中国科学技术大学

量子信息导论课程小论文

量子关联的单配性原理及其应用

作者姓名：　韦璐

学科专业：　物理学

学生学号：　PB16000702

完成时间：　二〇二〇年十二月三十日

量子关联的单配性原理及其应用

韦璐 [①] | PB16000702

少年班学院，中国科学技术大学，合肥，安徽，230026

摘要：研究和分析量子关联的性质在量子信息和量子计算领域具有极其重要的意义。随着对纠缠的量化的研究，人们发现，纠缠作为一种资源，在多粒子体系中具有一定的分配关系，它不能被任意地共享。具体来说，如果 A 和 B 之间具有最大纠缠，那么 A 和其它体系之间必然不能具有任何纠缠。这种纠缠在多个体系之间的分配性质称为纠缠的单配性原理。除了纠缠之外，其它的量子关联，比如 Bell 非定域性和 EPR 量子导引也具有类似的单配性质。在这个报告中，我将介绍各种量子关联以及它们的单配性，单配性原理的各种数学表述及其内涵。在此基础上，我将讨论单配性原理的应用，以及有关它的可能的进一步研究方向和研究思路。

关键词：量子纠缠，Bell 非定域性，量子关联，EPR 量子导引，单配性原理

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Mn

一、 背景介绍

两体和多体量子关联的研究在物理学中具有重要的意义。从基础研究的角度看，理解和分析各种量子关联对于我们理解和分析量子力学以及量子力学和经典力学之间的差别有重要的意义，通过这些研究我们可以尝试建立有别于哥本哈根学派的比较数学化的框架，分析和找出量子力学的更加物理的基本原理[1-6]。另一方面，研究量子关联对于许多新的物理现象的研究和分析具有非常重要的意义：比如，拓扑量子态就是由具有长程纠缠的量子态刻画的，而不具有拓扑激发的量子态由短程纠缠的量子态刻画，这对于各种物态的分类和刻画具有极其重要的意义[7]；纠缠量子对在黑洞信息问题中具有极其重要的角色[8]；全息量子纠缠态在理解离散的 AdS/CFT 对偶和 Ryu-Takayanagi 公式方面具有非常重要的价值[9-11]，等等。从应用的角度看，纠缠等量子关联在学多量子信息任务中扮演了重要的角色。比如量子纠缠，EPR 量子导引和 Bell 非定域性在量子密钥分配中的应用[1-3]；量子关联在量子计算中的应用[12-13]；量子关联在随机数产生中的应用[14]; 等等，不胜枚举。由此可见研究和分析量子关联的刻画和性质具有非常重要的意义。

这这篇报告中，我将主要讨论量子关联的一种特殊性质，单配性原理。经典关联在多个体系之间可以自由共享，而相比之下，量子关联在多体系统中的分配却受到一定的制约。概括来说，就是 Alice 和 Bob 之间共享了这种关联，那么 Alice 和 Carol 之间必然无法共享此种关联。举例来说，如果 Alice 和 Bob 之间共享了最大纠缠态，那么 Alice 和 Carol 之间必然不能存在任何纠缠。这种量子关联在多体系统之间的分配所受到的制约关系叫做单配性原理[15-16]。早期的单配

[①]邮箱：cox@mail.ustc.edu.cn

性原理研究集中在量子纠缠上，但随着这些年的发展，人们发现除了纠缠之外的别的量子关联之间也存在单配性关系[1-6,17]。我将主要集中在量子纠缠和 Bell 非定域性关联的单配性原理的讨论上面，并且对其他量子关联的单配性关系也做简要描述。我将详细介绍他们的数学表述以及各种延伸，还有他们在各种物理问题的中的应用。最后我将给出一些可能的研究方向以及可行性分析。

这篇报告是如下安排的，在第二节中，我将在一个相对统一的框架下介绍一下三种非定域关联：量子纠缠[1]，EPR 量子导引[3-4] 和 Bell 非定域性[2]。然后我也将介绍一下量子失谐，这是一种超出量子纠缠的关联。接着在第三节中，我将介绍各种量子关联的单配性原理。在第四节中，我将讨论单配性原理的各种应用。然后在第五节我将讨论可能的研究方向和可行性分析。最后一节中我将给出一些总结性的说明。

二、　量子关联的分类

我们知道，对于一个给定的量子态，如果我们选择一组力学量进行多次重复测量，那我们将会获得这组力学量输出值之间的联合概率分布。考虑一个两体量子实验，Alice 和 Bob 各自选择一组力学量 $A_i, i=1,\cdots,m$, $B_j, j=1,\cdots,n$，在量子态 ρ 上对其中联合可测的一些力学量进行联合测量，最后我们会得到一组力学量联合分布的集合

$$\{p(a_i,b_j|A_i,B_j)=\mathrm{Tr}(\rho E_{a_i|A_i}\otimes E_{b_j|B_j})\}, \tag{1}$$

