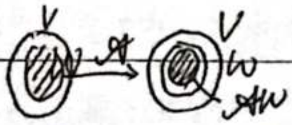
$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$ 4.5

3. 代数方法 λ-矩阵 $(\lambda I-A)$

2018.12.5

§2 根子空间分解

定义1 $\mathcal{A}: V\to V$ 线性变换 $W\subset V$ 子空间 如果 $\mathcal{A}W\subset W$ 称W为V关于A的不变子空间



e.g. $\{0\}$, V 平凡子空间

$Im\,\mathcal{A}$, $Ker\,\mathcal{A}$, V_λ 特征子空间

定理1 $\mathcal{A}: V\to V$ 为线性变换，则V的关于$\mathcal{A}$的有限个不变子空间之和为$\mathcal{A}$的不变子空间

proof: $W=W_1+\dots+W_r$ W_i为不变子空间

$\alpha\in W$ $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r$ $\mathcal{A}\alpha=\mathcal{A}\alpha_1+\dots+\mathcal{A}\alpha_r\in W_1+W_2+\dots+W_r=W$ #

定理2 设W为V的关于$\mathcal{A}$的不变子空间 设$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$为W的基 $M_i=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_n\}$ 为V的一组基，则$\mathcal{A}$在M_i下的矩阵为准上三角阵

$$\begin{cases}\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{A}\alpha_1=a_{11}\alpha_1+\dots+a_{r1}\alpha_r \leftarrow \text{是}\\ \vdots \\ \mathcal{A}\alpha_r=a_{1r}\alpha_1+\dots+a_{rr}\alpha_r\end{array}} \\ \mathcal{A}\alpha_n=a_{n1}\alpha_1+\dots+a_{nn}\alpha_n\end{cases}$$

$\mathcal{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$ $A\in F^{r\times r}$

不变子空间，在r以后向量

定理3 $\mathcal{A}: V\to V$ 线性变换，W_1与W_2均为V的关于$\mathcal{A}$的不变子空间，且$V=W_1\oplus W_2$，设$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$为$W_1$的基，$\{\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n\}$为$W_2$的基，则$\mathcal{A}$在$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$下的矩阵为准对角阵

记: $\begin{cases}\mathcal{A}\alpha_1=a_{11}\alpha_1+\dots+a_{r1}\alpha_r\\ \mathcal{A}\alpha_r=a_{1r}\alpha_1+\dots+a_{rr}\alpha_r\\ \mathcal{A}\alpha_{r+1}= a_{r+1,r+1}\alpha_{r+1}+\dots+a_{n,r+1}\alpha_n\end{cases}$

推论 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$，$W_i$ 为不变子空间，设 W_i 的一组基为 M_i，则 $\mathscr{A}$ 在 $M_1\cup M_2\cdots\cup M_s$ 下的矩阵为准对角阵，反之亦然

$\ker(A-\lambda_i I)\subset\ker(A-\lambda_i I)^2\subset\cdots\subset\ker(A-\lambda_i I)^k=\ker(A-\lambda_i I)^{k+1}$ ← 研究性质

一定会停止

定义2 设 λ_0 为 $\mathscr{A}$ 的特征值，称 $W_{\lambda_0}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^k:=\{\alpha\in V\mid\exists k\ \text{s.t.}\ (\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^k\alpha=0\}$ 为 A 的根子空间，$\alpha\in W_{\lambda_i}$ 称为根向量 s.t. $(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^k\alpha=0$ 成立的最小正整数 k 称为 α 的次数。 $W_{\lambda_0}:=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^k=(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^{k_0}$

定理4 设 $P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 则

(1) W_{λ_0} 为不变子空间，且 $W_{\lambda_0}=\ker(\mathscr{A}-\lambda_0\mathscr{I})^{n_i}$，$\dim W_{\lambda_0}=n_i$

(2) $P_{\mathscr{A}|W_{\lambda_i}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$

(3) 设 $\ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})\subsetneq\cdots\subsetneq\ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{k_i}=\ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{k_i+1}=\cdots=$

则 $d_{A|W_{\lambda_i}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$

proof: $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & & *\\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \lambda_1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda_i I)^k=\begin{pmatrix}\begin{matrix}0 & *\\ & 0\end{matrix} & *\\ 0 & A_{22}-\lambda_0 I\end{pmatrix}^k\overset{k\geq n_i}{=}\begin{pmatrix}0 & *\\ 0 & (A_{22}-\lambda_0 I)^k\end{pmatrix}=\ -r(A-\lambda_0 I)^k=A-\lambda_1$$

$\therefore W_{\lambda_i}=\dim\ker(A-\lambda_0 I)^k\overset{\max}{=}n_i$

(1) 又 $(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{n_i}\alpha=0\Rightarrow(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{n_i}(\mathscr{A}\alpha)=0$ 　$\mathscr{A}$ 可交换 → 不变子空间得证

(2) $\alpha\in W_i\Rightarrow(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{n_i}\alpha=0\Rightarrow\ \mathscr{A}|_W\Rightarrow\ (\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{n_i}|_{W_{\lambda_i}}=0$

$\Rightarrow(\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}}-\lambda_i\mathscr{I})^{n_i}=0$ 　$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 是 $\mathscr{A}|_{W_i}$ 的零多项式

(3) 反证法

定理5 设 $P_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$ 则 $V=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\cdots\oplus W_{\lambda_s}$

$\Leftrightarrow$ "V可分解为一些根子空间的直和" $\longrightarrow$ 可化为准对角阵

· 推论1 …

存在V的一组基，$\mathcal{A}$ 在该组基下为准对角阵 $Diag(A_{11},A_{22},\ldots,A_{ss})$

· 推论2. $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则 A 相似于准对角阵 $Diag(A_{11},A_{22},\ldots,A_{ss})$

proof: 1° $V=W_{\lambda_1}+W_{\lambda_2}+\cdots+W_{\lambda_s}$ 再证明直和

引进 $f_i(\lambda)=\frac{P_A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_i)^{n_i}}$ $i=1,\ldots,s$ 显然 $f_1,f_2,\ldots,f_s$ 互素

则 $\exists$ 多项式 $u_1,\ldots,u_s$ s.t. $u_1f_1+u_2f_2+\cdots+u_sf_s=1$

$\Rightarrow u_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})+u_2(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})+\cdots+u_s(\mathcal{A})f_s(\mathcal{A})=\mathcal{E}$

$\Rightarrow \alpha=u_1(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\alpha+\cdots+u_s(\mathcal{A})f_s(\mathcal{A})\alpha$

下要证. $u_i(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})\alpha\in W_i$ $\Leftrightarrow$ $\underline{(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{n_i}}\,u_i(\mathcal{A})\,\underline{f_i(\mathcal{A})}\,\alpha=0$

$=u_i(\mathcal{A})P_A(\mathcal{A})\alpha=0$ $\rightarrow$ 特征多项式·化零

$\rightarrow$ V为 W_i 和 即证

2° $W_{\lambda_1}+\cdots+W_{\lambda_s}$ 为直和

$\Leftrightarrow \alpha_1+\cdots+\alpha_s=0$ $\alpha_i\in W_i \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_s=0$

$\Rightarrow f_i(\mathcal{A})\alpha_1+\cdots+f_i(\mathcal{A})\alpha_s=0 \Rightarrow f_i(\mathcal{A})\alpha_i=0$ 其余乘完都为0

f_i 与 $(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 互素

$\exists\, v_1(\lambda),v_2(\lambda)$ s.t. $v_1f_i+v_2(\lambda-\lambda_i)^{n_i}=1$

$\Rightarrow \underbrace{v_1(\mathcal{A})f_i(\mathcal{A})\alpha_i}_{=0}+v_2(\mathcal{A})f_i\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda_i)^{n_i}\alpha_i}_{=0}=\alpha_i$ $\Rightarrow \alpha_i=0$ #

P378

2 3 4

2018.12.10

$\mathscr{A}: V\to V$ 线性变换 $P_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

根子空间 $V=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_s}$

$W_{\lambda_i}=\ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{m_i}=\{\alpha\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{I})^{m_i}\alpha=0\}$

$\dim W_{\lambda_i}=m_i$ $\quad P_{\mathscr{A}|W_{\lambda_i}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$

$\Rightarrow$ ~~V中存在一组基，$\mathscr{A}$在该组基下矩阵~~ $A=\mathrm{Diag}(A_{11},A_{22},\ldots,A_{ss})$

$A_{ii}\in\mathbb{C}^{m_i\times m_i}$ $\quad B_i=A_{ii}-\lambda_i I^{(m_i)}=\begin{pmatrix}0 & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad B_i^{m_i}=0\to$ 幂零方阵

$A=P\,\mathrm{Diag}(A_{11},\ldots,A_{ss})P^{-1}$

Jordan标准型

$A_{ii}=P_iJ_iP_i^{-1}$ 又处理了一下

$\Rightarrow A\sim\mathrm{Diag}(\underset{\sim\sim\sim}{J_1,J_2,\ldots,J_s})$

$B_i: W_{\lambda_i}\to W_{\lambda_i}$ 幂零变换 继续分解

$W_{\lambda_i}=C_{i1}\oplus C_{i2}\oplus\cdots\oplus C_{im_{i2}}$

§3 循环子空间分解

(无限维)

定义1 $\mathscr{A}: V\to V$ 线性变换 $\alpha\in V$，称由向量 $\alpha,\mathscr{A}\alpha,\ldots,\mathscr{A}^k\alpha$ 生成的子空间为 α(关于$\mathscr{A}$)的循环子空间，记为 C

$C=\langle\alpha,\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}^2\alpha,\ldots\rangle$

命题1 循环子空间C是包含α的最小不变子空间

pf: $\beta=\sum_{i=0}^m\lambda_i\mathscr{A}^i\alpha\in C$ $\quad$ 1° $\mathscr{A}\beta=\sum_{i=0}^m\lambda_i\mathscr{A}^{i+1}\alpha\in C$ (不变子空间)

