Universität Zürich[UZH]

Über Variablen und Entscheidbarkeit

Philosophische Betrachtungen über den Gebrauch von Buchstaben als Variablen, die Entscheidbarkeit von Prädikaten und den Zusammenhang zwischen Unentscheidbarkeit und Buchstabengebrauch in logischen Formalsprachen

Abhandlung
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät
der
Universität Zürich

vorgelegt von
Romain Büchi

Angenommen im Frühjahrssemester 2023
auf Antrag der Promotionskommission bestehend aus
Prof. Dr. Katia Saporiti (hauptverantwortliche Betreuungsperson)
Prof. Dr. Elke Brendel
Prof. Dr. Hans-Johann Glock
Prof. Dr. Richard Zach

Zürich, 2023

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Diese Arbeit ist seit Langem im Entstehen begriffen. Den Anstoss gab mir vor dreizehn Jahren ein Seminar an der Universität Zürich bei Joachim Schulte. Gelesen wurde die *Logisch-philosophische Abhandlung*. In einer Sitzung gegen Ende des Semesters kam die Passage zur Sprache, in der Wittgenstein die Streichung des Identitätszeichens aus der Begriffsschrift verkündet. Um den Verlust an Ausdruckskraft auszugleichen, den diese Streichung mit sich bringt, wird eine neue Variablenschreibweise angeregt: Eine Variable x und eine Variable y sollen sich ausschliessen, wenn sie im Schnittbereich ihrer Quantoren vorkommen; wenn die Formel, in der sie vorkommen, instanziiert wird, müssen sie durch verschiedene Konstanten ersetzt werden. Dieser Buchstabengebrauch ist zwar ungewöhnlich, aber auch naheliegend und dazu geeignet, das Wesen der Identität zu beleuchten. Ich wollte deshalb Wittgensteins Beweggründe verstehen und den Weg nachvollziehen, auf dem er zu dieser Änderung der logischen Syntax gelangt war. Dabei sah ich allmählich ein, dass es sich bei der angedeuteten Schreibweise um das Relikt eines älteren Unterfangens handeln musste. Zwei, drei Jahre, bevor er die Komposition seiner *Abhandlung* begann, hatte Wittgenstein ein Zeichensystem zu entwerfen versucht, das es erlauben sollte, durch die Anwendung *ein und desselben* Verfahrens für jede beliebige Formel zu entscheiden, ob sie eine Tautologie ist oder nicht. In erstaunlicher Voraussicht bezeichnete er (Ende 1913 in einem Brief an Russell) die Frage nach der Beschaffenheit eines solchen Zeichensystems als *das* Grundproblem der Logik.

Das Unterfangen scheiterte freilich, da es scheitern musste, und Wittgenstein nahm es nach seiner Rückkehr zur Philosophie (Ende der 1920er Jahre) nicht wieder auf. Inzwischen jedoch war die Aufgabe, die er sich in jugendlicher Kühnheit gestellt hatte, zum Hauptproblem der mathematischen Logik avanciert, wenn auch nicht infolge seines Buchs (das 1922 zweisprachig erschien), sondern hauptsächlich aufgrund bahnbrechender Arbeiten der Hilbert-Schule. Die ungewöhnliche Variablenschreibweise aus der *Abhandlung* stiess, wenn sie überhaupt zur Kenntnis genommen wurde, grösstenteils auf Ablehnung. Zugleich aber offenbarte die immer weiter fortschreitende Arbeit am neuen Hauptproblem der Logik, was Wittgenstein womöglich geahnt hatte: dass zwischen Variablengebrauch und Entscheidbarkeit ein bedeutsamer Zusammenhang besteht. So konnte die Entscheidbarkeit der Aussagenlogik, da sie ohne Quantoren und gebundene Variablen auskommt, mühelos nachgewiesen werden, und auch für die monadischen Fragmente der Prädikatenlogik erster und zweiter Stufe, worin nur Prädikate in einer Variablen zugelassen sind, gelang es früh, Entscheidungsverfahren anzugeben. Von der Prädikatenlogik insgesamt mit ihrer ganzen Mannigfaltigkeit an Variablenverknüpfungen und Quantorenverschachtelungen wurde indes 1936 bewiesen, dass sie unentscheidbar ist. Erstaunlicherweise liegt Unentscheidbarkeit bereits dann vor, wenn die Signatur der betrachteten Formalsprache bloss ein einziges Prädikat in zwei Variablen enthält.

Je mehr ich mich nun mit weiteren Ergebnissen auf dem Gebiet befasste, umso rätselhafter erschien dieser Zusammenhang von Variablengebrauch und (Un-)Entscheidbarkeit. Ja die Variablen selbst wurden mir zunehmend fremd in ihren mannigfaltigen Gebrauchsweisen, die zwischen Syntax und Semantik changieren und doch den Anschein einer gewissen Einheit erwecken. Die Erkundung ihres schillernden Auftretens an den Grenzen nicht nur von Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit, sondern auch von Logik und Mathematik mündete unweigerlich in einer Untersuchung über das Wesen von Variablen überhaupt. Das ohnehin schon weite Feld wurde dadurch nur noch viel weiter aufgespannt. Zugleich – und das gab mir die nötige Zuversicht – verfestigte sich die Überzeugung, hier tatsächlich auf eine Goldader gestossen zu sein, und zwar eine, die nicht allein für die mathematische Logik von Wert ist, sondern dies vor allem auch für philosophische Betrachtungen sein könnte.

Der vorliegende Text stellt eine Bestandsaufnahme meiner bisherigen Bemühungen dar. Er enthält die wichtigsten Gedanken, die mir seit Beginn der Arbeit an diesem Stoff gekommen sind. Offensichtlich sind sie weit davon entfernt, das Untersuchungsfeld umfänglich zu erschliessen. Sie sind gleichwohl ein Anfang. Ich habe versucht, meine Gedanken in kleinen, sorgfältigen Schritten zu entwickeln, damit sie einen zuverlässigen Ausgangspunkt bilden für weitere Erkundungen auf dem Gebiet. Darin liegt denn auch der hauptsächliche Zweck dieses Texts. Nie ging es mir darum, eine vorgefertigte Ansicht zu validieren, sie gegen andere Positionen zu verteidigen und in ein möglichst günstiges Licht zu rücken. Immer ist es der Drang, ein Problem – einen Begriff, einen Zusammenhang, eine Entwicklung – klarer, gründlicher zu verstehen, der meine Arbeit antreibt. Dabei gestatte ich meinen Gedanken mitunter, vom vermuteten Hauptweg abzuschweifen und in vermeintliche Nebenpfade einzubiegen. Oftmals erweist sich, was zunächst bloss als Umweg erscheint, später als die aufschlussreichere Verbindung. Dieses Vorgehen hat es mir bisher verweigert, unerforschtes Gebiet zu erreichen, von wo aus Neues zu sagen wäre. Bei den gesammelten Gedanken handelt es sich um *Betrachtungen* von längst Be-

kanntem. Aber vielleicht ist es mir dennoch gelungen, das eine oder andere Altbekannte neu zu sagen und so die Grundlage dafür zu schaffen, das Denken weiterzutreiben.

Prof. Katia Saporiti und Prof. em. Peter Schulthess bin ich zu grossem Dank dafür verpflichtet, dass sie an das Projekt geglaubt haben, und auch dafür, dass sie mir mit einer Anstellung an ihrem jeweiligen Lehrstuhl die Möglichkeit geboten haben, einen Teil meiner Zeit dieser Arbeit zu widmen. Mehrfach erhielt ich die Gelegenheit, Ausschnitte aus dem vorliegenden Text im Kolloquium für *Theoretische Philosophie und Geschichte der Philosophie* an der Universität Zürich vorzustellen. Ich danke allen, die in den letzten Jahren daran teilgenommen haben. Zu grossem Dank bin ich ausserdem Prof. Hans-Johann Glock und Dr. Stefan Riegelnik verpflichtet. Die Vielfalt an Lern- und Austauschmöglichkeiten, die das von ihnen geleitete Doktoratsprogramm *Sprache, Geist und Praxis* bot, war für den Beginn meiner Arbeit von unschätzbarem Wert. Auch dem Schweizerischen Nationalfond sei gedankt für die Finanzierung eines Aufenthalts an der UC Berkeley während der ersten Hälfte des Doktoratsstudiums. Ohne die grosszügige Hilfe von Prof. Elke Brendel und Prof. Hans Sluga wäre dies nicht möglich gewesen. Vielen Dank! Prof. Brendel sowie den Teilnehmenden am Kolloquium *Bologna-Bonn-Padova* danke ich überdies für die ermutigenden Rückmeldungen in der letzten Phase des Doktorats. Wertvolle Unterstützung habe ich in dieser Zeit auch von Prof. Laurent Cesalli erhalten, wofür ich ihm sehr dankbar bin. Nicht zuletzt bin ich auch Prof. Richard Zach sehr dankbar dafür, dass er sich kurzfristig bereit erklärte, in meiner Betreuungskommission mitzuwirken. Schliesslich möchte ich meinen Eltern danken, die mir immer schon und in vieler Hinsicht eine wichtige Stütze waren. Der grösste Dank gebührt indessen Zina, die mich in den zahlreichen von Zweifeln erfüllten Momenten nicht nur ertragen, sondern geduldig ermutigt hat, weiterzumachen und den hier vorliegenden Text endlich fertigzustellen.

Basel, im Januar 2023

1. Einleitende Betrachtungen über den Gebrauch von Buchstaben als Variablen in Logik und Mathematik

Wissen von den ursprünglichen Ursachen gilt es zu erlangen, von Ursachen aber ist in vierfacher Bedeutung die Rede. Gemeint sein kann die Form der Sache, ihr Stoff, der Ursprung ihres Wandels oder ihr Zweck.

Es ist eine Hauptkunst des Philosophen, sich nicht mit Fragen zu beschäftigen, die ihn nichts angehen.

1.1. Einleitung

Was ist eine Variable? Das ist die Frage, die hier zugrunde liegt. Sie bezieht sich auf bestimmte Gebrauchsweisen von Buchstaben – von ‚x' und ‚y', ‚ξ' und ‚ζ', ‚F' und ‚G', usw. –, wie sie in der modernen Logik und Mathematik allgegenwärtig sind. Was nun folgt, ist nicht darauf angelegt, eine didaktische Einführung in die Mannigfaltigkeit dieser Gebrauchsweisen zu geben. Wer mit ihnen nicht vertraut ist, wird meinen Versuchen, die gestellte Frage zu klären und zu beantworten, nicht viel abgewinnen können. Dass man mit Variablen umzugehen weiss und verschiedene Facetten ihres Gebrauchs zu erkennen vermag, wird vorausgesetzt. Es muss nicht zwingend Sophisterei sein, von einer Sache zu fragen, *was* sie überhaupt sei, und dann anzufügen, die gebotenen Antworten könne nur

Die ersten beiden Sätze, die diesem Kapitel vorangestellt sind, geben in freier und auslassender Übersetzung eine Stelle aus Aristoteles' *Metaphysik* wieder (die Zeilen 983 a 24-32 im dritten Kapitel des ersten Buchs um genau zu sein). Der dritte Satz findet sich in einem Tagebucheintrag Wittgensteins für den 1. Mai 1915, vgl. Wittgenstein (1979, S. 44).

nachvollziehen, wer das infrage Gestellte bereits kennt. Es kommt darauf an, die Frage richtig aufzufassen.

Ich weiss, was Variablen sind und wie sie gebraucht werden. Wenn mich jemand in Unkenntnis danach fragt, gebe ich auch kurze Antworten, die meistens hinreichen. Vielleicht erinnere ich an die Schularithmetik und den Gebrauch von ‚x' oder ‚y' in einfachen Gleichungen. Oder ich wage, sofern das Interesse der Fragenden weiter reicht, eine erste Heranführung an den Gebrauch gebundener Variablen in der Prädikatenlogik. Wenn ich hier frage: „Was ist dieses ‚x' überhaupt, wie und wozu wird es gebraucht?", dann frage ich nicht, als sei es mir unbekannt. Ich frage nicht wie in der Schulalgebra: „Was ist x?" Auch suche ich nicht nach einer bestimmten Beschaffenheit von Variablen, die mir und andern auf geheimnisvolle Weise verborgen geblieben wäre und die es jetzt durch ausgeklügelte Methoden der Erkenntnis ans Licht zu bringen gilt. Mit meiner Frage möchte ich vielmehr das Verlangen zum Ausdruck bringen, ein Werkzeug, das mir durchaus bekannt, ja in seinem Gebrauch vertraut ist, besser zu *verstehen* als bisher: umfassender, klarer, tiefer.[1] Darin liegt der Hauptzweck dieser Arbeit.

Von den Versuchen, ein umfassenderes Verständnis zu erlangen, erhoffe ich mir einen Überblick über Zusammenhänge, die ich vorher nicht sah: wiederkehrende Muster, die dem Gebrauch von Variablen über Epochen- und Disziplinengrenzen hinweg Einheit verleihen, wie auch Unterschiede, in denen sich das Potenzial ihrer vielseitigen Verwendungen offenbart. Dazu bedarf es hinreichender Kenntnis historischer Entwicklungen sowie einer gewissen Übersicht über die Vielfalt des Buchstabengebrauchs und der zugrundeliegenden Regelwerke. Zweitens soll ein klareres Verständnis davon, was Variablen sind – wozu sie dienen und woher sie kommen –, dabei behilflich sein, Missverständnisse zu durchdringen, die ihren Gebrauch begleitet haben und noch immer begleiten. Sich selbst vor Missverständnissen zu hüten, reicht dafür nicht aus. Es gilt zu verstehen, wodurch sie verursacht werden, welchen irrigen Vorstellungen über das Wesen von Variablen sie entspringen und wie manche dieser Vorstellungen ungeachtet ihrer Fehlerhaftigkeit den nutzbringenden Einsatz von Variablen gleichwohl befördert haben. Aus der so erarbeiteten Klarheit werde ich drittens versuchen, gewisse Grundlagenprobleme der Logik zu beleuchten: hauptsächlich Entscheidungsprobleme, aber auch den problematischen Übergang von der Prädikatenlogik erster Stufe zu höherstufigen Systemen. Denn Variablen sind ihrem Wesen nach Grenzzeichen. In ihrem mannigfaltigen Gebrauch weisen sie auf Grenzen von logischer und epistemologischer Bedeutung hin: auf die Grenze zwischen

[1] Dass dieses Verlangen berechtigt ist, wird sich im Verlauf des einleitenden Kapitels immer wieder erweisen. Gleichwohl war es ermutigend, zu erfahren, dass Quine bis in seinen letzten Arbeiten offenbar dasselbe Verlangen verspürte (vgl. Quine (1976a, S. 305)).

Bekanntem und Unbekanntem in der Algebra, zwischen erster und zweiter Stufe in der Logik – ja vielleicht sogar zwischen der Logik insgesamt und der Mathematik –, und schliesslich auch auf die Grenze zwischen einer Wahrheit, die sich überall algorithmisch entscheiden lässt, und einer Wahrheit, die sich dem Zugriff durch Algorithmen letztlich entzieht. Daher, und weil Variablen als Werkzeuge des Verstands dazu geeignet sind, dessen Kraft zu vermehren, erlaubt ein tieferes Verständnis ihres Wesens viertens Einblicke in das Denken selbst – nicht in all seine Formen, doch in diejenigen, die zur Anwendung kommen, wenn Mathematik betrieben wird. Diese erweist sich dabei als das, was sie ist: eine Wissenschaft nicht von bestimmten Gegenständen, sondern von Begriffen und ihren Verflechtungen.

Äusserlich gleicht unsere Grundfrage einer sokratischen ‚Was ist X?'-Frage – gewonnen gleichsam aus ihrem Schema durch dessen Zurückbiegung auf einen Teil seiner selbst. Dass in der Tat eine philosophische Frage vorliegt, die einer entsprechenden Behandlung würdig ist, soll hier aber nicht einfach angenommen, sondern gezeigt werden. Aus diesem Grund handelt dieses erste Kapitel von der Grundfrage selbst und davon, wie sie zu lesen ist, um aus ihr philosophischen Gewinn zu schlagen. Da dies eine inhaltliche Auseinandersetzung erfordert, werden bereits hier im einleitenden Kapitel erste Schritte hin zur Beantwortung der Grundfrage unternommen.

Das erste Unterkapitel (1.2) beginnt damit, einige Besonderheiten ihrer Formulierung als Was-ist-Frage zu besprechen. Als solche ist sie nicht nur sehr breit gefasst, sie enthält in sich auch andere Fragen, die es klar zu unterscheiden und, wenn nötig, gesondert zu behandeln gilt, anstatt sie stillschweigend für beantwortet zu nehmen. So wäre es überstürzt, hinter allem, was mitunter Variable genannt wird, ein gemeinsames, einheitliches Was einfach anzunehmen. Die von Unklarheiten und Missverständnissen geprägte Geschichte des Worts ‚Variable' und die Mannigfaltigkeit der Gebrauchsweisen von Buchstaben sprechen dagegen. Andererseits wäre es wenig zweckmässig, die aufgeworfene Frage in ihrer beabsichtigten Breite gleich einzuschränken und der Einfachheit halber bloss einen bestimmten, möglichst homogenen Teil dieses Gebrauchs zu betrachten. Manche Einsicht in das Wesen von Variablen ermöglicht erst der vergleichende Blick in die Breite ihres vielfältigen Gebrauchs. Die Vielfältigkeit des Gegenstands ist kein Mangel der Fragestellung, sie ist der fruchtbare Boden auf dem die philosophische Arbeit gedeihen kann.

Wenngleich diese Vielfalt zuerst eine aktuelle Wirklichkeit darstellt, hat sie freilich ihre Geschichte. Rotiert der vergleichende Blick in die historische Richtung, eröffnet sich neben der synchronen eine diachrone Diversität, die nicht leicht zu überschauen ist.

Zur schieren Masse an Textmaterial, die es zu berücksichtigen gilt, kommen erschwerend einige seltsame Vorstellungen darüber hinzu, was diese bereits in frühen logischen und mathematischen Texten auftretenden Buchstaben bedeuten sollen. Um die Art von Verständnis zu erlangen, die hier angestrebt wird, ist es jedoch unerlässlich, sich der Vielfalt historischer Gebrauchsweisen von Buchstaben mitsamt ihrer Irrungen und Wirrungen zu stellen. Anders ist es nicht möglich, Variablen als das zu begreifen, was sie sind: als geschichtlich gewachsene, in ihrem Wesen alles andere als notwendige, sondern vielmehr von Kontingenz geprägte Werkzeuge für den Umgang mit den immer komplexer werdenden Begriffen der Mathematik.

Den historischen Blick braucht es gerade um die Missverständnisse, die den logischen und mathematischen Buchstabengebrauch seit jeher begleiten, in ihrer Täuschungskraft ebenso wie in ihrer Harmlosigkeit, ja gelegentlich sogar Nützlichkeit für die Mathematik zu verstehen. Die erste historische Digression (in 1.2.1) beginnt daher mit Freges Einwänden gegen ältere und neuere Auffassungen davon, was eine Variable ist. Dabei zeigt sich, dass im Lauf der Zeit durchaus disparate Dinge aus unterschiedlichen Gründen, manchmal aus Missverständnis, als Variablen bezeichnet wurden. Manche Vorstellung, die mitunter heute noch mit Variablen in Verbindung gebracht wird, erscheint bei genauerer Betrachtung weitaus konfuser, als der längst allgegenwärtige und unproblematische Gebrauch von Buchstaben vermuten lassen könnte. Dieser Befund ist ebenso bedenkenswert wie die Tatsache, dass das Vorherrschen konfuser Vorstellungen und das Bestehen grundlegender Missverständnisse in Bezug auf das Wesen von Variablen offenbar den Nutzen ihres vielfältigen Gebrauchs für Mathematik und Logik nicht beeinträchtigt hat.

Der scharfen Kritik am Variablenbegriff steht in Freges Begriffsschrift eine subtile Aufgliederung verschiedener Arten von Buchstaben entgegen (die in 1.2.2 kurz vorgestellt wird). Dieses einzigartige Notationssystem wurde mit dem Anspruch entwickelt, in verfeinerter Form den Buchstabengebrauch nachzubilden, der in der Mathematik verbreitet ist. Die in der Begriffsschrift angelegten Unterscheidungen stehen indes nicht im Dienst einer gewöhnlichen mathematischen Untersuchung, sie wurden vielmehr aus logischer Analyse für logische Zwecke gewonnen, was ihren Verfeinerungsgrad erklärt. Freges Kritik am Variablengerede richtet sich denn auch nicht gegen den mathematischen Buchstabengebrauch an sich, sondern gegen gewisse Vorstellungen, die ihn begleiten und mit dem Wort ‚Variable‘ assoziiert werden. Dazu zählt insbesondere die Vorstellung, wonach die Buchstaben für veränderliche oder für unbestimmte Gegenstände stünden, was einer Verwechslung von Zeichen und Bezeichnetem gleichkomme. Wer versucht Variablen als das zu erklären, was Buchstaben bezeichnen, werde entweder in Widersprüche geraten oder immer wieder auf das zurückfallen, was eigentlich eine Funktion ist, und dabei erkennen, dass weder die hypostasierten Bedeutungen von Buchstaben noch diese selbst Gegenstand der Arithmetik sein können.

Angesichts der Fregeschen Klärungsarbeit scheint sich auch der Gegenstand unserer Untersuchung aufzulösen, sodass die Grundfrage im letzten Teil des ersten Unterkapitels (in 1.2.3) noch einmal bekräftigt werden muss. Dies geschieht in drei Schritten: in einer zweiten und einer dritten historischen Digression sowie in einem letzten Abschnitt, der sich dem Problem der Einheit im Gebrauch von Buchstaben als Variablen zuwendet.

In der zweiten Digression (in 1.2.3.1) geht es zurück zu den Anfängen des logischen Buchstabengebrauchs in der aristotelischen Syllogistik. Dabei zeigt sich, wie schwer es fällt, zu erklären, worin genau die Rolle der verwendeten Buchstaben besteht und wozu ihr Gebrauch dient – obwohl diese Gebrauchsweise am Anfang der Logik steht und sie durch ihre ganze Geschichte hindurch begleitet hat. Dass Aristoteles selbst kaum ein Wort darüber verliert, mag zwar die Arbeit seiner ersten Kommentatoren erschwert haben, doch nicht nur in den antiken und mittelalterlichen Kommentaren herrscht kein Konsens darüber, wie der syllogistische Buchstabengebrauch zu deuten ist. Auch jene, die sich dafür im Werkzeugkasten der modernen Logik bedienen, bringen ganz unvereinbare Lesarten hervor, was unter anderem auch fehlender Klarheit über das Wesen von Variablen geschuldet ist. Umso wichtiger ist es daher, ein klareres Verständnis zu verlangen.

Die dritte Digression (in 1.2.3.2) befasst sich mit Freges Gründen gegen die Auffassung, wonach Variablen nichts anderes als die in der Mathematik gebräuchlichen Buchstaben sind. Sie leistet, wie er glaubt, einer noch unheilvolleren Vermengung von Zeichen und Bezeichnetem Vorschub als andere Auffassungen. Denn wer die Buchstaben selbst als Variablen bezeichnet und Variablen als genuine Gegenstände der Mathematik betrachtet, wird für formalistische Ansichten besonders empfänglich sein. Es ist aber möglich, unter Variablen Buchstaben in dem für Mathematik und Logik typischen Gebrauch zu verstehen, ohne damit der einen oder anderen Spielart des Formalismus zu verfallen. Unsere Grundfrage – ‚Was sind Variablen?' – erhält so allerdings einen vielfältig schillernden Gegenstand: die Vielzahl an relevanten Gebrauchsweisen alphabetischer Zeichen mitsamt ihrer langen und verworrenen Geschichte. Daraus ergibt sich sowohl ein Problem der Einheit als auch eines der Abgrenzung: Es gilt den Überblick zu bewahren über eine grosse Mannigfaltigkeit an Gebrauchsweisen sowie diejenigen darunter, die für Variablen spezifisch sind, von solchen abzugrenzen, die es nicht sind. Beide Probleme werden im letzten Abschnitt vor der Zusammenfassung des Unterkapitels dargelegt (in 1.2.3.3).

Das zweite Unterkapitel (1.3) nimmt Betrachtungen wieder auf, die im ersten begonnen wurden, und führt sie weiter. Ausgangspunkt (in 1.3.1) ist der Gebrauch von Buchstaben als Namen für die Unbekannten eines Gleichungssystems, wie er aus der Schule bekannt ist. Aus dem Vergleich (in 1.3.1.2) mit einer verwandten Gebrauchsweise, die für Widerspruchsbeweise typisch ist, geht hervor, dass es sich bei der Vorstellung, wonach die Buchstaben in solchen Fällen als Namen für beliebige Gegenstände eingeführt werden, um Unsinn handelt. Daraufhin wird (in 1.3.1.3) eine andere Analyse der Gebrauchsweisen vorgeschlagen, der zufolge die Buchstaben überhaupt nichts bezeichnen, sondern hauptsächlich den Zweck erfüllen, die Argumentstellen von Begriffen und Relationen kenntlich zu machen, deren Extensionen in gewissen Verhältnissen zueinander stehen. Auf diese Weise vereinfachen die Buchstaben den schrittweisen Übergang auf Begriffe oder Relationen, an deren Ausdruck das gesuchte Ergebnis leicht abzulesen ist. Wie schon davor der syllogistische Buchstabengebrauch können also auch die beiden hier betrachteten Gebrauchsweisen auf die Kenntlichmachung logischer Formen zurückgeführt werden. Damit ist ein Weg angedeutet, um Einheit in die Mannigfaltigkeit des Untersuchungsgegenstands zu bringen.

Zur Kenntlichmachung logischer Formen reicht es indessen nicht aus, die Stellen, in die geeignete Argumente eintreten können, bloss offenzuhalten. Es muss auch die Verwandtschaft oder Nicht-Verwandtschaft zwischen den offengehaltenen Stellen angezeigt werden: ob mehrmals dieselben Argumente eingesetzt werden müssen oder verschiedene erlaubt sind. In der Regel geschieht dies durch das Vorkommen derselben oder verschiedener Buchstaben innerhalb eines abgegrenzten Bereichs. Dass hier ein wesentlicher und oftmals übersehener Beitrag des Buchstabengebrauchs in der Mathematik vorliegt, wird im zweiten Abschnitt dieses Unterkapitels (in 1.3.2) weiter ausgeführt.

Zuerst wird (in 1.3.2.1) die Vorstellung, wonach Buchstaben in der Mathematik oftmals als Namen für beliebige Gegenstände aus einer vorgegebenen Menge dienen, noch einmal kritisch untersucht. Dabei erweist sich der zugrundeliegende Begriff des Irgendeinen rasch als zu konfus für die philosophischen Ziele, die in dieser Arbeit verfolgt werden. Ein Buchstabe kann nicht *irgendeinen* Gegenstand bezeichnen, ohne dass feststünde, welchen. Der Nutzen, den der Gebrauch von Buchstaben für die Mathematik bringt, besteht (gemäss 1.3.2.2) darin, dass sich mit ihnen die Verwandtschaftsverhältnisse zwischen den Argumentstellen *verschiedener* Begriffe und Relationen anzeigen lassen. So fällt es leichter, beim Problemlösen oder Beweisen die Übersicht über das begriffliche

Geflecht zu bewahren, das den mathematischen Wahrheiten zugrunde liegt und ihre Einsicht ermöglicht. Um sich im Hinblick auf den Zweck des Buchstabengebrauchs von der mathematischen Prosa nicht täuschen zu lassen, reicht es, sie mit Bedacht zu lesen und dabei den grösseren Zusammenhang von Begriffen und Buchstaben ausreichend zu beachten. So gelesen, erscheint auch die verbreitete Rede von unbestimmten oder beliebigen Gegenständen als durchaus harmlos, ja unter Umständen sogar nützlich für die Mathematik (wie in 1.3.2.3 gezeigt wird).

Im dritten Abschnitt des Unterkapitels (in 1.3.3) wird versucht, das semantische Wesen von Variablen noch etwas besser auszuleuchten, als bis dahin gelungen ist. Denn hier herrscht wenig Einigkeit und viel Unklarheit. Entsprechend wuchert das Missverständnis. Um dem entgegenzuwirken, sollen die Konturen des Standpunkts, der sich in den Abschnitten davor bereits abzuzeichnen begann, in mehreren Anläufen geschärft werden. Zuerst (in 1.3.3.1) gilt es, Bestimmungen und Erläuterungen zur Semantik von Variablen zusammenzutragen, die in der modernen Logik verbreitet sind, aber in klarem Kontrast stehen zum Standpunkt Freges, dem der hier entwickelte angelehnt ist. Neben dem, was Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* über Variablen zu sagen haben, werden verschiedene Bemerkungen bei Ramsey, Church und Kleene angeführt, denen gemeinsam ist, dass sie die Beziehung einer Variablen zu ihren Werten mit der Beziehung eines Namens zum Gegenstand, den er benennt, mehr oder weniger gleichsetzen. Nach ihrer Auffassung bezeichnen Variablen die Werte, die sie annehmen können – alle oder jeweils einen –, in etwa wie Namen Gegenstände benennen, denotieren oder auf sie referieren (je nachdem, welches Wort als das passende für diese Beziehung betrachtet wird). Frege dagegen beharrt darauf, dass weder seine deutschen noch seine lateinischen Buchstaben, mithin weder gebundene noch freie oder schematische Variablen, irgendetwas bezeichnen. Sie sind vollkommen bedeutungs- und auch sinnlos (wie sich in 1.3.3.2 zeigt). Die Beziehung der Buchstaben zu den Gegenständen oder Funktionen, deren Namen sinnvollerweise an ihre Stelle treten können, besteht nach Frege bloss in einem unbestimmten Andeuten.

Zur Unbestimmtheit der Buchstaben in ihrer Bezugnahme auf die Welt gehört bei Frege, wie bei anderen Logizisten nach ihm auch, die Unbegrenztheit der Wertebereiche. Logische Variablen reichen demnach über alles, worüber sie widerspruchsfrei reichen können. Sie sind durch keinen inhaltlichen Begriff zu begrenzen. Ihre einzigen Grenzen sind die Schranken des gerade noch Sinnvollen, von aussen markiert durch die bekannten Antinomien. Diese logizistische Doktrin ist jedoch problematischer, als Frege ursprünglich dachte, und überdies für die Beschreibung des in der Mathematik üblichen Buchstabengebrauchs denkbar ungeeignet (wie in 1.3.3.3 deutlich wird). Aus Sicht moderner Interpretationssemantiken nimmt sich die Doktrin ohnehin obsolet aus. Sie ist daher abzulehnen.

Ein weiterer Punkt, in dem der hier entwickelte Standpunkt von dem Freges abweichen muss, wenn auch nur leicht, betrifft die Frage nach der grundlegenden oder hauptsächlichen Gebrauchsweise von Buchstaben als Variablen. Nach Frege dienen die Buchstaben in der Mathematik letztlich immer dazu, den Sätzen, in denen sie vorkommen, Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. In dieser wie in anderen Gebrauchsweisen enthalten und insofern grundlegender ist jedoch das Kenntlichmachen logischer Form, insbesondere der Argumentstellen von Funktionen und ihrer verwandtschaftlichen Verflechtungen (siehe 1.3.3.4). Darin liegt der wesentliche und unentbehrliche Dienst, den Variablen zu leisten vermögen.

Auf diesen Dienst kann die Logik zwar nicht verzichten, darauf aber, dass Variablen ihn leisten, hingegen schon. Mit der Entwicklung seiner *predicate-functor logic* (die in 1.3.3.5 eingeführt und besprochen wird) hat Quine gezeigt, dass und wie die Prädikatenlogik ohne Individuenvariablen – d. h. für ihn: ganz ohne Variablen – auskommt. Die Aufgaben, die Argumentstellen von Prädikaten zu vertauschen oder gleichzusetzen, mithin Übergänge von ‚Fxy‘ auf ‚Fyx‘ oder auf ‚Fxx‘ zu ermöglichen, werden von kombinatorischen Funktoren übernommen. In den Spuren, die Variablen bei ihrer schrittweisen Ersetzung durch diese Funktoren hinterlassen, offenbart sich ihr Wesen.

Obwohl Quines Befund unsere Betrachtungen über den Gebrauch von Buchstaben als Variablen bestärkt, gibt es gewichtige Differenzen. Diese werden im letzten Teil des Abschnitts (in 1.3.3.6) diskutiert. Quine betrachtet gebundene Variablen als das Referenzmittel schlechthin, über das sich eine Theorie auf die existierenden Gegenstände in der Welt bezieht. In seinen Augen bilden Variablen daher den idealen Anknüpfungspunkt für ein semantisches Existenzkriterium: *to be is to be the value of a variable.* Wir hingegen waren geneigt, in dieser Hinsicht Frege zu folgen und Variablen als sinn- und bedeutungslose Markierungen aufzufassen, die folglich keine ontologischen Verpflichtungen mit sich bringen. Wenn aber Variablen keine Bedeutung haben, nichts bezeichnen, fällt auch Quines hauptsächliches Argument gegen die Möglichkeit einer Prädikatenlogik zweiter oder höherer Stufe weg. Aus unserer Sicht handelt es sich also auch bei Prädikatsbuchstaben um Variablen, die sich im passenden Kalkül durch Quantoren höherer Stufe binden lassen.

Aus all diesen Betrachtungen geht schliesslich hervor, dass sich die sokratische Was-ist-Frage mit ihrer Fixierung auf ein allzu einheitliches Wesen nicht eignet, um den

Gegenstand der Untersuchung in seiner schillernden Vielfalt klar zu erfassen und das angestrebte Verständnis in Reichweite zu rücken. Nach einer kurzen Rückschau zu Beginn des dritten Unterkapitels (1.4.1) wird im darauffolgenden Abschnitt deshalb vorgeschlagen, die Grundfrage nach aristotelischem Vorbild in vier Teilfragen zu entfalten (1.4.2). Gefragt werden soll nicht allein oder hauptsächlich nach dem gemeinsamen Wesen von Variablen, sondern (i) nach den verschiedenen Zwecken, für die sie gebraucht werden, und dem jeweiligen Beitrag, den sie leisten; (ii) nach den Formen, die sie in ihren mannigfaltigen Gebrauchsweisen annehmen können; (iii) nach dem notationalen Zeichenmaterial, aus dem sie geformt sind, und den daran geknüpften Eigenschaften; und (iv) nach den historischen Entwicklungen, die sie zu dem gemacht haben, was sie heute sind. Erst durch diese Entfaltung der Grundfrage wird ein umfassendes Verständnis von Variablen erreichbar: eines, das sie als historisch gewachsene, in bestimmte Notationen eingebundene und verschiedene Ausformungen annehmende Werkzeuge zu unterschiedlichen Zwecken darzustellen vermag.

So fruchtbar die vorgenommene Erweiterung der Grundfrage sein mag, sie hat zur Folge, dass ihre Behandlung in einem Text wie diesem höchstens ansatzweise zu leisten ist. Im letzten Abschnitt des dritten Unterkapitels (1.4.3) erfolgt daher die Eingrenzung des Untersuchungsgebiets für den hier vorliegenden Teil der Arbeit. Dabei wird der Entscheid, den Zusammenhang von Variablengebrauch und Entscheidbarkeit und damit insbesondere Entscheidungsprobleme zu beleuchten, auch begründet.

1.2. Die Grundfrage als Was-ist-Frage

Unsere Grundfrage – ‚Was ist eine Variable?‘ – ist in mehrfacher Hinsicht keine typische Was-ist-Frage. Zuerst fällt auf, dass in ihr der unbestimmte Artikel vorkommt, wohingegen in vielen klassischen Was-ist-Fragen der Philosophie entweder gar kein Artikel steht wie in ‚Was ist Wissen?‘, ‚Was ist Glück?‘ und ‚Was ist Gerechtigkeit?‘; oder aber dann der bestimmte wie in ‚Was ist der Mensch?‘, ‚Was ist das Schöne?‘ und ‚Was ist der Tod?‘. Es hört sich nicht nur seltsam an, zu fragen: „Was ist ein Wissen?“, und seltsamer noch: „Was ist ein Tod?“. Man wüsste nicht, wonach gefragt ist. Das hat im Deutschen, wie der Duden meint, einerseits damit zu tun, dass sich Substantive, vor denen ein unbestimmter Artikel stehen kann, in den Plural setzen lassen; und andererseits damit, dass «Substantive, mit denen etwas Nichtgegenständliches bezeichnet wird«, sogenannte Abstrakta, oft nur im Singular auftreten, was auch für viele Substantivierungen gilt, insbesondere für jene aus philosophisch so bedeutsamen Adjektiven wie ‚schön', ‚gut' und ‚wahr'.[2] Da unter diese grammatische Kategorie der Abstrakta nahezu das gesamte substantivische Vokabular der Philosophie zu fallen scheint – der Duden listet an zitierter Stelle neben ‚Geist' und ‚Verstand' auch ‚Liebe', ‚Ehrlichkeit' und ‚Mathematik' auf –, erstaunt der Befund nicht, dass in den philosophisch bedeutsamen Was-ist-Fragen der unbestimmte Artikel kaum vorkommt. Eher regen sich Zweifel an dem hier erhobenen Anspruch, die gestellte Grundfrage als eine philosophische anzusehen.

So einfach, wie eben dargestellt, ist die Sachlage gleichwohl nicht. Nicht bei allen Substantiven in den zu Beginn angeführten Beispielen handelt es sich um Substantivierungen oder um Abstrakta im angedeuteten Sinn: ‚Mensch', zum Beispiel, wird vom Duden unter den prototypischen Konkreta geführt, was einleuchten mag. Trotzdem ist die Frage ‚Was ist der Mensch?' auch eine philosophische (zumindest für alle, die sich weigern, die Anthropologie überall dem Zugriff der Philosophie zu entziehen). Um die Frage richtig zu verstehen, gilt es die darin vorkommende Nominalphrase ‚der Mensch' so aufzufassen, dass sie nicht für einen einzelnen, individuell bestimmten Menschen steht, sondern für das, was Menschen gemeinsam ist, für das Menschsein überhaupt. In den Worten der scholastischen Logiker: Der Term ‚der Mensch' hat in der erwähnten Frage *suppositio simplex*, nicht *personalis*.[3] Unsere Grundfrage ist nun analog aufzufassen. Gefragt wird nicht nach einer einzelnen Variablen, sondern nach dem, was Variablen gemeinsam ist.

Man könnte versuchen, die intendierte Lesart mit einem adverbialen Zusatz anzudeuten, und fragen: „Was ist eine Variable *überhaupt*?" Vielleicht würde dadurch deutlicher, dass nicht nach einem Einzelding gefragt wird, sondern nach Gemeinsamkeiten in den vielen, die unter dem generellen Term ‚Variable' versammelt sind. Man könnte, da es sich um einen generellen Term handelt, freilich auch den Plural verwenden und fragen: „Was sind Variablen?", wie man auch fragen würde: „Was sind Zahlen?", oder: „Was sind Argumente?" Einige der für die Philosophie wichtigen Substantive lassen sich sehr wohl in den Plural setzen, obschon sie abstrakte Terme sind. Vieles, was nicht konkreter Gegenstand ist, lässt sich gleichwohl zählen.

Dass Variablen in der Mehrzahl auftreten können, mithin zählbar sind, ist unstrittig. Weniger leicht zu entscheiden ist dagegen, ob der Ausdruck ‚Variable' eher den abstrakten Termen (wie ‚Zahl' und ‚Menge') oder doch den konkreten (wie ‚Mensch') zugeschlagen

[2] Vgl. für die erste Aussage § 442 im Duden (2009). Vgl. für das Zitat § 221 und für die letzte Aussage auch §§ 262-7.
[3] Vgl. Petrus Hispanus, *Tractatus*, VI § 5.

werden sollte.[4] Zeigen wir mitunter nicht auf Tinten- oder Kreidespuren in Raum und Zeit, um dann zum Beispiel zu sagen, diese Variable sei im Gegensatz zu jener frei? Ist es andererseits nicht ein überaus wichtiger, ja wesentlicher Zug unseres Zeichengebrauchs, dass ein und dieselbe Variable an mehreren Stellen eines Ausdrucks zugleich vorkommen kann? Und würde sie das nicht als abstrakter Gegenstand ausweisen? Dieses Schillern zwischen konkreter Erscheinung und abstrakter Form ist den Variablen nicht eigen. Andere Zeichen verhalten sich in dieser Hinsicht ähnlich. Anstatt das Phänomen zu erklären, begnügt man sich meistens damit, Peirces Unterscheidung von *types* und *tokens* anzuführen, wobei gelegentlich darauf hingewiesen wird, dass hier eine andere Beziehung vorliegt, als wenn ein Zeichen von seinen Vorkommnissen unterschieden wird. Für den Moment reicht es festzustellen, dass unsere Grundfrage diesbezüglich keine Vorentscheidung trifft. Ob nur *types* oder nur *tokens* oder beides unter den Begriff einer Variablen fallen, lässt sie offen, in ihrer singularen Form (‚Was ist eine Variable?') wie in ihrer pluralen (‚Was sind Variablen?').

Ein Vorteil der Frage im Singular besteht darin, dass sie eine Akzentuierung erlaubt, durch die eine in ihr enthaltene Teilfrage sichtbar wird. Die Betonung des unbestimmten Artikels – „Was ist *eine* Variable (was sind bereits zwei)?" – rückt die Identitätsfrage in den Vordergrund: Wie werden Variablen individuiert? Ist zum Beispiel im prädikatenlogischen Ausdruck $\exists xFx$ eine andere Individuenvariable am Werk als im Ausdruck $\exists yFy$? Worin bestünde ihre Verschiedenheit? Und wie verhält es sich mit offenen Ausdrücken? Enthält der Ausdruck $(\exists xFx) \to Gx$ Vorkommnisse nur einer Individuenvariablen oder muss das freie x als Vorkommnis einer zweiten Variablen gezählt werden? Klar zu sehen und erläutern zu können, mit welchen Kriterien die Identität und Verschiedenheit von Variablen und ihren Vorkommnissen zusammenhängen, stellt selbstredend einen wichtigen Bestandteil jenes Verständnisses dar, nach dem die Grundfrage verlangt. Dass mitunter Verwirrung darüber besteht, welche Kriterien jeweils am Werk sind, wird sich im Verlauf dieses Kapitels immer wieder zeigen.

In ihrer pluralen Form wiederum impliziert die Grundfrage nicht nur, dass es viele Variablen gibt, sondern sie deutet darüber hinaus die Möglichkeit unterschiedlicher Sorten an, in die sich Variablen gemäss ihrer Erscheinungsform, ihrem Gebrauch oder einer anderen Eigenart unterteilen lassen. Diese Sortenlesart gilt es unbedingt zu berücksichtigen. Denn ohne Überblick über die verschiedenen Variablenarten ist ein umfassenderes Verständnis ihres Wesens nicht möglich. Zudem könnte sich herausstellen,

[4] Für eine hilfreiche Diskussion dieser Unterscheidung, vgl. Quine (1960, § 25). Quine macht darin Massenterme als Vorläufer abstrakter *Singulär*terme aus und weist ausserdem darauf hin, dass mit der Einführung letzterer auch gleich abstrakte *Allgemein*terme eingeführt werden.

dass die Antwort auf die Frage der Identitätskriterien je nach Art der betrachteten Variablen variiert. Die wichtigsten Artunterscheidungen für die Zwecke dieser Arbeit sind diejenigen zwischen freien und gebundenen, syntaktischen bzw. schematischen (oder substitutionellen) und semantischen (oder referenziellen) Variablen, sowie Individuen- und Prädikatsvariablen. Die Möglichkeit, Variablen im Hinblick auf ihren Wertebereich bzw. die Begrenzung desselben zu sortieren, wird sich unter anderem im Zusammenhang mit der (Un-)Entscheidbarkeit logischer Formalsprachen als bedeutsam erweisen.

Mit der Frage nach den verschiedenen Arten von Variablen tritt indes eine andere hervor, die sich – *plures interrogationes ut una*[5] – bis jetzt in der Grundfrage verborgen hielt und fälschlicherweise als beantwortet angenommen werden könnte: ob es überhaupt *eine* Gattung gibt, die alles umfasst, was Variable oder der Gebrauch einer solchen genannt wird. Die Philosophiegeschichte ist voll von solchen stillschweigenden Annahmen. Ist die Frage ‚Was ist X?' einmal in den Raum geworfen, wird oft nur noch über rivalisierende Definitionen von X gestritten, nicht jedoch darüber, ob es gute Gründe gibt, anzunehmen, dass eine hinreichende Einheit hinter dem womöglich bloss scheinbar einheitlich gebrauchten ‚X' vorliegt. Dieser Fehler soll hier vermieden werden, zumal bereits ein kurzer Blick in die Geschichte des Worts ‚Variable' ausreicht, um die Annahme einer einheitlichen Gattung fragwürdig erscheinen zu lassen. Im Lauf der Zeit wurden durchaus disparate Dinge aus unterschiedlichen Gründen, mitunter aus Missverständnis, unter dieses Wort gezwängt.

1.2.1. Frege gegen Variablen

In ihrer Darstellung der Logikgeschichte, *The Development of Logic*, schreiben William und Martha Kneale über die Wortgeschichte von ‚variable':[6]

> Originally the word ‹variable›, now used to refer to letters occurring in certain ways in mathematical texts, was applied to physical magnitudes which varied with time [...] and in formulae of the kind $y = f(x)$ the letters x and y were regarded as abbreviations for

[5] Vgl. Petrus Hispanus, *Tractatus*, VII §§ 171 ff. Anstatt von mehreren Fragen in einer spricht man heute üblicherweise von einer *loaded question*. Doch unsere Grundfrage soll gerade keine *loaded question* sein, wenngleich sie mehrere Fragen in sich enthält. Die lateinische Wendung scheint mir deshalb geeigneter, weil damit auch Mehrfachfragen abgedeckt sind, bei denen es nicht der Fall ist, dass eine der ineinander gewickelten Fragen stillschweigend als beantwortet angenommen wird, wie z. B. bei der Frage ‚Sind $\sqrt{2}$ und π transzendentale Zahlen?'. (Die stillschweigende Annahme bei dieser Frage könnte sein, dass *beide* Zahlen transzendental oder *beide* nicht transzendental sind. Zwar ist die Annahme falsch und daher mögliche Quelle von Trugschlüssen, zugleich aber ist sie an der Fragenoberfläche gut auszumachen und entsprechend leicht ist es, möglichen Fallstricken auszuweichen.)

[6] W. Kneale und M. Kneale (1962, S. 396).

> phrases such as ‹the time elapsed› and ‹the distance traversed›. When pure mathematicians began to talk of variables and functions, they did so because they were interested in the mathematical patterns exhibited by some physical laws; but they could no longer say that the letters they used were abbreviations for phrases like those just mentioned, and the usages which they then adopted, in particular the custom of calling the letters themselves variables, have given rise to a great deal of confusion and perplexity.

Es war denn auch dieser verworrene Gebrauch von ‚Variable', der Frege zu der Forderung bewog, das Wort mitsamt seiner deutschen Übersetzung aus dem mathematischen Vokabular zu tilgen: «Das Wort ‹Veränderliche› hat mithin in der reinen Analysis keine Berechtigung».[7] Was waren im Einzelnen seine Gründe?[8]

Zuerst weist Frege auf die Konnotation des Ausdrucks hin. Eine Variable oder Veränderliche scheint etwas zu sein, das sich verändert, mithin in der Zeit existiert, da jede Veränderung in der Zeit vor sich geht. Die reine Analysis aber habe «mit der Zeit nichts zu schaffen».[9] Desgleichen hätten Variablen weder in der Logik noch in irgend einer anderen Disziplin der reinen Mathematik ihren Platz, wenn diese losgelöst von ihren Anwendungen betrachtet wird. Dass sich Logik und Mathematik auf Zeitliches anwenden lassen, ändert nichts daran, dass ihre Gegenstände zeitlos sind.[10]

---

[7] Frege (1904, S. 276).

[8] Was nun folgt, ist keine detailgetreue Argumentrekonstruktion, sondern die Aneignung einiger Betrachtungen aus Freges Aufsatz ‚Was ist eine Funktion?' (Frege (1904)). In diesem Aufsatz übt Frege scharfe Kritik an der damals üblichen Rede von veränderlichen Grössen und unbestimmten Zahlen in der reinen Mathematik. Gleichzeitig erläutert er seinen Funktionsbegriff, der an die Stelle des Begriffs einer Variablen oder Veränderlichen treten soll. Ich gestatte mir, für die Zwecke des vorliegenden Texts manches, das sich in Freges Aufsatz findet, abzukürzen und anderes, was sich nicht darin findet, zu ergänzen. Ein Teil der Ergänzungen ist nachgelassenen Schriften Freges (in Frege (1983)) entnommen. Die betreffenden Stellen sind mit Anmerkungen versehen, die jeweils genaue Seitenangaben enthalten. Andere Ergänzungen und Anpassungen sind meine eigenen. Die Kritik am Variablenbegriff der *Principia Mathematica*, die Frege in seinem Briefwechsel mit Philip E. B. Jourdain äussert (vgl. insbes. Frege (1976, S. 116 f. u. 129-133)), enthält Punkte, die über das hier berücksichtigte Material hinausgehen. Wir werden im nächsten Unterkapitel (in 1.3.3.1 und 1.3.3.2) darauf zurückkommen.

[9] Frege (1904, S. 273).

[10] In der Schrift ‚Logik in der Mathematik', die 1914 entstanden, aber erst im Nachlass erschienen ist, führt Frege diesen Punkt etwas weiter aus: «Die Gesetze der Zahlen aber sind unzeitlich ewig. Die Zeit kommt in der Arithmetik und Analysis nicht vor. Nur bei den Anwendungen der Arithmetik kann es sich um die Zeit handeln. Die Zahl 3 ist immer eine Primzahl gewesen und wird stets eine solche bleiben. Wie sollte hier eine Veränderung möglich sein? Dass es unpassend ist, von einer veränderlichen Zahl zu sprechen, fühlt man und sagt deshalb lieber ‹veränderliche Grösse›, als ob damit viel gewonnen wäre. Freilich, eine Eisenstange wird länger, wenn sie erwärmt wird, und wird kürzer, wenn sie abgekühlt wird, sie verändert sich in der Zeit. [...] Die Eisenstange und die Zeit sind im Grunde unwesentlich für die Arithmetik; denn diese beschäftigt sich weder mit Kieselsteinen, noch mit Pfeffernüssen, noch mit Eisenbahnzügen, noch mit Bücherreihen, noch mit Eisenstangen, noch mit Zeitmomenten. Das sind Dinge, die bei den Anwendungen vorkommen können, aber in den systematischen Aufbau der Mathematik nicht gehören» Frege (1983, S. 256 f.). Dass Messen und

Dem könnte man entgegenhalten, dass gewisse Zahlen Veränderung durchaus zulassen, obwohl sie als Zahlen zweifellos zu den Gegenständen der Arithmetik, ja womöglich auch der Logik gehören. Die Zahl der Einwohner Zürichs zum Beispiel variiert täglich. Ist das etwa keine veränderliche Zahl? Und wird sie nicht mit Recht eine Variable genannt? Frege entgegnet, dass ein Ausdruck wie ‚die Zahl der Einwohner Zürichs' ohne Zeitangabe gar keine Zahl bezeichne. Um eine Zahl eindeutig bezeichnen zu können, müssen Ausdrücke dieser Art die Angabe eines bestimmten Zeitpunkts enthalten. Ohne diese (wenigstens hinzugedachte) Angabe vermag der Satz ‚Die Zahl der Einwohner Zürichs variiert täglich' keinen Gedanken auszudrücken. Doch auch der Satz ‚Die Zahl der Einwohner Zürichs zum Zeitpunkt t_0 variiert täglich' ist sinnlos. Gemeint sein muss, dass für beliebige Zeitpunkte t_1 und t_2, die weit genug auseinanderliegen, die Einwohnerzahl Zürichs zum Zeitpunkt t_1 in der Regel verschieden ist von der Einwohnerzahl Zürichs zum Zeitpunkt t_2. Hier ist aber nicht mehr von einer einzelnen Zahl die Rede, sondern von zwei verschiedenen. Es liegt also gar keine Veränderung vor. Denn Veränderung kann es nur geben, wo ein Gegenstand derselbe bleibt. Dass er sich verändert, heisst ja, dass er Eigenschaften gewinnt oder verliert und dabei derselbe bleibt. Das ist nicht derselbe Vorgang, wie wenn ein Gegenstand durch einen anderen ersetzt wird.[11]

Was aber wäre bei variablen Zahlen das Gleichbleibende, die zugrundeliegende Substanz? Und welche Eigenschaften wechselten sich ab? Man könnte die Zahl der Einwohner Zürichs zum jetzigen Zeitpunkt betrachten und hätte damit eine bestimmte sich gleichbleibende Zahl herausgegriffen, die eben noch unter den Begriff ‚x ist die Einwohnerzahl Zürichs' fällt, morgen oder übermorgen indes schon nicht mehr. Wechselnde Verhältnisse dieser Art – unter diesen oder jenen nicht-mathematischen Begriff zu fallen – interessieren in der reinen Mathematik jedoch nicht.[12] In Betracht kommen allein interne Eigenschaften: Grössenverhältnisse zwischen bestimmten Zahlen etwa und Eigenschaften wie die Primalität oder genereller die Teilbarkeit durch andere Zahlen. Eine veränderliche

Zählen – d. s. Vorgänge, bei denen Zahlen zur Anwendung kommen – in der Zeit vor sich gehen, ändert nichts an der Unzeitlichkeit der Zahlen, im Gegenteil, wie Frege bereits in den *Grundlagen der Arithmetik* betonte: «Die Zeit ist nur ein psychologisches Erforderniss zum Zählen, hat aber mit dem Begriffe der Zahl nichts zu thun. Wenn man unräumliche und unzeitliche Gegenstände durch Raum- oder Zeitpunkte vertreten lässt, so kann dies vielleicht für die Ausführung der Zählung vortheilhaft sein; grundsätzlich wird aber dabei die Anwendbarkeit des Zahlbegriffes auf Unräumliches und Unzeitliches vorausgesetzt» Frege (1884, S. 53).