我们将这些联合分布的集合称为力学量统计关联。不同的量子态所获得的力学量统计关联具有不同的性质。比如乘积量子态所得的力学量统计关联均是没有任何统计关联的，也就是说它们都能写成乘积形式 $p(a_i,b_j|A_i,B_j)=p(a_i|A)p(b_j|B_j)$。针对这些力学量统计关联的性质的研究导致了大家对量子关联的分类的研究[1-6,17]。对于多体情形，我们也可以做类似的分析，只不过多体情况下，量子关联的分类和刻画将会变得更加复杂。

下面我们先介绍几种常见的量子关联。

一、量子失谐，量子纠缠，EPR 量子导引和 Bell 非定域性

类似于纠缠的纠缠和可分态的二分法定义，我们首先在统一的框架下介绍*量子纠缠* (quantum entanglement)，EPR *量子导引* (EPR quantum steering) 和 Bell *非定域性* (Bell nonlocality)。假设 Alice 和 Bob 是两个类空分离的实验者，假设他们分别挑选力学量 $A\in\mathfrak{M}_A$ 和 $B\in\mathfrak{M}_B$ 进行测量，我们将它们的输出值分别记为 a,b。

我们称力学量统计关联 $\{p(a,b|A,B)\}$ 有一个*局域隐变量模型*[2,18]，当且仅当对于所有的力学量 A,B 和输出结果 a,b 我们都能找到一个隐变量 ξ 以及其对应的概率分布 $p(\xi)$ 是的联合分布 $p(a,b|A,B)$ 具有如下的分解形式：

$$p(a,b|A,B)=\sum_{\xi}p(a|A,\xi)p(b|B,\xi)p(\xi). \tag{2}$$

Bell 不等式实际上就是给所出了由局域隐变量模型给出的力学量统计关联组成的集合的边界方程。如果一个量子态 ρ 在任意选定点力学量集合下面所获得的

力学量统计分布都有一个局域隐变量解释，那么这个量子态就被称为是 Bell 局域的量子态。这也等价于说，这个量子态不违反任何 Bell 不等式。反之，如果对于一个量子态 ρ，如果我们能找到一组力学量使得这组力学量的测量统计关联不存在局域隐变量解释，那我们就称这个量子态为 Bell 非定域量子态。等价地说，如果一个量子态违反某个 Bell 不等式，那这个量子态就是 Bell 非定域量子态。

现在让我们在这个框架下考虑纠缠态的定义[1,19]。首先，我们知道可分态是定义成如下形式的量子态

$$\rho = \sum_{\xi} p(\xi)\sigma_{\xi} \otimes \chi_{\xi}. \tag{3}$$

我们可以将 ξ 看成隐变量，而 σ_{ξ} 和 χ_{ξ} 可以看成是 Alice 和 Bob 双发各自的*局域隐态*。对于 Alice 和 Bob 各自选择的力学量联合分布我们有

$$p(a,b|A,B) = \sum_{\xi} p(\xi)\,\mathrm{Tr}(E_{a|A}\sigma_{\xi})\,\mathrm{Tr}(E_{b|B}\chi_{\xi}) = \sum_{\xi} p(\xi)p_Q(a|A,\xi)p_Q(b|B,\xi), \tag{4}$$

这里我们用下标 Q 来强调这是通过局域隐态得到的概率分布。量子纠缠态就定义成不可分的态。

有了上面的准备，我们可以很自然地介绍 EPR 量子导引[3-4,20]，这是介于 Bell 非定域性和量子纠缠之间的一种量子关联。为此，我们介绍 Alice 到 Bob 之间的*局域隐态模型*，这指的是有一个局域隐变量 ξ 以及概率分布 $p(\xi)$ 和 Bob 一方的局域隐态 χ_{ξ} 使得力学量联合分布可以分解成

$$p(a,b|A,B) = \sum_{\xi} p(\xi)p(a|A,\xi)\,\mathrm{Tr}(E_{b|B}\chi_{\xi}) = \sum_{\xi} p(\xi)p(a|A,\xi)p_Q(b|B,\xi). \tag{5}$$

可以看到局域隐态模型是介于局域隐变量模型和可分态模型之间的。如果一个量子态满足，存在一组力学量，是的这组力学量的测量概率分布不存在从 Alice 到 Bob 之间的一个局域隐态模型，那么我们就说这个量子态是从 Alice 到 Bob 之间的 EPR 量子导引态。

