$A \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{A} = \{A_m \mid m \in I\}$. A 有可数稠密子集 则 $\forall \mathcal{A}$ 有可数 subcover.

Consider $\{B_{\frac{1}{m}}(x_n)\}_{m,n\in N} \to$ 可数 $\quad \{x_1 \cdots x_n\}$.

$\forall B_{\frac{1}{m}}(x_n)$ $\{A_m \mid B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subset A_m\} \neq \phi$ 则选取一个

且 $A_{mn} \supset B_{\frac{1}{m}}(x_n)$.

19. ① Lemma. 度量 S. A subspace $B \subset A$. 且 $B \overset{dense}{\subset} A$.
若 B connected 则 A connected.

Proof: $Y \neq \phi$ open and closed in A. $B \cap Y \neq \phi$ (B dense). moreover $B \cap Y$ is open and closed in B

$\xRightarrow{B\ connected} B \cap Y = B \Leftrightarrow B \subset Y$

$Y = \bar{Y} \supset \bar{B} = A \Rightarrow Y = A$.

dense: def, $\forall$ openset of $A \neq \phi$.
$B \cap$

Prove X is connected.

$X = X_0^+ \cup X_0^-$.
$X(x \geq 0)$ $\quad X(x \leq 0)$

by lemma $X_0^+ \cdot X_0^-$ connected.

$X^+ \to X(x>0)$ dense in X_0^+
$X^- \to X(x<0)$ dense in X_0^- } connected.

设 $\phi \neq Z \subset X$. open and closed

then either $X_0^+ \cap Z \neq \phi$ (and open and closed in X_0^+)
or $X_0^- \cap Z \neq \phi$.

$\Downarrow$ $X_0^+ \cap Z = X_0^+$
$\Rightarrow (0,0) \in Z$
$\Rightarrow X_0^- \cap Z \neq \phi$ $\Rightarrow X = Z$.
$\Rightarrow X_0^- \cap Z = X_0^-$

② $a: [0,1] \to X$.
$a(0) = (0,0)$
$a(1) = (\frac{1}{2\pi}, 0)$
$t_0 := \sup\{t \in [0,1] \mid a(t) = (0,0)\}$

Consider $\underline{\varepsilon_0 = \frac{1}{2}}$ then $\underline{\forall \delta > 0}$.
$a((t_0, t_0+\delta) \cap [0,1]) \subset \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x>0\}$ not essentially
$\forall x > 0\ \exists n$ s.t. $\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} < x$.

a's continuous. give
$(x_0, \sin\frac{1}{x_0}) \in a((t_0, t_0+\delta) \cap [0,1])$
$\Rightarrow \exists t \in (t_0, t_0+\delta)$ s.t.
$a(t) = (\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1)$.
即 $|a(t) - a(t_0)| > 1 > \varepsilon_0$

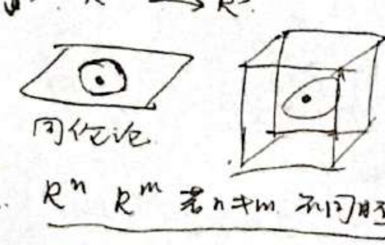
§ 5-4-1.

2. sup norm metric.

3. Consider $d(x) := |x - f(x)|$.
f 连续 $\Rightarrow$ d 连续.
F 为 $\mathbb{R}^n$ 闭子集 $\exists x_0$ s.t. $d(x_0) = \inf_{x \in F} d(x)$
if $d(x_0) > 0$. $|x_0 - f(x_0)| > 0$.
$|f(x_0) - f(f(x_0))| < |x_0 - f(x_0)|$
$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad d(x_0)$
$d(f(x_0))$. 矛盾

(10) $M \xrightarrow{f} N$ 同胚
则 $M | \{a\} \xrightarrow{f} N | \{f(a)\}$ 亦是同胚.
M subspace $\quad$ N subspace.
开集关系.

(举) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



同伦论

11. $f: A \to A^2$.
$df_A: X \to AX + XA$.
$df_{2n}(X) = 2X$ 可逆.
$(A + tA)^2 \cdot A^2 - \ldots$ ($\delta A \to 0$)

$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^m$ 若 $n \neq m$ 不同胚 (同调论).

且 $dg(b) = -(A_x)^{-1} A_y$
$\Rightarrow (A_y + A_x\, dg(b) = 0)$.

定理3.5.2 设f为2π周期的C^1函数，那么f的Fourier级数一致收敛于f. 不等式 $|y|\le\pi$

i.e. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$的部分和 $\left|S_N f = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} - f(x)\right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. $\left|\sin\frac{y}{2}\right| \ge \frac{|y|}{4}$.

证明：（周期卷积）. $D_N * f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}dy$.

$$S_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} f * D_N(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [[f(x-y)-f(x)]/\sin y/_2]\sin(N+\tfrac{1}{2})y\,dy$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g_x(y)\sin(N+\tfrac{1}{2})y\,dy \xrightarrow[\text{与}N\text{有关}]{\text{适当取}\delta} \int_{|y|\le\delta} + \int_{\delta\le|y|\le\pi}.$$

$\int_{|y|\le\delta}$：粗糙估计　$\int_{\delta\le|y|\le\pi}$：分部积分.（$g_x(y)$在$y=0$处导数涉及$f''$）

$$\left|\int_{|y|\le\delta} g_x(y)\sin(N+\tfrac{1}{2})y\,dy\right| \le \int_{|y|\le\delta} |g_x(y)|\,dy \le 8\delta\sup|f'|.$$

（由$g_x(y)$在$y\ne0$处连续且$\lim_{y\to0} g_x(y) = -2f'(x)$）补充$y=0$处定义.
从而$g_x(y)$连续于$[-\pi,\pi]$. 故$g_x(y)$有界. 且 $|g_x(y)| \le \left|\frac{y f'(\xi)}{\sin\frac{y}{2}}\right| \le 4\sup|f'(x)|$.）

中值

分部积分. $\int_{\delta}^{\pi} g_x(y)\sin(N+\frac{1}{2})y\,dy = \frac{1}{N+\frac{1}{2}}\left(\int_{\delta}^{\pi} g_x'(y)\cos(N+\tfrac{1}{2})y\,dy + g_x(\delta)\cos(N+\tfrac{1}{2})\delta\right)$.

在区间$[\delta,\pi]$上 $|g_x'(y)| \le \frac{12}{\delta}\sup|f'|$

从而 $\left|\int_{\delta}^{\pi} g_x(y)\sin(N+\frac{1}{2})y\,dy\right| \le \frac{1}{N}\left(\frac{48}{\delta}+16\right)\sup|f'|$.

$$|S_N f(x) - f(x)| \le \left(2\delta + \frac{24}{N\delta} + \frac{8}{N}\right)\sup|f'| \xleftarrow{\text{令}\delta=\frac{1}{\sqrt{N}}} \frac{34}{\sqrt{N}}\sup|f'|.$$

§3.5.3 平方平均收敛

$C(\mathbb{T})$. Hermite内积.

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx \in \mathbb{C}.$$

（$\langle f,f\rangle \ge 0$ $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f\equiv0$）.

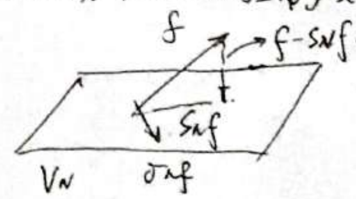
从而这内积诱导出$C(\mathbb{T})$上的"距离" $d_2(f,g) = \sqrt{\langle f-g,f-g\rangle} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx\right)^{1/2} \ge 0$

且$=0$时 $f\equiv g$.

称 $f_n \xrightarrow{\text{平方平均}} f$ in $C(\mathbb{T})$是指$d_2(f_n,f)\to0$.

回忆 $\forall N\in\mathbb{Z}_{>0}$ 记 $V_N = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^{inx}\}_{n=-N}^{N}$（是$2N+1$维线性空间）$=\{$次数$\le N$的三角多项式$\}$.

$\forall f\in C(\mathbb{T})$ $d_2(f,V_N) = \inf d(f,\phi)$.
ϕ为次数不超过N的三角多项式.



被 $\sum_{n=-N}^{N}\langle f,e^{inx}\rangle e^{inx} = S_N f(x)$ 所实现！

并且 $\langle f,f\rangle = \langle S_N f,S_N f\rangle + \langle f-S_N f,f-S_N f\rangle$

$$\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|S_N f-f|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx.$$

另一方面 $d_2^2(S_N f,f) \le d_2^2(\sigma_N f,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_N f - f|^2dx$
$\longrightarrow 0$ as $N\to+\infty$.

从而 $\langle f,f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\langle f,e^{inx}\rangle|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.（Parseval不等式）.
得到

Riemann-Lebesgue引理. 当$f\in C(\mathbb{T})$ $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx \to 0$ as $|n|\to+\infty$.

还得到：$\forall f,g\in C(\mathbb{T})$. 若$c_n(f) = c_n(g)$ for all n 则$f\equiv g$.

§3.6 等度连续

例 $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ $x\in[0,2\pi]$.

无一致收敛子列 (HW).

设 $\{f_n\}$ 在紧致区间 $[a,b]$ 上连续 (→一致连续) 且一致收敛于 f. 那么 $\{f_n\}$ 一致有界 (→连续有界且一致连续.) ($\exists M.\ \forall n.\ \forall x\in[a,b].\ |f_n(x)|\le M$.)

并且 $\{f_n\}$ 等度一致连续. $\forall \varepsilon>0.\ \exists \delta>0\ \forall n.\ \forall |x-y|\le\delta.\ |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$.

(AA 定理)

设 $\{f_k\}$ 在紧致区间 $[a,b]$ 一致有界. 一致等度连续. 那么 $\{f_k\}$ 存在一致收敛的子列.

证明: Step 1 取 $[a,b]$ 的可数稠密子列 $\{x_1, x_2, x_3 \cdots\}$ 由如下方法找出子列在 $\{x_k\}$ 上逐点收敛.

