Расчётно-графической работа №1 по теме: «Последовательность и её предел»

Вариант №6

Титульный лист

Название дисциплины: Математический анализ
Учебный год: 2023/24 уч. Год
Тема доклада: Расчётно-графической работы по теме «Последовательность и её предел»
Номер варианта: 6
Участники команды:

- Роман Бурейко, P3115, s412902
- Кочканов Мухаммадзиё, P3130, s414225
- Баукин Максим, P3132, s408230
- Зорин Георгий, P3130, s408665
- Ике Холи Дестини, P3130, s374215

Номер практического потока: 10.3
Дата доклада: 13.10.2023
Место проведения: Санкт-Петербург, Кронверкский пр. 49, Университет ИТМО

Задание 1. Метод математической индукции

Задание:

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ∈ N:

$$1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \ \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

План:

1) Проверить верность утверждения при n=1.

2) Допустить, что утверждение верно при n=k.

3) Доказать, что утверждение верно при n=k+1(шаг индукции).

4) Сделать вывод.

Задание 1. Метод математической индукции

1) Проверяем верность утверждения при n=1:

$$1 * (1 + 1) = \frac{1*(1+1)*(1+2)}{3};$$

$$1 * 2 = \frac{1*2*3}{3};$$

$$2 = 2.$$

2) Допустим, что утверждение верно при n=k, тогда:

$$1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 \ \dots + \mathrm{k}(\mathrm{k} + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

3) Докажем, что при n=k+1 утверждение верно:

$$1 * 2 + 2 * 3 + 3 * 4 + \ \dots + k(k + 1) + (k + 1) * ((k + 1) + 1) = \frac{(k+1)*\big((k+1)+1\big)*((k+1)+2)}{3};$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1) * (k + 2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3};$$

Задание 1. Метод математической индукции

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3} + k^2 + k + 2k + 2 = \frac{k^3+k^2+2k^2+2k+3k^2+3k+6k+6}{3};$$

$$k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + 3k^2 + 3k + 6k + 6 = k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + 3k^2 + 3k + 6k + 6;$$

$k^3 + 6k^2 + 11k + 6 = k^3 + 6k^2 + 11k + 6$. Что и требовалось доказать.

4) Вывод: метод математической индукции позволяет быстро доказывать истинность некоторого утверждения для множества всех натуральных чисел. Доказательство проходит в 3 этапа:

1. Доказательство, что утверждение верно для n=1.

2. Принятие за достоверное, что утверждение верно для n=k.

3. Доказательство, что утверждение верно для n=k+1.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

Задание:

Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ где $x_1 \in$ R. Исследуйте её предел при $n \to \infty$ в зависимости от значения x_1.

План:

1) Предположите, что предел существует, и найдите его. Доказательство существования предела будет проведено в п. 6).

2) Какими могут быть значения x_1? Укажите множество возможных значений x_1. Докажите ваш ответ аналитически.

3) При каком значении x_1 последовательность является стационарной? Докажите это аналитически.

4) Выделите характерные случаи для значений x_1 (с точки зрения монотонности) и проиллюстрируйте их графиками последовательности.

5) Докажите аналитически ограниченность и монотонность последовательности для каждого характерного случая. Сделайте заключение о существовании предела по теореме Вейерштрасса

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

1)$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$,

$x_{n+1}^2 = x_n + 2;\ x_n \geq 0$

Перейдём к пределу

$a^2 = a + 2; a \geq 0,$

С учётом ограничения, a=2 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 2$

2) $x^2 = \sqrt{2 + x_1} \Rightarrow x_1 + 2 \geq \Leftrightarrow x_1 \geq -2,$

$x_1 \in [-2; +\infty)$.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

3) Так как последовательность стационарна $\Rightarrow$

$x_{n+1} = x_n,$

$\sqrt{2 + x_n} = x_n,$

$x_n^2 - x_n - 2 = 0, x_n \geq 0,$

$D = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 9,$

$x_{n1} = 2,$

$x_{n2} = -1,$

$x_n \geq 0 \Rightarrow x_n = 2,$

Действительно, $x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + 2} = 2,$

$x_3 = \sqrt{2 + x_2} = \sqrt{2 + 2} = 2,$

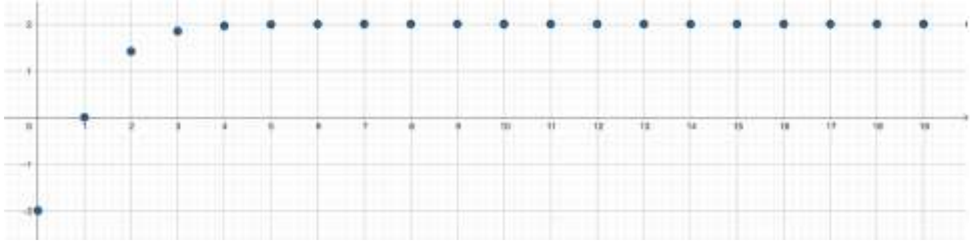
$x_4 = \sqrt{2 + x_3} = \sqrt{2 + 2} = 2,$

При продолжении, тенденция сохраняется.