[11] Frege macht dies an Beispielen deutlich, u. a. an diesem: «Ein Stab dehnt sich durch Erwärmung aus. Während dies vorgeht, bleibt er derselbe. Wenn er statt dessen weggenommen und durch einen längeren ersetzt würde, so könnte man nicht sagen, dass er sich ausgedehnt habe» Frege (1904, S. 274).

[12] Dieser Punkt findet sich nur in der nachgelassenen Schrift ‚Logische Mängel in der Mathematik' (vgl. Frege (1983, S. 173)), die eine Vorstufe der Argumentation in Frege (1904) enthält.

Zahl müsste also eine sein, die zum Beispiel ihre Eigenschaft, prim zu sein, verlieren und wieder erlangen kann. Es ist aber nicht einzusehen, wie eine Zahl, die durch die Gesamtheit ihrer internen Eigenschaften vollständig und eindeutig bestimmt ist, auch nur eine dieser Eigenschaften verlieren könnte, ohne dass sie dadurch aufhörte, dieselbe zu sein.

Anstatt krampfhaft zu versuchen, das Undenkbare zu denken, wäre es klüger einzuräumen, dass die Ausdrücke ‚Variable' und ‚Veränderliche' lediglich ein Gleichnis bieten, «das, wie die meisten Gleichnisse, irgendwie hinkt».[13] Mit den in der Mathematik so gebräuchlichen Buchstaben ‚x', ‚y' oder ‚n' werden keine im strengen Sinn veränderlichen Gegenstände bezeichnet – aber eben auch keine vollständig bestimmten. Wendungen wie ‚Sei n eine beliebige natürliche Zahl' führen Buchstaben jedenfalls nicht als Eigennamen für *bestimmte* Zahlen ein. Der anschliessende Gebrauch eines so eingeführten Buchstabens entspricht nicht in allem dem einer Ziffer. Zu fragen, *welches* Element aus der Menge der natürlichen Zahlen ‚n' nun bezeichne, wäre die Wendung missverstehen. Ob n gerade oder ungerade, prim oder nicht, grösser oder kleiner als 2 ist, bleibt unbestimmt – darin liegt gerade der Witz dieser Art von Buchstabengebrauch.[14] Und doch scheint ‚n' das Zeichen einer natürlichen Zahl zu sein, wenngleich keiner bestimmten. (Es heisst ja immerhin: „Sei n eine natürliche Zahl".) Eine Variable wäre also das, was ein solcher Buchstabe zu bezeichnen vermag: ein unbestimmter Gegenstand.[15]

Nach dieser Auffassung lässt sich die Variabilität, die der Ausdruck ‚Variable' konnotiert, scheinbar leicht erklären. Indem der unbestimmten Zahl n weitere Bedingungen auferlegt werden (sei dies im Zusammenhang mit einem mathematischen Problem oder durch einen Akt der Willkür), kann es nämlich geschehen, dass sie sich in einen bestimmten Gegenstand verwandelt oder ihr ein solcher gleichsam zuwächst. Um den ganzen Vorgang zu beschreiben, sagt man, die Variable habe einen Wert angenommen oder ihr sei ein Wert zugewiesen worden. Typischerweise vermag dieselbe Variable mehrere Werte anzunehmen, mithin in ihrem Wert zu variieren. Die Menge dieser Werte heisst ihr (Werte-)Bereich. Die Variabilität einer Variablen besteht nach dieser Auffassung also letztlich darin, dass ihr Bereich eine Vielzahl von Elementen enthalten kann.[16]

---

[13] Frege (1983, S. 174).

[14] Vgl. Frege (1904, S. 275).

[15] Diese Ansicht schreibt Frege einem zeitgenössischen Mathematiker zu, Emanuel Czuber, und bezieht sich in seiner Kritik auf dessen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, vgl. Frege (1904, S. 275). Die Widerlegung dieser Ansicht in Frege (1904) fällt gegenüber der Diskussion in Frege (1983, S. 175-178) weitaus kürzer aus.

[16] In Frege (1904) wird die Ausdrucksweise ‚eine Variable nimmt einen Wert an' anders ausgelegt (vgl. S. 276) und entsprechend ist die Widerlegung des damit verbundenen Variablenverständnisses nicht

Das Problem ist nur, dass sich Variablen – wenn sie als unbestimmte Gegenstände mit variierendem Wert aufgefasst werden – nicht immer unterscheiden lassen, selbst wenn es unerlässlich wäre, sie auseinanderzuhalten. Freilich, wenn der Buchstabe ‚n' als Zeichen für eine unbestimmte Zahl, die gerade ist, und der Buchstabe ‚m' für eine, die ungerade ist, eingeführt wird, sind die beiden bezeichneten Variablen mühelos auseinanderzuhalten. Ihre Wertebereiche sind ja disjunkt: der eine umfasst alle geraden, der andere alle ungeraden Zahlen. Wie aber ist die Wendung ‚Seien n und m beliebige natürliche Zahlen' zu verstehen? Hier werden, so scheint es, Buchstaben für *zwei* Variablen mit *gleichem* Wertebereich eingeführt. Es ist keine Hinsicht erkennbar, in der sich die unbestimmte Zahl n von der unbestimmten Zahl m unterscheiden würde. Und nichts spricht dagegen, ihnen jeweils denselben Wert zuzuweisen. Liegt also doch nur eine Variable vor? Dann wäre es überflüssig, zwei verschiedene Buchstaben zu ihrer Bezeichnung einzuführen. Um gewisse Probleme zu lösen oder Aussagen zu formalisieren, ist es aber erforderlich, mehrere Variablen mit gleichem Wertebereich zur Verfügung zu haben. Wie es eine Mehrzahl solcher Variablen geben kann, bleibt folglich ein Rätsel, solang sie als unbestimmte und bloss durch ihren Wertebereich gekennzeichnete Gegenstände aufgefasst werden.[17] Nach dieser Auffassung können allein Variablen verschiedener Sorte bzw. nur verschiedene Sorten von Variablen auseinandergehalten werden. (Wir werden auf dieses Problem der Unterscheidung bereichsgleicher Variablen im nächsten Unterkapitel, in 1.3.3.3, kurz zurückkommen.)

Der Fehler, den diese Auffassung begeht, ist, dass sie die Unbestimmtheit in die vermeintliche Bedeutung der Buchstaben legt, anstatt sie an der Art und Weise, wie sich diese auf bestimmte Gegenstände beziehen, zu erkennen. Frege bringt es auf den Punkt:[18]

> Freilich kann man hier von Unbestimmtheit reden; doch ist ‹unbestimmt› hier kein Beiwort zu ‹Zahl›, sondern ein Adverb etwa zu ‹andeuten›. Man kann nicht sagen, dass ‹n› eine unbestimmte Zahl bezeichne, wohl aber, dass es Zahlen unbestimmt andeute. Und so ist es immer, wo Buchstaben in der Arithmetik gebraucht werden, mit Ausnahme der wenigen Fälle (π, e, i), wo sie als Eigennamen auftreten.

Abgesehen von solchen Ausnahmen *bezeichnen* Buchstaben in der Logik und Mathematik überhaupt keine Gegenstände und schon gar keine unbestimmten. Sie deuten bestimmte

genau dieselbe wie die gleich folgende. Die hier vorgeschlagene Lesart stützt sich auf Passagen in Frege (1983, S. 175-177).

[17] Vgl. Frege (1904, S. 275-276) und Frege (1983, S. 176). Frege gibt auch eine Variante dieses Rätsels: Wären die Buchstaben ‚n' und ‚m' Eigennamen, müsste man doch auch ihre Bedeutungen auseinanderhalten können.

[18] Frege (1904, S. 275).

Gegenstände aus einem vorgegebenen Bereich unbestimmt an. Für sich genommen haben sie also keine Bedeutung.

1.2.2. Freges Analyse des Buchstabengebrauchs

Um zu verstehen, wie an sich bedeutungslose Markierungen in sinnvollen Sätzen vorkommen und sogar zu deren Gesamtsinn beitragen können, gilt es, wie Frege betont, den Zusammenhang ihres Gebrauchs zu betrachten:[19]

> Nehmen wir ein Beispiel! ‹Wenn die Zahl n gerade ist, so ist $\cos n\pi = 1$.› Hier hat nur das Ganze einen Sinn, weder der Bedingungssatz für sich noch der Folgesatz für sich. Die Frage, ob die Zahl n gerade sei, kann gar nicht beantwortet werden, ebensowenig, ob $\cos n\pi = 1$ sei. Dazu müsste ‹n› ein Eigenname einer Zahl sein, die dann notwendig eine bestimmte wäre. Man schreibt den Buchstaben ‹n›, um Allgemeinheit zu erzielen. Voraussetzung ist dabei, dass wenn man ihn durch den Eigennamen einer Zahl ersetzt, sowohl der Bedingungssatz als auch der Folgesatz einen Sinn erhält.

Offenbar unterliegt der Buchstabengebrauch in der Mathematik einem Kontextprinzip.[20] Erst im Zusammenhang des *gesamten* Satzes, worin sie vorkommen, wird ihr Beitrag an den Sinn des Satzes ersichtlich. Insbesondere können sie dazu dienen, allgemeine Gedanken auszudrücken. Dafür muss aber eindeutig festgelegt sein, wie weit der Zusammenhang genau reicht, den es zu berücksichtigen gilt. Freges Beispiel verdeutlicht, dass Buchstaben nicht allen gedanklichen Bestandteilen, in deren Ausdruck sie vorkommen, zwingend Allgemeinheit verleihen. Im Konditional ‚Wenn die Zahl n gerade ist, so ist $\cos n\pi = 1$' drücken weder Antezedens noch Konsequens für sich genommen einen allgemeinen Gedanken aus, obwohl ‚n' in beiden vorkommt. Der zu berücksichtigende Bereich – das Gebiet des Buchstabens, wie Frege sagt – erstreckt sich hier über die gesamte Satzfügung. Die ganze Aussage ist gleichsam von Allgemeinheit durchdrungen und hat also die Form $\forall x(Fx \to Gx)$, nicht etwa $\forall x Fx \to \forall x Gx$.[21]

---

[19] Frege (1904, S. 275).

[20] In ‚Logik in der Mathematik' führt Frege etwas weiter aus, wie sich dieses Prinzip hier auswirkt: «Die Buchstaben dienen in der Arithmetik und Analysis dazu, den Sätzen Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen und dies auch dann, wenn dies dadurch verdeckt wird, dass ein grösserer Teil der Beweisführung in Worten vor sich geht. Man muss eben alles dabei in Betracht ziehen, nicht nur, was in arithmetischen Formeln verläuft. Man sagt z. B. etwa ‹Es bezeichne a das und das, es bezeichne b das und das› und nimmt das nun zum Ausgangspunkt einer Untersuchung. Eigentlich haben wir hier Bedingungssätze: ‹wenn a das und das ist›, ‹wenn b das und das ist›, und diese müssen als solche mitgeführt oder bei jedem der folgenden Sätze hinzugedacht werden, und das Ganze bekommt durch diese nur andeutenden Buchstaben Allgemeinheit» Frege (1983, S. 254-255).

[21] In einer Randbemerkung über den Buchstabengebrauch in der Arithmetik weist Frege darauf hin, dass seine Begriffsschrift gegenüber informellen Ausdrucksweisen den Vorteil hat, dass sie durch

Die Allgemeinheit des Gedankens, den der angeführte Beispielsatz – ‚Wenn die Zahl n gerade ist, so ist $\cos n\pi = 1$' – ausdrückt, äussert sich nun so: Ist dieser Gedanke wahr, dann drückt jeder Satz ebenfalls einen wahren Gedanken aus, der aus besagtem Konditional dadurch hervorgeht, dass anstelle des Buchstabens ‚n' überall, wo dieser vorkommt, derselbe passende Eigenname eingesetzt wird.[22] Aus der Wahrheit des Allgemeinen folgt mithin die Wahrheit des Besonderen.[23] Auf der Zeichenebene vollzieht sich dieser Übergang dadurch, dass Buchstaben durch Zeichen mit bestimmter Bedeutung, etwa durch Zahlzeichen, ersetzt werden. Um die Erhaltung der Wahrheit sicherzustellen, sind dem Ersetzen drei Einschränkungen auferlegt. Erstens müssen *alle* Vorkommnisse eines Buchstabens innerhalb des zu berücksichtigenden Gebiets ersetzt werden. Zweitens gilt es, an allen betroffenen Stellen Vorkommnisse *desselben* Zeichens einzusetzen. Und drittens muss es sich dabei um ein passendes Zeichen handeln, d. h. es müssen infolge seiner Einsetzung alle Teilsätze einen Sinn erhalten.[24] Letzteres ist genau dann der Fall, wenn das eingesetzte Zeichen eines derjenigen Elemente bezeichnet, die der Buchstabe unbestimmt andeutet.[25] Folglich können Buchstaben dem Ausdruck von Allgemeinheit nur deshalb dienen, weil sie für sich genommen keine Bedeutung haben – keinen Gegenstand eindeutig bezeichnen –, sondern Gegenstände aus einem gewissen Bereich bloss unbestimmt andeuten. Handelte es sich bei diesen Buchstaben um Eigennamen oder andere Zeichen mit fester Bedeutung, müsste es ganz rätselhaft erscheinen, weshalb sie *salva veritate* durch eine Vielzahl von Zeichen mit anderer Bedeutung ersetzbar sein sollten. Um Allgemeinheit auszudrücken, braucht es Unbestimmtheit. In den Zeichen

---

die klare Abgrenzung des Gebiets eines Buchstabens unzweideutig anzeigt, wie viel Kontext jeweils miteinbezogen werden muss: «Im grossen und ganzen sollen ja auch in der Arithmetik die Buchstaben Allgemeinheit des Inhalts verleihen. Aber wem? Meistens ist es nicht ein einzelner Satz oder ein Satzgefüge im Sinne der Grammatik, sondern eine Gruppe von scheinbar ganz selbständigen Hauptsätzen, deren Abgrenzung nicht immer leicht zu erkennen ist. Die Logik muss eigentlich verlangen, dass diese scheinbar selbständigen Sätze zu einem Satzgefüge vereinigt werden; aber wenn man dieser Forderung nachkäme, ergäben sich meist sprachliche Ungetüme. In der Begriffsschrift hat der Urteilsstrich ausser der behauptenden Kraft die Fähigkeit, das Gebiet der Allgemeinheit der lateinischen Buchstaben abzugrenzen» Frege (1983, S. 211). Es gilt allerdings zu beachten, dass Frege in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* die Möglichkeit vorsieht, den Bereich eines lateinischen Buchstabens (d. h. einer freien Variablen) über verschiedene Urteile hinweg zu erweitern, vgl. Frege (1893, § 17). Diese Erweiterung ist für das begriffsschriftliche Beweisen unerlässlich, vgl. dazu Heck (2012, S. 59-64).

[22] Vgl. Frege (1983, S. 176 f.).

[23] Vgl. Frege (1983, S. 281).

[24] Eine Zusammenfassung der Regeln für die Ersetzung von Buchstaben gibt Frege in § 48 der *Grundgesetze* (Frege (1893, S. 62-64)). Ausführlicher besprochen werden sie indes früher im Buch, vgl. insbesondere §§ 8 und 20-23 (Frege (1893, S. 13-14 u. 35-41)).

[25] Vgl. Frege (1893, S. 34 u. 37); vgl. auch die etwas ausführlicheren Erläuterungen in Frege (1983, S. 258 f.).

freilich, nicht im Bezeichneten. Und es braucht, um Ambiguitäten zu vermeiden, eine klare Abgrenzung des Buchstabengebiets, was bei Eigennamen nicht der Fall ist.

Der Allgemeinheit von Gedanken zum Ausdruck verhelfen, ist indes nur ein Beitrag, den Buchstaben im Dienst der Mathematik und Logik zu leisten vermögen. Ihre Gebrauchsweisen sind mannigfaltig. Wie niemand vor ihm erkannte dies Frege mit grosser Klarheit, wenn er auch nach eigenem Bekunden auf manchen Unterschied erst spät aufmerksam wurde. Eine Ursache dafür sieht er in der Abhängigkeit unseres Denkens von den notationalen Mitteln, die zur Verfügung stehen:[26]

> In der Arithmetik gebraucht man die Buchstaben, meistens ohne sich über die Weise, den Zweck und die Berechtigung dieses Gebrauchs auszusprechen, und auch wohl ohne sich selbst ganz klar darüber zu sein. [...] Wir sind sehr abhängig von den äusseren Hilfsmitteln des Denkens, und erst musste wohl die Sprache des Lebens auf einem gewissen Gebiete wenigstens durch ein feineres Hilfsmittel ersetzt sein, bevor gewisse Unterschiede bemerkt werden konnten.

Ein solches feineres Hilfsmittel ist nun seine Begriffsschrift. Sie erlaubt es, Unterschiede zu verdeutlichen, die andere Ausdrucksweisen verschlucken, obgleich sie in deren Gebrauch implizit enthalten sein mögen. Gerade die notationalen Bestandteile mathematischer Ausdrucksweisen sind oft geprägt von einem Streben nach Kürze und Übersichtlichkeit. Alfred North Whitehead, der um Bedeutung und Nutzen guter Notationen wusste, bemerkt dazu: «One very important property for symbolism to possess is that it should be concise, so as to be visible at one glance of the eye and to be rapidly written»; dies erlaube es nämlich, gedankliche Übergange beinah mechanisch auszuführen, ohne die höheren Verstandeskräfte zu beanspruchen.[27] Freilich ist die Gefahr dabei, dass sich trügerische Homographien und andere logische Mängel in die Notationen einschleichen und gerade diejenigen in die Irre führen, die im Umgang mit diesen Notationen besonders vertraut sind, sie gleichsam blind anwenden.

Frege beklagt denn auch, das Streben nach Kürze habe «viele ungenaue Ausdrücke in die mathematische Sprache eingeführt», welche wiederum «die Gedanken getrübt» hätten, und hält dem die Vorzüge (s)einer Begriffsschrift entgegen:[28]

> Niemals sollte man die logische Richtigkeit der Kürze des Ausdrucks opfern. Deshalb ist es von grosser Wichtigkeit, eine mathematische Sprache zu schaffen, die mit strengster Genauigkeit möglichste Kürze verbindet. Dazu wird wohl am besten eine Begriffsschrift

[26] Frege (1983, S. 212). Beide Stellen sind in jener Randbemerkung enthalten, aus der bereits in Anm. 21 zitiert wurde.
[27] Whitehead (1911, S. 61).
[28] Frege (1904, S. 280).

geeignet sein, ein Ganzes von Regeln, nach denen man durch geschriebene oder gedruckte Zeichen ohne Vermittelung des Lautes unmittelbar Gedanken auszudrücken vermag.

Dieses Streben nach logischer Genauigkeit schlägt sich insbesondere darin nieder, dass Freges Begriffsschrift – in ihrem Aufbau und ihrer Darlegung – die subtilste Aufgliederung verschiedener Arten des Buchstabengebrauchs in der Geschichte der Disziplin enthält. Um die wichtigsten Unterscheidungen auch typographisch zu markieren, bedient sich Frege aus verschiedenen Schriftarten und Alphabeten: In den *Grundgesetzen der Arithmetik* werden lateinische Buchstaben (x, a, b; f, F) als freie Variablen gebraucht, deutsche ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$) als gebundene; kleine griechische Vokalbuchstaben (ε, α), um den Ausdruck für Wertverläufe zu bilden; kleine griechische Konsonantenbuchstaben (ξ, ζ; φ) zur Kenntlichmachung der Argumentstellen von Funktionszeichen; und griechische Grossbuchstaben ($\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$; $\mathit{\Phi}$, $\mathit{\Psi}$) als (Pseudo-)Konstanten oder Parameter (siehe auch die Tabelle unten).[29]

Grundgesetze	*Principia Mathematica*	Heutige Notationen
$\mathit{\Phi}(x)$, $f(a)$	ϕx, fa	Fx
$\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathit{\Phi}(\mathfrak{a})$	$(x)\,.\,\phi x$	$\forall x Fx$
$\overset{\mathfrak{f}}{\smile}\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \mathfrak{f}(\mathfrak{a})$	$(\phi)\!:\!(x)\,.\,\phi x$	$\forall F(\forall x Fx)$
$\dot{\varepsilon}\mathit{\Phi}(\varepsilon)$	$\hat{z}(\phi z)$	$\{x : Fx\}$
$\mathit{\Psi}(\xi, \zeta)$, $\varphi(a)$	$\psi(\hat{x}, \hat{y})$, $\hat{\phi} a$	$\lambda xy(fxy)$, $\lambda f(fa)$
$\mathit{\Phi}(\mathit{\Gamma})$, $f(\mathit{\Delta})$	ϕx, fa	Fa

[29] Die tabellarische Gegenüberstellung verschiedener Notationen soll hier keinesfalls signalisieren, dass Ausdrücke, die auf derselben Zeile liegen, in ihren jeweiligen Systemen genau dieselbe Bedeutung haben oder gleich gebraucht werden. Zum Beispiel wäre es problematisch Freges ‚$\dot{\varepsilon}\mathit{\Phi}(\varepsilon)$‘ durch ‚$\{x : Fx\}$‘ wiedergeben zu wollen, vgl. dazu Landini (2018, S. 4-9). Die Ausdrücke in der mittleren und der rechten Spalte sind bestenfalls Annäherungen an Freges Bezeichnungsweise. In den zwei letzten Zeilen kommt erschwerend hinzu, dass Ausdrücke, die kleine griechische Konsonantenbuchstaben oder griechische Grossbuchstaben enthalten, nur in der Darlegung der Begriffsschrift vorkommen, nicht in ihren Anwendungen, vgl. Frege (1893, S. 6 (Anm. 1), S. 9 (Anm. 3), S. 37). Die Ausdrücke in der rechten Spalte hingegen sind wohlgeformte Elemente formaler Sprachen (oder können solche sein). Ausserdem unterscheidet sich die λ-Notation von den Notationen in den *Grundgesetzen* und den *Principia* dadurch, dass die Bereiche der gebundenen Variablen eindeutig abgesteckt sind. Für eine Besprechung weiterer Unterschiede zwischen Freges Gebrauch kleiner griechischer Konsonantenbuchstaben und dem λ-Kalkül, vgl. Landini (2018, S. 137-144). In Feys und Fitch (1969, S. 17) wird denn auch eher die Verwandtschaft des λ-Operators mit dem Operator ‚$\hat{x}$‘ betont, den Russell und Whitehead für ihre Klassenschreibweise ‚$\hat{x}(\phi x)$‘ verwenden.

Die Buchstaben aus den beiden letztgenannten Klassen kommen in den begriffsschriftlichen Entwicklungen notabene nicht vor. Sie sind lediglich Teil der Metasprache, in der Frege die Begriffsschrift darlegt und erläutert.[30] Begriffsschriftliche Sätze haben eine feste bestimmte Bedeutung. Sie sind keine Schemata und lassen, anders, als es bei neueren Formalismen oftmals der Fall ist, keine unterschiedlichen Interpretationen zu.[31] Gleichwohl ist der Gebrauch, den Frege von den griechischen Grossbuchstaben sowie von ‚ξ' oder ‚φ' macht, in der Mathematik durchaus geläufig. Wenn er sich darauf festlegt, erstere als Namen zu verwenden, «als ob sie etwas bedeuteten, ohne dass ich die Bedeutung angebe»[32], dann ist dies dem Gebrauch der Buchstaben ‚a', ‚b', ‚c' etc. in algebraischen Gleichungen angelehnt, die in dieser Rolle auch (Pseudo-)Konstanten oder Parameter genannt werden.

(Nebenbei erwähnt: Das mitunter heute noch anzutreffende Schwanken zwischen den Termini ‚Variable', ‚Konstante' und ‚Parameter' beschrieb bereits Whitehead vor mehr als hundert Jahren in seiner *Introduction to Mathematics*: «$ax + by - c = 0$ represents a variable linear correlation between x and y. In comparison with x and y, the three variables a, b, and c are called constants. Variables used in this way are sometimes also called parameters. Now, mathematicians habitually save the trouble of explaining which of their variables are to be treated as ‹constants›, and which as variables [...] by using letters at the end of the alphabet for the ‹variable› variables, and letters at the beginning of the alphabet for the ‹constant› variables, or parameters. The two systems meet naturally about the middle of the alphabet. Sometimes a word or two of explanation is necessary; but as a matter of fact custom and common sense are usually sufficient, and surprisingly little confusion is caused by a procedure which seems so lax».[33] Einen Weg, den Wortgebrauch zu straffen, skizziert etwa Roy Cook in seinem *Dictionary of Philosophical Logic*: «A parameter is an expression whose referent is assumed to be fixed relative to a particular situation, but whose value can vary across situations. Thus, parameters differ from singular terms or constants, whose denotation is constant across

[30] In den *Grundgesetzen* unterscheidet Frege zwar nicht ausdrücklich zwischen Objekt- und Metasprache, trennt aber die *Darlegung* der Begriffsschrift von ihrer Anwendung beim Formulieren und Beweisen logischer und arithmetischer Sätze klar ab. In einer seiner letzten Schriften aus dem Nachlass findet sich dann auch eine entsprechende Unterscheidung zwischen Hilfs- und Darlegungssprache, vgl. Frege (1983, S. 280 f.).

[31] Vgl. dazu Goldfarb (1979, S. 352).

[32] Frege (1893, S. 9 (Anm. 3)).

[33] Whitehead (1911, S. 69-70).

situations, and from variables, which range over all entities of the appropriate sort within a particular situation».[34])

Auch die anderen erwähnten Gebrauchsweisen haben ihre Entsprechung in mathematischen Notationen. Um ein Beispiel aufzunehmen, das Frege bespricht: In der Gleichung

$$\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx} = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

kommt der Buchstabe ‚x' sowohl frei als auch gebunden vor: gebunden durch den Operator d auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, frei auf der rechten.[35] Offensichtlich soll sein Vorkommen dazu dienen, die Allgemeinheit der Gleichung auszudrücken. Nach den Regeln des arithmetischen Buchstabengebrauchs müsste also, falls die Gleichung allgemein wahr ist, eine ebenfalls wahre Gleichung hervorgehen, wenn irgend ein Zahlzeichen anstelle von ‚x' eingesetzt wird. «Aber der Ausdruck

$$\langle\frac{d\cos\frac{2}{2}}{d2}\rangle$$

ist unverständlich, weil die Funktion nicht erkennbar ist. Wir wissen nicht, ob sie

$$\cos\frac{()}{2} \text{ oder } \cos\frac{2}{()} \text{ oder } \cos\frac{()}{()}$$

sei».[36] Den Grund für diese Schwierigkeit sieht Frege darin, dass dem Buchstaben ‚x' zwei unterschiedliche Aufgaben anheimfallen: dem Ausdruck der Allgemeinheit zu dienen und die Argumentstellen von Funktionszeichen kenntlich zu machen. Dieses doppelte Rollenspiel, dem ein logischer Mangel der Notation zugrunde liegt, könnte zumindest auf der linken Seite der Gleichung, wo ‚x' gebunden vorkommt, zu Verwirrung führen. Beim Differentialquotienten handle es sich nämlich um eine ungleichstufige Funktion mit zwei Argumenten, «von denen das eine eine Funktion erster Stufe mit einem Argumente,

[34] Cook (2009, S. 216). Eine ähnliche Regelung findet sich in Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 73 (Anm. 2)). In Serfati (2005, S. 173) wird der Ursprung der Trias Variable-Parameter-Konstante bei Leibniz angesetzt.

[35] Für weitere Beispiele mathematischer Notationen, in denen freie und gebundene Variablen vorkommen, vgl. Kleene (1967, S. 80 f.). Offenbar hat die Unterscheidung, die wir aus der Prädikatenlogik kennen, ihren Ursprung in weitaus älteren Notationen insbesondere aus dem Bereich der Integral- und Differentialrechnung.

[36] Frege (1904, S. 279).

das andere ein Gegenstand sein muss«.[37] Das ‚x' in

$$\frac{d\cos\frac{x}{2}}{dx}$$

müsste folglich sowohl die Gegenstände unbestimmt andeuten, die in die zweite Argumentstelle des Differentialquotienten passen, als auch die Argumentstelle desjenigen Funktionszeichens kenntlich machen, das die erste Argumentstelle des Differentialquotienten bereits besetzt (d. i. von ‚$\cos\frac{\xi}{2}$'). Eine aus logischer Sicht vorteilhaftere Notation würde diese beiden Aufgaben auf verschiedene Buchstaben verteilen. Mit Hilfe von Churchs λ-Notation zum Beispiel liesse sich der durch die obige Gleichung etwas missverständlich ausgedrückte Gedanke genauer abbilden, etwa so:

$$D(\lambda x(\cos\frac{x}{2}), y) = -\frac{1}{2}\sin\frac{y}{2}$$

1.2.3. Bekräftigung der Grundfrage

Frege wusste nur zu gut um die logische, ja philosophische Natur seiner Kritik. Der Mangel in der Bezeichnung des Differentialquotienten etwa würde das Fortschreiten auf dem Gebiet der Analysis gewiss nicht aufhalten und höchstens diejenigen in Verwirrung stürzen, die in ihrem Studium der Mathematik die Definitionen ganz genau lesen.[38] Seine mitunter polemisch vorgetragenen Einwände gegen das Variablengerede sollten ebenso wie seine sorgfältige Sezierung des Buchstabengebrauchs vor allem dazu dienen, das Wesen der Funktion zu beleuchten, das hinter dem Schleier ungenauer Ausdrucksweisen und mangelhafter Notationen verzerrt und bruchstückhaft erschien. Historisch gesehen mögen Freges Arbeiten tatsächlich zu einer gewissen Klärung des mathemati-

[37] Frege (1893, S. 39). Die zweite Argumentstelle, in die Namen für Gegenstände gehören, braucht es für Frege schon deshalb, weil nach seinen Festlegungen die Werte einer Funktion immer Gegenstände sind, nie Funktionen. Der Wert einer Funktion sei das, wozu sie als ungesättigtes Wesen ergänzt wird, mithin etwas Abgeschlossenes, ein Gegenstand, vgl. Frege (1893, S. 6, §§ 21-22). Funktionen, die Funktionen auf andere Funktionen abbilden, wären für Frege ein Unding.

[38] Vgl. etwa Frege (1983, S. 180, 232-234). Für den zweiten Teil der Aussage, vgl. Frege (1983, S. 289 f.): «Die Mathematiker sind durch das Wesen ihrer Wissenschaft genötigt worden, einen Begriff zu fassen, den sie Funktion genannt haben. Schon in den oberen Klassen der höheren Schulen werden die Schüler mit den trigonometrischen Funktionen bekannt gemacht und, wenn sie dann etwa Mathematik studieren, hören sie manches von den Funktionen, ohne dass ihnen klar wird, was man damit benennen will. Ihre Lehrer geben sich die grösste Mühe, aber vergebens, und gerade die begabtesten Schüler begreifen es vielleicht am wenigsten, weil sie merken, dass die gegebenen Erklärungen mit dem eigenen Sprachgebrauch des Lehrers nicht stimmen.» Zu den Begabtesten gehörte offenbar auch Quine, vgl. Quine (1976a, S. 283 f.). Aus diesem Aufsatz stammt auch der obige Vorschlag, den Differentialquotienten mit Hilfe der λ-Notation darzustellen.

schen Funktionsbegriffs und der damit verbundenen Vorstellungen beigetragen haben.[39] Auch ist die Rede von veränderlichen Grössen oder unbestimmten Zahlen ausser Mode gekommen.[40] Als variabel gelten die Werte von Funktionen für die verschiedenen Argumente, die sie aufzunehmen vermögen, jedoch weder die Funktionen selbst noch irgendwelche geisterhaften Gegenstände. Trotzdem ist das Wort ‚Variable' (anders als das Wort ‚Veränderliche') nicht verschwunden, im Gegenteil, sein Gebrauch scheint sich in der Mathematik wie in der Logik dauerhaft festgesetzt zu haben.

Was folgt daraus für unsere Grundfrage? Hat sie angesichts der Klärungsarbeit Freges womöglich ihren Witz, ihre Berechtigung verloren? Müssten wir nicht vielmehr nach dem Wesen von Funktionen fragen? Dass dies einer philosophischen Untersuchung würdig ist, würde niemand bestreiten wollen. Oder wollen wir uns wirklich mit Buchstaben, mit bedeutungslosen Markierungen, befassen? Es sind ja die Buchstaben selbst, die heute Variablen genannt werden. Doch auch gegen diese Auffassung von Variablen führt Frege Gründe an, wie sich bald zeigen wird (in 1.2.3.2).

Bevor wir uns diesen Gründen und dem Gebrauch von Buchstaben als Variablen in der modernen Logik zuwenden, wollen wir einen Blick weiter zurück in die Geschichte werfen. Da zeigt sich nämlich, dass der Buchstabengebrauch, dessen Ursprünge in der Mathematik und insbesondere in der Geometrie zu suchen sind, die Logik von Anfang an begleitet hat. Es handelt sich dabei nicht nur um ein altes, sondern vor allem um ein kaum wegzudenkendes Werkzeug, das die Disziplin in ihrer Entwicklung entscheidend mitgeprägt hat. Gleichwohl bereitet der Versuch, Wandlungen und Kontinuitäten im Gebrauch dieses Werkzeugs nachzuzeichnen, beträchtliche Schwierigkeiten. Offenbar fällt es selbst den in moderner Logik Geschulten nicht leicht, das Wesen des Buchstaben-

[39] Allerdings ist mir keine Untersuchung der Frage bekannt, ob und inwiefern Freges Analyse des Funktionsbegriffs auf mathematische Gebiete auch ausserhalb der Logik einen Einfluss entfaltete. Karl Menger klagte noch 1956 darüber, dass viele («[m]any scientists and some mathematicians») Funktionen nach wie vor als Variablen bezeichneten und folglich dazu neigten, Mengen rechtseindeutiger Paare mit substituierbaren Symbolen zu verwechseln, vgl. Menger (1956, S. 247). Jedenfalls erscheint mir die im Fliesstext geäusserte Vermutung, wonach Freges Arbeiten zu einer gewissen Klärung des mathematischen Funktionsbegriffs beigetragen haben, nicht unwahrscheinlich. Einen möglichen Fall von direkter Beeinflussung erwähnt Quine: In seinem *Treatise on Universal Algebra* von 1898 hatte Whitehead den Umstand, dass Buchstaben, die im Ausdruck für den Differentialquotienten gebunden vorkommen (etwa ‚x' in ‚dx^3/dx'), trotz entsprechender Gleichung ($x^3 = 8$) nicht durch ein bestimmtes Zahlzeichen (d. h. hier nicht durch ‚8') ersetzt werden dürfen, noch als Grund dafür genommen, Gleichungen als Ausdrücke für Äquivalenz und nicht für strikte Identität zu lesen, vgl. Whitehead (1898, S. 5 f.). Später gab Whitehead diese Lesart auf, gegen die Frege wiederholt Einwände erhoben hatte, vgl. etwa Frege (1891, S. 126). Sie erübrigt sich durch die Auffassung des Differentialquotienten als ungleichstufige Funktion mit zwei Argumenten, vgl. dazu Quine (1941, S. 129 f.).

[40] Obschon es gerade in neuerer Zeit Ausnahmen gibt, siehe Anm. 115.

gebrauchs in älteren logischen Traditionen klar zu fassen und sich auf eine einigermassen stimmige Beschreibung zu verständigen. Das hängt auch damit zusammen, obschon nicht nur, dass es dem modernen Variablenverständnis an Klarheit fehlt.

1.2.3.1. Buchstaben in der älteren logischen Tradition

Terminologisch knüpft Frege mit seiner technischen Verwendung des Worts ‚Buchstabe' an die in der antiken Logik und bis in die Moderne[41] übliche Bezeichnung jener Hilfsmittel an, derer sich Aristoteles in den *Analytica priora* bedient, um, wie es sein Kommentator Alexander von Aphrodisias sagt, zu zeigen, dass die Gültigkeit der Syllogismen nicht von ihrer Materie, sondern von ihrer Form (σχῆμα, εἶδος) abhängt:[42]

> The figures [σχήματα] are like a sort of common matrix: by fitting matter into them, it is possible to mould the same form [εἶδος] in different sorts of matter. For just as things fitted into one and the same matrix differ not in form and figure but in matter, so it is with the syllogistic figures.
>
> [Aristotle] uses letters [στοιχεῖα] in his exposition in order to indicate to us that the conclusions do not depend on the matter but on the figure, on the conjunction of the premisses, and on the modes. For so-and-so is deduced syllogistically not because the matter is of such-and-such a kind but because the combination is so-and-so. The letters, then, show that the conclusion will be such-and-such universally, always, and for every assumption.

Alexander bezeichnet diese Hilfsmittel als στοιχεῖα: mit einem Wort also, das als *terminus technicus* sowohl auf die Geometrie verweist (Euklids *Elemente* tragen im Griechischen den Titel Στοιχεῖα) als auch auf die Elemente des griechischen Alphabets. Den Zweck von Aristoteles' Buchstabengebrauch verortet er in der Kenntlichmachung der Form von Syllogismen und damit einhergehend in der Verdeutlichung ihrer allgemeinen, weil rein formalen Gültigkeit.[43]

[41] Vgl. Stekeler-Weithofer (2001, S. 546).

[42] Alexander, *In Aristotelis Analyticorum priorum librum I commentarium*, 6.16-21 und 53.28-54.2; in der Übersetzung von Barnes, Bobzien, Flannery und Ierodiakonou (1991), S. 48, 116. Für eine Diskussion der weitgehenden Synonymie zwischen den beiden griechischen Termini σχῆμα und εἶδος, vgl. Barnes (2007, S. 276-280).

[43] Was genau zur Materie eines Syllogismus zählen soll und was zur Form, wird aus Alexanders Kommentar nicht ganz klar. Es scheinen unterschiedliche Lesarten möglich, vgl. Flannery (1995, S. 111-114), aber auch Barnes (2007, S. 280-284). Spätere Aristoteles-Kommentatoren waren sich unter anderem darüber uneinig, ob die kategorematischen Terme, die in Prämissen und Konklusion an Subjekt- und Prädikatstelle vorkommen, oder die durch die Terme bezeichneten Dinge die logische Materie von Syllogismen ausmachen. Auch wurde im Verlauf der Zeit die Form eines Syllogismus nicht mehr mit seiner Figur (d. i. mit der Anordnung der kategorematischen Terme in den Prämissen) gleichgesetzt, sondern mit seinem Modus, worin die synkategorematischen Terme, die Qualität und Quantität von

Aber wie verhält sich dieser Buchstabengebrauch zu dem Freges? Handelt es sich bei den von Aristoteles verwendeten Buchstaben nicht um etwas wesentlich anderes, um Abkürzungen zum Beispiel? Als man damit begann, die Syllogistik durch die Brille der modernen Logik zu betrachten, schien die Antwort klar: Aristoteles war der Erfinder des Gebrauchs von Buchstaben als Variablen und ihm galt der Ruhm, sie als erster in die Logik eingeführt zu haben:[44]

> Aristotle uses letters as term-variables, that is as signs to mark gaps which may be filled by any general terms we choose, provided gaps marked by the same letter are filled by the same term in any one statement. This is a new and epoch-making device in logical technique. It is used for the first time without explanation in the second chapter of the *Prior Analytics* [...] and it seems to be Aristotle's invention.

Tatsächlich erklärt Aristoteles nirgends, wie und wozu er die Buchstaben gebraucht. Als Erfinder dieses wundersamen Werkzeugs, das er selbst fleissig benutzt, hätte er es demnach für überflüssig befunden, auch nur ein Wort über dessen vielfältigen Gebrauch und Nutzen zu verlieren. Das erscheint wenig wahrscheinlich. Wahrscheinlicher nimmt sich die Annahme aus, Aristoteles habe davon ausgehen dürfen, dass seine Leser- bzw. Hörerschaft diesen Gebrauch ohne Weiteres verstehen würde, weil Ähnliches aus anderen Disziplinen bekannt war.[45] Die einzige Stelle in den *Analytica priora*, die als Kommentar zum Buchstabengebrauch gelesen wurde (obwohl nirgends ausdrücklich von στοιχεῖα die Rede ist), stellt denn auch einen Vergleich mit der Praxis des geometrischen Beweisführens her.[46] In der älteren griechischen Geometrie ist der Gebrauch von Buchstaben

Prämissen und Konklusion bestimmen, enthalten sind. Vgl. zu beiden Punkten Dutilh Novaes (2012, S. 398-405).

[44] W. Kneale und M. Kneale (1962, S. 61). Ein paar Jahre früher hatte Łukasiewicz in seinem einflussreichen Buch über Aristoteles' Syllogistik dessen Leistung ähnlich eingeschätzt: «The introduction of variables into logic is one of Aristotle's greatest inventions. It is almost incredible that till now, as far as I know, no one philosopher or philologist has drawn attention to this most important fact» Łukasiewicz (1957, S. 7-8). In Patzig (1969) wurden die Buchstaben, die Aristoteles bei der Darstellung der gültigen Modi verwendet, als freie Begriffsvariablen aufgefasst, die dem Ausdruck logischer Notwendigkeit dienen und sich bei Bedarf an einen Quantor binden lassen (vgl. S. 36-38).

[45] Vgl. Frede (1974, S. 19).

[46] Die Stelle ist 49 b 33-37 in Kap. 41. Ich gehe jedoch mit Ebert und Nortmann einig (vgl. *Analytica priora*, S. 851-852), dass Aristoteles hier nicht oder zumindest nicht in erster Linie seinen Buchstabengebrauch bespricht, sondern die Beweismethode der ἔκθεσις, d. h. des Herausgreifens eines beliebigen Elements aus einer Menge, um an ihm eine allgemeine Eigenschaft nachzuweisen und dann zu schliessen, dass notwendigerweise jedes andere Element in der Menge diese Eigenschaft ebenfalls besitzt.

jedenfalls weit verbreitet, vielfältig und unterschiedlichen Zwecken dienlich.[47] Aristoteles mag Manches erfunden haben, den Gebrauch von Buchstaben als Variablen eher nicht.

Auch die Annahme, wonach es sich bei den von Aristoteles gebrauchten Buchstaben um Variablen handelt, wurde in einigen neueren Arbeiten zur Syllogistik infrage gestellt. Eine Hypothese besagt, dass Aristoteles den geometrischen Buchstabengebrauch auf die Syllogistik übertragen habe: Wie die griechischen Geometer Buchstaben als Indizes gebrauchten, um auf gezeichnete Figuren und deren Bestandteile zu deuten, würden die griechischen Grossbuchstaben, die Aristoteles unter anderem bei der Darstellung syllogistischer Modi heranzieht, Gattungsnamen wie ‚Mensch' *indizieren.*[48]

In anderen Arbeiten, die den syllogistischen Buchstaben den Status von Variablen ebenfalls absprechen, werden sie wahlweise als *dummy letters*, als Konstanten, ja sogar als vollwertige Gattungsnamen oder Abkürzungen von solchen interpretiert.[49] Gemeinsam ist allen diesen Lesarten die Neigung, jene Sätze, in denen Aristoteles typischerweise Buchstaben verwendet, nicht primär als Ausdrücke offener Aussagen oder als schematische Darstellungen von Syllogismen zu betrachten, sondern als *konkrete* Syllogismen. Die Buchstaben, die zum Beispiel in der Darstellung des Modus *Barbara* vorkommen

> wenn das A von jedem B und das B von jedem C (ausgesagt wird), so wird notwendig auch das A von jedem C ausgesagt[50]

wären demnach wie Terme mit bestimmter Bedeutung zu lesen. Unterschiede, die den Gebrauch von Buchstaben gegenüber dem konkreter Gattungsnamen auszeichnen könnten, werden, wenn nicht negiert, so doch letztlich als nebensächlich erachtet. In ihrem charakteristischen Gebrauch seien die logischen Buchstaben des Aristoteles «concrete and determinate predicate expressions».[51]

---

[47] Vgl. dazu Barnes (2007, S. 347-354), Netz (1999, S. 43-51, 68-88). Auf eine mögliche Verwandtschaft mit geometrischen Gebrauchsweisen wird bereits in Łukasiewicz (1957, S. 7-8) und in W. Kneale und M. Kneale (1962, S. 61-62) hingewiesen. Trotzdem scheinen sie an der Erfindungsthese festzuhalten.

[48] Netz (1999, S. 48-51). Netz bezieht seine Behauptung zunächst nur auf bestimmte griechische Wendungen, von denen Aristoteles an manchen Stellen in den *Analytica priora* Gebrauch macht. Es wurde mir nicht klar, ob er auch die stärkere These vertritt, wonach Aristoteles Buchstaben immer indexikalisch verwende. Dass Aristoteles Buchstaben in einer Weise gebraucht haben könnte, die der unsrigen näher verwandt ist, schliesst Netz jedenfalls aus (auf S. 61).

[49] Für eine kurze Übersicht über die erwähnten Interpretationen (inkl. Literaturangaben in den Anmerkungen), vgl. Flannery (1995, S. 114-115).

[50] *Analytica priora*, 25 b 37-39.

[51] Das ist die Antwort, die in Barnes (2007, S. 354-359) – nach langen und höchst erhellenden Erörterungen – letztlich auf die Frage gegeben wird, wie Aristoteles und seine Nachfolger Buchstaben in der Syllogistik gebrauchen (die zitierte Stelle findet sich auf S. 355). Eine ähnliche Lesart wird in Ierodiakonou (2002, S. 135-137) vertreten: Aristoteles gebrauche Buchstaben wie gewöhnliche Gattungsnamen, ausser, dass es in den Fällen, in denen er Buchstaben einsetzt, keine Rolle spiele, was ihre Bedeutung sei. In Flannery (1995) werden die syllogistischen Buchstaben als potenziell bedeu-

Andere Kommentare dagegen weisen darauf hin, dass Aristoteles hauptsächlich bei der *Darlegung* der syllogistischen Modi von Buchstaben Gebrauch macht (wie etwa an der eben zitierten Stelle). Zu Recht, wie ich meine, heben sie den metasprachlichen Status dieser syllogistischen Buchstaben sowie den schematischen Charakter ihrer Gebrauchsweise hervor.[52] Bereits Alexander bemerkte, dass die buchstabenhaltigen Wendungen, mit denen Aristoteles die verschiedenen syllogistischen Modi einführt, selbst keine Syllogismen sind. Sie seien bloss „Skizzen" (ὑπογραφαὶ) der logischen Form von Schlüssen und als solche insofern unvollständig, als ihnen ein Teil des Materials fehlt, das es für einen konkreten Syllogismus braucht.[53] Die Buchstaben gehören nicht der dargestellten Form an, sondern sind dabei behilflich, diese kenntlich zu machen: erstens, indem sie anzeigen, was konstant bleibt, mithin allen Schlüssen dieser Form gemeinsam ist; und zweitens, indem sie die Stellen markieren, an denen die von Fall zu Fall variierende Materie, d. s. die gehaltvollen Terme, in das Schlussschema einzutreten hat. So gesehen, gehören die Buchstaben weder zur logischen Form, deren Kenntlichmachung sie ermöglichen, noch zur logischen Materie, die sie im Schema vertreten. Sie markieren die Grenze zwischen Materie und Form.

In der Logik des lateinischen Mittelalters werden die syllogistischen Buchstaben von manchen Autoren *termini transcendentes* genannt; nicht, weil sie die Grenze von Materie und Form überstiegen, sondern, weil sie in keine der zehn Kategorien fallen, vielmehr transkategorial sind. Albertus Magnus drückt es so aus: Wenn wir vom Syllogismus an sich sprechen, dem also keine spezifische Materie eigen ist, dann verwenden wir transzendentale Termini, die nichts und alles bezeichnen: nichts, da sie keine Materie bestimmen, alles, da sie auf jede Materie anwendbar sind.[54] Gerade weil ein Buchstabe für

---

tungsvolle Zeichen aufgefasst und als *dummy letters* insbesondere von schematischen Buchstaben unterschieden: «A dummy letter can itself be assigned a meaning; a schematic letter, on the other hand, might be assigned a word or expression, which in turn, might be given a meaning. Thus, a dummy letter can be regarded as a meaning (although one that is not yet specified), whereas a schematic letter is more like a gap waiting to be filled» (S. 115).

[52] Diese Auffassung wird unter anderem in Corcoran (1974) vertreten. Sie muss indes von älteren Auffassungen der Buchstaben als objektsprachlichen Variablen unterschieden werden: «There is no need within Aristotle's theory, nor within our model, of postulating the existence of propositional functions, propositional schemes or even object language variables. Our view is that Aristotle used metalinguistic variables, but that he neither used nor had a doctrine concerning object language variables» (S. 100).

[53] Alexander, *In Aristotelis Analyticorum priorum librum I commentarium*, 380.24-7. Die schematische Darstellungsweise mittels Buchstaben wird von der Umschreibung (περιοχή) syllogistischer Modi unterschieden, die ohne Buchstaben auskommt. Vgl. dazu Barnes (2007, S. 286 ff.).

[54] Die entsprechende Stelle findet sich in Albertus' Kommentar zu den *Analytica priora*. Sie ist hier aus de Rijk (2003, S. 7) zitiert: «Et quia de syllogismo loquimur simplici, qui tantum formaliter syllogismus est et in omni materia habet poni et nullius materiae est proprius, ideo terminis utimur

sich genommen nichts bezeichnet, keine Materie bestimmt, kann alles Beliebige an seine Stelle gesetzt werden; oder genauer: nicht alles, aber doch eine grosse Vielzahl dessen, was die Kategorien unter sich versammeln. Die syllogistischen Buchstaben sind nämlich keine einfachen Lückenfüller, blosse Platzhalter. Ihr korrekter Gebrauch unterliegt Vorschriften und dazu gehört, dass nur solche Terme für sie einsetzbar sind, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Der Term ‚Chimäre' erfüllt diese nicht, ebensowenig Terme, die keine *infinitatio* haben (d. h. deren Negation leer ist), wie das bei den Transzendentalien *ens*, *unum* und *res* der Fall ist.[55]

Ein Schlussschema enthält zugleich weniger und mehr Informationen als seine Instanzen. Zwar fehlt es ihm, verglichen mit seinen Instanzen, an gehaltvollen Termen, dafür liefern die Buchstaben in ihrer spezifischen Verteilung auf die Lücken im Text eine Gebrauchsanweisung, um aus dem Schema einen konkreten Schluss zu gewinnen. Insbesondere verknüpft das wiederholte Vorkommen eines Buchstabens diejenigen Stellen miteinander, an denen es gilt, ein und denselben Term einzusetzen; an Stellen, die durch verschiedene Buchstaben besetzt sind, müssen in der aristotelischen Syllogistik dagegen verschiedene Terme stehen. Diese Anweisungen gehören wesentlich zum Schema dazu und unterscheiden es von einer konkreten Instanz.[56] Auch bestehen zwischen den Buchstaben eines Schemas keine weiteren Beziehungen, die seine logischen Eigenschaften beeinflussen könnten, wohingegen die gehaltvollen Terme eines konkreten Syllogismus mitunter in relevanten Verhältnissen, etwa der Subordination, zueinander stehen und so den Schein von Gültigkeit (bzw. materiale Gültigkeit) bewirken können. Der schematische Gebrauch von Buchstaben bringt also nicht nur Klarheit über logische Formen, er verhindert zudem das Eindringen von Falschheit.[57]

---

transcendentibus nichil et omnia significantibus. Nichil dico quia nullam determinant materiam; omnia vero dico significantibus quia omnibus materiis sunt applicabiles, sicut sunt A, B, C.»

[55] Zur fehlenden *infinitatio* transzendentaler Begriffe, vgl. de Rijk (2003, S. 9-10). Zur Problematik der Existenzvoraussetzungen in der aristotelischen Syllogistik, vgl. den Kommentar von Ebert und Nortmann zu *Analytica priora*, 28 a 26 (S. 330-333).

[56] In Corcoran (2006) werden solche Anweisungen als ‹side conditions› bezeichnet, welche die lückenhafte Textvorlage, das ‹scheme-template›, implizit oder explizit ergänzen. Ohne Nebenbedingungen liegt kein Schema vor. Die Nebenbedingungen des Schemas, das Aristoteles zur Darstellung des Modus Barbara verwendet, gibt Corcoran auf S. 233. In Patzig (1969, S. 17 f.) werden diese Bedingungen als ‹Axiome› für syllogistische Termini eingeführt, wobei neben der Exklusivität der Variablen (d. h. dass für verschiedene Buchstaben nicht derselbe Term eingesetzt werden darf) auch weitere wichtige Bedingungen erwähnt werden, die sich aus der aristotelischen Kategorienlehre ergeben. Dass Aristoteles seine Buchstaben nicht inklusiv liest, wie das heute zumeist der Fall ist, wird in Corcoran (1974, S. 99) mit der Ablehnung von Selbstprädikation in Verbindung gebracht.

[57] Diesen Punkt führt Alexander als Vorteil des Buchstabengebrauchs an. Für eine erhellende Besprechung des entsprechenden Abschnitts in Alexanders Kommentar sowie einer ähnlichen Stelle bei Boethius, vgl. Barnes (2007, S. 340-347).