让我们现在来讨论*量子失谐* (quantum discord) 和*量子总关联* (quantum total correlation)[5-6,21-22]。量子失谐是通过互信息的两种不同形式来刻画的。从经典信息论里面我们知道，互信息可以表达成

$$I(X:Y) = H(X) + H(Y) - H(XY), \tag{6}$$

或者等价地，

$$J(X:Y) = H(X) - H(X|Y), \tag{7}$$

其中 $H(X) = -\sum_x p(x)\log_2 p(x)$ ($H(Y)$ 类似)，$H(XY) = -\sum_{x,y} p(x,y)\log_2 p(x,y)$，$H(X|Y) = \sum_y p(y)H(X|Y=y)$ 而 $H(X|Y=y) = -\sum_x p(x|y)\log_2 p(x|y)$。对于经典的联合概率分布 $p(x,y)$，两种表达式给出的结果是一致的，即 $I(X:Y) = J(X:Y)$。现在让我们来考虑如何将互信息的两个表达式推广到量子的情形。对于 $I(X:Y)$ 来说，推广是直接的，因为我们可以直接用 von Neumann 熵来代替 Shannon 熵。我们所得到的量子版本的互信息 $I(X:Y)$ 也常被称为*量子总关联*。但对于 $J(X:Y)$ 来说，推广是非平凡的，我们需要详细讨论条件熵 $H(X|Y)$。

条件熵 $H(X|Y=y)$ 刻画的是我们在知道 $Y=y$ 的信息的情况下，对 X 的未知度。在量子情形下，考虑两体系统态 ρ_{XY}，Y 系统的信息是通过测量给出的，

假设我们选择了一组投影测量 $\{\Pi_{y|Y}\}$ 进行测量，我们会有测量值为 $Y=y$ 的后测量态为

$$\rho_{X|\Pi_{y|Y}}=\frac{\Pi_{y|Y}\rho_{XY}\Pi_{y|Y}}{\mathrm{Tr}(\Pi_{y|Y}\rho_{XY})}, \tag{8}$$

与之对应的概率为 $p(Y=y)=\mathrm{Tr}(\Pi_{y|Y}\rho_{XY})$。那么很自然地我们可以得到在测量 $\{\Pi_{y|Y}\}$ 下的条件熵

$$H(X|Y)_{\{\Pi_{y|Y}\}}=\sum_{y}p(Y=y)H(\rho_{X|\Pi_{y|Y}}), \tag{9}$$

其中 $H(\rho_{X|\Pi_{y|Y}})$ 是量子态 $\rho_{X|\Pi_{y|Y}}$ 的 von Neumann 熵。为了透过测量获得尽量多的信息，我们期望通过选择合适的测量是的在这组测量下面，我们对 X 的未知度最小，于是很自然地我们需要考虑

$$\min_{\{\Pi_{y|Y}\}}H(X|Y)_{\{\Pi_{y|Y}\}}. \tag{10}$$

这反过来给出了最大的互信息 (也常被称为是*经典关联*)

$$\max_{\{\Pi_{y|Y}\}}J(X:Y)_{\{\Pi_{y|Y}\}}. \tag{11}$$

于是我们可以定义量子失谐为

$$D_{X|Y}(\rho_{XY})=I(X:Y)-\max_{\{\Pi_{y|Y}\}}J(X:Y)_{\{\Pi_{y|Y}\}}. \tag{12}$$

从定义我们可以看出，和量子导引一样，量子失谐也是一种非对称的关联，也就是说 $D_{X|Y}(\rho_{XY})$ 通常不等于 $D_{Y|X}(\rho_{XY})$。

二、量子关联的分级关系

现在让我来介绍量子关联的分级关系。对于给定的粒子数 N 以及局域空间维数 d，我们可以将所有量子态的集合记为 $\mathcal{S}^{N,d}$，相应地，我们可以将具有量子失谐，量子纠缠，EPR 量子导引和 Bell 非定域性的量子关联的态集合记为 $\mathcal{S}_D^{N,d},\mathcal{S}_E^{N,d},\mathcal{S}_S^{N,d},\mathcal{S}_B^{N,d}$。对于两体的情形，我们有如图1所示的分级关系：

$$\mathcal{S}_D^{2,d}\supset\mathcal{S}_E^{2,d}\supset\mathcal{S}_S^{2,d}\supset\mathcal{S}_B^{2,d} \tag{13}$$

这种分级关系意味着上面定义的各种量子关联是严格不同的，而非同一物理现象的不同侧面。这在一开始研究 Bell 非定域性和量子纠缠的时候曾引起过困惑，有段时间大家认为 Bell 非定域性和量子纠缠就是同一现象的不同侧面，但后面的研究逐渐澄清了它们之间的差别。由分级关系我们还可以看出不同量子关联之间的强弱关系。比如，任意取一个 Bell 非定域量子态，那它必然是一个 EPR 量子导引态，也是一个量子纠缠态和量子失谐态。这对与人们系统地分析和研究量子关联具有非常重要的意义。

这种分级关系可以由分析一些特殊的单参数态给出说明。首先包含关系从各种关联的定义便十分清楚了，只需要证明真包含关系即可。这可以利用单参数量子态来解释，我们现在来看两个典型的例子：