Значит x_n стационарна при $x_1 = 2.$

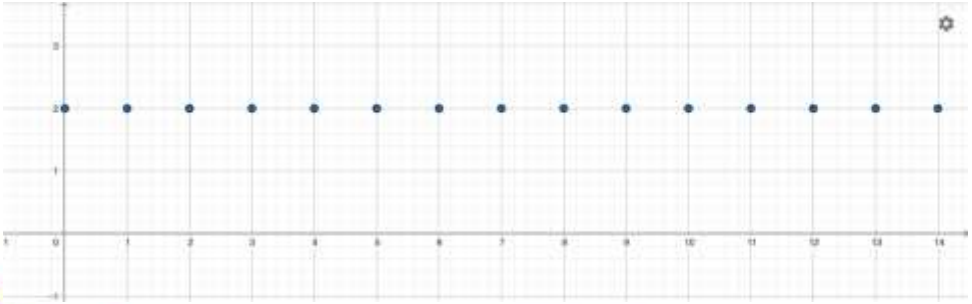
Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

4) При $x_1 \in [-2; 2) \uparrow$,



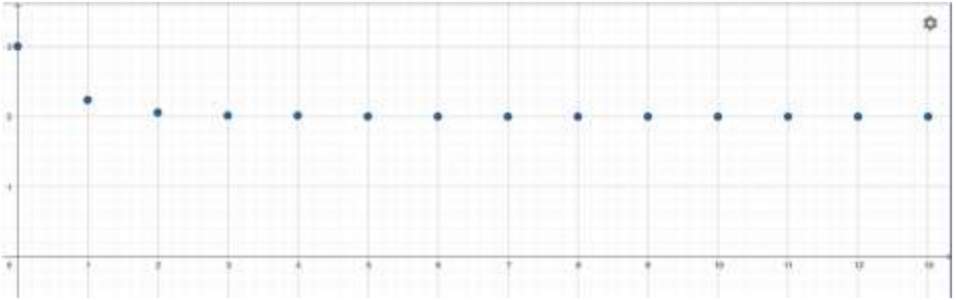
$x_1 = 2$ сстационарная последовательность,

$x_1 \in (2; +\infty)$.



Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

$x_1 \in (2; +\infty) \downarrow;$



5) 1. При $x = 2$: Последовательность стационарна, что доказано в п. 3.

2. $x_1 > 2$: по методу мат. индукции;

$x_1 > 2,$

$x_n > 2,$

$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} < \sqrt{2 + 2} = 2,$

Ограниченность доказана.

Задание 2. Исследование предела рекуррентно заданной последовательности

Заметим, что $x_2 \geq 0$, так как при $x_1 = -2$:

$\sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 - 2} = 0.$

Если $x_1 > (-2)$, то $x_1 + 2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x_1 + 2} > 0$

Заметим также, что $x_3 > 1$

действительно $x_2 \geq 0;\ x_3 = \sqrt{x_2 + 2},$

$x_{3\_min} = \sqrt{0 + 2} = \sqrt{2} > 1,$

значит, при $n \to \infty;\ x_1 \in [-2; 2)$:

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{(1 + x_n)(2 - x_n)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} > 0,$

(так как $1 + x_n > 0;\quad \sqrt{2 + x_n} + x_n > 0;\quad 2 - x_n > 0$)

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n > 0.$

Последовательность строго возрастает. Монотонность доказана.

Задание 3. Исследование сходимости

Задание:

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при $n \to \infty$

План:

1) Вычислите предел A последовательности при $n \to \infty$.
2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.
3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности:
   a. вспомните определение предела последовательности, запишите его через ε, $n0$ и неравенство;
   b. выберите три различных положительных числа $\varepsilon 1 > \varepsilon 2 > \varepsilon 3$;
   c. для каждого такого числа изобразите на графике соответствующую ε-окрестность предела A («ε-трубу»);
   d. для каждого выбранного ε найдите на графике номер $n0 = n0\ (\varepsilon)$, после которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность, или установите, что такого номера нет.

Задание 3. Исследование сходимости

1) Вычислите предел A последовательности при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{7+9+\ldots+(2n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{\frac{7+(2n+5)}{2}\times n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{\frac{2n^2+12n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^4-1}+\sqrt{3n^2+1}}{n^2+6n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{9-\frac{1}{n^4}}+n^2\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{n^2\left(1+\frac{6}{n}\right)} = 3$$

Задание 3. Исследование сходимости

2) Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.

