cox@mail.ustc.edu.cn

趣味级数

韦璐 [1,2]

(1. 中国科学技术大学 少年班学院，合肥；2. 中国科学技术大学 物理学院，合肥；

摘要

文章介绍了课本《微积分学导论》中没有涉及到的分析学的内容，包括傅里叶级数的收敛判定还有吉布斯现象等课本上没有涉及到的内容，这里重新做一个综述，还有第二部分是关于理论力学和电动力学中泰勒级数大展身手的地方，可以看出四大力学中有很多微积分留下来的大坑，第三部分我们将看到如何使用 matlab 工具软件生动形象的展现傅里叶级数和泰勒级数的内容，最后一部分我们将结合第三部分将各种级数做一个简要的区分。

《趣味微积分》严格按照标准论文格式书写，如果撰写不符合规范，特别是文章内容不够详实，欢迎通过邮件询问或者指正，这样方便作者修改自己的文章。本文章简要介绍有关傅里叶变换的相关基础知识和拓展延伸，不明之处可以查阅书后的参考资料，程序的源代码在最后，您可以直接下载 matlab 并且自行运行，此外还有图片文件在同一个文件夹当中。

1 引言

这篇论文是专门为了暑期课程基础微积分三而写作，引述了部分经典书籍的相关内容，但主要还是作者自己的理解转述，作者在跟随宣老师学习微积分的过程中发现自己对基础知识的掌握不牢固，并且很多定理没有加以思考并且自行分析证明，而是草草看懂了事，但是这对于今后的学习是远远不够的，所以下定决心要重新学习巩固微积分，这篇文章就是讲述上课相关的内容的。

收稿日期: 2018-08-01；录用日期：2018-08-01；网络出版时间：无

网络出版地址: （无）

基金项目：无

*作者：韦璐

E-mail：cox@mail.ustc.edu.cn

引用格式：（无）

2 暑期课程内容简述

- 实数的构造
  戴德金分割，实数的定义与性质
- 极限判别法则
  确界原理，Cauchy 收敛准则，区间套定理，Bolzano 定理，一致连续性
- 无穷级数的精细判别法
  乘积项级数的收敛性（Dirichlet 和 Abel），函数列和函数项级数的收敛性和一致连续性
- 傅里叶变换和含参变量积分
  傅里叶积分，傅里叶变换及其应用，含参变量常义积分，含参变量广义积分
- 函数的可积性
  达布和，上下积分，可积函数类
- 微分中值定理
  拉格朗日中值定理，罗尔中值定理，柯西中值定理，隐函数存在定理
- 多元函数的极值条件
  自由极值，条件极值，拉格朗日乘子法

- 外微分形式和微积分学的大统一
  微分形式，外微分运算，梯度，旋度，散度，微积分学的大统一

3 傅里叶分析

3.1 傅里叶级数的收敛

3.1.1 黎曼第一基本引理

结论一绝对可积分函数的傅里叶系数 a_{m},b_{m} 当 $m \to \infty$ 时趋近于零。我们要证明黎曼第一基本引理。W.L.O.G. 证明

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

就足够了。首先，不论取任何有限区间，有如下估值

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin(pt)dt\right| = \left|\frac{\cos(p\alpha)-\cos(p\beta)}{p}\right| \le \frac{2}{p} \tag{2}$$

由可求傅里叶的函数的展开的性质，我们一定有函数 $g(t)$ 在相应的区间上是可积的，那么我们分解积分

$$\int_a^b g(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+I}} g(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t$$

用 m_i 表示 $g(t)$ 的值在第 i 个区间的下确界，则可将上面的表达式变换为

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+I}}[g(t)-m_i]\sin(pt)\,\mathrm{d}t\\ +\sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{t_i}^{t_{i+I}}\sin(pt)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

如果 ω_i 是函数 $g(t)$ 在第 i 个区间上的振幅，那我们就有积分估值

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(pt)\,\mathrm{d}t\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta t\,\mathrm{d}t + \frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$$