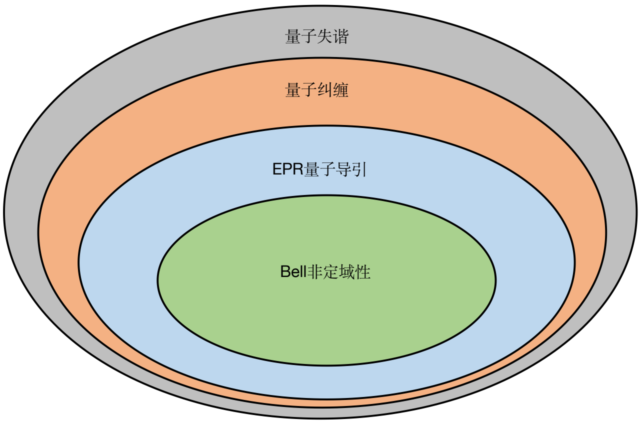

图 1　量子关联分级关系示意图。

- Werner 态[19]。这是一个作用在空间 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 上的单参数量子态

$$W_{AB}^{\eta} = \eta \frac{2P_{as}}{d(d-1)} + (1-\eta)\frac{I_{d^2}}{d^2}. \tag{14}$$

  其中 P_{as} 是从张量空间到它的反对称子空间到投影算子。当参数 $\eta > 1/(d+1)$ 时，Werner 态时纠缠的[19]。也就是说在 $\eta \leqslant 1/(d+1)$ 时，Werner 态有可分态模型。当参数 $\eta \leqslant \frac{3d-1}{d+1}(d-1)^{d-1}d^{-d}$ 时，Werner 态在 POVM 测量下具有局域隐变量模型 (可以证明，这等价于局域隐态模型)[23]。概括起来就是当参数 η 落在 $(1/(d+1), \frac{3d-1}{d+1}(d-1)^{d-1}d^{-d}]$ 时，对应的 Werner 态是一个纠缠但非 EPR 量子导引的态。
- 各向同性态[24]。这是一个作用在空间 $\mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$ 上的单参数量子态

$$\rho_{AB}^{\eta} = \eta |GHZ\rangle\langle GHZ| + (1-\eta)\frac{I_{d^2}}{d^2}, \tag{15}$$

  其中

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(|0\rangle|0\rangle + \cdots + |d-1\rangle|d-1\rangle) \tag{16}$$

  是 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 态[25]。各向同性态是非纠缠的当且仅当参数 $\eta > 1/(d+1)$。它是 EPR 量子导引态当且仅当 $\eta > (H_d - 1)/(d-1)$，其中 $H_d = \sum_{n=1}^{d} 1/n$ 是调和级数。它是 Bell 非定域的，当且仅当 $\eta > \frac{3d-1}{d+1}(d-1)^{d-1}d^{-d}$。

对于量子失谐和量子纠缠之间的关系也可以严格证明[1,5-6]。

三、　量子关联的单配性原理

量子关联的单配性关系中最早被研究的是纠缠的单配性关系。纠缠作为量子资源在多体系统中的分配问题在研究量子通信的过程中逐渐被意识到，并且一步步地被严格化了[17,26]。随后其他各种量子关联的单配性关系也被进行了详细研究和分析。我们这里将详细地介绍纠缠的单配性，然后对其他量子关联的单配性也做一简要讨论。

一、量子纠缠的单配性关系

我们首先来看基于纠缠的*并发度* (concurentce) 度量的 Coffman-Kundu-Wootters（CKW）单配性关系[16]。我们知道对于一个两体量子比特态 ρ，他的量子并发度定义为

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \tag{17}$$

其中 λ_i $(i = 1, \cdots, 4)$ 是 $\rho\tilde{\rho}$ 的本征值按照从大到小的顺序排列，而 $\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y)$。可分态的量子并发度为 0，而最大纠缠态的量子并发度为 1。

对于一个三体量子态 $\rho_{ABC} = (|\psi\rangle\langle\psi|)_{ABC}$，对于它的约化密度矩阵我们有

$$C_{AB}^2 \leqslant \mathrm{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}), \quad C_{AC}^2 \leqslant \mathrm{Tr}(\rho_{AC}\tilde{\rho}_{AC}). \tag{18}$$

可以进一步证明，$\mathrm{Tr}(\rho_{AB}\tilde{\rho}_{AB}) + \mathrm{Tr}(\rho_{AC}\tilde{\rho}_{AC}) = 4\det\rho_A$，这进一步导出

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leqslant 4\det\rho_A. \tag{19}$$

如果我们对三粒子体系做两分割，$A:BC$，我们会发现 $C_{A:BC} = 2\sqrt{\det\rho_A}$。由此我们得到了纠缠的 CKW 单配性关系：

$$C_{AB}^2 + C_{AC}^2 \leqslant C_{A:BC}^2. \tag{20}$$

虽然我们上面是以三体纯态为例讨论的，但这个关系对三体混态也成立。由上面的关系很容看出，如果 AB 处于最大纠缠态，那么 AC 必然是可分态。

我们可以引入量子态 ρ 的*缠结* (tangle) $\tau(\rho)$ 的概念，对于两粒子态，我们定义缠结为量子并发度的平方，而对于三粒子情形，我们引入

$$\tau_{A:B:C} = C_{A:BC}^2 - (C_{AB}^2 + C_{AC}^2). \tag{21}$$

在缠结的表述下，CKW 单配性关系可以表述为

$$\tau_{A:B} + \tau_{A:B} \leqslant \tau_{A:BC}. \tag{22}$$

对于多粒子的情形，我们有类似的关系[27]：

$$\tau_{A:B_1} + \cdots + \tau_{A:B_n} \leqslant \tau_{A:B_1\cdots B_n}. \tag{23}$$

