《量子信息》期中 2013

问题 1 (Trace distance)　两个量子态, 密度矩阵分别是 ρ 和 ρ' 定义它们的 trace distance

$$D(\rho,\rho') = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\rho'|$$

其中 $|A| \equiv \sqrt{A^\dagger A}$

(Q) 对于 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态, 给出 $D(\rho,\rho')$ 的具体形式.

解答　假设两个量子态的 Bloch 表示分别为

$$\rho = \frac{1}{2}(I+\vec{a}\cdot\vec{\sigma}), \quad \rho = \frac{1}{2}(I+\vec{b}\cdot\vec{\sigma}), \tag{1}$$

那我们会有

$$\begin{aligned} D(\rho,\rho') &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|\rho-\rho'| \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}-\vec{b}\cdot\vec{\sigma}}{2}\right| = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left|\frac{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|. \end{aligned} \tag{2}$$

注意这里用到了结果

$$\operatorname{Tr}|\vec{n}\cdot\vec{\sigma}| = \operatorname{Tr}\sqrt{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^\dagger(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} = \operatorname{Tr}\sqrt{(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})} = \operatorname{Tr}\sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}I} = \operatorname{Tr}(|\vec{n}|I) = 2|\vec{n}|. \tag{3}$$

这里也用到了 $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})(\vec{m}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{n}\cdot\vec{m}I + i(\vec{n}\times\vec{m})\cdot\vec{\sigma}$. □

问题 2 (不确定关系)　设量子系统的量子态为 ρ, 观测量 A 的期望值是 $\langle A\rangle = \operatorname{Tr}(A\rho)$, 方差

$$(\Delta A)^2 = \langle A-\langle A\rangle\rangle^2 = \left\langle A^2\right\rangle - \langle A\rangle^2$$

对于另一个观测量 B, 类似地有 $(\Delta B)^2$. 通常说的不确定关系有如下形式

$$(\Delta A)(\Delta B) \geqslant \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$$

这种形式的不确定关系依赖于量子态的具体形式, 故而存在一些理解上的问题. 例如, 如果系统处于 A 或 B 的某个本征态 (在有限维空间中这是可能的), 那么上述不等式的两

端均为零, 于是无法反映这个特定的量子态在测量 A 或测量 B 的时候表现出的不确定性. 现在不妨考虑相加形式的不确定关系, 例如

$$(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 \geqslant \text{ 某个下限} \tag{4}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 空间中, 设

$$A = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad B = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

其中 a 和 b 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量.

(Q) 求出 (4) 式中的下限, 并且给出达到该下限的时候系统的量子态.

解答 首先，不确定性关系应该写为

$$(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 \geq 1 - |\vec{a} \cdot \vec{b}| \tag{5}$$

取到这个下界的量子态

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \tag{6}$$

对应的 Bloch 向量为

$$\vec{n} = \begin{cases} \frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}, & \vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0, \\ \frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}, & \vec{a} \cdot \vec{b} < 0. \end{cases} \tag{7}$$

首先来证明不确定关系的下界。首先我们考虑 $A = \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$, $B = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ 以及假设在一个给定的量子态 $\rho = (I + \vec{c} \cdot \vec{\sigma})/2$ 下面，我们有

- 由于 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，我们有 $A^2 = B^2 = I$, 这也意味着对于任意量子态 ρ，我么有 $\langle A^2 \rangle_\rho = \langle B^2 \rangle_\rho = 1$;
- 注意到 $\langle \sigma_i \rangle_\rho = \mathrm{Tr}(\sigma_i \rho) = c_i$，由此我们会有

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\rho &= \langle \sum_i a_i \sigma_i \rangle_\rho = \sum_i a_i c_i = \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \langle B \rangle_\rho &= \langle \sum_j b_j \sigma_j \rangle_\rho = \sum_j b_j c_j = \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned} \tag{8}$$

- 有前面两个结果，我们可以计算方差

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \langle A^2 \rangle_\rho - \langle A \rangle_\rho^2 = 1 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2 \\ (\Delta B)^2 &= \langle B^2 \rangle_\rho - \langle B \rangle_\rho^2 = 1 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 \end{aligned} \tag{9}$$

