量子信息导论期末重点总结

姓　　名：Z. A. J.

日　　期：2021 年 3 月 5 日

1　纠缠部分

—————————纯态纠缠判定—————————

- 定义：不能写成乘积形式 $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ 的量子态称为纠缠态。
- Schmidt 分解：将两体态化为 $|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle_A |\phi_i\rangle_B$ 的形式。不为零的 λ_i 的个数称为 Schmidt rank，如果 Schmidt rank 大于 1，那这个态就是纠缠的。

  【操作步骤】求出 A,B 分别的约化密度矩阵，ρ_A 和 ρ_B。这两个密度矩阵具有相同的本征值 $p_1, \cdots, p_n$，再求出各个本征值所对应的本征态，比如对 A 来说，p_i 对应的本征态为 $|\psi_i\rangle_A$，而对 B 来说 p_i 对应的本征态为 $|\phi_i\rangle_B$，这时候取 $\lambda_i = \sqrt{p_i}$ 就可以得到 Schmidt 分解 $|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle_A |\phi_i\rangle_B$。
- 求约化密度矩阵的 von Neumann 熵，如果熵大于零，则这个纯态是纠缠态。（只对纯态成立！）

—————————混态纠缠判定—————————

- 定义：可分态 $\rho = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i$，不能写成可分态的态是纠缠态。

  【注】约定将密度矩阵写为

  $$\rho = \sum_{ij;kl} \rho_{ij;kl} |i\rangle|j\rangle\langle k|\langle l| = \sum_{ij;kl} \rho_{ij;kl} |i\rangle\langle k| \otimes |j\rangle\langle l|. \tag{1}$$

  尤其注意他的指标所指代的意义。
- PPT 判据：如果一个密度矩阵 ρ 的部分转置 ρ^{T_A} 的本征值有负值则这个密度矩阵为纠缠态。

  计算部分转置的时候推荐直接算矩阵元 $(\rho^{T_A})_{ij;kl} = \rho_{kj;il}$ 和 $(\rho^{T_B})_{ij;kl} = \rho_{il;kj}$

  【注】一般会判定两个 qubit 的纠缠，如果是求 A 的部分转置，在写两 qubit 密度矩阵时，尽量约定基底顺序为：$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$。部分转置的操作会变成分块变换的形式

  $$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \Rightarrow \rho^{T_A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \hline \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \tag{2}$$

如果是求 B 部分的部分转置，则将基底选为：$|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |11\rangle$。部分转置的操作会变成分块变换的形式

$$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \Rightarrow \rho^{T_B} = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \hline \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \tag{3}$$

- Realignment 判据：密度矩阵的针对行的 realignment 定义为 $\tilde{\rho}$，其矩阵元为 $(\tilde{\rho})_{ij;kl} = \rho_{ik;jl}$。用矩阵的形式来写就是先把 2×2 的块横向拉直，一行一行做，最后摆在一起：

$$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \longrightarrow \tilde{\rho} = \left(\begin{array}{cccc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{21} & \rho_{22} \\ \hline \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \hline \rho_{33} & \rho_{34} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \tag{4}$$

在你们老师的 note 里面采用的是另一种方式，他这里是针对列的 realignment，也就是逐列拉直

$$\rho = \left(\begin{array}{cc|cc} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{array}\right) \longrightarrow \tilde{\rho} = \left(\begin{array}{cccc} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ \hline \rho_{31} & \rho_{41} & \rho_{32} & \rho_{42} \\ \hline \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{14} & \rho_{24} \\ \hline \rho_{33} & \rho_{43} & \rho_{34} & \rho_{44} \end{array}\right) \tag{5}$$

不论采取的哪种 realignment，我们都有，如果 ρ 是纠缠的，那么 $\tilde{\rho}$ 的奇异值之和大于 1。奇异值就是 $\tilde{\rho}\tilde{\rho}^\dagger$ 的本征值的平方根。

- 纠缠目击者判据：对于一个纠缠目击者 W，如果量子态满足 $\mathrm{Tr}(W\rho) < 0$，那么这个态是纠缠的。

【纠缠目击者定义】一个算子 W 是一个纠缠目击者需要满足：

(1) 对于所有乘积态 $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$，我们有 $\langle\psi|\langle\phi|W|\psi\rangle|\phi\rangle \geq 0$。这等价于对于所有的可分态 $\mathrm{Tr}(W\rho) \geq 0$。

(2) W 至少有一个负的本征值。

---------纠缠度量---------

A good entanglement measure $E(\cdot)$ should satisfy that, 1 For any separable state ρ, there is no entanglement, thus we must have $E(\rho)=0$;

2 Monotonicity under local operation and classical communication (LOCC) operation: no increase under LOCC operations, namely $E\left(\Lambda_{LOCC}(\rho)\right) \leq E(\rho)$;

3 Continuity: mathematically, E is continuous, i.e. $E(\rho)-E(\sigma) \to 0$, when $\|\rho-\sigma\| \to 0$;

4 Convexity: mathematically, E is conves function, i.e. $E(\lambda\rho+(1-\lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho)+(1-\lambda)E(\sigma)$;

5 Normalization, i.e. $E\left(P_{+}^{d}\right)=\log d$.

一般来说，有可能考的有下面几种度量

- Concurrence（纠缠并发度）：对密度矩阵 ρ，计算 $\tilde{\rho}=(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^*(\sigma_y\otimes\sigma_y)$，接着计算 $\rho\tilde{\rho}$ 的本征值的平方跟，并按照从大到小的顺序排列，$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_4$，那么 concurrence 被定义为

$$C(\rho)=\max\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\}. \tag{6}$$

- Entanglement of formation (形成纠缠)：

$$E_F(\rho):=\inf\left\{\sum_i p_i E_F\left(\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|\right):\rho=\sum_i p_i\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|\right\} \tag{7}$$

其中极小值是针对所有可能的系综分解来取的，并且对纯态来说

$$E_F(|\psi\rangle\langle\psi|)=S\left(\mathrm{Tr}_B\{|\psi\rangle\langle\psi|\}\right) \tag{8}$$

它的计算一般是利用它和 concurence 之间的关系来算的

$$E_F(\rho)=H(\frac{1+\sqrt{1-\mathcal{C}^2(\rho)}}{2}), \tag{9}$$

这里 $H(x)=-x\log x-(1-x)\log x$。

- Negativity （纠缠负性）：

$$N(\rho)=\frac{\|\rho^{T_A}\|_1-1}{2} \tag{10}$$

这里 $\|\rho^{T_A}\|_1$ 是 1-norm, 也即是 ρ 的奇异值的和（$\rho^{T_A}(\rho^{T_A})^\dagger$ 的本征值的平方根的和)。

---------纠缠应用的量子信息 protocol---------

- Teleportation

- Superdense coding
- Entanglement swap
- Entanglement purification protocol

这些方案比较长，就不重复了，在作业里面我详细写了。

2 Bell 不等式相关

3 纠错码

4 量子计算部分