Mit seiner Gebrauchsanweisung definiert das Schema eine Menge von Instanzen, die alle die gleiche Form haben: die Form, die durch das Schema dargestellt wird. Für sich genommen ist das Schema freilich noch kein Ausdruck von Allgemeinheit, sondern lediglich (um Alexanders Metapher aufzunehmen) eine Matrix, mit der sich Formgleiches herstellen oder einsammeln lässt. Um mit Hilfe eines Schemas allgemeine Behauptungen zu beweisen, reicht es aber, die fragliche Eigenschaft – etwa formale Gültigkeit – am Schema selbst nachzuweisen. Denn daraus darf geschlossen werden, dass jede Instanz diese Eigenschaft ebenfalls besitzt. Auf diesem Weg gelingt es Aristoteles, die Gültigkeit *aller* Syllogismen eines gültigen Modus zu zeigen – zumindest nach der hier favorisierten Lesart, die seine Buchstaben als schematische auffasst.[58]

In der anderen, weiter oben erwähnten Lesart, wonach es sich bei den syllogistischen Buchstaben um konkrete Terme handelt, fällt es dagegen schwer zu erklären, inwiefern der von Aristoteles erhobene Anspruch auf Allgemeinheit berechtigt ist. Handelte es sich bei den buchstabenhaltigen Wendungen («wenn das A von jedem B ...») um konkrete Syllogismen, wäre die Gültigkeit ja immer nur für einen einzelnen Fall gezeigt. Allgemeine Behauptungen lassen sich zwar auch dadurch beweisen, dass paradigmatisch an ausgewählten Gegenständen das Vorhandensein der fraglichen Eigenschaft nachgewiesen wird. Ist indes die Menge von Gegenständen, über die etwas ausgesagt werden soll, nicht irgendwie gegeben und geht der Beweis nur von einem einzelnen Paradigma aus, fragt sich, wie weit die Menge reicht, welche Gegenstände ihr angehören und welche nicht. Ein konkreter Syllogismus gehört unzählig vielen Mengen an, deren Elemente irgendeine Form gemeinsam haben. Über welche darunter ausgesagt werden soll, dass sie aus lauter gültigen Syllogismen besteht, ist der Angabe eines einzelnen Beispiels nicht ohne Weiteres zu entnehmen. Man könnte etwa darüber in Zweifel sein, ob der Umstand, dass derselbe Term an mehreren Stellen vorkommt, relevant ist oder ob man bei der Suche nach der richtigen Menge davon absehen darf. Um dies zu klären, würde man freilich immer neue paradigmatische Syllogismen derselben Form anführen, bis die letzten

[58] Man kann sich fragen, ob Gültigkeit eine Eigenschaft von Schluss*formen* ist, die sich auf ihre Instanzen überträgt, oder umgekehrt eine Eigenschaft primär von *konkreten* Schlüssen. Die erste Option, wonach Gültigkeit primär eine Eigenschaft von Schlussformen ist, scheint einen absoluten Begriff von logischer Form zu implizieren. Die zweite Option hingegen verträgt sich mit einem relativen Begriff, wonach logische Formen nichts anderes als die Äquivalenzklassen der Formgleichheitsrelation sind. In Corcoran (1974, S. 108) wird die zweite Option befürwortet und die erste für unsinnig befunden. Ich kann indes keine exegetische Grundlage für dieses Urteil erkennen. Meines Wissens findet sich weder bei Aristoteles noch bei seinen antiken oder mittelalterlichen Nachfolgern eine Erörterung der Frage. Jedenfalls hätte es für logische Formen, wenn sie als akzidentelle Eigenschaften konkreter Syllogismen aufgefasst würden, Platz genug im aristotelischen Kategoriensystem. Sie wären wohl bei den Qualitäten der vierten Art anzusiedeln. Für eine Diskussion der aufgeworfenen Frage in Bezug auf moderne Begriffe logischer Gültigkeit, vgl. Brun (2004, S. 32-35, 98-104).

Zweifel behoben sind. Das ist jedoch nicht Aristoteles' Vorgehensweise in den *Analytica priora*. Um die logischen Formen einzeln und möglichst unmissverständlich herauszugreifen, verwendet er (meistens nach einer Umschreibung[59] mehrerer verwandter Modi) bedeutungslose Buchstaben, die in der Textumgebung, worin sie charakteristischerweise auftreten («wenn das A von jedem B ...» etc.), deutlich mit den ausgeschriebenen Synkategoremata kontrastieren. An diesem Kontrast lässt sich mit ein wenig Übung leicht erkennen, was die dargestellte Form ist: was über alle Syllogismen dieser Form konstant bleibt und was von Fall zu Fall variieren darf.

Ob es sich bei den Buchstaben, die Aristoteles zur Kenntlichmachung syllogistischer Modi einsetzt, um Variablen handelt oder nicht, ist jedenfalls keine leicht zu beantwortende Frage. Für unsere Zwecke hier reicht es vorerst festzustellen, dass sein Buchstabengebrauch in den *Analytica priora* zu sehr unterschiedlichen, mitunter inkompatiblen Lesarten Anlass gibt. Dies hängt zwar sicherlich mit der unvergleichlichen Stellung seiner Syllogistik zusammen. Daraus sowie aus gewissen Eigenarten seiner Schriften und ihrer Tradierung ergeben sich eine Reihe exegetischer Schwierigkeiten, die auch die Frage nach dem Wesen der Buchstaben betreffen. Dies allein aber reicht nicht aus, um die festgestellten Differenzen zu erklären, zumal die Gebrauchsweise, an der sich die Geister scheiden, nur eine von mehreren im *Corpus Aristotelicum* ist und dazu noch eine der transparenteren. Immerhin bleibt sie im Gegensatz zu anderen Gebrauchsweisen, die bloss sporadisch auftreten, über eine grosse Zahl von Beispielen beständig.[60] Der fehlende Konsens darüber, ob Aristoteles Variablen in die Logik eingeführt hat, ist auch durch fehlende Klarheit über die Begriffe verursacht, die der modernen Logik entlehnt werden, um den antiken Buchstabengebrauch zu deuten. Denen, die den syntaktischen Aspekt von Variablen betonen und sie als Hilfszeichen zur Kenntlichmachung logischer Formen auffassen, werden die syllogistischen στοιχεῖα als Metavariablen oder schematische Buch-

[59] Siehe Anm. 53.

[60] Eine Gebrauchsweise, die vom üblichen schematischen Gebrauch der Buchstaben für die Terme eines Syllogismus (mithin für Gattungsnamen) abweicht, wurde bereits oben erwähnt (siehe Anmerkung 46). Des Weiteren werden die Buchstaben an manchen Stellen schematisch für ganze Sätze, nicht für einzelne Terme verwendet, vgl. *Analytica priora*, 34 a 5-7 und den Kommentar dazu auf S. 543-546. Auch in den *Analytica posteriora* finden sich an zahlreichen Stellen ähnliche Gebrauchsweisen wie im ersten Buch der *Analytica priora*. Die Buchstaben werden dort schematisch sowohl für Aussagen verwendet – z. B. im ersten Buch, Kapitel 3 (72 b 38 - 73 a 5) – als auch für Terme: etwas später in Kapitel 3 (73 a 11-12) sowie in den Kapiteln 6 (75 a 6-11) und 13 (78 a 31 - b 2) (vgl. dazu Barnes (2007, S. 337-347)), desgleichen im zweiten Buch, Kapitel 8 und 12, wo sich die Verwendung von den früheren indes leicht unterscheiden könnte (vgl. dazu den Kommentar in *Analytica posteriora*, S. 623-625, 722). Interessante, mitunter merkwürdige Gebrauchsweisen finden sich zudem in der *Physik* und der *Metaphysik*. Meines Wissens wurde der Buchstabengebrauch bei Aristoteles nicht in seiner ganzen Vielfalt untersucht. Diese Lücke in der Forschung bzw. meinem Wissen müsste im Rahmen des hier vorgestellten Gesamtunterfangens geschlossen werden.

staben für objektsprachliche Gattungsnamen erscheinen. Unter denjenigen hingegen, die als Variablen nur durch Quantoren bindbare Elemente einer Objektsprache zulassen, werden die einen (die älteren und stärker der modernen Logik Verpflichteten) die στοιχεῖα als freie Variablen lesen, die anderen (die jüngeren und stärker der historischen Exegese Verpflichteten) als *dummy letters*, Konstanten oder gehaltvolle generelle Terme. Um die verschiedenen Positionen voneinander, aber auch von dem hier vertretenen Standpunkt klar unterscheiden zu können, müsste man zuerst das terminologische Durcheinander, das in der Literatur vorherrscht, entwirren. Die Untersuchung der *Analytica priora* und des darin vorkommenden Buchstabengebrauchs bietet daher eine gute Gelegenheit, das eigene Verständnis von Variablen zu klären und zu schärfen. Das jedoch wird die Aufgabe eines anderen Texts sein (siehe 1.4).

1.2.3.2. Variablen als Gebrauchsweisen von Buchstaben in der modernen Logik

Wenden wir uns noch einmal Frege und der modernen Logik zu. Wie wir sahen, möchte er dem Wort ‚Variable' deshalb die Berechtigung entziehen, weil seine Konnotation eine Verwechslung von Zeichen und Bezeichnetem geradezu heraufbeschwört: Man glaubt, veränderliche oder unbestimmte Gegenstände als Bedeutungen von Buchstaben annehmen zu müssen, wo es doch die Zeichen sind, die sich auf Gegenstände unbestimmt beziehen und variable Substitutionen erlauben. Überdies besteht zu Freges Zeit offenbar die Neigung, dasjenige, was für die Bedeutung der Buchstaben gehalten und als Variable bezeichnet wird, mit dem zu vermengen, was nach ihm eben Funktion ist und als solche anerkannt werden sollte. Auch dieser Vermengung möchte er vorbeugen.[61] Gibt es dafür eine wirkungsvollere Massnahme, als die problematischere der beiden Bezeichnungen (d. i. ‚Variable') auf den Index zu setzen?

Alternativ könnte man die Anwendung des Worts auf die Buchstaben selbst, auf die Zeichen, beschränken; das wären dann unsere heutigen Variablen. Diese konziliantere Option lehnt Frege jedoch ab. Weshalb? Weil er glaubt, dass sie einer besonders unheilvollen Vermengung von Zeichen und Bezeichnetem Vorschub leistet, die er für das Symptom einer ‹Zeitkrankheit›[62] hält: die sinnlich wahrnehmbaren Markierungen auf Papier für die Gegenstände der Mathematik zu nehmen, anstatt zu erkennen, dass es sich dabei

[61] Vgl. dazu etwa folgende Stelle aus dem Nachlass: «Es ist demnach unmöglich, das, was Funktion ist, zu erklären mit dem, was man Veränderliche nennt. Man kommt vielmehr, wenn man sich klar machen will, was eine Veränderliche ist, immer wieder auf das zurück, was wir Funktion genannt haben, und erkennt dabei, dass die Veränderliche eigentlich kein Gegenstand der Arithmetik ist» Frege (1983, S. 257).

[62] Frege (1983, S. 172). In einer anderen nachgelassenen Schrift verleiht er dieser „Krankheit" sogar einen Namen: *morbus mathematicorum recens*, vgl. Frege (1983, S. 241).

entweder um die *Namen* von solchen Gegenständen handelt, wie bei den Zahlzeichen, oder aber, wie bei ‚x' und anderen Buchstaben, um notationale Hilfsmittel, die selbst natürlich keine Gegenstände inhaltlicher Mathematik sind, ja nicht einmal bezeichnen, sondern anderen Zwecken dienen.[63] Wer diese Buchstaben Variablen nennt und Variablen zugleich als genuine Gegenstände der Mathematik betrachtet (etwa aufgrund einer Vermengung von Funktion und Variable oder wegen der Allgegenwärtigkeit von Variablen in mathematischen Texten), wird für dieses Missverständnis speziell empfänglich sein.

Gegen das formalistische Übel, dessen schlimmster Auswuchs er in der sogenannten formalen Arithmetik seines Jenaer Kollegen Carl Johannes Thomae gefunden zu haben glaubte, kämpfte Frege ein halbes Leben lang mit der geballten Kraft seiner Argumente an (bisweilen auch mit bitterer Polemik).[64] Der Widerlegung von Thomaes formalem Standpunkt widmet er fast fünfzig Seiten im zweiten Band der *Grundgesetze*.[65] In den letzten Paragraphen seiner ausführlichen Kritik kommt er auf den Buchstabengebrauch zu sprechen, über den die formale Arithmetik nichts zu sagen habe, obwohl sie auf dieses Hilfsmittel nicht verzichten will.[66] Aus der Analyse des Gebrauchs, den Thomae in seinen Arbeiten von den üblichen Buchstaben macht, folgert Frege, dass dieser «gegen alle Grundsätze des Buchstabengebrauchs in der Mathematik» verstosse, insbesondere in Gleichungen. Auf die Details der Fregeschen Kritik brauchen wir hier nicht einzugehen. Es reicht festzustellen, dass Frege den Ausweg, unter einer Variablen nicht die hypostasierte Bedeutung eines Buchstabens, sondern diesen selbst zu verstehen, deshalb ablehnt, weil er befürchtet, dies könnte geradewegs in einen Formalismus Thomaescher Prägung führen. Dieser Formalismus aber sei nicht einmal in der Lage, den Gebrauch von Buchstaben richtig zu erklären, obwohl sie sich unter allen mathematischen Zeichen am ehesten noch mit einer formalistischen Auffassung vertragen, sind sie doch (nach Frege) bedeutungslos.

Die Entwicklung immer ausgefeilterer Notationen und die damit einhergehende Zunahme des Buchstabengebrauchs hat in der Geschichte der Mathematik zweifellos formalistisches Gedankengut befördert.[67] Im ausgehenden 19. und zu Beginn des 20. Jahr-

[63] Für ein ausdrückliches Auseinanderhalten dieser beiden Zeichenklassen im Zusammenhang der Kritik am Formalismus, vgl. Frege (1908, S. 331). Für eine viel frühere Stelle, vgl. Frege (1879, S. 1).

[64] Zum historischen Hintergrund der Kontroverse zwischen Frege und Thomae, vgl. Kreiser (2001, S. 226-236).

[65] Frege (1903, S. 96-140 (§§ 86-137)).

[66] Frege (1903, S. 135-137 (§§ 133-134)). Vgl. auch Frege (1983, S. 179 u. 257), wo auf die Widerlegungen im zweiten Band der *Grundgesetze* verwiesen wird.

[67] Vgl. Detlefsen (2005, S. 263-277).

hunderts, als Frege wirkte, war die Vorstellung durchaus verbreitet, wonach es sich bei mathematischen Theorien nicht um Sammlungen wahrer Sätze über spezifische Gegenstandsbereiche handelt, sondern um Kalküle, die sich schematisch auf die unterschiedlichste Materie anwenden lassen.[68] Wie aber Frege selbst in einem bemerkenswerten Brief an David Hilbert festhält, kann man von Buchstaben und anderen Symbolen ausgiebig Gebrauch machen, ihren Nutzen für die Mathematik hochschätzen, ohne deshalb das mathematische Arbeiten für ein sinnentleertes Spiel mit hohlen Zeichen und nach willkürlichen Regeln zu halten:[69]

> Man wird auch den Gebrauch von Symbolen nicht einem gedankenlosen, mechanischen Verfahren gleichsetzen dürfen, obwohl die Gefahr in einen blossen Formelmechanismus zu verfallen hierbei weit näher liegt, als beim Gebrauch des Wortes. Man kann auch in Symbolen denken. Ein bloss mechanisches Formeln ist gefährlich 1. für die Wahrheit der Ergebnisse, 2. für die Fruchtbarkeit der Wissenschaft. Die erste Gefahr lässt sich wohl fast ganz durch die logische Vervollkommnung der Bezeichnung beseitigen. Was die zweite betrifft, so würde die Wissenschaft zum Stillstande gebracht, wenn der Formelmechanismus so überhand nähme, dass er den Gedanken ganz erstickte. Dennoch möchte ich solchen Mechanismus keineswegs als ganz unnütz oder schädlich ansehen. Im Gegenteil glaube ich, dass er notwendig ist. Der natürliche Hergang scheint folgender zu sein. Was ursprünglich ganz von Gedanken durchtränkt war, verhärtet sich mit der Zeit zu einem Mechanismus der dem Forscher das Denken zum Teil abnimmt. Ähnlich wie beim Musikspiel eine Reihe ursprünglich bewusster Vorgänge unbewusst und mechanisch geworden sein müssen, damit der Künstler, von diesen Dingen entlastet, seine Liebe in das Spiel legen könne. Ich möchte dieses mit dem Verholzungsvorgange vergleichen. Wo der Baum lebt und wächst, muss er weich und saftig sein. Wenn aber das Saftige nicht mit der Zeit verholzte, könnte keine bedeutende Höhe erreicht werden. Wenn dagegen alles Grüne verholzt ist, hört das Wachstum auf.

Um in die Höhen mathematischer Erkenntnis vorzudringen, bedarf es demnach sehr wohl einer gewissen Mechanisierung auf den darunter liegenden und bereits gesicherten Wissensebenen. An die Stelle gedanklicher Schritte treten dort Zeichenumformungen, die insofern mechanisch ausführbar sind, als die Bedeutung der verwendeten Zeichen dabei ausser Acht bleiben kann – was indes nicht heisst, dass ihnen keine Bedeutung zukommt, und noch weniger, dass die Mathematik insgesamt ein Spiel mit leeren Zeichen darstellt.

Offenbar ist der Zusammenhang zwischen formalistischen Neigungen in Fragen der Mathematikphilosophie und dem gesteigerten Einsatz von Buchstaben zwecks Mechanisierung kein zwingender. Daran ändert auch nichts, dass die zu solchen Zwecken verwendeten Buchstaben als Variablen bezeichnet werden. Man kann unter einer Variablen

[68] Vgl. Simons (2009, S. 293-299).
[69] Frege (1976, S. 58 f.).

ein auf bestimmte Weise gebrauchtes Zeichen verstehen, ohne sich damit der einen oder anderen Spielart des Formalismus verschrieben zu haben. Ohnehin hat sich die gewohnte Redeweise über Variablen – dass sie verschiedene Werte annehmen können, über einen bestimmten Bereich reichen, dass es Funktionen in einer, zwei oder drei Variablen gibt, sowie solche in reell(wertig)en und solche in komplex(wertig)en Variablen etc. etc. – all das hat sich im mathematischen und logischen Sprachgebrauch derart verwurzelt, dass es zwecklos wäre, Frege zuliebe auf das Wort zu verzichten. Wir werden es daher mit W. V. Quine halten, der in seinem philosophischen Wörterbuch zum Stichwort ‚variable' treffend bemerkt:[70]

> We must acquiesce in the word, which is well entrenched, and let its etymology go. But the word is to be seen as referring to the letters themselves, *in their pertinent uses*, and not to some strangely unstable sort of number.

Buchstaben in dem für Mathematik und Logik typischen Gebrauch – das sind Variablen. Diese freilich bloss generische und selbst da noch vieles unbestimmt lassende Bestimmung hindert uns nicht daran, Variablen von Funktionen sowie von deren Bezeichnungen zu unterscheiden. Gerade Frege lehrt uns, dass das Zeichen einer Funktion (da sie ihrem Wesen nach ungesättigt ist) Argumentstellen enthält, die durch den geeigneten Einsatz von Buchstaben – wir dürfen sagen: durch einen bestimmten Gebrauch von Buchstaben als Variablen – kenntlich gemacht werden. Variablen können demnach dazu dienen, die logische Form von Funktionen darzustellen, dies jedoch nur deshalb, weil sie von diesen wesentlich verschieden sind, gleichsam einer anderen Seinsschicht angehören.

Auch spricht nichts dagegen, Frege hier in einem weiteren Punkt, auf den er Wert legt, entgegenzukommen: dass die Buchstaben ‚ξ'und ‚ζ', wie sie in den *Grundgesetzen* verwendet werden (siehe Tabelle in 1.2.2), genau besehen nicht einmal zu den *Zeichen* von Funktionen gehören, sondern gleich äusseren Markierungen die besondere Art ihrer Ungesättigtheit anzeigen.[71] Dass überhaupt Buchstaben eingesetzt werden, deutet darauf hin, dass die Kenntlichmachung von Argumentstellen mehr beinhaltet als nur das Anzeigen oder Offenhalten von Stellen, in die Argumentzeichen eintreten können. Für Letzteres allein bräuchte es die Buchstaben nicht. Durch das Setzen von Klammern und Leerzeichen – etwa so: ‚$f(\ )$', ‚$g(\ ,\ )$' – liesse sich dasselbe erreichen, zumindest für

[70] Quine (1987, S. 236), meine Kursivsetzung.
[71] Vgl. Frege (1983, S. 259) sowie Frege (1891, S. 129) und Frege (1904, S. 278 f.).

Argumentstellen erster Stufe. Die volle Bedeutung des Buchstabengebrauchs zeigt sich erst, wenn es gilt, mehrere Stellen im selben Kontext offenzuhalten.[72]

Im mehrstelligen Fall gibt uns das Vorkommen verschiedener wie derselben Buchstaben eine Gebrauchsanweisung, um das Funktionszeichen mit den ihn ergänzenden Eigennamen zu verbinden: Die Verschiedenheit der Buchstaben, wie zum Beispiel im Zeichen ‚$\xi - \zeta$', zeigt an, «dass verschiedene Argumentzeichen in die beiden Stellen eingesetzt werden dürfen», wobei es – anders als beim aristotelischen Buchstabengebrauch – auch erlaubt ist, zwei Mal denselben Eigennamen einzusetzen; dagegen wird durch das Vorkommen desselben Buchstabens an beiden Stellen in ‚$\xi - \xi$' angedeutet, dass derselbe Eigenname an beiden Stellen eingesetzt werden muss.[73] Im Gegensatz zum ersten Ausdruck bezeichnet der zweite denn auch keine Funktion mit zwei Argumenten, sondern eine mit nur einem Argument. Ungeachtet ihrer Ähnlichkeit bezeichnen ‚$\xi - \zeta$' und ‚$\xi - \xi$' ‹grundverschiedene› Funktionen: Das Zeichen der zweiten Funktion mag zwar ebenfalls zwei Argumentstellen aufweisen, diese sind jedoch, im Gegensatz zu den beiden Argumentstellen im ersten Zeichen, miteinander ‹verwandt›, wie Frege sagt.[74]

Der abwechselnde Einsatz von ‚ξ' und ‚ζ' erlaubt es, Verwandtschaften zwischen Argumentstellen anzuzeigen und dadurch Funktionen mit gleichem Inhalt, aber unterschiedlicher Form klar auseinanderzuhalten. Dieser Buchstabengebrauch dient letztlich also der Kenntlichmachung der logischen Formen von Begriffen und Relationen. Ähnlich wie bei Aristoteles markieren die Buchstaben als blosse Hilfszeichen die Grenze zwischen konstanter Form und variabler Materie, d. i. zwischen dem eigentlichen Funktionszeichen und den Argumentzeichen, die dieses zu ergänzen vermögen.

1.2.3.3. Das Problem der Einheit im Mannigfaltigen

Variablen sind also Buchstaben, die auf bestimmte Weise gebraucht werden. Sie heissen so, nicht weil sie Veränderliches oder Unbestimmtes bezeichneten, sondern aufgrund und im Zusammenhang ihres sinnvollen Gebrauchs. Unsere Grundfrage – ‚Was sind Variablen?' – bezieht sich demnach auf *Gebrauchsweisen* von Schriftzeichen, wie sie seit frühester Zeit in Mathematik und Logik anzutreffen sind. Lebendige Zeichen mit langer Geschichte bilden den Gegenstand der Untersuchung. Selbst Frege, dem das Wort, mit dem wir diese Zeichen benennen, missfällt, hätte nicht bestritten, dass ihre man-

---

[72]Diese Beobachtung, die Wittgenstein in Bemerkung 4.0411 der *Logisch-philosophischen Abhandlung* macht, spricht Frege meines Wissens nirgends ausdrücklich aus. Für eine Besprechung von Wittgensteins Bemerkung, vgl. Büchi (2016, S. 170-172).

[73]Frege (1983, S. 259).

[74]Frege (1893, S. 8, 13, 36 f., 52).

nigfaltigen Gebrauchsweisen einer *philosophischen* Untersuchung würdig sind. Immerhin gehörte er zu denen, die den grossen Nutzen solcher Hilfsmittel klar erkannten, und zwar nicht bloss um Allgemeinheit auszudrücken, sondern insbesondere auch für das präzise Unterscheiden logischer Formen.[75] Wenn ausserdem zutrifft, wovon Frege überzeugt schien – dass wir in unserem Denken von äusseren Darstellungsmitteln sehr abhängig sind und eine der Sache jeweils ‹angemessene Bezeichnungsweise› die ‹Vermehrung der geistigen Kraft der Menschheit› nach sich zöge[76] –, dann liegt auf der Hand, welcher zusätzliche philosophische Gewinn von einer breit angelegten und doch sorgfältig durchgeführten Untersuchung über das Wesen von Variablen erhofft werden darf: Einsichten ins Denken selbst.

Freges Unterscheidungen werfen gleichwohl neues Licht auf unsere Grundfrage, genauer gesagt, auf die in ihr enthaltene Frage nach der Einheit im Mannigfaltigen. Wie wir uns klargemacht haben, gibt es in Logik und Mathematik den einen Buchstabengebrauch – die eine Variable – nicht. Umso vielfältiger, ja verworrener wird es, je mehr Geschichte der beiden Disziplinen man in den Blick nimmt. Buchstaben werden und wurden durchaus unterschiedlich eingesetzt. Ihr Gebrauch kann verschiedenen Regeln unterliegen, die oft nirgends festgehalten sind, und der Zweck ihrer Verwendung ist nicht immer derselbe. Zudem ist es selten einfach, Gebrauchsweisen, die nur schriftlich überliefert wurden, in ihren Details richtig zu rekonstruieren und zu deuten. Dass sich hinter der Vielfalt an Regeln und Zwecken ein festes Muster verbirgt oder sich die mannigfaltigen Gebrauchsweisen auf eine einzige zurückführen lassen, ist nicht ausgeschlossen. Dies von vornherein anzunehmen, wäre aber dem Gang der Untersuchung wenig zuträglich.

Gewisse Gemeinsamkeiten, wodurch sich Variablen von Konstanten abzuheben scheinen, fallen dennoch ins Auge. Variablen spannen einen begrenzten (Text-)Bereich auf, in dem sie ihre Identität bewahren und mehrfach als dasselbe Zeichen auftreten – rekurrieren – können.[77] *Rekurrenz* liegt in logischen Notationen typischerweise dann vor,

[75] Die ganze Entwicklung der Begriffsschrift beruht unter anderem auf dieser Erkenntnis. An einer Stelle im Nachlass hält Frege denn auch ausdrücklich fest, was sich bereits aus Sinn und Zweck seiner Begriffsschrift ergibt: dass der Gebrauch von Buchstaben für «die Einsicht in das Logische [...] vorteilhafter als der Sprachgebrauch» sei (Frege (1983, S. 207)). Vgl. auch Frege (1983, S. 217).

[76] Frege (1879, S. V).

[77] In der *Begriffsschrift* kontrastiert Frege diese Identitätswahrung mit der Unbestimmtheit der Variablen: «Bei aller Unbestimmtheit muss aber daran festgehalten werden, dass ein Buchstabe die Bedeutung, welche man ihm einmal gegeben hat, in demselben Zusammenhange *beibehält*» Frege (1879, S. 1). In den *Grundgesetzen* dagegen haben weder die deutschen noch die lateinischen oder griechischen Buchstaben eine Bedeutung (vgl. Frege (1893, S. 43)), weshalb Frege auf die Verwandtschaftsbeziehung zwischen den Argumentstellen einer Funktion zurückgreifen muss, um das Gleiche zu sagen (vgl. Frege (1893, S. 13)). Bei Russell und Whitehead wiederum heisst es: «a variable preserves a recognizable identity in various occurrences throughout the same context, so that many

wenn derselbe Buchstabe im Bereich des ihn bindenden Quantors mehrfach vorkommt.[78] Zum Beispiel rekurriert ‚x' in ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$', nicht jedoch in ‚$\forall xFx \rightarrow \forall xGx$'. Solche Bereiche sind der Raum, worin Rekurrenz möglich wird; ohne sie könnten Variablen immer nur einmal vorkommen. Das gilt nicht allein für gebundene Variablen in formalsprachlichen Ausdrücken, sondern desgleichen für freie (mithin bindbare) Variablen in formalen und halbformalen Kontexten. Und auch jene Buchstaben, die der Kenntlichmachung von Funktionen dienen, müssen, um die Verwandtschaft von Argumentstellen anzuzeigen, mehrfach als dasselbe Zeichen vorkommen.[79]

In logischen Formalsprachen reicht der Bereich einer freien Variablen üblicherweise über die ganze Formel, in der sie vorkommt. Manchmal wird dies ausdrücklich festgelegt, oft geschieht es implizit, etwa in Substitutionsregeln.[80] Es ist jedenfalls gebräuchlich, einen offenen Ausdruck wie ‚$Fx \rightarrow Gx$' so zu lesen, dass beide Vorkommen von ‚x' derselben Variablen angehören. Folglich müssen sie, wenn der Ausdruck zu einem Satz geschlossen wird, beide an ein und denselben Quantor gebunden oder durch ein und dieselbe Konstante ersetzt werden. Es gibt jedoch ein Notationssystem, bei dem das nicht der Fall ist. In der sogenannten *Backus-Naur-Form*, entwickelt für die Darstellung kontextfreier Grammatiken, werden Buchstaben bereichslos gebraucht. Das wiederholte Vorkommen desselben Buchstabens zeigt hier *nicht* an, dass an diesen Stellen immer dasselbe Zeichen einzusetzen ist.[81] So lässt sich zum Beispiel die Menge aller aussagenlogischen Formeln mit ‚$\neg$' und ‚$\rightarrow$' als den einzigen logischen und ‚p' als der einzigen

variables can occur together in the same context each with its separate identity» Whitehead und Russell (1910, 5, vgl. auch S. 15). In den *Principles of Mathematics* hatte Russell dies als Beleg dafür genommen, dass Variablen stets im Zusammenhang mit einer *propositional function* auftreten, vgl. Russell (1903, § 93).

[78] Von Rekurrenz wird in der Linguistik, woher der Terminus stammt, generell dann gesprochen, wenn ein Ausdruck innerhalb eines Texts mehrfach in der gleichen Bedeutung vorkommt. Für die Logik ist freilich nicht jede Art der Rekurrenz von Belang. Rhetorische Repetitionen zum Beispiel (‚Sokrates, Sokrates hat am Leben gelitten!') können unberücksichtigt bleiben. Wenn hier von Rekurrenz die Rede ist, sind nur solche Fälle gemeint, die sich auf die logische Form von Aussagen oder Schlüssen auswirken. Vgl. dazu Büchi (2016, S. 159-161, 171-175).

[79] Diesem Sachverhalt wird in der λ-Notation dadurch Rechnung getragen, dass in der Bezeichnung einer Funktion der Bereich jener Variablen, welche die (offenen) Argumentstellen kenntlich machen, durch den λ-Operator, an den die Variablen gebunden sind, sowie durch Punkte oder Klammern abgesteckt wird (siehe Tabelle in 1.2.2). Nach Corcorans Analyse des Schemabegriffs fallen die Bereichsangaben für die schematischen Buchstaben in die *side conditions* des Schemas, vgl. Corcoran (2006, S. 224, 233). (In diesen Nebenbedingungen ist ja enthalten, was Schemata von ihren konkreten Instanzen, schematische Buchstaben von Zeichen mit fester Bedeutung unterscheidet.)

[80] Für eine explizite Festlegung, vgl. Frege (1893, S. 31). Für eine Diskussion, aus der sich eine implizite Festlegung herauslesen lässt, vgl. Whitehead und Russell (1910, S. 137-138). Für das Beispiel einer Festlegung über Substitutionsregeln, vgl. Zach (2021, S. 211-212).

[81] Eine Einführung der Notation findet sich z. B. in Hopcroft und Ullman (1979) ab S. 77.

nicht-logischen Konstanten in wunderbar kompakter Weise definieren:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi$$

Die beiden Vorkommnisse von ‚φ' in ‚$\varphi \rightarrow \varphi$' dürfen, ja sollen auch durch unterschiedliche Formeln ersetzt werden, sodass die definierte Grammatik unter anderem ‚$p \rightarrow \neg p$' als wohlgeformten Ausdruck generiert. Der Buchstabe ‚φ' scheint hier tatsächlich nur die Argumentstellen von ‚$\rightarrow$' offenzuhalten, ohne zugleich ihre Verwandtschaft oder Nicht-Verwandtschaft anzuzeigen. Ist es deshalb falsch, diesen Buchstaben in diesem Gebrauch als (Meta-)Variable zu bezeichnen? Immerhin verhält er sich als nicht-terminales Symbol in anderen Hinsichten genau wie eine Variable.

Andererseits werden terminale Symbole wie das obige ‚p' in der Aussagenlogik als Satz*konstanten* bezeichnet, obgleich sie keine feste Bedeutung haben, sondern sich zu Formalisierungszwecken immer wieder neu interpretieren lassen.[82] Die Bedeutung, die einer Konstante zugewiesen wird, kann sie zwar über zahlreiche Formeln beibehalten, sodass ihr Bereich weiter ausfällt, als dies bei freien Variablen normalerweise der Fall ist. Doch auch der Bereich freier Variablen lässt sich bei Bedarf über mehrere Ausdrücke hinweg ausdehnen. Wer Wendungen wie „Sei n eine natürliche Zahl" benutzt, öffnet damit einen Raum, worin sich derselbe Buchstabe in einer Reihe angehängter Aussagen auf sein erstes Vorkommnis in der Eingangswendung zurückbeziehen kann.[83] Irgendwo wird der Bereich enden, sodass der Buchstabe ‚n' für das Formulieren neuer Sätze zur Verfügung steht, die mit den vorigen nicht zusammenhängen. In dem neu eröffneten Bereich sind die Vorkommen von ‚n' keine weiteren Vorkommen derjenigen Variablen, die in der obigen Wendung eingeführt wurde und im Beispielsatz zwei Mal rekurrierte. Sie gehören einer anderen, einer neuen Variablen an, die ausser ihrer äusseren Gestalt mit der ersten nicht viel gemeinsam hat; man hätte ja genau so gut für den zweiten Bereich einen neuen Buchstaben verwenden können. Insgesamt scheint sich der Buchstabe ‚p' im Hinblick auf seine Gebundenheit an einen abgetrennten Textbereich, etwa an eine

[82] Deshalb werden solche Buchstaben in Stegmüller und Varga von Kibéd (1984) als Parameter, nicht als Konstanten bezeichnet (siehe Anm. 34); die Bezeichnung als Konstanten ist jedoch weitaus häufiger anzutreffen. Um sie von eigentlichen Konstanten wie ‚π' für die Kreiszahl abzugrenzen, werden sie manchmal Pseudokonstanten genannt. Dieser terminologische ‹Wirrwarr› ist unter anderem der doppelten Rolle geschuldet, die solchen Buchstaben beim Formalisieren zukommt: Einmal werden sie wie schematische Buchstaben gebraucht, wenn es um den Nachweis der formalen Gültigkeit von Schlüssen geht; dann wieder wie Konstanten, wenn ihnen mittels Korrespondenzschema eine bestimmte Bedeutung zugewiesen wird. Vgl. dazu ausführlich Brun (2004, S. 143-158).

[83] Auch gewisse formale Systeme sehen diese Möglichkeit vor, um das Beweisführen zu erleichtern (siehe Anm. 21).

bestimmte Formalisierung, gleich oder zumindest ähnlich zu verhalten wie die freie Variable ‚n'. Handelt es sich also bei der Satzkonstante ‚p' entgegen dem Wortlaut doch um eine Variable?

Ohnehin könnte man sich fragen, ob nicht auch Eigennamen einen Bereich besitzen, wie es bei Variablen und solchen Pseudokonstanten der Fall zu sein scheint. Oft ist die Bedeutung eines Eigennamens ja nicht immer die gleiche. Wenn zum Beispiel in diesem Buch und in anderen philosophischen Schriften der Name ‚Gottlob Frege' fällt, wird damit kaum eine derjenigen Personen gemeint sein, die in einer Geschichte über das Leipziger Bankenwesen als Hauptakteur erwähnt werden müsste, sondern ein Nachkomme aus diesem Geschlecht, der sich um die Logik verdient gemacht hat. Offenbar ist es möglich, einem Eigennamen in verschiedenen Taufakten verschiedene Bedeutungen zu geben; seine älteren Bedeutungen verliert er dadurch nicht, sondern kumuliert sie gleichsam mit den neuen – was indessen einen Unterschied zu Pseudokonstanten, *dummy names* und Variablen darstellt.[84]

Doch selbst wenn diese Differenz hinreichte, um Variablen von nicht-logischen Konstanten zu unterscheiden, blieben noch immer die logischen übrig. Dass das vorgeschlagene Merkmal Variablen und logische Konstanten auseinanderzuhalten vermag, erscheint zunächst fraglich, zumal gerade Junktoren bekanntlich mit einem syntaktischen Bereich ausgestattet sind. Hier gilt es jedoch eine wichtige Unterscheidung zu beachten, auf die Jaakko Hintikka hingewiesen hat: die zwischen dem *priority scope*, worin sich die Vorrangstellungen von Junktoren und Quantoren untereinander entfalten (zum Beispiel der Vorrang von ‚$\rightarrow$' gegenüber ‚$\forall x$' in ‚$\forall x Fx \rightarrow Fa$'), und dem *binding scope*, um den es hier geht.[85] Junktoren besitzen einen Bereich der ersten, nicht der zweiten Art.

Zu gewissen Abgrenzungsschwierigkeiten führt wohl auch der Versuch, die spezifische Differenz von Variablen an ihrem *semantischen* Bereich festzumachen, d. h. daran, dass sie über eine Vielheit von Gegenständen reichen, die sie, um es mit Freges Wort zu sagen, unbestimmt andeuten. Denn auch von Funktionen, insbesondere von Begriffen und Relationen, liesse sich sagen, dass sie über die Werte, die sie annehmen können, reichen, dass diese Werte ihren Bereich darstellen. Ob oder inwiefern sich der Wertebereich einer Funktion von dem Wertebereich einer Variablen wesentlich unterscheidet, ist jedenfalls keine leichte Frage. Wir werden im nächsten Unterkapitel immer wieder auf sie zurückkommen.

[84] Einige sehen in diesem Kumulieren der Bedeutungen jedoch gerade eine Gemeinsamkeit zwischen Variablen und Namen, siehe 1.3.3.1.

[85] Vgl. Hintikka (1997). Aus dieser Unterscheidung ist die sog. *Independence Friendly Logic* hervorgegangen.

Um Einheit in die Vielfalt zu bringen, bietet sich ausserdem ein etwas anderes Vorgehen an. Dieses bestünde darin, nach strukturellen wie historischen Zusammenhängen zu suchen, wodurch die verschiedenen Gebrauchsweisen von Buchstaben als Variablen miteinander verbunden sind. So bemerkt Frege an einer weiter oben zitierten Stelle, die Buchstaben in der Arithmetik dienten im Grossen und Ganzen dazu, allgemeine Gedanken auszudrücken.[86] Und auch Aristoteles bedient sich der Buchstaben, um seinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit geltend zu machen. Nicht immer jedoch ist Allgemeinheit unmittelbar das Ziel. Die Kenntlichmachung von Aussage- und Schlussformen oder des inneren Aufbaus von Begriffen und Relationen mittels Buchstaben dient mitunter anderen Zwecken, als dem Aufstellen einer allgemeinen Behauptung. Zum Beispiel kann sie dem Nachweis der logischen Äquivalenz von Aussagen oder der notwendigen Extensionsgleichheit von Begriffen dienen. Ferner werden Buchstaben in der Algebra als Namen für die Unbekannten eines Gleichungssystems verwendet. Wie diese Gebrauchsweise mit den bereits erwähnten und diese untereinander genau zusammenhängen, ist nicht sofort klar. Dennoch erscheint der Versuch nicht aussichtslos, die eine Gebrauchsweise auf die andere zurückzuführen, in der Hoffnung, am Ende so etwas wie einen Urgebrauch (oder auch mehrere) herausgearbeitet zu haben. Wie solche Zurückführungen aussehen könnten, wird sich im nächsten Unterkapitel am Beispiel des eben erwähnten Buchstabengebrauchs aus der Algebra zeigen.

Schliesslich muss über die bereits festgestellten Schwierigkeiten hinaus bedacht werden, dass selbst einheitliche Gebrauchsweisen von Buchstaben (wie die vorhin besprochene der syllogistischen Buchstaben) nicht immer leicht zu deuten sind und unverträgliche Interpretationen veranlassen können. Es sollte denn auch sowohl bei der Suche nach einer spezifischen Differenz wie auch bei Zurückführungsversuchen nicht vergessen gehen, dass es sich bei Variablen um historisch gewachsene notationale Werkzeuge handelt. Den Launen der Geschichte ausgesetzt waren und sind nicht nur ihre Gestalt, sondern desgleichen (obschon vielleicht in geringerem Masse) ihr Verwendungszweck und die Regeln ihres Gebrauchs. Gegenstand unserer Untersuchung ist somit ein Usus, der von vielen, mitunter zufällig anmutenden Entwicklungen geprägt wurde. Daher erfordert unsere Grundfrage ein anderes, breiteres Vorgehen als zum Beispiel die Frage, was eine Funktion ist, die sich enger, systematischer, sozusagen logischer angehen liesse.

Sollte sich herausstellen, dass den vielfältigen Erscheinungsformen von Variablen kein einheitliches Wesen zugrunde liegt, dass sie sich also unter keinen gemeinsamen Begriff bringen lassen, dass folglich das Wort ‚Variable' grundsätzlich homonym gebraucht wird,

[86] Siehe Anm. 21.

mithin unsere Grundfrage mehrdeutig ist, müsste dies dennoch nicht das Ende dieser breit angelegten Untersuchung bedeuten. Es gibt schwächere Arten des Zusammenhangs, die zu untersuchen sich aus philosophischer Sicht mindestens ebenso vielversprechend ausnimmt. Das lehrt uns nicht erst Wittgenstein mit seinem Begriff der Familienähnlichkeit. In der aristotelischen (hier durch Porphyr vertretenen) Tradition werden neben der Homonymie aus Zufall (ἀπὸ τύχης) vier Arten der *Homonymie aus Absicht* unterschieden: Homonymie (a) aufgrund einer Analogie; (b) aufgrund der Ähnlichkeit einer Sache mit ihrem Abbild; und aufgrund einer Beziehung (c) von einem Einen aus (ἀφ᾽ ἑνὸς) oder (d) auf ein Eines hin (πρὸς ἕν).[87] Unter die beiden letzteren, die in vielen mittelalterlichen Theorien der Trugschlüsse zu einer einzigen Art, d. i. zur Äquivokation *per prius et posterius*, verschmelzen sollten, wurde zudem oft auch die übertragene Rede (*ex transsumptione*, *metaphorice*) eingeordnet.[88] Alle diese Arten nicht-zufälliger Zusammenhänge wären nun, wenn sie im mannigfaltigen Gebrauch von Buchstaben als Variablen nachgewiesen werden könnten, ein Gewinn für die projektierte Untersuchung – und zugleich ein wirksames Gegengift gegen den grassierenden Neo-Essenzialismus.

1.2.4. Zusammenfassung

Fassen wir das Wichtigste kurz zusammen. Darüber, was Variablen sind, herrscht offenbar mehr Unklarheit, als ihr allgegenwärtiger und weitgehend unbekümmerter Gebrauch in Logik und Mathematik vermuten lassen könnte. Von denen, die diesen Gebrauch zu beschreiben oder erklären suchten, sahen sich nicht wenige veranlasst, Seltsames anzunehmen: Zahlen, die sich verändern, oder Gegenstände, denen gewisse Eigenschaften weder zukommen noch fehlen. Nicht selten liegt solchen Annahmen – begünstigt durch das schwer zu fassende Variablenwesen selbst – eine Vermengung von Zeichen und Bezeichnetem zugrunde. Doch auch denen, die Variablen nicht auf der Seite des Bezeichneten ansiedeln, sondern als Zeichen auffassen, fällt es nicht leicht zu sagen, wovon diese Zeichen überhaupt Zeichen sein sollen, wozu sie alles gebraucht werden können und wie es ihnen gelingt, zu leisten, was sie zu leisten vermögen. Es scheint, als bezeichneten Variablen alles und zugleich nichts.

Die generische Antwort, die wir heute geneigt sind, auf die Grundfrage zu geben, – nämlich dass Variablen Buchstaben sind, die auf eine für die Mathematik oder die Logik typische Weise gebraucht werden – wirft mehr Fragen auf, als dass sie Klärung bietet. Nicht jeder Buchstabengebrauch, auf den man in diesen Disziplinen trifft, passt unter

[87] Vgl. dazu den Eintrag ‚Homonyme' Cassin und Rosier-Catach (2004, S. 576).
[88] Vgl. Petrus Hispanus, *Tractatus*, VII § 32.

den Begriff, den wir uns von Variablen machen. So werden Buchstaben zum Beispiel als Konstanten und Abkürzungen verwendet, Variablen aber kürzen weder ab noch sind sie mit einer festen Bedeutung versehen. Welche Gebrauchsweisen relevant sind und welche ausser Acht bleiben können – darüber gehen die Meinungen auseinander. Das nächste Unterkapitel wird dies noch einmal deutlicher zeigen.

Dem fehlenden Konsens und dem sich daraus ergebenden Wirrwarr in der Terminologie liegt indes die komplizierte Realität des mathematischen und logischen Buchstabengebrauchs zugrunde. Wenn wir fragen, was Variablen sind, fragen wir zwar auch danach, was den verschiedenen Gebrauchsweisen von Buchstaben als Variablen gemeinsam sein könnte. Vorerst aber gilt es offenzulassen, ob eine wesentliche Einheit, die das Mannigfaltige zusammenhält, überhaupt vorhanden ist oder ob wir einer Chimäre nachjagen. Wir dürfen uns von der sokratischen Frage nach dem Was nicht blenden lassen und vorschnell Gebrauchsweisen ausschliessen, nur weil sie nicht in das Prokrustesbett unserer vorgefertigten Vorstellungen passen. Unterschiede zwischen Variablen sind – sowohl, was die Regeln ihres Gebrauchs, als auch, was die Verwendungszwecke angeht – für die vorliegende Untersuchung geradeso wichtig wie mögliche Gemeinsamkeiten. Gefragt sind detailreiche und zugleich Übersicht verschaffende Beschreibungen der verschiedenen Gebrauchsweisen in ihrem vielfältigen Zusammenhang. Dabei können Unterteilungen in verschiedene Variablenarten gleichermassen behilflich sein wie Zurückführungen von Gebrauchsweisen auf andere.

Es zwingt sich folglich ein vergleichendes Vorgehen auf, bei dem der Bildwinkel nicht zu eng eingestellt wurde. Dazu gehört auch, wenigstens in Teilen der Arbeit eine historische Perspektive einzunehmen. So kann zum Beispiel die Antwort auf die Frage, ob es sich bei den Buchstaben, die Aristoteles verwendet hat, um Variablen handelt, als Gradmesser für die erreichten Ergebnisse dienen. Die Qualität des Verständnisses, das hier angestrebt wird, offenbart sich denn auch nicht in der Fähigkeit, selbst Variablen korrekt oder neuartig zu gebrauchen, sondern vielmehr in der Angemessenheit der Beschreibungen und Erklärungen bestehender Gebrauchsweisen. Denn hier – in den Versuchen, den mathematischen Buchstabengebrauch zu erklären oder zu begründen, ihn in eine umfassendere Mythologie einzuweben – gedeiht das Missverständnis.

Das Fazit ist klar: Die Grundfrage muss erweitert werden. Aus dem, was im nächsten Unterkapitel folgen wird, soll klarer hervorgehen, in welche Richtungen die Frage zu erweitern ist, bevor im übernächsten Unterkapitel (genauer gesagt in 1.4.2) ihre Entfaltung erfolgt. Die begonnenen Digressionen in die Geschichte der modernen Logik werden zu diesem Zweck weitergeführt. Beginnen werden wir indes bei der vorhin kurz erwähnten algebraischen Gebrauchsweise von ‚x'. Ihre Betrachtung versetzt zwar in vergangene Zeiten zurück, nicht aber in die Geschichte der Disziplinen, sondern in unsere eigene.

1.3. Erweiterungen der Grundfrage

Die Frage ‚Was ist x?' weckt Erinnerungen an eine Zeit vor der Philosophie. Buchstaben und Wörter waren ein Teil dieser Welt, Ziffern und Zahlen ein anderer. Wir hatten zu zählen gelernt und mit Ziffern zu rechnen, ebenso Wörter zu buchstabieren in Laut und Schrift. Alles hatte seinen Platz und seine inzwischen wohlvertraute Ordnung, als auf einmal damit begonnen wurde zu vermengen, was davor säuberlich getrennt war. Entgegen aller Logik drangen Elemente des Alphabets in das Reich der Zahlen ein und störten, was wir in unzähligen Übungsläufen entlang den Reihen des Einmaleins als harmonisches, in sich abgeschlossenes Ganzes kennengelernt hatten. Beim ersten Eindringling handelte es sich um ‚x'. Zwar war uns dieser Buchstabe vom Ende des Alphabets nicht unbekannt, doch beim Lesen bekamen wir ihn nur selten zu Gesicht und noch seltener waren die Gelegenheiten, ihn hinzuschreiben. Zu Beginn wurde uns beigebracht, die Gegenwart dieses Fremdkörpers neben Ziffern und Operationszeichen zu akzeptieren und Gleichungen danach aufzulösen, d. h. in die Form ‚$x = ...$' zu bringen. Wahrscheinlich war ich nicht der einzige, dem sich der Nutzen solcher Umformungen nicht erschloss. Da es für die korrekte Lösung dieser Art von Aufgaben aber genügte, die erlernten Umformungsregeln mechanisch auszuführen, bereitete die Veränderung keine weiteren Probleme.

1.3.1. Buchstaben als Namen für Unbekanntes

Schwieriger wurde es erst, als es darum ging, die neu erlernten Regeln bei der Lösung sogenannter Textaufgaben anzuwenden. Mit ein Grund dafür war sicherlich, dass das Lösen dieser Aufgaben im Leben von Dreizehnjährigen ausserhalb des engen Mathematikunterrichts keinen für sie erkennbaren Zweck darstellen konnte. Die Aufgabentexte den Vorstellungen anzugleichen, die sich Erwachsene von der Jugendsprache machen, ändert natürlich nichts an der genannten Schwierigkeit. Dies mag eine aktuellere Kostprobe verdeutlichen:[89]

> Dangerous Dave hat um die Hälfte mehr Creds als Brutal Bob. Würde Dave ein Sechstel seiner Creds ausgeben, so hätten beide zusammen 72 Creds. Wie viel Creds besitzt jeder der beiden?

[89] Diese Textaufgabe ist tatsächlich einer Übungsserie entnommen, die auf die Aufnahmeprüfung an Zürcher Mittelschulen vorbereiten soll.

Der Schlüssel zur Lösung solcher Aufgaben, wurde uns gelehrt, sei es, die gegebenen Aussagen mit mathematischen Mitteln allein auszudrücken, d. h.: Ausdrücke wie ‚um ... mehr als ... haben' und ‚ausgeben' in Additionen und Subtraktionen zu übertragen, ‚die Hälfte', ‚ein Sechstel' und dergleichen in Multiplikationen, und schliesslich alles in die Form einer Gleichung zu giessen. Da die gesuchten Anzahlen zu Beginn nicht bekannt sind, seien für sie Buchstaben einzuführen, ‚x' und ‚y'. Sie sollten uns als vorübergehende Namen für die *Unbekannten* dienen. Aus diesem Vorgehen würden sich im angeführten Beispiel zwei Gleichungen in je zwei Unbekannten ergeben:

$$x = y + \frac{1}{2}y \tag{1}$$

$$(x - \frac{1}{6}x) + y = 72 \tag{2}$$

Von hier aus erwies sich das Übrige als Kinderspiel. Da Gleichung (1) bereits nach dem Namen der ersten Unbekannten aufgelöst ist und scheinbar dessen Bedeutungsgleichheit mit ‚$y + \frac{1}{2}y$' ausdrückt, darf ‚x' in Gleichung (2) überall durch diesen Ausdruck (oder einfacher: durch ‚$\frac{3y}{2}$') ersetzt werden.[90] Die daraus hervorgehende Gleichung enthält nur noch einen Buchstaben und muss daher lediglich in Form gebracht, d. h. nach ‚y' aufgelöst werden. Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens steht dann in gewohnter Ziffernschreibweise das Zeichen der zweiten gesuchten Zahl; durch das Einsetzen des gewonnenen Zahlzeichens anstelle von ‚y' in Gleichung (1), ergibt sich nach wenigen Vereinfachungen schliesslich das Zeichen der ersten Zahl.

1.3.1.1. Die Schwierigkeit elementarer Textaufgaben

Die eigentliche Schwierigkeit solcher Textaufgaben versteckt sich demnach in der Übersetzungsarbeit. Zwar ist die allgemeine Form, in die es die vorgegebenen Aussagen zu übertragen gilt, immer dieselbe: Es müssen Gleichungen aufgestellt werden. Wie sich aus den Aussagen jedoch entsprechende Gleichungen formen lassen und aus welchen Bestandteilen diese bestehen müssen, war nicht immer leicht zu erkennen. So ist dem ersten

[90] Hier wird ersichtlich, inwiefern sich der Gebrauch der Buchstaben vom Umgang mit Ziffern unterscheidet: Gewisse Ersetzungen, die bei reinen Ziffernausdrücken durchgeführt werden dürfen, sind nicht mehr erlaubt, sobald ein Buchstabe vorkommt. Zum Beispiel lässt sich ‚$\frac{3 \cdot 2}{2}$' überall, wo es vorkommt, durch ‚3' ersetzen; ‚$\frac{3y}{2}$' dagegen lässt sich nicht durch ein Zahlzeichen ersetzen, solange der Wert von ‚y' unbekannt ist. Anders gesagt: Ein Funktionsausdruck, der durch Zeichen zulässiger Argumente gesättigt ist, darf überall *salva veritate* durch das Zeichen des Funktionswerts für diese Argumente ersetzt werden. Wenn jedoch Argumentstellen durch (unbestimmt andeutende) Buchstaben besetzt sind, ist der resultierende Funktionswert nicht bestimmt, mithin keine Ersetzung möglich.

Satz im obigen Beispiel nicht ohne Weiteres anzusehen, wie sich aus ihm überhaupt eine Gleichung ergeben soll. Das Prädikat, das an der Satzoberfläche erscheint (‚... hat um die Hälfte mehr Creds als ...'), bezeichnet eine asymmetrische Relation, die überdies zwischen Personen besteht, nicht zwischen Zahlen. Wo bleibt da die arithmetische Gleichheit?