取 $\{f_k\}$ 子列	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	在 x_1 处收敛.
取 $\{f_{1k}\}$ 子列	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	在 x_1, x_2 处收敛.
取 $\{f_{2k}\}$ 子列	f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	在 x_1, x_2, x_3 处收敛

$\therefore \{f_{kk}\}$ 即为所求. 记为 $\{f_k\}$.

Step 2. 证明 $\{f_k\}$ 满足一致收敛的 Cauchy 准则.

等度致 $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0.\ \forall n.\ \forall |x-y|<\delta.\ |f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$

由于 $\{(x_k-\delta,\ x_k+\delta)\}\ k=1,2\ldots$ 为 $[a,b]$ 的开覆盖. 从而存在 finite subcover 记作 $\{(x_1-\delta, x_1+\delta), \cdots (x_N-\delta, x_N+\delta)\}$,

取 ($\exists$) $M\in\mathbb{Z}_{>0}$ $\forall k, j \ge M$ 时 $\forall 1\le p\le N$ $|f_j(x_p)-f_k(x_p)|<\varepsilon/3$.

$\forall x\in[a,b]$

$$|f_j(x)-f_k(x)|\le|f_j(x)-f_j(x_p)|+|f_j(x_p)-f_k(x_p)|+|f_k(x_p)-f_k(x)|<3\cdot\varepsilon/3=\varepsilon.$$

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

$\forall D\in\mathbb{R}^2$ χ_D(D的特征函数)定义为 $\chi_D(P)=\begin{cases}1 & P\in D\\ 0 & P\in\mathbb{R}^2\setminus D\end{cases}$

定理6.2.3 设D有界 $\subset\mathbb{R}^2$ 那么 χ_D(Riemann)可积 $\Leftrightarrow$ D有面积

此时 $A(D)=\iint \chi_D dxdy$.

并且 $\forall\varepsilon>0.\ \exists\delta>0\ \forall \text{diam}\,\pi<\delta,\ A_\pi^+(D)<A(D)+\varepsilon$.

证明 ✓ $\underline{S}_\pi(\chi_D)=A_\pi^-(D)$ $\overline{S}_\pi(\chi_D)=A_\pi^+(D)$ 前半部分成立.

由两个定义等价,即得后半部分.

设 $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$,$D\subset\mathbb{R}^2$ 有界可测. 定义 $(f\chi_D)(P)=\begin{cases}f(P) & P\in D\\ 0 & P\in\mathbb{R}^2\setminus D\end{cases}$ 称f在D上可积是指 $f\chi_D\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

可积. 且记 $\iint_D f\,dxdy=\iint_{(\mathbb{R})}(f\chi_D)dxdy$.

定理6.2.4 设D为有界可测集; $f: cl(D)\longrightarrow\mathbb{R}$ 连续. 那么f在D上可积.
$\partial cl(D)=\partial D$ 可测

证明: 由于f在cl(D)一致连续. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ y\in D$ $f\chi_D$ 为有界紧支集函数

with $|x-y|<\delta$. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. $\forall$ 直径小于δ的分割 $\pi=\{I_k\}$ $I\subset D$ 时 $I\in\pi$.

$M_I(f\chi_D)-m_I(f\chi_D)<\varepsilon$.

另一方面 $\forall\pi\ \exists I$. 若 $I\cap D$ 但 $I\not\subset D$. 则 $I\cap\partial D\neq\phi$. 于是

$$\overline{S}_\pi(f\chi_D)-\underline{S}_\pi f(\chi_D)=\sum_{\pi\ni I\subset D}(M_I-m_I)\sigma(I)+\sum_{\substack{I\cap D\neq\phi\\ I\cap D^c\neq\phi}}(M_I-m_I)\sigma(I)$$

$$\leq\varepsilon\cdot A_\pi^-(D)+\sum_{I\cap\partial D\neq\phi}2|\sup f|\,\sigma(I)$$

$$\leq\varepsilon A_\pi^-(D)+2\sup|f|A_\pi^+(\partial D)\leq\varepsilon A(D)+2\varepsilon\sup|f|.\ \#$$

例. 设D为零面积集. $f: D\to\mathbb{R}$ 有界. 则f在D上可积且 $\iint_D f\,dxdy=0$.

事实上. $\forall$ 分割 $\pi=\{I_k\}$. $\overline{S}_\pi(f\chi_D)-\underline{S}_\pi(f\chi_D)=\sum_{I\cap D\neq\phi}(M_I(f\chi_D)-m_I)\sigma(I)\leq 2\sup|f|A_\pi^+(D)$.

$\forall\varepsilon>0$. 当 diam $D<<1$. 上式 $\leq 2\varepsilon\sup|f|$. 从而f可积. 而 $\overline{S}_\pi(f\chi_D)\leq\sup|f|A_\pi^+(D)$.

$A(D)=0\Rightarrow\iint_D f=0$.

§ 函数可积的充要条件.

设 $D\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ $\forall x\in D.\ \forall r>0.$ 称 $\omega_f(x,r)=\sup\{|f(y_1)-f(y_2)|: \forall y_1,y_2\in B_r(x)\cap D\}$. $D\subset\mathbb{R}^2$ 于 $\mathbb{R}^2$

为函数f在 $D\cap B_r(x)$ 上的振幅. 不难看出

$\omega_f(x,r)=\sup_{D\cap B_r(x)}\{f(y)\}-\inf_{D\cap B_r(x)}\{f(y)\}$ 为r的单调增函数.

极限 $\omega_f(x):=\lim_{r\to0^+}\omega_f(x,r)$ 称为f在x处的振幅.

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

观察 f在x处连续 $\Leftrightarrow \omega_f(x)=0$.

$\forall \delta>0$. 记 $D_\delta(f)=\{x\in D: \omega_f(x)\geq\delta\}$. $\forall \delta_1>\delta_2>0$. $D_{\delta_1}(f)\subset D_{\delta_2}(f)$.

函数的不连续点集合. $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}(f)$

定理6.2.5 设D为紧致可测集合. $f: D\to\mathbb{R}$ 有界 那么f在D上可积 $\Leftrightarrow \forall \delta>0$. $D_\delta=D_\delta(f)$ 是零面积集 (f的不连续点集为可数零面积集的并).

引理 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 紧致. 且 $D\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ 在每点$x\in D$的振幅 $\omega_f(x)<\varepsilon$. 那么$\exists\delta>0$. $\forall x,y\in D$ $|x-y|<\delta$. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

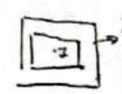
(反证) $\exists\{x_k\}\{y_k\}\subset D$. $|x_k-y_k|<\frac{1}{k}$ $|f(x_k)-f(y_k)|\geq\varepsilon$.

由D紧 $\exists\{x_k\}.\{y_k\}$子列 $\{x_{k_i}\}.\{y_{k_i}\}$有相同极限 $x\in D$. 于是 $\omega_f(x,r)\geq\varepsilon$.

从而 $\omega_f(x)\geq\varepsilon$. 矛盾

定理6.2.5的证明 (有误) ($\Rightarrow$) 设f在D上可积. 下证$\forall n$ $D_{\frac{1}{n}}$ 面积$=0$. (有限和) $\forall\varepsilon>0$. $\exists\pi$: $\operatorname{diam}\pi<<1$.

于是有 $\overline{S}_\pi(f\chi_D)-\underline{S}_\pi(f\chi_D)=\sum_{I\cap D\neq\phi}(M_I-m_I)\sigma(I)<\varepsilon/2$.



由于 $f\chi_D$有界. 将与D有交的矩形I 如右图扩大得 $\tilde I$: $\mathrm{Int}(\tilde I)\supset I$ 且

$$\sum_{I\cap D\neq\phi}(M_{\tilde I}-m_{\tilde I})\sigma(\tilde I)<\varepsilon.$$

$\forall n\in\mathbb{Z}_{>0}$. 记 $\pi_n=\{I\in\pi: I\cap D_{\frac{1}{n}}\neq\phi\}$ 则

$$\frac{1}{n}A^+(D_{\frac{1}{n}})\leq\frac{1}{n}A^+_\pi(D_{\frac{1}{n}})=\frac{1}{n}\sum_{I\in\pi_n}\sigma(I)\leq\sum_{I\in\pi_n}(M_{\tilde I}-m_{\tilde I})\sigma(\tilde I)<\varepsilon.$$

即 $A^+(D_{\frac{1}{n}})\leq n\varepsilon$ (任意) $\Rightarrow$ $A(D_{\frac{1}{n}})=0$.

$$\frac{1}{n}\sum_I\sigma(I)\leq\sum_I(M_{\tilde I}-m_{\tilde I})\sigma(\tilde I).$$

事实上. 由$I\in\pi_n$ $\exists x\in I\subset\mathrm{Int}(\tilde I)$: $\omega_f(x)\geq\frac{1}{n}$. $\exists r>0$ $B_r(x)\subset\tilde I$

从而 $\omega_f(x,r)\geq\omega_f(x)\geq\frac{1}{n}$. 另一方面 $\frac{1}{n}\leq\omega_f(x,r)=\sup_{B_r(x)}f-\inf_{B_r(x)}f\leq M_{\tilde I}-m_{\tilde I}$

($\Leftarrow$) 设$\forall\varepsilon>0$. D_ε面积为0. 从而$\exists$分割$\pi=\{I_{ij}\}$ s.t.

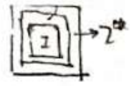
$$A^+_\pi(D_\varepsilon)=\sum_{I\cap D_\varepsilon\neq\phi}\sigma(I)<\varepsilon/2$$

将与D_ε有交的矩形I适当扩大为$\tilde I$. $\mathrm{Int}(\tilde I)\supset I$ 且

$$\sum_{I\cap D_\varepsilon\neq\phi}\sigma(\tilde I)<\varepsilon.$$

$\cap D_\varepsilon$.

