纠缠及其应用的实验研究

姓名：韦璐

学号：PB16000702

摘要：在这篇调研文章中，我主要讨论纠缠态的性质和它的应用。我首先给出了详细的纠缠的定义和判据。接着我以三个特殊的例子：量子密集编码，量子隐形传态和量子密钥分配的 Ekert91 方案，为例讨论了纠缠态的应用，最后我调研回顾了一些实验上的进展。

一、引言

量子力学建立之后，Einstein，Podolsky 和 Rosen 三位物理学家因为不满意现有的量子力学的诠释，提出了一个假想的实验，也就是著名的 Einstein–Podolsky–Rosen 佯谬，并试图说明量子力学的不完备性[1]。这个假想实验在 1964 年被 Bell 进一步研究，并提出了非常重要的 Bell 不等式[2]。Bell 证明了量子力学无法被局域隐变量理论所解释，量子力学中存在一种强于所有经典关联的关联，也就是现在广为人知的量子纠缠。

量子纠缠的核心思想是说，两个类空分离的实验者 Alice 和 Bob 共享了一个两体量子纠缠态，他们制备大量的相同量子态，并各自采取相应的测量，从而获得一些统计关联，这些统计关联会展示出一种“幽灵般的超距作用”。虽然现在的研究已经指出，纠缠并不能用来做超光速通信，但由于他在理论和应用方面的重要性，量子纠缠已经引起了物理学家和计算机科学家的极大兴趣[3]。

理论方面看，量子纠缠的出现极大地扩充了量子力学的研究范围，并且为量子力学基本问题，比如测量、经典-量子边界问题、退相干问题等提供了新的启发。另一方面，量子纠缠已经被发现有非常重要的用途，比如凝聚态物理学中所发现的超出朗道金兹堡对称性自发破缺的新物相——拓扑序，其实就是有长程纠缠的不同模式所刻画的[4,5]；在多体物理学中，许多重要的物理现象，拓扑纠缠熵，表面量子态，等等都与纠缠息息相关[5]；甚至高能物理里面的研究发现，量子纠缠具有基本的重要性，黑洞信息佯谬和黑洞火墙问题就是与量子纠缠紧密联系在一起的[6,7]；此外，著名的规范-引力对偶，anti-de sitter 空间/共形场理论对偶（AdS/CFT）是可以通过纠缠来给出几个严格可解的模型的，关于纠缠熵的

Ryu-Takayanagi 近年来更是引发了理论物理学家极大的兴趣[8,9]。

从实验应用方面看，随着量子信息与量子计算技术的发展，量子纠缠现在几乎遍及了所有量子科技的应用。通常的各种量子方案，一般是基于测量的概率性或者利用量子纠缠来实现量子性的。特别地，因为量子纠缠实际上在某种程度上比普通的量子性更加量子，也就是说它所能给出可分态所不能给出的量子特性，所以它在实验上的应用更加广泛。比如量子密集编码[10]，量子隐形传态[11]，量子密钥 Ekert 方案[12]，量子并行计算[13]，经典算法量子加速[13,14]，量子机器学习算法[15,16]，等等。

量子纠缠的研究方兴未艾，虽然已经有了很大的发展，但还是有很多基本的问题没有解决，最重要的问题之一，如何判定一个给定的量子态是否是纠缠的，目前仍然是本领域最大的公开难题。虽然在一下维数较低，粒子数较少的情况下已经有了充分必要的判据，但一般的判据仍然等待被发掘。另一方面，如何量化纠缠就仍旧在很大程度上是公开难题。虽然在两体情形下，已经发展出了完整的量化方式，但对多体情形，依然没有广为接受的方式。此外，还有量子关联的分级问题，量子纠缠的细化，比如在多体情形下会有量子真多体纠缠的概念等，这些问题很大程度上都还没有被有效的解决。

在这个文章里面，我会详细阐述量子纠缠的基本内容，以及它的各种基本应用。最后我会对实验方面的进展做一简要概括。

二、纠缠的定义及其判定方式

我们知道，量子态分为纯态量子态和混和量子态两种。我们先就纯态进行讨论，最后再对一般的混合量子态进行讨论。

首先我们来看什么是纯态纠缠的定义。对于一个两粒子量子态 $|\Psi\rangle \in H_A \otimes H_B$，我们可以将其在对应的空间基底下面展开，从而得到一个展开式 $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$，如过我们能找到一组基底，使得这个量子态可以写成乘积形式 $|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$，那么这个量子态就被称为是可分态，不是可分态的量子态就叫纠缠态。

