Расчётно-графическая работа №2 по теме: «Предел и непрерывность функции»

Вариант №6

Титульный лист

Название дисциплины: Математический анализ
Учебный год: 2023/24 уч. Год
Тема доклада: Расчётно-графическая работа по теме «Предел и непрерывность функции»
Номер варианта: 6
Участники команды:

- Роман Бурейко, P3115, 412902
- Кочканов Мухаммадзиё, P3130, 414225
- Баукин Максим, P3132, 408230
- Зорин Георгий, P3130, 408665
- Ике Холи Дестини, P3130, 374215

Номер практического потока: 10.3
Дата доклада: 06.12.2023
Место проведения: Санкт-Петербург, Кронверкский пр. 49, Университет ИТМО

Задание 1. Предел последовательности

Задание:

Задание 1. Предел последовательности

Докажите следующие утверждения для пределов последовательностей:

а) при помощи частичных пределов;

б) при помощи критерия Коши (отрицания к нему).

а) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$

Б) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (\sin^2 n - \cos^2 n)$

Задание 1. Предел последовательности

а) Рассмотрим 2 подпоследовательности:

1. $X_n = 6k, k \to \infty$
2. $X_n = 0.5 + 6k, k \to \infty$

Предел первой подпоследовательности равен:

$$\lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi k}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Предел второй подпоследовательности равен:

$$\lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{(0.5+6k)\pi}{3}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2(0.5+6k)\pi}{2*3}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi+12\pi k}{6}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi k}{6}\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{2\pi}{6}+2\pi k\right) = \lim_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Частичные подпоследовательности имеют разные пределы, а значит и исходная последовательность не имеет предела.

Задание 1. Предел последовательности

Б) $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n - \cos^2 n)$

Заметим, что: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n - \cos^2 n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n - (1 - \sin^2 n)) = \lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n - 1 + \sin^2 n)) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(2\sin^2 n - 1) = -\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 2\sin^2 n) = -\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 2\sin^2 n) = -\lim\limits_{n\to\infty}(\cos(2n))$

Пусть 2n = t, t -> ∞, тогда:

$$-\lim_{n\to\infty}(\cos(2n)) = \lim_{t\to\infty}(\cos(t)) = \lim_{t\to\infty}(-\cos(t))$$

Докажем, что последовательность $X_n = -\cos(t)$ не имеет предела.

Предположим противное, пусть $\lim\limits_{t\to\infty}(-\cos(t)) = A$. Так как

$|-\cos(t+2) - (-\cos(t))| = 2|\sin 1 * \sin(t+1)| = \lim\limits_{t\to\infty}(-\cos(t) + 2) = A$

Задание 1. Предел последовательности

По лемме о пределы подпоследовательности, а также как $\sin 1 \neq 0$, то, переходя к пределу в полученном равенстве, получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty}(\sin(t+1))=0$.

Значит, аналогично, $\lim\limits_{t\to\infty}(\sin(t))=\lim\limits_{t\to\infty}(\sin(t+2))=0$.

Так как $|\sin(t+2) - \sin(t)| = 2|\sin 1 \cdot \cos(t+1)|$, то, аналогично, $\lim\limits_{t\to\infty}(\cos(t+1))=0$,

Тогда A=0, что невозможно, ведь $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Задание 2. Исследование сходимости функции

Задание:

Дана функция f(x). Исследуйте её поведение при x → ±∞.

План:

1) Вычислите пределы функции $A_+ \in \overline{R}$ при x → +∞ иA_-- $\in \overline{R}$ при x → −∞.

2) Постройте график функции в зависимости от x.

3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) функции на бесконечностях для A_+ и A_- :

- a. сформулируйте определение конечного предела и бесконечных пределов (±∞) функции через ε − δ в терминах неравенств;
- b. выберите три различных положительных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$;
- c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность («ε-трубу») пределов A_+ и A_-;
- d. для A_+ и A_- по отдельности и каждого выбранного ε найдите на графике наибольшую δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции f(x) попадают в ε-окрестность, или установите, что такой окрестности нет.