由函数 $g(t)$ 的可积性，我们知道第一项可以任意小，再通过对 p 的数值的选取，我们可以取到左边的式子的任意小，这就证明了黎曼第一基本引理，由这个引理，我们就能得到推论一。

3.1.2 局部化定理

通过对傅里叶级数合式的变形和化简，再利用傅里叶求和的性质，我们总能得到第 n 个傅里叶级数表示的部分和的公式如下：

$$s_{\mathrm{n}}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{2\sin(\frac{1}{2}t)}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

这个特殊的积分也叫迪利克雷积分，其中积分式的后半部分的分式也叫迪利克雷核。先取任意小的正数 $\delta < \pi$, 将 3中的积分拆成两部分：$\int\limits_0^\pi = \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\pi$，则对于积分的后半部分，由引理可以知道当 $n \to \infty$ 时时趋近于零，因此对于傅里叶级数的部分和 $s_{\mathrm{n}}(x_0)$ 极限的存在和极限的大小都可以由一个积分

$$\rho_{\mathrm{n}}(\delta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})}{2\sin(\frac{1}{2}t)}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

的性质来完全确定。由此我们来证明黎曼定理。

3.1.3 黎曼定理

黎曼定理的内容是：函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在一点 x_0 处的性质只与函数在这点附近所取的值有关，即与在这点的任意小的邻域内所取的值有关。

因此，例如如果取两函数，使其在 x_0 的任意小的邻域内的值相同，则不论这两函数在邻域外怎样不同，在点 x_0 处，与它们相应的傅里叶级数有相同的性质：或者两级数同时收敛并收敛于同一和式；或者两级数同时发散。如果注意到所考虑的两函数的傅里叶系数既然与两函数的一切值有关，因而也就可能完全不同，那么这个结论确实比较惊人。

3.1.4 小结

由上文的几个定理，可以推导得到傅里叶级数点点收敛性的判别法，比如迪尼与利普希茨的傅里叶级数收敛性的判别法:

迪尼判别法，即对于在某点连续或只有第一类间断点的函数 $f(x)$, 如果对于某一 $h > 0$，积分

$$\int_0^h \frac{|\phi(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$$

存在，其中

$$\phi(t) = f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$$

而 S_0 要么是这点的函数值，要么是两边极限的平均值。则函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 收敛于和函数 S_0。

利普希茨判别法：如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，并且对于充分小的 t，不等式

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0)| \leq Lt^{\alpha}$$

成立，其中 L 与 α 都是正的常数且 $\alpha \leq 1$。则 $f(x)$ 的傅里叶级数在点 x_0 处收敛于和函数 $f(x_0)$。

如果我们推导了迪利克雷的第二基本引理，我们还能得到迪利克雷-若尔当判别法，但这些都是点点收敛的判别法。

但是我们说的这些都是点点收敛的，对于一致收敛，有相对应的补充以及推导出来的同名的判别法，具体可以见结尾列出来的参考资料。

3.2 吉布斯现象

所谓吉布斯现象，也就是三角展开式在不连续点上的一个缺点，在不连续点附近，不论 n 有多大，始终不可能和原函数值完全一样，一定会有一个 0.18 的跳跃幅度。

这里我们用一个例子加以说明。我们都知道级数

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

收敛于和式

$$\sigma(x) = \begin{cases} \pi/2 & 0 < x < \pi \\ 0 & x = 0, \pm\pi \\ -\pi/2 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

在点 $x = 0$ 的左右两边，函数有跳跃 $\sigma(+0) - \sigma(0) = \pi/2$，$\sigma(0) - \sigma(-0) = \pi/2$。我们将研究级数部分和

$$\sigma_{\text{2n-1}}(x) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

的性质。因为它是奇函数，所以只要在区间 $[0, \pi]$ 上考虑它就够了。此外，显而易见有 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 关于点 $x = \pi/2$ 对称，所以只研究右半边区间。不难求得 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 的表达式：

$$\sigma_{\text{2n-1}}(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nu)}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u \tag{5}$$