C'为包含α的不变子空间 $\quad\alpha\in C'\Rightarrow\mathscr{A}\alpha\in C'\cdots\Rightarrow\mathscr{A}^k\alpha\in C'$

$\Rightarrow C\subseteq C'$ 2° (最小性)

非 st. $\alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha$ 线性无关

$\alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots\ldots, \mathcal{A}^{k}\alpha$ 线性相关

$\Rightarrow \mathcal{A}^{k}\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathcal{A}^{i}\alpha \Rightarrow \mathcal{A}^{k+1}\alpha = \sum_{i=0}^{k} a_i \mathcal{A}^{i}\alpha = \sum_{i=1}^{k} a_{i-1}\mathcal{A}^{i}\alpha \in \langle \alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha \rangle$

$\Rightarrow$ C 不需要无穷多组基，只用 $k-1, \ldots, 0$ 有限个

$C = \langle \alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha \rangle$ 性质推进

特征值

$(\mathcal{A}^{k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathcal{A}^{i})\alpha = 0 \Rightarrow f(\mathcal{A})\alpha = 0 \Rightarrow f(\lambda) = (\lambda^{k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \lambda^{i})$

$d_\alpha(\lambda)$ 最小多项式

定义2 $\mathcal{A}: V \to V$ 线性变换 $\alpha \in V$ 若 $f(\mathcal{A})\alpha = 0$ 称 $f(\lambda)$ 为 α（关于 $\mathcal{A}$）的化零多项式

区分：$f(\lambda)$ 为 $\mathcal{A}$ 的化零多项式 $\Rightarrow \forall \alpha \in V \quad f(\mathcal{A})\alpha = 0$

$f(\lambda)$ 为 α 的（关于 $\mathcal{A}$）的…… $\Rightarrow$ 对特定 α $f(\mathcal{A})\alpha = 0$

整式关系

命题2 $f(\lambda)$ 为 α 化零多项式 则 $d_\alpha(\lambda) \mid f(\lambda)$，$d_\alpha(\lambda)$ 存在唯一（证法！）

C 为由 α 生成的循环子空间

命题3 $\mathcal{A}: V \to V$ 线性变换 $\alpha \in V$ $d_\alpha(\lambda) = \lambda^{k} + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

则：(1) $\{\mathcal{A}^{k-1}, \ldots, \alpha\}$ 为 C 的一组基，且 $\mathcal{A}|C$ 在该组基下矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -a_{k-1} & 1 & & 0 \\ -a_{k-2} & & \ddots & \\ -a_1 & & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $\mathcal{A}|C$ 的特征多项式与最小多项式均为 $d_\alpha(\lambda)$

proof: (1) 设存在不全为零的 λ_i 使 $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \mathcal{A}^{i}\alpha = 0$ 即 $f(\mathcal{A})\alpha = 0$

$\Rightarrow f(\lambda)$ 为 α 的化零多项式 $\because \deg(f) < k$，不可能！

$d_\alpha(\mathcal{A})\alpha = 0 \Rightarrow \mathcal{A}^{k}\alpha = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \mathcal{A}^{i}\alpha \in \langle \alpha, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha \rangle$

$d_\alpha(\lambda) = \lambda^{k} + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \Rightarrow C = \langle \alpha, \mathcal{A}\alpha, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha \rangle \Rightarrow \dim C = k$

$\mathcal{A}^k\alpha=-a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}\alpha-\cdots-a_1\alpha-a_0$

$\therefore \mathcal{A}(\mathcal{A}^{k-1}\alpha,\cdots,\alpha)=(\mathcal{A}^{k-1}\alpha,\cdots,\alpha)\begin{pmatrix}-a_{k-1} & 1 & & \\ 1 & & \ddots & \\ 1 & & & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$

(2) $P_{\mathcal{A}|C}(\lambda)=P_A(\lambda)=d_\alpha(\lambda)$

$\because d_{\mathcal{A}|C}(\lambda)\mid P_{\mathcal{A}|C}(\lambda)=d_\alpha(\lambda)$

$d_\alpha(\lambda)\mid \underset{\uparrow}{d(\lambda)}\mid P_{\mathcal{A}|C}(\lambda)=d_\alpha(\lambda)\Rightarrow d_{\mathcal{A}|C}(\lambda)=d_\alpha(\lambda)$

$\mathcal{A}|C$ 最小多项式

推论 设 $\mathcal{A}:V\to V$ 为幂零变换 $\alpha\in V$ C为α生成的循环子空间

则 $\mathcal{A}$在$\{\mathcal{A}^{k-1}\alpha,\cdots,\mathcal{A}\alpha,\alpha\}$下矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}=J_k(0)$

proof: $\mathcal{A}^m=0$ $\mathcal{A}^{m-1}\neq 0$ m称为$\mathcal{A}$的幂次

$\Rightarrow d_\mathcal{A}(\lambda)=\lambda^m$ $k=m$

定理1 设$\mathcal{B}:W\to W$为幂零变换，则

(1) $W=C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_m$ C_i为循环子空间

(2) 存在W的一组基，$\mathcal{B}$在该组基下矩阵为

$J=\mathrm{diag}(J_{d_1}(0),\cdots,J_{d_m}(0))$

(3) $\mathcal{A}$为幂零方阵 则 $\mathcal{A}\sim J$

proof: 找$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$ $C_i=\langle\alpha_i,\mathcal{B}\alpha_i,\cdots,\mathcal{B}^{d_i-1}\alpha_i\rangle$

s.t. $W=C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_m$

s.t. $\mathcal{B}^{d_1-1}\alpha_1,\cdots,\mathcal{B}\alpha_1,\alpha_1$ —— 构成W的一组基

$\mathcal{B}^{p-1}\neq 0$ $\mathcal{B}^p=0\Rightarrow$ $\mathcal{B}^{d_1}\alpha_1=0$ $\alpha\in\ker\mathcal{B}^{d_1}$

$\mathcal{B}^{d_1-1}\alpha_1\neq 0$ $\alpha\notin\ker\mathcal{B}^{d_1-1}$

$\therefore \ker\mathcal{B}\subset\ker\mathcal{B}^2\subset\cdots\subset\ker\mathcal{B}^{p-1}\subset\ker\mathcal{B}^p=W$

$r_k = \dim \ker B^k \quad r_1 < r_2 < \dots < r_p$

$\ker B^p = \ker B^{p-1} \oplus U_{p-1} \quad \dim U_{p-1} = r_p - r_{p-1} := d_p$

(1) 找 $\alpha_1, \dots, \alpha_{d_p} \in U_{p-1}$ 它为一组基

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 & \boxed{B\alpha_1} & \cdots\ B^{p-1}\alpha_1 & B\alpha_1 \in \ker B^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{d_p} & B\alpha_{d_p} & \cdots\ B^{p-1}\alpha_{d_p} & B\alpha_{d_p} \in \ker B^{p-1} \end{array}$$

$\ker B^{p-1} = \ker B^{p-2} \oplus \langle B\alpha_1, \dots, B\alpha_{d_p} \rangle \oplus U_{p-2}$

找 $\alpha_{d_p+1}, \dots, \alpha_{d_p'}$ 为 U_{p-2} 一组基

$\ker B^{p-2} = \ker B^{p-3} \oplus \langle B^2\alpha_1, B^2\alpha_2, \dots, B^2\alpha_{d_p} \rangle \oplus \langle B\alpha_{d_p+1}, \dots, B\alpha_{d_p'} \rangle \oplus U_{p-3}$

P333

1, 3, 5, 6

Review: 2018.12.12

$\mathcal{A}: V \to V \quad \alpha \in V$

$C = \langle \alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^k\alpha, \dots \rangle \qquad d_\alpha(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$

$C = \langle \alpha, \mathcal{A}\alpha, \dots, \mathcal{A}^{k-1}\alpha \rangle$ 则 $\mathcal{A}|C$ 在该基下矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} -a_{k-1} & 1 & & \\ -a_{k-2} & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

特别地 $\mathcal{A}$ 是幂零，$d_\alpha(\lambda) = \lambda^k$ 则 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$

第一 → 根子空间

~~(第二分解定理)~~

定理1 $\mathcal{B}: W \to W$ 为幂零变换，则 $W = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_m$

C_i 为关于 $\mathcal{B}$ 的循环子空间，$C_i = \langle \alpha_i, \mathcal{B}\alpha_i, \dots, \mathcal{B}^{d_i-1}\alpha_i \rangle$

$M_i = \{\mathcal{B}^{d_i-1}, \dots, \mathcal{B}\alpha_i, \alpha_i\}$ 为 C_i 基 $\quad M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ 为 W 一组基

$\mathcal{B}$ 在 M 下矩阵 $J = \mathrm{diag}(J_{d_1}(0), \dots, J_{d_m}(0))$

proof: 找 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ 使

$W = \langle \alpha_1, \mathcal{B}\alpha_1, \dots, \mathcal{B}^{d_1-1}\alpha_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \alpha_m, \mathcal{B}\alpha_m, \dots, \mathcal{B}^{d_m-1}\alpha_m \rangle$

$\mathcal{B}^{d_i}\alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i \in \ker \mathcal{B}^{d_i} \quad \alpha_i \notin \ker \mathcal{B}^{d_i-1}$

$\ker \mathcal{B} \subset \ker \mathcal{B}^2 \subset \dots \subset \ker \mathcal{B}^{p-1} \subset \ker \mathcal{B}^p = W$

$r_k = \mathrm{rank}(\mathcal{B}^k) \qquad d_k = r_{k-1} - r_k \qquad \delta_k = d_k - d_{k+1}$

$\ker \mathcal{B}^p = \ker \mathcal{B}^{p-1} \oplus U_{p-1} \qquad \dim U_{p-1} = (n - r_p) - (n - r_{p-1}) = r_{p-1} - r_p = d_p$

取 $\alpha_1, \dots, \alpha_{d_p} \in U_{p-1}$ 线性无关

$\mathcal{B}^{p-1}\alpha_1 \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{B}\alpha_1 \leftarrow \alpha_1 \leftrightarrow C_1$