Задание 2. Исследование сходимости функции

A_+ :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x} \times \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{2} ;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{4}{x}+3)}{x(\frac{5}{x}+1)} = \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x} \times \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{2} = \lim_{x\to+\infty}(3)^{7x} \times \lim_{x\to+\infty}(3)^{2} = 3^{\infty} \times 3^{2} = +\infty = A_+$$

Задание 2. Исследование сходимости функции

A_ :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x+2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x} \times \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{2};$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{4}{x}+3)}{x(\frac{5}{x}+1)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{7x} \times \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+3x}{5+x}\right)^{2} = \lim_{x\to-\infty}(3)^{7x} \times \lim_{x\to-\infty}(3)^{2} = 3^{-\infty} \times 3^{2} = 0 = A_{-}$$

Задание 2. Исследование сходимости функции

Задание 2. Исследование сходимости функции

Сформулируем определения конечных и бесконечных пределов через $\varepsilon - \delta$ в терминах неравенств:

$f: E \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная для E.

$A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$f: E \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная для E.

Элемент $+\infty$ называется пределом функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon};$$

$f: E \to \mathbb{R}, x_0$ – предельная для E.

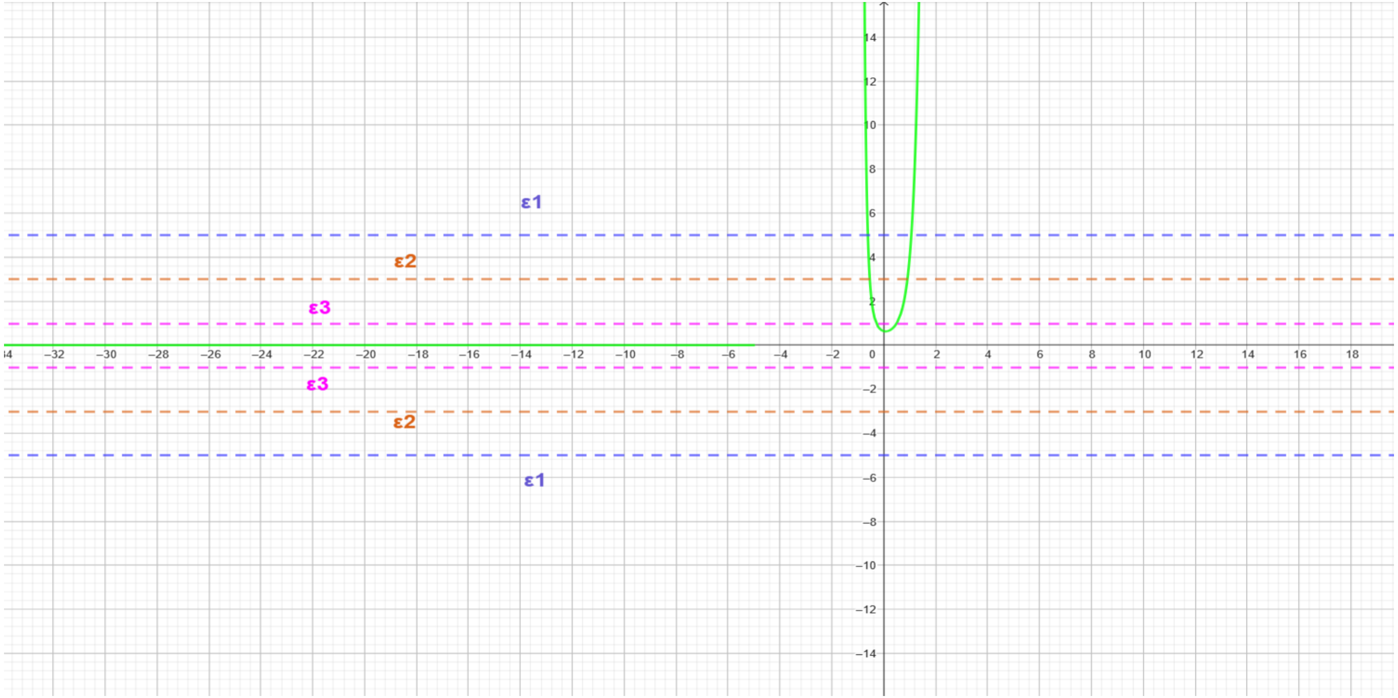
Элемент $-\infty$ называется пределом функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x \in E\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon};$$