由于 $\vec{c}$ 是一个 Bloch 向量，现在为了求不确定关系的下界，我们只需要遍取所有可能的 $|\vec{c}| \leq 1$ 并且求出极小值就可以，换言之

$$(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2 \geq \min_{|\vec{c}| \leq 1} \left\{ 2 - [(\vec{a} \cdot \vec{c})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{c})^2] \right\}. \tag{10}$$

这里的取极小意味着 $(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2$ 要取极大。

接下来让我们来分析 $(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2$ 的极大值问题，不是一般性地，我们可以假设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 都在 xy 平面内并且对称地处于 x 轴两侧，且与 x 轴夹角均为 $\theta/2$ (θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之间的夹角)。等价地

$$\vec{a}=(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2},0),\quad \vec{b}=(\cos\frac{\theta}{2},-\sin\frac{\theta}{2},0) \tag{11}$$

这总是可以实现的，因为我们可以旋转坐标系，使得对于给定的两个力学量 A,B，我们有这个条件。很明显，为了使 $(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2$ 极大，$\vec{c}$ 的模长应该取 1 且处于 xy 平面内。于是我们假设

$$\vec{c}=(\cos\alpha,\sin\alpha,0). \tag{12}$$

此时

$$\begin{aligned}(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2&=\left(\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right)^2+\left(\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\\&=2\left(\cos^2\alpha\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\left(\cos^2\alpha\cos\theta+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=2\left(\cos^2\alpha\cos\theta+\frac{1-\cos\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

- 若 $\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0$，最大值在 $\alpha=0$ 处，这意味 $\vec{c}=(1,0,0)=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}+\vec{b}|}$，此时最大值为
$$\max\left\{(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2\right\}=1+\cos\theta=1+\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{14}$$
带入不确定关系式 (10) 中我们就得到了我们结果 (5).

- 如果若 $\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，很显然，我们应该取 $\alpha=\pi/2$，此时 $\vec{c}=(0,1,0)=\frac{\vec{a}-\vec{b}}{|\vec{a}-\vec{b}|}$。对应的最大值可以验证也是
$$\max\left\{(\vec{a}\cdot\vec{c})^2+(\vec{b}\cdot\vec{c})^2\right\}=1+\cos\theta=1+\vec{a}\cdot\vec{b}. \tag{15}$$
带入不确定关系式 (10) 中我们就得到了我们结果 (5). □

问题 3 (几何相) 考虑 $\mathbb{C}^2$ 空间中的量子态 $|\psi\rangle$, 它的密度矩阵形式是 $\psi=|\psi\rangle\langle\psi|$, 可以用 Bloch 向量表示为

$$\psi=\frac{1}{2}(I+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}),\quad |\boldsymbol{r}|=1$$

设想 ψ 经历了这样的酉演化过程 (用 Bloch 向量表示):

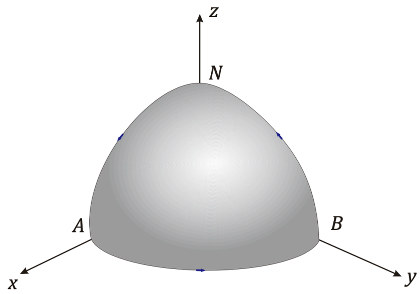
1. 初始时刻 $\psi_0=\frac{1}{2}(I+\sigma_z)$, 即初始时刻的 Bloch 向量是 z 轴上的单位向量, 指向 Bloch 球面的北极点 N.

2. 从 Bloch 球面的北极点出发, 在 xz 平面内沿经线运动到 x 轴上的 A 点, 此时量子态是
$$\psi_A=\frac{1}{2}(I+\sigma_x)$$

3. 在 Bloch 球面的赤道上运动到 y 轴上的 B 点, 此时量子态是

$$\psi_B = \frac{1}{2}\left(I + \sigma_y\right)$$

4. 从 B 点沿 yz 平面中的经线回到出发地北极点 N. 整个过程如下图所示.



(Q1) 构造适当的哈密顿量, 实现这样的演化过程. 当然, 在三个不同的演化过程中, 哈密顿量是不同的.