$\mathcal{B}^{p-1}\alpha_{d_p} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{B}\alpha_{d_p} \leftarrow \alpha_{d_p} \leftrightarrow C_{d_p}$

$\mathcal{B}\alpha_1, \dots, \mathcal{B}\alpha_{d_p} \in \ker \mathcal{B}^{p-1}$

$\ker \mathcal{B}^{p-1} = \ker \mathcal{B}^{p-2} \oplus \langle \mathcal{B}\alpha_1, \dots, \mathcal{B}\alpha_{d_p} \rangle \oplus U_{p-2}$ ✓ $p-1$ 阶 ~~Jordan 块~~

$\dim U_{p-2} = (n - r_{p-1}) - (n - r_{p-2}) - d_p = d_{p-1} - d_p = \delta_{p-1}$

取 $\alpha_1, \dots, \alpha_{\delta_{p-1}} \in U_{p-2} \subset \ker \mathcal{B}^{p-1}$

取法类似

$\dots\dots$

92

$m = \dim \ker \mathcal{B}$ …特征子空间维数

定理2 (Jordan 标准型定理)

$\mathscr{A}: V\to V$ $\quad P_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

则 (1) $V=W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_s}$ $\quad W_{\lambda_i}=\ker(\mathscr{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{n_i}$

(2) $W_{\lambda_i}=C_{i1}\oplus C_{i2}\oplus\cdots\oplus C_{im_i}$ $\quad C_{ij}$ 是关于 $\mathscr{A}-\lambda_i\mathcal{I}/W_{\lambda_i}$ 的循环子空间 $\quad m_i=\dim V_{\lambda_i}$

(3) 存在V的一组基M, $\mathscr{A}$在M下矩阵为

$J=\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_s)$ $\quad J_i=\mathrm{diag}(J_{i1},\dots,J_{im_i})$

$J_{ij}=J_{k_{ij}}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_i\end{pmatrix}$

(4) $A\in\mathbb{C}^n$ $\exists$可逆方阵P st. $P^{-1}AP=J$ $\qquad$ * Jordan 标准型证明完成!

例1 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\\&&&1\end{pmatrix}$ 求A的Jordan标准型J, 及P st. $P^{-1}AP=J$

解: $P_A(\lambda)=(\lambda-1)^4$ $\quad r(A-I)=3$ $\quad r(A-I)^2=2$ $\quad r(A-I)^3=1$ $\quad r(A-I)^4=0$

$\underset{1}{\ker(A-I)}\subset\underset{2}{\ker(A-I)^2}\subset\underset{3}{\ker(A-I)^3}\subset\underset{4}{\ker(A-I)^4}=\mathbb{C}^4$

$(A-I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0&8\\&&0&\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad \alpha_1,(A-I)\alpha_1,(A-I)^2\alpha_1,(A-I)^3\alpha_1$

$\alpha=(\alpha_1,\underbrace{(A-I)\alpha_1}_{\alpha_2},\underbrace{(A-I)^2\alpha_1}_{\alpha_3},\underbrace{(A-I)^3\alpha_1}_{\alpha_4})$

$J=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{pmatrix}$ $\qquad P=(\alpha_4,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$ $\quad$ 从几何向量角度去找

例2 $A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&1&1\\0&2&0&1&2&3\\0&0&2&0&1&-1\\\hline&&&2&1&2\\&0&&0&2&0\\&&&0&0&2\end{array}\right)$ 求A Jordan 标准型及 P st. $P^{-1}AP=J$

$P_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^5$

$\lambda_1=1$ $\quad W_{\lambda_1}=\ker(A-I)$ $\quad \alpha_1=(1,0,0,0,0,0)^T$

$\lambda_2=2$ $\quad W_{\lambda_2}=\ker(A-I)^2=\ker(A-I)^3$ $\quad r(A-2I)=4$ $\quad r(A-2I)^2=2$ $\quad r(A-2I)^3=1$

$B=A-2I$

$\overset{2}{\ker B}\subset\overset{4}{\ker B^2}\subset\overset{5}{\ker B^3}$

$\{\gamma_1,\gamma_2\}$ $\quad \{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}$ $\quad \{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5\}$

$\gamma_1=(1,1,0,0,0,0)^T$ $\quad \gamma_2=(1,0,1,0,0,0)^T$ $\quad \gamma_3=(0,0,0,1,0,0)^T$

$\gamma_4=(0,0,3,0,2,-1)^T \quad \gamma_5=(0,0,0,0,1,-2)^T$

$\ker B^3=\ker B^2 \oplus U_2 \quad U_2=\langle\gamma_5\rangle$ 取 $\alpha_1=\gamma_5$

$C_1=\langle\alpha_1, B\alpha_1, B^2\alpha_1\rangle$

$\underset{4}{\ker B^2}=\underset{2}{\ker B}\oplus\underset{1}{\langle B\alpha_1\rangle}\oplus U_1 \quad \dim U_1=1$

$\alpha_2=\gamma_4 \quad C_2=\langle\alpha_2, B\alpha_2\rangle \quad W_{\lambda_2}=C_1\oplus C_2$

$J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$

$P=(\xi_1, B\alpha_1^2, B\alpha_1, \alpha_1, B\alpha_2, \alpha_2)$ ... 标准

§4 多项式矩阵相抵

$A(\lambda)\in F[\lambda]^{m\times n} \quad A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{m1}(\lambda) & & a_{mn}(\lambda)\end{pmatrix}$ ... 多项式矩阵 $a_{ij}(\lambda)\in F[\lambda]$

- $\operatorname{rank}(A(\lambda))$ — 非零子式最大阶数
- $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow \exists\, B(\lambda)\in F[\lambda]^{m\times n}$ s.t. $A(\lambda)B(\lambda)=I$

  $\longrightarrow$ $A(\lambda)$ 不可逆 但 (虽然满秩)

命题1 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow \det(A(\lambda))=c\in F \quad \underset{\text{非零常数}}{c\neq 0}$

pf: $A(\lambda)B(\lambda)=I \Rightarrow \det(A(\lambda))\cdot\det(B(\lambda))=1$

$\Rightarrow \det(A(\lambda))=c\neq 0$

$\Leftarrow \det(A(\lambda))=c\neq 0 \quad A(\lambda)^*\in F[\lambda] \quad A(\lambda)A^*(\lambda)=\det(A(\lambda))I=cI$

初等变换 (1) P_{ij} (2) $D_i(a)$ $a\neq 0$ $a\in F$

(3) $T_{ij}(f(\lambda))$ $\boxed{\text{可逆}}$ $P_{ij}^{-1}=P_{ij} \quad D_i(a)^{-1}=D_i(a^{-1})$

$T_{ij}(f(\lambda))^{-1}=T_{ij}(-f(\lambda))$

例 $A=\begin{pmatrix}4&3&-4\\1&0&2\\1&1&0\end{pmatrix}$ 将 $\lambda I-A$ 通过初等变换化为对角阵。

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix}\lambda-4&-3&4\\1&\lambda&-2\\-1&-1&\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-\lambda+1&\lambda^2-4\lambda+4\\0&\lambda-1&\lambda-2\\1&1&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\lambda+1&\lambda^2-4\lambda+4\\0&\lambda-1&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ key：想办法产生常数

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\lambda^2+3\lambda-3&\lambda^2-4\lambda+4\\0&1&\lambda-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda-2\\0&-\lambda^2+3\lambda-2&\lambda^2-4\lambda+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{pmatrix}$$

（任何一个λ多项式都行！）

定理1 $A(\lambda)\in F[\lambda]^{m\times n}$ $r(A(\lambda))=r$ 则经过有限次初等变换可将 $A(\lambda)$ 化为 $\begin{pmatrix}D(\lambda)&0\\0&0\end{pmatrix}$

$D(\lambda)=Diag(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\ldots,d_r(\lambda))$

且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $i=1,2,\ldots,r-1$

P394

1 (2) (4)(9)

3. 4. 5

2018.12.17

定理一 $A(\lambda)\in F[\lambda]^{m\times n}$ $A(\lambda)$ 经过有限次初等变换化为 $\begin{pmatrix}D(\lambda)&0\\0&0\end{pmatrix}$

$D(\lambda)=Diag(d_1(\lambda),\ldots,d_r(\lambda))$ $d_i(\lambda)$ 是首一多项式 且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $i=1,2,\ldots,r-1$

存在初等阵 $P_1(\lambda),\ldots,P_s(\lambda),Q_1(\lambda),\ldots,Q_t(\lambda)$ 使 $P_s(\lambda)\cdots P_1(\lambda)A(\lambda)Q_1(\lambda)\cdots Q_t(\lambda)=\begin{pmatrix}D(\lambda)&0\\0&0\end{pmatrix}$

proof：设 $A(\lambda)\neq0$ 经过有限次初等变换将 $A(\lambda)$ 化为 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$

满足 $b_{11}(\lambda)\mid b_{ij}(\lambda)$ $A(\lambda)\to\begin{pmatrix}b_{11}(\lambda)&b_{12}(\lambda)&\ldots&b_{1n}(\lambda)\\\vdots&&&\\b_{m1}(\lambda)&\ldots&\ldots&b_{mn}(\lambda)\end{pmatrix}$ $b_{ij}(\lambda)=g_{ij}(\lambda)b_{11}(\lambda)$

初等变换 $\to\begin{pmatrix}b_{11}(\lambda)&0\ \ldots\ 0\\0&\\\vdots&\tilde{B}(\lambda)\\0&\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_{11}(\lambda)&&\\&b_{22}(\lambda)&\\&&\overset{\approx}{B}(\lambda)\end{pmatrix}\to\cdots$

· Tip：利用 Euclid 算法对多项式矩阵降阶（有限次后全整除）↑ 从上定理

所有 $a_{ij}(\lambda)$ 被 $a_{11}(\lambda)$ 整除

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}(\lambda) \cdots \\ \vdots & a_{ij}(\lambda) \end{pmatrix}$$ 若 $a_{11} \nmid a_{ij}(\lambda)$ 将 a_{ij} 加到第一行，同上