有了纯态纠缠态的定义，我们接着看一下怎么去判定一个纯态是否为纠缠态。这是通过 Schmidt 判据来实现的[17]：

定理（Schmidt 判据）：给定一个量子态$\left|\Psi\right\rangle=\sum_{i,j}c_{ij}\left|i\right\rangle\otimes\left|j\right\rangle$，我们总能找到一组基使得这个量子态可以被写为$\left|\Psi\right\rangle=\sum_{i=1}^{n_s}\sqrt{\lambda_i}\left|\phi_i\right\rangle\otimes\left|\varphi_i\right\rangle$，其中$n_s$被称为 Schmidt 数，它小于 A 和 B 各自的空间维数，而λ_i满足$\sum_i\lambda_i=1$。如果 Schmidt 数比 1 大，那么这个量子态就是纠缠的。

那么怎么去实际计算呢，这个可以通过把$\left|\Psi\right\rangle=\sum_{i,j}c_{ij}\left|i\right\rangle\otimes\left|j\right\rangle$写成对应的密度矩阵$\rho=\left|\Psi\right\rangle\left\langle\Psi\right|$并进一步求出对应的约化密度矩阵$\rho_{\mathrm{A}}$和$\rho_{\mathrm{B}}$，他们具有相同的本征值$\lambda_i$，而$\left|\phi_i\right\rangle$和$\left|\varphi_i\right\rangle$则分别是$\rho_{\mathrm{A}}$和$\rho_{\mathrm{B}}$对应于本征值$\lambda_i$的本征态。

有了纯态纠缠的概念和判据以后，让我们来看一下混合态。我们指导混合态是有密度矩阵来描述的。那对于两粒子态ρ我们也可以通过先定义可分态，然后定义出纠缠态。

定义（纠缠态）：对于一个给定的两粒子态ρ，如果它可存在两粒子各自 Hilbert 空间中的密度矩阵σ_i和χ_i以及一个概率分布p_i使得ρ可以写成它们的概率混合，即$\rho=\sum_i p_i\sigma_i\otimes\chi_i$，那$\rho$就被称为是可分态，不是可分态的量子态就是纠缠态。

混合态可分态的定义直观上可以看成是一些乘积量子态的经典混合，所以不具有量子关联，而纠缠态不能通过这种方式实现，所以纠缠态具有很强的量子关联。

下面我们看怎么判定一个给定的混合态是不是纠缠态。不同于纯态，在一般情形下，我们至今没有非常良好的判据，但在特殊的两比特量子态或者空间维数为2×3的情况下，我们有一个非常使用的判据。通常被称为 Positive partial transpose（PPT）或者 Peres-Horodecki 判据：

定理（Peres-Horodecki 判据）：在两比特情形或者空间维数为2×3的情形下，一个给定的量子可分态态ρ，它的部分转置的本征值全是非负数。等价地说，如

果一个量子态ρ的部分转置的本征值出现负数，那这个量子态一定是纠缠态。

实际上，量子纠缠的判据人们研究的很多，已经发展了许新的判据。比如纠缠熵判据在纯态里面应用尤其广泛，纠缠目击者是量子信息技术里面非常常用的判据。此外还有 computable cross norm or realignment criterion（CCNR）判据，range 判据，majorization 判据等等[17]。

另一方面，对纠缠的研究还发现量子纠缠是一种特殊的量子关联，实际上，我们现在已经有了一个相对完整的认识，按照态集合的大小，我们有：量子失谐，量子导引，量子纠缠，Bell 非定域性。这些量子关联都有各自的应用和发展。

三、纠缠的简单应用

接下来我们看一些量子纠缠的简单应用，我们主要以量子密集编码，量子隐形传态和量子 Ekert91 密钥分发协议为例。在介绍这些引用之前我们首先需要介绍 Bell 不等式以及 Bell 态。

Bell 不等式和 Bell 态最初是为了验证 ERP 佯谬而提出的，但随着量子信息技术的发展，Bell 不等式已经应用在量子科技的方方面面。我们这里主要看 Clauser-Horne-Shimony-Holt 型的 Bell 不等式[20]。