令 $D'=D\setminus\left(\bigcup_{I\cap D_\varepsilon\neq\phi}\mathrm{Int}(\tilde I)\right)$. 为有界闭集. 且$\forall x\in D'$ $\omega_f(x)<\varepsilon$. 由引理. $\exists\delta>0$. $\forall x,y\in D'$ with $|x-y|<\delta$



$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ 且 $\sum_{I \cap D_\delta \neq \phi} \sigma(I^*) < \varepsilon$. 其中 I^* 为 $\tilde{I}$ 的扩张(各边向外 δ)

对 π 加细. 将 $\tilde{D}$ 的顶点添加到 π 的分点中. 必要时再适当加细使最后得到的分割 π': $\mathrm{diam}(\pi') < \delta$ 将 π' 中与 D有交部分分3组:

$\pi_1 = \{J \in \pi' \mid J \not\subset D,\ J \cap D \neq \phi\}$ ✓

$\pi_2 = \{J \in \pi' \mid J \subset D'\}$. ✓

$\pi_3 = \{J \in \pi' \mid J \not\subset D', J \subset D\}$.

当 $J \in \pi_3$ 则 $\exists I \in \pi$. $I \cap D_\varepsilon \neq \phi$ $J \cap \mathrm{Int}(\tilde{I}) \neq \phi$ 由于 $\mathrm{diam}(J) \leq \mathrm{diam}(\pi) < \delta$ 得

由于D可测 $A(\partial D)=0$. 当 $\delta \ll 1$ 时, $A^+_{\pi'}(\partial D) < \varepsilon$.

$$\overline{S}_\pi(f\chi_D) - \underline{S}_\pi(f\chi_D) \leq \Big(\sum_{J \in \pi_1} + \sum_{J \in \pi_2} + \sum_{J \in \pi_3}\Big)(M_I - m_I)\sigma(J).$$

$$\leq 2\sup|f| \underline{A^+_\pi(\partial D)} + \varepsilon A^+_\pi(D') + \sum_{I_j \cap D_\varepsilon \neq \phi} 2\sup|f|\, \sigma(I^*).$$

门正定理6.2.5 必要性.

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 零致(Jordan可测) $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 可积 那么 $\forall \delta > 0$. $D_\delta = D_\delta(f) = \{x \in D.\ w_f(x) \geq \delta\}$ 为零面积集.

证: 只需证 $\forall n$. $D_{\frac{1}{n}}$ 的面积为0. $\forall \varepsilon > 0$ 当 $\mathrm{diam}\,\pi \ll 1$ 时 就有

$$\overline{S}_\pi(f\chi_D) - \underline{S}_\pi(f\chi_D) = \sum_{\substack{I \cap D \neq \phi \\ I \in \pi}} \big(M_I(f\chi_D) - m_I(f\chi_D)\big)\sigma(I) < \varepsilon$$

由于 $A := \bigcup_{\substack{I \cap D \neq \phi \\ I \in \pi}} \partial I$ 的面积 $=0$. 只需证 $D'_{\frac{1}{n}} := D_{\frac{1}{n}} \setminus A$ 为零测集.

记 $\pi_n = \{I \in \pi:\ I \cap D'_{\frac{1}{n}} \neq \phi\}$, 则 $\frac{1}{n} A^+(D'_{\frac{1}{n}}) \leq \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{I \in \pi_n} \sigma(I) \leq \sum_{I \in \pi_n} (M_I - m_I)\sigma(I)}_{\text{需说明 } M_I - m_I \geq \frac{1}{n}} < \varepsilon$.

从而 $A^+(D'_{\frac{1}{n}}) < \underset{\text{任意}}{n\varepsilon}$

$\forall I \in \pi_n$. 即 $I_n \cap D'_{\frac{1}{n}} \neq \phi$. 那么 $\exists\, p \in \mathrm{Int}(I)$ 且 $w_f(p) \geq \frac{1}{n}$. 则 $\exists\, B_r(p) \subset \mathrm{Int}(I)$.

$\therefore \frac{1}{n} \leq w_f(p) \leq w_f(p, r) \leq M_I - m_I$

§6.2 循环子空间

① $0\neq\alpha_0\in V$.

α_0 生成的循环子空间($\mathcal{A}$的). 包含α_0的最小不变子空间

$C_0=\bigcap\limits_{U\text{为不变子空间}} U$

② 命题1. $C_{\alpha_0}=V(\alpha_0,\mathcal{A}(\alpha_0),\cdots)$

证明: 令 $U=V(\alpha_0,\mathcal{A}(\alpha_0),\cdots)$

(1) 由于 $\alpha_0\in C_{\alpha_0}$. C_{α_0}为$\mathcal{A}$的不变子空间.

$\therefore \mathcal{A}(\alpha_0),\mathcal{A}^2(\alpha_0),\cdots\in C_{\alpha_0}$

$\Rightarrow U\subseteq C_{\alpha_0}$

(2) $\alpha_0\in U$. 且U为不变子空间 $\Rightarrow C_{\alpha_0}\subseteq U$.

in fact. $\alpha=a_1\mathcal{A}^{m_1}(\alpha_0)+\cdots+a_k\mathcal{A}^{m_k}(\alpha_0)$

$\mathcal{A}(\alpha)=\cdots\in U$.

* $\alpha_0,\mathcal{A}(\alpha_0),\cdots,\mathcal{A}^n(\alpha_0)$ 一定线性相关 $(\dim V=n.)$

$\exists a_0\cdots a_n$ s.t.

$a_0\alpha_0+\cdots+a_n\mathcal{A}^n(\alpha_0)=0.$

令 $f(\lambda)=a_0\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0$.

则 $f(\mathcal{A})(\alpha_0)=0$.

③ 定义. 若 $0\neq f(\lambda)\in F[\lambda]$ s.t. $f(\mathcal{A})(\alpha_0)=0$

则称为α_0(相对于$\mathcal{A}$)的化零多项式

④ 最小多项式 $d_{\alpha_0}(\lambda)$

⑤ 命题2. $\mathcal{A}:V\to V$. $0\neq\alpha_0\in V$. C_{α_0}

$\deg(d_{\alpha_0}(\lambda))=K$. 则

(1) $\dim C_{\alpha_0}=K$. (基) ✓

$\{\alpha_0,\cdots,\mathcal{A}^{K-1}(\alpha_0)\}$为$C_{\alpha_0}$的基. ✓

$\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}$在基下矩阵为 $\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&&&\vdots\\ &\ddots&\ddots&&\\0&&\cdots&1&-a_{k-1}\end{pmatrix}$

其中 $d_{\alpha_0}(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\lambda^k$

(2) $d_{\alpha_0}(\lambda)=d_{\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}}(\lambda)=\varphi_{\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}}(\lambda)$.

证明. (1) "线性无关" $\{\alpha_0,\cdots,\mathcal{A}^{(k-1)}(\alpha_0)\}$

设 $\exists$ 不全为0的 b_i s.t.

$b_0\alpha_0+\cdots+b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0)=0$.

令 $f(\lambda)=b_0+\cdots+b_{k-1}\lambda^{k-1}\neq0$.

则 $f(\lambda)$为α_0(在$\mathcal{A}$下)化零多项式

$\deg(f(\lambda))\le k-1<k$ 矛盾

"线性表示" 易证

in fact $\mathcal{A}^k(\alpha_0)$ 可由 $\{\alpha_0,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0)\}$ 表出

(归纳) 设 $\mathcal{A}^l(\alpha_0)=b_0\alpha_0+\cdots+b_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0)$

则 $\mathcal{A}^{l+1}(\alpha_0)=\mathcal{A}(\mathcal{A}^l(\alpha_0))=b_0\mathcal{A}(\alpha_0)+\cdots+b_{k-2}\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0)+b_{k-1}\underline{\mathcal{A}^k(\alpha_0)}$.

$\mathcal{A}(\alpha_0,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0))=(\mathcal{A}(\alpha_0),\cdots,\mathcal{A}^k(\alpha_0))=(\alpha_0,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0))\underbrace{\begin{pmatrix}0&\cdots&0&-a_0\\1&&&\vdots\\&\ddots&&\\0&\cdots&1&-a_{k-1}\end{pmatrix}}_{=A}$

$d(\mathcal{A})(\alpha_0)=\mathcal{A}^k(\alpha_0)+\cdots+a_1\mathcal{A}(\alpha_0)+a_0\alpha_0=0$

$\Rightarrow\mathcal{A}^k(\alpha_0)=-a_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\alpha_0)-\cdots-a_1\mathcal{A}(\alpha_0)-a_0\alpha_0$

(2) $|\lambda I-\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}|=\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)$

$=\begin{vmatrix}\lambda&&&a_0\\-1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&&\\0&\cdots&-1&\lambda+a_{k-1}\end{vmatrix}=d_{\alpha_0}(\lambda)$.

$d_{\alpha_0}(\lambda)\,\Big|\,d_{\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}}(\lambda)\,\Big|\,\varphi_{\mathcal{A}|_{C_{\alpha_0}}}(\lambda)=d_{\alpha_0}(\lambda)$

$\Rightarrow =\ \ =$

⑥ 设 $\mathcal{A}:V\to V$ $\mathcal{A}^m=0$ 称$\mathcal{A}$幂零.

最小 m s.t. $\mathcal{A}^m=0$. 称为$\mathcal{A}$的幂零指数.

i.e. $\mathcal{A}^m=0$ $\mathcal{A}^{m-1}\neq0$.

* $m=1\Leftrightarrow\mathcal{A}=0$

若 $\mathcal{A}\neq0$. 则 $m\ge2$.

⑦ Thm 1 $\mathcal{A}$ m次幂零 则

(1) $\exists$ $0\neq\alpha_1\in V$. C_1为α_1生成的循环子空间.

$\dim C_1=m$. $\mathcal{A}|_{C_1}$为m次幂零.

(2) C_1存在补的不变子空间V_1 s.t.

$V=V_1\oplus C_1$.

$\mathcal{A}|_{V_1}$ 幂零且幂零指数 $m_2\le m$

(考虑限制在不变子空间上).

证明 (1) $\mathcal{A}^m=0$ $\mathcal{A}^{m-1}\neq0$

则 $\exists\alpha_1\in V$ s.t. $\underline{\mathcal{A}^{m-1}(\alpha_1)\neq0}$.