推论1 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $A(\lambda)$ 为有限初等方阵之积

$\Leftarrow$ 可逆方阵乘积也可逆

$\Rightarrow$ 满秩 $r=n$ 且 $\det(D(\lambda)) \overset{\text{由定理1}}{\neq} 0 = c_1$

$= d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda)$ $d_i(\lambda)=1$

$\therefore P_s(\lambda) \cdots P_1(\lambda) Q_1(\lambda) \cdots Q_s(\lambda) = 1$

推论2 存在可逆阵 $P(\lambda)$ $Q(\lambda)$ s.t. $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \begin{pmatrix} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

定义2 $A(\lambda), B(\lambda) \in F[\lambda]^{m \times n}$，如果存在可逆方阵 $P(\lambda)$ $Q(\lambda)$ s.t. $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$

则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵

(1) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵充要条件？

(2) $A(\lambda)$ 相抵标准型？

定义3 $A(\lambda) \in F[\lambda]^{m \times n}$，称 $A(\lambda)$ 的 k 阶子式的最大公因子为 k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$

定理2 $A(\lambda), B(\lambda) \in F[\lambda]^{m \times n}$，则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow$ 它们的各阶行列式因子均相同

proof：$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$

$$B(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ j_1 \cdots j_k \end{pmatrix} = \sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_k \le n} \sum_{1 \le q_1 < \cdots < q_k \le n} P(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ p_1 \cdots p_k \end{pmatrix} A(\lambda)\begin{pmatrix} p_1 \cdots p_k \\ q_1 \cdots q_k \end{pmatrix} Q(\lambda)\begin{pmatrix} q_1 \cdots q_k \\ j_1 \cdots j_k \end{pmatrix}$$

设 A 的行列式因子为 $D_k(\lambda)$ $B(\lambda)$ 的为 $\tilde{D_k}(\lambda)$

$\because D_k(\lambda) \mid A\begin{pmatrix} p_1 \cdots p_k \\ q_1 \cdots q_k \end{pmatrix} \Rightarrow D_k(\lambda) \mid B(\lambda)\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ j_1 \cdots j_k \end{pmatrix} = \tilde{D_k}(\lambda)$

又由相抵对称性：$D_k(\lambda) \mid \tilde{D_k}(\lambda)$ $\tilde{D_k}(\lambda) \mid D_k(\lambda) \Rightarrow D_k(\lambda) = \tilde{D_k}(\lambda) \cdot c$ #

$A(\lambda) \sim \begin{pmatrix} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda))$

$D_1(\lambda) = \gcd(d_1(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)) = d_1(\lambda)$ $D_2(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda)$

$D_r(\lambda) = d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda)$ $D_{r+1}(\lambda) = 0$ $\Rightarrow \boxed{d_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}}$ 重排序

$\therefore B(\lambda) \sim \begin{pmatrix} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(\lambda) \sim B(\lambda)$ 由中间矩阵确定相抵也可

定义4 $A(\lambda) \in F[\lambda]^{m \times n}$ $r(A(\lambda)) = r$ 设 $A(\lambda)$ 行列式因子为 $D_k(\lambda)$ $k = 1, 2, \ldots, r$

称 $d_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子 $(i = 1, 2, \ldots, r)$ $D_0(\lambda) = 1$

定理3 $A(\lambda) \in F[\lambda]^{m \times n}$ $r(A(\lambda)) = r$ 则 $A(\lambda)$ 相抵于 $\underbrace{\begin{pmatrix} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ 这里 $D(\lambda) = \operatorname{diag}(d_1(\lambda) \cdots d_r(\lambda))$

Smith 标准型

由 $A(\lambda)$ 唯一确定

定义5 $F = \mathbb{C}$ $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$ 称 $\{(\lambda - \lambda_j)^{n_j}\}$ 为 $f(\lambda)$ 的初等因子组

$A(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]^{m \times n}$ $r(A(\lambda)) = r$ $d_1(\lambda) \ldots d_r(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子，设

$$\begin{cases} d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_{11}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_{1s}} \\ \vdots \\ d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{n_{r1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{n_{rs}} \end{cases} \Rightarrow n_{1j} \le n_{2j} \le \cdots \le n_{rj} \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

称 $\{(\lambda - \lambda_j)^{n_{ij}} \mid n_{ij} \neq 0\}$ 为 $A(\lambda)$ 的初等因子组

例1 求下列矩阵的Smith标准型，行列式因子，不变因子及初等因子组

(1) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & (1+\lambda)\lambda\end{pmatrix}$ $D_1(\lambda)=1$ $D_2(\lambda)=\lambda$

$D_3(\lambda)=\lambda^2(1+\lambda)$

$\Rightarrow d_1(\lambda)=1$ $d_2(\lambda)=\boxed{\lambda}$ $d_3(\lambda)=\boxed{(\lambda+1)\lambda}$ 初等因子组 $\{\lambda, \lambda, \lambda+1\}$ P

(2) $J=\begin{pmatrix}a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & a\end{pmatrix}_{n\times n}$ $A(\lambda)=\lambda I-J$ $D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$ $D_{n-1}(\lambda)=1=D_{n-2}(\lambda)=\cdots=D_1(\lambda)=1$

$\therefore d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$ $d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n$ $\therefore$ $\{(\lambda-a)^n\}$ 初等因子组

Smith 标准型：$Diag(1, 1, \ldots, (\lambda-a)^n)$

(3) $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2(\lambda+1)(\lambda-1)^3 & 0 \\ 0 & \lambda^4(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$ $D_1(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$ $D_2(\lambda)=\lambda^6(\lambda-1)^5(\lambda+1)$

$d_1(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$ $d_2(\lambda)=\lambda^4(\lambda-1)^3(\lambda+1)$ Smith 标准型：$diag(d_1(\lambda), d_2(\lambda))$

初等因子组 $\{\lambda^2, (\lambda-1)^2, \lambda^4, (\lambda-1)^3, (\lambda+1)\}$

定理4 $A(\lambda)$ $B(\lambda)\in F[\lambda]^{n\times n}$ 则 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵 $\Leftrightarrow$ 下列任意一个成立

(1) $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 行列式因子相同

(2) — — — 不变因子 相同

(3) — — — — 初等因子组 — — 且 $r(A(\lambda))=r(B(\lambda))$

证：(3) $\Leftarrow$ 初等因子组唯一确定(2) 不变因子 $\{(\lambda-\lambda_j)^{n_{ij}} \mid n_{ij}\neq 0\}$ $r(A(\lambda))=r$

固定 j $(\lambda-\lambda_j)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_j)^{k_p}$ $k_1\leq\cdots\leq k_p$

$(\lambda-\lambda_j)^{k_p}$ 分给 $d_r(\lambda)$. $(\lambda-\lambda_j)^{k_{p-1}}\to d_{r-1}(\lambda)$ — — — —

$(\lambda-\lambda_j)^{k_1}\cdots d_{r-p+1}(\lambda)$ 同类型按附分给不变因子

定理5 设 $A(\lambda)=Diag(f_1(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$ 则 $A(\lambda)$ 的初等因子组与 $f_1(\lambda)\ldots f_n(\lambda)$ 的初等因子组全体相同

$f_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{1s}}$

$\vdots$

$f_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{n1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_{ns}}$

P404

1 (2) (3) (6) 2. 4

P414 7

定理4 $A(\lambda)=Diag(f_1(\lambda),\dots,f_r(\lambda))$ 则 $A(\lambda)$ 的初等因子组与 $f_1(\lambda),\dots,f_r(\lambda)$ 的初等因子组全体相同

proof: $f_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{1s}}$ $\quad \{(\lambda-\lambda_j)^{n_{ij}} \mid n_{ij}\neq 0\}$

$\dots$

$f_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_{r1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_{rs}}$ $\quad n_{1j},\dots,n_{rj}$ 重排 $\Rightarrow \tilde{n_{1j}}\le\tilde{n_{2j}}\le\dots\le\tilde{n_{rj}}$

$\Downarrow$ $D_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\tilde{n_{11}}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\tilde{n_{1s}}}=d_1(\lambda)$

$D_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\tilde{n_{11}}+\tilde{n_{21}}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\tilde{n_{1s}}+\tilde{n_{2s}}}$ $\Rightarrow d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\tilde{n_{21}}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{\tilde{n_{2s}}}$

$\vdots$

$\Rightarrow$ $A(\lambda)$ 初等因子组为 $\{(\lambda-\lambda_j)^{\tilde{n_{ij}}} \mid \tilde{n_{ij}}\neq 0\}$

推论1 准对角阵 $A(\lambda)=Diag(A_1(\lambda),\dots,A_r(\lambda))$ 的初等因子组与 $A_1(\lambda),\dots,A_r(\lambda)$ 的初等因子组全体相同 → 方便计算

推论2 $J=diag(J_1,\dots,J_s)$ $\quad J_i=J_{m_i}(\lambda_i)$ 则 $\lambda I-J$ 的初等因子组为 $\{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\}$

定理5 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵

pf: $\Rightarrow$ $B=PAP^{-1}$ $\Rightarrow$ $\lambda I-B=P(\lambda I-A)P^{-1}$

$\Leftarrow$ $\lambda I-B=P(\lambda)(\lambda I-A)Q(\lambda)$ $\rightarrow$ $P(\lambda)^{-1}(\lambda I-B)=Q(\lambda)\lambda-AQ(\lambda)$

代入 $\lambda=B$ $\Rightarrow$ $0=Q_\lambda(B)B-AQ_\lambda(B)$ $\quad$ 记 $Q_\lambda(B)=W$ (后乘)

$\Rightarrow$ $WB=AW$ $\quad$ 若 W 可逆，则证毕 $\Rightarrow B=W^{-1}AW$

推论 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow$ $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 初等因子组相同

定理6 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 设 $\lambda I-A$ 的初等因子组为

$$\left.\begin{matrix}(\lambda-\lambda_1)^{l_{11}}\cdots(\lambda-\lambda_1)^{l_{1m_1}}\\(\lambda-\lambda_s)^{l_{s1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_{sm_s}}\end{matrix}\right\}\text{称为}A\text{的初等因子组}$$

则 A 相似于 $J=Diag(J_1,J_2,\dots,J_s)$

"初等因子组与Jordan块一一对应"

$J_i = Diag(J_{i1}, \dots, J_{im_i})$ $\quad J_{ij} = J_{k_{ij}}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_{ij} \times k_{ij}}$

Pf:

$\lambda I - A$ 与 $\lambda I - J$ 初等因子组相同 $\quad \lambda I - J_{ij}$ 初等因子 $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}} \rightarrow$ 回到 Jordan

初等因子组(代数) $\Leftrightarrow$ Jordan块 $\Leftrightarrow$ 循环子空间(几何)

§5 实方阵的实相似

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ 来出来一个虚根

命题1 $A, B \in \mathbb{R}^n$ 则A与B实相似 $\Leftrightarrow$ A与B复相似

证: $\Rightarrow$ 易

$\Leftarrow$ $B = PAP^{-1}$ $\quad P = P_1 + iP_2$ $\quad P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$BP = PA \Rightarrow BP_1 = P_1 A \quad BP_2 = P_2 A$

$\Rightarrow B(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)A$ 找 $\lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $P_1 + \lambda P_2$ 可逆

$f(\lambda) = \det(P_1 + \lambda P_2)$

命题2 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 则A初等因子组成对共轭出现(虚)

e.g.