Задание 2. Исследование сходимости функции

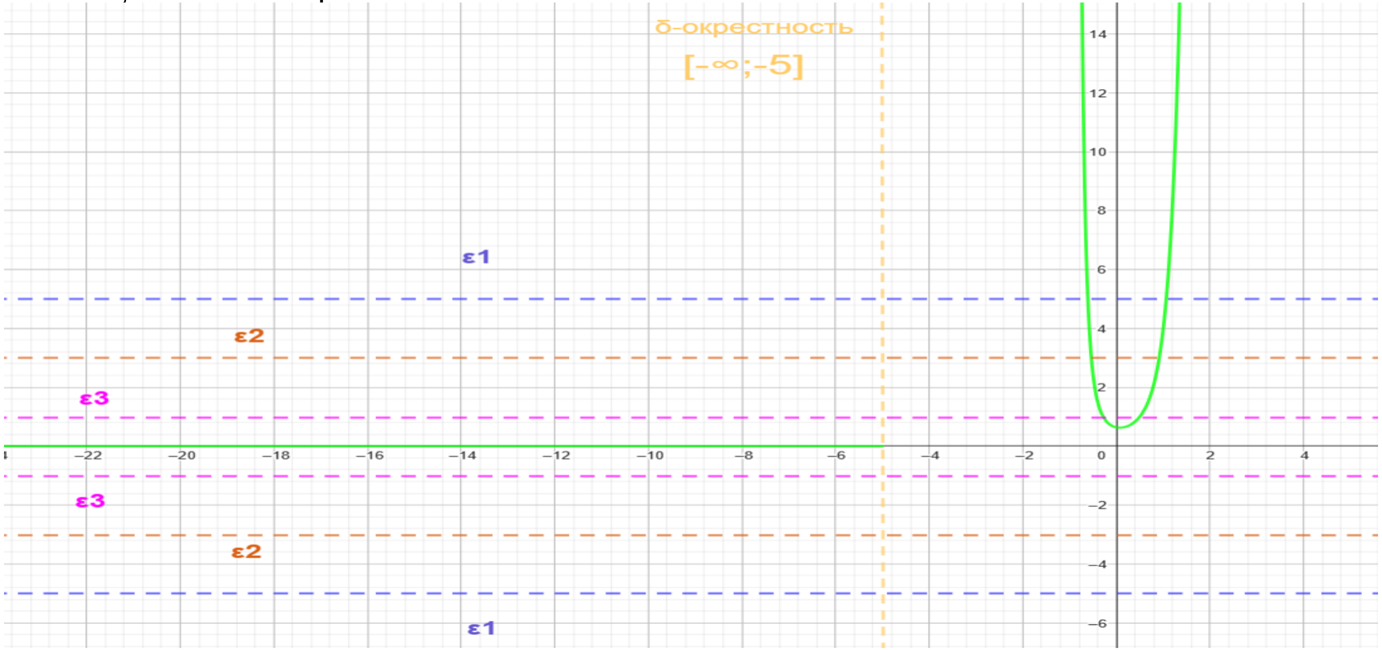
Выберем любые 3 числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$: $5 > 3 > 1$

Для каждого числа (5, 3, 1) изобразим ε-окрестность и изобразим их на графике:



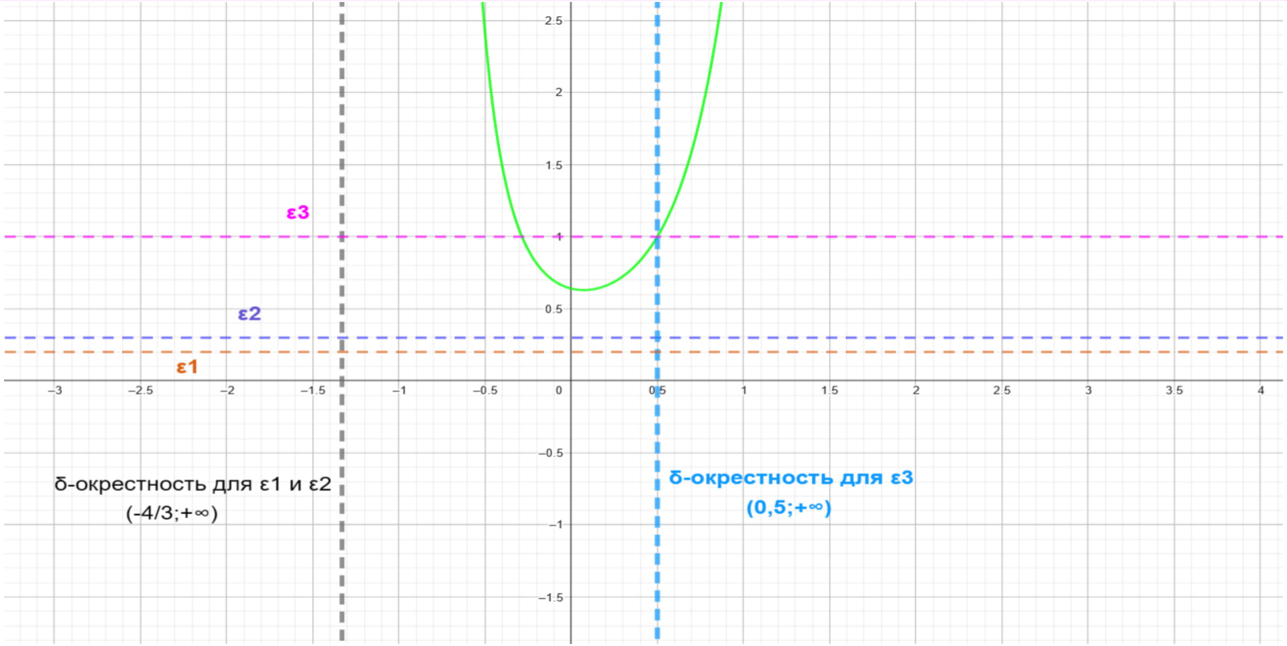
Задание 2. Исследование сходимости функции