对于类空分离的两个实验者 Alice 和 Bob，他们共享一个两比特量子态并且各自选择两个力学量A_1, A_2和B_1, B_2经行测量，如果局域隐变量理论成立的话，那测量所得的统计关联就必须要满足下面的不等式：

$$\left|\langle A_1B_1\rangle + \langle A_2B_1\rangle + \langle A_1B_2\rangle - \langle A_2B_2\rangle\right| \le 2 \text{。}$$

但实际上，量子力学会违反这个不等式，并且对于 Bell 态，选取合适的力学量的话，还可以取道最大违反$2\sqrt{2}$。这说明量子力学不能把局域隐变量理论所解释，并且 Bell 态在某种意义上具有最大的纠缠。实际上 Bell 态的确是具有最大的量子纠缠的，并且在纠缠蒸馏和纯化过程中一般会把 Bell 态选为基本的度量单位，称为纠缠比特（简记为，ebit）。Bell 态是如下的一组态：

$$\left|\phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle)$$

$$\left|\phi^{-}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$\left|\psi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

$$\left|\psi^{-}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

有了上面的一些准备知识，我们接着看一些量子纠缠的简单应用。

首先我们看一下量子密集编码[10]。量子密集编码是一种量子通信方案，这中方案里面通信双方 Alice 和 Bob 可以通过传递一个量子比特来实现两个经典比特的通信。量子密集编码主要有以下几个步骤：

(1)初态制备和共享。制备 Bell 态，比如选择为$\left|\phi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$。Alice 和 Bob 双方共享这些 Bell 态。

(2)编码。经典的两比特信息可以分别编码在四个 Bell 态上。具体来看就是：$00 \leftrightarrow \left|\phi^{+}\right\rangle$；$10 \leftrightarrow \left|\phi^{-}\right\rangle$；$01 \leftrightarrow \left|\psi^{+}\right\rangle$；$11 \leftrightarrow \left|\psi^{-}\right\rangle$。Alice 可以通过在选择执行一些局域的量子门来将四个量子态中的任何一个穿给 Bob。对应说来，就是：$00 \leftrightarrow I$；$10 \leftrightarrow \sigma_z$；$01 \leftrightarrow \sigma_x$；$11 \leftrightarrow \sigma_z\sigma_x$。

(3)量子比特传输。在 Alice 执行完某个局域量子门以后，她可以通过量子信道把自己的量子比特传给 Bob。

(4)解码。Bob 收到 Alice 传来的量子比特以后可以选择之行两比特 CNOT 门，以 Alice 的比特做给控制比特，自己的比特所谓目标比特，完成之后再对 Alice 的比特执行 Hadamard 门操作。这样就可以恢复 Alice 所传递的经典两比特信息了。

可以看到，量子密集编码是一种非常巧妙的利用纠缠态来传输量子信息的方案。

接下来我们再看一下量子隐形传态[11]，这是量子密集编码的反向过程。量子隐形传态是通过传递两比特的经典信息从而达到传输一个量子比特的目的。量子隐形传态主要分为下面几个步骤：

(1)初态制备与共享。首先需要制备 Bell 态$\left|\phi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$。然后 Alice

和 Bob 各自共享相应的比特。

(2)编码和局部测量。首先将四个 Bell 态进行编码$00 \leftrightarrow \left|\phi^{+}\right\rangle$；$10 \leftrightarrow \left|\phi^{-}\right\rangle$；$01 \leftrightarrow \left|\psi^{+}\right\rangle$；$11 \leftrightarrow \left|\psi^{-}\right\rangle$。如果 Alice 打算传输量子比特$\left|\Psi\right\rangle = \alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle$，此时我们就会有量子态

$$\begin{aligned}\left|\Psi\right\rangle \otimes \left|\phi^{+}\right\rangle &= \frac{1}{2}[\left|\phi^{+}\right\rangle \otimes (\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle) + \left|\phi^{-}\right\rangle \otimes (\alpha\left|0\right\rangle - \beta\left|1\right\rangle) \\ &+ \left|\psi^{+}\right\rangle \otimes (\beta\left|0\right\rangle + \alpha\left|1\right\rangle) + \left|\psi^{-}\right\rangle \otimes (\beta\left|0\right\rangle - \alpha\left|1\right\rangle)]\end{aligned}$$