$m=1$ $\quad A = \begin{pmatrix} a+bi & \\ & a-bi \end{pmatrix} = aI + b\begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \sim aI + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $\rightarrow a+bi$

$A = \begin{pmatrix} J_m(\tau) & \\ & J_m(\bar\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau & 1 & & & & \\ & \ddots & 1 & & & \\ & & \tau & & & \\ & & & \bar\tau & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \bar\tau \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \tau & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & \bar\tau & 0 & 1 & & \\ & & \tau & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & \bar\tau & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \tau & 0 \\ & & & & 0 & \bar\tau \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & \\ -b & a & 0 & 1 & & \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & a & b \\ & & & & -b & a \end{pmatrix}$

Date.

记 $K(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} K(a+bi) & I^{(2)} & & \\ & K(a+bi) & I^{(2)} & \\ & & \ddots & \\ & & & K(a+bi)\ I^{(2)} \end{pmatrix}$

~~综合~~

$J=\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{m_s}(\lambda_s) & & \\ & & & L_{m_1}(a+bi) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & L_{m_t}(a+bi) \end{pmatrix}$ $\quad L_{m_j}=\begin{pmatrix} K(a_j+b_j i)\ I^{(2)} & & \\ & \ddots & \\ & & K(a_j+b_j i)\ I^{(2)} \end{pmatrix}$

例1 $a\neq 0$ 证明: $J_m(a)$ 与 $aJ_m(1)$ 相似: $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix} \sim a\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

pf: ① $\lambda I-J_m(a)$ 初等因子 $(\lambda-a)^m$

$\lambda I-aJ_m(1)=\begin{pmatrix} \lambda-a & -a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ & & & \lambda-a \end{pmatrix} \cdots\cdots (\lambda-a)^m$

例2 A^T 与 A 相似

① $A=J=J_m(a)$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

② $\lambda I-A^T$ 与 $\lambda I-A$ 行列式因子相同

例3 A 是 n 阶可逆复方阵 证明: 存在复方阵 B s.t. $B^2=A$ (不可逆反例)

$A=PJP^{-1}$ 若存在 $\tilde{J}$ s.t. $\tilde{J}^2=J^2$ $B=P\tilde{J}P^{-1}$ 则 $B^2=A$

只需设 $A=J \longrightarrow A=J_m(a) \quad a\neq 0$

$A=\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}=aI+N \quad N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A=a(I+\frac{N}{a})$

再将 $(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k}x^k$ 展开

令 $B=\sqrt{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k}(\frac{N}{a})^k$ 满足题意

大思路

例4 数列$\{a_n\}$满足 $a_n=3a_{n-2}+2a_{n-1}$ $a_1=a_2=a_3=1$ 求$\{a_n\}$函数

$$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a_{n-2}+2a_{n-1}\\a_{n-1}\\a_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_{n-2}\\a_{n-3}\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^{n-3}\begin{pmatrix}a_3\\a_2\\a_1\end{pmatrix}$$

$A=PJP^{-1}$ $A^{n-3}=PJ^{n-3}P^{-1}$ $\left(P=\begin{pmatrix}4&1&-1\\2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&1\\&&-1\end{pmatrix}\right)$

例5 证：A的最小多项式等于 $\lambda I-A$ 最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$

例6 设n阶方阵A的特征多项式与最小多项式相等（A-单纯方阵），证方阵B与单纯方阵A可交换，则 $B=f(A)$ $f\to$多项式

证：$p_A(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$ $d_n(\lambda)=d_A(\lambda)$

$p_A(\lambda)=d_A(\lambda) \Rightarrow d_1(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1$

$\parallel$

$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$

A相似于 $J=\mathrm{Diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\ldots,J_{n_s}(\lambda_s))$

$AB=BA \Rightarrow B=f(A)$

不妨设 $A=J$ $B=(B_{ij})_{s\times s}$ $AB=BA \Rightarrow J_iB_{ij}=B_{ij}J_j$

若 $i\neq j$ $B_{ij}=0$ （无相同特征值，则只能为0）

P422 4

P429 2

P436 2 4 5

Date.

第五章 Euclid空间与Unitary(酉)空间 2018.12.24

§1 Euclid空间

定义1 V为$\mathbb{R}$上线性空间，称$(\cdot,\cdot)$为V上的内积$(V\times V\to\mathbb{R})$，如果：

(1) 对称性 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) 双线性性 $(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta)=\lambda_1(\alpha_1,\beta)+\lambda_2(\alpha_2,\beta)$

(3) 正定性：$(\alpha,\alpha)\geq 0$ 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$

V称为Euclid空间（上有内积）

$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ $\arccos\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$ $(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=0$

E.g.1 $V=\mathbb{R}^n$ $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$

$(x,y)=\lambda_1x_1y_1+\lambda_2x_2y_2,\dots,\lambda_nx_ny_n$ $\lambda_i>0$

E.g.2 $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ $(A,B)=Tr(AB^T)$

E.g.3 $V=C[a,b]$ $(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$

$\alpha_1,\dots,\alpha_n$为V中一组基 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)x$ $\beta=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)y$

$(\alpha,\beta)=x^TGy$ $G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ — 度量矩阵

$\beta_1,\dots,\beta_n$为V中另一组基 $(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P$

$\alpha=(\beta_1,\dots,\beta_n)\tilde{x}$ $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\tilde{y}$ $(\alpha,\beta)=\tilde{x}\tilde{G}\tilde{y}^T$ $\tilde{G}=((\beta_i,\beta_j))_{n\times n}$

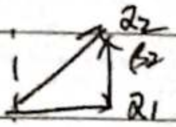
$\tilde{G}=P^TGP$ — 相合

· 相合标准型 实对称方阵 $A\overset{相合}{\sim}\begin{pmatrix}I^{(p)}&&\\&-I^{(q)}&\\&&0\end{pmatrix}$ 若G正定 $\sim I=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$

若$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$ $\Leftrightarrow$ 则称$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$为$V$的标准正交基

「Schmit-Gram 正交化」

$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \to \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$



$$\begin{cases} e_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} \\ \beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, e_1) e_1 \\ e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = |\alpha_1| e_1 \\ \alpha_2 = (\alpha_2, e_1) e_1 + (\alpha_2, e_2) e_2 \\ \vdots \\ \alpha_n = (\alpha_n, e_1) e_1 + \dots + (\alpha_n, e_n) e_n \end{cases}$$

* 注意可逆方阵可分为下面　　$A = QR$ — QR分解

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 为 V 的基，$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为标准正交基

$(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P$

$\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ 为标准正交基 $\Leftrightarrow$ P 为正交方阵

定义 $W^\perp := \{\beta \in V \mid \beta \perp W\} = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in W\}$

称 $W^\perp$ 为 W 的正交补空间

命题1　$V = W \oplus W^\perp$ 唯一

设 U, V 为两个Euclid空间，σ 为线性空间 U 到 V 的同构映射，满足

$(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$　　$\forall \alpha, \beta \in U$

称 Euclid U 与 V 同构

定理　U 与 V 同构 $\Leftrightarrow$ $\dim U = \dim V$

pf: $\Rightarrow$ ✓

$\Leftarrow$ $\dim U = \dim V = n$　　设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 为 U 的标准正交基

$\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ 为 V 的标准正交基 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i \quad i=1,\dots,n$

$(\sigma(\alpha_i),\sigma(\alpha_j))=(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij} \Rightarrow (\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$

对偶空间 V 为 Euclid 空间 $V^*=\{f \mid f$ 为 V 上线性函数

$V \xrightarrow{f} R$ 满足 $f(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1 f(\alpha_1)+\lambda_2 f(\alpha_2) \quad \lambda_i\in R$

$\alpha_1,\alpha_2\in V$

固定 $\beta\in V$, $f_\beta: \alpha\in V \Rightarrow (\alpha,\beta)\in R$

$f,g\in V^* \quad (f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha) \quad (\lambda f)(\alpha)=\lambda f(\alpha)$

$\Rightarrow$ V^* 也构成线性空间 — V 的对偶空间

定理 V 是 Euclid 空间，则 V^* 与 V 同构

proof: $\beta\in V$, $f\in V^* \quad \sigma: \beta\in V \to f_\beta\in V^*$

单射: $f_{\beta_1}=f_{\beta_2} \Rightarrow \beta_1=\beta_2$

$\forall\alpha\in V \quad f_{\beta_1}(\alpha)=f_{\beta_2}(\alpha) \Rightarrow (\alpha,\beta_1)=(\alpha,\beta_2) \Rightarrow (\alpha,\beta_1-\beta_2)=0, \ \forall\alpha\in V$

取 $\alpha=\beta_1-\beta_2 \Rightarrow (\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_2)=0 \Rightarrow \beta_1=\beta_2$