Um die Gleichung zu sehen, muss erkannt werden, dass die intendierte Aussage mit einer anderen äquivalent ist: mit einer Aussage, die von den beiden gesuchten Zahlen handelt und sie in eine bestimmte Gleichheitsbeziehung setzt. Der Ausdruck dieser äquivalenten Aussage setzt sich zusammen aus den Kennzeichnungen der beiden Unbekannten (‚die Anzahl Creds, die Dave besitzt' und ‚die Anzahl Creds, die Bob besitzt') und einem Prädikat, das jene Beziehung zwischen den Unbekannten bezeichnet, d. i.: ‚ξ ist gleich der Summe von ζ und der Hälfte von ζ'. Tritt nun die erste Kennzeichnung in die erste Argumentstelle ein, die zweite Kennzeichnung in die zweite und die dritte Argumentstelle, resultiert die gewünschte Aussage.

Das Prädikat darf hier nicht als einfacher Lückentext aufgefasst werden. Vielmehr muss es sich um ein *komplexes* Prädikat handeln, d. h.: Es muss darin das Bestehen und Fehlen von Verwandtschaften zwischen den Argumentstellen abgebildet sein.[91] Das Prädikat vermag die intendierte Beziehung nämlich nur dann korrekt herauszugreifen, wenn in ihm angezeigt wird, dass die zweite mit der dritten Argumentstelle verwandt ist, jedoch keine der beiden mit der ersten. Da der Ausgangssatz nicht ganz eindeutig ist, scheint mir eine zweite Lesart, bei der die Argumentstellen auf andere Weise miteinander verknüpft sind, in diesem Fall nicht nur möglich, sondern sogar zulässig: ‚ξ ist gleich der Summe von ζ und der Hälfte von ξ'. Mit einem einfachen Prädikat, worin die Argumentstellen bloss durch Leerzeichen offengehalten werden, lässt sich der Unterschied in den Lesarten nicht abbilden.

Im letzten Schritt zur Lösung der Aufgabe gilt es noch, die einzelnen Bestandteile in entsprechende mathematische Ausdrücke zu übertragen. Während dem Prädikat ein Ausdruck entspricht, in dem neben den Buchstaben auch Ziffern und arithmetische Symbole enthalten sind (‚$\xi = \zeta + \frac{1}{2}\zeta$'), lassen sich für die beiden Kennzeichnungen nur einzelne, eine Zahl unbestimmt andeutende Buchstaben (‚x' und ‚y') einsetzen. Das Vorkommen der Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ' im Prädikat liefert die Gebrauchsanweisung, um dieses korrekt mit den Buchstaben zu vereinen, welche die Kennzeichnungen vertreten.

[91] Die Unterscheidung von einfachen und komplexen Prädikaten ist Michael Dummetts Auslegung von Freges Sprachphilosophie entlehnt, vgl. Dummett (1981, S. 27-33).

Angesichts solcher Komplexität ist es nicht erstaunlich, dass uns keine systematischen Herangehensweisen an die Übersetzungsarbeit beigebracht wurden. Die Lehrpläne sahen das Zerlegen und Formalisieren umgangssprachlicher Sätze mit prädikatenlogischen Mitteln freilich nicht vor. Es wurde erwartet, dass wir den Übergang von der Sprache des Alltags in die Sprache der Arithmetik intuitiv vollziehen. Da es dabei zahlreiche Möglichkeiten gibt, Fehler zu begehen, waren Textaufgaben besonders unbeliebt. Überdies ergab sich eine grundlegendere Schwierigkeit, die wenigstens in meinem Fall ein beträchtliches Lernhindernis darstellte.

Mich störte und verwirrte in diesen präphilosophischen Zeiten, dass selbst diejenigen, die das Übersetzen und Umformen tadellos beherrschten, nicht verstanden oder nicht erklären konnten, weshalb die Buchstabenmethode im Allgemeinen zum Ziel führt, geschweige denn, wodurch sie überhaupt ihre Berechtigung hat. Dem gesunden Menschenverstand muss das Vorgehen ja suspekt erscheinen, wenn nicht sogar verrückt: Die Aufgabe besteht darin, Unbekanntes ausfindig zu machen, und dies soll dadurch gelingen, dass den gesuchten Gegenständen Namen gegeben werden? Das ist doch den Pflug vor die Ochsen spannen! Und anmassend noch dazu. Anstatt zu versuchen, sich den unbekannten Zahlen vorsichtig und beschreibend zu nähern, werden einfache Buchstaben eingeführt und verwendet, als seien sie Zahlzeichen, mithin normale Namen dieser Zahlen. Es wird so getan, als hätten wir einen direkten, unprädikativen Zugang zu den Unbekannten, wenn auch bloss für die Dauer einer Problemlösung. Denn sind die Umformungsziele einmal erreicht und alle Buchstaben auf eine Seite der Gleichungen verschoben, werden sie als Namen für die Unbekannten eliminiert, sodass am Ende allein die gewohnten Zahlzeichen übrig bleiben. Dies mag zwar erklären, weshalb dieselben Buchstaben zur Lösung immer neuer Probleme herangezogen werden dürfen, mutet aber auch wie magisches Denken an: als ob wir durch das Hinschreiben von Buchstaben Türen an Wände malten, die uns in verborgene Räume eintreten lassen, bevor sie wieder verschwinden.

1.3.1.2. Buchstaben in Gleichungen und Widerspruchsbeweisen

Wie lässt sich diese Gebrauchsweise von Buchstaben gleichwohl verstehen und begründen? Der Fehler liegt darin, ‚x‘ und ‚y‘ als *Namen* für die Unbekannten aufzufassen. Es ist Unsinn zu glauben, wir könnten diese Buchstaben als Namen für Gegenstände einführen, ohne dabei anzugeben, *welche* Gegenstände sie bezeichnen sollen. Und einem Zeichen einen unbekannten Gegenstand als Bedeutung zuweisen, ist unmöglich. Auf welche wundersame Weise soll dies auch geschehen?

Dem könnte man entgegenhalten, die gesuchten Zahlen seien ja nicht völlig unbekannt. Mit den kennzeichnenden Ausdrücken, die in den Aufgabentexten typischerweise enthalten sind oder sich aus ihnen rekonstruieren lassen, stehen durchaus Mittel zur Verfügung, auf die Unbekannten zuzugreifen, werden doch diejenigen Zahlen gesucht, worauf diese Kennzeichnungen zutreffen. In unserem Beispiel sind das: ‚die Anzahl Creds, die Dave besitzt' und ‚die Anzahl Creds, die Bob besitzt'. Die Buchstaben ‚x' und ‚y' wären demnach nichts anderes als Abkürzungen für diese Kennzeichnungen, sozusagen ihr Gegenstück im mathematischen Jargon, der bekanntlich von der Kürze des Ausdrucks lebt.

Es ist zwar nicht ganz falsch, zu sagen, die Buchstaben kürzten die Kennzeichnungen ab. Denn sie dienen insofern als Abkürzungen, als der Wert, der ihnen am Ende des Lösungswegs zugewiesen wird, diejenige Zahl bezeichnet, auf welche die Kennzeichnung zutrifft, die sie abkürzen: Wenn $x = 48$, dann trifft die Kennzeichnung, die durch ‚x' abgekürzt wird, auf 48 zu; wenn $y = 32$, dann die durch ‚y' abgekürzte Kennzeichnung auf 32. Beim Übergang von der Sprache der Arithmetik zurück in die Sprache des Alltags mögen die Buchstaben ‚x' und ‚y' tatsächlich wie Abkürzungen gebraucht werden. Das gilt aber nicht für den in arithmetischer Sprache verfassten Abschnitt des Lösungswegs. Sind die Anfangsgleichungen einmal aufgestellt, spielt es keine Rolle mehr, welche Kennzeichnungen durch ‚x' und ‚y' abgekürzt werden, ja ob sie überhaupt Abkürzungen für irgendetwas sind. In den Gleichungen und Umformungsoperationen treten sie als blosse Buchstaben auf, die im Gegensatz zu Kennzeichnungen keine interne Komplexität aufweisen. Dass die zusammengesetzten Ausdrücke, die im Aufgabentext die Unbekannten kennzeichnen, in der mathematischen Formulierung des Problems durch einfache Zeichen ersetzt werden können, zeigt vielmehr, dass die in den Kennzeichnungen enthaltenen Eigennamen und Prädikate für die Lösung unerheblich sind.[92] Logisch belangvoll dagegen ist in unserem Beispiel, dass es sich um zwei verschiedene Kennzeichnungen handelt. Entsprechend gilt es, bei der Übersetzung in die arithmetische Sprache verschiedene Buchstaben zu wählen.

[92]In seiner etwas in Vergessenheit geratenen *Introduction to Mathematics* illustriert Whitehead ebendiesen Punkt am Beispiel einer Formel zur Berechnung der Kosten beim Hausbau: «While we are making mathematical calculations connected with the formula $20y = x$, it is indifferent to us whether the law be true or false. In fact, the very meanings assigned to x and y, as being a number of cubic feet and a number of pounds sterling, are indifferent. During the mathematical investigation we are, in fact, merely considering the properties of this correlation between a pair of variable numbers x and y. [...] The mathematical certainty of the investigation only attaches to the results considered as giving properties of the correlation $20y = x$ between the variable pair of numbers x and y» Whitehead (1911, S. 26 f.).

Doch selbst wenn sich die Buchstaben wie Kennzeichnungen verhielten, machte sie dies nicht zu Namen irgendwelcher Gegenstände. Kennzeichnungen sind insofern keine Namen, als sie – auch nach Disambiguierung aller denkbaren Parameter – auf Mehreres oder auf nichts zutreffen können. Nun geht man als Mensch im Schulalter davon aus, dass die Lehrkräfte keine fiesen Fangfragen stellen, und vertraut darauf dass, wenn nach *der* Anzahl so-und-so gefragt wird, eine entsprechende Zahl tatsächlich existiert, und zwar genau eine. Dabei handelt es sich aber lediglich um eine pragmatische Annahme, die für die Anwendbarkeit der fraglichen Methode unwesentlich ist. Die gleiche Methode des Übersetzens und Eliminierens lässt sich nämlich auch auf Fälle anwenden, bei denen am Ende herauskommt, dass mehrere oder keine Gegenstände die Gleichungen erfüllen. Zum Beispiel kann man den obigen Aussagen im Aufgabentext eine dritte hinzufügen, wonach Dave und Bob zehn Personen mit zehn Creds beschenken könnten, wenn sie ihre Creds zusammenlegten. Die Gleichung, die sich daraus ergibt

$$\frac{x+y}{10} = 10 \tag{3}$$

ist mit den Gleichungen (1) und (2) unverträglich. Denn aus ihnen lassen sich $x = 48$ und $y = 32$ ableiten, was wiederum eingesetzt in (3) eine offenkundige Falschheit hervorbringt, $80/10 = 10$, die im Widerspruch etwa zu $8 < 10$ steht. Es ergibt sich also für die um diese dritte Aussage ergänzte Fragestellung, was ihr nicht sogleich anzusehen ist: dass es überhaupt keine Unbekannten gibt, nach denen hier gesucht werden kann. Trotzdem bewährt sich der gleiche Buchstabengebrauch auch in diesem Fall.

Spätestens zu Beginn des Mathematikstudiums zeigt sich, dass ein ganz ähnlicher Buchstabengebrauch anderem dienen kann, als dem Lösen linearer Gleichungssysteme oder dem Erkennen widersprüchlicher Fragestellungen. Viele Widerspruchsbeweise beginnen damit, dass scheinbar die Existenz bestimmter Gegenstände angenommen wird, um daraus einen Widerspruch herzuleiten; und zu diesem Zweck werden Buchstaben scheinbar als Namen für diese Gegenstände eingeführt. Ein uralter Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, der heute noch in den allerersten Mathematikvorlesungen gerne vorgeführt wird, beginnt so: „Seien p und q zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $p/q = \sqrt{2}$“.[93] Im Beweisverlauf zeigt sich, dass es ein solches p und ein solches q überhaupt nicht geben kann. D. h., die Buchstaben ‚p‘ und ‚q‘ konnten gar nie für irgendwelche Zahlen

[93] Zur Geschichte dieses Beweises, die mindestens bis ins 5. Jahrhundert v. Chr. zurückreicht, vgl. Hischer (2021, S. 142-144). Es findet sich dort auch eine kurze Beweisskizze, wie sie heute in einer einführenden Mathematikvorlesung gegeben werden könnte. Der Einfachheit halber wird die Quadratwurzelbeziehung (‚$\sqrt{\xi} = \zeta$‘) hier als rechtseindeutige Relation aufgefasst, deren Vor- und Nachbereiche nur positive Zahlen enthalten (d. h. als Funktion von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$).

stehen, sofern diese die Bedingungen erfüllen sollten, die zu Beginn an sie gestellt werden. Dennoch ist es für den Beweis unerlässlich, die beiden Buchstaben auf diese Weise einzuführen. Und da es sich um einen Widerspruchsbeweis handelt, kommt das Ergebnis nicht überraschend. Im Gegenteil, die Anfangsbedingungen wurden mit Absicht so gewählt, dass die genannte Unmöglichkeit folgt.

Buchstaben, so scheint es, werden in der Mathematik mitunter zu dem alleinigen Zweck eingeführt, den Beweis zu erbringen, dass die Gegenstände, für die sie angeblich stehen sollen, unmöglich existieren können. Es fällt nicht schwer, zu sehen, wie sich dieser Befund missverstehen lässt, und zu welchen Irrtümern er verleitet. Man könnte versucht sein, wie folgt zu räsonieren: „Die Buchstaben ‚p' und ‚q' sollen eine Zahl bezeichnen, welche – egal welche – die aufgestellten Bedingungen erfüllt; da aber keine existierende Zahl diese Bedingungen erfüllen kann, muss es sich um Zeichen für inexistente Zahlen handeln; denn andernfalls bezeichneten die Buchstaben überhaupt nichts und es wäre ein Rätsel, wie sie dem Beweis dienen könnten." Neben veränderlichen und unbestimmten Zahlen müssten wir demnach auch noch inexistente Zahlen annehmen: Zahlen, die es nicht geben *kann*, unmögliche Gegenstände. Konsequenzen wie diese mögen zwar bei manchen den philosophischen Ehrgeiz wecken, die Grenzen des gerade noch Vertretbaren auszuloten. Meistens aber sind sie bloss das Symptom eines Missverständnisses.

1.3.1.3. Analyse dieses Buchstabengebrauchs

Die Auflösung des Missverständnisses, das hier zugrunde liegt, besteht denn auch darin, Buchstaben dieser Art nicht als Namen oder sonstige Zeichen für Gegenstände aufzufassen, sondern primär als Markierungen, die dazu dienen, die logische Form von Begriffen und Relationen kenntlich zu machen. Wie ist das auf unsere Beispiele anzuwenden? Obwohl die mathematische Prosa an ihrer Oberfläche den Anschein erweckt, im Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ würden zu Beginn zwei Namen für noch unbekannte Zahlen eingeführt, wäre es aus logischer Sicht ein Irrtum, daran festzuhalten, dies sei, was geschieht. Der Beweis beginnt vielmehr mit der Angabe einer komplexen Relation, die sich wie folgt verbalisieren lässt: ‚ξ ist eine natürliche Zahl, ζ ist eine natürliche Zahl, ξ und ζ sind teilerfremd und ξ/ζ ist gleich $\sqrt{2}$'. Oder in symbolischer Kurzform:[94]

$$(\xi, \zeta \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{ggT}(\xi, \zeta) = 1) \ \wedge \ \frac{\xi}{\zeta} = \sqrt{2}$$

[94] Zwei natürliche Zahlen p und q heissen *teilerfremd*, wenn 1 der grösste Teiler ist, den sie gemeinsam haben. In Symbolen: $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$.

Ziel des Beweises ist es, zu zeigen, dass diese Relation leer ist, d. h. von keinem einzigen Gegenstandspaar erfüllt wird. An der Relation selbst lässt sich das in der gegebenen Formulierung nicht ohne Weiteres erkennen. Die Beweisstrategie besteht deshalb darin, in nachvollziehbaren Schritten Relationen anzugeben, die mit der ersten extensional übereinstimmen, bis schliesslich eine oder mehrere gefunden sind, an deren Ausdruck sich leicht genug ablesen lässt, dass die leere Menge ihre Extension ist. Für den Beweis hier reicht bereits eine kurze Reihe von offensichtlich koextensionalen Relationen:

$$
\begin{aligned}
(\xi, \zeta \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(\xi, \zeta) = 1) \quad &\wedge \quad (\frac{\xi}{\zeta})^2 = 2 \\
(\xi, \zeta \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(\xi, \zeta) = 1) \quad &\wedge \quad \xi^2 = 2\zeta^2 \\
(\xi, \zeta \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(\xi, \zeta) = 1) \quad &\wedge \quad \frac{\xi^2}{2} = \zeta^2
\end{aligned}
$$

Dem Ausdruck der zweiten Relation lässt sich leicht entnehmen, dass nur solche Paare natürlicher Zahlen sie erfüllen können, deren erstes Element gerade ist; dem Ausdruck der dritten Relation wiederum, dass, wenn das erste Element gerade ist, das zweite es auch sein muss.[95] Da zwei teilerfremde Zahlen unmöglich beide gerade sein können (und ausser 1 keine Zahl zu sich selbst teilerfremd ist), kann folglich kein einziges Paar von Gegenständen diese Relationen erfüllen.

Eine ähnliche Analyse des Buchstabengebrauchs bietet sich nun auch für das oben dargelegte Vorgehen beim Lösen linearer Gleichungssysteme an. Da in diesem Fall die fragliche Relation nicht leer sein muss, ist das Ziel des Vorgehens hier, die Gegenstandspaare zu bestimmen, welche die Relation erfüllen, oder andernfalls zu zeigen, dass sie leer ist. Die Strategie zur Erreichung dieses Ziels ist im Grunde dieselbe wie beim Widerspruchsbeweis. Es sollen schrittweise, durch nachvollziehbare Umformungen, Relationen und Begriffe gewonnen werden, an deren Ausdruck sich leicht erkennen lässt, welche Zahlenpaare zu ihrer Extension gehören oder ob diese leer ist. Die Relation, von der in unserem Beispiel auszugehen ist, entspricht dem logischen Produkt der beiden Gleichungen (1) und (2), d. i.:[96]

$$\xi = \zeta + \frac{1}{2}\zeta \;\wedge\; (\xi - \frac{1}{6}\xi) + \zeta = 72$$

[95] Zwei simple Lemmata sind hier beim Schliessen behilflich. Sei (p, q) ein solches Paar natürlicher Zahlen: (i) Wenn p^2 gerade ist, dann auch p; und (ii) wenn p gerade ist, ist p^2 durch 4 teilbar. Mit Hilfe des ersten Lemmas lässt sich aus $p^2 = 2q^2$ schliessen, dass p gerade ist. Daraus und aus $p^2/2 = q^2$ lässt sich mit Hilfe beider Lemmata schliessen, dass auch q gerade ist.

[96] Anstatt von *einer* Relation zu sprechen, könnte man freilich auch zwei annehmen, eine für jede Gleichung. Die gesuchte Extension wäre dann einfach die Schnittmenge der Extensionen dieser beiden Relationen.

In der ersten Umformungsphase geht es darum, beide Gleichungen nach derselben Variablen aufzulösen.[97] Daraus ergibt sich die Relation

$$\xi = \frac{3}{2}\zeta \ \wedge \ \xi = \frac{6}{5}(72 - \zeta)$$

die zur vorigen Relation koextensional ist. Diesem neuen Ausdruck der Verhältnisse zwischen den beiden Unbekannten ist zwar nicht ohne Weiteres zu entnehmen, was die gesuchte Extension ist, aber er lässt erkennen, dass nur solche Paare die fragliche Relation erfüllen können, deren zweites Element unter den Begriff ‚$\frac{3}{2}\zeta = \frac{6}{5}(72 - \zeta)$' fällt.[98] In der zweiten Phase geht es folglich darum, diesen Begriff (bzw. die Gleichung, die er enthält) so umzuformen, dass seine Extension und damit die zweite der beiden gesuchten Zahlen leicht ersichtlich wird. Es genügen ein paar einfache Schritte, um die Koextensionalität mit dem Begriff ‚$\zeta = 32$' einzusehen. Durch die Einsetzung dieser Zahl in die obige Relation ergibt sich sodann ein Begriff, unter den die erste der beiden gesuchten Zahlen zu fallen hat:

$$\xi = \frac{3}{2}32 \ \wedge \ \xi = \frac{6}{5}(72 - 32)$$

Wiederum führen einfache Umformungen zu einem Begriff, der seine Extension gleichsam auf der Stirn trägt: ‚$\xi = 48$'. Mit ‚$\xi = 48$' und ‚$\zeta = 32$' ist das Ende der Kette koextensionaler Relationen und Begriffe erreicht und die Aufgabe gelöst.

Was sich aus diesen Betrachtungen für das richtige Verständnis des Buchstabengebrauchs in der Mathematik ergibt, wird im gleich folgenden Abschnitt behandelt. Von dem dabei erschlossenen Standpunkt aus gibt sich die Mathematik als Wissenschaft von Begriffen und ihren mannigfaltigen Verflechtungen zu erkennen – daher die Überschrift von 1.3.2. Im dritten Kapitel (in 3.2) werden wir einen damit verknüpften Aspekt wieder aufnehmen: das Problem der allgemeinen Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme. Dieses Problem lässt sich als ein sogenanntes Eliminationsproblem fassen. Algebraische Eliminationsprobleme sind historische Vorläufer der späteren Entscheidungsprobleme, mit denen sich das nächste Kapitel ausführlich befassen wird.[99]

---

[97] In der obigen Darstellung des Lösungswegs wurde diese Phase übersprungen, da die erste Gleichung bereits die gewünschte Form hat und sich somit das sogenannte Einsetzungsverfahren direkt anwenden lässt (d. h. ‚x' darf in Gleichung (2) überall durch ‚$\frac{3y}{2}$' ersetzt werden). In dem, was gleich folgt, kommt hingegen das sogenannte Gleichsetzungsverfahren zur Anwendung, da es für unsere Zwecke hier etwas ergiebiger ist.

[98] Da für jedes Zahlenpaar (x, y), das die Relation erfüllt, gilt, dass x sowohl mit $\frac{3}{2}y$ als auch mit $\frac{6}{5}(72 - y)$ identisch ist, folgt die Gleichheit von $\frac{3}{2}y$ und $\frac{6}{5}(72 - y)$, mithin dass y unter den genannten Begriff fällt.

[99] Für eine leicht verständliche Besprechung der Analogie zwischen dem Lösen elementarer Textaufgaben aus der Schulalgebra und dem Nachweis der aussagenlogischen Gültigkeit von Schlüssen (das

1.3.2. Mathematik als Begriffswissenschaft

In der Mathematik werden Buchstaben manchmal auf eine Weise in die Rede eingeführt, die sie als Namen für unbekannte, unbestimmte oder beliebige Gegenstände erscheinen lassen, obwohl ihr Gebrauch von einem logischen Standpunkt aus gesehen ein anderer sein muss. Typisch sind Wendungen der Form: „Seien x und y die gesuchten F"; „Sei x ein F, y ein G, ..."; „Seien x, y F, sodass Rxy"; etc. etc. Die Täuschungskraft, die von solcher Prosa ausgeht, sollte nicht unterschätzt werden. Sie verleitet dazu, Seltsames oder sogar Unsinniges über die verwendeten Buchstaben anzunehmen, und vernebelt das Verständnis ihres Gebrauchs. In der Regel aber – und auch das gilt es zu verstehen – sind die einführenden oder erklärenden Worte, die den Buchstabengebrauch begleiten, weder seiner korrekten Anwendung noch der allgemeinen Verständigung darüber abträglich, im Gegenteil. Der Schaden, den sie verursachen, ist zumeist nur philosophischer Natur, und keiner, der den Nutzen dieses Werkzeugs für die Mathematik beeinträchtigen würde.

In 1.2.1 zeigte sich, wie Wendungen der genannten Form und der anschliessende Gebrauch der durch sie eingeführten Buchstaben die Annahme unbestimmter Gegenstände als Bedeutungen dieser Buchstaben befördern können. Um zu erklären, wie Buchstaben den Ausdrücken, worin sie vorkommen, zu Allgemeinheit verhelfen, wird die Unbestimmtheit als eine metaphysische aufgefasst, die das Wesen der Gegenstände betrifft, von denen angenommen wird, dass jene Buchstaben sie bezeichnen. Die Gegenstände gelten nicht deshalb als unbestimmt, weil unbekannt ist, ob sie gewisse Eigenschaften besitzen oder nicht, sondern weil angenommen wird, dass ihnen gewisse Eigenschaften weder zukommen noch fehlen. Nicht immer jedoch bewegt sich der Irrtum auf dieser metaphysischen Ebene. Verbreiteter ist eine semantische Variante. Diese vermeidet zwar den Fehler, die Unbestimmtheit in die hypostasierte Bedeutung der Buchstaben zu legen; deren logischen Beitrag stellt sie gleichwohl missverständlich dar. Dieser Irrtumsvariante zufolge führen Wendungen der Form „Seien x und y Fs" Namen für Gegenstände ein: ‚x' und ‚y' sollen je ein einzelnes und doch beliebiges Element aus der durch F (mithin begrifflich) gegebenen Menge bezeichnen. Überall im Bereich, den die Wendung aufspannt, treten die eingeführten Buchstaben sodann als Zeichen dieser Elemente auf, obwohl offengeblieben ist, um welche es sich dabei handelt. Einmal eingeführt, *bezeichnen* die Buchstaben also fix *einen einzelnen* Gegenstand, wenngleich *keinen bestimmten.* Diese und verwandte Vorstellungen über die Bezeichnungsweise von Buchstaben finden

ebenfalls sowohl eine Phase des Übersetzens, d. i. das Formalisieren, als auch eine Phase der Zeichenmanipulation, d. i. formales Beweisen, enthält), vgl. Quine (1976b).

sich in der Literatur zuhauf. Das gilt sowohl für logische als auch für mathematische Arbeiten, für ältere wie für neuere.

1.3.2.1. Variablen als Zeichen des Irgendeinen

Als Whitehead 1911 nach Jahren logischer Feinarbeit an den ersten drei *Principia*-Bänden eine ebenso kurze wie lesenswerte Einführung in die Mathematik schrieb, glaubte er im Wesen der Variablen einen der drei Grundbegriffe erblickt zu haben, von denen die Mathematik beherrscht wird:[100]

> Mathematics as a science commenced when first someone, probably a Greek, proved propositions about *any* things or about *some* things, without specification of definite particular things. [...] The ideas of *any* and of *some* are introduced into algebra by the use of letters, instead of the definite numbers of arithmetic. Thus, instead of saying that $2+3=3+2$, in algebra we generalize and say that, if x and y stand for *any* two numbers, then $x+y=y+x$.

Was aber soll das heissen, die griechischen Mathematiker hätten Sätze über *irgendein* Dreieck oder über *irgendeine* Zahl bewiesen? Wenn damit gemeint ist, was Russell in seinen *Principles of Mathematics* von 1903 darunter versteht, dann scheint mir Whiteheads Aussage irreführend. Denn nach Russell zeichnet sich ein allgemeiner mathematischer Satz dadurch aus, dass sein Beweis nicht an einem bestimmten Gegenstand, auch nicht an allen Elementen aus der relevanten Menge, sondern an *irgendeinem* (‹any›) erfolgt, d. h.: Wer einen allgemeinen Satz zum Beispiel über natürliche Zahlen beweisen möchte, führt einen Buchstaben ein, sagen wir ‚n', um damit eine einzelne natürliche Zahl zu bezeichnen, wenn auch keine bestimmte; was für n gezeigt wird, gilt dann für 1, 2 und 3 und alle anderen natürlichen Zahlen, von denen gleichwohl keine einzige mit n gleichgesetzt werden darf. Buchstaben wie ‚n' sind in symbolischer Schrift Ausdruck für den Grundbegriff des *Irgendeinen* (‹the indefinable notion of *any*›): Mit ihnen werden – wie in der normalen Sprache mit Ausdrücken der Form ‚irgendein F' – einzelne Elemente aus einer gegebenen Menge herausgegriffen, allerdings unvoreingenommen, wie Russell sagt, ohne Präferenz für das eine oder das andere Element.[101]

[100] Whitehead (1911, S. 15). Vgl. auch S. 82: «These three notions, of the variable, of form, and of generality, compose a sort of mathematical trinity which preside over the whole subject. They all really spring from the same root, namely from the abstract nature of the science.»

[101] Die relevantesten Stellen in Russell (1903) finden sich auf den S. 90-91: «The variable is, from the formal standpoint, *the* characteristic notion of Mathematics. Moreover it is *the* method of stating general theorems [...] Now the difference [between elementary Arithmetic and such works as those of Dedekind and Stolz] consists simply in this, that our numbers have now become variables instead of being constants. We now prove theorems concerning n, not concerning 3 or 4 or any other particular number. [...] If n stands for any integer, we cannot say that n is 1 , nor yet that it is 2, nor yet that

Versteckt sich also in dieser eigenartigen Bezeichnungsweise das Wesen der Variablen: Zeichen eines Einzeldings sein, aber keines bestimmten, sondern eines beliebigen unter vielen? Nach Whitehead und Russell steht die Möglichkeit, Dinge auf solche Weise zu bezeichnen, sowohl am Anfang als auch am Grund der Disziplin; ohne die entsprechenden symbolischen Mittel wäre die Mathematik, wie wir sie kennen, unmöglich. Tatsächlich richtet der Mathematikunterricht früh darauf ab, diese Bezeichnungsweise als legitim zu akzeptieren, und mit der Zeit lernen wir sie – d. h. vor allem: den Buchstabengebrauch, mit dem sie verbunden wird – als ungemein nützlich zu schätzen. Wendungen wie „Sei n eine beliebige natürliche Zahl“ oder „Bezeichne α einen der gesuchten Winkel, β den anderen“ ohne Stirnrunzeln zu akzeptieren, ist eine Conditio sine qua non, um an der mathematischen Gemeinschaft teilzuhaben.[102] Was als das Natürlichste in der Welt von einer Generation an die nächste weitergegeben wird, wirft jedoch Fragen auf.

Wie kann man einen Buchstaben als Namen für irgendeinen Gegenstand einführen, ohne festzulegen, für welchen? Einem Zeichen einen Gegenstand als Bedeutung zuweisen, wobei unbestimmt bleibt, um welchen es sich handelt, scheint doch unmöglich. Und selbst wenn es möglich wäre: Wodurch ist die Annahme gerechtfertigt, dass sich der einmal eingeführte Buchstabe immer wieder als Zeichen für ein und denselben Gegenstand gebrauchen lässt? Zum Vergleich: Ich kann mir insofern wünschen, auf *irgendeinem* Fahrrad nach Hause zu fahren, als ich mich mit einem beliebigen zufrieden geben kann, solange es nur fährt. Doch selbst ohne Präferenz für das eine oder das andere Exemplar muss ich mich auf dem Fahrradmarkt für ein bestimmtes entscheiden. Ich kann nicht auf *irgendeinem* nach Hause fahren, ohne dass feststünde, um welches es sich handelt. Ein anderes Beispiel: Ich kann zwar die Bücher auf meinem Tisch in beliebiger Reihenfolge

---

it is any other particular number. In fact, n just denotes *any* number, and this is something quite distinct from each and all of the numbers. It is not true that 1 is any number, though it is true that whatever holds of any number holds of 1. The variable, in short, requires the indefinable notion of *any* [...] The fact is that the concept ‹any number› does denote one number, but not a particular one. This is just the distinctive point about *any*, that it denotes a term of a class, but in an impartial distributive manner, with no preference for one term over another.» Zur ‹indefinable notion of *any*›, vgl. auch S. 58-65. Eine klarere Begründung, weshalb es den Grundbegriff des Irgendeinen und damit freie Variablen braucht, um Mathematik zu betreiben, wird in Russell (1908, S. 227-229) gegeben.

[102] In seinem Buch über die symbolische Welle, die ab dem 17. Jahrhundert allmählich die ganze Mathematik erfasste, verortet Michel Serfati den Ursprung einer Unterart dieses Buchstabengebrauchs, d. i. des Gebrauchs von Buchstaben als Parameter für bekannte Grössen, bei François Viète und fügt dem an: «on peut rétrospectivement interpréter sa démarche [c'est-à-dire celle de Viète] comme une demande implicite adressée au lecteur d'accepter un changement radical *de niveau* de la convention, conduisant à considérer comme légitime l'assomption, dans le symbolique, de l'‹arbitraire, mais fixé›. On peut alors considérer que, depuis cette époque, se reconnut comme ‹mathématicien›, celui-là seulement qui, après Viète, accepta de se reconnaître dans ce faisceau de conventions éminemment contingentes inscrites dans l'écriture symbolique» Serfati (2005, S. 192 f.).

nummerieren, um sie aber mit einer Nummer versehen zu können, muss ich in jedem Schritt ein bestimmtes Buch herausgreifen. Ich kann nicht nummerieren, ohne dabei jedes verwendete Zahlzeichen einem bestimmten Buch zuzuordnen. Und wenn ich die Bücher bloss zähle, sodass es gleichgültig ist, welches Buch in welchem Schritt gezählt wurde: indem ich sie zähle, lege ich doch eine bestimmte Reihenfolge fest, ob sie mir nun wichtig ist oder nicht. Ich sehe nicht, wie es sich mit dem Bezeichnen anders verhalten könnte. Und selbst wenn die fragliche Bedeutungszuweisung keine feste Verbindung von Zeichen und Bezeichneten bewirken müsste, wie dies beim Nummerieren der Fall ist, sondern eher dem gliche, was beim Zählen geschieht: Es bliebe völlig unklar, wie sich mit Buchstaben, nachdem ihnen ein bestimmter Gegenstand flüchtig zugewiesen wurde, wiederholt dieselben Gegenstände herausgreifen liessen. Wodurch wäre gesichert, dass sich ‚n' beim zweiten, dritten und vierten Vorkommen immer auf denselben Gegenstand bezieht? Freilich bliebe dieses Rätsel auch dann bestehen, wenn die Einführung von Buchstaben als Namen für beliebige Gegenstände rein syntaktisch – ganz ohne Bedeutungszuweisung – vor sich ginge, d. h. wenn es reichte, festzulegen, dass die Buchstaben der syntaktischen Kategorie der Gegenstandsnamen angehören. Beim Zählen ist es oft so, dass wir am Ende nicht mehr wissen, welcher Gegenstand in welchem Schritt gezählt wurde. In solchen Fällen wäre es jedoch ungerechtfertigt und unnütz, die Zahlzeichen, die beim Zählen zur Anwendung kamen, als Namen für die gezählten Gegenstände gebrauchen zu wollen. Umso mehr trifft das auf den Fall zu, dass die Zahlzeichen nicht transitiv zum Zählen von Gegenständen angewandt, sondern als rein syntaktische Entitäten lediglich der Reihe nach aufgesagt wurden.

Der Irrtum, den diese Auffassung des Buchstabengebrauchs begeht, ist, dass sie Semantisches und Epistemisches auf unzulässige Weise vermischt. Natürlich ist es möglich, dass ein Zeichen einen einzelnen Gegenstand bezeichnet, obwohl ich es nicht weiss; und es kann sogar sein, dass ich weiss, dass es sich um das Zeichen eines einzelnen Gegenstands handelt, ohne zu wissen, welchen es bezeichnet. Auch ist durchaus möglich, dass ich zwar weiss, welchen Gegenstand das Zeichen bezeichnet, dies aber ausser Acht lasse, weil es für die Zwecke, die ich verfolge, unwichtig ist. Aus diesen verschiedenen Möglichkeiten folgt indes nicht, dass ein Buchstabe *einen*, aber *keinen bestimmten* Gegenstand bezeichnen kann. Bezeichnet ein Buchstabe überhaupt einen Gegenstand, muss feststehen, um welchen es sich handelt. Ob ich nun nicht weiss, um welchen es sich handelt, oder es für meine Zwecke keine Rolle spielt, welches der bezeichnete Gegenstand ist, tut nichts zur Sache. Die genannten Möglichkeiten bewegen sich auf unterschiedlichen Ebenen.[103]

1.3.2.2. Variablen als Hilfsmittel bei der Darstellung von Begriffsgeflechten

Wichtiger noch für das Verständnis von Variablen ist, was sich im vorherigen Abschnitt (genauer in 1.3.1.3) zeigte. Der Beitrag, den die Buchstaben in den beiden behandelten Beispielen – der Lösung einer Textaufgabe und dem Widerspruchsbeweis – leisten, entspricht offenbar nicht dem eines Namens oder anderer singulärer Terme zur Bezeichnung von Gegenständen. Syntaktisch gesehen verhalten sich Buchstaben zwar ganz ähnlich wie Zahlzeichen, zumal sie mit ihnen und passenden Operationszeichen komplexe Ausdrücke bilden.[104] Im Gebrauch aber ist ihre Aufgabe eine andere, wie die Analyse erwies.

Die Buchstaben dienen primär der Kenntlichmachung von Argumentstellen. Dazu gehört nicht bloss das Offenhalten von Stellen im Text, an denen echte Zahlzeichen eintreten können, sondern – und das ist der wichtigere Teil – auch das Anzeigen der Verwandtschaftsverhältnisse zwischen den Argumentstellen *verschiedener* Begriffe und Relationen.[105] Für das Gelingen des oben besprochenen Widerspruchsbeweises ist es zum Beispiel unerlässlich, dass vom Relationszeichen ‚$(\xi/\zeta)^2 = 2$' auf das Zeichen ‚$\xi^2 = 2\zeta^2$' übergegangen wird, nicht aber etwa auf ‚$\zeta^2 = 2\xi^2$' oder eine andere typographische Variante. Und ob die gesuchten Unbekannten gemäss Textaufgabe die Relationen

$$\xi = \zeta + \frac{1}{2}\zeta \quad \text{und} \quad (\xi - \frac{1}{6}\xi) + \zeta = 72$$

[103] Diese Vermischung der Ebenen wird bei Russell an mehreren Stellen in den *Principles*, aber auch in späteren Schriften deutlich. Am deutlichsten vielleicht hier, wo er die Bezeichnungsweise der Kombination von ‚any' mit einem Begriff *a*, einem ‹class-concept›, erklärt: «*Any a* denotes only one *a*, but it is wholly irrelevant which it denotes, and what is said will be equally true whichever it may be. Moreover, *any a* denotes a variable *a*, that is, whatever particular *a* we may fasten upon, it is certain that *any a* does not denote that one; and yet of that one any proposition is true which is true of any *a*» Russell (1903, S. 58 f.). Es fragt sich, ob Russell hier sogar, wenn er von einem variablen *a* spricht, nicht einen unbestimmten Gegenstand im Sinn hat und damit vom semantischen in den metaphysischen Irrtum zurückfällt, obwohl er diese Auffassung von Variablen an anderer Stelle (Russell (1903, S. 90)) ausdrücklich ablehnt.

[104] Ganz ähnlich heisst indes nicht gleich: Auf wesentliche Unterschiede zwischen Zahlzeichen und Buchstaben wurde bereits in Anm. 90 hingewiesen.

[105] Für Freges Begriff verwandter Argumentstellen, siehe das Ende von 1.2.3.2 und den Anfang von 1.2.3.3. Um die Verwandtschaftsverhältnisse über verschiedene Begriffe und Relationen hinweg anzeigen zu können, sah sich Frege gezwungen, den Bereich seiner lateinischen Buchstaben manchmal auf mehrere Urteile auszuweiten, siehe dazu Anm. 21.

erfüllen müssen oder, wie die erwähnte alternative Lesart nahelegt, die Relationen

$$\xi = \zeta + \frac{1}{2}\xi \text{ und } (\xi - \frac{1}{6}\xi) + \zeta = 72,$$

macht einen subtilen, aber bedeutenden Unterschied, der allein durch die Abweichung in einem einzigen Variablenvorkommnis zum Ausdruck gebracht wird. Die Lösung der Aufgabe ist jeweils eine andere, obwohl genau dieselben Buchstaben und sonstigen Zeichen zur Anwendung kommen. Für den Erfolg des Lösungs- oder Beweiswegs ist es ausschlaggebend, dass die Verschiebungen der Argumentstellen von einem Begriff zum andern und von einer Relation zur nächsten, mitunter von Relation zu Begriff, durch die verwendeten Buchstaben korrekt wiedergegeben werden (seien es nun in Anlehnung an Frege die Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ' oder die gebräuchlicheren ‚x' und ‚y'). An dem Muster, das die über den Text verteilten Buchstaben abgeben, lassen sich dann die komplexen Verwandtschaftsverhältnisse zwischen den verschiedenen Stellen durch alle äquivalenzerhaltenden Umformungen hindurch verfolgen. Der Gebrauch von Buchstaben hilft also dabei, ein übersichtliches Bild des begrifflichen Geflechts zu entwerfen, das mathematischen Wahrheiten zugrunde liegt. Das ist im Wesentlichen, was Buchstaben an das Lösen von Problemen oder Beweisen von Sätzen beizutragen vermögen.[106]

Wie sich ausserdem zeigte, kann derselbe Buchstabengebrauch, der dazu dient, die Lösungen von Gleichungssystemen zu bestimmen, wenn sie existieren, auch dem Nachweis dienen, dass ein System keine Lösung besitzt. Im zweiten Fall gibt es nichts, was durch die eingeführten Buchstaben bezeichnet werden könnte. Gleiches gilt für den besprochenen Widerspruchsbeweis. Auch wenn davon ausgegangen werden muss, dass gewisse Begriffe nicht leer sind (in der Arithmetik zum Beispiel, dass es natürliche Zahlen gibt), setzt der erfolgreiche Gebrauch von Buchstaben nicht voraus, dass keine leeren Begriffe beteiligt sind. Bestünde die Aufgabe der Buchstaben darin, Gegenstände zu bezeichnen, wäre es rätselhaft, wie sie dazu beitragen können, zu zeigen, dass der Begriff, unter den die Gegenstände fallen, die sie angeblich bezeichnen, leer ist.

Es war also schon richtig, hervorzuheben, dass Widerspruchsbeweise wie der oben analysierte *nur scheinbar* mit der Annahme der Existenz von Gegenständen und der Einführung von Namen für sie beginnen. Tatsächlich betrifft die Annahme, die *ad absurdum* geführt wird, nicht primär Gegenstände, sondern die Extension von Begriffen oder Beziehungen und, wenn überhaupt, nur vermittels dieser auch Gegenstände. Im

[106] Wie nützlich dieser Beitrag gerade bei komplexeren Problemen, etwa dem Lösen von Gleichungen höherer Ordnung, sein kann, zeigt der Blick in die Geschichte. Für historische Beispiele, vgl. Serfati (2005, S. 162-165).

obigen Beweis ist es die Behauptung, dass die komplexe Relation

$$(\xi, \zeta \in \mathbb{N} \wedge \operatorname{ggT}(\xi, \zeta) = 1) \;\wedge\; \frac{\xi}{\zeta} = \sqrt{2}$$

nicht leer ist bzw., was äquivalent ist, dass sich die Extensionen der Begriffe ‚ξ ist die Quadratwurzel von 2‘ und ‚ξ ist eine rationale Zahl‘ überschneiden, mithin der Satz ‚Die Quadratwurzel von 2 ist eine rationale Zahl‘ wahr ist.[107]

Zudem wird diese Annahme nicht getroffen, um sie auf ihre Wahrheit hin zu prüfen; der Ausgang des Beweises ist ja nicht offen. Was angenommen wird, wird nur deshalb für wahr genommen, weil daraus Schlüsse gezogen werden sollen, die das Angenommene als Falschheit und somit dessen Gegenteil als Wahrheit erweisen. Was aber stellt sich als wahr heraus? Nicht, dass die Buchstaben, die im Beweis wie Namen eingeführt werden, bedeutungslos sind; auch nicht, dass die Gegenstände, als deren Namen sie scheinbar auftreten, gewisse Eigenschaften nicht besitzen, die man ihnen anfangs zuschrieb; und noch weniger, dass diese Gegenstände nicht existieren, obschon sie doch ein gewisses Sein haben.[108] Als Wahrheit erweist sich, dass es von allen Gegenständen, die unter einen Begriff fallen (hier: ‚$\xi \in \mathbb{N}$‘), kein Paar gibt, deren Elemente in der gegebenen Relation stehen (hier: ‚$\frac{\xi}{\zeta} = \sqrt{2}$‘); d. h. dass die entsprechenden Extensionen (hier: $\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{(x, y) \mid \frac{x}{y} = \sqrt{2}\}$) disjunkt sind, woraus folgt, dass auch die Extensionen von ‚ξ ist die Quadratwurzel von 2‘ und ‚ξ ist eine rationale Zahl‘ disjunkt sind. Über Gegenstände wird nur insofern etwas ausgesagt, als sie unter Begriffe fallen und in Beziehungen stehen. Die Hauptaussage betrifft die extensionalen Verhältnisse zwischen diesen Begriffen und Beziehungen. Die Buchstaben, die üblicherweise gleich zu Beginn des Beweises eingeführt werden („Seien p und q zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$“) treten weder im zu beweisenden Satz noch sonst irgendwo im Beweistext als Namen für einzelne, aber unbestimmt gelassene Elemente von Begriffsextensionen auf. Nur in der mathematischen Prosa hat es den Anschein, als würde die Wahrheit allgemeiner Behauptungen an beliebigen, mit Absicht unbestimmt gelassenen Exemplaren demons-

[107] Um die Äquivalenz zu sehen, helfen wiederum zwei Lemmata: (i) x ist genau dann eine positive rationale Zahl, wenn es natürliche Zahlen y und z mit $\operatorname{ggT}(y, z) = 1$ gibt, für die $\frac{y}{z} = x$ gilt; (ii) die Quadratwurzel von x ist positiv. Das zweite Lemma ergibt sich freilich direkt aus der Definition der Quadratwurzelfunktion (siehe Anm. 93).

[108] Diese Einsicht ist freilich nicht neu und muss auch nicht überraschen; sie gehört zu den wichtigsten Lehren Freges. In ‚Über Begriff und Gegenstand‘ schreibt er dazu: «Ich habe die Existenz Eigenschaft eines Begriffes genannt. Wie ich dies meine, wird an einem Beispiele am besten klar werden. In dem Satze ‹es gibt mindestens eine Quadratwurzel aus 4› wird nicht etwa von der bestimmten Zahl 2 etwas ausgesagt, noch von -2, sondern von einem Begriffe, nämlich *Quadratwurzel aus 4*, dass dieser nicht leer sei» Frege (1892a, S. 173).

triert. In Wahrheit wird eine Aussage *über* Begriffe und Beziehungen *an* Begriffen und Beziehungen bewiesen.

Ihrem Wesen nach ist die Mathematik reine Begriffswissenschaft. Mathematische Wahrheiten sind begriffliche Wahrheiten, d. h. sie enthalten Aussagen über Begriffe und Beziehungen und über die Art und Weise, wie diese ineinander verflochten sind. Variablen gehören deshalb zu den wichtigsten Werkzeugen der Mathematik, weil sie das Reden und Denken über Begriffe vereinfachen. Sie helfen dabei, verschiedene Aussagen über Begriffe und Beziehungen auf solche Weise wiederzugeben, dass sich das begriffliche Geflecht, das sie miteinander verbindet, leichter überblicken lässt. Durch den Gebrauch von Variablen wird nicht nur das Auffinden und Beweisen von Wahrheiten im Allgemeinen erleichtert, es rücken auch Wahrheiten in Reichweite, die ohne dieses Hilfsmittel unerreichbar blieben.

1.3.2.3. Weitere Bemerkungen

Aus philosophischer Sicht mag es erscheinen, als verschleierten jene Ausdrucksmittel, die in mathematischen Texten den Gebrauch von Buchstaben oftmals begleiten, wie und wozu diese tatsächlich gebraucht werden. Was äusserlich wie ein Name für einen Gegenstand eingeführt wird, entpuppt sich bei genauerer Analyse als blosses Hilfszeichen im Umgang mit den eigentlichen Gegenständen dieser Wissenschaft, d. i. mit Begriffen und Beziehungen. Man könnte daher klagen, die übliche Prosa erschwere die Einsicht in das Wesen der Mathematik. Daraus aber einen Vorwurf gegen die mathematischen Gepflogenheiten abzuleiten, wäre verfehlt. Als ob man der Literatur vorwerfe, sie verwirre die Menschen, weil sich ihre Sätze als Falschheiten erweisen, wenn sie wortwörtlich genommen werden. Es gehört nicht zu den Aufgaben mathematischer Texte, die Beantwortung philosophischer Fragen, die sie womöglich aufwerfen, vorwegzunehmen oder auch nur zu erleichtern. Mathematische Texte sind anderen Idealen der Klarheit und Übersichtlichkeit verpflichtet. Wer sich mit philosophischen Fragen aufhalten will, muss lernen, die mathematische Prosa mitsamt des darin eingewobenen Gebrauchs von Buchstaben und anderen Symbolen richtig zu lesen, anstatt mit unangemessenen Forderungen an sie heranzutreten. Dass dies in der Geschichte der Logik und Mathematikphilosophie nicht immer gelang, ist den philosophischen Betrachtern anzulasten, nicht der Mathematik oder ihrer Praxis.

Es wäre daher ein Fehler, die Rede von beliebigen, ja selbst von unbestimmten Gegenständen zu verteufeln. Denn offenbar sind solche Redeweisen nützlich; sie müssen nur richtig aufgefasst werden. Helfen kann es, verwandte Redeweisen aus anderen Bereichen des Lebens damit zu vergleichen. Um ein Beispiel zu geben von der Art, wie sie bei lateinischen Scholastikern beliebt waren: Wer ein Rindvieh kaufen möchte, muss kein bestimmtes im Sinn haben oder auf dem Markt auf ein bestimmtes zeigen. Was letztlich gekauft und nach Hause genommen wird, ist aber ein bestimmtes, ein individuelles Tier.[109] Wünsche, Absichten, Versprechen können Einzelnes zum Gegenstand haben, ohne dass sie sich auf bestimmte Exemplare beziehen. Im Anschluss an Avicennas Kommentar einer Stelle aus Aristoteles' Physik wird ein solches unbestimmt gelassenes Vorstellungsobjekt von den Lateinern als *individuum vagum* bezeichnet.[110] Das Vermögen, ein *individuum vagum* vorzustellen, entspricht in etwa dem, was Whitehead die Idee des Irgendeinen nennt (‹the idea of *any*›, siehe das Zitat weiter oben). Von dieser Idee bzw. von dem entsprechenden Vermögen machen wir insbesondere dann Gebrauch, wenn ein Einzelding aus einer Vielheit abgetrennt werden soll, wobei einerlei ist, welches bestimmte Ding es in der praktischen Umsetzung letztlich trifft.

Vor diesem praktischen Hintergrund erhält die mathematische Redeweise von unbestimmten oder beliebigen Gegenständen ihre profane Bedeutung. Daran ändert nichts, dass bei ihrer Anwendung innerhalb der Mathematik die wirkliche Auswahl einzelner Gegenstände fehlt. Auch über ein unbestimmt gelassenes Rindvieh, etwa über dessen Preis, lässt sich ungehindert sprechen, ohne dass es zum Kauf kommen müsste. Um das zu verstehen, braucht es die Annahme nicht, dass sich ein Teil der Rede oder des Vorstellungsinhalts dabei insgeheim auf ein bestimmtes Exemplar bezieht. Im Gegenteil, diese Annahme stiftet nur Verwirrung und erschwert die Erklärung dafür, wie das Vermögen,

[109] Ein ähnliches Beispiel findet sich bei Walter Burley in seinem Kommentar der aristotelischen Physik (für den es bis jetzt keine moderne Edition gibt). Burley möchte zeigen, dass es auch ausserhalb der Seele Dinge gibt, die keine (bestimmten) Individuen sind: «Illud est extra animam, circa quod fiunt promissiones, et contractus reales, ut emptio, venditio, donatio, stipulatio, et huiusmodi. Sed contractus non semper fiunt circa individua. Ergo extra animam est aliqua res alia a natura individuali. [...] Promitto tibi bovem, aliqua res extra animam tibi promittitur, et tamen nullum individuum tibi promittitur, quia virtute huius promissionis non potes vendicare istum bovem singularem, nec illum. Ergo aliqua res extra animam alia ab individuo tibi promittitur» Burley, *Super Aristotelis libros de Physica*, col. 16 A-B. Burley argumentiert hier allerdings nicht für die Existenz unbestimmter Individuen, sondern für die Existenz von *species* und für seine radikal realistische Position im Universalienstreit. Sein Gegner ist Wilhelm Ockham, auf dessen Sentenzenkommentar er sich bezieht. Für diesen Zusammenhang und genauere Literaturangaben, vgl. Maier (1964, S. 218 f. (Anm. 21)).