$\Rightarrow\mathcal{A}^m(\alpha_1)=0\Rightarrow\lambda^m$为$\alpha_1$的化零多项式

$\Rightarrow d_{\alpha_1}(\lambda)\,\big|\,\lambda^m\Rightarrow d_{\alpha_1}(\lambda)=\lambda^l\ (l\le m)$

若 $l\le m-1$ 则 $\mathcal{A}^{m-1}(\alpha_1)=\mathcal{A}^{m-1-l}(\alpha_1)\cdot\mathcal{A}^l(\alpha_1)=0$ 矛盾

$\therefore l=m$.

由命题2. $\dim C_{\alpha_1}=m$

$d_{\mathcal{A}|_{C_1}}(\lambda)=d_{\alpha_1}(\lambda)=\lambda^m$

$\Rightarrow\mathcal{A}|_{C_1}$为$m$次幂零

$(\mathcal{A}|_{C_1})^m=0$ $(\mathcal{A}|_{C_1})^{m-1}\neq0$.

(2) (归纳) 对m归纳

$m=1\Leftrightarrow\mathcal{A}=0$. $C_1=S(\alpha_1)=F\alpha_1$.

设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$为$V$的基.

令 $V_1=S(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. $\mathcal{A}(V_1)=0\subset V_1$.

$\mathcal{A}|_{V_1}=0$ $m_2=1=m$.

$\boxed{\text{假设 } m-1 \text{ 成立}}$

令 $U=\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$ 是不变子空间 (相对降次)

令 $\beta_1=\mathcal{A}(\alpha_1)\in U$

$\forall\xi\in U$. $\Rightarrow\xi=\mathcal{A}(\eta)$

$\mathcal{A}^{m-1}(\xi)=\mathcal{A}^m(\eta)=0$.

$\mathcal{A}|_U: U\to U$.

$(\mathcal{A}|_U)^{m-1}=0$

$\mathcal{A}^{m-2}(\beta_1)=\mathcal{A}^{m-1}(\alpha_1)\neq0$. $(\mathcal{A}|_U)^{m-2}\neq0$.

$\Rightarrow\mathcal{A}|_U$ $m-1$次幂零

设U中由β_1和对于$\mathscr{A}|_U$生成的循环子空间 $\widetilde{C}_1$
则$\widetilde{C}_1$有基$\{\beta_1, \mathscr{A}(\beta_1), \dots, \mathscr{A}^{m-2}(\beta_1)\}$.

$d_{\beta_1}(\lambda) = \lambda^{m-1} = d_{(\mathscr{A}|_U)|_{\widetilde{C}_1}}(\lambda)$.

由归纳假设 $\exists$ $\mathscr{A}|_U$在U中的不变子空间U_1 s.t:
$U = \widetilde{C}_1 \oplus U_1$ 且 $\mathscr{A}|_{U_1}$幂零指数 $\le m-1$.

(U_1为$\mathscr{A}$的不变子空间
$\alpha \in U_1$ $\mathscr{A}|_U(\alpha) = \mathscr{A}(\alpha) \in U_1$).

记 $\widetilde{V}_1 = \mathscr{A}^{-1}(U_1) = \{\alpha \in V \mid \mathscr{A}(\alpha) \in U_1\}$.
为V的子空间.

(1) $C_1 \cap U_1 = 0$.
(2) $U_1 \subseteq \widetilde{V}_1$ ☆
(3) $V = C_1 + \widetilde{V}_1$

(2) U_1是$\mathscr{A}$的不变子空间, $\forall \alpha \in U_1$ ($\alpha \in V$).
$\mathscr{A}(\alpha) \subset U_1$. $\therefore$ $U_1 \subset \widetilde{V}_1$.

(1) $\alpha \in C_1 \cap U_1 \ne 0$
C_1有基$\{\alpha_1, \dots, \mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1)\}$.
$\Rightarrow \alpha = a_0\alpha_1 + \dots + a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1)$
U_1为$\mathscr{A}$的不变子空间.
$\mathscr{A}(\alpha) = a_0\mathscr{A}(\alpha_1) + \dots + a_{m-2}\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1) + 0 \in U_1$.
$\mathscr{A}(\alpha_1), \dots \mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1) \in \mathrm{Im}\mathscr{A}$.
$\beta_1 \dots \mathscr{A}^{m-2}(\beta_1) \in \widetilde{C}_1$
$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha) \in U_1 \cap \widetilde{C}_1 = 0$.
$\therefore a_0 = \dots = a_{m-2} = 0$.
$\Rightarrow \alpha = a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1) = a_{m-1}\mathscr{A}^{m-2}(\beta_1) \in \widetilde{C}_1 \cap U_1 \Rightarrow \alpha = 0$.

(3) $\alpha \in V$.
$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha) \in \mathrm{Im}\mathscr{A} = U = \widetilde{C}_1 \oplus U_1$.
$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha) = \underset{\in \widetilde{C}_1}{\xi} + \underset{\in U_1}{\eta}$.

$\widetilde{C}_1$有基$\{\beta_1, \dots, \mathscr{A}^{m-2}(\beta_1)\}$.
$\Rightarrow \xi = b_0\beta_1 + \dots + b_{m-2}\mathscr{A}^{m-2}(\beta_1)$
$= \mathscr{A}(b_0\alpha_1 + \dots + b_{m-2}\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1))$.
$\Rightarrow \mathscr{A}(\alpha - b_0\alpha_1 - \dots - b_{m-2}\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1)) = \eta \in U_1$
$\Rightarrow \alpha - b_0\alpha_1 - \dots - b_{m-2}\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1) \in \widetilde{V}_1$
$\Rightarrow \alpha \in \underbrace{C_1 + \widetilde{V}_1}_{\text{不一定为直和}}$

由 $C_1 \cap U_1 = 0 \Rightarrow C_1 \cap U_1 \cap \widetilde{V}_1 = 0$.
$\Rightarrow U_1 \cap (C_1 \cap \widetilde{V}_1) = 0$
$U_1 \subseteq \widetilde{V}_1$ $C_1 \cap \widetilde{V}_1 \subseteq \widetilde{V}_1$
$\Rightarrow U_1 \oplus (C_1 \cap \widetilde{V}_1) \subseteq \widetilde{V}_1$
取$\widetilde{V}_1$中$U_1 \oplus (C_1 \cap \widetilde{V}_1)$的补$W$.
即 $W \oplus U_1 \oplus (C_1 \cap \widetilde{V}_1) = \widetilde{V}_1$.
令 $\underline{\underline{V_1}} = U_1 \oplus W \subseteq \widetilde{V}_1$.

(1) $\mathscr{A}(V_1) \subseteq \mathscr{A}(\widetilde{V}_1) \subseteq U_1 \subseteq V_1$.
2) $\forall \xi \in V_1 \subseteq V$.
$\mathscr{A}^m(\xi) = 0 \Rightarrow (\mathscr{A}|_{V_1})^m = 0$.

(3) $\xi \in V_1 \cap C_1$ $\xi \in V_1 \subseteq \widetilde{V}_1$
$\Rightarrow \xi \in V_1 \cap C_1 \cap \widetilde{V}_1 \in V_1 \cap (C_1 \cap \widetilde{V}_1) = 0$.

(4) 要证 $V = V_1 + C_1$.
$V = C_1 + \widetilde{V}_1 = C_1 + ((C_1 \cap \widetilde{V}_1) + V_1)$
$= C_1 + (C_1 \cap \widetilde{V}_1) + V_1 = C_1 + V_1$.

V: $\mathrm{Im}\,V$.

$\alpha \to C_1$ $\mathscr{A}(\alpha) = \beta \to \widetilde{C}_1$

$\oplus$

$\widetilde{V}_1 \xleftarrow{\mathscr{A}^{-1}} U_1$ 找C_1的补.

$C_1 \cap U_1 = \{\vec{0}\}$
$\underline{V = C_1 + \widetilde{V}_1}$
$U_1 \subset \widetilde{V}_1$

$C_1 \cap \widetilde{V}_1 = \{\vec{0}\}$ 不一定

$U_1 \cap (C_1 \cap \widetilde{V}_1) = \{\vec{0}\}$

$\underbrace{U_1 \oplus (C_1 \cap \widetilde{V}_1)}_{\Delta \quad \Delta} \oplus W = \widetilde{V}_1$

$\underbrace{V_1 = W + U_1}$
$V_1 \oplus C_1 = V$.

Thm. $F \subset E$. $A, B \in F^{n\times n}$ 若 $A \underset{(E)}{\sim} B$ 则 $A \underset{(F)}{\sim} B$ 矩阵相似与数域无关
(作业 t5)

证: 义带证 $\lambda I - A$ in $F[\lambda]^{n\times n}$ 与 $\lambda I - A$ in $E[\lambda]^{n\times n}$ 行列式因子相同

gcd ⇒ (f, g) 辗转相除法得到
带余除法与数域无关 ($+ - \times \div$ 在数域上封闭)

(T3) 实方阵 ~ 准对角阵. 对角块形式 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{smallmatrix} & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{smallmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} r_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & r_i & \\ & & \bar{r}_i & \\ & & & \ddots \\ & & & \bar{r} \end{pmatrix}$ 相似 若居在复数域上的相似

$(\lambda - r)(\lambda - \bar{r}) = \lambda^2 + a\lambda + b$

$\alpha_1 - \alpha_n, \beta_1 - \beta_n$ 换基的顺序
$(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n)$

$\begin{pmatrix} r & & & \\ & \bar{r} & & \\ & & r & \\ & & & \bar{r} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$

证 $\begin{pmatrix} r & \\ & \bar{r} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$

$P^{-1} \begin{pmatrix} r & \\ & \bar{r} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$

$P = diag(P^{-1}, \dots, P^{-1})$

K/E. E/F.
Thm $[K, F] = [K, E][E, F]$
· 域扩张定理
无穷复数
记 $[K, F] = mn$
① 组合 ② 无关
由以上 Thm 可证
α, β 为代数数 则
$\alpha+\beta$. $\alpha\times\beta$. $\frac{\alpha}{\beta}$ 为代数数
$\beta \neq 0$

Thm $A \in F^{n\times n}$ $\lambda I - A$ 不变因子 $d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda)$.
(1) $A \sim B = diag(B_1, \dots, B_n)$ $\boxed{B_i \text{ 为 } d_i(\lambda) \text{ 的友矩阵}}$
多项式的友矩阵
(2) $d_n(\lambda)$ 为 A 的最小多项式
(3) $d_j(\lambda) = \prod_{i=1}^{K} (p_i(\lambda))^{m_{ij}}$ → F上 $d_j(\lambda)$ 所有首一不可约多项式
则 $B_j \sim diag(B_{j1}, \dots, B_{jk})$.