(Q2) 计算每一段演化过程中的几何相, $\gamma_{NA}, \gamma_{AB}, \gamma_{BN}$.

(Q3) 计算整个演化过程中的几何相 γ.

解答 (Q1) 首先回忆在 Bloch 球表示下面，沿着单位向量 $\vec{n}$ 逆时针旋转 θ 角度的酉变换为

$$U_{\vec{n}}(\theta) = \exp(-i\frac{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}\theta); \tag{16}$$

而对于一个给定的 Hamiltonian H (不显含时间)，它对应的演化时间为 t 的酉变换为

$$U(t) = \exp(-iHt/\hbar) \tag{17}$$

假设旋转的角速度为 ω，也就是说，取 $\theta = \omega t$，我们会有

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \tag{18}$$

下面为了方便，直接取 $\omega = 1$.

通过对比我们很容易给出三个演化所对应的 Hamiltonian

- N $\to$ A 段：$H = \sigma_y/2$ 演化时间为 $t_{NA} = \pi/2$;
- A $\to$ B 段：$H = \sigma_z/2$ 演化时间为 $t_{AB} = \pi/2$;
- B$\to$ N 段：$H = \sigma_x/2$ 演化时间为 $t_{BN} = \pi/2$.

(Q2) 首先我们回忆几何相位的定义，对于一个从 0 时刻到 t 时刻的演化过程，总相对相位 γ_t，动力学相位 γ_d 和几何相位 γ_g 的定义分别为

$$\gamma_t = \arg\langle\psi(0)|\psi(\tau)\rangle \tag{19}$$

$$\gamma_d = -i\int_0^\tau \langle\psi(t)|\dot{\psi}(t)\rangle dt \tag{20}$$

$$\gamma_g = \gamma_t - \gamma_d \tag{21}$$

下面我们分别分析三个过程中的几何相位的计算。

- N $\to$ A 段：我们知道初始态为 $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = (1,0)^T$, 而演化过程为

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \exp(-i\sigma_y t/2)|\psi(0)\rangle = \left(\cos\frac{t}{2}I - i\sin\frac{t}{2}\sigma_y\right)|\psi(0)\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2}\\ \sin\frac{t}{2}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{22}$$

  于是末态为 $t=\pi/2$ 时刻的态 $|\psi(\pi/2)\rangle = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})^T = |x+\rangle$。此时我们有

$$\gamma_t^{NA} = \arg\langle\psi(0)|\psi(\pi/2)\rangle = \arg\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \tag{23}$$

  而动力学相为

$$\gamma_d^{NA} = -i\int_0^{\pi/2}\langle\psi(t)|\dot{\psi}(t)\rangle dt = 0 \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

  于是几何相为

$$\gamma_{NA} = \gamma_g^{NA} = \gamma_t^{NA} - \gamma_d^{NA} = 0 \tag{26}$$

- $A \to B$ 段：初始态为 $|\varphi(0)\rangle = |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$，演化过程为

$$\begin{aligned}|\varphi(t)\rangle &= \exp(-i\sigma_z t/2)|\varphi(0)\rangle = \left(\cos\frac{t}{2}I - i\sin\frac{t}{2}\sigma_z\right)|x+\rangle \\ &= \cos\frac{t}{2}|x+\rangle - i\sin\frac{t}{2}|x-\rangle\end{aligned} \tag{27}$$

  于是末态为 $|\varphi(\pi/2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle - i|x-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i, 1+i)^T = e^{-i\pi/4}|y+\rangle$。此时我们有总相位

$$\gamma_t^{AB} = \arg\langle\varphi(0)|\varphi(\pi/2)\rangle = \arg\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \tag{28}$$

  而动力学相为

$$\gamma_d^{AB} = -i\int_0^{\pi/2}\langle\varphi(t)|\dot{\varphi}(t)\rangle dt = 0 \tag{29}$$

  于是几何相为

$$\gamma_{AB} = \gamma_g^{AB} = \gamma_t^{AB} - \gamma_d^{AB} = 0 \tag{30}$$

- $B \to N$ 段: 初始态为 $|\chi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle - i|x-\rangle) = e^{-i\pi/4}|y+\rangle = e^{-i\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, 演化过程为

$$
\begin{aligned}
|\chi(t)\rangle =& \exp(-i\sigma_x t/2)|\chi(0)\rangle \\
=& \left(\cos\frac{t}{2}I - i\sin\frac{t}{2}\sigma_x\right) e^{-i\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right) \\
=& \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\left[(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2})|0\rangle + i(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2})|1\rangle\right]
\end{aligned} \tag{31}
$$