满射: $\forall f\in V^* \quad \exists\beta\in V$ s.t. $f_\beta=f$

设 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 为 V 标准正交基 $\quad \alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n \Rightarrow f(\alpha)=x_1 f(\alpha_1)+\dots+x_n f(\alpha_n)$

$\therefore$ 找 β s.t. $f_\beta(\alpha)=f(\alpha) \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=x_1 f(\alpha_1)+\dots+x_n f(\alpha_n)$

又 $\beta=f(\alpha_1)\alpha_1+\dots+f(\alpha_n)\alpha_n \quad \alpha=x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n \Rightarrow f_\beta(\alpha)=(\alpha,\beta)=f(\alpha)$

$\sigma(\beta_1+\beta_2)=f_{\beta_1+\beta_2}=f_{\beta_1}+f_{\beta_2} \leftarrow f_{\beta_1+\beta_2}(\alpha)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

定理 设 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 是 V 的标准正交基，则 $f_{\beta_1},\dots,f_{\beta_n}$ 为 V^* 的一组基

且 $f_{\beta_i}(\alpha_j)=\delta_{ij} \quad f_{\beta_1},\dots,f_{\beta_n}$ 称为 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 的对偶基

$\lambda_1 f_{\beta_1}+\dots+\lambda_n f_{\beta_n}=0 \Rightarrow \forall\alpha\in V$ 成立 $(\lambda_1 f_{\beta_1}+\dots+\lambda_n f_{\beta_n})(\alpha)=0$

$\Rightarrow \lambda_1 f(\alpha,\beta_1)+\dots+\lambda_n f(\alpha,\beta_n)=0 \Rightarrow f(\alpha,\lambda_1\beta_1+\dots+\lambda_n\beta_n)=0$

$\Rightarrow \lambda_1\beta_1+\dots+\lambda_n\beta_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0 \quad \therefore f_{\beta_i}(\beta_j)=(\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij}$

§2 Euclid空间上的变换

正交变换，对称变换，线性变换

定义1 $\mathscr{A}$为Euclid上线性变换，称$\mathscr{A}$为正交变换，若：

$(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$ $\alpha, \beta \in V$ 保内积不变

定理1 $\mathscr{A}$为正交变换 $\Leftrightarrow$ $|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|$ $\forall \alpha \in V$ △长度定⇒夹角定

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$在一组标准正交基下的矩阵为正交阵

定理2 正交变换的特征值模长均为1

P481 3 4

P491 4 11 12

(跟下节顺序反了)

No.

Date. 2018.12.29

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\mathbb{R}^n$ $x=(x_1,\dots,x_n)^T$ $y=(y_1,\dots,y_n)^T$

$(x,y)=\bar{x}_1 y_1+\dots+\bar{x}_n y_n$

$(x,x)=|x_1|^2+\dots+|x_n|^2 \ge 0$ $(x,y)=\overline{(y,x)}$ $(\lambda x,y)=\bar{\lambda}(x,y)$

§3 内积空间

定义1 V为$\mathbb{C}$上线性空间，V上定义二元函数 $(V\times V\to \mathbb{C})$ $(\dots)$ 满足

(1) 共轭对称 $(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$ $\forall \alpha,\beta\in V$

(2) …双线性 $(\lambda\alpha,\beta)=\bar{\lambda}(\alpha,\beta)$ $(\alpha,\mu\beta)=\mu(\alpha,\beta)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$ $(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

(3) 正定性 $(\alpha,\alpha)\ge 0$ 等号成立 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$

称$(\cdot,\cdot)$为内积，V为内积空间

· $\bar{x}^T=x^*$ $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=0$

例1 $V\in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(A,B)=\mathrm{Tr}(A^*B)$

$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

性质 $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{m}\mu_j\beta_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_i\mu_j(\alpha_i,\beta_j)=x^*Gy$ 度量矩阵 $=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$ (Grand)

$|(\alpha,\beta)|^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$ Cauchy-Swarch不等式

· G性质

(1) $G^*=G$ 共轭对称 Hermit矩阵

(2) $x^*Gx\ge 0$ 等号 $\Leftrightarrow$ $x=0$ 正定性 (?都有?)

(3) 不同基

$\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ $(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P$

$\alpha=(\beta_1,\dots,\beta_n)\tilde{x}$ $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\tilde{y}$ $(\alpha,\beta)=\tilde{x}^*\tilde{G}\tilde{y}$ $\tilde{G}=((\beta_i,\beta_j))_{n\times n}$

$\tilde{G}=P^*GP$ … 复相合、共轭相合

推论 $G>0$（正定）$\Leftrightarrow$ G 相合于 I

Schmidt-Gram 正交化　注：门秘算法

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ 为标准正交基

$(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)U$　标准正交基 $\Leftrightarrow$ $U^*U = I$

酉方阵全体 U_n 表示一酉群

① 所有行(列)构成 $\mathbb{C}^n$ 标准正交基

② $A, B \in U_n \Rightarrow AB \in U_n$

③ $A \in U_n \Rightarrow A^{-1} \in U_n$

W 为 V 的子空间 $\Leftrightarrow$ $V = W \oplus W^{\perp}$

· V_1, V_2 为两个酉空间，$\sigma: V_1 \to V_2$ 满足：① 双射 ② 保线性性 ③ 保内积

称 σ 为 V_1 与 V_2 间同构映射　$V_1 \cong V_2$　$\Leftrightarrow$ $\dim V_1 = \dim V_2$

对偶空间：V 上所有线性函数全体按加法与数乘构成线性空间 V^*

(1) $V \cong V^*$　$\sigma: \beta \to f_\beta$　$f_\beta(\alpha) := (\beta, \alpha)$

(2) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 为 V 的一组基 $\Rightarrow$ $f_{\beta_1}, \ldots, f_{\beta_n}$ 为 V^* 的一组基 一对偶基

§4 酉空间上的线性变换

V—酉空间 $\mathscr{A}$为V上线性变换

① $\mathscr{A}$为酉变换 $\Leftrightarrow$ $(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$ $\Leftrightarrow$ $|\mathscr{A}\alpha|=|\alpha|$, $\forall\alpha\in V$

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$将一组标准正交基变为另一组标准正交基

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$在一组正交基下矩阵为酉方阵

② $\mathscr{A}$为 Hermite 变换 $\Leftrightarrow$ $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)$ $\forall\alpha\beta\in V$

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$在一组标准正交基下矩阵为 Hermite 阵

存在唯一变换A^*: $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)$ $\forall\alpha,\beta$

$\mathscr{A}^*$称为$\mathscr{A}$的伴随变换

$\mathscr{A}$在一组标准正交基下矩阵为A $\mathscr{A}^*$ ... A^*

$\mathscr{A}$为规范变换 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ $\Leftrightarrow$ $A^*A=AA^*$ $\leftarrow$ 规范方阵

$\mathscr{A}$为反对称变换 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}^*=-\mathscr{A}$ $\in$ $\mathscr{A}$ ... A A满足$A^*=-A$

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 酉相似 $U^{-1}AU$ 最简形式 $U^{-1}=U^*$

$=U^*AU$

定理1 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则A酉相似于上三角阵

pf: 归纳法 $n=1$

设λ_1为A的特征值, x_1为对应特征向量, $|x_1|=1$ $Ax_1=\lambda_1x_1$

将x_1扩充为$\mathbb{C}^n$标准正交基 $A(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$

定理2 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ A为规范方阵 $\Leftrightarrow$ A酉相似于对角阵

pf: $\Leftarrow$ $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$ $AA^*=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*U\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}U^*=U\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{pmatrix}U$

$\Rightarrow$ $A=UTU^*$ $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}=(t_{ij})_{n\times n}$

$AA^*=A^*A$ $\Rightarrow$ $T^*T=TT^*$ $\Rightarrow$ $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}\lambda_1 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \bar{t}_{ij} & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \bar{t}_{ij} & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$|\lambda_1|^2+\sum_{j=2}^{n}|t_{1j}|^2=|\lambda_1|^2\Rightarrow t_{1j}=0$ #

定理3 (Schur)

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 则 $Tr(A^*A)\geq\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ λ_i为A的特征值

等式成立 ⟺ A为规范方阵

pf: ⟸ $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$ $A^*A=U\begin{pmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{pmatrix}U^*$

$Tr(A^*A)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$ $A^*A=UT^*TU^*$ $Tr(A^*A)=Tr(T^*T)$

Hermite阵 酉相似于 $diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ λ_i为实数

反、— — — — — — λ_i为纯虚数

酉方阵 — — — — — $|\lambda_i|=1$

E.g.1 $\mathcal{A}$为规范变换 且 $\mathcal{A}x=\lambda x$ $(x\neq0)$ 则 $\mathcal{A}^*x=\bar{\lambda}x$

pf: $((\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}I)x,(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}I)x)=(x,(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}^*-\bar{\lambda}I)x)$

$=(x,0)=0$ ⟹ $\mathcal{A}^*x=\bar{\lambda}x$

$A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$ $Ax_1=\lambda_1x_1$ A^*

$A^*=U\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}U^*$

E.g.2 $\mathcal{A}$为规范变换 $\mathcal{A}$的不同特征值对应特征向量彼此正交

pf: $\mathcal{A}x_1=\lambda_1x_1$ $\mathcal{A}x_2=\lambda_2x_2$ $\lambda_1\neq\lambda_2$

⟹ $\mathcal{A}^*x_1=\bar{\lambda}_1x_1$

$(\mathcal{A}^*x_1,x_2)=(\bar{\lambda}_1x_1,x_2)=\lambda_1(x_1,x_2)=(x_1,\mathcal{A}x_2)=(x_1,\lambda_2x_2)$

E.g.3 $\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ A为规范方阵 ⟺ $A^*=f(A)$ $f(\lambda)\in F[\lambda]$

pf: ⟸ $A^*=f(A)$ $A^*A=AA^*=Af(A)$

⟹ $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$ U酉方阵

$A^*=U\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}U^*$ ⟹ $\exists f(\lambda)$ s.t. $\bar{\lambda}_i=f(\lambda_i)$ $i=1,$