我们知道纠缠并发度和*生成纠缠* (entanglement of formation) E_f 互为单调函数，于是我们首先会问，生成纠缠度量是否也满足单配性原理，答案是否定的，但是可以证明，对于生成纠缠的平方，类似的关系是成立的[28]：

$$E_f^2(\rho_{A:B_1}) + \cdots + E_f^2(\rho_{A:B_n}) \leqslant E_f^2(\rho_{A:B_1\cdots B_n}). \tag{24}$$

上面的结果都是针对量子比特系统的，我们很自然地会问，对于高维系统是否有类似的结果。这方面的尝试很多，结果表明 CKW 单配性不能直接被推广到高维系统[29]。

对于其他的一些纠缠度量，也有类似的单配性关系，首先对于*负性* (negativity) 度量，可以证明有如下结果[30]：

$$\mathcal{N}_{A:B}^2 + \mathcal{N}_{A:C}^2 \leqslant \mathcal{N}_{A:BC}^2. \tag{25}$$

对于*挤压纠缠* (squashed entanglement) E_{sq}，可以证明他满足单配性关系[31]：

$$E_{\mathrm{sq}}(\rho_{A:B}) + E_{\mathrm{sq}}(\rho_{A:C}) \leqslant E_{\mathrm{sq}}(\rho_{A:BC}). \tag{26}$$

二、其它量子关联的单配性原理

下面让我们简单讨论一下其他量子关联的单配性关系。首先来看 Bell 非定域性，我们知道 Bell 非定域性是由 Bell 不等式来探测的，对于紧的 Bell 不等式，不同的 Bell 不等式探测实验之间存在单配性关系。具体来说，就是如果 Alice 和 Bob 之间探测到了 Bell 不等式的违反，那么 Alice 和 Carol 之间必然不能探测到这种违反。Toner 和 Verstraete 证明了关于三体 CHSH 不等式的单婚性关系的结果[32]，对于任意三体量子比特态 ρ，如果 Alice 方的两个力学量在两组实验里面被共享，那么我们有

$$|\langle \mathcal{B}_{AB} \rangle_\rho| + |\langle \mathcal{B}_{AC} \rangle_\rho| \leqslant 4. \tag{27}$$

Toner 证明了类似的平方型三体单婚性关系[33]，对任意三体量子态 ρ，我们有

$$\langle \mathcal{B}_{AB} \rangle_\rho^2 + \langle \mathcal{B}_{AC} \rangle_\rho^2 \leqslant 8. \tag{28}$$

其中 $\mathcal{B}$ 是 CHSH 不等式中的测量，即 CHSH 不等式为 $|\langle \mathcal{B} \rangle| \leqslant 2$。由此可见如果其中一组实验违反了 CHSH 不等式也就是说实验结果大于 2，那么另一组实验必然不能观测到违反。在不可超光速通信原理的框架下，更多的 Bell 不等式之间的单配性关系可以被证明[34]。在更加广义的不可扰动原理框架下，也可以证明 CHSH 不等式和探测量子互文性的 KCBS 不等式[35] 之间具有单配性[36] 。如果在黑箱模型的框架下讨论问题，那么我们可以发现，实际上许多 Bell 非定域黑箱之间都存在单配性关系，比如有名的 PR *黑箱* (Popescu-Rochlich box, PR box) 之间就存在单配性关系[37]。

EPR 量子导引介于量子纠缠和 Bell 非定域性之间，可以证明，EPR 量子导引也具有单配性关系[38]。但要注意的是 EPR 量子导引是具有方向性的，这和纠缠和 Bell 非定域性不同。EPR 量子导引的单配性关系指的是，如果 Alice 可以导引 Bob，那么 Carol 必然不能导引 Bob。但反过来是没有单配性关系的，也就是说 Bob 可以同时导引 Alice 和 Carol。首先引入从 Alice 到 Bob 的 *EPR 量子导引目击者* (EPR steering witness) $S_{B|A}$，从 Carol 到 Bob 的类似，$S_{B|C}$。注意到 $S_{B|A} < 1$ 说明对应的量子态具有 EPR 量子导引关联，并且 $S_{B|A} \to 0$ 说明 EPR 量子导引关联最大。对于量子比特系统，Reid 证明了如下的单配性关系

$$S_{B|A} + S_{B|C} \geqslant 2\max\{1, S_{B|AC}\}. \tag{29}$$

对于更加复杂的情形，也有许多类似的结果[4,38]。

量子失谐也是一种具有方向性的关联，它比纠缠更广，可分态也可以具有量子失谐关联。研究表明，量子失谐不具有一般性的单配性关系，这可以通过分析一般的量子失谐关联的度量而给出说明[39]。实际上，在一些三体量子比特态上就可以发现，量子失谐不具有一般的单配性关系，虽然广义 GHZ 态满足单配性，但是广义 W 态不满足单配性[40-41]。

