计算物理第十三题

韦璐 PB16000702

题目：Monte Carlo 方法研究正弦外力场中的随机行走。

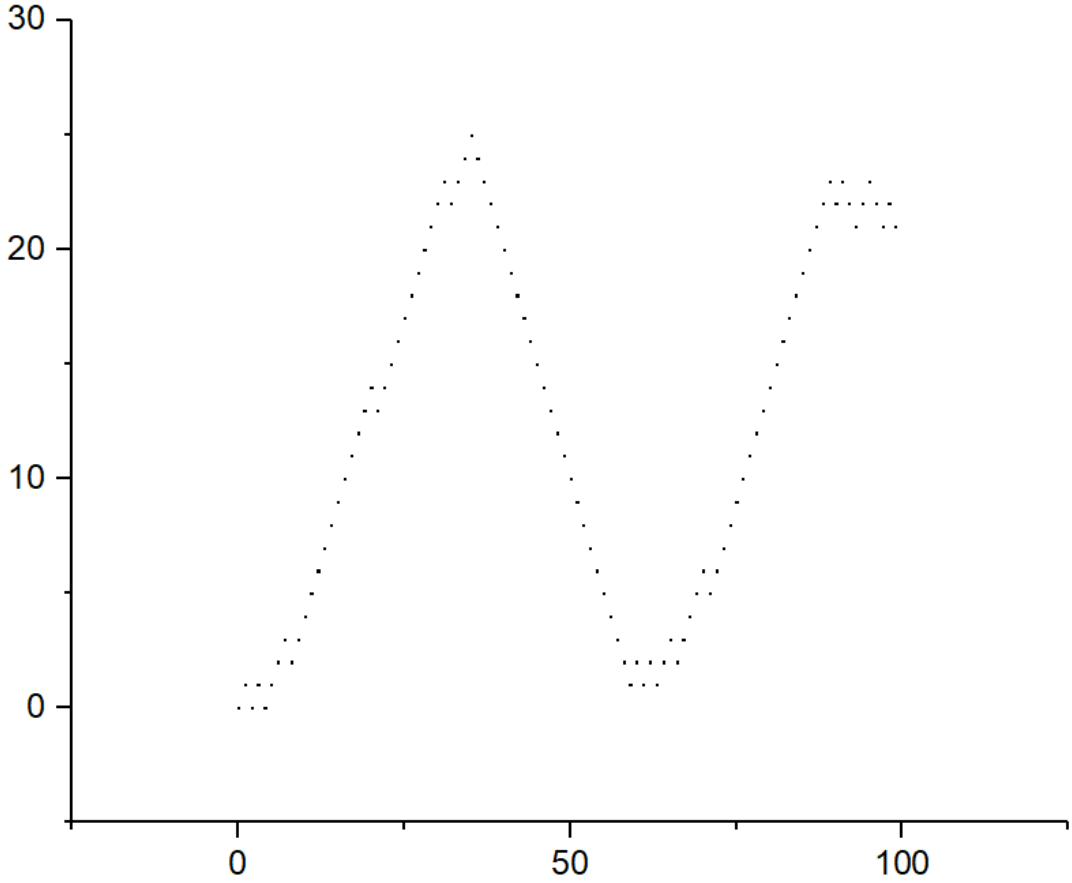
编程思路：考虑一个粒子在一维格点上的随机行走问题，粒子受到正弦外力场的影响。设粒子从原点出发，每走一步移动一个单位长度，并消耗一定的时间。在每一步的下一步，设粒子向右行走一步的概率是$\mathrm{p}=\frac{1}{2}(1+\alpha sin\omega t)$，那么就可以得到向左行走一步的概率为$\mathrm{q}=\frac{1}{2}(1-\alpha sin\omega t)$，影响因子 $\alpha \in[0,1]$控制随机行走受到外立场的影响程度。当 $t=t_k$ 时，这一步的期$<\Delta x_k>=(+1)p+(-1)q=\alpha\sin\omega t_k$，一定时间后粒子总位移的期望为$<\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k>=\sum_{k=1}^{N}<\Delta x_k>=\sum_{k=1}^{N}\alpha sin\omega t_k=\alpha\frac{\sin(\frac{N\omega}{2})\sin(\frac{N+1}{2})\omega}{\sin(\frac{\omega}{2})}$，那么位移平方的期望为$<[\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k]^2>=<\sum_{k=1}^{N}\Delta x_k^2+\sum_{k\neq i}^{N}\Delta x_k\Delta x_i>=\sum_{k=1}^{N}<\Delta x_k^2>$ $+\sum_{k\neq i}^{N}<\Delta x_k\Delta x_i>=N+\sum_{k\neq i}^{N}<\Delta x_k\Delta x_i>$，再 $<\Delta x_k\Delta x_i>=<\Delta x_k><\Delta x_i>=\alpha^2\sin\omega t_k\sin\omega t_i$，那么之前的式子可以继续化简为$N+\sum_{k\neq i}^{N}<\Delta x_k\Delta x_i>=N\sum_{k\neq i}^{N}\alpha^2\sin\omega t_k\sin\omega t_i=N+\alpha^2[(\sum_{k=1}^{N}\sin\omega t_k)(\sum_{i=1}^{N}sin\omega t_i)-\sum_{k=1}^{N}(sin\omega t_k)^2]=N+\alpha^2(\sum_{k=1}^{N}sin\omega t_k)^2-\alpha^2(\sum_{k=1}^{N}sinwt_k)^2-\alpha^2\sum_{k=1}^{N}(sinwt_k)^2=N+\alpha^2\left(\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)\omega}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2-\frac{\alpha^2}{2}\left(N-\frac{\sin(Nw)cos(N+!)w}{sinw}\right)=N\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)+\alpha^2\frac{\sin(Nw)\cos(N+1)w}{2sinw}+\alpha^2\left(\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)\omega}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2$，那么就可以得到这段时间内位移的方差，$\mathrm{Var(x)}=<x^2>-<x>^2=N\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)+$