[110] Vgl. dazu Black (2011). Unter anderem weist Deborah Black auf für uns wichtige begriffliche Priorisierungen hin, die durch die lateinischen Autoren gegenüber Avicennas Lehre vorgenommen wurden. Dazu gehört vor allem die Verschiebung des Interesses und der Diskussionen auf das, was bei Avicenna bloss ein sekundärer und äquivoker Gebrauch des Begriffs vom *individuum vagum* ist: «Whereas Avicenna makes expressions of the form ‹this x› signify a derivative type of vague individual (see below at notes 15-17), Latin authors considered ‹this x› as the paradigmatic case of the vague individual, and they relegated expressions of the form ‹some x› to secondary status» (S. 260, Anm. 2). Für die Arbeit hier aber interessiert uns, was Avicenna als den primären Gebrauch betrachtet und Ausdrücken der Form ‚irgendein F', oder eben: ‚aliquid F', entspricht.

individua vaga zu bilden, den Gedanken, in denen sie vorkommen, Allgemeinheit verleiht. *Individua vaga* sind gedankliche Bausteine, deren Ausdruck den Anschein erweckt, als stünde er wie ein Name für ein Einzelding, obwohl er (im Fregeschen Sinn) bedeutungslos ist. Doch gerade weil Ausdrücke der Form ‚irgendein F' grammatisch als Satzsubjekte auftreten können, sind sie nützlich. So machen sie es möglich, über den Begriff F zu sprechen, als wäre er ein Gegenstand. Sätze, in denen solche Ausdrücke vorkommen, dienen denn auch dazu, eine Aussage über Begriffe und Beziehungen zu treffen. Gegenstände werden dabei nicht in ihrer Individualität angesprochen, sondern nur insofern sie zu dem gehören, was unter besagten Begriff fällt oder in besagter Beziehung steht.[111]

Es gilt also die mathematische Prosa mit Bedacht zu lesen, wozu auch gehört, sie nicht nur Wort für Wort zu nehmen, sondern dem grösseren Zusammenhang, insbesondere von Begriffen und Buchstaben, hinreichend Beachtung zu schenken. Befolgt man diesen schlichten Rat, erweist sie sich womöglich als doch nicht so irreführend, wie die verbreiteten Missverständnisse vermuten lassen könnten, die manchen philosophischen Diskussionen über die Mathematik zugrunde liegen. Da zeigt sich, was oft übersehen oder falsch gelesen, zumindest nicht hinreichend berücksichtigt wird: dass Buchstaben typischerweise im Zusammenhang mit Begriffen und Beziehungen eingeführt werden. So heisst es zum Beispiel: „Seien p und q zwei teilerfremde natürliche Zahlen", nicht etwa: „Seien p und q (irgendwelche) Gegenstände". Anders gesagt, werden die Werte, welche die Variablen annehmen können, in der Regel von Anfang an auf bestimmte Extensionen begrenzt, die durch die gerade behandelte Frage und die dafür relevanten Begriffe, manchmal auch durch Relationen, vorgegeben sind. Die frühen Logizisten, Frege, Russell und Whitehead, stellten diesem Umstand die Doktrin der unbegrenzten Variablen entgegen. Die engen begrifflichen Grenzen, die den Wertebereichen von Variablen durch den jeweiligen Zusammenhang scheinbar auferlegt werden, verschwinden den Logizisten zufolge, sobald die in mathematischer Prosa verfassten Sätze einer logischen Analyse unterzogen werden. Logische Variablen reichen demnach über alles, worüber sie widerspruchsfrei reichen können; kein inhaltlicher Begriff vermag sie in ihrer Reichweite zu

[111] Stephen Kleene führt die Beliebtheit von Variablen als notationales Werkzeug denn auch zum Teil auf die Leichtigkeit zurück, mit der sich die Buchstaben einmal als Platzhalter für Argumentstellen von Prädikaten und dann wieder als Namen für beliebige Gegenstände interpretieren lassen: «So long as ‹$x < y$› is used just to name a predicate, it is quite satisfactory to think of ‹x› and ‹y› as place holders, not (or not yet) naming anything. But mathematicians, without changing ‹x› and ‹y› to anything else, then often go over to thinking of ‹x› and ‹y› as naming objects; so by a transformation in interpretation, the expression ‹$x < y$› for a predicate becomes an expression for a proposition» Kleene (1967, S. 77).

begrenzen. Ihre einzigen Grenzen sind die Schranken des gerade noch Sinnvollen, von aussen markiert durch die bekannten Antinomien.

Heute wird ein damit zusammenhängender Streit zwischen Absolutisten und Relativisten ausgetragen. Er entzündet sich an der Frage, ob in Aussagen über alle x von *absolut* allem die Rede sein kann oder ob doch immer eine gewisse Einschränkung, womöglich eine begriffliche Begrenzung des Wertebereichs quantifizierter Variablen mitgedacht werden muss.[112] Wir werden erst im nächsten Abschnitt (in 1.3.3.3) auf diese Streitfrage etwas näher eingehen können. Dennoch lässt sich hier schon ein möglicher Einwand erkennen, den Logizisten und mit ihnen auch die zumeist radikaleren Absolutisten gegen unsere Analyse des mathematischen Buchstabengebrauchs vorbringen könnten: dass sie bestenfalls die Gebrauchsweise begrenzter Variablen erkläre und nicht die der unbegrenzten, obwohl diese grundlegender sei. Und da vom logischen Standpunkt aus einzelne Begriffe zwar leer sein können, der gesamte Gegenstandsbereich, über den unbegrenzte Variablen reichen sollen, jedoch immer mindestens ein Element enthält, verfängt ausserdem eines unserer obigen Argumente gegen die Auffassung von Buchstaben als Namen für Gegenstände nicht mehr. Denn immer existiert ein Gegenstand, den der gerade eingeführte Buchstaben bezeichnen könnte. So mag in Annahmen der Form „Sei x ein F" der Begriff, der anstelle von ‚F' steht, leer sein, der Wertebereich der absoluten Variablen ‚x' ist es trotzdem nicht. Das Ergebnis eines Beweises, der eine solche Annahme *ad absurdum* führt, lässt sich dann wie folgt verstehen: Keiner der Gegenstände, über den die Variable ‚x' reicht und den sie im Beweis als dessen Namen vertreten könnte, besitzt die Eigenschaft F, die ihm die Beweisannahme zuschreibt. Die Auffassung von Buchstaben als Namen für beliebige Gegenstände könnte, wie es scheint, mit dem Begriff der unbegrenzten Variablen wiederauferstehen; zumindest stünde sie Logizisten als mögliche Erklärung des Buchstabengebrauchs zur Verfügung.

Nun könnte man die Forderung, wonach der Gegenstandsbereich nie leer sein darf, aufgeben und versuchen, eine Logik mit dazugehörigem Variablenbegriff zu entwickeln, die ganz ohne Existenzvoraussetzung auskommt. Die Entwicklung entsprechender Kalküle, zumeist unter dem Begriff der *free logic*, hat indessen die Grenzen solcher Unterfangen aufgezeigt.[113] Unter anderem muss in den meisten freien Logiken auf das in der Prädika-

[112] Vgl. die Aufsatzsammlung Rayo und Uzquiano (2006).

[113] John Nolt etwa beschliesst seinen Übersichtsartikel über freie Logiken mit folgenden Feststellungen: «Though unsullied by existential commitment, free logic does not reveal a tidy and compelling realm of logical truth. In fact, the whole business is disappointingly messy. Each new application requires new semantic decisions, and over each decision pragmatic considerations hold sway [...] Nor have free logics yielded profound philosophical insights into reasoning about the existence of particular things» Nolt (2006, S. 1057-1058).

tenlogik übliche Substitutionsprinzip für koextensionale Prädikate verzichtet werden.[114] Ohne dieses Prinzip jedoch lässt sich unsere obige Analyse des Buchstabengebrauchs kaum aufrecht erhalten, da sie einen wesentlichen Teil der Beweisschritte als Übergänge zwischen extensionsgleichen Begriffen darstellt. Und da diese Arbeit ein besseres Verständnis von den Gebrauchsweisen anstrebt, wie sie in der mathematischen Praxis, aber auch in der klassischen Logik vorherrschen, ist ohnehin fraglich, ob die Variablenauffassung freier Logiken mit leerem Gegenstandsbereich für unsere Zwecke von Nutzen sein könnte. Wie sich im nächsten Abschnitt (in 1.3.3.3) zeigen wird, hat auch die logizistische Lehre ihre Defizite, wenn es darum geht, den Buchstabengebrauch in den halbformalen Kontexten der Mathematik zu verstehen.

Was lässt sich den bisherigen Betrachtungen in diesem Unterkapitel für unsere Grundfrage entnehmen? Offenbar bedarf die semantische Seite von Variablen – ihr Verhältnis zu den Elementen ihres Wertebereichs – einer gründlichen Klärung. Diese Facette des Variablenwesens schillert besonders stark und verleitet zu seltsamen, mitunter widersprüchlichen Vorstellungen. Ob Buchstaben bedeuten oder nur andeuten, auf welche Weise sie das tun und was für Zeichen dadurch aus ihnen wird, ja ob sie überhaupt Zeichen sind, wenn sie als Variablen gebraucht werden – all das gilt es in die erweiterte Fassung unserer Grundfrage aufzunehmen. Auch bedarf es, um das gewünschte Verständnis in Reichweite zu rücken, einer noch genaueren Untersuchung der verschiedenen Vorstellungen, die den Buchstabengebrauch begleitet und teilweise wohl auch mitgeformt haben. Bei näherer Betrachtung erweisen sich diese Vorstellungen oft als in sich irrig und philosophisch irreführend, was indes nicht heisst, dass sie den korrekten Gebrauch von Buchstaben und die allgemeine Verständigung darüber irgendwie hemmen würden. Im Gegenteil, scheint es mitunter, als wirkten die begleitenden Vorstellungen wie handliche Aufsätze, die das Bedienen einer Maschine erleichtern.

Bevor zuletzt im nächsten Unterkapitel (genauer gesagt in 1.4.2) also die Entfaltung der Grundfrage erfolgt, soll im nächsten Abschnitt versucht werden, die semantische Seite von Variablen und damit verbundene Vorstellungen ein bisschen besser zu beleuchten, als dies bisher geschehen ist. Beginnen wir damit, den bis jetzt entwickelten und offenbar an Frege angelehnten Standpunkt mit anderen zu kontrastieren, die in der modernen Logik verbreitet waren und sind.

[114] Vgl. Nolt (2006, S. 1053 f.).

1.3.3. Die semantische Seite von Variablen

Dass Buchstaben, die als Variablen gebraucht werden, keine veränderlichen oder unbestimmten Gegenstände bezeichnen, wurde seit Freges Kritik kaum infrage gestellt. Die Ausnahmen, die es gibt, müssten behandelt werden, um den Standpunkt, der sich hier allmählich abzeichnet, hinreichend zu festigen.[115] Das wird jedoch die Aufgabe eines anderen Texts sein müssen (siehe 1.4.3). Hier geht es weiterhin darum, Wege auszuarbeiten, sich dem Variablenwesen aus verschiedenen Richtungen zu nähern. Für diesen Zweck können wir Freges Kritik ohne Vorbehalte zustimmen und davon ausgehen, dass die Mathematik weder von veränderlichen noch von unbestimmten Gegenständen handelt.

Anders verhält es sich mit Freges Behauptung, dass die als Variablen gebrauchten Buchstaben keine Gegenstände bezeichnen, ja überhaupt nicht bezeichnen, sondern bloss unbestimmt andeuten. Wie sich zeigte, ist sie an zahlreichen Stellen in seinem Werk zu finden (siehe dafür das Ende von 1.2.1 und den Beginn von 1.2.2).[116] Viele, die nach Frege auf dem Gebiet der Logik gearbeitet haben, sind ihm darin jedoch nicht gefolgt.

1.3.3.1. Die Bedeutung freier und gebundener Variablen

Russell, dem es gefiel, zu erwähnen, dass ihm durch eigenes Nachdenken dieselben Einsichten gekommen waren wie Frege, gelangte, als er sich der semantischen Seite von Variablen zuwandte, indes zu Ansichten, die sich mit denen seines Vorgängers nicht vertragen. Nach dem genaueren Studium der *Grundgesetze* passte er zwar die Auffas-

[115] Erstens wäre Kit Fines Theorie der *arbitrary objects* in Fine (1983) und Fine (1985) zu behandeln. Dabei ergäben sich neben Differenzen zu dem hier vertretenen Standpunkt durchaus Übereinstimmungen. Fine möchte seine Behauptung, wonach es beliebige Gegenstände gibt, in einem ontologisch neutralen Sinn verstanden wissen (vgl. Fine (1983, S. 56-57)). Wichtiger als die Frage nach der Existenz scheint ihm die Frage, ob sich eine konsistente Theorie solcher Gegenstände entwickeln lässt und was ihr theoretischer Nutzen ist. Zweitens müsste auch Leon Horstens Weiterentwicklung der Ideen Fines in dem erst kürzlich erschienen Horsten (2019) berücksichtigt werden. Horsten verspricht darin eine detailliertere Ausarbeitung der metaphysischen Theorie beliebiger Gegenstände.

[116] Eine Stelle, die vieles von dem, was in den letzten Abschnitten festgestellt wurde, kurz wiedergibt, findet sich in Freges Aufsatz ‚Über die Grundlagen der Geometrie', mit dem er auf den gleichnamigen Aufsatz Alwin Korselts antwortet: «Das Satzgefüge ‹Wenn a eine ganze Zahl ist, so ist $a \cdot (a-1)$ eine gerade Zahl› kann in zwei scheinbar selbständige Sätze zerlegt werden: ‹Es, sei a eine ganze Zahl. $a \cdot (a-1)$ ist eine gerade Zahl›. Aber man kann den ersten nicht als eine Erklärung des Buchstaben ‹a› auffassen, so dass dies ‹a› mit der so erhaltenen Bedeutung im zweiten Satze vorkäme; denn dies ‹a› tritt in beiden Sätzen an der Stelle eines Eigennamens auf. Wenn ihm also eine Bedeutung gegeben werden sollte, so könnte das nur die eines Eigennamens, also ein Gegenstand sein. Aber durch den Satz ‹a sei eine ganze Zahl› kann dies nicht geschehen; denn dieser ist kein Identitäts-, sondern ein Subsumtionssatz. Man kann auch nicht sagen, dass hierdurch dem ‹a› zwar keine bestimmte, aber eine unbestimmte Bedeutung gegeben werde; denn eine unbestimmte Bedeutung ist keine Bedeutung; vieldeutige Zeichen darf es nicht geben» Frege (1906, S. 297-298).

sung, die er in den *Principles of Mathematics* vertrat (siehe 1.3.2.1), leicht an, indem er sich manchmal und vor allem in den *Principia Mathematica* klarer darauf festlegt, unter einer Variablen ein Symbol zu verstehen.[117] Als Symbole aber erhalten Variablen eine Bedeutung, wenngleich eine unbestimmte: Sie denotieren auf „mehrdeutige" Weise Gegenstände. Gemeint ist nicht, dass sie mehrere oder alle Gegenstände in ihrem Wertebereich zugleich denotieren, sondern jeweils irgendeinen daraus, wobei nicht feststeht oder gleichgültig ist, welchen:[118]

> In mathematical logic, any symbol whose meaning is not determinate is called a *variable*, and the various determinations of which its meaning is susceptible are called the *values* of the variable. [...] a variable is ambiguous in its denotation and accordingly undefined: [...] a variable preserves a recognizable identity in various occurrences throughout the same context, so that many variables can occur together in the same context each with its separate identity. [...] When we speak of ‹ϕx›, where x is not specified, we mean one value of the function, but not a definite one. We may express this by saying that ‹ϕx› *ambiguously denotes* $\phi a, \phi b, \phi c$, etc., where $\phi a, \phi b, \phi c$, etc., are the various values of ‹ϕx›. When we say that ‹ϕx› ambiguously denotes $\phi a, \phi b, \phi c$, etc., we mean that ‹ϕx› means one of the objects $\phi a, \phi b, \phi c$, etc., though not a definite one, but an undetermined one.

Demnach wären Variablen wahrlich seltsame Wesen, wenn sie ungebunden vorkommen: mehrdeutig in ihrer Denotation und dennoch das Zeichen nur eines einzelnen Gegenstands, zumindest innerhalb jenes Bereichs, in dem sie ihre Individualität beibehalten.[119] Es erstaunt nicht, dass Frege daran einiges zu bemängeln hatte.[120] Und auch spätere Logiker sahen sich gezwungen, ungeachtet ihrer Anleihen bei Russell und Whitehead ge-

[117] Aus dem, was in den *Principles of Mathematics* über Variablen gesagt wird, erschliesst sich mir nicht, auf welcher Ebene Variablen letztlich anzusiedeln sind. Die Bedeutung des Worts schwankt zwischen Symbol, *term* und denotiertem Gegenstand, vgl. Russell (1903, S. 13, 20, 38, 59). Auch in späteren Arbeiten Russells tritt jenes Schwanken, das in den *Principles* auszumachen war, wieder verstärkt auf, vgl. etwa Russell (1920, S. 121, 149, 156, 163, 199).

[118] Whitehead und Russell (1910, S. 4-5, 41).

[119] Nach dieser Lesart der zitierten Stellen bezeichnet eine Variable wie ‚x', obwohl mehrdeutig, nur einen bestimmten Gegenstand, und ein Ausdruck wie ‚ϕx', obwohl mehrdeutig, einen einzelnen Wert der *propositional function* $\phi\hat{x}$. Dass diese Lesart korrekt ist, lässt sich anderen Stellen klarer entnehmen, vgl. insbesondere Whitehead und Russell (1910, S. 42): «The function itself, $\phi\hat{x}$, is the single thing which ambiguously denotes its many values; while ϕx, where x is not specified, is one of the denoted objects, with the ambiguity belonging to the manner of denoting». Die Unterscheidung zwischen einer *propositional function* und ihren „ambigen" oder „unbestimmten" Werten ist im System der *Principia* insofern zentral, als es sie für den Grundbegriff der *assertion of a propositional function* braucht, vgl. Whitehead und Russell (1910, S. 18 f., 96 f.). An diesem Grundbegriff hängt das Reduzierbarkeitsaxiom und damit die ganze verzweigte Typentheorie mit der ihr charakteristischen Typ-Unbestimmtheit (*typical ambiguity*), vgl. dazu Büchi (2014, S. 107-115).

[120] Seine Interpretationsversuche und Beanstandungen hat Frege 1914 in einem Brief an Jourdain aufgeschrieben, siehe Anm. 8.

wisse Änderungen vorzunehmen. Welche das zumeist waren, lässt sich am Beispiel von Frank Ramsey, Alonzo Church und Stephen Kleene rekonstruieren.

Der Bestimmung in den *Principia* folgend versteht Ramsey unter einer Variablen ein mehrdeutiges Zeichen, das verschiedene Werte annehmen kann. Anders als bei Russell und Whitehead denotiert die Variable aber nicht bloss einen Gegenstand, sondern alle, die in ihrem Wertebereich liegen, und dies auf gleiche Weise.[121] Church ist insofern etwas vorsichtiger, als er die singuläre Denotation, die er Variablen ebenfalls abspricht, durch eine blosse Möglichkeit ersetzt: «a *variable* is a symbol whose meaning is like that of a proper name or constant except that the single denotation of the constant is replaced by the possibility of various *values* of the variable».[122] Ausser, dass Variablen keine einzelnen Gegenstände bezeichnen, dafür mehrere als ihre Werte annehmen können, scheinen sie sich in ihrer Bedeutung von Namen oder Konstanten nicht weiter zu unterscheiden. Kleene dagegen stellt zuerst fest, dass Variablen dazu dienen, die Argumentstellen von *propositional functions* offenzuhalten sowie Verwandtschaftsverhältnisse zwischen diesen anzuzeigen. Dem fügt er aber sogleich an, dass sich die Buchstaben, die wir dafür verwenden, auch als vorrätige Namen zur Bezeichnung von Gegenständen auffassen lassen. Im Grunde unterscheide sich der Gebrauch von Variablen nicht stark von dem gewisser Ausdrücke in der Umgangssprache, meint Kleene. Auch er denkt dabei an die Verwandtschaft mit Namen und zählt neben echten auch Platzhalternamen und Pronomen dazu.[123]

An anderer Stelle unterscheidet Kleene zwei mögliche Lesarten freier Variablen, eine allgemeine und eine bedingte:[124]

---

[121] Vgl. Ramsey (1991, S. 189): «Incidentally we may define ‹variable›. A ‹variable› is an ambiguous sign i. e. one correlated (meaning) not with one object but with many which form its ‹range›». Diese Beziehung bezeichnet er an anderen Stellen, unter anderem in Ramsey (1926, S. 77), als ein Denotieren.

[122] Church (1956, S. 9). Church spricht freien Variablen die Denotation ihrer Werte nur deshalb ab, weil er den Denotationsbegriff für Eigennamen reservieren möchte, um diese von Variablen unterscheiden zu können, die nur ein Element in ihrem Wertebereich haben, vgl. Church (1956, 4 (Anm. 6)).

[123] Vgl. Kleene (1967, S. 75-76): «rather than thinking of variables as simply (or always) ‹place holders›, they may be thought of as a stock of names (nouns or pronouns), which are available to us to name various objects. [...] The use of variables is thus not basically so very different from constructions that are used in ordinary language. ‹Somebody› and ‹everybody› serve as names for unspecified persons; and even the proper name ‹Jane› isn't specific, unless we have explained that we mean Jane Austen, or Jane Grey, or Jane Addams, or Jane who lives down the street. The legal ‹John Doe› is the equivalent of a variable (ranging over men) whose value is being left unspecified».

[124] Kleene (1952, S. 149). Für die anschliessenden Bemerkungen über die beiden Lesarten und den Bereich freier Variablen, vgl. zusätzlich S. 150.

> In informal mathematics, we know two different ways of using free variables in stating propositions, as illustrated in algebra by an *identical equation* $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ and a *conditional equation* $x^2 + 2 = 3x$.

Im ersten Beispiel dienen die beiden Buchstaben ‚x' und ‚y' offensichtlich dazu, die Allgemeinheit der Gleichung auszudrücken, weshalb Kleene die dazugehörige Lesart der Buchstaben als allgemeine bezeichnet (‹generality interpretation›). In der zweiten Gleichung hingegen, sofern sie keine Falschheit ausdrücken soll, muss die Variable ‚x' anders gelesen werden: so, als werde eine Bedingung aufgestellt, die den Wertebereich von ‚x' auf diejenigen Gegenstände begrenzt, die sie erfüllen. Deshalb spricht Kleene in diesem Fall von der bedingten Lesart (‹conditional interpretation›) und meint damit freilich diejenige Lesart, von der uns in der Schule beigebracht wird, sie beim Lösen elementarer Textaufgaben auf die Buchstaben für die Unbekannten anzuwenden. Innerhalb des syntaktischen Bereichs, den eine bedingt gelesene Variable aufspannt und der eine ganze Abfolge verschiedener Formeln umfassen kann, bezeichnet die Variable demnach einen der Gegenstände (oder jeden?), der die aufgestellte Bedingung erfüllt. Eine allgemein gelesene Variable dagegen reicht syntaktisch nur über eine einzige Formel, dafür bezeichnet sie innerhalb dieser Formel unbegrenzt jedes Element im Gegenstandsbereich. Kleenes Unterscheidung vereinigt also verschiedene Elemente, die in den informellen Bestimmungen bei Russell, Ramsey und Church enthalten sind.

Gemeinsam ist allen bisher betrachteten Bestimmungen, dass sie die Beziehung einer Variablen zu ihren Werten mit der Beziehung eines Namens zum Gegenstand, den er benennt, wenn nicht gleichsetzen, so zumindest vergleichen. Die Unterschiede zwischen den Bestimmungen betreffen folglich nicht die Qualität dieser Beziehung, sondern gewissermassen ihre Quantität, und dies in zweierlei Hinsicht: Eine Variable bezeichnet entweder (1) einen einzigen ihrer möglichen Werte, wobei unbestimmt ist, welchen, oder (2) alle ihre möglichen Werte zugleich und gleicherweise; dabei kann ihr Wertebereich jeweils (a) begrenzt oder (b) unbegrenzt sein.

In Bezug auf die Begrenzung des Wertebereichs lässt sich eine weitere Unterscheidung vornehmen (siehe dazu auch 1.3.2.3). Die Begrenzung kann erstens darin bestehen, dass den Variablen durch die Interpretation der formalen Sprache, der sie angehören, eine gewisse Menge von Gegenständen als ihr Wertebereich zugeordnet wird, wobei diese Menge nicht alles umfasst, was sie logisch gesehen umfassen könnte (d. h., ohne dass sich Widersprüche einstellen). Diese Art von Begrenzung ist typisch für Interpretationssemantiken.[125] Zweitens und darüber hinaus ist es möglich, den Wertebereich von Varia-

[125] Vgl. dazu Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 225 f.).

blen auf die Extension bestimmter Begriffe zu begrenzen. In der Umgangssprache sind solche Begrenzungen üblich und durch die Bedeutung der im jeweiligen Satz enthaltenen Prädikate implizit gegeben. Zum Beispiel würde ein Satz wie „Alle hoffen auf etwas" in der Regel so verstanden, dass sich das erste Pronomen ausschliesslich auf Menschen bezieht. In der mathematischen Prosa werden, um Variablen mit begrifflich begrenztem Wertebereich einzuführen, mitunter explizitere Mittel wie die Wendung „Sei n eine natürliche Zahl" eingesetzt. Die Kategorisierung eines Wertebereichs und die Annahme entsprechend begrenzter Variablen kann sich bei der Formalisierung mathematischer Theorien als nützlich erweisen. Zum Beispiel hat Hilbert in seiner Grundlegung der Geometrie drei Sorten von Individuen angenommen – Punkte, Geraden und Ebenen – und die Geometrie entsprechend auf der Grundlage einer dreisortigen Logik aufgebaut.[126]

Bereits aus den ersten beiden Unterscheidungen (d. i. aus der zwischen (1) und (2) und der zwischen (a) und (b)) ergeben sich vier verschiedene Kombinationen, für die es in der Literatur genügend Beispiele gibt. Den eben zitierten und anderen *Principia*-Passagen lässt sich entnehmen, dass in Bezug auf die freien Variablen die Kombination (1b) gemeint sein muss, wenngleich eine gewisse Spannung zur Aussage besteht, Variablen seien in ihrer Denotation ambig.[127] Treffender, aber etwas anderes, ist es zu sagen, dass die Denotation einer Variablen unbestimmt sei oder dass Variablen auf unbestimmte Weise bezeichnen.[128] Es scheint, als wollten Whitehead und Russell alles zugleich behaupten, obwohl sich die verschiedenen Aussagen nicht miteinander vertragen. Ramsey dagegen wendet das Wort ‚ambiguous' zu Recht auf seine Auffassung von Variablen an, da sie der Kombination (2b) entspricht.

[126] Vgl. Bernays (1970).

[127] Eine der anderen Passagen in Whitehead und Russell (1910) betreffend Wertebereiche findet sich auf S. 4: «We may call a variable *restricted* when its values are confined to some only of those of which it is capable; otherwise, we shall call it *unrestricted*. Thus when an unrestricted variable occurs, it represents any object such that the statement concerned can be made significantly (*i. e.* either truly or falsely) concerning that object. For the purposes of logic, the unrestricted variable is more convenient than the restricted variable, and we shall always employ it». Wo die Schranken unbegrenzter Variablen gleichwohl liegen, davon handelt dann die Typentheorie.

[128] Dass tatsächlich eher Unbestimmtheit gemeint ist, geht aus einer anderen Passage hervor, die gebundenen Variablen handelt: «The symbol ‹$(x).\phi x$› denotes one definite proposition, and there is no distinction in meaning between ‹$(x).\phi x$› and ‹$(y).\phi y$› when they occur in the same context. Thus the ‹x› in ‹$(x).\phi x$› is not an ambiguous constituent of any expression in which ‹$(x).\phi x$› occurs; and such an expression does not cease to convey a determinate meaning by reason of the ambiguity of the x in the ‹ϕx›«(Whitehead und Russell (1910, S. 17)).

Ein Beispiel für die Kombination (1a) findet sich im 1969 erschienenen *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, an dem namhafte Logiker der Zeit, insbesondere John Myhill, mitgewirkt haben:[129]

> Variables, like constants, may be viewed as names, but as names in a somewhat different way. A variable denotes or names *indeterminately* any one of *several* things which are called the *values* of the variable and which collectively comprise the *range* of the variable. Thus some class of individuals might constitute the range of a variable, and some class of classes [...] might constitute the range of another variable. In interpreting a formalized language it is usual to specify the respective ranges of the various variables of the language, just as it is usual to specify the respective things denoted by the various constants of the language.

Demnach würde eine Variable irgendein Element – ein einzelnes, wenn auch nicht bestimmt ist, welches – aus dem Wertebereich bezeichnen, den ihr die jeweilige Interpretation der Sprache zuordnet. Es fragt sich allerdings auch hier wieder, wie es möglich sein soll, einen bestimmten Gegenstand mit einem Buchstaben zu bezeichnen, ohne dass feststünde, welcher Gegenstand damit bezeichnet wird. Wir waren weiter oben (in 1.3.2.1) zum Schluss gelangt, dass dies unmöglich ist.

In einem vergleichsweise kürzlich erschienenen Aufsatz wurde versucht, diese Möglichkeit zu verteidigen. In Bezug auf Wendungen der Art „Sei n eine beliebige Zahl“ wird darin behauptet: «‹n› refers to a number – an ordinary, particular number such as 58 or 2,345,043. Which one? We do not and cannot know, because the reference of ‹n› is fixed *arbitrarily*».[130] Die Verteidigung scheitert jedoch insofern, als sich die Argumentation nur unter der Annahme aufrecht erhalten lässt, dass jenes beliebige Bezeichnen mittels

[129] Feys und Fitch (1969, S. 6). Da es sich bei dem Text um eine Art Wörterbuch und nicht um die Darstellung eines bestimmten logischen Systems handelt, könnte man einwenden, das Beispiel sei schlecht gewählt. Mehr als ein Wörterbuch ist es aber ein Handbuch, das verschiedene Kalküle und Teilgebiete der Logik jeweils aus einem bestimmten Blickwinkel darstellt. So enthält die kurze Darstellung des *first-order functional calculus* auch semantische Aussagen, u. a. die folgende (auf S. 52): «Functions of [individuals] presuppose a category of so-called *individuals*. [...] Almost any class could be chosen to serve as the class of ‹individuals› considered here, and the choice can even be left unspecified». Das spricht, zusätzlich zur zitierten Passage, ebenfalls dafür, dass (1a) und nicht (1b) vorliegt. Die offenbar nicht ganz unkomplizierte Entstehungsgeschichte dieses Texts und vor allem der Umstand, dass mehrere Autoren über längere Zeit daran gearbeitet haben, machen ihn m. E. zu einem fruchtbaren Dokument für die historische Arbeit.

[130] Vgl. Breckenridge und Magidor (2012, S. 378).

Buchstaben eine primitive semantische Tatsache darstelle.[131] Durch diese Annahme ist natürlich nichts erklärt.[132] Wir können also bei unserem Befund bleiben.

Betrachten wir noch ein weiteres Beispiel aus der Geschichte der modernen Logik, bevor wir zu Frege zurückkehren. Quine hätte, wie mir scheint, die Möglichkeit einer Referenzbeziehung, von der es unmöglich ist, zu wissen, worauf sie sich im Einzelnen bezieht, kaum zugestanden. Jedenfalls betont er, abgesehen von einem ganz frühen Artikel, an zahlreichen Stellen in seinem Werk, dass Variablen keine Namen sind.[133] Variablen treten in Sätzen vielmehr an die Stelle von Namen. Aus der Ersetzung von Namen durch Variablen gehen offene Sätze hervor, die keinen Wahrheitswert besitzen, eben weil Variablen frei in ihnen vorkommen.[134] Mit Frege geht Quine also einig, dass Variablen keine Namen sind und auch nicht wie Namen bezeichnen. Das gilt für freie wie für gebundene Variablen.[135] Im Gegensatz zu Frege aber hält er gebundene Variablen – d. s. bei Quine immer Individuenvariablen – für das Referenzmittel schlechthin, wobei eine gebundene Variable auf all ihre Werte zugleich referiere (mehr dazu in 1.3.3.5). In dieser Hinsicht ist Quine also näher bei Church, näher auch als bei Ramsey, da er für die unbegrenzte Variable der Logizisten nicht viel übrig hat. Davon abgesehen, dass er die Beziehung einer

[131] In Leitgeb (2022, S. 22) wird diese Annahme zurückgewiesen mit dem Hinweis, dass es überhaupt keine Tatsache gibt, weder eine semantische noch eine nicht-semantische, wodurch die Referenz eines Buchstabens auf einen einzelnen bestimmten Gegenstand festgelegt wäre. (An besagter Stelle in Leitgeb (2022) geht es zwar nicht primär um Buchstaben, sondern um Ausdrücke, die mit Hilberts ϵ-Operator gebildet wurden, der Einwand bleibt aber derselbe.) Eine andere Kritik findet sich in Cantwell (2018).

[132] Und selbst wenn die Annahme zugestanden würde, ist nicht klar, wie arbiträre Referenz Bestand haben könnte. Nehmen wir einen Raum voller Menschen, 27 an der Zahl. Gemäss Breckenridge und Magidor (2012, S. 393) lege ich mit der Wendung „Sei a eine beliebige Person in diesem Raum“ die Referenz des Buchstabens ‚a‘ auf willkürliche Weise fest, sodass ‚a‘ von nun an wie ein Eigenname funktioniert, der sich auf eine bestimmte Person in diesem Raum bezieht. Dass der Buchstabe tatsächlich eine bestimmte Person bezeichnet, muss indes nicht nur als primitive semantische Tatsache hingenommen werden, sondern es muss auch zugestanden werden, dass diese Tatsache insofern unerkennbar ist, als wir nicht wissen können, auf welche der 27 Personen sich der Buchstabe bezieht. Wenn mich jemand allen 27 Personen im Raum vorstellte und jedes Mal fragte, ob das a sei, könnte ich die Antwort unmöglich kennen. Ist jedoch von vornherein klar, dass weder ich noch sonst jemand den Buchstaben ‚a‘ (nicht bloss zufällig) korrekt auf Personen im Raum anwenden kann, kann es mir unmöglich gelungen sein, mit der obigen Wendung einen Eigennamen einzuführen. Weitere Schwierigkeiten, auf die ich hier nicht weiter eingehen kann, ergeben sich, sobald mehrere Buchstaben gleichzeitig eingeführt werden.

[133] Der frühe Artikel ist Quine (1939) und es steht dort auf S. 708: «Variables can be thought of roughly as ambiguous names of their values. This notion of ambiguous name is not as mysterious as it at first appears, for it is essentially the notion of a pronoun; the variable ‹x› is a relative pronoun used in connection with a quantifier, ‹(x)› or ‹$(\exists x)$›». Obwohl Variablen und Namen nicht gleichgesetzt werden, hebt Quine ihre Ähnlichkeit hier doch stärker hervor als in vielen späteren Schriften. Die Rede von mehrdeutigen Namen erinnert ausserdem an Whitehead und Russell.

[134] Vgl. zum Beispiel Quine (1982, S. 134).

[135] Vgl. etwa Quine (1960, S. 152) und Quine (1961c, S. 6).

gebundenen Variablen zu ihren Werten von der Beziehung eines Namens zu dem Gegenstand, den er benennt, strikt unterscheidet, entspricht Quines Auffassung von Variablen also am ehesten der Kombination (2a).

1.3.3.2. Buchstaben ohne Sinn und Bedeutung

Keine der betrachteten Bestimmungen hätte Frege zufriedengestellt. Aus seiner Sicht liegen sie alle falsch.[136] Buchstaben – seien es nun deutsche, lateinische oder kleine griechische – denotieren keine Gegenstände, weil sie nicht denotieren, und sie referieren auf nichts, weil sie nicht referieren. Auch die Rede von verschiedenen Werten, die ein Buchstabe annehmen könne, findet Frege problematisch, wie wir gesehen haben (siehe 1.2.1). Umso irreführender hätte ihm die Vorstellung erscheinen müssen, dass Buchstaben, gleich höchst äquivoken Namen, alle ihre möglichen Werte zugleich bezeichnen oder, wie auch immer man diese Beziehung nennen möchte, sie denotieren oder auf sie referieren. Seine Ablehnung bringt Frege in einem bereits mehrfach erwähnten Brief an Jourdain unzweideutig zum Ausdruck:[137]

> Ich würde von einem Buchstaben nicht sagen, dass er eine Bedeutung, einen Sinn, ein *meaning* habe, wenn er dazu dient, einem Satze Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. Man kann den Buchstaben durch den Eigennamen ‹Δ› eines Gegenstandes Δ ersetzen; aber dieses Δ kann nicht irgendwie als *meaning* des Buchstaben angesehen werden; denn es ist mit dem Buchstaben nicht enger verknüpft, als mit irgendeinem andern, und der Buchstabe ist mit ihm nicht enger verknüpft, als mit irgendeinem andern Gegenstande.

Demnach sind die Buchstaben, derer wir uns in der Mathematik und in der Logik bedienen, nicht bloss bedeutungslos (im Sinne Freges), sie haben im Gegensatz zu bedeutungslosen Namen wie ‚Nausikaa' nicht einmal einen eigenständigen Sinn.[138] Damit ist

[136] Man beachte, dass dagegen David Hilbert und Wilhelm Ackermann in ihren *Grundzügen der theoretischen Logik* Variablen und Namen klar auseinanderhalten und freien Variablen keine bezeichnende Rolle zuweisen: «Es fehlt uns noch ein symbolischer Ausdruck für die *Allgemeinheit von Aussagen.* Um einen solchen zu gewinnen, führen wir nach dem Vorbilde der Mathematik neben den Zeichen für bestimmte Gegenstände (den Eigennamen) noch *Variable* $x, y, z, \ldots$ ein, mit denen wir die Leerstellen der Funktionszeichen ebenfalls ausfüllen können. Eine *bestimmte* Ausfüllung einer Leerstelle heisst *ein Wert der betreffenden Variablen.* [...] Setzt man in die Leerstellen der logischen Funktionen bestimmte Argumentwerte (d. h. Eigennamen von Individuen) ein, so ergeben sich *bestimmte Aussagen*, die richtig oder falsch sein können. Sind dagegen die Leerstellen von Funktionszeichen mit Variablen ausgefüllt, so wird dadurch zunächst kein bestimmtes Urteil dargestellt, sondern wir haben nur einen symbolischen Ausdruck, der von der betreffenden Variablen abhängt. Wie man nun in der Algebra Buchstabenformeln schreibt, welche besagen, dass für beliebige Zahlenwerte, die man an Stelle der Variablen einsetzt, die entstehende Zahlengleichung richtig ist, so können wir auch im Logikkalkül verfahren» Hilbert und Ackermann (1938, S. 47).

[137] Frege (1976, S. 117). Siehe Anm. 8.

[138] Über Namen, die nichts benennen und gleichwohl Sinn haben, vgl. Frege (1892b, S. 148 f.); Frege (1983, S. 133 f., 141 f., 251 f.). Eine erhellende Diskussion findet sich in Dummett (1981, S. 160-171).

natürlich nicht gemeint, dass der Gebrauch von Buchstaben keinen Beitrag an den Ausdruck von Gedanken leistet.[139] Wenn ich behaupte, dass jede rationale Zahl q identisch ist mit dem Quotienten zweier teilerfremder ganzer Zahlen m und n, behaupte ich wohl etwas anderes, als wenn ich lediglich darauf hinweise, dass $3/9 = 1/3$ (und dem noch anfüge, dass 3/9 eine rationale Zahl ist und 1 und 3 teilerfremde ganze Zahlen sind). Die Allgemeinheit des Gedankens, den der erste Satz ausdrückt, ist aber kein eigenständiger Baustein dieses Gedankens, der sich von ihm einfach abtrennen liesse. Es scheint vielmehr, als sei der Gedanke von Allgemeinheit durchdrungen.[140]

Wer verständlicherweise vereinzelten Briefstellen und nachgelassenen Schriften nicht zu viel Gewicht beimessen möchte, kann sich durch das genaue Studium der *Grundgesetze* davon überzeugen, dass die darin gebrauchten Buchstaben als bedeutungs- und sinnlos aufzufassen sind.[141] Weniger Aufwand hingegen braucht es, um zu erkennen, dass weder die deutschen noch die lateinischen noch die kleinen griechischen Buchstaben in der Begriffsschrift Namen sind, dass sie also weder Gegenstände noch Funktionen bezeichnen, sondern überhaupt nicht bezeichnen. Frege wird nicht müde, dies hervorzuheben, wie sich zahlreichen bereits angeführten Stellen entnehmen lässt.[142] Wenn diese Buchstaben nun aber nichts bezeichnen, keine Bedeutung und keinen Sinn haben: Wozu sind sie dann gut? Frege führt in seinen Schriften meist dieselben beiden Punkte an. Sie hängen eng miteinander zusammen.

Erstens, so Frege, deuten die Buchstaben Gegenstände bzw. Funktionen unbestimmt an, wobei dieses unbestimmte Andeuten so zu verstehen ist, dass es sich gleichmässig

[139] Vgl. etwa Frege (1983, S. 269): «Damit nun, dass ein nur andeutendes Zeichen weder etwas bezeichnet, noch einen Sinn hat, ist nun noch nicht gesagt, dass es nicht zum Ausdrucke eines Gedankens beitragen könnte. Dies kann es dadurch, dass es einem Satze oder einem aus Sätzen bestehenden Ganzen Allgemeinheit des Inhalts verleiht».

[140] Frege sagt es so: «Auch die Allgemeinheit kann nicht als Sinn des lateinischen Buchstaben angesehen werden; denn sie ist nicht etwas Selbständiges, was dem sonst schon fertigen Satze hinzugefügt würde» Frege (1976, S. 117). Hier ist es wichtig, an eine frühere Feststellung (in 1.2.3.2) zu erinnern: Gegenstandsbuchstaben sind nicht Bestandteil von Funktionsnamen. Sie geben lediglich einen Hinweis, wie die Argumentstellen der betreffenden Funktion zu sättigen sind, um einen Satz zu erhalten, der von der gleichen Form ist, wie der Satz, von dem das komplexe Prädikat durch Zerlegung gewonnen wurde.

[141] Da es hier nicht möglich ist, auf die zahlreichen Einzelheiten einzugehen, die dabei beachtet werden müssten, sei auf Dummett (1981, S. 15-19, 27-33) verwiesen. Um zwei Beispiele aus der neueren Sekundärliteratur zu geben: In Landini (2018) und Wehmeier (2018) werden zwar weitgehend unverträgliche Rekonstruktionen dessen geboten, was man mitunter als die Syntax und die Semantik der *Grundgesetze* bezeichnet. Während Landini versucht, von Frege aus eine Brücke zu Tarski zu schlagen (vgl. Landini (2018, S. 119-130)), weist Wehmeier auf gewichtige Unterschiede hin (vgl. zusammenfassend Wehmeier (2018, S. 245-247)). Gleichwohl gelangen beide zum Schluss, dass Freges Buchstaben weder Bedeutung noch Sinn haben (vgl. Landini (2018, S. 130-144) und Wehmeier (2018, S. 239)).

[142] Vgl. insbesondere Frege (1893, S. 31 f.).

auf alle denkbaren Gegenstände bzw. Funktionen bezieht, deren Namen sinnvollerweise anstelle der Buchstaben eingesetzt werden dürfen.[143] (Dass sie unbestimmt andeuten, bezieht Frege sowohl auf freie wie auf gebundene Buchstaben, ohne dass ein Unterschied erkennbar wäre; wenn aber gesagt wird, dass ein Buchstabe diejenigen Gegenstände andeutet, durch deren Name er ersetzt werden darf, sind damit primär die freien Buchstaben gemeint.) Auf dieselbe unbestimmte Weise deutet demnach ein Gegenstandsbuchstabe alle Gegenstände und ein k-stelliger Funktionsbuchstabe n-ter Stufe alle Funktionen der n-ten Stufe mit k Argumenten an. Durch den Gebrauch von Buchstaben wird nichts Einzelnes – sei es noch so unbestimmt gelassen oder beliebig gewählt – herausgegriffen. Zweitens, hält Frege fest, dient der Buchstabengebrauch hauptsächlich dazu, den ausgedrückten Gedanken Allgemeinheit zu verleihen. Im Hinblick auf typische Gebrauchsweisen der Mathematik schreibt er: «Der Gebrauch der Buchstaben ist in allen diesen Fällen eigentlich derselbe, wie verschieden er auch scheinen mag. Sie sollen immer dem Ganzen Allgemeinheit des Inhalts verleihen, wenn auch dieses Ganze aus scheinbar selbständigen Sätzen besteht».[144] Wie hängen die beiden Punkte nun zusammen?

Wenn ich sage „Alle algebraischen Zahlen sind berechenbar", sage ich nicht etwas über jede algebraische Zahl im Einzelnen aus. Enthielte der Gedanke, den dieser Satz ausdrückt, für jede solche Zahl ein Bestandteil, der sie charakterisiert, wäre es kein Gedanke, den ein Mensch zu fassen vermag. Fast alle dieser Zahlen bleiben für uns immer ausser Reichweite. Und selbst wenn die Menge der algebraischen Zahlen endlich und überschaubar wäre, könnte ich mit demselben Satz den gleichen Gedanken ausdrücken wie vorhin, d. h. ohne dabei an jede einzelne Zahl zu denken. Aus der Wahrheit einer Konjunktion darf ich ohne Weiteres auf die Wahrheit beider Konjunktionsglieder schliessen. Aus der Wahrheit von „Alle algebraischen Zahlen sind berechenbar" dagegen darf ich nur dann auf die Wahrheit von „$\sqrt{2}$ ist berechenbar" schliessen, wenn ich weiss, dass $\sqrt{2}$ eine algebraische Zahl ist.

Was ein allgemeiner Satz wie dieser ausdrückt, ist die Unterordnung eines Begriffs (‚ξ ist eine algebraische Zahl') unter einen anderen (‚ξ ist berechenbar').[145] Allgemeine Sätze sagen etwas über Begriffe aus, nicht über Gegenstände. Werden sie in formale oder halbformale Sprachen übersetzt, kommen typischerweise Buchstaben zum Einsatz; unser Beispielsatz etwa lässt sich in die Formel ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' übertragen. Frege folgend

[143] Vgl. dazu u. a. Frege (1893, S. 5, 11, 34 f., 37).

[144] Frege (1906, S. 298). Frege bezieht sich hier unter anderem auf die Gebrauchsweise, die im langen Zitat in Anm. 116 beschrieben wird. Die anderen Gebrauchsweisen, die im Zitat hier angesprochen werden, sind dieser Gebrauchsweise sehr ähnlich. Für dieselbe Feststellung wie hier, vgl. Frege (1983, S. 211). Diese Stelle wurde bereits in Anm. 21 zitiert.

[145] Vgl. z. B. Frege (1906, S. 296).

müsste man sagen, dass der Buchstabe ‚x', der darin vorkommt, zwar alle algebraischen Zahlen unbestimmt andeutet, jedoch nicht jede einzeln und ausserdem nicht nur diese, sondern alle Gegenstände überhaupt. Mit dem Bezeichnen eines einzelnen Gegenstands durch einen Namen kann dieses Andeuten daher nicht viel gemeinsam haben. Buchstaben werden nicht zu unfassbar komplexen Referenzmitteln, sobald ein Allquantor sie bindet.[146] Weshalb mitunter versucht wird, Freges Andeuten als ein Benennen oder Referieren zu verstehen, ist mir unverständlich.[147] Wenn in der Umgangssprache nach einer Vorlage für das Verhältnis einer Variablen zu ihren Werten gesucht werden soll, dann doch eher in der Art und Weise, wie sich ein Prädikat zu dem verhält, wovon es wahr ausgesagt wird.

Aber vielleicht lässt sich zugeben, dass dieses unbestimmte Andeuten, da es die Buchstaben schon nicht zu referierenden Zeichen macht, wenigstens dem entspricht, was man als ihren Sinn bezeichnen könnte. Die erste Schwierigkeit, die sich daraus ergibt, ist, dass alle Buchstaben desselben Typs denselben Sinn erhielten. Ob in offenen Formeln ‚a' oder ‚b' und in geschlossenen ‚$\mathfrak{a}$' oder ‚$\mathfrak{b}$' vorkommt, überall deuten Gegenstandsbuchstaben dasselbe unbestimmt an: alle denkbaren Gegenstände. Gleiches gilt, *mutatis mutandis*, für Funktionsbuchstaben. (Nehmen wir der Einfachheit halber an, Gegenstandsbuchstaben seien Buchstaben 0. Stufe mit Stelligkeit 0 und zwei Buchstaben genau dann vom gleichen Typ, wenn sie in Stufe und Stelligkeit übereinstimmen.) Wenn nun alle Buchstaben desselben Typs synonym sind, sollten sie frei füreinander austauschbar sein, ohne dass dadurch der Sinn der ganzen Aussage geändert wird oder gar verloren geht. Nehmen wir als Beispiel die Formel ‚$\forall x \forall y Fxy$' und ersetzen ‚y' durch das mutmasslich synonyme ‚x'. Wie auch immer wir dabei vorgehen, wird der Sinn der resultierenden Formel nicht derselbe bleiben: Ersetzen wir nur das zweite Vorkommen von ‚y' und behalten beide Quantoren (‚$\forall x \forall y Fxx$') oder streichen den zweiten (‚$\forall x Fxx$'), gehen Formeln hervor, die nicht denselben Gedanken ausdrücken können wie die Formel, von der wir ausgegangen sind; ersetzen wir hingegen beide Vorkommen von ‚y' durch Vorkommen von ‚x', führt das zu einem nach den üblichen Syntaxregeln nicht wohlgeformten Ausdruck (‚$\forall x \forall x Fxx$'). Analoges lässt sich für Funktionsbuchstaben feststellen. Konjunktionen wie ‚$\forall x Fx \wedge \forall x Gx$' würden stets zu einfachen Prädikationen (‚$\forall x Fx$') kollabieren und Implikationen wie ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' zu Tautologien (‚$\forall x(Fx \rightarrow Fx)$') verkommen, wenn mit den beiden Buchstaben ‚F' und ‚G' derselbe Sinn verbunden werden müsste.

[146] Vgl. auch Dummett (1981, S. 517).

[147] Dummett kritisiert Quine in diesem Punkt zu Recht, vgl. Dummett (1981, S. 519-529). Für einen neueren Interpretationsversuch, der das Andeuten lateinischer Buchstaben als eine Art von Referenz aufzufassen versucht, vgl. Heck (2012, S. 59-64 (insbes. S. 62)).

Diese Schwierigkeiten liegen übrigens dem zugrunde, was Kit Fine etwas hyperbolisch als Antinomie der Variablen bezeichnet hat. Zur Überwindung der „Antinomie" hat er denn auch eine sogenannte relationale Semantik entworfen, die sich von herkömmlichen Semantiken, wie er sie insbesondere Frege und Tarski zuschreibt, wesentlich unterscheiden soll. Inzwischen wurde jedoch gezeigt, wie die Schwierigkeiten ohne Fines relationale Semantik aufzulösen sind.[148]

1.3.3.3. Begrenzte und unbegrenzte Allgemeinheit

Es ergibt sich indes eine weitere Schwierigkeit aus der Annahme, wonach Buchstaben einen Sinn haben, der in ihrem unbestimmten Andeuten besteht. Wenn Buchstaben einen Sinn hätten, würde dieser weder dem Sinn eines Eigen- oder Scheineigennamens noch dem Sinn eines Begriffsworts gleichen. (Bleiben wir der Einfachheit halber auf der Stufe der Gegenstände und ihrer Begriffe.) Der Sinn eines Eigennamens, d. i. eines Namens, der einen einzelnen Gegenstand tatsächlich bezeichnet, entspricht einer Beschreibung, die diesen Gegenstand eindeutig kennzeichnet. Und der Sinn eines Scheineigennamens, d. i. eines Namens, der auftritt wie ein Eigenname und doch nichts bezeichnet, entspricht einer Beschreibung, die scheinbar einen Gegenstand eindeutig kennzeichnet, in Wirklichkeit jedoch auf nichts zutrifft. Ein Buchstabe, der als Variable gebraucht wird, würde aber nur dann *keinen* Gegenstand andeuten, wenn es überhaupt keine Gegenstände gäbe, und nur dann *genau einen*, wenn der Bereich aller nur denkbaren Gegenstände genau ein Element enthielte. Sobald der Gegenstandsbereich mehr als ein Element umfasst, das haben wir gesehen, deutet ein Buchstabe mehrere Gegenstände an.[149] Dass mit einer Variablen ein Sinn verbunden ist, der dem eines Eigen- oder Scheineigennamens gleicht, wäre also höchstens in den beiden genannten Spezialfällen möglich. Keiner dieser Fälle aber ist mit Freges Auffassung von der Gesamtheit der Gegenstände verträglich und der erste steht zudem im Widerspruch zu den noch heute üblichen Annahmen in Bezug auf Gegenstandsbereiche (siehe 1.3.2.3).

[148] Für Fines relationale Semantik, vgl. Fine (2007); für eine Auflösung im Rahmen einer Tarskischen Semantik, vgl. Pickel und Rabern (2016); und für eine Auflösung im Rahmen einer Fregeschen Semantik, vgl. Wehmeier (2018).

[149] Dagegen könnte man einwenden, dass eine freie Variable, sobald sie durch eine Variablenbelegung ihre Interpretation erhält, genau einen Gegenstand herausgreift. Erstens jedoch sind die Überlegungen hier nicht auf freie Variablen beschränkt und zweitens wird eine Variable durch eine Belegung in eine Konstante, einen Namen verwandelt. Von dieser Konstante könnte man nun geneigt sein zu sagen, ihr Sinn liege insofern in der jeweiligen Variablenbelegung, als ihr dadurch ein Gegenstand als ihr einziger Wert zugewiesen wird. Für eine Erörterung dieser und verwandter Fragen müsste Tarskis semantische Theorie genauer untersucht werden, was hier nicht möglich ist (siehe dazu 1.4.3).