$p_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$　$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ 为不同特征值

找 $f(\lambda)$ s.t. $f(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$　$i = 1, \ldots, s$

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + \cdots + f_{s-1}\lambda^{s-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & \lambda_s & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_s \end{pmatrix}$$

$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$　λ_i 为 A 特征值

P533

2 4 6

P532

3 4 6 8

Date（补之前，上节课笔记）

2018.12.29

1. V为Euclid空间　$\mathscr{A}$为V上正交变换 $\Leftrightarrow$ $(\mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}\beta) = (\alpha, \beta)$　$\forall \alpha, \beta \in V$

$\Leftrightarrow$ $|\mathscr{A}\alpha| = |\alpha|$　$\forall \alpha \in V$　$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$在一组标准正交基下矩阵为正交阵

$\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$将标准正交基变为标准正交基

$O(V) := \{V$上正交变换$\}$ — 正交群

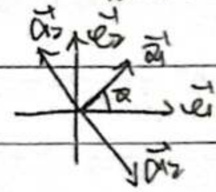
(1) $\mathscr{J} \in O(V)$　(2) $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in O(V) \Rightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} \in O(V)$

(3) $\mathscr{A} \in O(V)$, $\mathscr{A}^{-1} \in O(V)$

例1　确定$\mathbb{R}^2$上所有正交变换

① $\mathscr{A}(e_1, e_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$　　$\vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$　$\vec{\alpha_2} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$



② $\mathscr{A}(e_1, e_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$　$\lambda_1 = 1$　$\lambda_2 = -1$

例2　$\mathscr{A}$为$\mathbb{R}^3$中正交变换　$\det \mathscr{A} = 1$　则$\mathscr{A}$为绕某轴旋转变换

pf: 设$\mathscr{A}$特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$　$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$　设λ_1为实 $\lambda = 1$

对应λ_1特征向量x_1, $|x_1| = 1$　$Ax_1 = x_1$

存在标准正交基 x_1, x_2, x_3 s.t. $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

例3　A为n阶正交方阵 且$r(A-I) = 1$　求A的正交相似标准型

A正交相似标准型D　$r(D-I) = r(A-I) = 1$

$D = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{n-1个}, -1)$

2. 对称变换

$\mathscr{A}$为对称变换 ⟺ $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$

⟺ $\mathscr{A}$在一组标准正交基下矩阵为对称方阵

对称变换特征值均为实数 不同特征值对应特征向量彼此正交

实对称方阵正交相似于对角阵 $A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$ P正交

3. 规范变换

$\boxed{\text{命题1}}$ $\mathscr{A}$为Euclid空间V上线性变换，则存在V上唯一线性变换$\mathscr{A}^*$满足

$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$

adjoint

且$\mathscr{A}$在一组标准正交基M下矩阵为A，则$\mathscr{A}^*$在M下矩阵为A^T，称$\mathscr{A}^*$为$\mathscr{A}$的伴随变换

(pf: 见后)

与空间的关系

$\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A$ $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$，$\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$标准正交基

$\mathscr{A}(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\beta_1,\dots,\beta_n)B$ $(\beta_1,\dots,\beta_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P$ —正交

$B=P^{-1}AP$ $=P^TAP$

定义1 $A、B\in R^{n\times n}$ 若存在正交方阵P，s.t. $B=P^{-1}AP$ 则称A与B正交相似

引理1 V为Euclid空间，$\mathscr{A}$为V上正交变换，W为$\mathscr{A}$的不变子空间 则$W^\perp$也为$\mathscr{A}$的不变子空间

pf: $\forall\beta\in W^\perp \Rightarrow \mathscr{A}\beta\in W^\perp \Leftrightarrow \forall\alpha\in W$ $(\alpha,\mathscr{A}\beta)=0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| \ (\mathscr{A}^{-1}\alpha,\beta)=0$

$\mathscr{A}W=W \Rightarrow \mathscr{A}^{-1}W=W$

$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$为$W$的标准正交基，扩充为$V$的标准正交基$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r,\dots,\alpha_n\}$

$\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}=A$ $\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}I & \\ & I\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}A_{11}A_{11}^T+A_{12}A_{12}^T=I\\ A_{12}A_{22}^T=0 \quad A_{22}A_{22}^T=I\end{cases}$

$\therefore A_{12}=0$ A_{11}, A_{22}正交 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & \\ & A_{22}\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11} & \\ & A_{22}\end{pmatrix}$

$\therefore W^\perp$也为$\mathscr{A}$的不变子空间 #

(部分补充见后...)

$b_k \neq 0 \Rightarrow \cos\theta_k + i\sin\theta_k$

定理1 A为n阶正交阵 其特征值为 $a_k \pm b_k i$ $k=1$ $r, \underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{t}$

则A正交相似于

$$D = Diag\left(\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}\cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r\end{pmatrix}, \underbrace{1,\dots,1}_{s}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{t}\right)$$

pf: 归纳法 $n=1$ ✓ $n=2$ ✓ $\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$n\geq 3$时

1° A有实特征值±1 对应特征向量 x_n $|x_n|=1$

$Ax_n = \lambda_n x_n$ 将 x_n 扩充为 R^n 标准正交基 $x_1,\dots,x_n$

$A(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}A_{11} & 0 \\ A_{21} & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\tilde{A}$正交 $\Rightarrow$ A_{11}正交, $A_{21}=0$

$AP = P\begin{pmatrix}A_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$ P正交 A_{11}正交

$\therefore A = P\begin{pmatrix}A_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$ $A_{11} = \hat{P}\begin{pmatrix}D_{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\hat{P}^{-1}$

$= P\begin{pmatrix}\hat{P} & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{n-1} & \\ & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{P} & \\ & 1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}$

2° A无实根 设 $\cos\theta_1 \pm \sin\theta_1 i$ 为A的一对应根, 设对应特征向量 $x_1 + i x_2$

$A(x_1+ix_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(x_1+ix_2)$

$\Rightarrow A(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix} \Rightarrow (x_1, x_2)=0$ 且 $|x_1|=|x_2|=1$

将 $\{x_1, x_2\}$ 扩充为 R^n 标准正交基 $\{x_1,\dots,x_n\}$

$A(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_n)\left(\begin{array}{cc|c}\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & A_{12} \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & \\ \hline & 0 & A_{22}\end{array}\right)$ $A_{12}=0$ A_{22}正交

P501

3 5 6

P507

2 8

P518

2 5 9

~~规范变换命题~~

Pf: $\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A$

$\mathscr{A}\alpha=AX$ $\mathscr{A}\beta=AY$ 设 $\mathscr{A}^*(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)A^T$

$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta)=X^T(A^TY)$

$=(AX)^TY=X^TA^TY$ #

性质 $(\mathscr{A}^*)^*=\mathscr{A}$ $\mathscr{A}^*+\mathscr{B}^*=(\mathscr{A}+\mathscr{B})^*$

多种性质整理

$(\lambda\mathscr{A})^*=\lambda\mathscr{A}^*$ $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B})^*=\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$

正交 $\mathscr{A}$: $(\alpha,\beta)=(\mathscr{A}\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\mathscr{A}\beta)\Leftrightarrow\mathscr{A}^*\mathscr{A}=I\Leftrightarrow A^*A=I$

对称 $\mathscr{A}$: $(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)\Rightarrow\mathscr{A}=\mathscr{A}^*\Leftrightarrow A=A^T$

定义1 称满足 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$ 为规范变换

示例: $AA^T=A^TA$ 规范矩阵

$\mathscr{A}^*=-\mathscr{A}$ 也规范

$\mathscr{A}$ 正交, $\lambda\mathscr{A}$ 规范

引理1 设 $\mathscr{A}$ 为 V 上规范变换, W 为 $\mathscr{A}$ 不变子空间 $\Rightarrow W^{\perp}$ 也为 $\mathscr{A}$ ……

(部分补充) 设 $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ 标准正交基, 扩充 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\Rightarrow V$

$\mathscr{A}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}^T&0\\A_{12}^T&A_{22}^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^T&0\\A_{12}^T&A_{22}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A_{11}A_{11}^T+A_{12}A_{12}^T=A_{11}^TA_{11}$

$Tr(A_{11}A_{11}^T)+Tr(A_{12}A_{12}^T)=Tr(A_{11}^TA_{11})$

$\Rightarrow Tr(A_{12}A_{12}^T)=0\Rightarrow A_{12}=0$ $A=\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}$ A_{11}, A_{22} 规范

引理2 A 规范 $B=P^{-1}AP$ P 正交 则 B 也规范 ("规范的相似传递性")

验证 $B^TB=BB^T$

例1 确定二阶规范方阵

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $AA^T=A^TA\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}\to$ 对称

or $A=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$ $b\neq0$ $\lambda\times$旋转

接下页

§5 正定(半正定)方阵 (positive definite) 2019.1.2

A为实对称 $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$ $x^TAx>0$ 正定

$x^TAx\geq 0$ 半正定

H为Hermite阵 ($H^*=H$) $\forall 0\neq x\in\mathbb{C}^n$ $x^*Hx>0$ 正定Hermite阵

$x^*Hx\geq 0$ 半正定

(证明)

定理1 A为n阶实对称方阵,则下列命题等价

(1) A为正定方阵

(2) 存在可逆阵P, s.t. P^TAP为正定

相合运算,正定性不变

$A\sim P^T\Lambda P$ $\Lambda=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

$A>0$

(3) A的特征值均为正实数

$x^TP^TAPx=(Px)^TA(Px)=y^TAy>0$

(4) 存在可逆阵P, s.t. $A=P^TP$

(5) A的各阶顺序主子式均为正

$x^TAx=x^TP^T\Lambda \underbrace{Px}_{y}=y^T\Lambda y=\underline{\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2}>0$

(6) 存在正定方阵B, s.t. $A=B^2$, 且B由A唯一确定

4. $A=P^TP$ $x^TAx=x^TP^TPx=y^Ty>0$

$A=P^T\Lambda P=\underbrace{P^T\sqrt{\Lambda}}\cdot\underbrace{\sqrt{\Lambda}P}_{Q}=Q^TQ$

5. $A>0\Rightarrow$ 任何主子式都>0 $A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\ j_1\cdots j_k\end{pmatrix}>0$

$x=(0,x_{i_1},x_{i_2},0,\cdots,x_{i_k})$ 针对行列取x $x^TAx>0$

$\Leftarrow$ 归纳法 (反证?)