$B_{ji} = \begin{pmatrix} C_i & & \\ E & \ddots & \\ & E & C_i \end{pmatrix}$ C_i 为 $p_i(\lambda)$ 的友矩阵
$E = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 在C上 → $E \to I$ 也可. (在F上?)

代数元 E/F.
$\alpha \in E$. α 为 F 上代数元
(即 α 为 $f(x) \in F[x]$ 的根) 否则为超越元
若 α 为代数元
则 α 的所有多项式中次数最小的 α 在 F 上的相小多项式. (首一)
Thm $f(x)$ 是 α 在 F 相小
⟺ $f(\alpha) = 0$. f 在 F 不可约
Thm E/F. $\alpha \in E$ $\deg f = n$
① α 为 F 上代数元 $f(x) \in F[x]$ 为 α 的极小多项式. 那么 $[F(\alpha) : F] = n$.
② α 为超越元. 则 $[F(\alpha) : F] = \infty$

$\lambda^2 + a\lambda + b$ 友矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$
伴随矩阵

A 是循环变换 ⟺ $(\lambda I - A)$ 的 $D_{n-1}(\lambda) = 1$
⇒ A 在某基下矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ & 1 & -a_n \end{pmatrix}$ → $(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}$.
⇐

? A 的循环(所有和 A 可交换的 B) 可交换. $C = f(A)$

E: n阶复矩阵 $d_A = \varphi_A$ $BA = AB$ $\boxed{\text{则 B 为 A 的多项式}}$ $f(A)$
每个特征值一个 Jordan 块

$A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix}$ $B_i = \begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & d \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & c \\ & & & & b \\ & & & & a \end{pmatrix}$

对 b_i
$f_i = a + b(x - \lambda_i) + c(x - \lambda_i)^2 + \cdots + d(x - \lambda_i)^{n_i - 1}$
$(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$ 作用在 J_i 上为 0. 中国剩余定理
$\therefore f \equiv f_i \pmod{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}}$

代数数 D. $a \in R$ a 若 α 为整系数多项式 $f(x) \in Q[x]$ 的根 (即 $f(\alpha) = 0$) 否则为超越数.
代数数集合 $\bar{Q} \subset C$
D. $F \subset E$. 扩张 E/F.
E 为 F-L.S $\dim_F E = [E, F]$.
E 中集合 S. $F(S)$ 为包含 F, S 最小的域. ⇒ 由 F 添加 S 生成的域
Thm $F(S) = \left\{ \frac{f(u_1, \dots, u_n)}{g(u_1, \dots, u_n)} \middle| u_1, \dots, u_n \in S \right\}$

Chap 7 Euclid空间

§7.1 内积

R^3 $\alpha=(x_1,y_1,z_1)$ $\beta=(x_2,y_2,z_2)$.

$(\alpha,\beta) \triangleq x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

① 定义1: $(\ ,\ ): V\times V \to R$.

V为R上的线性空间.

(0) 满足

(1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(2) $(\alpha,\alpha)>0$ $\forall\alpha\neq 0$

(3) $(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$ $\lambda\in R$. (线性)

线性+对称 $\xrightarrow{\text{得到}}$ 双线性

则 $(\ ,\ )$ 称为V上的一个内积.

② 性质1: 命题1. $(0,\beta)=(\alpha,0)=0$.

2. $(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{q}\mu_j\beta_j)$

3. $(\alpha,\beta)^2\le(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$.

"=" $\Leftrightarrow$ $\alpha\cdot\beta$ 相关 Cauchy-Schwarz

证: $\alpha=0$ V

$\alpha\neq 0$ $\beta_1=\beta-\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in V$. 取正交的向量

$\Rightarrow 0\le(\beta_1,\beta_1)=(\beta,\beta)-\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)}$ ⇒ 得证.

③ 定义2.: $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为V的基. (α,β) 为V上内积 若 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$.

$\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$.

则 $(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)$

记 $G=((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$.

则 $(\alpha,\beta)=XGY^T$ $X=(x_1,\cdots,x_n)$

$Y=(y_1,\cdots,y_n)$.

G: (α,β) 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的Gram矩阵.

④ 性质2.

(1) $G^T=G$ $(\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_j,\alpha_i)$

(2) 正定性 $\forall X\in R^n$

$XGX^T\ge 0$. 且"=" $\Leftrightarrow$ $X=0$.

⑤ 定义: (正定对称矩阵). $S\in R^{n\times n}$

$\underline{S^T=S}$ 且 $\underline{\forall X\in R^n\ XSX^T\ge 0, 且"="\Leftrightarrow X=0}$

⑥ Thm 1. (α,β) 为V的内积.

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为V的基. α 坐标 X

β …… Y.

Gram阵为G. 则

$(\alpha,\beta)=\underbrace{XGY^T}_{\in R}\left(=(YG^TX^T)^T\right)=YGX^T$

☆ $\forall A$. $\underline{XAY^T}=(XAY^T)^T=YA^TX^T$

Thm 2. S. 正定对称矩阵 $(1\times n)(n\times n)(n\times 1)=(1\times 1)\in R$

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为V的基. $\alpha\to X$ $\beta\to Y$

则 由 $(\alpha,\beta)\triangleq XSY^T$ 确定了V的一个内积. 且 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 下的Gram…

$(\alpha_i,\alpha_j)=e_iSe_j^T=s_{ij}=G_{ij}$

$e_i \to \alpha_i$, $e_j \to \alpha_j$

给定基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 正定对称阵与内积一一对应.

⑧ 定义4. S_1和S_2为n阶实对称矩阵

若3 可逆矩阵P s.t. $S_2=P^TS_1P$. 则 S_1. S_2 相合

※ 相合为等价关系

※ 若P正交 $(P^TP=I)$ 则 S_1S_2 相似.

⑨ Thm3: V. (α,β) 在 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ Gram阵

为 G_1 在 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下 G_2.

且 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$.

$\Rightarrow$ $G_2=P^TG_1P$ (G_1, G_2 相合).

$\alpha\to X$ $\alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)X^T$

$\beta\to Y$. $=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)PX^T$

$(\alpha,\beta)=[(PX^T)^T]G_1(PY^T)$

$=X(P^TG_1P)Y^T$

$\therefore (\alpha,\beta)=\underline{X\ G_2\ Y^T}$ $(\forall X, Y$ 成立)

$\Rightarrow$ $G_2=P^TG_1P$.

⑩ 定义5. V连同一个内积称为Euclid空间

(内积空间)

⑪ 定义6. $(V,(\alpha,\beta))$ Euclid空间

$\|\alpha\|\triangleq\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ α的范数(长度).

$\|\alpha\|=1$ 单位向量.

$\underline{0\neq\alpha.\ \beta\in V}$.

$\theta=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}}$

$=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$

θ: 夹角 $\alpha\cdot\beta$ 正交 $\Rightarrow(\alpha,\beta)=0$.

$(0,\beta)=0$. ⇒ 0与$\forall\beta$ 正交 (约定).

命题4 $\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$ 三角不等式.

$\|\alpha-\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$.

"=" 同向共线 | 反向共线.

例1 R^n 标准内积. $(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T$.

例2 R^2 $(\alpha,\beta)\triangleq x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$

$\alpha=(x_1,x_2)$ $\beta=(y_1,y_2)$

例3 $R^{n\times m}=V$. $(A,B)\triangleq tr\,AB^T$.

与将 $R^{n\times n}$ 看成Euclid后的标准内积一致

例4 R^n P可逆. $(\alpha,\beta)\triangleq\alpha PP^T\beta^T=(\alpha P)(\beta P)^T$

$G=PP^T$ 正定对称

例5 $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ L_2 $[0,1]$上连续实函数

例6 L_2. A: $L_2\to L_2$

$f(x)\to xf(x)$.

合同不变量.

$\xRightarrow{\text{Lemb}}$ 正交相似

若A.B正交相似 $B=O_1AO_2 \Rightarrow BB^T=O_1AA^TO_1^T \Rightarrow BB^T, AA^T$ 特征值相同 $\Rightarrow$ A.B奇异值相同

$A=O_1\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_2$ $D=(\mu_1 \cdots \mu_r)$ 为A的奇异值分解

Thm7.1 (极值分解) $A\in R^{n\times n}$

$A=SO$ (或 OS_1) 其中O为正交矩阵. S (或 S_1) 为半正定矩阵 (O可取成相同矩阵)

并且 $S.S_1$ 由A唯一确定.

$A=O_1\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_2=\underbrace{O_1\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_1^T O_1O_2}_{=SO}=\underbrace{O_1O_2\,O_2^T\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_2}_{=OS_1}$

$A=SO\Rightarrow \underbrace{AA^T}_{\text{半正定}}=(SO)(SO)^T=S^2 \xRightarrow{\text{Thm5}} S$唯一

$O=A^{-1}(AA^T)^{\frac{1}{2}}$ 若A可逆时O唯一

①例. $A\in R^{m\times n}$ $B\in R^{n\times p}$.