Der Sinn eines Begriffsworts wiederum entspricht grob gesagt[150] dem, was von allen Gegenständen, die unter ihn fallen, wahr und von allen anderen Gegenständen falsch ausgesagt wird. Gegenstandsbuchstaben aber, das haben wir ebenfalls gesehen, deuten alle denkbaren Gegenstände *gleichermassen* an. Wie Frege bemerkt, ist kein Gegenstand mit einem Buchstaben «enger verknüpft, als mit irgendeinem andern» und kein Buchstabe mit ihm «enger verknüpft, als mit irgendeinem andern Gegenstande».[151] Ein Buchstabe, der als Variable gebraucht wird, zieht demnach innerhalb seines Wertebereichs keine Grenzen. Doch auch nach aussen hin grenzt Freges Variable nicht ab. Ihr Wertebereich ist insofern unbegrenzt, als sie alles andeutet, was sie nur andeuten *kann*. Nichts, was wahr oder falsch von ihren Werten ausgesagt werden kann, ist von etwas aussagbar, das ausserhalb ihres Wertebereichs liegt. Von einer Abgrenzung wie bei einem gehaltvollen Begriff kann also nicht die Rede sein. Anders gesagt: Ein Gegenstand zu sein, ist kein Begriff, der Gegenstände von allem anderen, was es sonst noch gibt, trennt.[152] Denn ein Begriff, der als Argumente neben allen denkbaren Gegenständen auch Nicht-Gegenstände (d. s. Funktionen) zuliesse, wäre ein Unding. Der Bereich aller Gegenstände ist zwar *beschränkt*, nicht aber begrifflich abgrenzbar.[153]

[150] D. h., wenn man die zahlreichen exegetischen Schwierigkeiten, die damit verbunden sind, beiseite lässt, vgl. dazu Dummett (1981, S. 204-294 (Kap. 7-9)).

[151] Siehe Anm. 137.

[152] Nach Frege lässt sich, was ein Gegenstand ist, ebensowenig wie, was eine Funktion ist, zerlegen, mithin definieren, da es sich um ‹Logischeinfaches›, um ‹logische Urerscheinungen› oder ‹Urelemente› handelt. Es lassen sich nur ‹Winke› geben, ‹Erläuterungen›, die auf das Gemeinte hindeuten, wobei ‹auf ein entgegenkommendes Verständnis› gerechnet werden muss. Vgl. dazu Frege (1891, S. 134), Frege (1892a, S. 167 f.), Frege (1990, S. 269), Frege (1906, S. 288), Frege (1983, S. 244, 254). Etwas als einen Gegenstand und damit als ein Element des Gegenstandsbereichs erkennen, ist nicht das Gleiche wie erkennen, dass etwas unter einen Begriff fällt. Daher erscheint mir Dummetts Lesart in diesem Punkt irreführend: «for an understanding of first-level quantification we need only to have a determinate conception of what it is to belong to the domain, so that it is objectively determined, for each object, whether it is in that domain or not» Dummett (1981, S. 518). Das ist zu nah an begrifflicher, nach aussen hin abgrenzender Bestimmtheit, die es aber für die Gesamtheit der Gegenstände nicht geben kann, weil sie eben keine begriffliche ist.

[153] Gleiches gilt übrigens in der Typentheorie der *Principia Mathematica*. Die möglichen Argumente einer *propositional function* sind auf einen Typ beschränkt, sodass es unmöglich ist, Typen mit Hilfe ein und derselben *propositional function* voneinander abzugrenzen. Whitehead hat die paradoxe Situation, die sich daraus ergibt, in einem späten Aufsatz über Mathematik und das Gute auf den Punkt gebracht: «[Russell] had discovered a rule of safety [type restriction]. But unfortunately this rule cannot be expressed apart from the presupposition that the notion of number applies beyond the limitations of the rule. For the number ‹three› in each type, itself belongs to different types. Also each type is itself of a distinct type from other types. Thus, according to the rule, the conception of two different types is nonsense, and the conception of two different meanings of the number three is nonsense. It follows that our only way of understanding the rule is nonsense. It follows that the rule must be limited to the notion of a rule of safety, and that the complete explanation of number awaits an understanding of the relevance of the notion of the varieties of multiplicity to the infinitude of things» Whitehead (1948, S. 79). Zur Spannung, die durch den Grundbegriff der

Dieses logizistische Lehrstück und die Konsequenzen, die sich daraus ergeben, hat eigentlich erst der junge Wittgenstein klar gesehen. In der *Logisch-philosophischen Abhandlung* sagt er dazu:[154]

> Jede Variable ist das Zeichen eines formalen Begriffes.
> Denn jede Variable stellt eine konstante Form dar, welche alle ihre Werte besitzen, und die als formale Eigenschaft dieser Werte aufgefasst werden kann.
> So ist der variable Name ‹x› das eigentliche Zeichen des Scheinbegriffes *Gegenstand*.

Variablen beziehen sich also auf die Werte, die sie annehmen können, zwar in ähnlicher Weise wie Begriffe auf die Gegenstände, die unter sie fallen. Der Wertebereich einer unbegrenzten Variablen ist jedoch keine Begriffsextension innerhalb eines umfassenderen Signifikanzbereichs. In ihrem philosophisch-logischen Gebrauch bezeichnen die Terme ‚Gegenstand' und ‚(k-stellige) Funktion (n-ter Stufe)' formale Begriffe. Der Gesamtheit der Elemente, die unter einen solchen Begriff fallen, entspricht denn auch kein begrifflicher Gehalt, kein Sinn, sondern lediglich eine Form. (Daher sind Begriffe wie ‚$\xi = \xi$' und ‚$F\xi \rightarrow (G\xi \rightarrow F\xi)$', deren Extension alle Gegenstände umfasst, insofern sinnlos, als sie keine Grenzen ziehen.) Zugleich aber fällt alles, was von dieser Form ist, zwangsläufig unter den entsprechenden formalen Begriff, was für die Unbegrenztheit der assoziierten Variablen sorgt. Auf diesen letzten Punkt wird Wittgenstein später zurückkehren und dabei den Unterschied zwischen begrenzten und unbegrenzten Variablen noch einmal hervorheben: «Kann ich aber nicht eine Variable dadurch geben, dass ich sage, ihre Werte sollen alle Gegenstände sein, die eine bestimmte materielle Funktion befriedigen? Dann ist die Variable keine Form! Und dann hängt der Sinn eines Satzes davon ab, ob ein anderer wahr oder falsch ist».[155]

Bei Variablen, deren Bereich begrifflich begrenzt ist, sieht es anders aus. Und entgegen der logizistischen Lehre scheinen sie in der Mathematik den Regelfall darzustellen, zumindest wird das durch die gängige Prosa suggeriert. Eine Wendung wie „Sei n eine natürliche Zahl" führt neben dem unbestimmt andeutenden ‚n' auch ein Begriffswort ein, wobei es naheliegt, die Wendung so zu lesen, als würde der Wertebereich des Buchstabens auf die Extension des Begriffs begrenzt. Jede weitere Aussage, deren Ausdruck diesen Buchstaben enthält, wäre demnach ausschliesslich auf natürliche Zahlen zu beziehen. Hier könnte man sagen, dass der Sinn eines entsprechend gebrauchten Buchstabens mit dem Sinn jenes Begriffsworts zusammenfällt. Und man könnte anfügen, dass mit dem

assertion of a propositional function in die verzweigte Typentheorie der *Principia* gebracht wird, vgl. die in Anm. 119 angegebene Literatur.

[154] Wittgenstein, *Logisch-philosophische Abhandlung*, 4.1271-4.1272.

[155] Wittgenstein, *Philosophische Bemerkungen*, S. X, 113.

Gebrauch von Buchstaben in der Mathematik typischerweise eine gewisse Begrenzung des Wertebereichs von Variablen, mithin ein Sinn einhergeht.

Nicht alles jedoch spricht dafür, Wendungen dieser Art so zu lesen. Wie wir gesehen haben, werden an die Buchstaben manchmal Begriffe angehängt, die sich im weiteren Verlauf des Texts als leer erweisen. Die Wendung „Seien p und q zwei teilerfremde natürliche Zahlen mit $p/q = \sqrt{2}$“ war so ein Beispiel (siehe 1.3.1.2). Würde der Wertebereich der Buchstaben dadurch auf die leere Menge begrenzt, wäre unklar, was Sätze, worin diese Buchstaben vorkommen, noch auszusagen vermögen. Ist nicht jeder Satz der Form ‚$Fx \rightarrow Gx$‘ wahr, wenn das ‚x‘ darin nichts andeutet, keine Werte annehmen kann? Um das zu verhindern, müsste auf arbiträre Weise festgelegt werden, welche Schlüsse über leerem Gegenstandsbereich zulässig sind und welche nicht. Dadurch jedoch entstehen weitaus grössere Schwierigkeiten als durch das Eingeständnis, wonach unser Schliessen offenbar zweierlei voraussetzt: dass die beteiligten Begriffe und Relationen nicht alle leer sind und dass die verwendeten Variablen über die Vereinigung derjenigen Mengen reichen, über denen diese Begriffe und Relationen definiert sind. Im eben angeführten Beispiel müssten die beiden Buchstaben ‚p‘ und ‚q‘ demnach mindestens über die Gesamtheit der natürlichen Zahlen reichen.

Für Frege wäre das immer noch ungenügend.[156] Beim Definieren gelte es zwingend, den Grundsatz der Vollständigkeit zu befolgen, d. h.: Begriffe sind so zu definieren, dass für jeden denkbaren Gegenstand bestimmt ist, ob er unter den Begriff fällt oder nicht. Gleiches gelte, *mutatis mutandis*, für Beziehungen und andere Funktionen. Stückweises Definieren und damit Definitionen, die dies nur für eine begrenzte Gattung von Gegenständen oder Funktionen leisten, hält Frege für unzulässig. Durch sie werde «der Bestand der Lehrsätze in's Ungewisse gestellt».[157] Wie begründet Frege diese Behauptung und damit seinen definitorischen Grundsatz?

Nehmen wir den Satz, dass es keine Quadratwurzel von 2 gibt: ‚$\neg\exists x(x = \sqrt{2})$‘. Ist der Wertebereich der Variablen auf die rationalen Zahlen begrenzt, ist der Satz wahr. Das zeigt der weiter oben erwähnte Widerspruchsbeweis. Ohne diese Begrenzung, und wenn der Wert der Quadratwurzelfunktion für jede natürliche Zahl definiert ist, ist derselbe Satz jedoch falsch. Es kommt also vor, dass durch das Aufheben begrifflicher Begrenzungen Wahrheiten falsch und Falschheiten wahr werden. Umgekehrt werden durch solche Begrenzungen Annahmen in die Buchstaben gelegt, und diese Annahmen gilt es,

[156] Die Abschnitte, die für das Folgende relevant sind, finden sich zu Beginn des zweiten Bands der *Grundgesetze*: §§ 56-65 in Frege (1903, S. 69-78).
[157] Frege (1903, S. 74).

hinzuzudenken, wenn der Satz seinen Wahrheitswert beibehalten soll. Dies kann leicht vergessen gehen oder unpraktisch werden. Da hat Frege recht.[158]

Freges Behauptung aber geht weiter. Er behauptet, dass uns die Explizitmachung der Annahmen dazu zwingt, letztlich jede Begrenzung der Variablen aufzuheben. An unserem früheren Beispiel dargelegt, ist sein Gedanke der folgende: Der Satz, wonach es kein x und kein y gibt mit $x/y = \sqrt{2}$, ist wahr, wenn der Wertebereich der Variablen auf die natürlichen Zahlen begrenzt wird, falsch jedoch, wenn der Wertebereich auf die reellen Zahlen ausgedehnt wird (und die arithmetischen Operationen für diese definiert sind). Um die Wahrheit des Satzes zu garantieren, gilt es, die entsprechenden Annahmen hinzuzudenken, mithin zuzugeben, dass eigentlich dieser Satz behauptet wird:

$$\text{‚}\forall x \forall y (x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \rightarrow x/y \neq \sqrt{2})\text{‘}$$

Frege weist nun darauf hin, dass dieser Satz in den folgenden logisch äquivalenten Satz umgewandelt werden kann:

$$\text{‚}\forall x \forall y (x/y = \sqrt{2} \wedge x \in \mathbb{N} \rightarrow y \notin \mathbb{N})\text{‘}$$

Bei diesem zweiten Satz aber sei es unmöglich, die Begrenzung auf die natürlichen Zahlen aufrechtzuerhalten: «Der Zwang der Sachlage», meint Frege, arbeite «unwiderstehlich auf die Durchbrechung solcher Schranken hin».[159]

Woraus die behauptete Unmöglichkeit folgen soll, ist mir nicht klar. Offenbar will Frege – mit Blick auf die schrittweise Erweiterung des Zahlbegriffs in der Mathematikgeschichte – darauf hinaus, dass man durch den Gebrauch von Buchstaben anstelle von Zahlzeichen und durch die konsequente Anwendung von Umformungsregeln «ganz unmerklich über das Gebiet [...], in dem man seine Zeichen erklärt hat» hinausgeführt wird.[160] Tatsächlich kann der Gebrauch von Buchstaben (etwa von ‚x‘ und ‚y‘ in ‚$x/y = \sqrt{2}$‘) suggerieren, dass es ausserhalb des betrachteten Wertebereichs (d. s. hier die natürlichen Zahlen) gleichwohl Gegenstände geben muss, die durch die Buchstaben

[158] Frege (1903, S. 74, 78). In seiner *Introduction to Mathematics* führt Whitehead an einfachen Beispielen einige Schwierigkeiten vor, die eine Begrenzung der Variabilität von Buchstaben aus praktischer Sicht bereitet. Dabei zeigt sich, wie überaus nützlich es sein kann, Begrenzungen im Wertebereich von Buchstaben wie auch im Definitionsbereich von Begriffen und Relationen aufzusprengen. Wie Frege glaubt auch Whitehead, in dem sich verselbstständigenden Gebrauch von Buchstaben als Variablen die treibende Kraft hinter der stetigen Erweiterung der mathematischen Gegenstandsbereiche und der damit einhergehenden Verallgemeinerung der Disziplin erkannt zu haben. Vgl. dazu vor allem Whitehead (1911, S. 82-86, 87-91).

[159] Frege (1903, S. 78).

[160] Frege (1903, S. 78).

vertreten werden (das wären hier Gegenstände, die die Gleichung erfüllen). (Siehe für diese Feststellung das Ende von 1.3.1.2.) Eine entsprechende Erweiterung des Variablenbereichs zwingt uns dazu, auch den Definitionsbereich der involvierten Funktionen (d. i. hier der Division) zu erweitern, wenn der Satz einen bestimmten Wahrheitswert beibehalten soll. Daraus folgt aber weder die Unmöglichkeit, gewisse Begrenzungen aufrechtzuerhalten, noch der Zwang, Funktionen von Anfang an für alle denkbaren Gegenstände zu definieren.

Es trifft auch nicht zu, dass wir durch die Explizitmachung der Annahmen, die sich in den Buchstaben verstecken, dazu gezwungen werden, die Begrenzung des Wertebereichs aufzuheben. Mit beiden obigen Konditionalen verhält es sich gerade nicht so, dass ihr Wahrheitswert ändert, je nachdem, wie die Variablen gelesen werden: mit auf die natürlichen Zahlen begrenztem oder mit unbegrenztem Wertebereich. Unter beiden Lesarten bleibt die Wahrheit der Sätze erhalten (sofern die involvierten Funktionen breit genug definiert wurden). Und dies ist nicht weiter erstaunlich. Denn es fällt ja nicht schwer, Sätze, in denen begrifflich begrenzte Buchstaben vorkommen, in solche ohne Begrenzung, aber mit identischen Wahrheitsbedingungen umzuwandeln: Man drücke die Begrenzung durch eine einfache Prädikation aus, die dem ursprünglichen Satz als Antezedens in einem Konditional vorangestellt wird; aus ‚$\forall x Ax$‘ wird so ‚$\forall x(Bx \rightarrow Ax)$‘.

Vielleicht hat tatsächlich die Leichtigkeit, mit der sich Begrenzungen aufheben lassen, dazu beigetragen, dass der sonst so vorsichtige Frege hier einer Täuschung erlag.[161] Dass es keine Probleme bereitet, von einem engeren zu einem breiteren Zahlenbereich überzugehen, impliziert nicht, dass keine Probleme entstehen können, wenn man versucht, den Bereich aufs Äusserste auszudehnen. Wie Frege selbst leidvoll erfahren musste, kann sich mitunter, was wie ein Gegenstand auftritt, als unzulässiges Element dessen erweisen, was für die definitive und unhintergehbare Gesamtheit aller denkbaren Gegenstände gehalten wurde. Russells Widerspruch und andere Antinomien der Mengenlehre haben gezeigt, dass die Annahme unbegrenzter Wertebereiche alles andere als unproblematisch ist.

Aus Sicht moderner Semantiken nimmt sich die Forderung, den Definitionsbereich mathematischer Begriffe und Relationen über die Grenzen ihrer sinnvollen Verwendung hinaus zu erweitern, ohnehin übertrieben und unnötig aus. Begrenzungen auf die Extension eingeführter Begriffe, etwa auf den der natürlichen Zahlen, können sich zwar, das ist richtig, für die Zwecke gewisser Untersuchungen als einengend erweisen. Nicht jede begriffliche Begrenzung muss jedoch von dieser Art sein. Oftmals ist es naheliegender

[161] Wie Dummett vermutet, vgl. Dummett (1981, S. 475).

und der Untersuchung zuträglicher, den ganzen Signifikanzbereich der beteiligten Begriffe und Relationen als Wertebereich für die entsprechenden Variablen zu wählen. In ihren *Grundzügen der theoretischen Logik* halten Hilbert und Ackermann diesbezüglich fest, die Werte einer Variablen seien «im allgemeinen auf bestimmte Gattungen von Gegenständen beschränkt, die durch die Bedeutung der Funktionszeichen bestimmt werden». So kämen zum Beispiel in der Beziehung ‹der Punkt x liegt auf der Geraden y› «als Werte für x nur Punkte, für y nur Geraden in Betracht».[162] Für den Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ wäre es wiederum ausreichend, den Wertebereich der Buchstaben auf die reellen Zahlen auszuweiten, um Freges Einwand zu entkräften. Den Funktionszeichen (‚ξ/ζ', ‚$\sqrt{\xi}$') und ihren Bedeutungen würde dadurch keine übermässige Gewalt angetan. Frege erwähnt zwar die Möglichkeit solcher Begrenzungen, befindet aber das allgemeine Unterfangen, sprachlich mögliche, aber sinnlose Sätze wie ‹die Summe des Mondes und des Mondes ist nicht Eins› durch ein Gesetz zu verhindern, für «übermässig schwierig und wahrscheinlich undurchführbar».[163]

Obschon die Forderung nach äusserster Vollständigkeit bei Definitionen abzulehnen ist, muss doch zugestanden werden, dass die Frage der Umsetzbarkeit eines Gegenunterfangens – gleichsam einer mathematischen Grammatik – im 20. Jahrhundert wenig Aufmerksamkeit erhielt. In nachgelassenen Schriften Wittgensteins, die in seiner zweiten Schaffensphase nach der *Logisch-philosophischen Abhandlung* entstanden, sind Versuche zu erkennen, die logizistische Lehre der Unbegrenztheit von Variablen zurückzuweisen und an ihre Stelle eine Auffassung von sortal bestimmten Wertebereichen zu setzen. Viele der relevanten Bemerkungen blieben jedoch unveröffentlicht und weitgehend unbekannt. In eine ähnliche Richtung deutet auch Rudolf Carnaps Präferenz für begrifflich begrenzte Wertebereiche. Sein Unbehagen gegenüber der logizistischen Neigung, eigentlich Disparates unter ein und dieselbe Kategorie zu zwängen und mit einem Variablentyp anzudeuten, bringt er in einem Brief an Quine zum Ausdruck: «I feel somewhat uneasy when entities like Socrates, kindness, & 7 are grouped together as ‹objects›. Frege did so, and it was his undoing. You can, of course, avoid contradictions by suitable restrictions. But the question is whether the contradictions are not symptoms for a fundamental unsoundness».[164]

Eine vergleichsweise ausführliche Besprechung technischer Aspekte, die mit der Begrenzung von Variablen einhergehen, findet sich bei John Barkley Rosser, einem Schüler Churchs. Rosser weist darauf hin, dass Variablen in mathematischen Texten fast im-

[162] Hilbert und Ackermann (1938, S. 47).
[163] Frege (1903, S. 76-77).
[164] Creath (1991, S. 406).

mer mit einer expliziten oder impliziten Begrenzung durch einen Begriff versehen sind, weil dies vieles verkürze und zudem das Verständnis vereinfache. Seinen Formalismus ergänzt er deshalb um eine einfache Übersetzungskonvention zwecks Begrenzung gebundener Variablen bzw. der sie bindenden Quantoren. Im Anschluss daran zeigt er, dass die Wahrheit früherer Lehrsätze im Wesentlichen erhalten bleibt.[165] Damit erledigen sich Freges Einwände gegen den Gebrauch begrenzter Variablen bei der Formalisierung mathematischer Theorien.

Am Rande sei noch erwähnt, dass Logiken höherer Stufe als erststufige Logik mit mehrsortigen Variablen aufgefasst werden können. Diese Ähnlichkeit der mehrsortigen Prädikatenlogik mit höherstufigen Systemen hat sich für das Studium der letzteren als theoretisch wertvoll erwiesen.[166] In neuerer Zeit lässt sich ausserdem an der Schnittstelle mit der Computerwissenschaft ein gesteigertes Interesse für mehrsortige Logiken ausmachen.[167]

1.3.3.4. Die grundlegende Gebrauchsweise von Variablen

In ihrer Semantik sind Freges Buchstaben geprägt von Unbestimmtheit. Sie deuten alles an, was sie – logisch gesehen – nur andeuten können: nicht irgendetwas Bestimmtes, das gleichwohl unbestimmt geblieben oder beliebig gewählt wäre, sondern ohne Unterschied alle Elemente einer unüberschaubaren Gesamtheit, deren Grenzen logische Schranken sind. Die Bezugnahme auf das, was ein Buchstabe andeutet, muss ohne begriffliche Bestimmung auskommen. Folglich sind dem, was an die Stelle eines Buchstabens treten darf, keine Grenzen gesetzt, solange die eingesetzten Namen etwas bezeichnen, das zur passenden Gesamtheit gehört, d. h. durch den zu ersetzenden Buchstaben unbestimmt angedeutet wird. Das war Freges erster Punkt zum Buchstabengebrauch; der zweite, wonach dieser Gebrauch hauptsächlich dem Ausdruck von Allgemeinheit diene, baut auf dem ersten auf (siehe 1.3.3.2).

Die Buchstaben selbst haben, wie wir sahen, weder Sinn noch Bedeutung. Wird in einem vollständigen Satz etwa ein Eigenname überall, wo er vorkommt, durch einen Gegenstandsbuchstaben ersetzt, ergibt sich daher kein sinnvolles Ganzes, sondern, wie wir heute sagen würden, ein offener Satz. Um die Lücke wieder zu schliessen und sinnvolle

[165] Vgl. Rosser (1953, S. 140-149). Ein weiterer klassischer Vorschlag, mit mehrsortigen Variablen zu arbeiten, findet sich in Wang (1952). Eine logikgeschichtlich informierte Besprechung gibt Parry (1966).

[166] Vgl. dazu Shapiro (1991, S. 13-14, 74-76).

[167] Für eine Anwendung in der Berechenbarkeitstheorie, vgl. Tucker und Zucker (2001). Für Angaben zu weiterführender Literatur, vgl. Harrison (2009, S. 229).

Sätze zu erhalten, können für den Buchstaben beliebige Eigennamen eingesetzt werden. So lässt sich zum Beispiel aus „Wenn x eine algebraische Zahl ist, ist x berechenbar" durch das Einsetzen von Eigennamen für Zahlen eine endlose Reihe wahrer Sätze gewinnen. Mit einem offenen Satz kann demnach eine schematische – mitunter sagt man auch: substitutionelle – Allgemeinheit zum Ausdruck gebracht werden, die allerdings nur so weit reicht, wie die Gesamtheit der vorhandenen Namen. Wofür wir keine Namen haben, lässt sich freilich nichts in das Schema einsetzen.

Nicht alles, was Gegenstand oder Funktion ist, muss indes einen Namen tatsächlich besitzen; Gegenstand ist, was durch einen Eigennamen, Funktion, was durch einen Funktionsnamen bezeichnet werden *kann*. In der Mathematik wird unter anderem mit Begriffen gearbeitet, deren Extension zu mächtig ist, als dass jedem Element darin auch nur prinzipiell ein Name gegeben werden könnte.[168] Um Verhältnisse zwischen Begriffen mit überabzählbaren Extensionen abzubilden, reicht die schematische oder substitutionelle Quantifikation folglich nicht aus. Es braucht dafür eine andere Art der Verallgemeinerung, ohne Umwege über tatsächlich vorhandene Namen für Gegenstände und Funktionen. Quine bezeichnet diese Art der Quantifikation als referenzielle oder gegenständliche (‹objectual›), wohingegen Dummett sie als ontische qualifiziert, was sich besser mit Freges Ansichten über die Semantik von Variablen verträgt.[169]

Bei Frege erfolgt die Verallgemeinerung mit Hilfe deutscher Buchstaben und eines ihnen vorgeschalteten und sie bindenden Allquantors.[170] Durch die Bindung an den Quantor ist nicht nur der syntaktische Bereich des Buchstabens deutlich abgegrenzt, sondern es wird dem unvollständigen Inhalt, den das ungesättigte Begriffs- oder Beziehungswort (der offene Satz) ausdrückt, grösstmögliche Allgemeinheit verliehen. Dies ist nur deshalb möglich, weil die deutschen Buchstaben ebensowenig wie die lateinischen einen bestimmten Sinn ausdrücken. Sie deuten Gegenstände oder Funktionen unbestimmt an, drücken jedoch keinen der unzähligen Gedankenbausteine aus, die mit den Namen für diese Gegenstände oder Funktionen verbunden sind. Während der lateinische Buchstabe (wenn er schematisch gebraucht wird[171]) den ganzen Ausdruck, in dem er vorkommt,

[168] Sofern von Sprachen mit überabzählbarem Alphabet abgesehen wird, vgl. dazu Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 210, 226 f.).

[169] Vgl. Quine (1980, S. 167), Quine (1976c, S. 272); Dummett (1981, S. 519).

[170] Dafür, dass sich der Allquantor in Freges *Grundgesetzen* nicht als Ausdruck einer substitutionellen Quantifikation auffassen lässt, vgl. Stevenson (1973), Heck (2012, S. 52-53, 56-59). Womöglich ist es dem Verständnis Freges jedoch abträglich, die Unterscheidung zwischen ontischer und substitutioneller Quantifikation auf seine Auffassung des Allquantors anwenden zu wollen. Vgl. dazu Dummett (1981, S. 521-524).

[171] Wenn ich nicht falsch liege, gebraucht Frege die lateinischen Buchstaben sowohl schematisch als auch auf dieselbe Weise wie deutsche, wobei ihr syntaktischer Bereich über den ganzen Ausdruck reichen

bedeutungs- und sinnlos werden lässt, drückt hingegen ein geschlossener Satz der Form ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$‘ einen Gedanken aus. Und dieser Gedanke wird falsch sein, sobald ein Gegenstand existiert, der nicht unter den Begriff ‚$F\xi \rightarrow G\xi$‘ fällt, ungeachtet des Umstands, ob es einen Namen für diesen Gegenstand gibt oder nicht. Anders gesagt, ist ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$‘ genau dann wahr, wenn die Extension von ‚$F\xi$‘ in derjenigen von ‚$G\xi$‘ enthalten ist. Nur wenn die gebundene Variable auf diese Weise aufgefasst wird – d. h. als beliebig viele Gegenstände ungeachtet ihrer vorhandenen oder nicht vorhandenen Namen andeutend –, kann mit ihrer Hilfe ein allgemeiner Gedanke wie „Jede nicht berechenbare Zahl ist transzendent“ ausgedrückt werden. Die nicht berechenbaren Zahlen sind nämlich zu zahlreich, als dass es Namen für sie alle geben könnte.

Wenn Frege richtig liegt, ist das semantische Wesen von Variablen darauf ausgerichtet, allgemeine Gedanken auszudrücken. Der Dienst, den Variablen hauptsächlich leisten, ist es demnach, einem Ausdruck Allgemeinheit des Inhalts zu verleihen. Auf paradigmatische Weise leisten dies die deutschen Buchstaben, also die an einen Allquantor gebundenen Variablen, auf deren Gebrauchsweise sich die anderen Buchstabenarten zurückführen lassen. Nehmen wir zuerst Freges freie Variablen, die lateinischen Buchstaben. Obwohl sie an keinen Operator gebunden sind, besitzen sie gleichwohl einen abgegrenzten syntaktischen Bereich. In der Regel ist dieser durch den Urteilsstrich angezeigt, sodass die ganze Formel umfasst wird, worin der lateinische Buchstabe vorkommt.[172] Ein Satz, der einen lateinischen Buchstaben enthält (‚$\vdash \Phi(x)$‘), kann nach den *Grundgesetzen* immer in einen Satz umgewandelt werden, worin der lateinische Buchstabe überall durch einen deutschen ersetzt wurde. Der Buchstabe ist dann an einen Allquantor gebunden, dessen Bereich den gesamten ursprünglichen Satz umfasst (‚$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, \Phi(\mathfrak{a})$‘).[173] Der Gebrauch der kleinen griechischen Vokalbuchstaben, um den Ausdruck für Wertverläufe zu bilden, ist ebenfalls auf den Gebrauch deutscher Buchstaben zurückführbar. Das fünfte Axiom der *Grundgesetze*, das bekanntlich Russells Widerspruch verursacht, besagt, dass sich eine Wertverlaufsgleichheit (‚$\acute{\varepsilon}f(\varepsilon) = \acute{\alpha}g(\alpha)$‘) immer in einen Satz umwandeln lässt, der die Allgemeinheit einer Gleichung ausdrückt (‚$-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\, f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$‘).[174] So gesehen erscheint die Gebrauchsweise deutscher Buchstaben als grundlegend.

soll, worin sie vorkommen. Siehe dazu Anm. 21. Vielleicht aber hat Dummett recht und es lässt sich in Bezug auf Freges Buchstabengebrauch ohnehin nicht klar zwischen einem schematischen oder syntaktischen und einem ontischen oder semantischen Gebrauch unterscheiden. Vgl. dazu Dummett (1981, S. 525).

[172] Vgl. allerdings die Hinweise in Anm. 171 und 21.

[173] Vgl. Frege (1893, S. 32).

[174] Vgl. Frege (1893, S. 14, 36).

Frege glaubt nun, auch jene Gebrauchsweisen, auf die man in den halbformalen Kontexten der Mathematik trifft, mit Hilfe deutscher Buchstaben abbilden zu können. In einer nachgelassenen Schrift über Logik in der Mathematik zeigt er, wie Gleichungen mitsamt ihren Lösungen in die Form verallgemeinerter Konditionale zu bringen sind. Zum Beispiel entspreche der Gleichung ‹$x^2 - 4 = 0$› und ihrer Lösung der Satz ‹Wenn $x^2-4=0$ ist, so ist $x = 2$ oder es ist $x = -2$›, mithin ein Satz der Form: ‚$\forall x(Gx \rightarrow Lx)$', wobei ‚$Gx$' die Ausgangsgleichung in einer Unbekannten und ‚Lx' die logische Summe der Lösungsgleichungen vertritt.[175] In diesem Fall ist der Satz tatsächlich wahr, wenn im Konsequenz beide richtigen Lösungen disjunktiv zusammengefasst stehen, und falsch, wenn nur eine der beiden oder unrichtige Lösungen dort stehen. Um jedoch den Fall abzudecken, in dem für ‚Gx' ein System von Gleichungen eingesetzt wird, das keine Lösung besitzt, muss das Konditional zu einem Bikonditional ergänzt werden. Denn wird für ‚Gx' im Antezedens ein leerer Begriff eingesetzt, ist das Konditional immer wahr, egal was im Konsequens an die Stelle von ‚Lx' tritt. Einem Gleichungssystem in einer Unbekannten und seinen Lösungen entspricht folglich ein Satz der Form ‚$\forall x(Gx \leftrightarrow Lx)$', wobei ‚$Gx$' für das logische Produkt der Ausgangsgleichungen steht und ‚Lx' für die logische Summe aller Lösungsgleichungen, sofern das System Lösungen besitzt, und sonst für die Ungleichung ‚$x \neq x$'.

Doch selbst in ihrer verbesserten Version vermag Freges Zurückführung nicht zu überzeugen. Wesentliche Teile des Beitrags, den Buchstaben an das Lösen von Gleichungen leisten, werden ausgeblendet. Die verschiedenen Umformungsschritte, die es braucht, um zur Lösung zu gelangen, sind im Satz nicht abgebildet, sodass unklar bleibt, wie die Buchstaben dabei helfen, Wahrheiten nicht nur auszudrücken, sondern auch ausfindig zu machen. Der Buchstaben für die Unbekannten bedient man sich ja nicht bloss, um Gleichungen im logischen Verhältnis zu ihren Lösungen darzustellen; man verwendet sie, um diese Lösungen zu bestimmen, zumal sie zu Beginn unbekannt sind.

Frege hätte erwidern können, dass dem Findungsprozess insgesamt ein komplexeres Satzgefüge entspreche, über das gleichwohl ein Allquantor gebietet. Und deshalb sei selbst der heuristische Beitrag, den die in der Algebra typischerweise frei auftretenden Buchstaben zu leisten vermögen, letztlich auf den Gebrauch gebundener Variablen zurückzuführen. Angewandt auf unser Gleichungssystem in 1.3.1.2, käme das folgende Satzgefüge heraus:

[175] Frege (1983, S. 255).

$$
\begin{array}{rcl}
\forall x \forall y \Big(\big(x = y + \frac{1}{2}y \;\wedge\; (x - \frac{1}{6}x) + y = 72 & \leftrightarrow & x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) \big) \\
& \bigwedge & \\
\big(x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) & \leftrightarrow & x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) \;\wedge\; \frac{3}{2}y = \frac{6}{5}(72 - y) \big) \\
& \bigwedge & \\
\big(x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) \;\wedge\; \frac{3}{2}y = \frac{6}{5}(72 - y) & \leftrightarrow & x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) \;\wedge\; y = 32 \big) \\
& \bigwedge & \\
\big(x = \frac{3}{2}y \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - y) \;\wedge\; y = 32 & \leftrightarrow & x = \frac{3}{2} \cdot 32 \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - 32) \;\wedge\; y = 32 \big) \\
& \bigwedge & \\
\big(x = \frac{3}{2} \cdot 32 \;\wedge\; x = \frac{6}{5}(72 - 32) \;\wedge\; y = 32 & \leftrightarrow & x = 48 \;\wedge\; y = 32 \big) \Big)
\end{array}
$$

Aus diesem Satzgefüge folgt auch jener allgemeine Satz, der gemäss Frege dem Gleichungssystem und seinen Lösungen entspricht, d. i.:

$$\forall x \forall y \Big(x = y + \frac{1}{2}y \;\wedge\; (x - \frac{1}{6}x) + y = 72 \quad \leftrightarrow \quad x = 48 \;\wedge\; y = 32 \Big)$$

Deutlicher als an diesem Satz jedoch wird am inneren Aufbau des ganzen Gefüges – an der quantorenfreien Matrix – sichtbar, worin der eigentliche Beitrag der Buchstaben besteht: Sie zeigen durch alle äquivalenzerhaltenden Umformungen hindurch die Verwandtschaftsverhältnisse zwischen den Argumentstellen der beteiligten Begriffe und Beziehungen an. Am Ende der Umformungsreihe markieren sie die Argumentstellen von zwei konjunktiv zu einer Beziehung zusammengefassten Begriffen (‚$x = 48 \wedge y = 32$‘), die ihre Extensionen und damit die Lösung des Gleichungssystems gleichsam auf der Stirn tragen. Den wesentlichen Teil ihrer Arbeit leisten die Buchstaben mithin innerhalb der Quantorbereiche – in der Matrix –, wo sie auf dieselbe Weise gebraucht werden, wie wenn der Matrix keine Quantoren vorangestellt wären.

Die Annahme, wonach die Buchstaben irgendwelche Gegenstände unbestimmt andeuten, braucht es nicht, um ihre Gebrauchsweise zu erklären und zu verstehen, inwiefern sie dem, was das Satzgefüge insgesamt ausdrückt, Allgemeinheit verleihen. Im Gegenteil, die Aufmerksamkeit wird dadurch in die falsche Richtung auf die Gesamtheit der angedeuteten Gegenstände gelenkt – als ob es beim Lösen von Gleichungen um Gegenstände ginge und nicht viel eher um Begriffe und Beziehungen. Ein Gleichungssystem in k Unbekannten ist logisch gesehen eine k-stellige Beziehung, deren Extension der Lösungsmenge des Systems entspricht. Dass die Lösungsmenge wie in unserem und auch in Freges Beispiel nur ein Element oder ein paar wenige umfasst, stellt einen Spezialfall dar. In anderen Fällen lässt sich mit Hilfe desselben Buchstabengebrauchs nachweisen, dass die Beziehung, die einem Gleichungssystem in einer Unbekannten entspricht, mit dem Begriff ‚$x \neq x$' oder dem Begriff ‚$x = x$' extensionsgleich ist: ersteres, das haben wir gesehen, wenn das System keine Lösung besitzt (siehe 1.3.1.2); zweiteres, das haben wir ebenfalls gesehen, wenn in Kleenes Worten eine ‹identical equation› vorliegt (siehe 1.3.3.1). Die Gesamtheit der Werte, die die Unbekannten jeweils annehmen können, sind, wenn nicht anders angegeben, durch die beteiligten Begriffe und Beziehungen, insbesondere durch die arithmetischen Operationen, vorgegeben. Um zu vermeiden, dass, wie Frege befürchtet, künstliche Grenzen den Gang der Untersuchung stören, reicht es, den Wertebereich grosszügig zu wählen, sodass etwa alle komplexen Zahlen darin Platz finden. Es wäre allerdings über das Ziel hinausgeschossen, dafür den Mond sowie alle weiteren Gegenstände zu bemühen.

Frege liegt nicht falsch, wenn er festhält, dass der Gebrauch von Buchstaben in der Mathematik hauptsächlich dazu diene, die Allgemeinheit von Gedanken zum Ausdruck zu bringen. Denn Buchstaben sind dabei behilflich, Aussagen über extensionale Verhältnisse zwischen Begriffen und Relationen nicht nur zu bilden, sondern auch zu beweisen oder zu widerlegen. Allgemeinheit wird aber nicht durch irgendeine semantische Kraft oder eine besondere Unbestimmtheit gestiftet, die den Gegenstandsbuchstaben innewohnt, sondern durch die Anwendungskriterien der Begriffs- und Relationszeichen. Streng genommen sind die Buchstaben, die ihre Argumentstellen kenntlich machen, ja nicht einmal Teil dieser Zeichen, die wie ihre Bedeutungen ungesättigt und deshalb schwer einzufangen sind (siehe das Ende von 1.2.3.2). Die Buchstaben liefern lediglich eine ‹Gebrauchsanweisung› für die Funktionsnamen, wie es Frege in der nachgelassenen Schrift über Logik in der Mathematik sagt.[176] Sie markieren die logischen Orte, in die Argumente eintreten können, wofür sie weder die Argumente selbst noch deren Zeichen irgendwie andeuten müssen. Durch das wiederholte Vorkommen desselben Buchstabens wird nicht die Identität eines Gegenstands angezeigt, sondern die Verwandtschaft der verschiedenen Stellen, mithin, dass bei einer Instanziierung dasselbe Argument einzusetzen ist. Das gilt auch für den Fall, dass die Buchstaben im Bereich eines sie bindenden Allquantors vorkommen, denn als solche sind sie Bestandteil eines Begriffszeichens zweiter Stufe, das dazu dient, Aussagen über Begriffe des passenden Typs zu treffen.[177]

[176] Frege (1983, S. 259).
[177] Vgl. Frege (1893, S. 38).

Vom allgemeineren Standpunkt aus, den die Theorie der *generalised quantifiers* bietet, wird die Rolle gebundener Variablen beim Quantifizieren in einem Satz der Form ‚$QxFxa_1...a_n$' noch klarer. Die Wahl des Quantors Q definiert für eine gegebene Menge von Gegenständen M eine Menge Q_M von Teilmengen dieses Gegenstandsbereichs. Der Allquantor zum Beispiel schliesst alle echten Teilmengen aus und behält nur M selbst, d. h. $\forall_M = \{M\}$. Der Existenzquantor dagegen schliesst nur die leere Menge aus, sodass $\exists_M = \{A \subseteq M \mid A \neq \emptyset\}$. Der Gegenstandsbuchstabe ‚x' wiederum, der durch den jeweiligen Quantor gebunden ist, dient lediglich dazu, die Argumentstelle im Begriffszeichen ‚$F\xi$' zu markieren, in Bezug auf welche diejenige Extension herausgegriffen wird, von der ‚$QxFxa_1...a_n$' behauptet, sie sei ein Element von Q_M. Entsprechend ist ‚$\forall xFxa_1...a_n$' genau dann wahr, wenn $\{x \in M \mid Fxa_1...a_n\} = M$, und ‚$\exists xFxa_1...a_n$' genau dann, wenn $\{x \in M \mid Fxa_1...a_n\} \neq \emptyset$.[178]

Abschliessend lässt sich also festhalten, dass – wenngleich die Charakterisierung der Semantik von Variablen als unbestimmtes Andeuten unnötig ist und in die Irre führen kann – bereits bei Frege alle nötigen Elemente vorliegen, die es für eine zufriedenstellende Erklärung des mathematischen Buchstabengebrauchs braucht.

1.3.3.5. Prädikatenlogik ohne gebundene Variablen

Kaum ein Logiker nach Frege hat sich so mannigfach und vertieft mit dem Wesen von Variablen befasst wie Quine. Sein Interesse entsprang nicht immer logischen Fragestellungen. Auch in seinen ausserlogischen Beiträgen nehmen Variablen bekanntlich eine zentrale Rolle ein, wie der berühmte Leitsatz «to be is to be the value of a variable» bezeugt.[179] Dennoch blieb die Variable als ein Werkzeug, das die moderne Logik und die Mathematik in ihren Entwicklungen wesentlich mitgeprägt hat, zeitlebens ein bevorzugter Topos Quines. In *Quiddities*, dem in die Form eines Wörterbuchs gegossenen Destillat seiner philosophischen Lehren, gewährt er ihnen denn auch einen eigenen, aufschlussreichen Eintrag.[180] Des Weiteren sind mehrere späte Aufsätze, die zu Unrecht weniger Beachtung fanden als frühere, der Aufgabe gewidmet, Licht in das nicht leicht zu fassende und immer wieder zu Missverständnissen Anlass gebende Wesen dieses überaus nützlichen Werkzeugs zu bringen.

Seinen Aufsatz ‚The Variable', der auf einen Vortrag von 1972 zurückgeht, lässt Quine mit einem vielleicht etwas feierlich geratenen Bekenntnis beginnen: «The variable *qua*

[178] Vgl. dazu Westerståhl (2007, S. 229-238).
[179] Quine (1961c, S. 15).
[180] Vgl. Quine (1987, S. 236-238).

variable, the variable *an und für sich* and *par excellence*, is the bindable objectual variable».[181] Das Wesen von Variablen wäre demnach in ihrer gebundenen oder immerhin bindbaren Erscheinungsform zu suchen, genauer: in den durch Quantoren gebundenen Individuenvariablen der Prädikatenlogik erster Stufe. Als gegenständlich, ‹objectual›, bezeichnet Quine diese Variablenart aufgrund der semantischen Rolle, die er ihren Exemplaren zuschreibt. Eine gebundene Individuenvariable referiere auf alle ihre Werte, mithin auf jeden Gegenstand im festgelegten Gegenstandsbereich. Neben der ‹designation› durch Eigennamen und der ‹denotation› durch generelle Terme bilde das Annehmen von Werten durch Variablen eine dritte Art der Referenz.[182] Im Gegensatz jedoch zu Eigen- und Gemeinnamen, die dazu dienten, die bezeichneten Gegenstände zu charakterisieren, seien Variablen Vehikel einer reinen Referenz, die in ihrer Bezugnahme auf Gegenstände keinerlei beschreibende oder identifizierende Aufgabe übernimmt. Den anderen, parasitären Arten der Referenz lieferten Variablen und ihre sprachlichen Vorbilder, d. s. Relativpronomen, die Grundlage.[183] Gebundene Individuenvariablen erscheinen daher als das schlechthinnige Mittel, über das sich eine Theorie auf die Welt bezieht, und somit als geeignete Anknüpfungspunkte für ein semantisches Existenzkriterium.

Quine belässt es gleichwohl nicht bei dem anfänglichen Bekenntnis zur prädikatenlogischen Orthodoxie. Im weiteren Verlauf seines Aufsatzes über das Wesen von Variablen erinnert er zwar daran, wie sich verschiedene wichtige Gebrauchsweisen auf die an einen Quantor gebundene Individuenvariable zurückführen lassen. So habe Russell gezeigt, wie das an den Kennzeichnungsoperator gebundene ‚x' in ‚ιxFx' – d. i. das logische Gegenstück zum algebraischen ‚x' für Unbekannte[184] – auf prädikatenlogische Schemata zurückzuführen sei. Das ‚x' der Klassenbildung in ‚$\{x : Fx\}$' wiederum könne als die Kennzeichnung ‚$\iota y\forall x(x \in y \leftrightarrow Fx)$' definiert werden. Und auf ähnliche Weise sei schliesslich auch das ‚x' der Funktionsbildung zu handhaben, das im λ-Kalkül die Argumentstellen abstrahierter Funktionen anzeigt und zu dessen Spezialfällen insbesondere die gebundenen Variablen der Integral- und Differentialrechnung gehören. Vor allem aber weist Quine darauf hin, dass Zurückführungen ebenso in entgegengesetzter Richtung vorgenommen werden können. Anstatt das quantorenlogisch gebundene ‚x' für grundlegend zu nehmen, sei es möglich, vom ‚x' des Klassen- oder λ-Kalküls auszugehen

[181] Quine (1976c, S. 272).
[182] Vgl. Quine (1987, S. 180).
[183] Vgl. Quine (1980, S. 165, 167-168, 172). So klar Quines Standpunkt erscheinen mag, um genauer zu verstehen, wie sich seiner Auffassung nach Variablen auf Gegenstände beziehen, wäre einige exegetische Arbeit nötig. Wie in Hooker (1971) dargelegt wird, ist manches unklarer, als es den Anschein macht.
[184] Vgl. dazu Quine (1987, S. 238).

und Quantifikationen darauf aufbauend zu definieren.[185] So betrachtet, nimmt sich die prädikatenlogische Variable nurmehr als eine Gebrauchsweise neben anderen aus.

Aus der Perspektive, die Quine uns bietet, wird nun sichtbar, was den mannigfaltigen Verwendungen gebundener Variablen gemeinsam ist – worin ihre grundlegende Gebrauchsweise besteht und was gleichsam Beiwerk ist:[186]

> The variable is a device for marking and linking up various positions in a sentence so as to encapsulate, in an adjective phrase, what a sentence says about something. Its business is linking and permuting. This is not just an example of the use of variables; it is the whole story. All use of variables is reducible to their use as the pronouns of ‹such that› clauses.

Im Wesentlichen sind Variablen Relativpronomen, die den graphischen Bedürfnissen der Mathematik angepasst wurden.[187] Sie sind, wie Quine an anderer Stelle sagt, ‹devices for pronominal cross-references›.[188] Ihre hauptsächliche Aufgabe besteht demnach darin, Argumentstellen in Sätzen zu markieren und miteinander zu verknüpfen. Je nach Verteilung der Buchstaben auf die offenen Stellen gehen dabei unterschiedliche Prädikate hervor, auf die in anderen Kontexten wieder Bezug genommen werden kann.[189] So dienen Variablen insbesondere dazu, die Vertauschung oder Gleichsetzung von Argumenten mehrstelliger Prädikate, mithin Übergänge von ‚Fxy' zu ‚Fyx' oder ‚Fxx' abzubilden.[190] Dass Variablen ausserdem zum Zweck der Verallgemeinerung an Quantoren oder zu anderen Zwecken an andere Operatoren gebunden werden, ist ein Gebrauchsumstand, der verwirklicht sein kann oder auch nicht und zur eigentlichen Kernaufgabe von Variablen hinzukommt: «Quantification imports quantity, description imports uniqueness, class abstraction imports classes, and all these matters are additional to the business of the variable».[191]

Davon abgesehen, dass Quine das Referieren auf Gegenstände für einen Bestandteil dieser Kernaufgabe hält, stimmt also seine Analyse des Variablengebrauchs mit den Ergebnissen unserer bisherigen Betrachtungen weitgehend überein. Allerdings hatte sich schon weiter oben (in 1.3.1.3, spätestens in 1.3.3.4) ein möglicher Einwand abgezeichnet, der jetzt auch Quines Versuch betrifft, des Variablenwesens habhaft zu werden. Gegenüber freien Variablen haben gebundene nicht nur den Vorteil, dass ihr syntaktischer Bereich deutlich sichtbar abgegrenzt ist, sondern vor allem, dass er sich auf einen

[185] Vgl. Quine (1976c, S. 274). Für die Rückführung der gebundenen Variablen des λ-Kalküls auf die der Prädikatenlogik und zurück, vgl. Quine (1976a, S. 284-286).
[186] Quine (1987, S. 238).
[187] Vgl. Quine (1980, S. 166-167).
[188] Quine (1982, S. 133).
[189] Vgl. Quine (1987, S. 181).
[190] Vgl. Quine (1976c, S. 282) und Quine (1981a, S. 162).
[191] Quine (1980, S. 169).

echten Teil der Formel, worin die Variable vorkommt, begrenzen lässt. Als notationales Werkzeug besitzt der gebundene Buchstabe daher eine höhere Multiplizität als der freie oder schematische. Ersichtlich wird dies unter anderem an der Möglichkeit, die Negation eines verallgemeinerten Satzes (‚$\neg\forall xFx$') von der Verallgemeinerung eines negierten (‚$\forall x\neg Fx$') zu unterscheiden. Im mehrstelligen Fragment der Prädikatenlogik sorgt die Multiplizität der gebundenen Variablen für eine grosse Mannigfaltigkeit an Quantorenabfolgen, die es erlauben, wahrheitsrelevante Unterschiede adäquat abzubilden – und das, obgleich der Beitrag, den die Variablen innerhalb der quantorenfreien Matrizen leisten, *prima facie* derselbe bleibt. So sind, um lediglich das einfachste Beispiel anzugeben, mit ‚$\exists y\forall xFxy$' und ‚$\forall x\exists yFxy$' verschiedene Wahrheitsbedingungen assoziiert, obwohl ‚x' und ‚y' die Argumentstellen auf gleiche Weise anzeigen und den Quantoren folglich dasselbe komplexe Prädikat als Argument zuführen. Da sich zudem die Art des Quantors, an den die Variablen jeweils gebunden sind, nicht ändert, unterscheidet sich ihr Beitrag von einer Formel zur anderen einzig darin, dass die syntaktischen Bereiche in umgekehrten Inklusionsverhältnissen zueinander stehen: In der ersten Formel ist der Bereich von ‚x' in dem von ‚y' enthalten, während es sich in der zweiten Formel gerade umgekehrt verhält. Mit ihrem ersten Vorkommnis in der Formel scheinen Variablen also selbst daran beteiligt, die Grenzen ihres Bereichs anzuzeigen. Dieser Sachverhalt lässt sich dank Hintikkas Unterscheidung zweier Bereichsarten (siehe 1.2.3.3) genauer fassen: Zusammen mit dem Zeichen ‚$\exists$' oder ‚$\forall$', dem es angehängt ist, hat das erste Vorkommnis einer gebundenen Variablen die Aufgabe, nicht nur den *binding scope*, sondern auch den *priority scope* des Quantors abzustecken. Offenbar leistet die Variable diesen Teil ihrer Arbeit aussen an der Grenze des *binding scopes* und damit ausserhalb der quantorenfreien Matrix. Man könnte daher zu der Ansicht gelangen, das Wirken von Variablen erschöpfe sich – entgegen unseren Ergebnissen – doch nicht im Anzeigen der Verwandtschaftsverhältnisse zwischen Argumentstellen, mithin auch nicht in der reinen Kenntlichmachung logischer Formen.

Der Einwand ist harmlos. Wie sich gleich zeigen wird, lenkt er aber die Betrachtung auf ein wichtiges Unterfangen Quines, das er nach mehreren Anläufen in seinen letzten Veröffentlichungen zu einem gewissen Abschluss gebracht hat. Beim Übergang von ‚$\exists y\forall xFxy$' zu ‚$\forall x\exists yFxy$' werden nicht nur die Quantoren vertauscht, sondern auch die Abfolge der Variablen im Präfix ändert sich, was die Verschiebung der Bereiche verursacht. Da ‚$\forall x\exists yFxy$' äquivalent ist mit ‚$\forall y\exists xFyx$', wäre es allerdings ein Leichtes, die Bereichsverschiebung zu vermeiden und die Bürde des Differenzierens dafür den Variablenvorkommnissen innerhalb der quantorenfreien Matrix zu überlassen. Ohne die

Ausdruckskraft der Prädikatenlogik zu vermindern, könnte man sich sogar auf eine bestimmte Variablenabfolge festlegen und fordern, dass der innerste (am weitesten rechts liegende) Quantor einer Formel immer ‚x' bindet, der nächste links davon immer ‚y' etc.[192] Das erste Vorkommnis einer gebundenen Variablen – jenes, das direkt auf ‚$\exists$' oder ‚$\forall$' folgt – würde durch eine solche Festlegung überflüssig. Man könnte es folglich streichen und der Formel ‚$\exists\forall Fxy$' die Formel ‚$\forall\exists Fyx$' gegenüberstellen. Damit wäre nicht nur der Differenz zwischen ‚$\exists y\forall xFxy$' und ‚$\forall x\exists yFxy$' Genüge getan, es würde auch klar, wo die Variable ihre unentbehrliche Arbeit verrichtet: an den Argumentstellen von Prädikaten.