四、 单配性原理的应用

在这一节我简单讨论一些单配性原理的应用。量子关联的单配性原理自从发现之初，就在量子通信领域有很重要的意义，随后，它被应用到了多体量子系统[42,48-51]，高能物理[43,52] 等各个不同领域。我们这里来讨论几个简单的例子。

在态区辨和信道区辨里面的应用。由于不同类别的量子态的单配性表现不一样，比如 GHZ 类态满足单配性，但是 W 类态不满足单配性，这种性质可以被用来进行态区辨[40-41]。*单配性得分* (monogamy score) 在这里面扮演了很重要的角色。通过研究单配性得分与不同态之间的对应关系，可以很好地利用单配性得分来对不同类别的量子态进行区辨[44]。在信道区辨问题里面是类似的，通过研究信道作用在给定类型的态上所得到的态的单配性得分随着信道演化的变化，我们可以很好地对噪声信道进行定性区辨[45]。利用单配性得分对量子态和信道进行定性区辨是其他量子态和信道区辨方法的一个很好的补充。

在加密通信里面的应用。Bell 非定域性的单配性关系可以被用来证明加密通信协议的安全性[46]。基于 Bell 不等式的 QKD 协议的安全可以基于不可超光速通信原理来证明。但我们前面也提到了，Bell 非定域性的单配性关系可以在不可超光速通信原理的框架下进行证明，于是可以进一步分析，是否我们假设单配性关系就能得到 QKD 协议的安全性。这一点被 Pawlowski 在论文中进行了证明[46]。

在凝聚态物理中的应用。在多粒子体系中，纠缠等量子关联的分析和研究一直都是很重要的题目，因为多体系统中量子关联的形式更加丰富且其刻画更加复杂。而且不同的关联形式与不同的物理现象有着密切的联系。比如拓扑序里面，长程纠缠的存在就是拓扑序存在的微观机理[7,47]，而不同的长程纠缠态等价类就刻画了不同的拓扑序。在 Meichanetzidis 等人的工作中[42]，纠缠的单配性被用来探测拓扑边缘态。在 Allegra 等人的工作中[48]，量子失谐的单配性被用来研究一维的键荷 Hubbard 模型。在论文[49-51] 中，单配性关系被用来研究 XXZ 模型。

在高能物理中的应用。单配性关系在黑洞信息和黑洞火墙问题中有重要的应用[43,52]。Almheiri 等人在研究黑洞信息问题时指出[52]，霍金蒸发与量子纠缠的单配性关系之间有矛盾。随后，Lloyd 和 Preskill 提出了末态投影模型来解决这一问题[43]。

除了上面提到的一些，单配性原理作为量子关联的一种重要性质在越来越多的方向都逐渐找到了应用[1-3,17,26,53]。

五、 可能的进一步研究方向

在这一节，我给出一些我觉得有可能继续发展的方向以及我对这些可能发展方向的一些思考。

前文中我提到的量子关联仅限于两体之间的量子关联，而如果到多体的情形，量子关联的分类会变得十分复杂。以纠缠为例，平凡地将两体纠缠推广到多体情形会有个问题，那就是我们可以用一个两体纠缠态张量积一个乘积态，这是个整个态能体现出纠缠，但这种纠缠是由两体纠缠态提供的。所以一个很自然的问题是如何定义多粒子真纠缠，这方面有很多的发展。对于 Bell 非定域性和 EPR 量子导引等，有类似的问题。我们可以自然地问：*多体真量子关联之间是否具有单配性关系？*为了研究这个问题，我们需要发展多粒子关联的理论，包括它的判定，量化等一系列问题，然后再在这个基础上研究和分析其单配性关系。

另一方面，对于很多别的物理现象，比如量子互文性，量子相容性，量子宏观实在论探测的 Leggett-Garg 型不等式等等，我们也可以去分析它们之间有没有

单配性关系。而且我们可以进一步分析这些单配性关系的物理起源。这对于研究量子力学具有基本的重要性。举例来说，量子力学基本问题的研究中，一个很重要的问题是如何区分量子力学和经典力学，换言之，什么物理定律给出了量子世界和经典世界的边界。在 Bell 非定域性的分析中，这个问题可以被转化为，什么物理定律能够严格地给出 Bell 不等式的量子力学上界，有许多尝试，比如人们发现利用不可超光速通信原理无法给出这个上界。有许多别的物理定律相继被提出和分析，例如互补性原理；互斥性原理；局域正交性原理；信息因果原理，等等。对于单配性现象，我们也可以做类似的分析，可以分析给出单配性的基本物理定律是什么，这对于理解量子关联以及进一步理解量子力学有非常重要的意义。

上面这些是我对可能的研究方向的一些思考。

六、 结论

在这个报告中，我详细介绍了两体量子关联以及它们的单配性关系。并且我也讨论了单配性关系的一些应用以及一些可能的进一步研究方向。

【参考文献】

[1] HORODECKI R, HORODECKI P, HORODECKI M, et al. Quantum entanglement [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2009, 81: 865-942. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.865.

