

计算物理第九题

PB16000702 韦璐

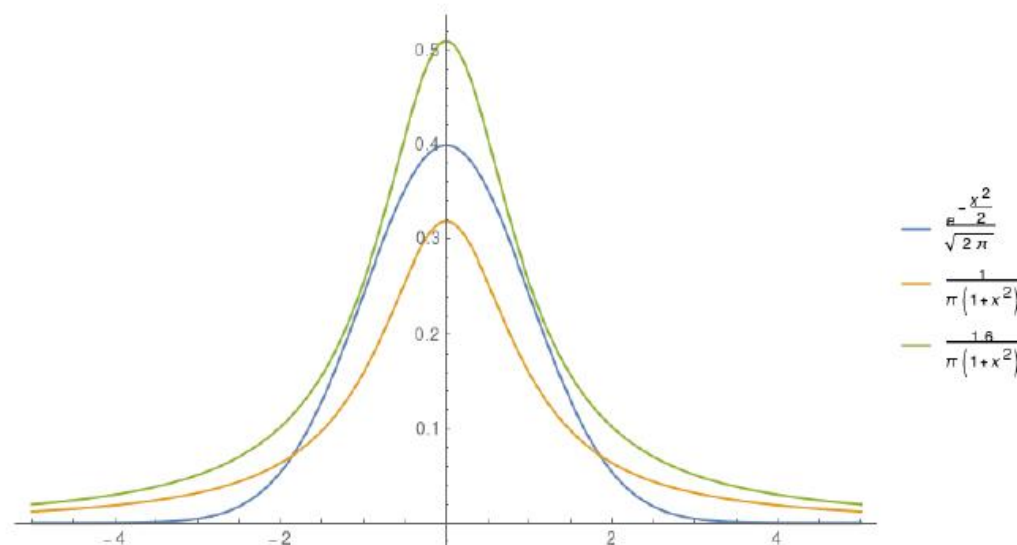
对两个函数线型（高斯分布和类洛伦兹分布），设其中一个为 $p(x)$ ，另一个为 $F(x)$ ，用舍选法对 $p(x)$ 抽样。将计算得到的归一化频数分布直方图理论曲线 $p(x)$ 进行比较，讨论差异。讨论抽样效率。

编程思路：

1. 比较函数的确定

采用比较函数取舍法需要选定一个比较函数使得另外一个函数在坐标轴上都在这个比较函数的下面，为了使得抽样的效率尽可能的大，我们需要使得比较函数尽可能贴近先前的函数，洛伦兹分布我们取为： $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ，高斯分布我们取为： $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，通过使用 mma

进行绘图，在洛伦兹分布前面乘上一个 1.6 会比较靠近高斯分布，具体绘图如下：



2. 变换抽样

我们在洛伦兹分布前面乘上了一个倍数，那么这个分布在实数轴上的积分就是 1.6，在这个区域产生随机点的方法如下：

$$\xi_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\xi_x} F(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx} = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(\xi_x)}{\pi}, \text{ 即 } \xi_x = \tan\left(\pi\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right)\right).$$

$$\xi_y = \xi_2 F(\xi_x).$$

其中 ξ_1, ξ_2 为 $[0,1]$ 区间均匀随机取样。

这样子，产生的随机点 (ξ_x, ξ_y) 处在 $x dx$ 条带区域的概率为 $F(x) dx \times \frac{1}{F(x)} dy = dx dy$ 。

即单位面积上 (ξ_x, ξ_y) 点分布仍然是均匀的，且全部在 $F(x)$ 曲线的面积内。

舍选法

在以上变换抽样后，采用舍选法，具体步骤是：

- (1) 在比较函数内产生随机点 (ξ_x, ξ_y)
- (2) 如果这个点在 $p(x)$ 的面积区域内，即 $\xi_y < p(\xi_x)$ ，则取 ξ_x 为 $p(x)$ 的随机抽样。
- (3) 否则，舍掉该点，返回 (1)

3. 抽样效率

比较函数的形式不会对抽样的准确性造成影响，但是抽样效率即有效的点数等于 $p(x)$ 与

$F(x)$ 的面积比。理论值 $\eta = \frac{N_{accepted}}{N_{all}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx} = 0.625$ ，其中 $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