Для A_+ и A_- по отдельности из каждого выбранного ε находим на графике наибольшую δ-окрестность переменных x, в которой все значения функции f(x) попадают в ε-окрестность, или устанавливаем, что такой окрестности нет.



ε-окрестности и δ-окрестность для A_-

Задание 2. Исследование сходимости функции



ε-окрестности и δ-окрестности для A_+

Так как $A_+ = +\infty$, окрестности имеют нестандартный вид согласно определению бесконечных пределов.

Задание 3. Приближённые вычисления

Задание:

Докажите эквивалентность функций, затем обоснуйте соответствующее приближённое равенство, и с его помощью вычислите приближённо число:

План:

1) Докажите эквивалентность функций.

2)Докажите соответствующее приближённое равенство.

3)С помощью приближённого равенства вычислите число.

Проиллюстрируйте ответ графически (постройте графики функций, равных приближённо, отметьте точное и приближённое значения).

4) Проиллюстрируйте ответ графически (постройте графики функций, равных приближённо, отметьте точное и приближённое значения).

Задание 3.Приближённые вычисления

1)

$$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{1+0}-1 \sim \frac{0}{2}$$

$$1-1 \sim 0$$

$$0 \sim 0$$

при $x \to 0$

2)

$$\sqrt{a^2+x} \sim a+\frac{x}{2a}$$

$$\sqrt{a^2+0} \sim a+\frac{0}{2a}$$

$$a^2+0 \to a^2;\ a+\frac{0}{2a} \to a$$

$$\sqrt{a^2} \sim a$$

$$|a| \sim a$$

Т.к $a > 0$

$$a \sim a$$

Задание 3. Приближённые вычисления

Пусть a = 4, тогда:

$$\sqrt{4^2 + x} \sim 4 + \frac{x}{8}$$

Помним,что $x \to 0$, поэтому:

$$\sqrt{4^2 + 0} \sim 4 + \frac{0}{8}$$

$$4 \sim 4$$

3)