[2] BRUNNER N, CAVALCANTI D, PIRONIO S, et al. Bell nonlocality [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2014, 86: 419-478. http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.86.419.

[3] REID M D, DRUMMOND P D, BOWEN W P, et al. Colloquium [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2009, 81: 1727-1751. http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1727.

[4] UOLA R, COSTA A C S, NGUYEN H C, et al. Quantum steering [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2020, 92: 015001. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.92.015001.

[5] MODI K, BRODUTCH A, CABLE H, et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2012, 84: 1655-1707. http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1655.

[6] ZUREK W H. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2003, 75: 715-775. http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.75.715.

[7] WEN X G. Quantum field theory of many-body systems: from the origin of sound to an origin of light and electrons [M/OL]. Oxford University Press on Demand, 2004. http://www.oxfordscholarship.com/view/10.1093/acprof:oso/9780199227259.001.0001/acprof-9780199227259.

[8] HARLOW D. Jerusalem lectures on black holes and quantum information [J/OL].

Rev. Mod. Phys., 2016, 88: 015002. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.015002.

[9] ’T HOOFT G. On the quantum structure of a black hole [J/OL]. Nuclear Physics B, 1985, 256: 727 - 745. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385904183. DOI: https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90418-3.

[10] HAYDEN P, NEZAMI S, QI X L, et al. Holographic duality from random tensor networks [J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2016, 2016(11): 9. https://doi.org/10.1007/JHEP11(2016)009.

[11] PASTAWSKI F, YOSHIDA B, HARLOW D, et al. Holographic quantum error-correcting codes: toy models for the bulk/boundary correspondence [J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2015, 2015(6): 149. https://doi.org/10.1007/JHEP06(2015)149.

[12] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information [M/OL]. Cambridge university press, 2010. http://www.cambridge.org/cn/academic/subjects/physics/quantum-physics-quantum-information-and-quantum-computation/quantum-computation-and-quantum-information-10th-anniversary-edition?format=PB&isbn=9781107002173#eUc7irgofUw4ZEd5.97.

[13] PRESKILL J. Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation [J/OL]. California Institute of Technology, 1998, 12: 14. http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/.

[14] HERRERO-COLLANTES M, GARCIA-ESCARTIN J C. Quantum random number generators [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2017, 89: 015004. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.015004.

[15] TERHAL B M. Is entanglement monogamous? [J/OL]. IBM J. Res. Dev., 2004, 48(1): 71−78. https://doi.org/10.1147/rd.481.0071.

[16] COFFMAN V, KUNDU J, WOOTTERS W K. Distributed entanglement [J/OL]. Phys. Rev. A, 2000, 61: 052306. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.61.052306.

[17] DHAR H S, PAL A K, RAKSHIT D, et al. Monogamy of quantum correlations - a review [M/OL]. Cham: Springer International Publishing, 2017: 23-64. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53412-1_3.

[18] BELL J S. On the einstein podolsky rosen paradox [J]. Physics, 1964, 1: 195-200.

[19] WERNER R F. Quantum states with einstein-podolsky-rosen correlations admitting a hidden-variable model [J/OL]. Phys. Rev. A, 1989, 40: 4277-4281. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.40.4277.

[20] WISEMAN H M, JONES S J, DOHERTY A C. Steering, entanglement, nonlocality, and the einstein-podolsky-rosen paradox [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2007, 98: 140402. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.140402.

[21] OLLIVIER H, ZUREK W H. Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2001, 88: 017901. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.88.017901.

[22] HENDERSON L, VEDRAL V. Classical, quantum and total correlations [J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2001, 34(35): 6899. http://stacks.iop.org/0305-4470/34/i=35/a=315.

[23] QUINTINO M T, VÉRTESI T, CAVALCANTI D, et al. Inequivalence of entanglement, steering, and bell nonlocality for general measurements [J/OL]. Phys. Rev. A, 2015, 92: 032107. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.92.032107.

[24] HORODECKI M, HORODECKI P. Reduction criterion of separability and limits for a class of distillation protocols [J/OL]. Phys. Rev. A, 1999, 59: 4206-4216. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.59.4206.

[25] GREENBERGER D M, HORNE M A, ZEILINGER A. Going beyond bell's theorem [M/OL]//Bell's theorem, quantum theory and conceptions of the universe. Springer, 1989: 69-72. http://www.springer.com/la/book/9780792304968.

[26] KIM J S, GOUR G, SANDERS B C. Limitations to sharing entanglement [J/OL]. Contemporary Physics, 2012, 53(5): 417-432. https://doi.org/10.1080/00107514.2012.725560.

[27] OSBORNE T J, VERSTRAETE F. General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2006, 96: 220503. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.220503.