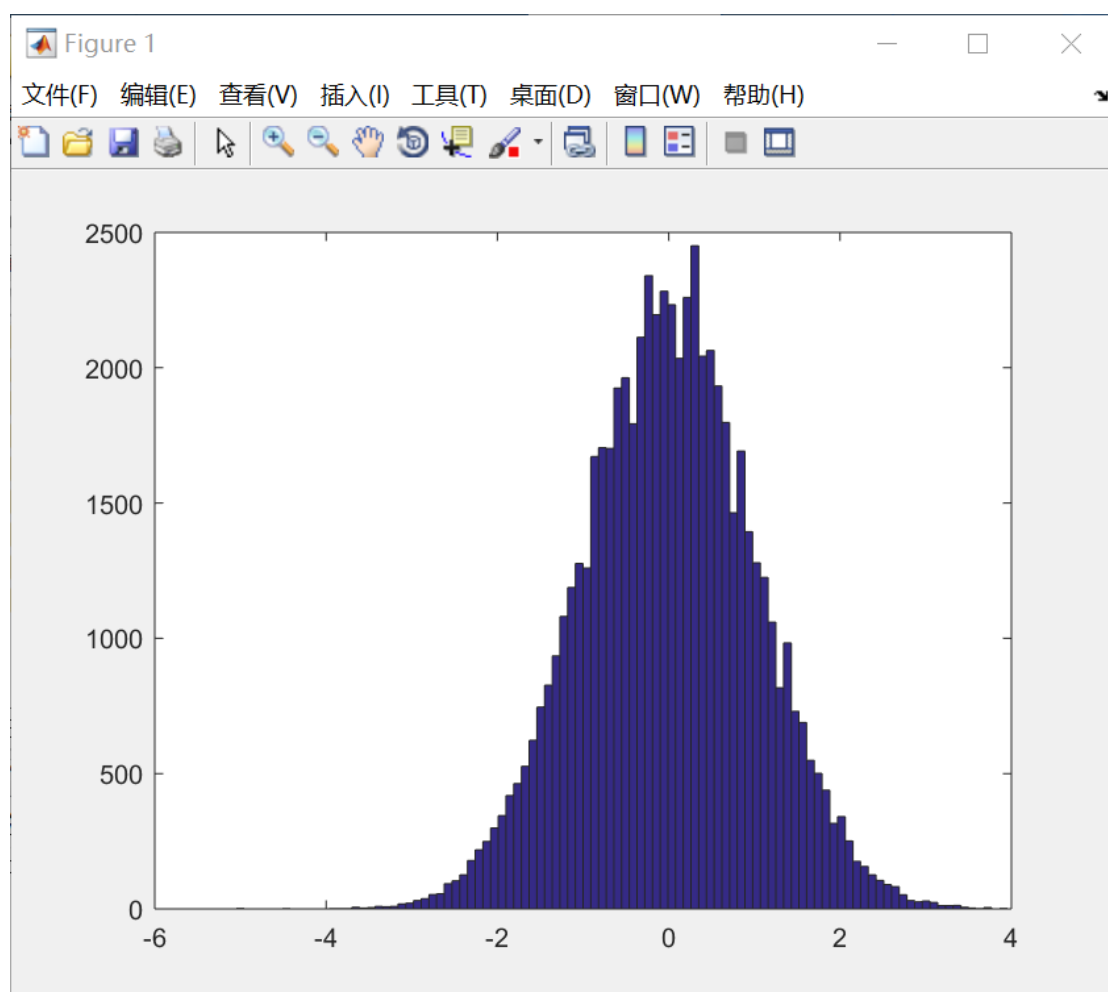
4. 具体程序

采用 16807 随机数生成器，用舍选法实现高斯分布抽样，输出为有效的抽样值，总的抽样个数和有效抽样个数。

结果分析：

1. 数据文件在附件中
2. 这里分析抽样效率：可以看到抽样效率接近生面上面的 0.625

100000, 62413



3.