计算物理第十六题

PB16000702 韦璐

题目：推导三角格子点阵上座逾渗的重整化群变换表达式$p' = R(p)$，其中端一端连接的条件是3个格点中的2个是占据态，求临界点p_c与临界指数ν，与正确值（表1.6.1.3-1）相比较。

解题：

题目说的是三角格子点阵上的，所以是二维的座逾渗的重整化，也就是书上的图中将点阵排列的图上可以组成三角形的三个点变成只有中间的一个黑色的点，新的点阵中的格点的数目只有原来的点阵的三分之一倍，所以要缩小根号三倍才能和原来的点阵相同，而由于端和端连接的条件是三个格点中至少有2个是占据态，所以分别三边和三个全部被占据，一共有四种连接构型，所以它的重整化群变换的变表达式可以如下写出：

$$p' = R\left(p \middle| b = \sqrt{3}\right) = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$$

再由临界点的p_c满足以下方程$p_c = R(p_c)$

所以得到逾渗阈值为$p_c = \frac{1}{2}$，和表中比较，数值正确

重整化的格子点阵中所有的长度应该是比原来格子点阵中的长度缩小根号三倍，这样能保证系统在标度变换下是不变的，关联长度为$\xi' = \xi/b$，而接近p_c时有$\xi(\mathrm{p}) = |\mathrm{p} - p_c|^{-\nu}$，故$|p' - p_c|^{-\nu} = b^{-1}|p - p_c|^{-\nu}$

而在p_c附近做一阶泰勒展开$p' - p_c = R(p) - R(p_c) = \lambda(p - p_c), \lambda = \frac{dR(p_c)}{dp}$，两边同时取$\nu$次幂，$|p' - p_c|^{\nu} = \lambda^{\nu}|p - p_c|^{\nu}$，对比各个式子

可以看到$b=\lambda^{\nu}$，取对数后得到临界指数 $\nu=\frac{lnb}{ln\lambda}$，其中 $\lambda=\frac{dR(p_c)}{dp}=6p(1-p)|_{p=p_c}=\frac{3}{2}$，求得临界指数 $\nu=\frac{ln\sqrt{3}}{\ln(\frac{3}{2})}=1.35476$