于是末态为 $|\chi(\pi/2) = e^{-i\pi/4}|0\rangle$ 此时我们有总相位

$$\gamma_t^{BN} = \arg\langle\chi(0)|\chi(\pi/2)\rangle = \arg\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \tag{32}$$

而动力学相为

$$\gamma_d^{BN} = -i\int_0^{\pi/2}\langle\chi(t)|\dot{\chi}(t)\rangle dt = 0 \tag{33}$$

于是几何相为

$$\gamma_{BN} = \gamma_g^{BN} = \gamma_t^{BN} - \gamma_d^{BN} = 0 \tag{34}$$

这三段开放路径的几何相位为零可以如下理解。因为 Bloch 球上演化所对应的一段开放路径 C 的几何相位 $\gamma_g(C)$ 对应的是将 C 和 C 始末两点所对应的测地线（也就是大圆所对应的劣弧）C' 所构成的封闭路径围成的曲面 $S(C)$ 所对应的固体角 $\Omega(C)$ 的一半，即

$$\gamma_g(C) = \frac{\Omega(C)}{2} \tag{35}$$

但因为上面三段开放路径演化所走的都是测地线，所以再补充 C' 的时候就会发现 C' 和 C 一样，所以他们对应的固体角都为零，故而几何相为零。

(Q3) 最简单的方法就是利用

$$\gamma_g(C) = \frac{\Omega(C)}{2} \tag{36}$$

这里的 C 是由 C_{NA}, C_{AB}, C_{BN} 构成的闭合回路。这个回路所对应的固体角为 $\Omega(C) = 4\pi/8 = \pi/2$ (八个象限中的一个)。于是直接有 $\gamma = \gamma_d(C) = \Omega(C)/2 = \frac{\pi}{4}$。

另一种方法就是严格计算。由 (Q2) 的计算我们知道，总的初始态为 $|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |0\rangle$ 而总的末态为 $|\Psi(T)\rangle = |\chi(\pi/2)\rangle = e^{-i\pi/4}|0\rangle$。于是总相位为

$$\arg\langle\Psi(0)|\Psi(T)\rangle = -\pi/4. \tag{37}$$

而动力学相位

$$\gamma_d = \gamma_d^{NA} + \gamma_d^{AB} + \gamma_d^{BN} = 0 \tag{38}$$

于是，几何相位为

$$\gamma = \gamma_g = \gamma_t - \gamma_d = -\pi/4. \tag{39}$$

□

问题 4 (Partial transpose) 考虑两个双值量子系统 A 和 B 构成的两体系统. 在 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 空间中, 可以把两体量子纯态表示为

$$|\Psi\rangle = \cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha|11\rangle$$

设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 考虑在描述子系统 A 的空间 $\mathbb{C}^2$ 中作转置变换 (即部分转置). 上部分转置变换的结果不能描述一个真正的量子态.

解答 这是纠缠的 PPT 判据的例子，因为 PPT 判据在 $2\otimes 2$ 和 $2\otimes 3$ 情形下是充分必要的，所以这里的 $2\otimes 2$ 纠缠态经过部分转置后，肯定不是正定的，也就是说会出现负数的本征值。

定理 1 (纠缠的 PPT 判据)**.** 如果一个两体量子态 ρ_{AB} 是可分的，那么经过部分转置 $T_A \otimes I$ 之后得到的矩阵 $\rho_{AB}^{T_A}$ 的所有本征值都是非负的的。等价来说，如果一个密度矩阵的部分转置后的矩阵有负数的本征值，那这个密度矩阵必然是纠缠的。