$\alpha^2\frac{\sin(Nw)\cos(N+1)w}{2sinw}$。在编程的时候用计算机自带随机数生成器生成[0,1]之间的随机数，若满足向前的概率区间就向前走，若满足向后走的概率区间就向后走。

结果分析：

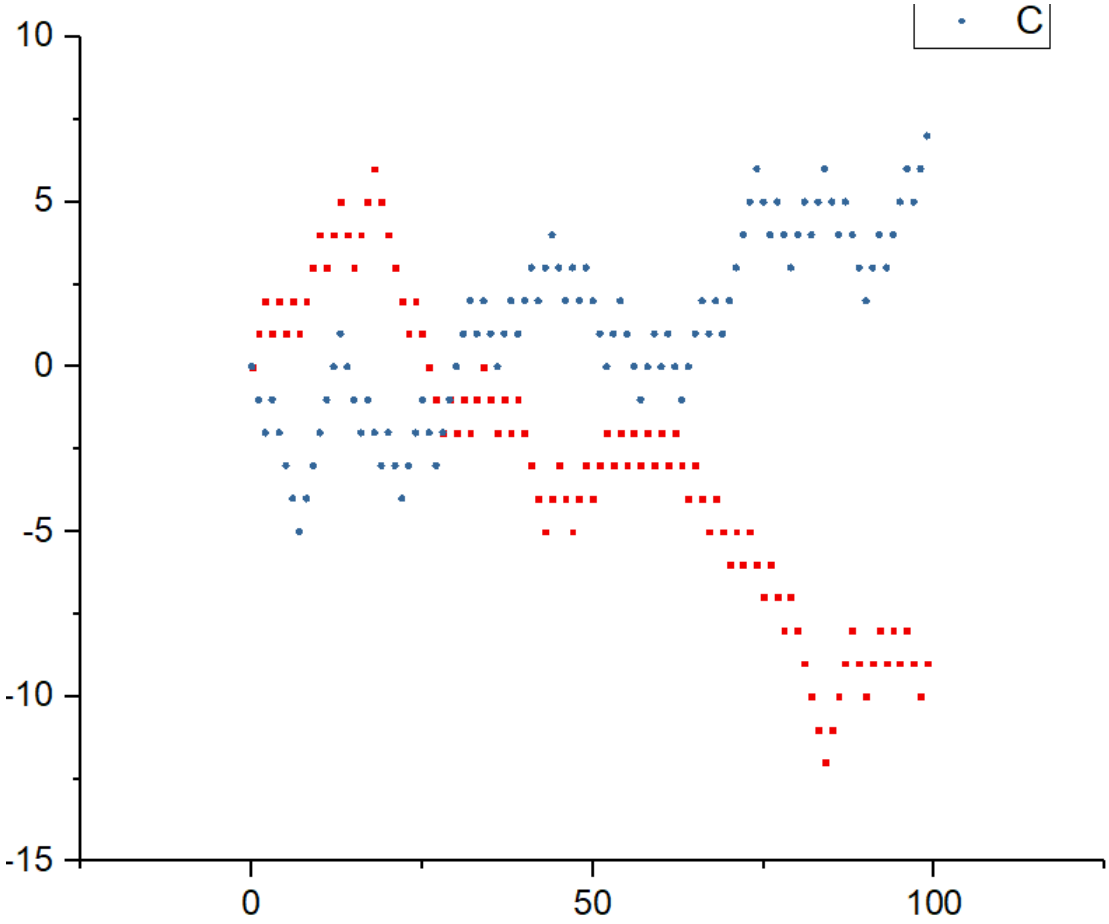
1. 单个粒子

ALPHA=1：



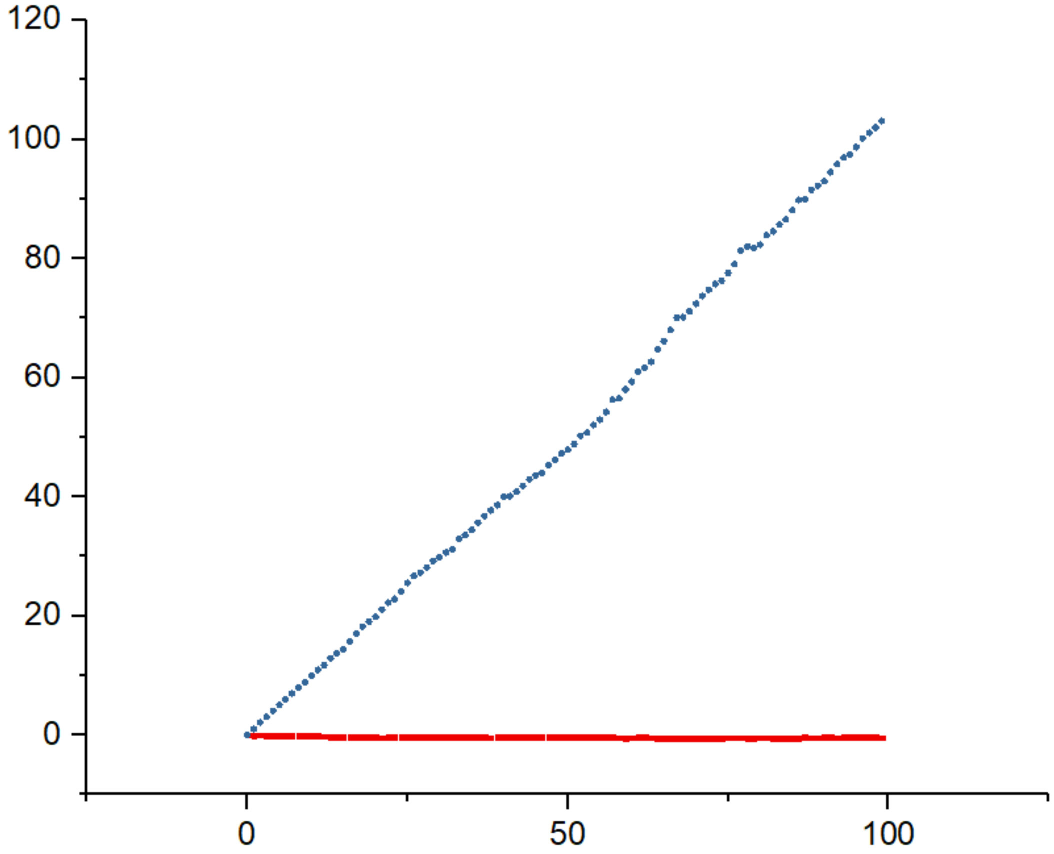
2. 两个粒子

AIPLA=0:



3. 一千个粒子

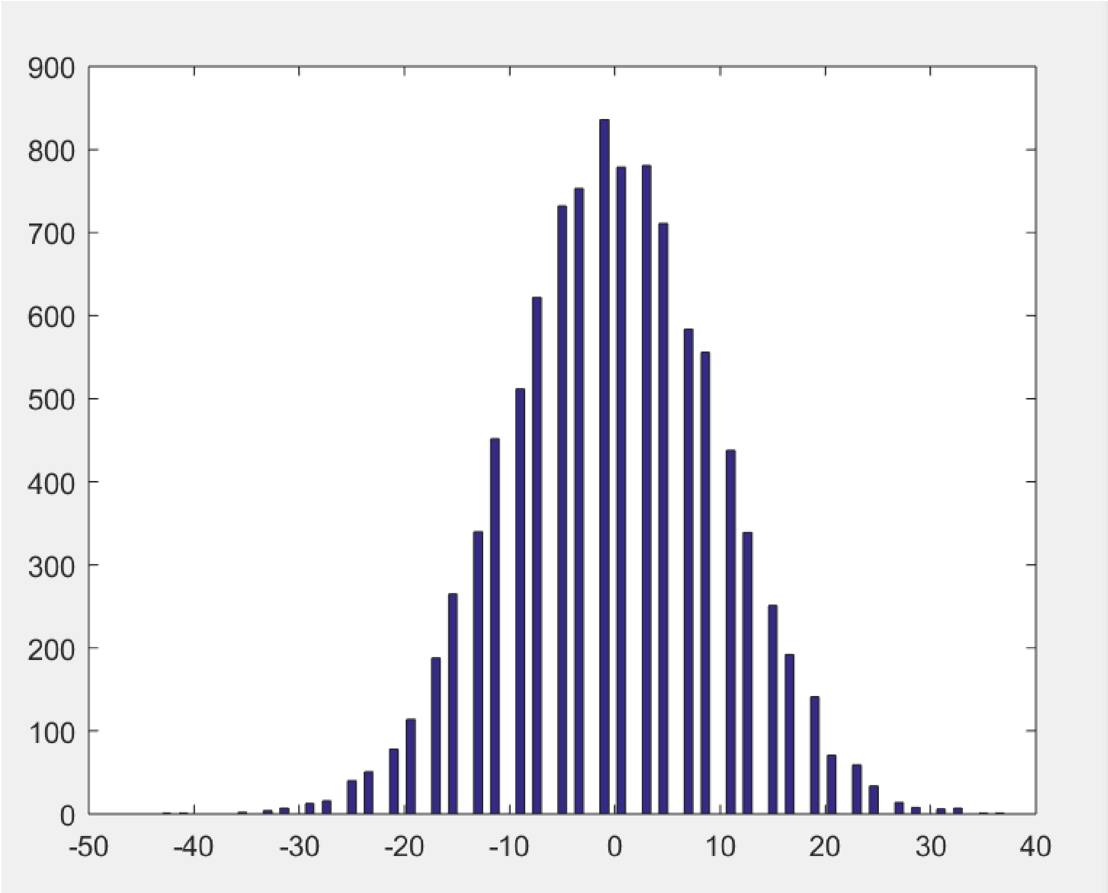
ALPHA=0



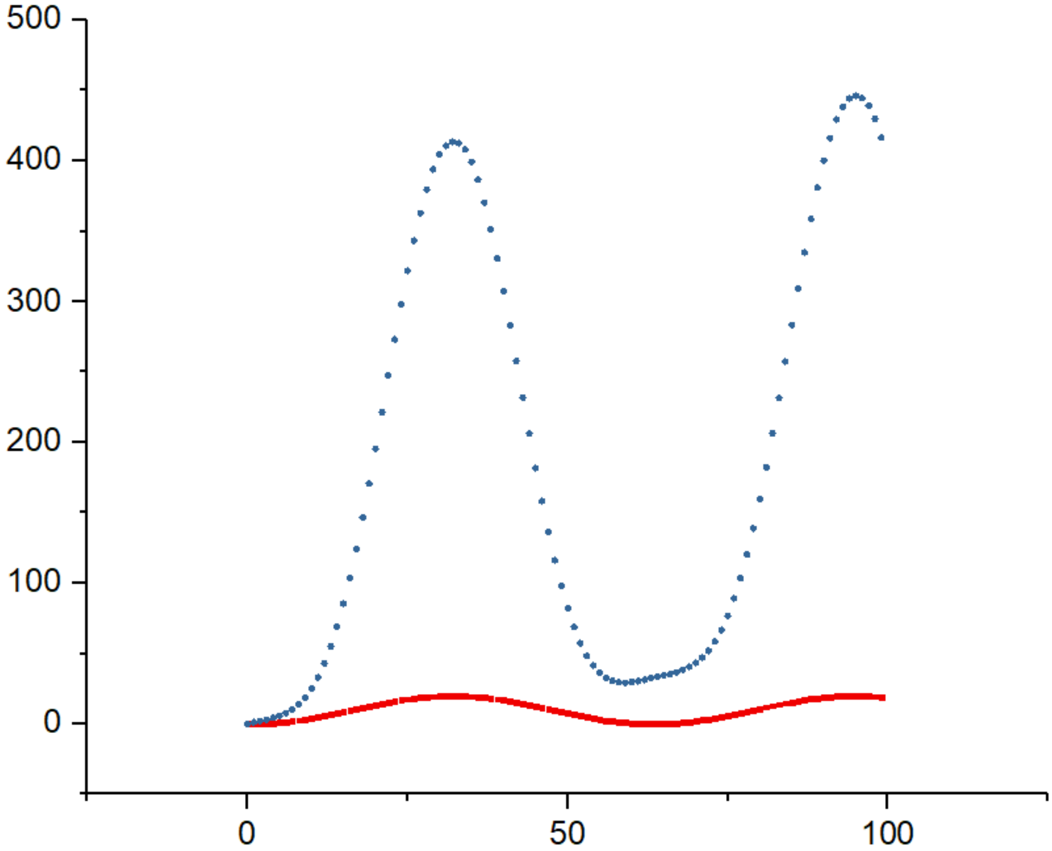
可以看出，在 ALPHA=0 的时候，1000 个粒子随机行走离原点在任何时刻的位移平均值是零，而离远点距离平方的平均值与时间呈线性关系。