接着 Alice 选择 Bell 基进行测量，并将结果以经典两比特的形式告诉 Bob。

(3)解码获得量子比特。Bob 在收到 Alice 的信息之后，依据 Alice 所测量的 Bell 基，选择对应的酉操作进行解码获得相应的量子态，详言之，Bob 要选择酉操作为：$00 \leftrightarrow I$；$10 \leftrightarrow \sigma_z$；$01 \leftrightarrow \sigma_x$；$11 \leftrightarrow \sigma_x\sigma_z$。

可以看出量子密集编码和量子隐形传态是互逆的过程。

最后我们再来看一下量子密钥分发的 Ekert91 方案[12]，这个方案也是应用量子纠缠实现优化的一个典型例子。这个协议为通信双方 Alice 和 Bob 建立一组密钥。这也可以被分成几个步骤：

(1)纠缠源产生一些 Bell 态$\left|\phi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle)$，并且把纠缠的量子比特分别分发给 Alice 和 Bob。可以把$\left|0\right\rangle$看成沿着某个θ方向的自旋态，而$\left|0\right\rangle$就对应于$\theta^{\perp}$方向。

(2)Alice 每次可以从三个方向$\vec{a}_0,\vec{a}_1,\vec{a}_2$（分别对应角度$-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{8},0$）的测量中随机选择一个方向进行测量。Bob 也有三个方向的测量可以选择，分别记为$\vec{b}_0,\vec{b}_1,\vec{b}_2$（分别对应角度$-\frac{\pi}{8},0,\frac{\pi}{8}$）。

(3)Alice 和 Bob 通过经典信道交流每个时间回合他们各自所选择的测量。

(4)进行了 N 个回合以后，Alice 和 Bob 可以进行安全性检查。他们可以选择一些测量对$\vec{a}_0,\vec{b}_0$，$\vec{a}_0,\vec{b}_2$，$\vec{a}_2,\vec{b}_0$，$\vec{a}_2,\vec{b}_2$来带入 CHSH 型的 Bell 不等式里面进行验证。如果结果大于 2，那就是没有窃听者，如果小于等于 2 他们就停止通信。

(5)密钥生成的过程如下：每个 Alice 和 Bob 选择了相同测量的回合，对应于

$(\vec{a}_1,\vec{b}_0)$，$(\vec{a}_2,\vec{b}_1)$，由于是在$\left|\phi^+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|00\right\rangle + \left|11\right\rangle)$上做的测量，那他们就共享了一组密钥。

可以看到 Ekert91 方案也是非常强烈地依赖与量子纠缠的。

四、实验进展

这一节我们详细讨论一下实验上的进展。首先，我们回顾一下 Bell 不等式的验证方面的工作。Bell 不等式的验证是其他的利用量子纠缠的量子实验的基础。Bell 不等式提出之后的很长一段时间内，讨论仅仅停留在理论方面。有一部分主要的原因在于它的实验验证是极其困难的。现在 Bell 不等式已经得到了充分的验证，并且在许多不同的物理系统里面都有出现违反的信号，而且早期的测量漏洞等都已经在实验上的不断努力下补全了。

首先看一下光子系统的实验。1960 年左右的量子光学上的巨大进展使得 Bell 不等式的光学系统实验成为了可能。实验上可以通过原子碰撞级联的方式获得纠缠的光子对；其次，单个光子的极化方向可以通过极化探测仪器进行测量。这是进行 Bell 实验的必要条件。在 CHSH 不等式提出不久之后，Freedman 和 Clauser 最先进行了比较有说服力的实验，他们观测到了 6 个标准值的违反[21]。其后 Aspect 等人进行了更多的实验，结果都确定量子力学是违反 Bell 不等式的[22,23]。但由于这些实验的条件的限制，它们都有不同程度的漏洞。比较重要的进展是 Aspect 等人于 1982 年给出的，它们通过引入时变的极化测量，部分地消除了先前实验里面因为极化方向固定所导致的误差，他们观测到了 5 个标准值的违反[24]。随后有更多了实验组进行了大量的不同的改进实验，均验证了量子力学违反 Bell 不等式。最近的 Christensen 等人[25]的实验以及 Giustina 等人的实验[26]关闭了测量漏洞，但仍然有局域性漏洞在里面。这方面的实验仍然是现在非常活跃的主题。