n0 = 1, a(n) = 0.68977530353517

n0 = 2, a(n) = 0.9727382511603367

n0 = 3, a(n) = 1.1952954721701208

n0 = 4, a(n) = 1.3747395550701826

n0 = 5, a(n) = 1.522020562256219

n0 = 6, a(n) = 1.6449399552784394

n0 = 7, a(n) = 1.7490343259417598

n0 = 8, a(n) = 1.838302141171632

n0 = 9, a(n) = 1.915692160962467

n0 = 10, a(n) = 1.9834230306350071

n0 = 11, a(n) = 2.0431946877821248

Задание 3. Исследование сходимости

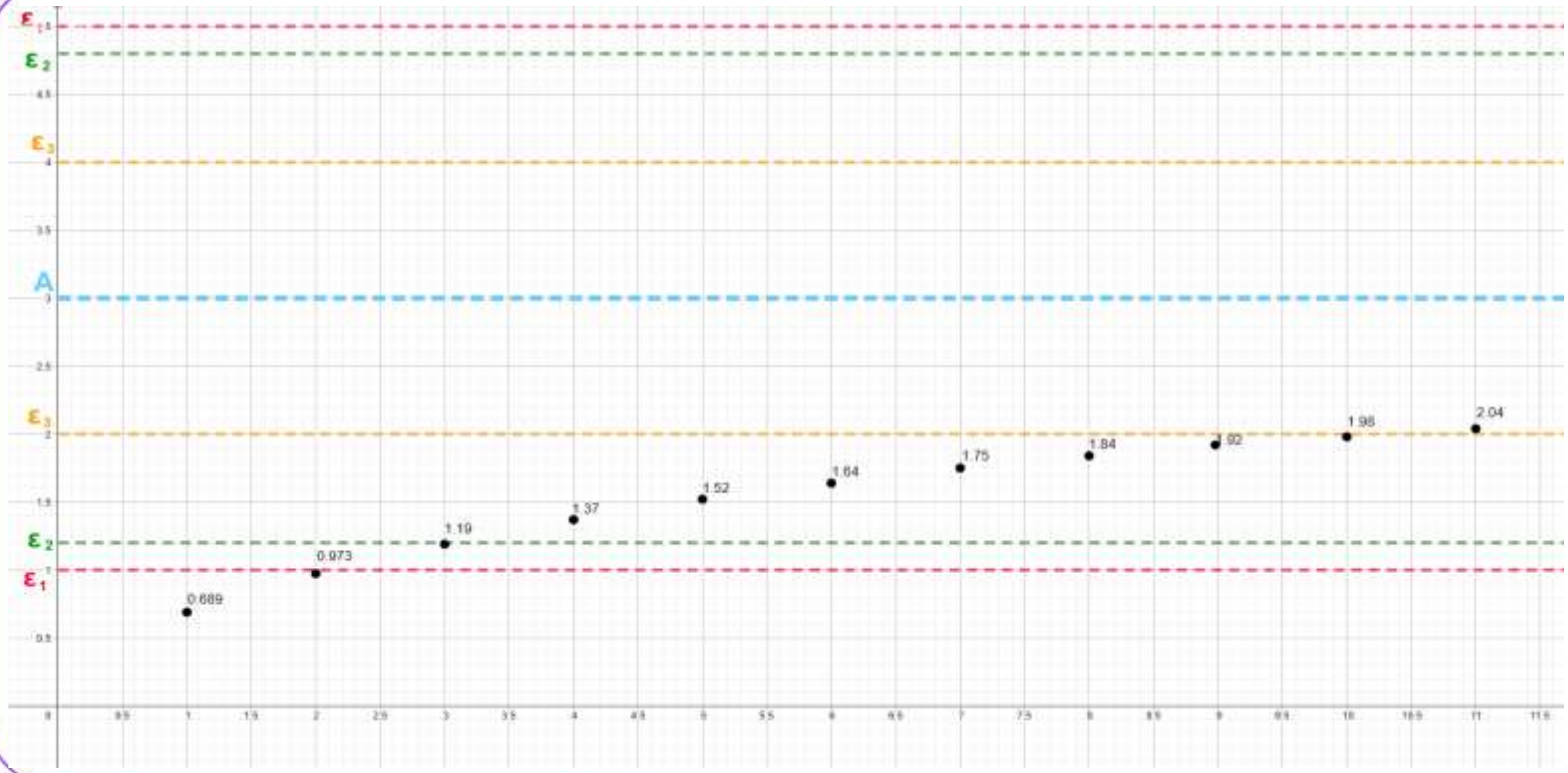
3) Проиллюстрируйте сходимость (расходимость) последовательности

$\varepsilon_1 = 2$, n_0 после которого все члены попадают в трубу $= 2$

$\varepsilon_2 = 1.8$, n_0 после которого все члены попадают в трубу $= 3$

$\varepsilon_3 = 1$, n_0 после которого все члены попадают в трубу $= 10$

Задание 3. Исследование сходимости



Оценочный лист

Роман Бурейко Олегович – 20%

Кочканов Мухаммадзиё Валижонович – 20%

Баукин Максим Александрович – 20%

Зорин Георгий Юрьевич – 20%

Ике Холи Дестини – 20%

Спасибо за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY

Выполнили студенты ИТМО:
Роман Бурейко Олегович
Кочканов Мухаммадзиё Валижонович
Баукин Максим Александрович
Зорин Георгий Юрьевич
Ике Холи Дестини
Поток 10.3

13.10.2023 г.