4. 10000 个粒子，ALPHA=0

可以看到十分接近高斯分布。

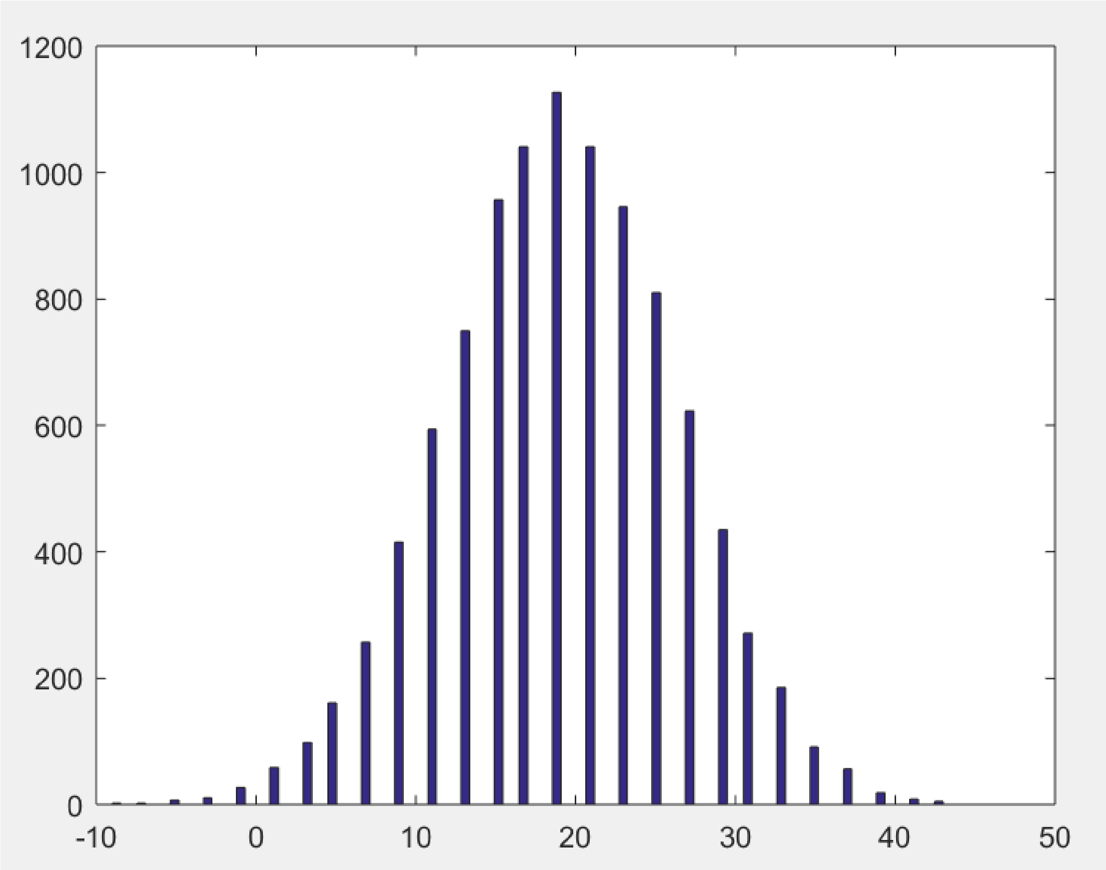


5. 10000 个粒子，ALPHA=1



和前面推导的理论公式十分接近。

演化终点的频数分布直方图



总结：

1. 粒子的行走趋势满足势场的分布，而且看其平均值，也满足应有的分布。
2. W在程序中没有进行改变，这个只是调节震荡频率的。
3. 粒子的时间演化是呈现正弦变化的，这个符合预期，而粒子的平方平均是随时间边震荡边增加。
4. ALPHA增加，平方平均随时间震荡幅度增大。