在原子系统里面，Bell 不等式也得到了验证。原子系统在测量方面具有极大的优势，比较容易关闭测量漏洞。最早的实验是由 Rowe 等人 2001 年进行的[27]，用两个被磁阱束缚的 Be 离子，两个 Be 离子之间的距离仅为 3 微米，这使得局域

性漏洞放大了。紧接着利用 Yb 离子和 Rb 原子的实验也相继被报道，但这些实验仍然未能良好地堵住局域性漏洞，虽然他们已经将两原子分开至 20 米。理论上计算的结果表明，在当前测量技术下，两个原子至少应该有 300 米的距离。

在复合系统中的实验也有被不断报道出来。比如原子光子纠缠系统[28]，原子激发态与光子纠缠的系统[29]等。

量子密集编码也已经在许多系统中被实现了，比如早期 Mattle 等人的实验[30]，Li 等人利用亮 EPR 束所进行的实验[31]，Fang 等人在核磁共振系统中所进行的实验[32]，Schaetz 等人在原子系统中的实现[33]等等。与此对应，量子隐形传态的实验有很多的进展。二十多年前，Boschi 等人以及 Bouwmeester 等人最早进行了量子隐形传态的实验[34,35]。2017 年，量子隐形传态的实验已经在非常远的距离上实现了，通过地面和卫星之间传态，进一步将隐形传态技术推向了实用的方向[36]。

至于 Ekert91 方案，实验上的实现现在也非常之多，而且量子密钥分配是量子技术里面最早被使用化的技术[37,38]。Bell 不等式的验证应该算作是 Ekert91 方案中不可或缺的一环，所以两者的进展是相辅相承的。利用纠缠光子对实现 Ekert91 方案的实验最早的应该出现在 2000 年，由三个独立地实验组分别完成[39,40,41]。实现方案中的系统从极化纠缠光子对，到利用能量-时间纠缠的相位编码和相位-时间编码等等，已经发展出了非常完整的技术，并且逐步实用化了[37,38]。

五、结论

在这篇调研文章里，我主要讨论了纠缠的定义，包括纯态和混态纠缠的严格定义；纠缠的判定，针对纯态纠缠的 Schmidt 分解以及针对混合态纠缠的 Peres-Horodecki 判据；然后我们讨论了量子关联的分级。在讨论完纠缠之后，我们紧接着讨论了一些纠缠的基本应用，包括量子密集编码，量子隐形传态和量子密钥分配的 Ekert91 方案。我详细给出了这些方案的细节。最后我讨论了实验上的进展。

参考文献

【1】 Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?[J]. Physical review, 1935, 47(10): 777.

【2】 Bell J S. On the einstein podolsky rosen paradox[J]. Physics Physique Fizika, 1964, 1(3): 195.

【3】 Preskill J. Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation[J]. California Institute of Technology, 1998, 16.

【4】 Wen X G. Topological orders and edge excitations in fractional quantum Hall states[J]. Advances in Physics, 1995, 44(5): 405-473.

【5】 Zeng B. Quantum Information Meets Quantum Matter: From Quantum Entanglement to Topological Phases of Many-Body Systems[M]. Springer, 2015.

【6】 Witten E. APS Medal for Exceptional Achievement in Research: Invited article on entanglement properties of quantum field theory[J]. Reviews of Modern Physics, 2018, 90(4): 045003.

【7】 Harlow D. Jerusalem lectures on black holes and quantum information[J]. Reviews of Modern Physics, 2016, 88(1): 015002.

【8】 Ryu S, Takayanagi T. Holographic derivation of entanglement entropy from the anti－de sitter space/conformal field theory correspondence[J]. Physical review letters, 2006, 96(18): 181602.

【9】 Nishioka T, Ryu S, Takayanagi T. Holographic entanglement entropy: an overview[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2009, 42(50): 504008.

【10】 Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one-and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states[J]. Physical review letters, 1992, 69(20): 2881.

【11】 Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical review letters, 1993, 70(13): 1895.

【12】 Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell’s theorem[J]. Physical review letters, 1991, 67(6): 661.