$tr(AB)(AB)^T\le tr(AA^T)\lambda_1(BB^T)$

其中 $\lambda_1(BB^T)=BB^T$ 最大特征值

证. $B=O_1\underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\times p}O_2$ $D=diag(\mu_1\cdots\mu_r)$

$\mu_1\ge\cdots\ge\mu_r>0$. 则 $\lambda_1(BB^T)=\mu_1^2$

$\Rightarrow BB^T=O_1\underbrace{\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n\times n}O_1^T$

$(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=AO_1\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_1^TA^T$

$\mu_1^2AA^T-ABB^TA^T=A(\mu_1^2I_n-BB^T)A^T=A(\mu_1^2I_n-O_1\begin{pmatrix} D^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}O_1^T)A^T$

$=AO_1\begin{pmatrix} \mu_1^2-\mu_1^2\ge0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_1^2-\mu_r^2 & \\ & & & \mu_1^2 \ddots \mu_1^2 \end{pmatrix}O_1^TA^T=(AO_1K)(AO_1K)^T \xlongequal{\text{记}} PP^T$

$tr(PP^T)\ge0. \Rightarrow tr(\mu_1^2AA^T-ABB^TA^T)\ge0.$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{rank}(P^TP)=\text{rank}P. \\ \text{若A.B相似 } tr(A)=tr(B).\end{array}}$ $Px=0\Rightarrow P^TP=0$ 若 $P^TPx=0\Rightarrow x^TP^TPx=(Px)^T(Px)\Rightarrow Px=0$

$tr(P^{-1}AP)=tr(PP^{-1}A)=tr(A)=tr(B)$

§7.8 矩阵的正交相似

①Thm1 $A\in R^{n\times n}$ $\varphi_A(\lambda)$ ↗ 不是正交相似标准型

则 $\exists \underset{\text{正交}}{O}$ 使 $O^TAO=\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_s & & \\ & & \lambda_{2s+1} & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $A_j\in R^{2\times2}$ 有特征值 $a_j\pm ib_j$ $(\lambda_{2j},\lambda_{2j-1})$. $(b_j\ne0)$

证 $\boxed{s>0}$ $\lambda_1=a_1+b_1i$ $(b_1\ne0)$

$A(u+iv)=(a_1+b_1i)(u+iv)$

$A(u-iv)=(a_1-b_1i)(u-iv)$

$\Rightarrow u+iv, u-iv$ 线性无关

$u.v\in R^n$ 线性无关且 $Au.Av\in\langle u,v\rangle$

取 $Ru+Rv$ 的标准正交基 (或将u.v正交单位化).

有 $\alpha_1.\alpha_2$ 则 $A(\alpha_1,\alpha_2)\in\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$

α_1,α_2 扩充 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$.

$A(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ $O_1=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 正交. 归纳假设

$\boxed{s=0}$ $\lambda_1\in R$ $A\alpha=\lambda_1\alpha$ $(\alpha\ne0)$ $\alpha_1=\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$. 扩充 $\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}=O_1$

$AO_1=O_1\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$

②Thm2 (Schur定理) $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 为 $A\in R^{n\times n}$ 的全部特征值. 则

$tr(AA^T)\ge\sum_{j=1}^n|\lambda_j|^2$ "=" $\Leftrightarrow$ A规范

证明. $A=(a_{ij})$ $trAA^T=\sum_{i,j}a_{ij}^2$

$A=O\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_s & & \\ & & \lambda_{2s+1} & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}O^T$ $trAA^T=tr\left[O\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_s & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^T & & & 0 \\ & A_s^T & & \\ & & \lambda & \\ * & & & \lambda \end{pmatrix}O^T\right]\ge tr\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_s & & \\ & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1^T & & & \\ & A_s^T & & \\ & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & \lambda_s \end{pmatrix}$

$=\sum_{j=1}^s tr(A_jA_j^T)+\sum_{j=2s+1}^n\lambda_j^2$ 设 $A_1=\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix}$ $detA_1=c_1g_1-f_1d_1=\lambda_1\lambda_2=a_1^2+b_1^2=|\lambda_1|^2\le\frac{1}{2}(c_1^2+g_1^2+f_1^2+d_1^2)$.

$=\frac{1}{2}tr(A_1A_1^T)$ A_1所有元素平方和.

$tr(A_1A_1^T)\le2|\lambda_1|^2$.

$\therefore trAA^T\le\sum_{j=1}^n|\lambda_j|^2$

等号成立 ⇒ 每处=0. $A=O\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_{2s+1} & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}O^T$ 且 $c_j=g_j$, $d_j=-f_j$. 规范标准型

⇒ A 规范 (反之显然).

③ Thm3 P368

④ 例 A.B.AB规范,则BA规范.

证: $\varphi_{AB}(\lambda)=\det(\lambda I_n-AB)=\det(\lambda I_n-BA)=\varphi_{BA}(\lambda)$.

由Thm2 知 $\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(BA)|^2=\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(AB)|^2=tr[(AB)(AB)^T]=tr(ABB^TA^T)=tr(BB^TA^TA)$.

$=tr(B^TBAA^T)=tr(BAA^TB^T)=tr(BA)(BA)^T$

再由Thm2 知 BA 规范.

§7.9 一些例子

①例: $A^T=A$. B^TB $A>0$ 则 ∃ P可逆 s.t. P^TAP. P^TBP 对角.

证: $A=S_1^2$. (S_1 正定) $B=\underbrace{S_1\boxed{(S_1^{-1}BS_1^{-1})}S_1}_{对称}$. ∃ O 正交 s.t. $S_1^{-1}BS_1^{-1}=O\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}O^T$

⇒ $O^TS_1^{-1}BS_1^{-1}O=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ 令 $P=S_1^{-1}O$. $P^T=O^T(S_1^{-1})^T=O^TS_1^{-1}$.

$P^TAP=O^TS_1^{-1}S_1^2S_1^{-1}O=O^TO=I_n$.

例6 $S\in R^{n\times n}$ $S=S^T$. 设 $V_n=\{x\in R^n$

§7.10 Euclid空间的同构.

$(V,(\alpha,\beta))$ $(W,(\ ,\ ))$

① 定义 若 σ $V\to W$ 同构 (Euclid空间的同构).

则 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$ (保内积).

② Thm1. $\sigma: V\to W$ Euclid同构

$\Leftrightarrow$ $\sigma: V\to W$ 线性空间同构且 $\|\sigma(\alpha)\|=\|\alpha\|$ (保范数)

③ Thm2 $\sigma: V\to W$ Euclid同构. 则 σ 可逆且 σ^{-1} 也为Euclid同构.

④ Thm3 $\sigma_1: V\to W$. $\sigma_2: W\to U$. 为Euclid同构.

则 $\sigma_2\sigma_1$ $V\to U$ 也为Euclid同构.

⑤ Thm4 $(V,(\alpha,\beta))$ Euclid空间 $\dim V=n$

则 $V\cong R^n$.

证: $\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$ 标准正交基 in V.

α: $X=(x_1\cdots x_n)$

β: $y=(y_1\cdots y_n)$

定义 $\sigma(\alpha)=X\in R^n$.

$(\alpha,\beta)=\sum_{i,j} x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i=1}^n x_iy_i=Xy^T=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$

* V 两个 n 维 Euclid空间同构

⑥ Thm5. $(V,(\alpha,\beta))(W,(\ ,\ ))$ 有限维且为同构Euclid空间

$\Leftrightarrow$ $\dim V=\dim W$

§7.9 一些例子

例1. $A^T=A$. $B^T=B$. $A>0$ 则 $\exists P$ s.t: P^TAP, P^TBP 对角
可逆 $\quad$ 正交

例2. S 对称 则 $\det S\neq 0 \Leftrightarrow \exists A$ s.t: $SA+A^TS$ 正定对称 ✓

$(\Rightarrow)$ $A=S/2$

$(\Leftarrow)$ 设 $S\alpha=0 \Rightarrow \alpha^TS^T=\alpha^TS=0$

$\Rightarrow$ $\alpha^T(\underbrace{SA+A^TS}_{>0})\alpha=0$. $\Rightarrow \alpha=0$. $\operatorname{rank} S=n$

例3 $P\in R^{m\times m}$ $Q\in R^{n\times n}$. $P.Q>0$. $R\in R^{m\times n}$.

则 $P-RQ^{-1}R^T>0 \Leftrightarrow Q-R^TP^{-1}R>0$

($A^T=A$. $B^T=B$. 若 $B=P^TAP$. P 可逆 则 $B\geq 0 \Leftrightarrow A\geq 0$)

相合关系 $\quad$ 用定义验证

保正性

例5. $A\in R^{n\times n}$. $\operatorname{tr}A\leq \operatorname{tr}(AA^T)^{\frac{1}{2}}$ 等号成立当且仅当 $A\geq 0$ 时成立

$\forall A$, 存在对称正定的 AA^T

$: xSx^T=0$

则V为R^n的子空间$\Leftrightarrow S\geq 0$或$-S\geq 0$.)

例子.

B^TB $A>0$

$(S_1$正定$)$

$S_1^{-1}BS_1^{-1}$ 0

$P=0^TS_1^{-1}$

例7. $A\in R^{m\times m}$ $B\in R^{n\times n}$. 定义$A\otimes B=(a_{ij}B)$为矩阵A B的张量(Kronecker乘积). mn阶矩阵.

证明 $A\geq 0$ $B\geq 0$ $A\otimes B\geq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & & \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

$A\otimes B$

$C\otimes D$ $(A\otimes B)(C\otimes D)_{ij}=\sum_{k=1}^{m}(a_{ik}B)(c_{kj}D)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}BD=(AC)_{ij}BD=AC\otimes BD$.

$(A\otimes B)^T=(a_{ij}B)^T=(a_{ji}B^T)=A^T\otimes B^T$.

$A\geq 0$ $B\geq 0$ $A=P^TP$ $B=Q^TQ$

$A\otimes B=(P\otimes Q)^T(P\otimes Q)\geq 0$.

例8. $A.B$ n阶矩阵 记$A\circ B=(a_{ij}\cdot b_{ij})_{n\times n}$ $A.B$的Hadamard乘积.

$A\geq 0.$ $B\geq 0.$ $A\circ B\geq 0$. 记$A=P^TP$ $P=(p_{ij})_{n\times n}$ $(A\circ B)_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(P^T)_{ik}(P)_{kj}b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}p_{ki}p_{kj}b_{ij}$

$\forall x=(x_1 \cdots x_n)$. $xA\circ Bx^T=\sum_{i,j}x_i(A\circ B)_{ij}x_j=\sum_{i,j,k}x_ip_{ki}p_{kj}b_{ij}x_j$ ※

$=\sum_k\sum_{ij}(x_ip_{ki})b_{ij}(p_{kj}x_j)=\sum_k d_k$.