So unentbehrlich die Dienste der gebundenen Variablen sein mögen, als blosses Hilfsmittel zur Darstellung logischer Formen ist sie selbst nicht unersetzlich. Quine hat gezeigt, wie ihr Gebrauch durch eine Algebraisierung der üblichen Ausdrucksweisen eliminiert werden kann. Das Ergebnis liegt in der Form seiner *predicate-functor logic* vor. Es handelt sich dabei um eine algebraische Spielart der Prädikatenlogik erster Stufe, die den gewohnten Systemen ebenbürtig ist, obwohl sie ohne gebundene Variablen auskommt.[193] Jeder gewöhnliche prädikatenlogische Satz hat seine variablenfreie Entsprechung in Quines Sprache der Prädikatsfunktoren, und umgekehrt lässt sich jeder Ausdruck dieser Sprache in einen gewöhnlichen prädikatenlogischen übersetzen.[194] Trotz dieser Möglichkeit war Quine gleichwohl nicht daran interessiert, die uns so vertraute Quantorensprache durch ihr variablenfreies Gegenstück zu ersetzen. Der *predicate-functor logic* spricht er lediglich theoretischen Nutzen zu: unser Verständnis von Variablen zu vertiefen.[195] Um einen ersten Eindruck davon zu erhalten, wie es die Logik der Prädikatsfunktoren vermag, das Variablenwesen zu beleuchten, reicht es, einige simple Beispiel zu betrachten.

Die Grundzeichen der Sprache, die Quine einführt, umfassen – neben endlich vielen Prädikatsbuchstaben ‚F^n', ‚G^n', etc. für jede Arität $n \geq 0$ – sieben Prädikatsfunktoren.[196] Prädikatsfunktoren sind Zeichen, die angehängt an ein Prädikat oder an

---

[192] Diese Möglichkeit ist ein weiterer Hinweis, dass es sich im Hinblick auf die Zwecke dieser Untersuchung lohnen könnte, die beiden Bereichsarten, die Hintikka unterscheidet – *binding* und *priority scope* – klar auseinanderzuhalten und den Gebrauch gebundener Variablen von letzterem abzutrennen. Siehe dazu auch Anm. 85.

[193] Vgl. Quine (1976a), Quine (1981c), Quine (1981b) und Quine (1982, S. 283-288). Ein früherer Entwurf der *predicate-functor logic* wurde in Quine (1995b) skizziert.

[194] Für die ausführliche Darstellung der Übersetzungsalgorithmen in beide Richtungen, vgl. Quine (1976a, S. 301-303); für eine kürzere Darstellung in Richtung *predicate-functor logic*, vgl. Quine (1982, S. 287).

[195] Vgl. Quine (1976a, S. 305) und ausführlicher dazu Quine (1995b, S. 229).

[196] Im Folgenden wird das System verwendet, das in Quine (1982, S. 283-288) dargelegt ist und sieben Grundfunktoren zählt (siehe unten). In Quine (1981b) wird gezeigt, wie diese sieben auf nur vier reduziert werden können. Dafür werden die beiden Funktoren für das Vertauschen von Argumentstel-

einen Satz ein Prädikat oder einen Satz ergeben.[197] Ihre Aufgaben entsprechen denen der prädikatenlogischen Junktoren, Quantoren und Variablen. Auf der einen Seite sind kombinatorische Funktoren vorgesehen, die die Kernaufgabe der gebundenen Variablen übernehmen. Dazu gehören zwei Funktoren für das Vertauschen von Argumentstellen: ‚Inv' und ‚inv' (‹major› und ‹minor inversion›); ein Funktor für das Gleichsetzen von Argumentstellen: ‚Ref' (‹reflection›); und ein Funktor für das Hinzufügen von Argumentstellen: ‚Pad' (‹padding›). Für ein zweistelliges Prädikat ‚Fxy' lässt sich mit Hilfe von ‚Inv' oder ‚inv' das konverse ‚Fyx', mit Hilfe von ‚Ref' das einstellige ‚Fxx' und mit Hilfe von ‚Pad' ein entsprechendes dreistelliges Prädikat bilden:[198]

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Inv}\, F^2)xy &\equiv F^2yx \\
(\mathrm{Ref}\, F^2)x &\equiv F^2xx \\
(\mathrm{Pad}\, F^2)vxy &\equiv F^2xy
\end{aligned}
$$

Ähnlich wie die Buchstaben ‚ξ' und ‚ζ' bei Frege sind ‚x' und ‚y' keine echten Bestandteile des Notationssystems. Sie dienen lediglich der Erläuterung, indem sie die Übersetzungsregeln in die übliche Prädikatenlogik ersichtlich machen und für uns, die wir an Quantoren und gebundene Variablen gewohnt sind, die Wirkung der Funktoren veranschaulichen. Gleiches gilt für den Funktor ‚$\equiv$', der hier die Extensionsgleichheit der Prädikate bedeuten soll. Um näher an der gewohnten Schreibweise zu bleiben, könnte man etwa die dritte Äquivalenz auch so ausdrücken: $\forall v \forall x \forall y((\mathrm{Pad}\, F)vxy \leftrightarrow Fxy)$.

Quines System kommt ohne Variablen bindende Quantoren und, wie er betont, auch ganz ohne Variablen aus. Deshalb braucht es auf der anderen Seite, neben den kombinatorischen, zudem alethische Funktoren, die die Arbeit der Quantoren und Junktoren übernehmen.[199] Dieser Seite gehören an: ein Funktor für die Negation von Prädikaten, in der Tradition der Booleschen Algebra als Überstrich angebracht; ein Funktor für die Konjunktion zweier Prädikate, dargestellt durch die blosse Konkatenation der Prädika-

len, ‚Inv' und ‚inv', durch einen einzigen, ‚Perm', ersetzt. Negation, Konjunktion und Quantifikation werden alle zusammen in den Divergenzfunktor ‚$\|$' gepackt. Das ältere System, das in Quine (1976a) dargelegt ist, zählt fünf Grundfunktoren und ein zweistelliges Identitätsprädikat anstelle von ‚Ref'. Damit ist das System in Quine (1976a) ausdrucksstärker als das in Quine (1981b), da es wechselseitige Übersetzbarkeit zur Prädikatenlogik mit Identität gewährleistet, wohingegen das spätere nur der Prädikatenlogik ohne Identität entspricht. Vgl. dazu Quine (1981b, S. 650).

[197] Vgl. Quine (1982, S. 129) und Quine (1976a, S. 300).

[198] Angewandt auf zweistellige Prädikate haben ‚Inv' und ‚inv' dieselbe Wirkung. Erst ab einer Arität von 3 unterscheiden sich die beiden Funktoren: Während ‚inv' die ersten beiden Argumentstellen vertauscht, verschiebt ‚Inv' die erste an die letzte Stelle.

[199] Für die Unterscheidung von kombinatorischen und alethischen Funktoren, vgl. Quine (1981b, S. 650).

te; und ein Funktor ‚$\exists$' für den Existenzquantor, der, ohne Variablen zu binden, direkt vor das Prädikat gesetzt wird. Es bestehen folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \overline{F}^2xy &\equiv \neg F^2xy \\ (F^2G^2)xy &\equiv F^2xy \wedge G^2xy \\ (\exists F^2)y &\equiv \exists x F^2xy \end{aligned}$$

Damit ist der neue Werkzeugkasten vollständig ausgerüstet, um jeden prädikatenlogischen Satz variablenfrei auszudrücken. Wie im Einzelnen vorzugehen ist, um aus der gewohnten Notation in die Funktorenschreibweise zu übersetzen, lässt sich an den beiden obigen Beispielsätzen ‚$\exists y \forall x Fxy$' und ‚$\forall x \exists y Fxy$' gut darlegen.

Zuerst gilt es, die Allquantoren nach den gängigen Regeln durch Existenzquantoren und Negationen zu ersetzen sowie die Arität der Prädikatsbuchstaben hinzuzufügen: aus ‚$\exists y \forall x Fxy$' wird ‚$\exists y \neg \exists x \neg F^2xy$' und aus ‚$\forall x \exists y Fxy$' wird ‚$\neg \exists x \neg \exists y F^2xy$'. Da in der ersten Formel auf das innere Negationszeichen unmittelbar der Prädikatsbuchstabe ‚F^2' folgt, ist dieser durch sein Komplement zu ersetzen, sodass sich ‚$\exists y \neg \exists x (\overline{F}^2)xy$' ergibt. Im nächsten Schritt wird der innere Existenzquantor durch den entsprechenden Funktor ersetzt, wobei die erste Variable wegfällt. Daraus geht ‚$\exists y \neg (\exists \overline{F}^2)y$' hervor. Nachdem beide Schritte in derselben Reihenfolge wiederholt wurden, resultiert schliesslich die variablenfreie Formel ‚$\exists\overline{\exists\overline{F}^2}$'. Beim Übersetzen der zweiten Formel, ‚$\neg \exists x \neg \exists y F^2xy$', bedarf es zu Beginn eines anderen Vorgehens, da der innere Existenzquantor nicht den Buchstaben bindet, der an erster Argumentstelle vorkommt. Es müssen also zuerst die Argumentstellen vertauscht werden, was durch die Anwendung des entsprechenden Funktors erreicht wird: ‚$\neg \exists x \neg \exists y (\mathrm{Inv}F^2)yx$'. Von da aus erfolgt die Umformung analog zur vorherigen. Am Ende steht ‚$\overline{\exists\overline{\exists \mathrm{Inv}F^2}}$'.

Gegenüber der üblichen Schreibweise haben die variablenfreien Formeln ‚$\exists\overline{\exists\overline{F}^2}$' und ‚$\overline{\exists\overline{\exists \mathrm{Inv}F^2}}$' den Vorteil, dass an ihnen die zwei Unterschiede, die für verschiedene Wahrheitsbedingungen sorgen, klar und deutlich erkennbar sind. Der erste Unterschied ist an den Bereichen der Negationen abzulesen und betrifft den *priority scope*. Der zweite, markiert durch die Präsenz des Funktors ‚Inv', betrifft dagegen die Reihenfolge der Argumentstellen und damit den *binding scope* dieser Stellen, die hier freilich nicht mehr mit Buchstaben besetzt werden müssen. Dementsprechend erhält die Formel ‚$\exists x \forall y Fyx$' mit ‚$\exists\overline{\exists\overline{F}^2}$' dieselbe Übersetzung wie ihre Schreibvariante ‚$\exists y \forall x Fxy$'. Gleiches gilt für die Schreibvarianten ‚$\forall y \exists x Fyx$' und ‚$\forall x \exists y Fxy$', die beide zu ‚$\overline{\exists\overline{\exists \mathrm{Inv}F^2}}$' werden. Durch die geschickte Wahl der Grundfunktoren gelingt es Quine also, den unentbehrlichen Teil der

Arbeit, der normalerweise den gebundenen Variablen zufällt, von allem anderen abzusondern. In den Spuren, die Variablen bei ihrer schrittweisen Eliminierung hinterlassen, offenbart sich ihr Wesen.

1.3.3.6. Weitere Bemerkungen

Bevor das Ende dieses Unterkapitels erreicht ist, gilt es, zwei letzte Punkte zu besprechen. Der erste betrifft Quines Doktrin von der reinen Referenz gebundener Variablen. Wie wir sahen, betrachtet er Buchstaben, die als Variablen gebraucht werden, als das Referenzmittel schlechthin. Alle anderen Wege, auf Gegenstände zu referieren, führten letztlich über eine von jedem deskriptiven Gehalt befreite Bezugnahme durch solche Buchstaben. Variablen sind gewissermassen die Fühler, mit denen eine wahre Theorie die Welt unmittelbar berührt. So gesehen ist es nur folgerichtig, das Existenzkriterium an ihnen festzumachen: Existieren heisst Wert einer Variablen sein. Oder weniger elliptisch ausgedrückt: In ihre prädikatenlogische Form gebracht, verpflichtet eine Theorie, die Existenz genau derjenigen Gegenstände anzunehmen, die in den Wertebereich der quantifizierten Variablen fallen.[200]

Auf den ersten Blick scheint sich Quine mit der Entwicklung einer variablenfreien Logik daher selbst eine Falle gelegt zu haben. Da die Sprache der Prädikatsfunktoren keine Variablen kennt, die durch erststufige Quantoren gebunden werden könnten, kann es mit ihren Formeln auch keine *reine* Referenz auf Gegenstände geben. Wenn aber jedes Bezugnehmen auf Gegenstände letztlich auf dem Gebrauch quantifizierter Individuenvariablen beruht, ist nicht zu sehen, wie wir uns mit den Werkzeugen, die eine variablenfreie Sprache zur Verfügung stellt, überhaupt auf die Welt beziehen können. Auch lässt sich das Kriterium für die ontologischen Verpflichtungen einer Theorie nicht anwenden, wenn solche Variablen fehlen.

Quine sieht darin kein Problem für seine Lehren.[201] In verschiedenen Stellungnahmen weist er vielmehr darauf hin, dass ihm die übliche Sprache der Prädikatenlogik mit Quantoren und gebundenen Variablen nicht sakrosankt sei und das Kriterium für ontologische Verpflichtungen an die Ausdrucksform angepasst werden müsse:[202]

[200]Vgl. Quine (1987, S. 228). Für den *locus classicus*, vgl. Quine (1961c).

[201]Dafür, dass Quine womöglich doch ein grösseres Problem erwächst, als er zugesteht, vgl. Collins (2020). Erstaunlicherweise wurde der Ausweg aus der Schwierigkeit, den Quine skizziert, in der Literatur kaum rezipiert. Die Diskussion in Collins (2020, S. 67-73) hat Seltenheitswert.

[202]Quine (1976a, S. 304). Vgl. ausserdem Quine (1961b, S. 104), Quine (1969a, S. 95), Quine (1980, S. 169 f.).

> When a theory is given the usual quantificational form, the things that the theory accepts as existing are indeed the things that it accepts as the values of its variables of quantification. If a theory is given another form, moreover, there is no sense in asking what the theory accepts as existing except as we are in a position to say how to translate the theory into the usual quantificational form. [...]

Da die Logik der Prädikatsfunktoren lückenlos in die gewöhnliche Prädikatenlogik übersetzt werden kann, gibt es für sie ein entsprechendes Existenzkriterium:[203]

> the things that a theory in predicate-functor form accepts as existing are the things that satisfy its predicates; the things that any of its one-place predicates (complements included!) are true of.

Existieren heisst demnach von einem Prädikat wahr oder falsch ausgesagt werden. Wie Quine zugibt, ist dieses zweite Kriterium seinem klassischen insofern vorzuziehen, als es auf Theorien sowohl in ihrer Quantoren- als auch in ihrer Funktorenschreibweise Anwendung findet, wobei es zum gleichen Ergebnis führt. Denn die Gegenstände, die eine Theorie im üblichen prädikatenlogischen Gewand als existierend annimmt, sind genau diejenigen, die ihre Prädikate und deren Komplemente erfüllen.

Wenngleich die Lehre von der reinen Referenz von Variablen abzulehnen ist, fügt sich die zweite Version von Quines berühmtem Kriterium gut in das Bild ein, das sich aus unseren bisherigen Betrachtungen schrittweise ergeben hat. Wo Buchstaben als Variablen gebraucht werden, dienen sie nicht dazu, einen direkten Bezug auf einzelne Gegenstände herzustellen. Allein aus ihrem Gebrauch in Sätzen der Logik und Mathematik ergibt sich noch keine Verpflichtung, die Existenz bestimmter Gegenstände als Bedeutungen der Buchstaben anzunehmen. Man bedient sich ihrer, um über Begriffe und Beziehungen zu sprechen, besonders über das Bestehen oder Nichtbestehen extensionaler Zusammenhänge. Wenn etwas ontologisch verpflichtet, sind es die Prädikate, die für die Begriffe und Beziehungen stehen, von denen die jeweilige Theorie handelt. Daher rührt auch die verbreitete und, wie sich jetzt zeigt, durchaus begründete Praxis, die Wertebereiche von Variablen, die zur Formulierung einer Theorie verwendet werden, auf die Signifikanzbereiche der beteiligten Begriffe und Beziehungen zu begrenzen.

Im zweiten und letzten Punkt, der hier angesprochen werden soll, überwiegen hingegen die Differenzen zu Quine. Neben Buchstaben, die durch Namen für Gegenstände ersetzt werden können, enthalten prädikatenlogische Formeln in ihrer gewöhnlichen Schreibweise auch Prädikatsbuchstaben. Diese Buchstaben können dazu verwendet werden, inhaltliche Prädikate abzukürzen oder im Rahmen von Interpretationen für bestimmte Begriffe oder Beziehungen zu stehen. Ohne Prädikatsbuchstaben, das haben wir

[203] Quine (1976a, S. 304).

gesehen, kommt auch Quines Funktorenlogik nicht aus. Wer die Funktorenlogik gleichwohl für variablenfrei erklärt, legt sich darauf fest, Prädikatsbuchstaben nicht zu den Variablen zu zählen, nicht einmal zu den freien. Nur unter dieser Annahme kann Quine für sich in Anspruch nehmen, gezeigt zu haben, dass und wie sich Variablen aus der Prädikatenlogik erster Stufe eliminieren lassen. Weshalb aber sollen Prädikatsbuchstaben nicht als Variablen gelten können?

In dem bereits erwähnten Aufsatz über das Variablenwesen werden Variablen von einer Reihe verwandter Werkzeuge abgegrenzt. Besonders wichtig ist Quine ihre Unterscheidung von schematischen Buchstaben.[204] Im Gegensatz zu Variablen referierten schematische Buchstaben auf keine Gegenstände als ihre Werte. Sie seien nicht bindbar durch Quantoren und kämen in wahren oder falschen Sätzen nicht vor, sondern ausschliesslich in Schemata (mithin offenen Sätzen).[205] Zwar übernehmen auch freie Variablen schematische Aufgaben, sie lassen sich aber, so Quine, immer durch Quantoren binden.[206] Variablen sind demnach wesentlich bindbar. Wenn sie nicht bereits gebunden auftreten, dann warten sie gleichsam darauf, gebunden zu werden. In der Prädikatenlogik, die gemäss Quinescher Orthodoxie keine höheren Stufen kennt, erbringen die freien Variablen ihre Dienste in den Zwischenstadien logischer Vorgänge: beim Schliessen etwa, der Bildung von Begriffen oder dem Formalisieren von Theorien. Im Ergebnis – d. h. in der Konklusion, dem abstrahierten Begriffszeichen oder dem interpretierten Ausdruck – sind die Variablen entweder an einen Operator gebunden oder, im letzteren Fall, keine Variablen mehr, da durch eine Variablenbelegung in Namen verwandelt.[207]

Quine besteht nun darauf, dass es sich bei den Prädikatsbuchstaben der Quantoren- und Funktorenlogik um schematische Buchstaben handeln muss. Das ‚F' in Ausdrücken wie ‚$\forall xFx$' lässt sich durch inhaltliche Prädikate ersetzen, nicht jedoch durch einen Quantor binden. Liessen wir zu, wie es mitunter geschieht, dass Quantoren auch Prädikatsbuchstaben binden, würden Prädikate wie Namen für Gegenstände behandelt: «To put the predicate letter ‚F' in a quantifier [...] is to treat predicate positions suddenly as name positions, and hence to treat predicates as names of entities of some sort. The quantifier ‚$\exists F$' or ‚$\forall F$' says not that some or all predicates are thus and so, but that some or all entities of the sort named by predicates are thus and so».[208] Jede Theorie, die Sätze wie ‚$\forall F(\forall xFx)$' enthielte, würde sich daher verpflichten, die Existenz von Eigen-

[204]Vgl. Quine (1976c, S. 272-274).
[205]Vgl. Quine (1976c, S. 272).
[206]Vgl. Quine (1986, S. 24).
[207]Vgl. Quine (1976a, S. 284); vgl. auch Quine (1982, S. 134, 145-147, 237-244).
[208]Quine (1986, S. 66 f.).

schaften und Relationen anzunehmen, die neben den Individuen den Bereich bevölkern, worüber quantifiziert wird. Quine bestreitet jedoch, dass solche Entitäten existieren, da sich für sie keine hinreichend klaren Identitätsbedingungen angeben lassen. Getreu seinem anderen Leitsatz über das Existieren – «no entity without identity»[209] – lehnt er folglich die Möglichkeit einer Logik höherer Stufe ab.[210]

Angesichts der Ergebnisse unserer Betrachtungen vermag Quines Argument nicht zu überzeugen. Prädikatsbuchstaben referieren genauso wenig wie Gegenstandsbuchstaben, seien sie nun durch einen Quantor gebunden oder frei vorkommend. Ihre Aufgabe ist im Wesentlichen dieselbe wie die anderer Buchstaben, wenn sie als Variablen gebraucht werden: Sie dienen dazu, die Argumentstellen von Begriffen und Beziehungen kenntlich zu machen – nur dass es sich um Begriffe und Beziehungen einer höheren Stufe handelt. Das Schema ‚$\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$' zum Beispiel bezeichnet den Begriff der Asymmetrie, dessen Argumentstellen der Buchstabe ‚R' anzeigt. Am Ausdruck selbst wird ersichtlich, dass anstelle von ‚R' zweistellige Prädikate einzusetzen sind und der bezeichnete Begriff mithin nur auf entsprechende Beziehungen Anwendung findet. Der Satz ‚$\forall R(\forall x \forall y(Rxy \rightarrow \neg Ryx) \rightarrow \forall x \neg Rxx)$' wiederum trifft eine Aussage über das Verhältnis zwischen Begriffen zweiter Stufe: Wenn etwas – d. h. hier irgendeine zweistellige Beziehung – unter den Begriff der Asymmetrie fällt, dann auch unter den der Irreflexivität.

Um die Form solcher Aussagen kenntlich zu machen, lässt sich ein neuer Typ von Buchstaben einführen, mit denen die Begriffe und Beziehungen zweiter Ordnung angedeutet werden: ‚$\forall R(\phi(R) \rightarrow \psi(R))$'. Aussagen dieser Form sind in der Mathematik allgegenwärtig. Weder ist es erforderlich, sie in eine Sprache der ersten Stufe zu übersetzen, um sie hinreichend zu verstehen, noch muss ihr Beweis im Rahmen einer erststufigen Axiomatisierung der Mengenlehre (oder einer anderen Grundlagentheorie) erfolgen, damit sie als bewiesen gelten. Es ist ein Irrtum, zu glauben, der sinnvolle Gebrauch von Prädikaten zweiter Stufe wie ‚ϕ' setze voraus, dass die Identitätsbedingungen der angesprochenen Begriffe und Beziehungen klar festgelegt seien. Man kann, um es mit Dummetts Unterscheidung zu sagen, durchaus über das *criterion of application* eines

[209] Quine (1961d, S. 23).

[210] Dass Quines Ablehnung höherstufiger Systeme *auch* auf metaphysischen Bedenken beruht, macht die folgende Stelle deutlich: «My reason for not preferring it [*i. e.*, admitting bound variables in so-called predicate positions] is one simply of ontological economy. Even if one foresees having for some purposes to quantify eventually over properties after all, or over classes anyway, I favour the strategy of holding to the economical line where we can. I distinguish predicates from abstract singular terms for no other reason» Quine (1980, S. 171). An anderen Stellen führt Quine andere Gründe gegen die Möglichkeit einer Logik höherer Stufe an; Gründe, die stärker von logischen Betrachtungen geleitet sind. Wir werden im nächsten Unterkapitel (in 1.4.3) auf sie zu sprechen kommen.

Prädikats verfügen, ohne dass zugleich ein eindeutiges und trennscharfes *criterion of identity* vorhanden wäre.[211]

Nehmen wir als Beispiel die Teilerfremdheit, bei der es sich augenscheinlich um eine symmetrische Beziehung handelt.[212] Ein einfacher, aber folgenreicher Satz besagt: Für beliebige ganze Zahlen n und m gilt, dass sie genau dann teilerfremd sind, wenn es ganze Zahlen x und y gibt, sodass $nx + my = 1$.[213] D. h., die Ausdrücke ‚$\mathrm{ggT}(n, m) = 1$' und ‚$\exists x \exists y(nx+my = 1)$' bezeichnen extensionsgleiche Beziehungen. Bezeichnen sie aber zwei verschiedene Beziehungen oder zwei Mal dieselbe? Die Antwort hängt davon ab, welches Identitätskriterium gewählt wird, zumal mehrere möglich sind. Ist Extensionsgleichheit das Kriterium, bezeichnen die Prädikate ein und dieselbe Beziehung. Gilt hingegen jede Zeichendifferenz, die nicht bloss eine notationale Variante darstellt, als hinreichend für die Verschiedenheit des Bezeichneten, stehen die Prädikate für verschiedene Beziehungen.

Zwischen diesen beiden Extremen sind eine Reihe weiterer Kriterien denkbar. Insbesondere könnte der Möglichkeit Rechnung getragen werden, dass man mathematische Sätze verstehen kann, ohne zu wissen, ob sie wahr oder falsch sind. Bevor ich den Beweis des obigen Satzes sah, war ich zwar in der Lage die darin enthaltenen Prädikate – ‚$\mathrm{ggT}(n, m) = 1$' und ‚$\exists x \exists y(nx+my = 1)$' – korrekt anzuwenden, wusste aber noch nicht, dass sie von denselben Zahlenpaaren wahr ausgesagt werden. Die beiden Prädikate sind, um eine Bestimmung Freges auf unseren Fall zu übertragen, nicht äquipollent. Wären sie äquipollent, würde gelten: Wer beide Prädikate versteht, d. h. korrekt anzuwenden weiss, weiss damit auch, dass sie in allen relevanten Aussagesätzen *salva veritate* durch einander ersetzt werden können.[214] An dieser Äquipollenzbeziehung lässt sich auf naheliegende Weise ein Identitätskriterium für die Bedeutungen von Prädikaten festmachen: Zwei Prädikate bezeichnen dann und nur dann denselben Begriff oder dieselbe Beziehung, wenn sie äquipollent sind. Unsere beiden Beispielprädikate stünden nach diesem Kriterium also für verschiedene Beziehungen.

Man könnte nun einwenden, dieses Kriterium sei im Gegensatz zum extensionalen und zum syntaktischen nicht objektiv genug, zu psychologisch. Was gewissen Subjek-

[211] Vgl. Dummett (1981, S. 74-76, 233).
[212] Für die Definition dieser Beziehung und ihre symbolische Schreibweise, vgl. Anm. 94.
[213] Vgl. Dietzfelbinger (2004, S. 27).
[214] Von Äquipollenz in diesem Sinn ist meines Wissens nur an einer Stelle in Freges Nachlass die Rede und dort wird sie als Beziehung zwischen *Sätzen* eingeführt, vgl. Frege (1983, S. 213 f.). Für die Anpassung auf Prädikate und Begriffe, vgl. Glock und Büttner (2018, S. 187). Von äquipollenten Sätzen spricht Frege ausserdem in einem Brief an Husserl, meint dort aber logische Äquivalenz, vgl. Frege (1976, S. 102-104).

ten als Paar äquipollenter Prädikate gilt, kann anderen anders erscheinen; nicht, weil sie die Prädikate überhaupt nicht anzuwenden wüssten, sondern, weil sie ihren begrifflichen Zusammenhang nicht sogleich sehen. So enthält mein heutiges Verständnis der arithmetischen Ausdrücke ‚$(x + y)^2 = 0$' und ‚$x^2 + 2xy + y^2 = 0$' das davon nicht mehr zu trennende Wissen um ihre Koextensionalität, mithin um ihre Austauschbarkeit füreinander in geeigneten extensionalen Kontexten. Es ist mir unmöglich geworden, den einen Ausdruck zu lesen, dann den anderen und dennoch im Zweifel darüber zu sein, ob sie auf dieselben Zahlenpaare zutreffen. Nichts könnte mir jetzt klarer erscheinen. Aber natürlich verhielt es sich nicht immer so. Zuerst musste ich lernen, Ausdrücke wie diese zu lesen, zu schreiben, mit ihnen algebraisch umzugehen; erst danach, in einem weiteren Schritt, wurde mir gezeigt, dass und weshalb sie gleichwertig sind. Sind die Ausdrücke ‚$(x+y)^2 = 0$' und ‚$x^2+2xy+y^2 = 0$' also nicht äquipollent, weil man sie verstehen kann, ohne zu wissen, dass sie koextensional sind? Oder hat man sie erst eigentlich verstanden, wenn man sieht, dass und weshalb sie koextensional sind?

Ein festes Mass für das hinreichende Verständnis von mathematischen Prädikaten angeben zu wollen, wäre freilich fehlgeleitet. Mit dem Fortschritt des subjektiven Verständnisses und Wissensstands – wie auch mit dem der ganzen Disziplin – verschieben sich offenbar die Anforderungen und mit ihnen die Äquipollenzbeziehung. Wer sich zu den Fachkundigen auf dem Gebiet des Primzahltestens zählt, sollte über ein Verständnis der Teilerfremdheit verfügen, welches die Wahrheit des obigen Satzes enthält (d. i., dass ganze Zahlen n und m dann und nur dann teilerfremd sind, wenn sie das Prädikat ‚$\exists x \exists y(nx+my = 1)$' erfüllen). Denn es handelt sich dabei um eine Trivialität – nicht für mich und andere Laien, sondern für die Sachverständigen. Mehr noch, es handelt sich um eine Trivialität, die für bestimmte Zwecke von grossem Nutzen ist. Aus dem Prädikat ‚$\exists x \exists y(nx + my = 1)$' wird durch Anwendung der Moduloperation das koextensionale Prädikat ‚$\exists x(nx \equiv 1 \pmod{m})$' gewonnen, dessen Zutreffen leichter nachzuweisen ist, da es erstens reicht, den Wert nur einer Variablen (d. h. von ‚x') zu bestimmen, und zweitens die dafür nötigen Berechnungen nach den Regeln der modularen Arithmetik erfolgen können. Mit Hilfe von ‚$\exists x(nx \equiv 1 \pmod{m})$' lässt sich die Teilerfremdheit von n und m deshalb deutlich effizienter bestimmen als mit den Verfahren, die sich aus ‚$\exists x \exists y(nx + my = 1)$' oder ‚$\mathrm{ggT}(n, m) = 1$' ergeben.[215]

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden (in 2.3.1.7 und 2.3.1.8), ist die Forschung auf dem Gebiet des Primzahltestens geprägt von solchem Streben nach Effizienz. Um in dieser Hinsicht Verbesserungen zu erreichen, gilt es, unter äquivalenten Bestimmungen

[215] Vgl. Dietzfelbinger (2004, S. 4, 25, 32-35).

diejenigen zu finden, die effizientere Lösungen erlauben. Dafür bedarf es der Fähigkeit, mühelos zwischen koextensionalen Prädikaten hin und her zu wechseln. Jene, die in dieser Praxis geübt sind, werden naheliegenderweise dazu neigen, diese Prädikate für äquipollent zu befinden, und nichts wird ihnen natürlicher erscheinen, als darin bloss unterschiedliche Mittel zu sehen, das Bestehen ein und derselben Beziehung festzustellen. Zugleich aber hängt an der Wahl eines festen Identitätskriteriums für Begriffe und Beziehungen nichts, was aus mathematischer Sicht von Belang wäre. Ob ‚$\exists x \exists y(nx + my = 1)$' und ‚$\mathrm{ggT}(n, m) = 1$' dieselbe Beziehung bezeichnen oder nicht, wirkt sich weder auf die Koextensionalität der Prädikate noch etwa darauf aus, dass sowohl das eine wie das andere Prädikat für eine Beziehung steht, die unter den zweitstufigen Begriff der Symmetrie fällt. Beides lässt sich unabhängig von der Beantwortung der Identitätsfrage leicht einsehen.

Ohnehin ist in der Mathematik, anders als in der Philosophie, der Umgang mit Identitäten oft von spielerisch anmutender Leichtigkeit. Nicht selten genügt bereits das Bestehen einer Kongruenzrelation, um Verschiedenes miteinander zu identifizieren. Die modulare Arithmetik gibt dafür ein gutes Beispiel ab. In anderen Zusammenhängen wiederum wird das, was eben noch als Eines galt, in Vieles entfaltet und als Verschiedenes behandelt. Gerade in den modernen, algebraisch geprägten Disziplinen ist die Fähigkeit, rasch und reibungslos von einer Abstraktionsebene auf die nächste zu springen, mithin die Betrachtung von einem Kriterium zum andern kippen zu lassen, Conditio sine qua non der Wissens- und Verständniserweiterung. Die hyperintensionalen Feinheiten, mit denen sich die Philosophie aufhält, wenn sie versucht, die Bedingungen der Identität und Verschiedenheit von Begriffen und Beziehungen zu klären, verlieren in der mathematischen Perspektive ihre aporetische Erscheinung.

Wie sich im nächsten Kapitel ausserdem zeigen wird (und dort besonders in 2.3.1.1, 2.3.1.4 und 2.3.1.5), beschränkt sich der mathematische Erkenntnisdrang nicht darauf, die Menge der bewiesenen Sätze stetig zu erweitern. Die Arbeit an einem Satz endet typischerweise erst, wenn er sich in den Augen der Sachverständigen als trivial ausnimmt. Da der erstbeste Beweis dafür in der Regel nicht ausreicht, hat dieser Trivialisierungsdrang zur Folge, dass ein Teil des gemeinschaftlichen Arbeitsaufwands in die Entwicklung immer neuer Beweise für längst unbestrittene Sätze fliesst. Dadurch wird um einen Begriff oder eine Beziehung herum eine immer dichter geknüpfte begriffliche Umgebung geschaffen, in der die Grenzen zwischen dem, was zunächst noch als verschieden erscheinen mochte, immer weiter verschwimmen. Die mannigfachen Verbindungen zwischen den Begriffen und Beziehungen verhärten sich mit zunehmender Trivialisierung zu einem einzigen Begriffskomplex. Es findet – um nicht Freges Metapher von vorhin aufzunehmen (siehe 1.2.3.2), sondern eine nicht unähnliche Wittgensteins, auf die wir im nächsten Kapitel (im letzten Paragraphen von 2.3.1.2) zurückkommen werden – eine Versteinerung statt. Was zuerst lose nebeneinanderliegt, wird um Zwischenglieder ergänzt, bis das Ganze sich schliesslich zu einer unzertrennlichen Einheit petrifiziert. Koextensionale Prädikate erscheinen, nachdem die Extensionsgleichheit der Begriffe, für die sie stehen, durch abermaliges Beweisen zur reinsten Trivialität abgeschliffen wurde, nunmehr wie verschiedene Seiten ein und derselben Medaille. Es setzt sich allmählich die extensionale Sichtweise durch.

Wer Mathematik als Begriffswissenschaft verstehen möchte, muss sich indes davor hüten, diese Sichtweise einzunehmen. Um ein philosophisches Verständnis von den Versteinerungsvorgängen zu erlangen, die zum mathematischen Fortschritt gehören, muss das Identitätskriterium, das an den Begriff „Begriff“ und an den Begriff „Beziehung“ geknüpft ist, beweglich bleiben. Insbesondere sollte es nicht an der Extensionalität von Prädikaten festgemacht sein. Andernfalls bliebe der Drang, das mathematische Verständnis bewiesener Wahrheiten zu vertiefen, rätselhaft und der Gewinn, den ihre zu diesem Zweck unternommene Trivialisierung bedeutet, unsichtbar.

1.3.4. Zusammenfassung

Eine Variable ist kein veränderlicher oder unbestimmter Gegenstand, sie ist überhaupt kein Gegenstand, sondern ein Zeichen. Das ergab sich bereits aus den Betrachtungen im ersten Teil dieses einleitenden Kapitels (in 1.2). Im zweiten Teil des Kapitels (in 1.3) drehten sich die Betrachtungen folglich um die Frage, was für Zeichen Variablen sind, ja inwiefern sie überhaupt Zeichen sind.

Fassen wir einige Ergebnisse kurz zusammen. Es zeigte sich, dass Variablen keine Namen sind: für veränderliche oder unbestimmte Gegenstände ohnehin nicht, aber auch nicht für Unbekanntes oder Beliebiges. Variablen bezeichnen nicht; sie sind ebenso bedeutungs- wie sinnlos, um es mit Frege zu sagen. Weder sind die Werte, die Variablen annehmen können, ihre Bedeutung noch ist ihr Sinn die Allgemeinheit, die sie dem Inhalt verleihen, in dessen Ausdruck sie vorkommen. In Mathematik und Logik dient der Gebrauch von Buchstaben als Variablen zwar oft dazu, allgemeine Gedanken auszudrücken. Nicht immer jedoch ist das der Fall. Die Kernaufgabe von Variablen besteht vielmehr darin, die Argumentstellen von Begriffen und Beziehungen kenntlich zu machen. Beim Lösen von Problemen und beim Beweisen von Sätzen helfen Buchstaben, den Überblick über das begriffliche Geflecht zu wahren, indem sie die Verwandtschaftsverhältnisse anzeigen, die zwischen den Argumentstellen verschiedener Begriffe und Beziehungen bestehen. Diese Gebrauchsweise liegt den anderen zugrunde. Und sie geht in die kombinatorischen Funktoren über, wenn nach Quines Methode die gebundenen Variablen aus der Prädikatenlogik erster Stufe eliminiert werden.

Die mathematischen Disziplinen handeln nicht von Gegenständen, die in einer abgetrennten Sphäre ewig ihr notwendiges und regungsloses Dasein fristen. Sie handeln von gewissen Begriffen und Beziehungen – in ihren reinen Teilen losgelöst davon, ob diese Begriffe und Beziehungen auf wirkliche Gegenstände Anwendung finden oder nicht. Wer sich klar machen will, was eine Variable ist, wird immer wieder auf das zurückkommen, was ein Begriff oder eine Beziehung ist. Damit hatte Frege wohl recht. Wenn es hier auch nicht darum gehen konnte, die Auffassung von Mathematik als Begriffswissenschaft in ihren Details und Konsequenzen darzulegen, geschweige denn zu begründen: Der Hinweis, dass sich grundlegende Fragen der Mathematikphilosophie durch die sorgfältige Analyse des Buchstabengebrauchs beleuchten lassen, erscheint mir gleichwohl nützlich. Ausserdem wird die rein begriffliche Natur mathematischer Arbeit und ihrer Erzeugnisse im nächsten Kapitel (in 2.3) noch deutlicher hervortreten.

Um die Grundfrage dieser Arbeit auf befriedigende Weise zu beantworten, reicht das bis jetzt Gesammelte nicht aus. Die Analyse des Buchstabengebrauchs, die im ersten Teil dieses Unterkapitels vorgeschlagen wird, ist auf zwei einfache Beispiele abgestützt. Und danach, besonders zu Beginn des dritten Teils, sind es eher informelle Bestimmungen – was vor oder begleitend zur Einführung formaler Systeme über Variablen, Funktionen etc. erzählt wird –, die uns den Diskussionsstoff liefern. Diese Begleitprosa zu untersuchen, ist gewiss hilfreich und nötig. Denn nur so lässt sich die ganze Vorstellungswelt – die Mythen und Sagen, in die der Buchstabengebrauch eingewoben ist – sowohl in ihrem mathematischen Nutzen als auch in ihrem philosophischen Schadenspotenzial verstehen. (Das heisst es, Missverständnisse zu durchdringen, und sie nicht lediglich aufzulösen oder zu umgehen.) Um indes das angestrebte Variablenverständnis zu erreichen, wird es unerlässlich sein, auch ins Maschinenwerk formaler Systeme zu blicken und an zahlreicheren Beispielen zu untersuchen, wo genau im Getriebe das Buchstabenzahnrad sich dreht.

Dass unsere Grundfrage einer Erweiterung bedarf, stand bereits am Ende des letzten Unterkapitels fest. Was sich seither gezeigt hat, ist, wo am meisten Unklarheit besteht: in der Frage nach dem semantischen Wesen von Variablen. Hier gedeiht das Missverständnis prächtig, grassiert der täuschende Mythos. Und nach den Differenzen in den Bestimmungen der Begleitprosa zu urteilen, herrscht hier auch die grösste Uneinigkeit. Eine historisch vergleichende Herangehensweise wird indessen nicht genügen, um Klarheit über die Semantik von Variablen zu erlangen. Wie eben festgestellt, braucht es darüber hinaus eine systematisch vergleichende Untersuchung verschiedener Formalismen, die sich im zur Verfügung stehenden Werkzeugkasten der heutigen Logik zu bedienen und Hilfsmittel wie Quines Funktorenlogik, Hintikkas *Independence Friendly Logic* oder Wittgensteins exklusive Variablenschreibweise für philosophische Zwecke einzusetzen weiss. In diese Stossrichtung also gilt es, die Grundfrage zu erweitern. Unter der entsprechend erweiterten Fragestellung erhalten auch einige neuere Diskussionen, die in diesem einleitenden Kapitel nur gestreift werden konnten, ihren Platz: die Erwiderungen auf Fines relationale Semantik etwa oder der Streit zwischen Absolutisten und Relativisten.

Im gleich folgenden letzten Teil des Kapitels wird (d. h. in 1.4.2) eine Entfaltung der Grundfrage vorgeschlagen. Welche Teilfragen daraus hervorgehen müssen, hat sich bereits vielfach angedeutet. Als Ordnungsschema zur Bündelung der verschiedenen Teile wird uns die aristotelische Lehre von den „vier Ursachen“ dienen. Die entfaltete Fragestellung spannt allerdings ein Untersuchungsgebiet auf, dessen Ausmasse bei Weitem übersteigen, was im vorliegenden Text behandelt werden kann. Im zweiten Teil des letzten Unterkapitels (in 1.4.3) erfolgt daher eine Gebietseingrenzung.

1.4. Entfaltung der Grundfrage und Eingrenzung des Untersuchungsgebiets

1.4.1. Die Grundfrage im Rückblick

Die Grundfrage, von der wir ausgingen, war: *Was ist eine Variable?*, oder auch: *Was sind Variablen?* – keine typische Frage also aus dem tradierten Kanon der Philosophie. Äusserlich gleicht sie zwar der sokratischen Frage nach dem Was einer Sache. Rasch aber erweist sich diese Frageform als unzulänglich, da sie in sich die Annahme verbirgt, dass dem, was Variable genannt wird, ein gemeinsames Wesen innewohnt. Ein kurzer Blick in die Wortgeschichte reicht, um sich die Fragwürdigkeit dieser Annahme vor Augen zu führen. Unter Variablen wurde über die Jahrhunderte Disparates verstanden. Und obwohl sich der Wortgebrauch inzwischen verfestigt zu haben scheint, bleibt eine breite Mannigfaltigkeit bestehen. Als Variablen werden Buchstaben in verschiedenen Gebrauchsweisen bezeichnet, wobei man sich nicht immer darüber einig ist, in welchen Gebrauchsweisen sie als Variablen gelten sollen und in welchen nicht. Den Gegenstand unserer Untersuchung bilden lebendige Zeichen, die in einen vielfältigen, nicht leicht zu überschauenden und von Mythen umrankten Usus eingewoben sind, der selbst wiederum weder gott- noch einfach menschgegeben, sondern historisch gewachsen ist.

Was heisst es aber, von einem Zeichengebrauch zu fragen, *was* er sei? Wonach wird gefragt, wenn es weder darum geht, diesen Gebrauch zu erlernen, noch darum – oder nicht zwingend darum – eine Wesensbestimmung zu geben? An die Stelle des Was rücken naturgemäss das Wie und das Wozu: Die Untersuchung richtet sich demnach auf die Regelwerke, die implizit oder explizit dem Buchstabengebrauch in Logik und Mathematik zugrunde liegen, und auf die unterschiedlichen Zwecke, denen dieser Gebrauch zu dienen vermag. Da die Gebrauchsweisen, die es zu untersuchen gilt, vielfältig und doch nicht immer leicht auseinanderzuhalten sind, ist Übersicht gefragt. Und dafür sind Unterschiede ebenso wichtig wie Gemeinsamkeiten. So kann es sich als hilfreich erweisen, zwischen dem, was mitunter vermischt wird, eine Grenze zu ziehen: zum Beispiel zwischen schematischen Buchstaben und freien Variablen. Andererseits kann es aufschlussreich sein, gewisse Gemeinsamkeiten hervorzuheben, indem eine Gebrauchsweise auf eine andere zurückgeführt oder die eine durch die andere erklärt wird: zum Beispiel der Gebrauch von Buchstaben für die Unbekannten einer Gleichung durch den Gebrauch freier oder gebundener Variablen in der Prädikatenlogik. Die Frage, ob hinter der Mannigfaltigkeit an Gebrauchsweisen eine Einheit besteht, mag in diesem Streben nach Klarheit und Übersicht zwar enthalten sein, aber lediglich als eine Frage neben anderen.

Insgesamt wird hier weniger eine Wissens- als vielmehr eine Verständnisfrage aufgeworfen. Sie soll das Verlangen zum Ausdruck bringen, bereits Bekanntes, das vielen selbstverständlich erscheint, besser zu verstehen. Zu diesem Verstehen gehört Wissen freilich dazu: darüber etwa, welches die unentbehrlichen Dienste sind, die gebundene Individuenvariablen in der Prädikatenlogik leisten, oder darüber, dass im Hinblick auf die semantischen Eigenschaften, die Variablen zugesprochen werden, wenig Einigkeit herrscht. Deshalb muss der Versuch, die Grundfrage zu beantworten, zwangsläufig auch sammelnden und vergleichenden Charakter annehmen. Da die Auswahl dessen, was gesammelt und miteinander verglichen werden soll, im Dienst eines verbesserten Variablenverständnisses steht, muss sich die Untersuchung mitunter Umständen zuwenden, die auf den ersten Blick nebensächlich erscheinen mögen: dem Wirrwarr in der Terminologie zum Beispiel, und ganz generell der Prosa, die den Buchstabengebrauch begleitet. Denn das Verständnis, nach dem hier verlangt wird, müsste eines sein, das sich nicht leicht aus der Ruhe bringen lässt, weder von Unklarheiten oder vermeintlichen Antinomien noch von gutgemeinten, aber irreführenden Erklärungen.

Damit dieses Verständnis in Reichweite gelangt, gilt es, die Missverständnisse, von denen wir einigen bereits begegnet sind, als solche zu erkennen und zu durchdringen. Ein systematisch vergleichendes Vorgehen allein reicht dafür nicht aus. Um zu verstehen, welcher wahr wirkenden Vorstellung das Missverständnis jeweils entsprungen ist, weshalb es sich verbreitet und doch keinen Schaden angerichtet hat, braucht es den Blick zurück in die Geschichte der Disziplinen. Historische Betrachtungen sind umso wichtiger, als es sich bei den irrigen Vorstellungen, die zu verschiedenen Zeiten mit Variablen in Verbindung gebracht werden, nicht um blosse Begleiterscheinungen handelt. Als Bestandteile der Erklärungen, die eine Weitergabe des Buchstabengebrauchs an die Nachwelt erst ermöglichen, wirken jene Vorstellungen auf diesen zurück und formen ihn mit. Um nur ein Beispiel zu geben: Quines Ablehnung von Prädikatsvariablen und die damit einhergehende Absage an höhere Stufen der Logik beruht auf der Prämisse, dass Variablen auf die Werte, die sie annehmen können, referieren.[216]

Variablen sind keine Gegenstände der Logik oder Mathematik, sondern eines ihrer Werkzeuge. Weder in ihrer Existenz noch in ihren Eigenschaften sind sie zeitlos und notwendig, im Gegenteil, ist ihre lange Geschichte doch von vielen Kontingenzen geprägt. Entsprechend verworren stellt sich der Verlauf dieser Geschichte dar, so weit er überhaupt bekannt ist. Wer gleichwohl verstehen will, warum es Variablen gibt – wie dieser Buchstabengebrauch zustande gekommen ist und wie und weshalb er sich etabliert hat –, muss die Geschichte kennen, muss wissen, woher das Werkzeug kommt und wie es sich entwickelt hat. Ein Verständnis dieser Art ist auf rein begrifflichen Wegen nicht zu erreichen. Es braucht historische Betrachtungen. Aber obwohl das Sammeln und Vergleichen, das hierbei stattfindet, unerlässlich ist und unter anderem helfen kann, Missverständnisse nachzuvollziehen, geht aus der historischen Arbeit allein noch kein verbessertes Variablenverständnis hervor. Um dem Ziel der Untersuchung näherzukommen, müssen die Ergebnisse dieser Arbeit in die systematischen Betrachtungen einfliessen, die dann wiederum in die historischen zurückfliessen, um sie zu schärfen.

Wie wichtig das Gelingen dieses Wechselspiels ist, zeigte sich, als wir uns der semantischen Seite von Variablen zuwandten. Denn darüber, was für Zeichen Variablen sind, herrscht Unklarheit und wenig Einigkeit. Während sie den einen als Namen für Gegenstände erscheinen, halten sie andere für bedeutungslose Markierungen. Nur selten jedoch wird die vertretene Ansicht begründet. Um zu entscheiden, wer in welcher

[216] Wie wichtig der historische Blick für das Durchdringen und Beseitigen konfuser Vorstellungen ist, zeigt das Beispiel Freges. Seine eigene Klärungsarbeit baut auf dem Vergleich vergangener Auffassungen und dem sorgfältigen Aufzeigen der darin enthaltenen Missverständnisse. Für eine Erörterung der Rolle historischer Klärungsarbeit bei Frege, vgl. Beaney (2006).

Hinsicht richtig liegt und wer falsch, braucht es daher Betrachtungen, die über das historisch Gesammelte hinausreichen. Hier war es die Analyse des Buchstabengebrauchs in der Schulalgebra und in Widerspruchsbeweisen, die dabei half, die richtige Spur aufzunehmen und sich von der verbreiteten Ansicht, wonach Variablen auf Gegenstände referieren, nicht beirren zu lassen. Vor dem Hintergrund dieser Analyse erwies sich dann die Möglichkeit, gebundene Variablen durch Funktoren zu ersetzen, als Bestätigung des sich allmählich abzeichnenden Standpunkts. Für die Festigung und weitere Ausarbeitung dieses Standpunkts bleibt allerdings viel zu leisten, insbesondere in Bezug auf die Frage nach der Zeichenhaftigkeit von Variablen.

1.4.2. Von der sokratischen Was-ist-Frage zu den vier aristotelischen Fragen nach dem Warum

In diesem einleitenden Kapitel ging es um die Grundfrage selbst, um ihr philosophisches Potenzial, und weniger darum, sie möglichst rasch zu erledigen. Wie die Grundfrage in verschiedene Richtungen entfaltet und für die Philosophie fruchtbar gemacht werden kann, musste sich erst zeigen. Aus diesen Bemühungen ist ein Bündel von lose miteinander verbundenen Teilfragen und ansatzweisen Antworten hervorgegangen, die es nun neu aufzureihen und in eine sinnvolle Ordnung zu bringen gilt. Als Schema kann uns die aristotelische Lehre von den „vier Ursachen" dienen. Ihr zufolge wird in vier verschiedenen Bedeutungen von etwas gesagt, es sei eine αἰτία, eine Ursache, für etwas anderes; entsprechend gelte es, vier Arten von Ursachen zu unterscheiden: Zweck-, Stoff-, Form- und Bewegungsursache.[217] Angewandt auf das Bündel von Fragen und Antworten, die sich bis hierhin ergeben haben, heisst das, sie auf die passenden Ursachenarten zu verteilen.

Dass diese etwas aus der Mode gekommene Lehre auf den Gegenstand unserer Untersuchung Anwendung findet, ist kein Zufall. Das Seiende, auf das Aristoteles seine Unterscheidungen münzte, d. s. die Gegenstände seiner Physik, fasste er als aus Form und Materie gebildete und mit einem natürlichen Zweck versehene Substanzen auf, deren Entstehen, Vergehen und wechselnde Beschaffenheiten durch innere und äussere Ursachen bewirkt werden. In dieser Sichtweise stehen sich Naturdinge und Artefakte näher als in der modernen Physik und Biologie. Die aristotelische Ursachenlehre ist denn auch keine Theorie dessen, was heute unter Kausalität verstanden wird (wie unklar oder ver-

[217] Die wichtigsten Stellen, an denen Aristoteles seine Lehre von den „vier Ursachen" darlegt, finden sich in den Kap. 3 und 7 des zweiten Buchs der *Physik* (194 b 16 - 195 b 30, 198 a 14 - 198 b 9) sowie in Kap. 2 des fünften Buchs (Δ) der *Metaphysik* (1013 a 24 - 1014 a 25).

schieden heutige Auffassungen auch sein mögen).[218] Eher als um Arten der Verursachung handelt es sich bei den vier Arten von αἰτίαι um verschiedene Aspekte, die es in einer Erklärung, *warum* etwas existiert oder der Fall ist, *warum* es so ist oder wurde, wie es ist, zu berücksichtigen gilt.[219] Demnach wären αἰτίαι dasjenige oder Bestandteil dessen, was man in einer Antwort auf solche Warumfragen typischerweise anführen würde. Aristoteles selbst weist auf diesen Zusammenhang hin, wenn er behauptet, ‚warum' nehme gleich viele Bedeutungen an, wie es Arten von Ursachen gibt.[220] Wer eine Frage nach dem Warum stelle, frage nämlich (i) nach dem Zweck, den eine Sache erfüllen soll; (ii) nach dem Stoff, aus dem sie besteht; (iii) nach den Formen, die dieser annehmen kann; oder (iv) danach, was ihr Entstehen und ihren Wandel bewirkt.

Wie genau diese vier Aspekte mit den verschiedenen Bedeutungen von ‚warum' zusammenhängen sollen, leuchtet aus dem, was uns Aristoteles darüber mitteilt, nicht gleich ein.[221] Unklar bleibt vor allem, welche Warumfragen durch die Angabe einer Stoff- oder Formursache beantwortet werden könnten. Ein Beispiel, das dem Gegenstand unserer Untersuchung in wichtiger Hinsicht gleicht, schafft hier Abhilfe: das Salz, das beim Kochen verwendet wird und sich, wie unsere Buchstaben, mit anderen Zutaten zu einem stimmigen Ganzen kombinieren lässt.

Wer mir beim Kochen zusieht und bemerkt, dass ich zu verschiedenen Zeitpunkten Salz beigebe, könnte sich fragen, warum ich das getan habe. Die naheliegende Antwort wäre, dass ich es für das gute Gelingen des Zubereiteten getan habe, genauer gesagt, um die Geschmacksnoten der anderen Zutaten zu verstärken. Auch könnte ich auf die Lebenswichtigkeit oder andere gesundheitliche Vorzüge salzhaltiger Speisen hinweisen. In beiden Fällen zielten die Erklärungen auf die Zweckursache meines Salzgebrauchs beim Kochen hin. Aber womöglich wäre die Neugier damit noch nicht gestillt und ich würde gefragt, weshalb das beigegebene Salz den Geschmack verstärke und die Gesundheit fördere. Wenngleich mein eigenes Wissen bald an seine Grenzen stiesse, würde eine fachkundige Person in ihren Erklärungen gewisse Prozesse in und ausserhalb des Körpers

[218] Das gilt übrigens nicht nur für die aristotelische, sondern auch für andere Ursachenlehren der älteren griechischen Philosophie, vgl. Frede (1980).