$$\sqrt{912} = \sqrt{30^2 + 12} \sim 30 + \frac{12}{60}$$

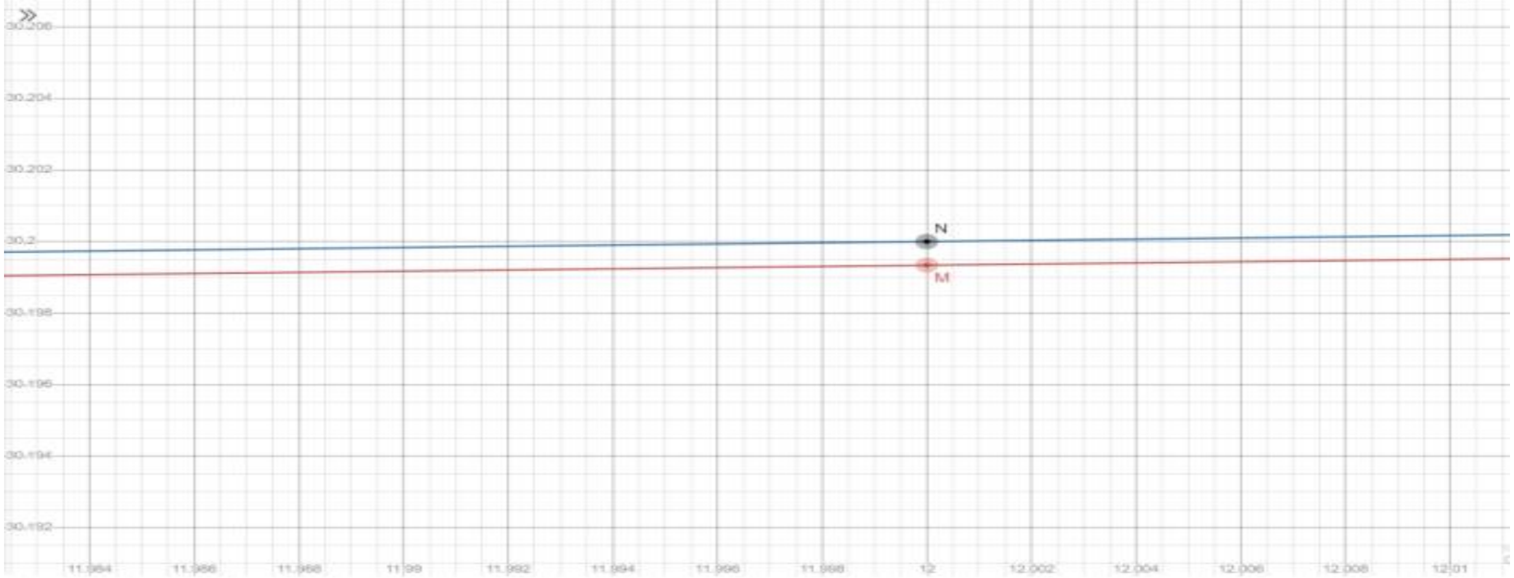
$$\sqrt{912} \approx 30{,}199338;$$

$$30 + \frac{12}{60} = 30{,}2$$

$$\sqrt{912} \sim 30 + \frac{12}{60}$$

Задание 3. Приближённые вычисления

4. Графики функций, равных приближённо:



Точкой M обозначено точное значение.
Точкой N обозначено примерное значение.

Задание 4. Бесконечно малые функции

Задание:

Найдите значение параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, при которых функции f(x) и g(x) являются бесконечно малыми при $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) = (x+4)e^{1/x} - ax - \beta, x \to -0 \qquad g(x) = \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta}, x \to +0$$

План:

1) Исследуйте графически поведение функции при $x \to x_0$ при различных значениях параметров α и β. Продемонстрируйте графики в окрестности x_0 для нескольких, на ваш взгляд, характерных случаев.
2) Найдите аналитически значения параметров α и β, при которых функции f(x) и g(x) будут являются бесконечно малыми при $x \to x_0$.
3) Продемонстрируйте полученные значения параметров на графике.

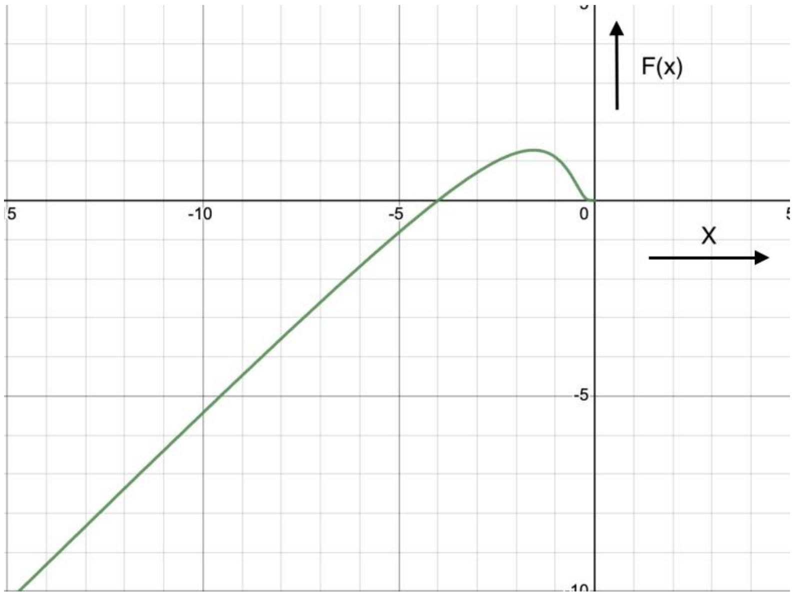
Задание 4. Бесконечно малые функции

Рассмотрим функцию f(x):