[28] BAI Y K, XU Y F, WANG Z D. General monogamy relation for the entanglement of formation in multiqubit systems [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2014, 113: 100503. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.113.100503.

[29] OU Y C. Violation of monogamy inequality for higher-dimensional objects [J/OL]. Phys. Rev. A, 2007, 75: 034305. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.034305.

[30] OU Y C, FAN H. Monogamy inequality in terms of negativity for three-qubit states [J/OL]. Phys. Rev. A, 2007, 75: 062308. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.062308.

[31] KOASHI M, WINTER A. Monogamy of quantum entanglement and other correlations [J/OL]. Phys. Rev. A, 2004, 69: 022309. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.022309.

[32] TONER B, VERSTRAETE F. Monogamy of bell correlations and tsirelson's bound [J]. arXiv preprint quant-ph/0611001, 2006.

[33] TONER B. Monogamy of non-local quantum correlations [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2009, 465 (2101): 59-69.

[34] PAWŁOWSKI M, BRUKNER C. Monogamy of bell's inequality violations in nonsignaling theories [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2009, 102: 030403. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.030403.

[35] KLYACHKO A A, CAN M A, BINICIOGLU S, et al. Simple test for hidden variables in spin-1 systems [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2008, 101: 020403. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.020403.

[36] KURZYNSKI P, CABELLO A, KASZLIKOWSKI D. Fundamental monogamy relation between contextuality and nonlocality [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2014, 112: 100401. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.100401.

[37] JIA Z A, WU Y C, GUO G C. Monogamy relation in no-disturbance theories [J/OL]. Phys. Rev. A, 2016, 94: 012111. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev

A.94.012111.

[38] REID M D. Monogamy inequalities for the einstein-podolsky-rosen paradox and quantum steering [J/OL]. Phys. Rev. A, 2013, 88: 062108. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.062108.

[39] STRELTSOV A, ADESSO G, PIANI M, et al. Are general quantum correlations monogamous? [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2012, 109: 050503. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.050503.

[40] PRABHU R, PATI A K, SEN(DE) A, et al. Conditions for monogamy of quantum correlations: Greenberger-horne-zeilinger versus w states [J/OL]. Phys. Rev. A, 2012, 85: 040102. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.040102.

[41] GIORGI G L. Monogamy properties of quantum and classical correlations [J/OL]. Phys. Rev. A, 2011, 84: 054301. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.054301.

[42] MEICHANETZIDIS K, EISERT J, CIRIO M, et al. Diagnosing topological edge states via entanglement monogamy [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2016, 116: 130501. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.130501.

[43] LLOYD S, PRESKILL J. Unitarity of black hole evaporation in final-state projection models [J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2014, 2014(8): 126. http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2014)126.

[44] BERA M N, PRABHU R, SEN(DE) A, et al. Characterization of tripartite quantum states with vanishing monogamy score [J/OL]. Phys. Rev. A, 2012, 86: 012319. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.012319.

[45] KUMAR A, Singha Roy S, PAL A K, et al. Conclusive identification of quantum channels via monogamy of quantum correlations [J/OL]. Physics Letters A, 2016, 380(43): 3588 - 3594. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960116306235. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.08.039.

[46] PAWŁOWSKI M. Security proof for cryptographic protocols based only on the monogamy of bell's inequality violations [J/OL]. Phys. Rev. A, 2010, 82: 032313. http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.032313.

[47] ZENG B, CHEN X, ZHOU D L, et al. Quantum information meets quantum matter–from quantum entanglement to topological phase in many-body systems [J/OL]. arXiv preprint arXiv:1508.02595, 2015. https://arxiv.org/abs/1508.02595.

[48] ALLEGRA M, GIORDA P, MONTORSI A. Quantum discord and classical correlations in the bond-charge hubbard model: Quantum phase transitions, off-diagonal long-range order, and violation of the monogamy property for discord [J/OL]. Phys. Rev. B, 2011, 84: 245133. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.84.245133.

[49] SONG X K, WU T, YE L. The monogamy relation and quantum phase transition in one-dimensional anisotropic xxz model [J]. Quantum information processing, 2013, 12(10): 3305-3317.

[50] QIU L, TANG G, YANG X Q, et al. Relating tripartite quantum discord with multisite entanglement and their performance in the one-dimensional anisotropic xxz model [J]. EPL (Europhysics Letters), 2014, 105(3): 30005.

[51] QIN M, REN Z Z, ZHANG X. Renormalization of the global quantum correlation

and monogamy relation in the anisotropic heisenberg xxz model [J]. Quantum Information Processing, 2016, 15(1): 255-267.

[52] ALMHEIRI A, MAROLF D, POLCHINSKI J, et al. Black holes: complementarity or firewalls? [J]. Journal of High Energy Physics, 2013, 2013(2): 62.

[53] AMICO L, FAZIO R, OSTERLOH A, et al. Entanglement in many-body systems [J/OL]. Rev. Mod. Phys., 2008, 80: 517-576. https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.80.517.