$d_k=\sum_{i,j=1}^{n}(x_ip_{ki})b_{ij}(x_jp_{kj})$

$=(x_1p_{k1}\cdots x_np_{kn})B(x_1p_{k1}\cdots x_np_{kn})^T\geq 0.$ $(B\geq 0)$

$\sum d_k\geq 0$ $A\circ B\geq 0$

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

Chap 9 双线性函数

§9.1

① 定义 $f \quad V\times V \to F$

$f(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta)=\lambda_1 f(\alpha_1,\beta)+\lambda_2 f(\alpha_2,\beta)$

$f(\alpha,\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)=\mu_1 f(\alpha,\beta_1)+\mu_2 f(\alpha,\beta_2)$

② 命题1 $f(0,\beta)=f(\alpha,0)=0$.

〃 〃2 $f(\sum\lambda_i\alpha_i,\sum\mu_i\beta_i)=$ ……

③ $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ 基 $\alpha\to x \quad \beta\to y$.

$A=(f(\alpha_i,\alpha_j))=a_{ij}$

$f(\alpha,\beta)=xAy^T$

④ 双线性函数空间 $L(V,V,F)$

定义加法 $(f+g)=f+g$

数乘 $\lambda f=\lambda f$

⑤ Thm1 $L(V,V,F)\cong F^{n\times n}$

$f\mapsto A$ 单 满. 线性性

⑥ Thm2 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ $\{\beta_1 \cdots \beta_n\}$

$(\beta_1 \cdots \beta_n)=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$.

$B=P^TAP$.

$A=(f(\alpha_i,\alpha_j))$ $B=(f(\beta_i,\beta_j))$

⑦ rank f = rank$A$ rank$f=n$ 非退化

⑧ $f(\alpha,\beta)=0$ 称α关于f左正交于β $\alpha\perp_L\beta$

也称β …… 右 …… α. $\beta\perp_R\alpha$

⑨ $W\le V$ $\alpha\perp_L W \Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=0\ \forall\beta\in W$.

$\beta\perp_R W \Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=0\ \forall\alpha\in W$.

$V \geq W^{\perp L}=\{\alpha\in V \mid f(\alpha,\beta)=0\ \forall\beta\in W\}$ f 对称或斜对称

$V \geq W^{\perp R}=\{\beta\in V \mid f(\alpha,\beta)=0\ \forall\alpha\in W\}$. $W^{\perp L}=W^{\perp R}$

$V^{\perp L}$ $V^{\perp R}$

左根 右根.

⑩ 命题3 $W,U\le V$ $W\subseteq U$ 则

(1) $U^{\perp L}\subseteq W^{\perp L}$ $U^{\perp R}\subseteq W^{\perp R}$

(2) $(W^{\perp L})^{\perp R}\supseteq W$

$(W^{\perp R})^{\perp L}\supseteq W$.

⑪ $\dim V^{\perp L}=\dim V^{\perp R}=n-\text{rank}A=n-\text{rank}f$.

(12) f 非退化 $\Leftrightarrow V^{\perp L}=0=V^{\perp R}$

⑬ 固定$\alpha_0\in V$ $f(\alpha_0,\beta)\triangleq L(\alpha_0)\beta$

$L(\alpha_0)\in V^*$

$\forall\alpha\in V$ $L(\alpha)\in V^*$ 记 $\mathcal{A}(\alpha)=L(\alpha)$ $\mathcal{A}$ $V\to V^*$

⑭ 命题4 $\mathcal{A}: V\to V^*$ 线性映射.

⑮ 命题5 $\ker\mathcal{A}\subset V^{\perp L}$

⑯ Thm4 f 非退化 $\Leftrightarrow \forall g\in V^*$, $\exists\alpha\in V$

s.t. $L(\alpha)=g$ ($\mathcal{A}$满射)

⑰ 同理定义右侧

⑱ $f\in L(V,V,F)$ $\forall\alpha,\beta$ $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$ f对称

$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$ f反对称 (斜)

☆ 斜对称 $\overset{\Leftarrow\ 取\ f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{\Leftrightarrow}$ $\forall\alpha$ $f(\alpha,\alpha)=0$

⑲ Thm6 f关于正交对称($f(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow f(\beta,\alpha)=0$)

$\Leftrightarrow$ f对称或斜对称

证 ($\Rightarrow$) $\forall\alpha,\beta,\gamma$

$\xi=f(\alpha,\beta)\gamma-f(\alpha,\gamma)\beta$.

$f(\alpha,\xi)=0 \Rightarrow f(\xi,\alpha)=0$

$\Rightarrow$

$f(\alpha,\beta)f(\gamma,\alpha)-f(\alpha,\gamma)f(\beta,\alpha)=0$ (1)

令 $\beta=\alpha$. $0=\underbrace{f(\alpha,\alpha)}_{斜对称}(\underbrace{f(\gamma,\alpha)-f(\alpha,\gamma)}_{对称})$ (2)

Claim f (斜)对称

否则 $\exists$ $\overset{①}{f(\alpha,\beta)\neq f(\beta,\alpha)}$ 或 $\overset{②}{f(\gamma,\gamma)\neq 0}$.

①: $f(\alpha,\alpha)=0$, $f(\beta,\beta)=0$.

② $f(\alpha,\varepsilon) \neq f(\varepsilon,\alpha)$

$f(\beta,\varepsilon) \neq f(\varepsilon,\alpha)$

(1)式令 $\gamma=\varepsilon$.

$f(\alpha,\varepsilon)(f(\alpha,\beta)-f(\beta,\alpha))=0$.

$\Rightarrow f(\alpha,\varepsilon)=0=f(\varepsilon,\alpha)$

同理 $f(\beta,\varepsilon)=f(\varepsilon,\beta)=0$.

$\underline{f(\alpha,\varepsilon+\beta)}=f(\alpha,\varepsilon)+f(\alpha,\beta) \neq f(\beta,\alpha)+f(\varepsilon,\alpha)$

$=\underline{f(\beta+\varepsilon,\alpha)}$

类似 $\Rightarrow f(\beta+\varepsilon,\beta+\varepsilon)=0$

$=\underset{\shortparallel\atop 0}{f(\beta,\beta)}+\underset{\shortparallel\atop 0}{f(\beta,\varepsilon)}+\underset{\shortparallel\atop 0}{f(\varepsilon,\beta)}+\underset{\not=0}{f(\varepsilon,\varepsilon)}$ 矛盾

⑳ Thm7. $\forall f\in L(V,V,F)$

$\exists g$ 对称 h 斜对称

使 $f=g+h$. (g,h唯一).

$S(V,V,F)$ 对称双线性函数空间

$K(V,V,F)$ 斜 ………

㉑ Thm8 $L(V,V,F)=S(V,V,F)\oplus K(V,V,F)$

(Cor Thm7)

㉒ ~~对称~~

$f\in S$ or K. $V^{\perp}=V^{\perp_L}=V^{\perp_R}$

§ 9.2

① Thm1 $S(V,V,F)$ 与 $S(n,F)$ n阶对称方阵一一对应.

② Thm2 $f\in S(V,V,F)$ 则 $\exists$ 基 $\{\alpha_1-\alpha_n\}$ s.t.:

$$(f(\alpha_i,\alpha_j))=\begin{pmatrix}a_1&&&\\&\ddots&&\\&&a_r&\\&&&0\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{pmatrix} \quad r=\operatorname{rank}f.$$

证. 对 $\underline{\dim V}$ 归纳 则 ✓

设 $n-1$ 成立.

若 $\dim V=0$. $\operatorname{rank}f=0$ ✓
$f\neq 0$ $\exists\alpha.\beta$ s.t

$f(\alpha,\beta)\neq 0 \Rightarrow f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=4f(\alpha,\beta)\neq 0$

$\Rightarrow \exists\alpha_1\in V$ s.t $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$.

$W=\langle\alpha_1\rangle$ $W^{\perp}\leq V$.

Claim $V=W\oplus W^{\perp}$

$\Rightarrow f|_{W^{\perp}}$ 对称. 由归纳 $\exists\{\alpha_2-\alpha_n\}$ 为 $W^{\perp}$ 的基 s.t: $(f(\alpha_i,\alpha_j))$ 对角

$\{\alpha_1-\alpha_n\}$ 为 V 的基.,

$$f((\alpha_i,\alpha_j))=\left(\begin{array}{cc|c}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_r\\\hline&&0\end{array}\right)$$ 且 $S=\operatorname{rank}f=r$

③ Thm2 $\{\alpha_1-\alpha_n\}$ 有

$f(\alpha_i,\alpha_j)=0$ $i\neq j$

$\{\alpha_1-\alpha_n\}$ 为关于 f 的正交基.

且 Thm2 中 $V^{\perp}=\langle\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\rangle$.

④ Thm3 $S\in S(n.F)$ 则 $\exists P$ 可逆 s.t

$$P^TSP=\left(\begin{array}{cc|c}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_r\\\hline&&0\end{array}\right) \quad \begin{matrix}a_i\neq 0\\ r=\operatorname{rank}S.\end{matrix}$$

⑤ Thm4 $f\in S(V.V.\mathbb{R})$ 则存在

关于 f 正交基 $\{\alpha_1-\alpha_n\}$ s.t

$$(f(\alpha_i,\alpha_j))=\begin{pmatrix}I_p&&\\&-I_q&\\&&0\end{pmatrix}$$

⑥ $f\in S(V.V.\mathbb{R})$ 正定(半正定)

⑦ Thm5 $V=V^+\oplus V^-\oplus V^{\perp}$.

$f|_{V^+}$ 正定 $f|_{V^-}$ 负定

⑧ Thm6 $f\in S(V.V.\mathbb{R})$ 则

$V=V^+\oplus V^-\oplus V^{\perp}$

且 $f|_{V^+}>0$. $f|_{V^-}<0$ $V^{\perp}$ 根基.