展开这个表达式的 n，我们可以得到

$$\sigma_{\text{2n-1}}(x) = v_0 - v_1 + ... + (-1)^{\text{k-1}}v_{\text{k-1}} + (-1)^{\text{k}}\,v_{\text{k}} \tag{6}$$

由此我们立即得到 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 的性质的一系列结论，如果固定 n，而 x 从 0 变到 $\pi/2$，则：

- 和式 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 为正，且只在 $x = 0$ 处为零；
- 它在点 $x = \frac{m\pi}{2n}$ 处有极值，m 是 1 到 n 的正整数，m 是奇数时有极大值，是偶数时有极小值，
- 当 x 在区间 $[0, \pi/2]$ 上变化时，$\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 的极大值从左向右减小而极小值则增大。

  所有以上的结论，可以在我用 matlab 编出来的程序生成的动图里面看到，可以去查阅关于锯齿波的傅里叶级数重构部分的动图。

现在讨论函数 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 的最大的极大值，

$$M_1^{(n)} = \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{\sin(\frac{t}{2n})}\,\mathrm{d}t$$

而

$$\lim_{n\to+\infty} M_1^{(n)} = \int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mu_1$$

此即

- 函数 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 在值 $x = x_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$ 处达到第一个最大的极大值。

那么每个 k 倍的 x，都有一个 μ_{k}，当 k 是奇数时，这个极大值随角标增大而减小，偶数则此极小值随角标增大而增大。显然 μ_{k} 比起

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \pi/2$$

来，一大一小，差数 $\rho_{\text{k}} = \mu_{\text{k}} - \pi/2$ 有下列各值：

$$\rho_1 \approx 0.281; \rho_2 \approx -0.153; \rho_3 \approx 0.104; \rho_4 \approx -0.073; ... \tag{7}$$

我们已经充分说明了最开始的无穷级数的部分和 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 收敛于 $\sigma(x)$ 这一特性，下面我们选择一个区间来讨论吉布斯特性：$[0, \pi]$.

如果用任意充分小的邻域 $[0, \delta)$ 和 $(\pi - \delta, \pi]$ 划出不连续点 $x = 0$ 和 $x = \pi$，则由目前所证明的结果，级数在余下的区间 $[\delta, \pi - \delta]$ 上一致收敛。换句话说，当 n 充分大时部分和 $\sigma_{\text{2n-1}}(x)$ 可以和原来的函数曲线任意一致地接近，但在跳跃点附近，无法一致逼近，在 y 轴右侧逼近 0 的时候，函数值一直在震动，并且随着 n 增大，这个震动并没有无限减小，反之，这上面最高的一个峰的高度无限趋近于 $\rho_1 \approx 0.281$。这个现象由吉布斯在十九世纪末发现，所以称作吉布斯现象。

4 傅里叶级数在物理中的应用

关于数学在物理中的应用比比皆是，甚至物理中大部分是微分方程加上假设得到的结论，数

学中的方程往往很简单，我们电动力学的一整本书基本就是四个方程加上边界条件（当然还有相对论），但是因为有各种实际情况的假设，问题就变得很复杂。现在我们就来看看数学工具在物理中都变成了什么？

4.1 多极子电场

我们的科技进步有赖于微观粒子的研究，而研究它们中的一部分的手段就是通过它们在远处激发的电场的特性，去反推电荷分布的整体特征参数，比如粒子总电荷，电偶极矩和多极矩。而如果我们知道了电荷分布的主要整体特征参数，就可以直接计算粒子激发的电场，以及在外电场中会受到的作用。要完成这些工作，我们就需要用到泰勒展开这个数学工具。

我们知道，给定电荷密度分布在真空中的电势为

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{8}$$

其中，

$$R = \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

由于 R 的位置矢量 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 的对称性，对任意函数 $f(R)$, 成立：

$$\begin{gathered}\nabla' f(R) = -\nabla f(R), \nabla'\nabla' f(R) = \nabla\nabla f(R)\\ [\nabla' f(R)]_{\mathbf{r}'=0} = -\nabla f(r), [\nabla'\nabla' f(R)]_{\mathbf{r}'=0} = \nabla\nabla f(r)\end{gathered} \tag{10}$$