【13】 Nielsen M A, Chuang I. Quantum computation and quantum information[J]. 2002.

【14】 Pittenger A O. An introduction to quantum computing algorithms[M]. Springer Science & Business Media, 2012.

【15】 Rebentrost P, Mohseni M, Lloyd S. Quantum support vector machine for big data classification[J]. Physical review letters, 2014, 113(13): 130503.

【16】 Dunjko V, Taylor J M, Briegel H J. Quantum-enhanced machine learning[J]. Physical review letters, 2016, 117(13): 130501.

【17】 Gühne O, Tόth G. Entanglement detection[J]. Physics Reports, 2009, 474(1-6): 1-75.

【18】 Peres A. Separability criterion for density matrices[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(8): 1413.

【19】 Horodecki R. Horodecki. M., Horodecki P. Separability of mixed states: Necessary and sufficient conditions[J]. Phys. Lett., 1996, 223: 333.

【20】 Clauser J F, Horne M A, Shimony A, et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories[J]. Physical review letters, 1969, 23(15): 880.

【21】 Freedman S J, Clauser J F. Experimental test of local hidden-variable theories[J]. Physical Review Letters, 1972, 28(14): 938.

【22】 Aspect A, Grangier P, Roger G. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem[J]. Physical review letters, 1981, 47(7): 460.

【23】 Aspect A, Grangier P, Roger G. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities[J]. Physical review letters, 1982, 49(2): 91.

【24】 Aspect A, Dalibard J, Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers[J]. Physical review letters, 1982, 49(25): 1804.

【25】 Christensen B G, McCusker K T, Altepeter J B, et al. Detection-loophole-free test of quantum nonlocality, and applications[J]. Physical review letters, 2013, 111(13): 130406.

【26】 Giustina M, Mech A, Ramelow S, et al. Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption[J]. Nature, 2013, 497(7448): 227.

【27】 Rowe M A, Kielpinski D, Meyer V, et al. Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection[J]. Nature, 2001, 409(6822): 791.

【28】 Moehring D L, Madsen M J, Blinov B B, et al. Experimental Bell inequality violation with an atom and a photon[J]. Physical review letters, 2004, 93(9): 090410.

【29】 Matsukevich D N, Chaneliere T, Bhattacharya M, et al. Entanglement of a photon and a collective atomic excitation[J]. Physical review letters, 2005, 95(4): 040405.

【30】 Mattle K, Weinfurter H, Kwiat P G, et al. Dense coding in experimental quantum communication[J]. Physical Review Letters, 1996, 76(25): 4656.

【31】 Li X, Pan Q, Jing J, et al. Quantum dense coding exploiting a bright Einstein-Podolsky-Rosen beam[J]. Physical review letters, 2002, 88(4): 047904.

【32】 X. Fang, X. Zhu, M. Feng, X. Mao, F. Du, Experimental implementation of dense coding using nuclear magnetic resonance. Phys. Rev. A 61, 022307 (2000)

【33】 Schaetz T, Barrett M D, Leibfried D, et al. Quantum dense coding with atomic qubits[J]. Physical review letters, 2004, 93(4): 040505.

【34】 Boschi D, Branca S, De Martini F, et al. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(6): 1121.

【35】 Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, et al. Experimental quantum teleportation[J]. Nature, 1997, 390(6660): 575.

【36】 Ren J G, Xu P, Yong H L, et al. Ground-to-satellite quantum teleportation[J]. Nature, 2017, 549(7670): 70.

【37】 Scarani V, Bechmann-Pasquinucci H, Cerf N J, et al. The security of practical quantum key distribution[J]. Reviews of modern physics, 2009, 81(3): 1301.

【38】 Gisin N, Ribordy G, Tittel W, et al. Quantum cryptography[J]. Reviews of modern physics, 2002, 74(1): 145.

【39】 Jennewein T, Simon C, Weihs G, et al. Quantum cryptography with entangled photons[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(20): 4729.

【40】 Naik D S, Peterson C G, White A G, et al. Entangled state quantum cryptography: eavesdropping on the Ekert protocol[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(20): 4733.

【41】 Tittel W, Brendel J, Zbinden H, et al. Quantum cryptography using entangled photons in energy-time Bell states[J]. Physical Review Letters, 2000, 84(20): 4737.