我们来验证这一点，对于题目中给定量子态 $|\Psi\rangle$，因为他的 Schmidt 秩为 2，所以它一定是纠缠的（对于所有 $0 < \alpha < \pi/2$）。它对应的密度矩阵为 $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$，具体来说，我们有

$$\begin{aligned}\rho_\Psi =& \cos^2\alpha(|0\rangle\langle 0|)_A \otimes (|0\rangle\langle 0|)_B + \sin^2\alpha(|1\rangle\langle 1|)_A \otimes (|1\rangle\langle 1|)_B \\ &+ \cos\alpha\sin\alpha(|0\rangle\langle 1|)_A \otimes (|0\rangle\langle 1|)_B + \cos\alpha\sin\alpha(|1\rangle\langle 0|)_A \otimes (|1\rangle\langle 0|)_B.\end{aligned} \tag{40}$$

部分转置就是把 $(|i\rangle\langle j|)_A$ 换为 $(|j\rangle\langle i|)_A$，由此我们得到

$$\begin{aligned}\rho_\Psi^{T_A} =& \cos^2\alpha(|0\rangle\langle 0|)_A \otimes (|0\rangle\langle 0|)_B + \sin^2\alpha(|1\rangle\langle 1|)_A \otimes (|1\rangle\langle 1|)_B \\ &+ \cos\alpha\sin\alpha(|1\rangle\langle 0|)_A \otimes (|0\rangle\langle 1|)_B + \cos\alpha\sin\alpha(|0\rangle\langle 1|)_A \otimes (|1\rangle\langle 0|)_B.\end{aligned} \tag{41}$$

如果我们把基底顺序选择为 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$，那我们就会有矩阵形式

$$\rho_\Psi^{T_A} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \tag{42}$$

因为它是分块对角的，且中间的块为 $\cos\alpha\sin\alpha\sigma_x$，于是我们可以构造一个态（对应于 σ_x 的 -1 本征态）

$$|\Phi\rangle = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^T, \tag{43}$$

很容易验证 $\langle\Phi|\rho_\Psi^{T_A}|\Phi\rangle = -\cos\alpha\sin\alpha < 0$ 对于 $0 < \alpha < \pi/2$。故而 $\rho_\Psi^{T_A}$ 不正定，所以无法成为一个量子态。 □

问题 5 (No-cloning theorem) 为了进行量子态的克隆, 需要两个量子系统. 第一个, 记作 A 系统, 承载着我们希望克隆的量子态 $|\psi\rangle$, 它的形式是未知的. 第二个, 记作 B 系统. 我们可以将它的初态制备成某个 $|\varphi\rangle$. 假设描述 A 系统的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}^A$ 和描述 B 系统的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}^B$ 的维数相同, 它们是同构的. 量子克隆过程应该满足这样的要求: 对于 A 系统任意的 $|\psi\rangle$ 和 B 系统的初态 $|\varphi\rangle$, 有

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \xrightarrow{U} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

其中 U 是 $\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ 上的西变换. 上证明不可能存在上述过程.

解答 反证法。假设我们可以存在这样的酉变换，那么对于互相不正交也不相等的两个量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$，我们会有

$$\begin{cases} U(|\psi_1\rangle \otimes |\varphi\rangle) = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle \\ U(|\psi_2\rangle \otimes |\varphi\rangle) = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle \end{cases} \tag{44}$$

同时对等式两边做内积，我们会有

$$\begin{aligned} &(\langle\psi_1| \otimes \langle\varphi|U^\dagger U(|\psi_2\rangle \otimes |\varphi\rangle)) = (\langle\psi_1\rangle \otimes \langle\psi_1)|\psi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle \\ \Longrightarrow &\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (\langle\psi_1|\psi_2\rangle)^2 \end{aligned} \tag{45}$$

这个式子成立会导致 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 1, 0$，由假设知这不成立，所以这种酉变换不可能存在。 □

问题 6 两个自旋为 1/2 的粒子 A 和 B 组成两体量子系统. 空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 的基向量选择为

$$|00\rangle, \quad |01\rangle, \quad |10\rangle, \quad |11\rangle$$

两体系统的初态是

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

(Q1) 在 $t = 0$ 时刻, 测量 A 的力学量 σ_z^A, 得到结果 $+1$ 的几率是多少? 在得到这个结果的前提下, 测量 B 的力学量 σ_x^B, 会得到什么结果? 几率分别是多少?