即便是给定的电荷密度分布，8 的体积分一般得不到解析结果。积分计算的难度在于积分变数包含在分母 R 之中，通常的简化途径是采用远场近似，对 $\frac{1}{R}$ 进行泰勒展开。我们选择的参考点在带点物体内，$\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 分别是场点和源点的位置矢量。我们设场点远离带电体，进行泰勒展开：

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &\approx \frac{1}{r} + \sum_{i=0}^{3} x_i'[\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x_i'}]_{\mathbf{r}'=0} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} x_i' x_j'[\frac{\partial^2(\frac{1}{R})}{\partial x_i'\partial x_j'}]_{\mathbf{r}'=0}\\ &= \frac{1}{r} + \mathbf{r}'\cdot(\nabla'\frac{1}{R})_{\mathbf{r}'=0} + \frac{1}{2}\mathbf{r}'\mathbf{r}' : [\nabla'\nabla'\frac{1}{R}]_{\mathbf{r}'=0}\end{aligned} \tag{11}$$

经过化简，我们可以将上式改写成如下简洁的形式：

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^3}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r : (3\mathbf{r}'\mathbf{r}' - r'^2\vec{I}) \tag{12}$$

将上式代入 8 中，可以得到：

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Q}{R} + \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r}{r^2} + \frac{1}{2r^3}\vec{D}' : \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r) \tag{13}$$

上述公式的第一项，是我们非常熟悉的点电荷的电势表达式，第二项是电偶极子的电势，第三项是电四极子的电势，这几个量有什么物理意义呢，我们都知道泰勒展开式展开的越多，就越能精确的表示出些许小的微扰会对函数值产生什么样的影响，所以这里的三个电势一个比一个对于电荷密度的变化量敏感，也一个比一个数值小，也可以反应出更微小的电荷分布对外场的反应，通过合理推导近似，我们同样可以得到电偶极子和电四极矩在外场中所受到的力以及力矩。

4.2 电多极辐射

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}')e^{ikR}}{R}\,\mathrm{d}V' \tag{14}$$

通过假设源点的径向距离，场点的径向距离还有场源和波长的尺度，我们可以做不同的近似然后对上述公式中的矢量势逐步做展开近似，得到静磁场矢势公式的泰勒展开式，并得到电偶极辐射场，磁偶极辐射场以及电四极辐射场的电磁势。

有了这些电磁势以后，我们就可以得到相对应的电偶极辐射的磁场，电场和平均能流密度，得到我们想要得到的量。由于过程过于冗杂专业，感兴趣请翻阅电动力学书籍。

4.3 多自由度体系的小振动

振动是非常重要的研究对象。广义的振动是指系统的状态参量 (位移，电压，波函数) 发生稳态左右的改变，狭义的是机械振动。其实我们上面的偶极矩和电四极矩也是振动，只不过不是随时间振动，而是随空间振动。

因为这里我们只是想看看泰勒展开的物理意义，所以我们只研究自由振动，而且为了简单，我们只研究自由度为二的保守体系的自由振动：

设体系的广义坐标为 q_1 和 q_2，则体系的运动方程为：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = 0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0\end{cases} \tag{15}$$

自由振动体系当然受定常约束，动能是广义速度的二次齐次式，即

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} M_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta = \frac{1}{2}(M_{11}\dot{q}_1^2 + M_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + M_{22}\dot{q}_2^2) \tag{16}$$

其中，M 一般是广义坐标的函数并且关于两个下标对称（有二般）。而势能与广义速度无关，仅为

广义坐标的函数。不妨取平衡位置为 q_1 和 q_2 的零点，将势能函数在平衡位置做泰勒展开：

$$\begin{aligned} V(q_1,q_2) = V(0,0) + \sum_{\alpha=1}^{2}(\frac{\partial V}{\partial q_i})_0 q_i + \\ \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta})_0 q_\alpha q_\beta + ... \end{aligned} \tag{17}$$