$$f(x) = (x+4)e^{1/x} - ax - \beta, x \to -0$$

Случай при $a = \beta = 0$

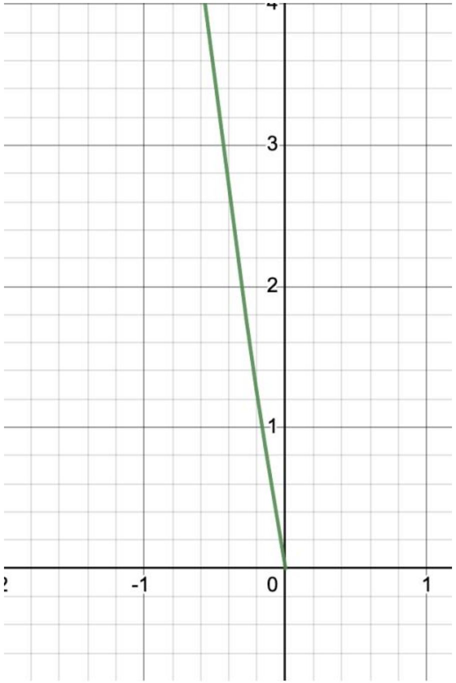
С изменением β график лишь будет подниматься и опускаться по оси (y), поэтому параметр a является для нас особо интересным.



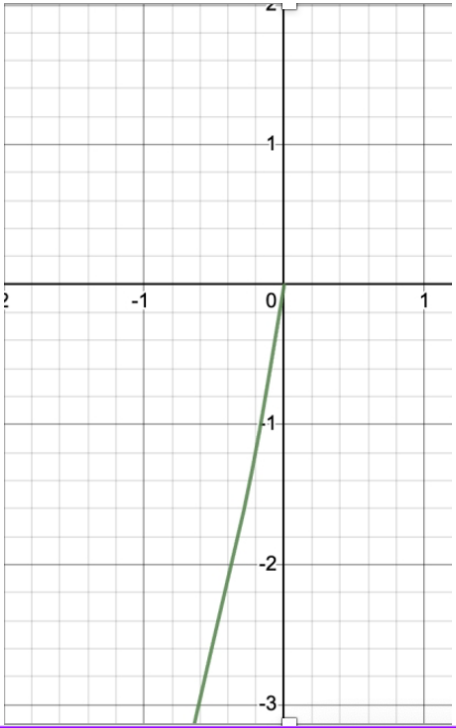
Задание 4. Бесконечно малые функции

Чем больше $|a|$, тем больше выпрямляется график:

$a = 6;$



$a = -6;$



Задание 4. Бесконечно малые функции

При $\beta = 0$ функция всегда будет сходиться к 0. Докажем это, пользуясь леммой арифметических свойствах Б.М.Ф.

По определению, функция $f(x)$ называется бесконечно малой, если при $x \to x_0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Тогда $\lim\limits_{x \to -0}((x+4)e^{\frac{1}{x}} - ax - \beta) = 0$

$$\lim_{x \to -0}((x+4)e^{\frac{1}{x}}) - \lim_{x \to -0}(ax) - \lim_{x \to -0}(\beta) = 0$$

$$\lim_{x \to -0}(x+4) \times \lim_{x \to -0} e^{\frac{1}{x}} - a \times \lim_{x \to -0}(x) - \beta = 0$$

$$\lim_{x \to -0}(4) \times 0 - a \times 0 - \beta = 0$$

$$-\beta = 0$$

Ответ: $f(x)$ - Б.М.Ф. при $a \in \mathbb{R}$ и $\beta = 0$

Задание 4. Бесконечно малые функции

Рассмотрим функцию $g(x)$:

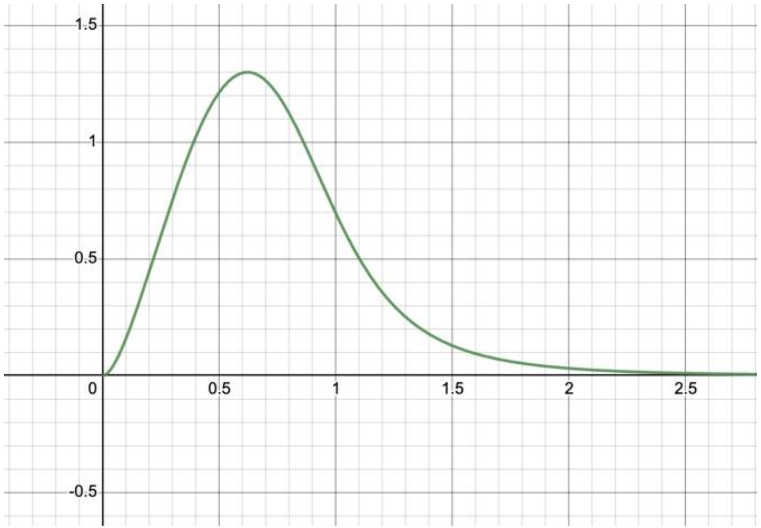
$$g(x) = \frac{\ln(1+x^{a})}{x^{\beta}}, x \to +0$$