(Q2) 对处于 $|\Psi(0)\rangle$ 的两体系统, 分别测量 A 和 B 的力学量 σ_z^A 和 σ_z^B, 得到相反结果的几率是多少?

(Q3) 现在, 不考虑上述测量过程, 而是让两体系统在如下哈密顿量的支配下随时间演化,

$$H = \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_z^A + \frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_z^B$$

写出 t 时刻两体系统的量子态 $|\Psi(t)\rangle$. 计算在 t 时刻的期望值 $\langle \boldsymbol{\sigma}^A \rangle$ 和 $\langle \boldsymbol{\sigma}^B \rangle$.

解答 (Q1) 注意到 $|0\rangle = |z+\rangle$ 和 $|1\rangle = |z-\rangle$ 易见 $p(\sigma_z^A = +1) = 1/4$。测量完成后，量子态坍缩为

$$|00\rangle = (|0\rangle|x+\rangle + |1\rangle|x-\rangle)/\sqrt{2}. \tag{46}$$

所以再测 σ_x^B 取值为 ± 1 都有可能，并且他们的概率均为 $1/2$。

(Q2) 和 Q1 完全类似。不过需要考虑一下题目中的意思是逐次测量还是联合测量。联合测量的话，概率直接为 $1/4$。逐次测量的话，需要把所有情况考虑进去然后求总概率。

(Q3) 可以直接看 2018 年问题 *6*

下面这个是我之前写的：首先，始终记得 $\sigma_z^A = \sigma_z^A \otimes I_B$ 和 $\sigma_z^B = I_A \otimes \sigma_z^B$。于是可以知道 σ_z^A 和 σ_z^B 对易。并且

$$\sigma_z^A|ij\rangle = (-1)^i|ij\rangle, \quad \sigma_z^B|ij\rangle = (-1)^j|ij\rangle. \tag{47}$$

我们知道演化酉变换为

$$U(t) = \exp(-i\frac{Ht}{\hbar}) = \exp[-i(\frac{\omega_1}{2}\sigma_z^A + \frac{\omega_1}{2}\sigma_z^B)t] = \exp(-i\frac{\omega_1}{2}\sigma_z^A t)\exp(-i\frac{\omega_2}{2}\sigma_z^B t), \tag{48}$$

其中最后一步用到了 $[\sigma_z^A, \sigma_z^B] = 0$ 所以指数上可以拆分。进一步地利用

$$\exp(i\theta\sigma_z) = \cos\theta I + i\sin\theta\sigma_z. \tag{49}$$

我们有

$$U(t) = \exp(-i\frac{\omega_1}{2}\sigma_z^A t)\exp(-i\frac{\omega_2}{2}\sigma_z^B t) = (\cos\frac{\omega_1 t}{2}I - i\sin\frac{\omega_1 t}{2}\sigma_z^A)(\cos\frac{\omega_2 t}{2}I - i\sin\frac{\omega_2 t}{2}\sigma_z^B) \tag{50}$$

所以演化可以分两部分进行。

- 第一部分

$$\begin{aligned}&(\cos\frac{\omega_2 t}{2}I_A \otimes I_B - i\sin\frac{\omega_2 t}{2}I_A \otimes \sigma_z^B)|\Psi(0)\rangle \\ =&\cos\frac{\omega_2 t}{2}|\Psi(0)\rangle - i\sin\frac{\omega_2 t}{2}(\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) = |\Psi'(t)\rangle\end{aligned} \tag{51}$$

- 在上一部分获得的态上面再进行操作

$$\begin{aligned}&(\cos\frac{\omega_1 t}{2}I_A \otimes I_B - i\sin\frac{\omega_1 t}{2}\sigma_z^A \otimes I_B)|\Psi'(t)\rangle \\ =&\cos\frac{\omega_1 t}{2}|\Psi'(t)\rangle \\ &- i\sin\frac{\omega_1 t}{2}(\sigma_z^A \otimes I_B)\left(\cos\frac{\omega_2 t}{2}|\Psi(0)\rangle - i\sin\frac{\omega_2 t}{2}(\frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) = |\Psi'(t)\rangle\right)\end{aligned} \tag{52}$$

展开计算即得结果。

□