

2012~2013《量子信息物理学》冬季学期期末考卷

(任课老师: 陈凯)

姓名: 学号: 所在系所:

1. (16 分) 考虑 Hilbert 空间上的一个密度矩阵

$$\rho(n) := \frac{1}{2} \left(I + \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_i \right)$$

其中 $n := (n_1, n_2, n_3)$ 是一个实的单位矢量, 满足 $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ 。这里

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 为 Pauli 矩阵。}$$

(i) 求出 $\rho(n)^+$, $\text{Tr}(\rho(n))$, $\rho(n)^2$, $\text{Tr}(\rho(n)^2)$; (7 分)

(ii) 已知量子态 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, 求出其密度矩阵 ρ , 并给出其对应的

2. (8 分) 已知 4 维密度矩阵 $\rho = (I_2 \otimes I_2 + \sum_{i=1}^3 t_i \sigma_i \otimes \sigma_i) / 4$, t 为实数,

求出 ρ^2 并简化, 以及 $\text{Tr}(\rho^2)$ 的值。(8 分)

3. (12 分) (i) 给出两体纯态量子态为可分离态的充分必要条件。(4 分)

(ii) 对于密度矩阵 $\rho = x |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + (1-x) |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$, $0 \leq x \leq 1$, 其中

$|\phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle) / \sqrt{2}$, $|\psi^+\rangle = (|01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{2}$ 。写出其矩阵表示, 并利用 PPT 纠缠判据来判定 $x=0.3$ 时, 该量子态是否仍然纠缠。(8 分)

4. (10 分) 量子隐形传态 (Quantum Teleportation) 可以利用纠缠资源把一个未知量子态的信息传输到另一个地方。若初始的量子态分别为

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle).$$

推导写出 Teleportation 的原理和具体物理过程。

5. (10 分) 写出量子密钥分发协议 BB84 协议的通信过程。给出 Error Correction, Privacy Amplification 分别与纠缠可提纯协议 (EDP: Entanglement Distillation Protocol) 的哪些过程具有对应关系。

6. (13 分) (i) 写出量子态 $|\psi^-\rangle_{\text{EPR}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ 所对应的两个独立的 Stabilizer S_0, S_1 。也即作用到该量子态后仍然保持量子态不变的两个线性算子, 并且可以唯一完全确定该量子态。(5 分)

(ii) 对于 $|\psi\rangle_{\text{GHZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |101\rangle)$, 写出其相应的 Stabilizers S_0, S_1, S_2 。若该量子态经过噪声信道后变为 $|\psi'\rangle_{\text{GHZ}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |011\rangle)$, 给出前述 Stabilizer S_0, S_1, S_2 变化了的本征值。(8 分)

7. (15 分) 对于 9 位量子 Shor 码, 已知其逻辑比特的编码为

$$|0\rangle \rightarrow |0_L\rangle \equiv \frac{(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

$$|1\rangle \rightarrow |1_L\rangle \equiv \frac{(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

- (i) 写下其全部 Stabilizers g_1, g_2, \dots, g_8 ; (5 分)
- (ii) 给出 9 位量子 Shor 码的编码过程量子线路图; (5 分)
- (iii) 对应于第 7 个量子比特上的一个 Z 类型的错误, 分析给出错误检测过程, 以及错误纠正过程。(5 分)

8. (16 分) (i) 写出 CNOT (Controlled-X) 门的矩阵表示形式以及在量子态

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ 上的作用方式; (5 分)

(ii) 利用 CNOT 门来构造一个 SWAP 门, 也即完成交换 1, 2 量子比特的任务; (5 分)

(iii) 设计量子线路使得能够做完全的 Bell 态测量, 也即通过在 $|0\rangle, |1\rangle$ 基矢下做投影测量就可以完全区分 4 个 Bell 态 $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle), |\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ 的量子线路实现。(6 分)