由于势能零点可以任取，这里我们取 $V(0,0)=0$；又由于在平衡位置 $(\frac{\partial V}{\partial q_i})_0=0$，精确到二阶小量，我们有

$$\begin{aligned} V(q_1,q_2) \approx \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha \partial q_\beta})_0 q_\alpha q_\beta = \\ \frac{1}{2}(k_{11}{q_1}^2 + 2k_{12}q_1q_2 + k_{22}{q_2}^2) \end{aligned} \tag{18}$$

保守体系在平衡位置附近做微小振动，不仅广义坐标是小量，广义速度也是小量（这个可以证明，不过我们不管）。根据能量守恒式子 T+V=常量，可以判断二者同为二阶小量。我们对这里的式子做近似以后，就可以得到微分方程组来求解广义坐标，进而求解我们想要的物理量。

我们可以看到，在这里，泰勒展开式并非主要角色，但是它是关键的一步，也就是提取出对势能有主要影响的部分，而且势能展开式的第一部分就是该点的势能，第二部分的系数就是虚拟力的定义，第三项的系数在平衡位置不受力也就是第二项为零的时候可以用来判断平衡的稳定性。可以看出此处泰勒展开式的每一项都很精妙，甚至更高次数的项也可以用来判断稳定性。

5 matlab 与级数的趣味教学

我们知道 matlab 是一款十分常用的科学工作软件，但是并不是说我们还不到使用的时间，事实上 matlab 有非常好的功能，有非常完善的函数供很多人使用，尤其是任何二维的图像都能变成三维的进行旋转，这是非常好用的，而且我们可以自己变成设计自己想要的 GUI 画面并实现相应的功能。

在这里我们可以用 matlab 对函数进行级数重构。原则上可以通过 matlab 将课本上所有级数重构的例子全部画出来，但这样很冗杂，而且傅里叶级数的展开式表达式一般比泰勒级数等要麻烦，所以我将所有傅里叶级数的例子都做了出来。具体的源代码和图片请见同一个文件夹。

6 结 论

我们已经学过傅里叶级数，泰勒级数和幂级数，也知道这三种级数都可以重构一个新的函数，在学习复变函数的时候，我们还会学习洛朗级数，我们发现每个级数的知识点一定都有一个叫做基函数的规范正交性，也就是无论是哪种级数展开，都是用规范正交的函数系作为基，而绝对可积的函数构成空间中的向量，做级数展开的时候也就是做向量投影，重构的时候就用分量乘以相应的基向量即可。类似的表述我们还将在数理方程的课本中看到。而线性代数告诉我们，这种基可以有无穷多种，所以最好拓宽思路。

最后有一个很容易弄混的地方，就是幂级数和泰勒级数的区别。因为其他的级数展开的基函数区别比较明显，而这两种容易弄混，这里一并总结。函数的泰勒展开一定是幂级数这个正确，反过来函数的幂级数一定是泰勒展开不一定对；计算函数的幂级数时，都使用了公比 |q| 小于 1，导致收敛域比定义域小很多；在 |q| 大于 1 时，函数的泰勒展开式依然存在，但这个泰勒展开并不是函数的幂级数。更直接说，函数的幂级数是对函数的泰勒级数简化处理。对于收敛半径是无穷大的函数，函数的幂级数与函数的泰勒级数是一样的。

6.1 参考资料

1.《微积分学导论》中国科学技术大学出版社中国科学技术大学数学科学学院编著

2.《数学分析》高等教育出版社 B.A. 卓里奇著

3.《数学分析教程》中国科学技术大学出版社常哲庚史济怀著

4.《微积分学教程》高等教育出版社菲赫金哥尔茨著

5.《电磁学于电动力学》科学出版社胡友秋程福臻叶邦角刘之景编著

6. Introduction to Electrodynamics David J Griffiths

7.《力学与理论力学》科学出版社秦敢向守平编著

8.《力学》高等教育出版社朗道著

9. 百度