另外 若 $V=V_1^+\oplus V_1^-\oplus V^{\perp}$

s.t $f|_{V_1^+}>0$ $f|_{V_1^-}<0$

则 $\dim V_1^{\pm}=\dim V^{\pm}$

⑮ $W<V$ $W^\perp=\{\beta\in V \mid (\beta,\alpha)=0\ \forall\alpha\in W\}$.

⑯ Thm8. $V=W\oplus W^\perp$

⑰ V, W 酉空间. 若 $\sigma: V\to W$ 线性空间同构.
且 $(\alpha,\beta)=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))$ 则称 酉空间 V 与 W 同构.

⑱ Thm9 $\dim V=n$. $(V,(\alpha,\beta))$ 则 $V\cong \mathbb{C}^n$
且 $V\cong W \Leftrightarrow \dim V=\dim W$. (有限维情况成立)

§8.2 酉相似.

① $f: V\to \mathbb{C}$ 线性函数 $\to$ L.S.
V^* 线性函数的全体 (内积按照 f 时 固定第2个向量)

② $f_\beta(\alpha)\triangleq(\alpha,\beta)\in V^*$
σ: $V\to V^*$ $\beta\mapsto f_\beta$ 线性同构.
基 $\longleftrightarrow$ 对偶基.

③ $\mathcal{A}: V\to V$ 线性变换
$\forall\beta\ \exists!\ \tilde\beta\in V$ s.t. $(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\tilde\beta):=(\alpha,\underline{\mathcal{A}^*(\beta)})$
则 $\mathcal{A}^*$ 为线性变换 称为 $\mathcal{A}$ 的伴随变换.

(1) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^*=\mathcal{A}^*+\mathcal{B}^*$
(2) $(\lambda\mathcal{A}^*)=\bar\lambda\mathcal{A}^*$ (※)
(3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^*=\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$.
(4) $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$
(5) $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ 在标准基下方阵 A, A^* $A^*=\bar{A}^T$
(6) $\mathcal{A}(W)\subseteq W\Rightarrow\mathcal{A}^*(W^\perp)\subseteq W^\perp$ (不变子空间).

④ $B=U^*AU$ 酉相似.

⑤ $\mathcal{A}$ 在不同标准基下方阵酉相似.

⑥ Thm1 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$

⑦ $A^*A=AA^*$. A 规范.
$H^*=H$ Hermidt $H^*=-H$ 斜 Hermidt

⑧ Thm2 (Schur 定理)
A 酉相似对角 $\Leftrightarrow$ A 规范.
($\Rightarrow$) √ ($\Leftarrow$) $A=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ & \lambda_n\end{pmatrix}U^*$
$A^*=U\begin{pmatrix}\bar\lambda_1 & 0 \\ * & \bar\lambda_n\end{pmatrix}U^*$.
$AA^*=A^*A\Rightarrow *=0\Rightarrow$ 对角.

⑨ Thm3 (Schur 不等式)
$\mathrm{tr}(AA^*)=\sum|a_{ij}|^2=a_{ij}\overline{a_{ij}}\geq\sum_{i=1}^n|\lambda_i|^2$
"=" $\Leftrightarrow$ A 规范.

⑩ Thm4. 规范 酉相似对角. 全部不变量 $(\lambda_1\cdots\lambda_n)$.

⑪ Thm5. W 酉矩阵 则 $U_1^*WU_1=\mathrm{diag}(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})$

⑫ Thm6 $H^*=H$ $\underline{\lambda_i\in\mathbb{R}}$ $H\sim\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$

⑬ Thm7 $K^*=-K$ 则 $K\sim\mathrm{diag}(i\lambda_1,\cdots,i\lambda_n)$

※ A 规范 则 $A^*=f(A)$
$(A^T=f(A))$

交换. $\mathcal{A}\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.
$U^*U=U^*U=E$ 酉变换
$\Leftrightarrow \|U(\alpha)\|=\|\alpha\|$.

附加例1 – 例12

§8.3 正定 Hermite 阵与奇异值分解

① $\alpha H\alpha^*$ $\Rightarrow$ 正定 (半正定)

② Thm1. H 正定 等价命题 (7).

③ Thm2 H 半正定 (1) (2) (3) (4) (5) (7)

④ $H=H_1^2$ H_1 唯一. 且有交换性.
(≥ 0)

⑤ 酉相抵 $\to$ 酉矩阵
$B=U_1AU_2$ $A, B\in\mathbb{C}^{m\times n}$

⑥ 奇异值. A^*A 或 AA^* 非零特征值的平方根
非零特征值相同
A^*A 为 Hermite 阵
且 $(A^*A)^*=A^*A$

⑦ $\mu_1\cdots\mu_r$ 为 A 全部奇异值.
$A=U_1\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U_2$ $D=\begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r\end{pmatrix}$
A 与 AA^* 秩相同

⑧ (极分解). $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 存在
$\exists\ H_1, H_2$ (Hermidt) U (酉) s.t
$A=H_1U=UH_2$.

⑨ 广义逆 (略)

§8.4

Chap 8 酉空间/C Euclid/R

§8.1 V/C

① 内积 $(\alpha,\beta)\in C$

$(\ ,\ )\ V\times V\to C$

(1) Hermite对称 $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$

(2) $\forall\alpha\neq0$ $\alpha\in V$ $(\alpha,\alpha)>0$

(3) 共轭双线性 $(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta)=\lambda_1(\alpha_1,\beta)+\lambda_2(\alpha_2,\beta)$

$(\alpha,\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)=\overline{(\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2,\alpha)}=\overline{\mu_1(\beta_1,\alpha)+\mu_2(\beta_2,\alpha)}=\bar\mu_1(\alpha,\beta_1)+\bar\mu_2(\alpha,\beta_2)$

② 性质 (1) $(0,\beta)=(\alpha,0)=0$

(2) $(\sum\lambda_i\alpha_i,\sum\mu_j\beta_j)=\sum\lambda_i\bar\mu_j(\alpha_i,\beta_j)$

(3) $\underline{|(\alpha,\beta)|^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}$

③ $\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$基. $\alpha\leftrightarrow x$ $\beta\leftrightarrow y$. G

$(\alpha,\beta)=xG\bar y^T=xGy^*$ $y^*=\bar y^T$

$\Rightarrow(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}\Rightarrow\overline{xGy^*}^T=yG^*x^*=$ $(\forall x,y)$

$G=G^*$

④ 正定Hermite阵 1) $G^*=G$ 2) $X\neq0$ $XGX^T>0$

⑤ $\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$ $\{\beta_1\cdots\beta_n\}$

$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)P$. $G_2=PG_1P^*$ (复相合)

⑥ 酉空间

⑦ $(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow\alpha\perp\beta$.

⑧ Thm1. $\{\alpha_1\cdots\alpha_k\}$ $\alpha_i\neq0$ $(\alpha_i,\alpha_j)=0$ $i\neq j$. $\{\alpha_1\cdots\alpha_k\}$线性无关.

⑨ Thm2 $\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$基. 则存在 $\{\beta_1\cdots\beta_n\}$ s.t. $(\beta_i,\beta_j)=0\ (i\neq j)$ 且 $\langle\alpha_1\cdots\alpha_k\rangle=\langle\beta_1\cdots\beta_k\rangle$.

Gram-Schmidt 正交化

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

⑩ $(V,(\alpha,\beta))$ 酉空间有标准正交基

⑪ Thm4 $\{\alpha_1\cdots\alpha_k\}$两两正交且$|\alpha_i|=1$,则可扩充为标准正交基.

⑫ Thm5/6

$\{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\}$标准正交基.

$\{\eta_1\cdots\eta_n\}$ —— $=(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n)U$.

则$\{\eta_1\cdots\eta_n\}$为标准正交基$\Leftrightarrow$$\underline{U为酉矩阵}$ $U^*U=I_n=UU^*$.

⑬ Thm7. $\det A=0$ 则 $A=UT$

$\underline{U为酉矩阵}$ $T=\begin{pmatrix}a_{11}& &*\\ &\ddots& \\ & &a_{nn}\end{pmatrix}$ $a_{ii}>0$.

☆ "唯一性" $(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\eta_1\cdots\eta_n)\begin{pmatrix}a_{11}& &*\\ &\ddots& \\ 0& &a_{nn}\end{pmatrix}$

$=(a_{11}\eta_1\cdots a_{nn}\eta_n)\begin{pmatrix}1& &*'\\ &\ddots& \\ 0& &1\end{pmatrix}$

⑭ $U=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=(\beta_1^*\cdots\beta_n^*)$ $UU^*=I\Leftrightarrow\alpha_i\alpha_j^*=\delta_{ij}$

$U^*=(\alpha_1^*\cdots\alpha_n^*)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ $\beta_i\beta_j^*=\delta_{ij}$

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

第9章 双线性函数

线性空间上的双线性函数 → 9.1. 线性空间不同基下双线性函数的矩阵表示相合

矩阵相合下的分类

研究双线性函数 ⟺ 研究分类.

↓ 最有意义

对称双线性函数（对称矩阵） $\xrightarrow{9.2}$ 对称矩阵在相合下的分类.

$\xrightarrow{9.3}$ 斜对称矩阵在……

9.1 双线性函数的概念.

Def 1. $f: V \to F$ 二元函数 双线性 $f(\alpha, \beta)$

V: F上的线性空间

命题1. $f(0,\beta)=0=f(\alpha,0)$

2. $f(\sum \alpha_i, \sum \beta_i)$.

$A=(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))_{n\times n}$.

给一组 V 的基 f 矩阵表示. $f(\alpha,\beta)=xAy^T$

$1\times n\ \ n\times n\ \ n\times 1$

Thm1 $L(V,V,F)$ 线性空间 同构 $F^{n\times n}$.

↓ $\dim=n^2$.

Thm2 描述方阵相合. $A,B\in F^{n\times n}$. $\exists$ P可逆 s.t. $B=P^TAP$. A、B相合

的线性空间基下相合.