$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & C\\ C^T & a_{nn}\end{pmatrix}\rightarrow P^TAP=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & \underline{a_{nn}-CA_{n-1}^{-1}C^T}\end{pmatrix}$ $A_{n-1}>0$ $+\ 2>0$

↑key: 弄成准对角阵归纳

6. $A>0$ $A=P^T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P$

$=P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P\cdot\underbrace{P^T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P}_{B}=B^2$ B也正定

小结论: 若$A=B^2$ B正定→A正定

pf:

B唯一性: $B_1>0$ $B_2>0$ $B_1^2=B_2^2=A$ 同一法

$B_1=P_1\Lambda_1P_1$ $B_2=P_2\Lambda_2P_2$ Λ_1,Λ_2为对角阵

$\Lambda_1=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\dots\geq\lambda_n$

$\Lambda_2=diag(\mu_1,\dots,\mu_n)$ $\mu_1\geq\dots\geq\mu_n$

$B_1^2=B_2^2 \Rightarrow \lambda_i^2=\mu_i^2 \Rightarrow \lambda_i=\mu_i$ $i=1,\dots,n$

$B_1^2=P_1^T\Lambda^2P_1=P_2^T\Lambda^2P_2 \Rightarrow P_1^T\Lambda P_1=P_2^T\Lambda P_2$ $P\Lambda=\Lambda P \Longleftrightarrow P_{ij}\lambda_i=\lambda_jP_{ij}$

$P_2P_1^T\Lambda^2=\Lambda^2P_2P_1^T \Rightarrow P\Lambda^2=\Lambda^2P \rightarrow P_{ij}\lambda_i^2=\lambda_j^2P_{ij}$

① $\lambda_i^2=\lambda_j^2 \Rightarrow \lambda_i=\lambda_j$ $P_{ij}\lambda_i=\lambda_jP_{ij}$

② $\lambda_i^2\neq\lambda_j^2 \Rightarrow P_{ij}=0 \Rightarrow P_{ij}\lambda_i=\lambda_jP_{ij}$

定理2 A为n阶实对称方阵,则下列命题等价

(1) $A\geq0$

(2) 存在可逆P, $P^TAP\geq0$

(3) A的特征值均为非负实数

(4) $A=P^TP$ P为实方阵

(5) X 举反例 ⇒ 所有顺序主子式≥0 反推 X

(6) $A=B^2$, B唯一 $B\geq0$

定理3 H为Hermite阵,则下列命题等价:

(1) $H>0$	1. $H\geq0$
(2) 存在可逆P. $P^*HP>0$	2. $P^*HP\geq0$
(3) H的特征值均为正	3. 特征值非负
(4) $H=P^*P$, P可逆	4. $H=P^*P$
(5) H的顺序主子式均为正	5. $H=H_1^2$ $H_1\geq0$
(6) 存在$H_1>0$ st. $H=H_1^2$, H_1唯一	

定义1 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 如果存在正交方阵 P,Q s.t. $B=PAQ$，称 A 与 B 正交相抵

(P,Q 不改变度量)

$A,B\in\mathbb{C}^{m\times n}$ …… 酉 …… — — — 酉相抵

定理4 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 则 A 正交相抵于 $\Lambda=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \ddots 0\end{pmatrix}$ $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$

$\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ 称为 A 的奇异值 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i(A^TA)}$ (同 $\mathbb{C}$: 酉方阵)

$A=U\Lambda V$ U,V 正交 SVD (Singular Value Decomposition)

pf: $A^TA=U\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots \ \sigma_r^2 & \\ & & & 0\ddots 0\end{pmatrix}U^T$ $\quad \underbrace{U^TA^TAU}_{B}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots\ \sigma_r^2 & \\ & & 0\ddots 0\end{pmatrix}$

$B=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ $\quad B^TB=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots\ \sigma_r^2 & \\ & & 0\ddots 0\end{pmatrix}$ $\quad \beta_1,\ldots,\beta_r$ 彼此正交 $\beta_{r+1}=\cdots=0$

$=(\sigma_1 v_1,\ldots,\sigma_r v_r,0,\ldots,0)$ $\quad v_1,\ldots,v_r$ 单位正交

$AU=(v_1,\ldots,v_r,\ldots,v_n)\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots\ \sigma_r & \\ & & 0\ddots 0\end{pmatrix}$

$\therefore A=V\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots\ \sigma_r & \\ & & 0\ddots 0\end{pmatrix}U^T$

推论 $A=SO$ $S\geq 0$ O 正交

pf: $A=U\Lambda V=\underbrace{\boxed{V\Lambda U^T}}_{S}\underbrace{UV}_{O}$

例1. A 为 n 阶实对称正定方阵 证: $\det A\leq\left(\dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{n}\right)^n$

$\Updownarrow$

pf: A 的特征值为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n>0$ $\quad \lambda_1\cdots\lambda_n\leq\left(\dfrac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n$

例2 $A>0$ B 实对称 则 A,B 可同时相合于对角阵

即 $\exists$ 可逆阵 P s.t. P^TAP, P^TBP 为对角阵

pf: $A=I$ 存在正交阵 P s.t. $P^TAP=I$ $\quad P^TBP$ 为对角阵

$\exists P_1$ $\quad A_1=P_1^TAP_1=I$ $\quad B_1=P_1^TBP_1$

$\exists P_2$ $\quad A_2=P_2^TAP_2$ $\quad P_2^TBP_2=B$ 对角

令 $P=P_1P_2$ 则 $P^TAP=I$ P^TBP 对角

例3 $A>0$ 证：存在上三角阵 s.t. $A=R^TR$

Schmidt 正交化

pf: 存在可逆 P, s.t. $A=P^TP$ $\underline{P=QR}$ $\underline{Q\text{正交}, R\text{三角}}$

$=R^T\underbrace{Q^TQ}_{\text{正交}}R=R^TR$

例4. $S>0$ K 为反对称方阵 证：$\det(S+K)\geq\det S$

pf: $S=I$ $\det(I+K)\geq1$

反对称 $K=P^T\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b_1\\-b_1&0\end{pmatrix}&&&&\\&\ddots&&&\\&&\begin{pmatrix}0&b_s\\-b_s&0\end{pmatrix}&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}P$ P 正交

$I+K=P^T\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b_1\\-b_1&1\end{pmatrix}&&&&\\&\ddots&&&\\&&\begin{pmatrix}1&b_s\\-b_s&1\end{pmatrix}&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\\&&&&&1\end{pmatrix}P$ $\det(I+K)=(1+b_1^2)\cdots(1+b_s^2)\geq1$

一般地 $S=P^TP$ P 可逆 $\det(S+K)=\det(P^T(I+(P^{-1})^TKP^{-1})P)=(\det P)^2\det(I+\tilde{K})\geq(\det P)$

例5 $A=(a_{ij})_{n\times n}>0$ 证：$\det A\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

pf: 归纳法

相合运算

$A=\begin{pmatrix}A_{n-1}&C\\C^T&a_{nn}\end{pmatrix}\rightarrow P^TAP$ $Q=\underline{a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C}\leq a_{nn}$

$\det(A)=\det(A_{n-1})Q\leq a_{11}\cdots a_{n-1n-1}\cdot\underline{a_{nn}}$

例6 (Hadamard) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 则 $|\det A|\leq\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ki}^2}$

pf: 设 A 非奇异 $A^TA>0$ $\det(A^TA)\leq s_{11}\cdots s_{nn}$ 开方

$=S=(s_{ij})$

(奇异值分解)

例7. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 证：$\mathrm{Tr}(A)\leq\mathrm{Tr}(A^TA)^{\frac{1}{2}}$

pf: $A=U\begin{pmatrix}\sigma_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\sigma_r&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}V$ $(AA^T)^{\frac{1}{2}}=U\begin{pmatrix}\sigma_1&&&&\\&\ddots&&&\\&&\sigma_r&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix}U^T$ $\mathrm{Tr}(AA^T)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i$ 奇异值之和

$A = U\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix}V$ $\quad Tr(A) = Tr\left(\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \underbrace{VU^{-1}}_{O}\right)$ O 正交矩阵 $O = (O_{ij})_{n\times n}$

$\therefore Tr(A) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_i O_{ii}$ $\quad \because O_{ii}$ 为正交阵，元素绝对值 ≤ 1 　#

例8. H_1, H_2 为Hermite 阵 $H_1 > 0$ 则 $H_1 + H_2 > 0 \Leftrightarrow H_1^{-1}H_2$ 特征值均大于0

pf: $H_1 = I$ $\quad I + H_2 > 0 \Leftrightarrow H_2$ 特征值 > -1

$H_2 = P^T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}P \quad I + H_2 = P^T\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\lambda_n \end{pmatrix}P > 0 \Leftrightarrow 1+\lambda_i > 0 \Leftrightarrow \lambda_i > -1$

$H_1 + H_2 > 0 \Leftrightarrow H_1^{\frac{1}{2}}(I + H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}})H_1^{\frac{1}{2}} > 0$

$\Leftrightarrow I + H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}}$ 特征值均 > -1

$H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}} \sim H_1^{-1}H_2 = H_1^{-\frac{1}{2}}(H_1^{-\frac{1}{2}}H_2H_1^{-\frac{1}{2}})H_1^{\frac{1}{2}}$

例9 　$A \ge B > 0 \Rightarrow \det A \ge \det B$

$A - B \ge 0 \Leftrightarrow I - A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} \ge 0 \Leftrightarrow A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ 特征值 ≤ 1

$\det(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}) \le 1$

$\therefore \det B \le \det A$

P463

9 10

P555

1-7

线性空间

线性变换

Jordan 标准型

Euclid空间与酉空间