Исследуя функцию $g(x)$ при разных значениях a и β мы пришли к выводу, что есть 2 случая, когда $g(x)$ - бесконечно малая (т.е. сходится к +0)

Задание 4. Бесконечно малые функции

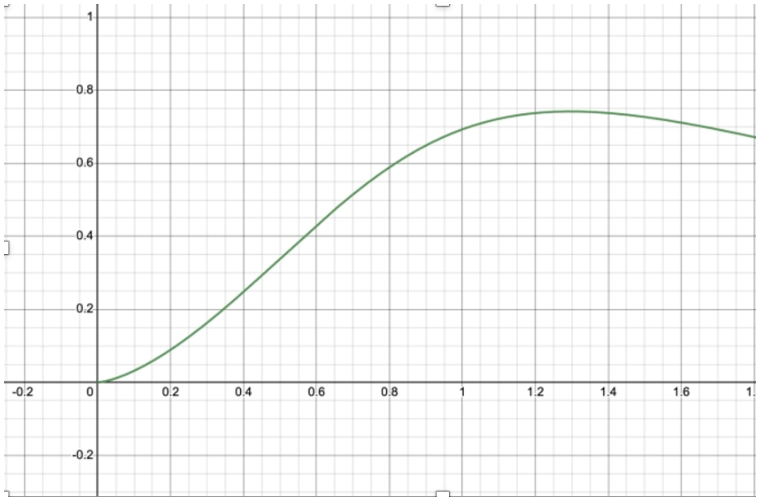
При $\beta < 0$ и любом a

(в этом примере $a = -7$ и $\beta = -2$)



При $\beta \geq 0$ и $a > \beta$

(в этом примере $a = 3.5$ и $\beta = 2$)



Задание 4. Бесконечно малые функции

Докажем аналитически:

Рассмотрим два случая: $\beta < 0$ и $\beta > 0$

1) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln(1+x^a)}{\infty} = 0$

Т. е. при $\beta < 0$ и любом $a, g(x) -$ Б. М. Ф.

2) $\lim\limits_{x\to+0} \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to+0} \frac{(\ln(1+x^a))'}{(x^\beta)'} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Устраним неопределенность по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} = \lim_{x\to+0} \frac{(\ln(1+x^a))'}{(x^\beta)'} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{ax^{a-1}}{1+x^a}}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to+0} \frac{ax^{a-1}}{(1+x^a)(\beta x^{\beta-1})} =$$

$$= \frac{a}{\beta} \lim_{x\to+0} \frac{x^{a-\beta}}{(1+x^a)} = \begin{cases} \frac{a}{\beta} \lim\limits_{x\to+0} \frac{1}{0} = +\infty, a \le \beta \\ \frac{a}{\beta} \lim\limits_{x\to+0} \frac{0}{1} = 0, a > \beta \end{cases}$$

Т. е. при $\beta \ge 0$ и $a > \beta, g(x) -$ Б. М. Ф.

Задание 4. Бесконечно малые функции

Рассмотрев все случаи a и β, мы доказали, что наше предположение верно.

Ответ: $\mathrm{g}(x)$ - Б.М.Ф. в 2 случаях:

1) $\beta < 0$ и $a \in \mathbb{R}$

2) $\beta \geq 0$ и $a > \beta$

Задание 5. Сравнение бесконечно малых

ИТМО

Задание:

Задание 5. Сравнение бесконечно малых

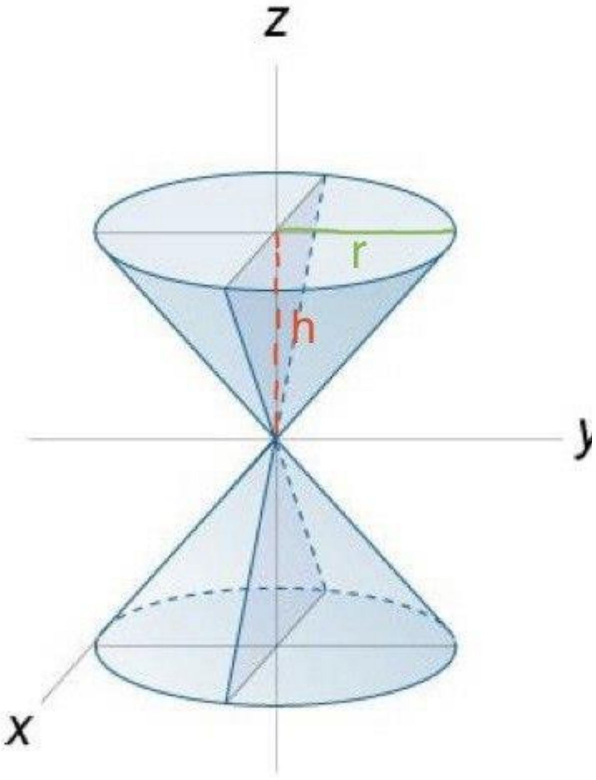
Какой порядок будет иметь приращение объема конуса по отношению к бесконечно малому приращению радиуса его основания?

План:

1) Сделайте геометрическую иллюстрацию к задаче.
2) Составьте математическую модель: введите обозначения, составьте формулу.
3) Решите задачу аналитически.
4) Запишите ответ и проиллюстрируйте его геометрически.

Задание 5. Сравнение бесконечно малых

1)



пр

2) Математическая модель:

r – радиус основания

h – высота

V = $\frac{1}{3}\pi r h$ - объем конуса

Δr - бесконечно малое приращения радиуса

ΔV - приращение объема конуса

Если мы добавим бесконечно малое

радиусу, то новый объем будет:

V’ = $\frac{1}{3}\pi (r + \Delta r)^2 h$

Задание 5. Сравнение бесконечно малых

3) Аналитическое решение

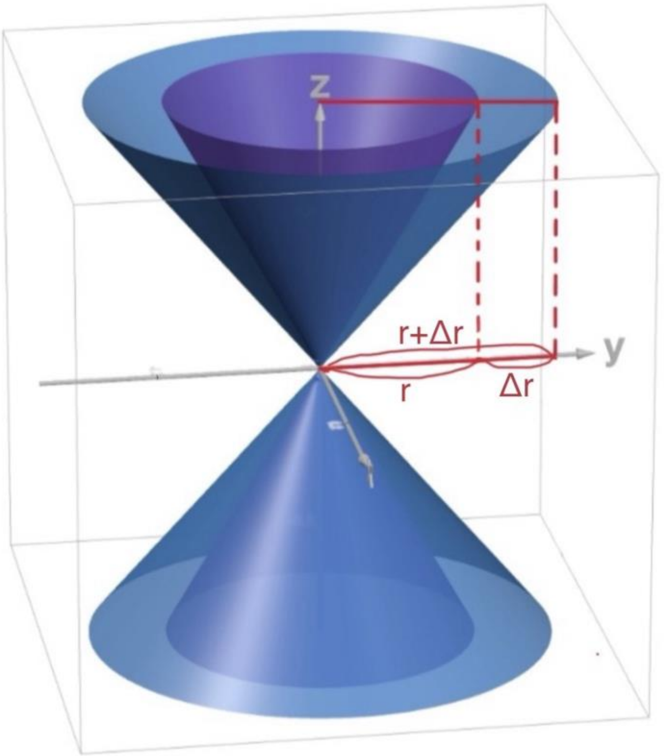
Приращение объема конуса будет равно:

$$\Delta V = \frac{\pi\,(r+\Delta r)^2 h}{3} - \frac{\pi\, r^2 h}{3} = \frac{\pi h(2r\Delta r + \Delta r^2)}{3} = \frac{2\pi h r \Delta r}{3} + \frac{\pi h\, \Delta r^2}{3}$$

Приращение объема конуса будет пропорционально квадрату приращения радиуса, так как там будет квадратичная зависимость. Таким образом, порядок приращения объема конуса по отношению к бесконечно малому приращению радиуса его основания будет вторым.

Задание 5. Сравнение бесконечно малых

4)



Ответ: порядок приращения объема конуса по отношению к бесконечно малом приращению радиуса его основания будет вторым.

Оценочный лист

Роман Бурейко Олегович – 20%

Кочканов Мухаммадзиё Валижонович – 20%

Баукин Максим Александрович – 20%

Зорин Георгий Юрьевич – 20%

Ике Холи Дестини – 20%

Спасибо за внимание!

Выполнили студенты ИТМО:
Роман Бурейко Олегович
Кочканов Мухаммадзиё Валижонович
Баукин Максим Александрович
Зорин Георгий Юрьевич
Ике Холи Дестини
Поток 10.3

06.12.2023 г.