[219] Zumindest ist das eine verbreitete Lesart, vgl. stellvertretend Hankinson (1998, Kap. 4). In Natali (2013, S. 43-45) wird gezeigt, dass zwar bereits Platon mit ‚αἰτία' und verwandten Ausdrücken manchmal Erklärungen bezeichnet. Dieser Wortgebrauch aber sei nur metaphorisch zu verstehen und auch bei Aristoteles bloss einer neben anderen, weshalb es ein Fehler sei, ‚αἰτία' generell mit ‚Erklärung' zu übersetzen, vgl. Natali (2013, S. 57-64). Für eine entsprechend metaphysisch und weniger epistemologisch orientierte Lesart, vgl. Marmodoro (2013).

[220] Diese Behauptung findet sich gleich zu Beginn von Kap. 7 des zweiten Buchs seiner *Physik*; vgl. auch für das Folgende die ganze Passage 198 a 14-21.

[221] Was viele Kommentatoren zum Anlass für exegetische Ausführungen genommen haben. Für einen neueren und ausführlichen Auslegungsversuch, vgl. Gourinat (2013, S. 96-108).

beschreiben und dabei auch auf die chemische Zusammensetzung von Kochsalz Bezug nehmen, mithin auf die Elemente, aus dem es besteht, und die Art ihrer Verbindung. Diese Erklärungen der geschmacksverstärkenden und gesundheitsfördernden Wirkung, die auch zur weiteren Erklärung meines Salzgebrauchs beitrügen, enthielten folglich Angaben sowohl zu den Stoff- als auch zu den Formursachen von Salz. Vielleicht aber war die Frage, warum ich Salz beigebe, anders gemeint und gefragt war vielmehr, woher ich wisse, dass es Salz braucht und wie viel davon wann beigegeben werden muss, um ein besseres Ergebnis zu erzielen. In diesem Fall sähe ich mich gedrängt, etwas über meinen bescheidenen Werdegang als Gelegenheitskoch zu sagen, darüber, wo ich mein „Können" erworben habe, in welche Kochtraditionen es sich einreiht, usw. Daraus könnte sich nun ein aufschlussreiches Gespräch ergeben über den historischen Hintergrund des Salzgebrauchs beim Kochen – inklusive Digressionen in die Kulturgeschichte dieser bemerkenswerten Zutat. Beleuchtet würden mit diesen Erklärungen vornehmlich die Bewegungsursachen des Salzgebrauchs.

Es ist klar, dass damit nicht alle denkbaren Lesarten der Frage, warum ich beim Kochen Salz beigebe, abgedeckt sind. Durch prosodisches Hervorheben oder passende Ergänzungen liesse sich mit ihr auch anderes fragen und tun (zum Beispiel mir den übermässigen Einsatz von Salz zum Vorwurf machen). Dass jede Frage, die durch ein ‚warum' eingeleitet wird, letztlich auf eine der vier Ursachen abzielt, wie Aristoteles behauptet, erscheint daher unplausibel. Für unsere Zwecke ist dies aber auch belanglos. Es reicht uns die Feststellung, dass Antworten auf Warumfragen das Verständnis einer Sache verbessern können und dass Aristoteles' Unterscheidungen dabei behilflich sind, einen wichtigen Teil dieser Fragen und ihre möglichen Antworten zu ordnen. Wenden wir das Schema also auf den Gegenstand unserer Untersuchung an.[222]

Zweckursache Gegenstand unserer Untersuchung ist der mannigfaltige Gebrauch von Buchstaben als Variablen. An die Stelle des Was rückt damit einerseits das Wie dieses Gebrauchs, d. s. die verwendeten Mittel und die Art und Weise ihrer Verwendung, andererseits das Wozu: die Zwecke, Ziele oder Funktionen dieses Gebrauchs. Während sich

[222] Mit etwas mehr Auslegungsarbeit liesse sich eine stärkere und entschiedenere Rechtfertigung für die Anwendung der aristotelischen Ursachenlehre geben. Denn bei dieser Lehre handelt es sich, wie ich glaube, um ein Schema wissenschaftlichen Verstehens überhaupt, das auf die verschiedensten Gegenstände Anwendung findet. Obschon sehr breit angelegt, zeichnet sich das Schema durch eine bemerkenswerte (henonyme) Einheit aus, sodass Gegenstände aus derart unterschiedlichen Wissenschaften wie Mathematik und Biologie unter einheitlichen Gesichtspunkten betrachtet werden können. Ansätze einer solchen stärkeren Lesart der aristotelischen Ursachenlehre finden sich in Moravcsik (1975), Moravcsik (1995) und in Stein (2011). Hier muss als Rechtfertigung der Hinweis auf die Nützlichkeit des Schemas für unsere Zwecke ausreichen.

das Wie auf Stoff- und Formursache entfaltet (siehe unten), sind die Fragen nach dem Wozu des Variablengebrauchs zusammen mit ihren Antworten unter die Zweckursache einzuordnen.

Neben den allgemeinsten Fassungen der Frage – *Wozu werden Variablen gebraucht? Welchen Zwecken dienen sie?* – gehören auch spezifischere Varianten unter die Zweckursache. Etwa: *Wofür braucht es freie Variablen?*, oder: *Welchen Beitrag leistet der Buchstabengebrauch in der Arithmetik?*, oder: *Welche Funktionen erfüllen Variablen in der Prädikatenlogik?*, etc. Um die verschiedenen Antworten, die derart unterschiedliche Fragen verlangen, zusammenzuhalten, muss der zu Hilfe genommene Zweckbegriff unbestimmt genug bleiben und eine gewisse Offenheit beibehalten. Denn unter diesen Begriff gilt es so Verschiedenes zu versammeln wie: die Gültigkeit von Argumenten prüfen und ihre logische Form kenntlich machen; Quantorenbereiche abstecken und Allgemeinheit ausdrücken; Namen vertreten und Gegenstände unbestimmt andeuten; Gleichungen lösen oder Sätze beweisen und die Argumentstellen von Funktionen offenhalten sowie Verwandtschaftsverhältnisse zwischen diesen anzeigen; etc. etc. Auch Allgemeineres wie die Vermehrung mathematischen Wissens oder die Algorithmisierung von Entscheidungsprozessen gehört demnach unter die Zweckursache, sodass es schwer fällt, nicht den Überblick über die überall aufkeimenden Zwecke zu verlieren.

Dem drohenden Übersichtsverlust könnte man damit entgegenzuwirken versuchen, dass man die Zwecke nach ihrer Bedeutung für verschiedene Disziplinen gruppiert. Offenbar dienen Buchstaben in der Arithmetik Zwecken, die zum Beispiel in der Prädikatenlogik keine Rolle spielen. Unter diesem Gesichtspunkt rückt die Frage nach den Gemeinsamkeiten und Unterschieden zwischen den Disziplinen in den Vordergrund: *Lässt sich ein einheitliches Ziel ausmachen, auf das der Gebrauch von Variablen über Disziplinengrenzen hinweg letztlich immer gerichtet ist? Oder zerfällt dieser Gebrauch in disjunkte Bereiche?* (Wie bei Diamanten, die im Bohr- und Schleifwesen ganz anderen Zwecken dienen als in der Schmuckindustrie.)

Um auf solche Fragen Antworten zu finden, reicht die Einteilung nach Disziplinen indes nicht aus. Es gilt auch, die Rangfolge der Zwecke zu beachten.[223] Denn so unbestimmt und vage sie auch ist: Die Zweckbeziehung (‚A ist ein Zweck von B‘ oder, umgekehrt ausgedrückt, ‚B bezweckt A‘), ist asymmetrisch und transitiv – ersteres überall oder

[223] Wie bereits Aristoteles vorschlägt, vgl. etwa die Stelle 194 b 32 - 195 a 3 in der *Physik* und Kap. 7 des siebten Buchs (Z) der *Metaphysik* (insbes. 1032 b 6-30). Im ersten Buch der *Nikomachischen Ethik* deutet Aristoteles eine Zweckordnung an, die seiner Hierarchisierung der Künste folgt.

fast, letzteres zumindest über gewisse Bereiche.[224] Für ein B, das ein Zweck von A ist, existiert oftmals ein C, das ein Zweck von B ist, sodass A nicht nur B, sondern indirekt auch C bezweckt. Das Kenntlichmachen der logischen Form von Argumenten zum Beispiel ist kein Selbstzweck, sondern dient unter anderem der Gültigkeitsprüfung. Werden Buchstaben dazu verwendet, die logische Form bestimmter Argumente kenntlich zu machen, besteht ein möglicher mittelbarer Zweck dieser Gebrauchsweise mithin darin, diese Argumente auf ihre logische Gültigkeit zu prüfen.

Um Übersicht zu schaffen über die Mannigfaltigkeit der Gebrauchsweisen von Buchstaben als Variablen, könnte es nützlich sein, die wichtigsten Zwecke in ihren Rangfolgen abzubilden. Aufschlussreich wäre dies nicht zuletzt deshalb, weil sichtbar würde, welche Gebrauchsweisen auf die gleichen Zwecke konvergieren und welche nicht. Bereits in den bisherigen Betrachtungen deutete sich ein möglicher Konvergenzpunkt an. Der Gebrauch von Variablen dient offenbar in verschiedenen Kontexten und Disziplinen der Kenntlichmachung logischer Formen: der logischen Form von Schlüssen in der Syllogistik, von komplexen Aussagen in der Aussagenlogik, von Begriffen und Relationen beim prädikatenlogischen Formalisieren wie auch beim Lösen von Gleichungen oder in Widerspruchsbeweisen. Auf eine weitere Konvergenz, die sich schon mehrfach angedeutet hat – dass Variablen dazu dienen, logische Grenzen anzuzeigen – werden wir gleich zurückkommen (in 1.4.3). Jedenfalls handelt es sich in beiden Fällen nicht um Selbstzwecke, die um ihrer selbst willen verwirklicht werden. Es fragt sich daher, ob auch in den ihnen übergeordneten Zielen Einheit zu finden ist.

All diese Fragen, aus deren Beantwortung eine Art Pragmatik des Buchstabengebrauchs in verschiedenen Disziplinen hervorginge, gehören nach unserem Schema der Zweckursache an.

---

[224] Auf den ersten Blick scheint die Möglichkeit von Selbstzwecken (insbesondere von Tätigkeiten, die um ihrer selbst willen ausgeübt werden) gegen die Asymmetrie der Zweckbeziehung zu sprechen. Ein Selbstzweck, könnte man sagen, sei etwas, das zu sich selbst in der Zweckbeziehung steht. Das höchste ethische Gut hätte demnach, wenn es existierte, nur sich selbst zum Zweck. Würde es sich dabei aber um die gleiche Beziehung handeln, in der auch die untergeordneten Handlungszwecke zu diesem Gut stehen? Kaum. Es scheint mir treffender, Selbstzwecke als Zwecke aufzufassen, die selbst nichts bezwecken, auch nicht sich selbst. Doch auch wenn die Irreflexivität der Zweckbeziehung zugestanden wird, stellt sich noch immer die Frage, ob es mitunter nicht vorkommt, dass A ein Zweck von B und B ein Zweck von A ist. Zum Beispiel könnten sich zwei selbstlose Menschen gegenseitig versichern: „Ich bin glücklich, damit du glücklich bist!“ Wenn dadurch auf sinnvolle Weise ausgedrückt ist, dass das Glücklichsein der einen Person ein Zweck des Glücklichseins der anderen ist und umgekehrt, ergibt sich unter der Annahme, dass die Beziehung transitiv ist, ein weiteres mögliches Gegenbeispiel zur Irreflexivität. In solchen Fällen wäre ich geneigt, der beteiligten Beziehung die Transitivität abzusprechen, da es sonst widersprüchlich würde, zu sagen: „*Nur* damit du glücklich bist, bin ich glücklich!“ Es soll hier also an der Behauptung festgehalten werden, dass die Zweckbeziehung immer irreflexiv und folglich in jenen Bereichen, in denen sie transitiv ist, auch asymmetrisch ist.

Stoff- und Formursache Ziele stellen sich in der Regel nicht von selbst ein. Um sie zu erreichen, müssen Mittel ergriffen werden: Handlungen ausgeführt, Werkzeuge getätigt, Produkte erzeugt werden. Wenn ich etwas Gutes und Gesundes essen will, gerade nichts vorrätig habe und nicht ins Restaurant möchte, überlege ich mir etwas, gehe einkaufen und bereite es zu. Dass ich dabei etwas Essbares hervorbringe, das gut schmeckt und meine Gesundheit fördert, ist nötig, um das angestrebte Ziel zu erreichen. Im Hinblick auf dieses Ziel kommt dem zubereiteten Essen also eine Art Notwendigkeit zu. Aristoteles spricht davon, dass die Zweckursache (etwas Gutes und Gesundes zu essen) dem Erzeugnis, durch das der Zweck verwirklicht werden soll (dem guten und gesunden Essen), *hypothetische* Notwendigkeit verleiht. Sofern das Erzeugnis auf bestimmte Weise aus Teilen zusammengesetzt ist, vererbt sich diese Notwendigkeit auf seine Stoff- und Formursachen.[225] Um im Beispiel zu bleiben: Mein Essen muss aus gewissen Zutaten zusammengesetzt und auf bestimmte Weise zubereitet sein, damit es seinen Zweck erfüllen kann. Wie lassen sich diese Betrachtungen auf unseren Gegenstand übertragen?

Wenn ich mich von der logischen Gültigkeit eines Arguments überzeugen will, und dafür weder auf die eigene Intuition vertrauen noch auf die Dienste rechnergestützter Algorithmen zurückgreifen möchte, werde ich versuchen, einen Beweis zu geben. Zwar stehen mir bei der Wahl der Darstellungsmittel und der Art ihrer Kombination und Anwendung viele Wege offen. Je nach Argument kann es sich anbieten, ein Diagramm zu zeichnen, die Prämissen darin zu markieren, um dann zu prüfen, ob sich die Konklusion ablesen lässt; oder ich übertrage das Argument in die Sprache der Prädikatenlogik, wähle einen vollständigen und korrekten Kalkül und versuche auf die eine oder andere Weise die Konklusion aus den Prämissen abzuleiten; usw. Aber wofür auch immer ich mich entscheide, ich muss gleichsam aus geeigneten Zutaten in geeigneter Weise einen Beweis herstellen. Die Zutaten, auf die ich dabei zurückgreife – und zu denen diverse Zeichen, aller Wahrscheinlichkeit nach auch Buchstaben, gehören werden – sind die Stoffursachen des Beweises.[226] Seine Formursachen sind die Art und Weisen, wie diese Zeichen zu

[225] Die Stellen, auf die ich mich hier stütze, finden sich in Kap. 9 des zweiten Buchs der *Physik* (199 b 33 - 200 a 15) sowie in Kap. 4 des achten Buchs (H) der *Metaphysik* (insbes. 1044 a 29). Für eine neuere Diskussion hypothetischer Notwendigkeit bei Aristoteles, die auch ältere Beiträge zum Thema berücksichtigt, vgl. Stein (2016).

[226] Unter ‚ὕλη', das ich hier etwas altmodisch mit ‚Stoff' wiedergebe, versteht Aristoteles keineswegs nur das Material, aus dem ein konkreter Gegenstand besteht, etwa das Holz eines Tisches oder das Eisen einer Säge. Sein technischer Gebrauch des Worts umfasst viel mehr, sodass sich damit alles bezeichnen lässt, woraus etwas geformt wird oder was im Wandel zugrunde liegt und für wechselnde Formen empfänglich ist. Stellen, an denen Aristoteles seinen Gebrauch von ‚ὕλη' darlegt, finden sich in den Kap. 5-9 des ersten Buchs der *Physik* sowie in den Kap. 7, 10 und 11 des siebten Buchs (Z) der *Metaphysik*. In Kap. 3 des zweiten Buchs der *Physik* (195 a 16) werden Buchstaben explizit als Stoffursachen von Silben aufgeführt, die Prämissen eines Arguments wiederum als Stof-

einem Ganzen kombiniert und angewendet werden. Wenn ich mich dafür entscheide, von Buchstaben Gebrauch zu machen und sie als Variablen einzusetzen, kommt ihnen im Hinblick auf den vorgegebenen Zweck, hypothetische Notwendigkeit zu: Ich brauche sie, um mich von der Gültigkeit des Arguments überzeugen zu können.

Für die fruchtbare Entfaltung unserer Grundfrage lohnt es sich, etwas präziser herauszuarbeiten, welche Art von Modalität hier im Spiel ist. Aristoteles' Qualifizierung dieser Notwendigkeit als hypothetische weist zu Recht auf ihre konditionale Form hin: Sollen bestimmte Zwecke erfüllt werden, zwingt sich das Ergreifen geeigneter Mittel auf. Der Zwang, der hier entsteht, ist allerdings weder auf Naturgesetze noch auf logische oder mathematische Notwendigkeiten zurückzuführen (wenngleich solche Gesetzmässigkeiten die Wahl geeigneter Mittel einschränken). Charakteristischerweise tritt diese Art von Zwang in zielgerichteten Handlungszusammenhängen auf, die selbst wiederum in eine breitere Praxis – in unserem Fall eine Wissenschaftspraxis – eingebunden sind. Entsprechend handelt es sich bei der fraglichen Modalität um eine *praktische* Notwendigkeit und als solche setzt sie einen gewissen Freiraum bei der Wahl der Mittel und ihrer Anwendung voraus. Notwendig ist nur, dass Mittel ergriffen werden und dass sich die ergriffenen Mittel dazu eignen, die vorgegebenen Zwecke zu erfüllen.

Für logische und mathematische Zwecke greifen wir vorzugsweise auf die Elemente des lateinischen und griechischen Alphabets zurück. Dass dem so ist, ist gewiss keine Notwendigkeit, sondern Umständen geschuldet, die sich historisch nachvollziehen lassen. Wie es mitunter geschieht, können wir uns ebenso gut bei anderen Schriftsystemen oder numerischen Notationen bedienen und mit Hilfe der Zeichen, die diese Systeme zur Verfügung stellen, die gleichen Resultate erzielen. Quines Funktorenlogik lehrt uns darüber hinaus, dass sowohl beim Stoff als auch bei der Form noch grössere Abweichungen vom Gebräuchlichen möglich sind. Anstelle des ganzen Quantorenapparats mit seinen gebundenen Variablen führt Quine, wie wir gesehen haben, eine Reihe von Funktoren ein, die direkt auf schematische Prädikatsbuchstaben operieren.[227] Mit diesem neuen Instrumentarium gelingt es, die prädikatenlogische Form beliebig komplexer Aussagen adäquat darzustellen und in einem entsprechenden Kalkül auf ihre Gültigkeit zu prüfen. Von den uns so vertrauten lateinischen Kleinbuchstaben, die von vielen als notwendiges

fursachen der Konklusion (195 a 18-19). In einer noch etwas anderen Bedeutung spricht Aristoteles zudem von intelligibler Materie bei mathematischen Gegenständen und gibt als Beispiel die Segmente eines Kreises im Verhältnis zum ganzen Kreis an (vgl. u. a. 1036 a 9-12, 1037 a 4-5, 1045 a 34-36). Die Hauptfunktion, die Aristoteles der intelligiblen Materie zuspricht, ist die der Individuierung formgleicher Gegenstände.

[227] Bezeichnenderweise bedient sich Quine für die Schreibung dieser Funktoren hebräischer Schriftzeichen, zumindest in der Schlüsselarbeit Quine (1976a).

Referenzmittel angesehen werden, müssen wir keinen Gebrauch machen. In der Funktorenlogik braucht es Individuenvariablen nicht einmal als Platzhalter für Argumentstellen oder Konstanten. Gleichwohl – und das ist die vielleicht wichtigere Einsicht – sind wir gezwungen, sobald wir Individuenvariablen aus dem Materialkasten verbannen, für gleichwertigen Ersatz zu sorgen. Denn der Beitrag, den sie an die Prädikatenlogik in ihrer gewöhnlichen Aufmachung leisten, ist unentbehrlich, wenn dieselben Ziele erreicht, dieselben Zwecke bedient werden sollen.

Mit der Betrachtung dieser praktischen Notwendigkeit, die Buchstaben und ihren Gebrauchsweisen insofern zukommt, als sie zu den Stoff- und Formursachen logischer oder mathematischer Mittel gehören, drängt sich die zurückgestellte Frage nach dem Wesen von Variablen wieder in den Vordergrund. Man möchte verstehen, was am Buchstabengebrauch jeweils wesentlich ist und was bloss akzidentellen Umständen geschuldet. Die leitende Frage ist, *worin die unentbehrlichen Beiträge bestehen, die Variablen an die Erfüllung logischer und mathematischer Zwecke leisten.* Dieser allgemeinen Fassung der Leitfrage sind zwei weitere nachzuschieben, die der Unterscheidung von Stoff und Form Rechnung tragen und entsprechend eng zusammenhängen: *Wie müssen die Elemente beschaffen sein, aus denen Variablen oder ihre Surrogate gebildet werden*? Und: *Wie müssen diese Elemente kombiniert und gebraucht werden, damit sie den jeweils erwarteten Beitrag zu leisten vermögen?* Sowohl in Bezug auf die erste Frage (den Variablenstoff betreffend) als auch auf die zweite (die Variablenform betreffend) gilt es einige Punkte zu erörtern, bevor wir anschliessend zur Bewegungsursache übergehen. Beginnen wir mit der ersten Frage.

Für den Variablengebrauch wird üblicherweise auf Elemente des lateinischen oder griechischen Alphabets zurückgegriffen. Das ist gleichsam der Stoff, aus dem Variablen sind und der über die verschiedenen Formen, die sie annehmen können (die verschiedenen Gebrauchsweisen, die sie zulassen), derselbe bleibt. Obwohl bei der Stoffwahl Freiheiten bestehen, ist nicht alles zweckmässig. So kann eine Säge aus Eisen oder anderem Metall geformt sein, nicht aber aus Baumwolle; und ein Tisch muss zwar nicht aus Holz gebaut sein, er kann aber nicht aus flüssigem Wasser bestehen, wenn er als Tisch dienen soll.[228] Entsprechend stellt sich in Bezug auf Variablen und die Zwecke, denen sie dienen sollen, die Frage, welchen Erfordernissen das ihnen zugrundeliegende „Material“ genügen muss. Wenngleich man sich darüber streiten kann, was für Zeichen Variablen sind und wovon sie Zeichen sein sollen, scheint doch festzustehen, dass es sich um Zeichen handeln

[228] Diese hier leicht angepassten Beispiele finden sich neben noch anderen an vielen Stellen in Aristoteles' Schriften, unter anderem im zweiten Buch seiner *Physik*.

muss. Dafür spricht auch, dass Variablen rekurrieren, d. h. innerhalb eines abgegrenzten Bereichs mehrfach als dieselben auftreten können müssen, um die Verwandtschaft von Argumentstellen anzuzeigen. Rekurrenz aber ist ein untrügliches Wesensmerkmal von Zeichen.[229]

Weitere Erfordernisse betreffen die Mannigfaltigkeit des Zeichenmaterials. Es müssen für die diversen Aufgaben hinreichend viele klar unterscheidbare Zeichen zur Verfügung stehen. Um beispielsweise bei einem dreistelligen Prädikat alle Möglichkeiten des Bestehens und Fehlens verwandtschaftlicher Beziehungen zwischen den Argumentstellen abbilden zu können (d. s. ‚$Fxxx$', ‚$Fxxy$', ‚$Fxyx$', ‚$Fyxx$' und ‚$Fxyz$'), braucht es neben dem Prädikatsbuchstaben drei weitere. Um eine Sprache zu bilden, die für jede endliche Arität einen endlosen Nachschub an Prädikaten gewährt, reichen die Elemente des Alphabets hingegen nicht mehr aus, weshalb man damit beginnt, Prädikats- und Individuenbuchstaben mit Zahlzeichen zu indizieren (‚x_1', ‚x_2', ..., ‚F_1', ‚F_2', ...). Das begrenzte alphabetische Reservoir wird also mit einem Zeichensystem gekreuzt, das die Bildung einer nach oben unbegrenzten Anzahl verschiedener und klar unterscheidbarer Zeichen ermöglicht.

Die Indizierung von Buchstaben lässt sich zahlreichen weiteren Zwecken zuführen. Zum Beispiel können damit verschiedene Typen von Variablen auseinandergehalten werden, wie Church vorschlägt, oder es lässt sich die Arität von Prädikaten markieren, wie es Quine in seiner Funktorenlogik vormacht. Anstatt zu indizieren, kann, wo es nur zwei Arten zu unterscheiden gibt, auch der in vielen Alphabeten enthaltene Kontrast zwischen Gross- und Kleinschreibung genutzt werden. Auf diese Weise halten prädikatenlogische Sprachen üblicherweise Individuen- und Prädikatsvariablen auseinander. Ein weiteres strukturelles Merkmal vieler Alphabete, das sich für logische und mathematische Zwecke nutzen lässt, ist die feste Reihenfolge der Elemente. So werden manchmal

[229] In der bildenden Kunst, insbesondere in der Malerei finden sich Gestaltungsmittel, die mit der Rekurrenz oder dem schematischen Gebrauch von Zeichen nah verwandt scheinen. Ich denke da an Bilder, die in verschiedenen Szenen eine Reihe von Ereignissen darstellen, sodass dieselben Figuren mehrmals auf der Leinwand vorkommen, wie zum Beispiel Adam und Eva in Lucas Cranachs des Älteren *Paradies* von 1530: `https://www.khm.at/de/object/533`. Verwandt mit dem Gebrauch von Platzhalternamen (s. u.) ist die, wie mir gesagt wurde, unter Malern verbreitete Praxis, die Gesichter ihnen nahestehender Personen, etwa von Familienmitgliedern oder Freunden, als Vorlagen zu verwenden, um historische, biblische oder literarische Figuren darzustellen. Indem die Malerin ein ihr bekanntes, den meisten Betrachtern aber unbekanntes Antlitz für ihre Darstellung, sagen wir, eines Heiligen in ihr Bild einbaut, wählt sie irgendein Antlitz, eine beliebige und austauschbare Gesichtsform. In den Augen der Betrachter wird diese Form gewissermassen zur Leerstelle, die dazu auffordert, die eigenen Anschauungen einzusetzen – anstatt zum Beispiel die Mutter der Malerin darin erkennen zu wollen. Das könnte erklären, weshalb diese Praxis, die auch bei der Darstellung göttlicher und heiliger Figuren zur Anwendung kam, nicht als Blasphemie galt.

Elemente aus verschiedenen Segmenten des Alphabets unterschiedlich gebraucht: zum Beispiel die letzten Glieder der Reihe nur als Individuenvariablen (‚x', ‚y' und ‚z' mit oder ohne Index), die Anfangsglieder nur als Individuenkonstanten (‚a', ‚b', ‚c', etc.) oder die Elemente aus der Mitte des Alphabets nur als Aussagenkonstanten (‚p', ‚q', ‚r', etc.).[230] Ordnungsrelationen zwischen den Buchstaben können ausserdem dazu dienen, die Abfolge der Argumentstellen von Prädikaten zu fixieren, sodass zum Beispiel die erste Argumentstelle bei allen Prädikaten immer durch die Variable x, die zweite durch die Variable y, usw. angezeigt wird, wie das in der sogenannten *fluted logic* der Fall ist. Im letzten Kapitel des hier vorliegenden Texts wird sich zeigen, dass solche Fixierungen der Argumentabfolge ebenso wie drastische Einschränkungen in der Anzahl verfügbarer Variablen die Grenzen der Entscheidbarkeit verschieben können.

Bei dem, woraus Variablen gebildet werden, muss es sich also um Zeichen handeln und das Zeichensystem, bei dem man sich bedient, muss eine Mannigfaltigkeit aufweisen, die für die verfolgten Zwecke hinreicht. Abgesehen davon bestehen, soweit ich sehen kann, keine weiteren Erfordernisse an den Variablenstoff. Die meisten Eigenschaften der Zeichen, die als Variablen eingesetzt werden, sind nebensächlich und nur bestenfalls nützlich. So ist zum Beispiel der Umstand, dass die Elemente des lateinischen Alphabets für sich genommen zumeist noch kein Wort mit eigener Bedeutung bilden, für ihren Gebrauch als Variablen sicherlich von Vorteil. Variablen werden in einen Diskurs eingeführt, um über irgendwelche Gegenstände – oder treffender: über den Begriff, unter den sie fallen – etwas auszusagen, und nicht um einen bestimmten Gegenstand herauszugreifen. Die als Variablen gebrauchten Zeichen selbst sind und bleiben ohne Bedeutung. Wie Platzhalternamen zeigen, ist die anfängliche Bedeutungslosigkeit des Zeichenmaterials jedoch keine notwendige Bedingung für den Gebrauch als Variable. Gebräuchliche Eigennamen (etwa ‚Jean Dupont' im frankophonen oder ‚Jane Roe' im englischsprachigen Raum) werden in gewissen Kontexten (in Werbungen oder amtlichen Dokumenten) auf solche Weise verwendet, dass sie ihre Bedeutung verlieren und ebenso gut durch schematische Buchstaben ersetzt werden könnten. Umgekehrt könnten anstelle von schematischen Buchstaben oftmals auch Eigennamen eingesetzt werden, ohne dass der verfolgte Zweck verfehlt würde. Tatsächlich wurde der schematische Gebrauch der Buchstaben ‚A' und ‚B' in der Kryptographie (besonders in erläuternden Beispielen) durch einen entsprechenden Gebrauch der Eigennamen ‚Alice' und ‚Bob' weitgehend verdrängt. Diese Möglichkeiten sind kein Zufall, sondern dem Wesen von Variablen geschuldet. Während

[230] Eine historisch wirkmächtige Nutzbarmachung der alphabetischen Ordnung findet sich bei Viète und im Anschluss daran bei Descartes, siehe dazu Anm. 102 und die dort angegebene Literatur.

sie ihrem Stoff nach bedeutungslose Zeichen sind, weshalb sich alphabetische Buchstaben als Zeichenmaterial besonders gut eignen, sind Individuenvariablen ihrer syntaktischen Form nach singuläre Terme. Da sie sich syntaktisch wie Eigennamen verhalten, können für sie Eigennamen eingesetzt werden.[231]

Im Falle von Artefakten, unter die ich Variablen zähle, gilt es indes zu beachten, dass die meisten Eigenschaften ihres Stoffs für die Dienste, die damit geleistet werden sollen, unerheblich oder sogar hinderlich sind. Dass Holz brennbar ist, ist für die Funktion von Tischen unerheblich und in manchen Situationen gefährlich. Desgleichen ist die Bedeutung, die ein Name in gewöhnlichen Kontexten besitzt, irrelevant oder sogar hinderlich, wenn er als Platzhalter verwendet wird, sodass ihm diese Bedeutung und allmählich auch die Verwendung als echter Eigenname abhandenkommt. (Wer mit Nachnamen Dupont würde heute noch den eigenen Sohn auf Jean taufen?). Bei Buchstaben sind die Lautwerte, die ihnen in Wörtern zukommen, irrelevant oder sogar hinderlich, wenn sie als Variablen gebraucht werden, da ihre Aussprache dann eine andere ist, sofern sie überhaupt ausgesprochen werden. Im Wort ‚Xylofon' zum Beispiel kommt dem ‚x' als Lautwert das Phonem /ks/ zu, wohingegen derselbe Buchstabe, wenn er etwa in einer Gleichung vorkommt, mit /iks/ ausgesprochen wird, sofern überhaupt eine mündliche Wiedergabe stattfindet. Die Art und Weise, wie das Zeichenmaterial – die Buchstaben, Eigennamen oder sonstigen Zeichen – als Werkzeug bedient wird, überschreibt die hinderlichen Eigenschaften, die ihrem (schrift-)sprachlichen Hintergrund geschuldet sind. Ihr spezifischer Gebrauch als Variablen drückt den Zeichen diejenigen Eigenschaften auf, die ihnen von Haus aus fehlen, um die vorgesehenen Zwecke erfüllen zu können.

Nach der aristotelischen Ursachenlehre, die hier als Ordnungsschema benutzt wird, ist die Form dasjenige, was zum Stoff hinzutritt, ihn formt und dadurch aktualisiert. Im Gegensatz zu Naturdingen haben Zeichen keine φύσις, keine inneren Prinzipien des Wachstums und der Bewegung.[232] Die Form muss von aussen dem Stoff gleichsam aufgedrückt werden. Ohne unser Zutun werden aus Markierungen keine Buchstaben und aus Buchstaben keine Variablen. Es ist die spezifische Weise ihres Gebrauchs, die ihnen Leben einhaucht und sie zu dem macht, was sie sind. Die Regeln dieses Gebrauchs, sei-

[231] Bei Prädikatsvariablen ist die Beurteilung der Sachlage etwas schwieriger. Auf der ersten prädikatenlogischen Stufe verhalten sie sich prädikativ und sind entsprechend durch Prädikate ersetzbar. Sobald die Prädikatsbuchstaben jedoch an Quantoren gebunden vorkommen, erhalten sie eine weitere Rolle: in Bezug auf die singulären Terme, die sie begleiten, verhalten sie sich weiterhin wie Prädikate, in Bezug auf die Quantoren und den ganzen Satz, worin sie vorkommen, dagegen wie generelle Terme, d. s. Gemein*namen*. Wie wir gesehen haben, betrachtet Quine dies als unheilvolle Vermischung verschiedener und getrennt zu haltender Gebrauchsweisen (siehe 1.3.3.6).

[232] Vgl. dazu Kap. 1 des zweiten Buchs der *Physik* (192 b 27-33).

en sie nun explizit gegeben oder bloss implizit darin angelegt, bilden das Gebiet, dessen Untersuchung unter die Formursache einzuordnen ist. Als Leitfrage dient die weiter oben erwähnte nach dem notwendigen Anteil in diesen Regeln, der dafür sorgt, dass Variablen den von ihnen erwarteten Beitrag zu leisten vermögen.

Philosophischen Augen mag die Untersuchung des Buchstabengebrauchs in den halbformalen Zusammenhängen der Mathematik reizvoller erscheinen als das Studium der strengen Regelwerke formaler Logiken und der darin formulierten Theorien. Diese Regelwerke sind ja zumeist offen dargelegt und wohlbekannt, sodass sie kaum Raum lassen für unerwartete Einblicke. Ein anderes Bild dagegen bietet der Blick auf die diversen Mittel, die in der mathematischen Praxis für gewöhnlich zum Einsatz kommen und die strengen Anforderungen an formale Systeme in der Regel nicht erfüllen. Hier ergeben sich Fragen über Fragen, die einer philosophischen Betrachtung wert scheinen: *Werden Variablen in allen verbreiteten Beweisformen auf gleiche Weise gebraucht oder gibt es wichtige Unterschiede?* Unterliegt ihr Gebrauch in Widerspruchsbeweisen zum Beispiel denselben Regeln wie in Induktionsbeweisen? Spielen Variablen in beiden Fällen dieselbe Rolle? Wenn nicht, weshalb? *Und was genau ist ihre Gebrauchsweise in rekursiven Definitionen?* Im Wesentlichen dieselbe wie in Definitionen anderer Art, etwa in der Stetigkeitsdefinition, oder doch eine andere? Können Buchstaben, die über ein Kontinuum reichen sollen, im Grunde dieselben Zeichen sein wie diejenigen, die für scheinbar verwandte Zwecke in der diskreten Mathematik eingesetzt werden? *Werden Buchstaben bei der Darstellung von Algorithmen auf gleiche Weise gebraucht wie in anderen mathematischen Gebieten oder lassen sich hier Eigentümlichkeiten ausmachen? In welchen Disziplinen finden sich Notationen, die gebundene Variablen enthalten, und in welchen nicht?* Sagt das etwas über den Charakter der verschiedenen Disziplinen aus und, wenn ja, was? *Überwiegt in der Mathematik der inklusive Gebrauch von Buchstaben oder gibt es auch Beispiele exklusiver*[233] *Gebrauchsweisen, insbesondere bei Variablen?* Was könnten die Gründe sein, die den Ausschlag zugunsten inklusiver Gebrauchsweisen gegeben haben, zumal Aristoteles' Buchstaben in der Syllogistik exklusiv gelesen werden mussten? Usw. usf. Offenbar harren Grammatik und Stilistik des Buchstabengebrauchs in der Mathematik weiterhin ihrer Darstellung.

[233] Hintikka (1956) folgend bezeichne ich als exklusiv jene Variablenschreibweise, die Wittgenstein in der *Logisch-philosophischen Abhandlung* unter 5.53 vorschlug und die im Vorwort zum hier vorliegenden Text erwähnt wurde: Eine Variable x und eine Variable y sollen sich ausschliessen, wenn sie im Schnittbereich ihrer Quantoren vorkommen; d. h., wenn die Formel, in der sie vorkommen, instanziiert wird, müssen sie durch verschiedene Konstanten ersetzt werden. Als inklusiv wird die davon abweichende und in der Logik übliche Schreibweise bezeichnet, die es erlaubt, verschiedene Variablen durch Vorkommnisse derselben Konstante zu ersetzen.

Für die Vorrangigkeit des mathematischen Buchstabengebrauchs spricht ferner, dass viele Gebrauchsweisen der modernen Logik durch Übertragung aus älteren Gepflogenheiten gewonnen wurden, die sich zuerst in der Mathematik etabliert hatten. Dennoch wäre es ein Fehler, die vielstudierten Regelwerke formaler Systeme als Gegenstand philosophischer Betrachtung zu unterschätzen. Die Kanonisierung bestimmter Systeme, vor allem der Prädikatenlogik erster Stufe, hat dazu geführt, dass mögliche Abweichungen von der Norm nur wenig Beachtung fanden, obwohl ihre Untersuchung philosophisch Wertvolles freilegen könnte. Eine oft übersehene und eher selten studierte Abweichung stellt die exklusive Gebrauchsweise von Buchstaben dar, nach der verschiedene Variablen, wenn sie im Schnittbereich ihrer Quantoren vorkommen, unterschiedliche Werte annehmen müssen. Die konsequente Anwendung dieser Regel auf die ganze Prädikatenlogik beleuchtet unter anderem die Rolle des Identitätszeichens. Wie sich leicht zeigen lässt, dient das Identitätszeichen im Wesentlichen nur dazu, den Zugriff auf *verschiedene* Gegenstände zu sichern bzw. jenes Verhältnis anzuzeigen, das ich in einer früheren Arbeit die Fremdschaft von Argumentstellen genannt habe, da es zur Verwandtschaft dieser Stellen konträr entgegensteht.[234] Ist der Ausdruck von Fremdschaft einmal in den Buchstabengebrauch eingebaut, hat das Identitätszeichen ausgedient.

Aufschlussreich ist umgekehrt auch das Bewusstsein dafür, dass wohl jede Notation logisch Relevantes verschluckt. Die Oberflächenform von Ausdrücken kann dazu verleiten, Beziehungen, die auseinandergehalten werden könnten und vielleicht sollten, miteinander zu vermengen. In der üblichen Quantorenschreibweise zum Beispiel werden Bereiche verschiedener Art – der *priority* und der *binding scope* – übereinander gelagert, was es schwierig macht zu erkennen, dass hier jeweils unterschiedliche Abhängigkeitsrelationen am Werk sind. Die Befreiung von dieser oft unreflektierten Konvention und die Einführung verzweigter Quantoren ermöglicht, wie weiter oben mehrfach angedeutet wurde, die Entwicklung einer anderen, stärkeren Ausprägung der Prädikatenlogik.[235]

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass sowohl unter die Stoff- als auch unter die Formursache Bemühungen fallen, sich einen besseren Eindruck zu verschaffen von den Weiten des Möglichkeitsraums, in dem sich der tatsächlich bestehende Buchstabengebrauch bewegt. Die bereits aufgeworfenen Leitfragen nach dem Wesentli-

[234] Vgl. Büchi (2016, S. 173). Das Identitätszeichen wird bekanntlich für weitere Zwecke genutzt, etwa um nackte Existenzaussagen („a existiert“ mit ‚$\exists x(a = x)$‘) und absolute Zahlangaben („Es gibt mindestens 2 Gegenstände“ mit ‚$\exists x, y(x \neq y)$‘) zu formalisieren, oder auch als praktisches Versatzstück zur Bildung paradigmatischer Tautologien (‚$\forall x(x = x)$‘). Diese Verwendungen sind jedoch insofern unwesentlich, als sie die Ausdruckskraft des Systems nicht tangieren.

[235] Siehe 1.2.3.3 und 1.3.3.5. Für eine Diskussion der Distanz, die durch die Zulassung verzweigter Quantoren zur kanonischen Prädikatenlogik entsteht, vgl. Quine (1969a, S. 108-112).

chen an diesem Gebrauch sind daher um die folgenden zu ergänzen: *Mit welchen anderen semiotischen Mitteln liesse sich der Beitrag, den Buchstaben jeweils leisten, wenn sie als Variablen gebraucht werden, ebenfalls verwirklichen? Welches Potenzial, das Variablen ausserdem entfalten könnten, wird durch die Wahl des Zeichenmaterials und die Festlegung bestimmter Gebrauchsregeln gleichsam verschluckt? Und für welche Zwecke könnte man dieses mächtige Werkzeug sonst noch gebrauchen?*

Aus der Beantwortung all dieser Fragen sollte sich ein klareres Bild von den syntaktischen und semantischen Aspekten des Variablengebrauchs ergeben. Deshalb gilt es, die irrigen Vorstellungen, zu denen die rätselhaft schillernde Semantik von Variablen verleitet, ebenfalls hier unter den Stoff- und Formursachen zu behandeln. Der aristotelische Formbegriff lässt dies durchaus zu, zumal bei Artefakten die Form zuerst als Vorstellung in der Seele herstellender Menschen angesetzt wird.[236] Der konkrete Buchstabengebrauch wäre demnach als Verwirklichung von Vorstellungen zu verstehen, die man sich in Anbetracht bestimmter Zwecke von diesem Gebrauch gemacht hat. Besteht der Zweck zum Beispiel darin, einen allgemeinen Satz über einen Begriff F zu beweisen, wird man sich (sehr vereinfacht gesagt) vorstellen, dass es doch hilfreich wäre, einen beliebigen unter F fallenden Gegenstand herauszugreifen und mit einem Namen zu versehen. Denn danach würde sich die Demonstration an diesem Einzelding durchführen lassen. Dass Missverständnisse dieser Art den Buchstabengebrauch motiviert oder zumindest begleitet haben, ohne ihm deswegen zu schaden, steht fest. Die philosophische Untersuchung erhält nun ihren Gegenstand in der Diskrepanz, die zwischen der irrigen Vorstellung besteht, Variablen seien Namen für Gegenstände, und dem tatsächlichen Variablengebrauch als Kenntlichmacher logischer Formen. Um zu sehen, dass, und zu verstehen, wie Vorstellungen dieser Art den Buchstabengebrauch und seine Entwicklung im Laufe der Zeit mitgeformt haben, bedarf es aber des Blicks in die Geschichte.

Bewegungsursache Als Bewegungsursache eines Seienden versteht Aristoteles primär dasjenige, was zur κίνησις, zur „Bewegung“, dieses Seienden den ersten Anstoss gab. Unter κίνησις wiederum fällt alles Prozesshafte und damit auch die Entstehung und Veränderung von Seiendem.[237] Wer nach der Bewegungsursache eines Artefakts fragt, fragt also nach dessen Urhebern oder Erneuerern: durch wen als erstes es hervorgebracht und auf diese Weise eingesetzt wurde, aber auch: wer für eine bestimmte Veränderung der

[236] Vgl. dazu Kap. 2 des dritten Buchs der *Physik* (202 a 9-12) sowie Kap. 7 des siebten Buchs (Z) der *Metaphysik* (1032 a 32 - 1032 b 14).

[237] Vgl. dazu Kap. 3 des zweiten Buchs der *Physik* (194 b 29-32, 195 a 22-23) sowie in Kap. 2 des fünften Buchs (Δ) der *Metaphysik* (1013 a 29-32).

Beschaffenheit oder der Verwendung verantwortlich ist. So betrachtet, könnte Aristoteles als der „erste Beweger“ des schematischen Buchstabengebrauchs auf dem Gebiet der Logik gelten. Denn, obwohl ein verwandter Gebrauch in der Geometrie wahrscheinlich bereits vorlag, scheint doch er der erste gewesen zu sein, der dieses Werkzeug auf das Gebiet der Logik übertrug und zu logischen Zwecken einsetzte.

Aufschlussreicher, als zu wissen, wer was zu welchem Zeitpunkt erfunden hat, wäre es, zu verstehen, welche Umstände eine bestimmte Neuerung – Erfindung, Anpassung oder Weiterentwicklung – ermöglicht oder begünstigt haben. Zu diesen Umständen zählt im Fall von Variablen die gesamte literale Praxis der betreffenden Wissenschaftsgemeinde. Dabei handelt es sich um ein in vielen Einzelheiten oft obskur bleibender Komplex von Gewohnheiten, Konventionen und anderen Normen, die im Schriftgebrauch der Zeit vorherrschend waren. Typischerweise wird diese Praxis von mächtigen Mythen und Theorien über die Schrift begleitet – über ihre Entstehung, ihren korrekten Gebrauch und ihr Verhältnis zu Sprache, Denken und Realität. Zu untersuchen wären daher auch diese Fragen: *Welche Mythen und Theorien über die Schrift im Allgemeinen sowie über das Alphabet und seine Elemente im Speziellen lagen dem Gebrauch von Buchstaben in der älteren griechischen Mathematik zugrunde? Gibt es in anderen Kulturen zu dieser Zeit oder davor vergleichbare Gebrauchsweisen schriftlicher Zeichen? Oder hat vielmehr das alphabetische System der Griechen diese Innovation erst ermöglicht? Welche Vorstellungen und Annahmen begleiteten oder begünstigten den so selbstverständlich daherkommenden Buchstabengebrauch Aristoteles’ für die Zwecke seiner Syllogistik? Gab es neben den vermuteten Gebrauchsweisen seiner mathematischen Zeitgenossen womöglich andere Schreibpraktiken – das Abkürzen etwa oder das Verwenden von Platzhalternamen –, die der Gebrauchsweise in der Syllogistik als Vorbild gedient haben könnten?*

Bei den Anfängen stehen zu bleiben und bloss die vermuteten „ersten Beweger“ in den Blick zu nehmen, wäre indes nicht ausreichend. Man möchte nicht nur wissen, woher Variablen kommen, welchem Boden sie entwachsen sind, sondern auch nachvollziehen, wie sie zu einem aus der modernen Mathematik und Logik nicht mehr wegzudenkenden Allzweckwerkzeug wurden. Dass es seit der Antike zu grossen Verschiebungen kam, steht ausser Frage. Gefragt werden müsste also: *Welche wesentlichen Wandlungen durchlief der Buchstabengebrauch auf dem Gebiet der Mathematik und der Logik? Was waren jeweils die Hintergründe oder Voraussetzungen der einzelnen Veränderungen? Und von welcher Art ist dieser Sprach- bzw. Schriftwandel, der dem Buchstabengebrauch in der Mathematik und später in der Logik zum Durchbruch verhalf?* Zu fragen wäre aber auch, was in Anbetracht der Bedeutung für die betreffenden Disziplinen vergleichsweise selten untersucht wurde: *Wie wirkte sich die Verbreitung und stetige Erweiterung des Gebrauchs von Buchstaben auf die verschiedenen mathematischen Disziplinen sowie später auf die Logik aus? Was für methodische Möglichkeiten und was für Denkräume eröffneten sich dadurch?* Und schliesslich damit zusammenhängend: *Wie konnte dieses Werkzeug für die mathematischen Disziplinen und ihre Anwendungen derart wichtig werden?*

Im Einzelnen müsste zuerst wohl der Frage nachgegangen werden, ob jene Disruptionen, die im ausgehenden Mittelalter und in der frühen Neuzeit die Schriftlichkeit als Ganze erschütterten, Bedingungen der Möglichkeit für die symbolische Revolution darstellten, die ab dem 17. Jahrhundert die ganze Mathematik zu erfassen begann (siehe Anm. 102). Selbst wenn sich dabei herausstellen sollte, dass die wirklichen Ursachen dieser Revolution letztlich in einer inhaltlichen Neuausrichtung lagen – in einer Verschiebung der Betrachtungsweise von spezifischen Quantitäten auf Quantitäten im Allgemeinen zum Beispiel[238] –, fragt sich immer noch, wie dies auf der Notationsebene verwirklicht wurde. In Bezug auf die Herausbildung der modernen Logik im Verlauf des 19. Jahrhunderts stellen sich analoge Fragen, zumal auch hier am Anfang eine Algebraisierung der Disziplin stand.

Für unsere Zwecke können letztlich alle historischen Betrachtungen über Variablen unter der Bewegungsursache vereinigt werden. Anders als man meinen könnte, steht dies nicht im Widerspruch zu dem, was Aristoteles selbst über die Bewegungsursache zu sagen hat. Dass er unter den Begriff der κίνησις auch geschichtliche Abläufe fasst, belegt ein Beispiel, das er mehrfach und an wichtigen Stellen anführt. Auf die Frage: «[W]arum brach der Persische Krieg aus gegen die Athener?», laute die Antwort: «Weil sie zusammen mit den Eretriern in Sardis einfielen; dieses nämlich brachte es zuerst in Bewegung».[239] Bewegungsursache für diesen Krieg – was sozusagen den Stein ins Rollen brachte – war nach Aristoteles (der hier Herodot folgt) der Einfall der Athener in Sardes.

Unter den vier αἰτίαι des Aristoteles gilt die Bewegungsursache zumeist als diejenige, die am ehesten dem entspricht, was wir heute geneigt wären, als Ursache anzusehen.[240]

[238] In diesem Zusammenhang ist in Detlefsen (2005, S. 254) die Rede von einem «shift of focus, generally attributed to Viète (1540-1603) and Descartes, from particular quantities to quantities in general or, to use the traditional terminology, from particular quantities to species of quantities». Der algebraische Buchstabe wird demnach zum Zeichen einer Spezies.

[239] Das Beispiel wird in Kap. 11 des zweiten Buchs der *Analytica posteriora* (94 a 36 - b 2) gegeben. Eine Kurzform findet sich in Kap. 7 des zweiten Buchs der *Physik* (198 a 19-20). Dass geschichtliche Abläufe unter dem Aspekt der Bewegungsursache als kausale Ketten betrachtet werden können, unterstreicht eine andere Passage unweit der eben erwähnten (198 a 33-35): «einem Werden gegenüber nimmt die Warumfrage zumeist doch diese Gestalt an: Was geschieht am Anfang, was geschieht darauf? Was hat zuerst eine Wirkung ausgeübt oder was zuerst eine Einwirkung erfahren, (und was daraufhin?) und so hintereinander immer weiter».

[240] Das gilt offenbar bereits für spätantike Kommentatoren, vgl. Frede (1980, S. 126-127).

Dazu passt, dass sie oft unter ihrem lateinischen Namen als *causa efficiens* angesprochen wird. Gegenüber Aristoteles' breiter Auffassung von Bewegungsursachen stellt das Attribut ‚efficiens' allerdings eine deutliche Verengung dar.[241] Das paradigmatische Beispiel einer Wirkursache, einer *causa efficiens*, ist die Künstlerin, die ihre Plastik in Stein meisselt. Wie das vorherige Beispiel zeigt, zählt Aristoteles zu den Bewegungsursachen aber auch Ereignisse, die nicht durch aktive Einwirkung das verursachen, als dessen Ursache sie gelten. Der Einfall der Athener in Sardes „bewirkte" den Persischen Krieg, wie ein Schachzug einen anderen „bewirken" oder, besser gesagt, nach sich ziehen kann. Zum Krieg hätte es auch ohne diesen Einfall kommen können, und umgekehrt musste auf diesen Einfall, selbst unter Berücksichtigung aller Begleitumstände, kein Krieg folgen. Dennoch ist es nicht zwingend falsch oder sinnlos, von dem ersten zu sagen, es habe das zweite ausgelöst, oder von dem zweiten, es sei eine Folge des ersten. Wir verstehen, was damit gesagt wird, und machen von Aussagen dieser Form unter anderem in unseren Bemühungen Gebrauch, den Gang der Geschichte nachzuvollziehen.

Mit unserer Untersuchung über das Wesen von Variablen verhält es sich ähnlich und doch anders. Auch hier geht es darum, einen Zustand, d. i. den heutigen Gebrauch von Buchstaben als Variablen, aus seiner Geschichte heraus zu verstehen. Und dazu braucht es die Rekonstruktion jener Abfolge von Erfindungen, Aneignungen und sonstigen Beeinflussungen, von Anpassungen, Veränderungen und schrittweisen Verschiebungen wie auch von gelegentlichen Brüchen, aus denen der heutige Gebrauch hervorgegangen ist – möglichst unter Berücksichtigung der jeweiligen Begleitumstände und soweit es die Quellenlage erlaubt. Daraus, so das Ziel, sollte ein Bild resultieren, an dem verständlich wird, wie und weshalb sich unter den unzähligen Möglichkeiten gerade diese Gebrauchsweisen verwirklichten. In diesem Bild, das die Form einer Entwicklungshypothese annehmen kann, aber nicht muss, wird das Verhältnis von Ursache und Wirkung, bzw. von Anlass und Folge, oftmals dem im Kriegsbeispiel entsprechen: Was als Ursache einer Wirkung dargestellt wird, ist für das Eintreten dieser Wirkung weder notwendig noch hinreichend, sondern erhöht bestenfalls die Wahrscheinlichkeit dafür. Indem Raum geschaffen wird für Zufall, Fügung und Willkür, kann dem kontingenten Charakter des Buchstabengebrauchs und seines Wandels Rechnung getragen werden.

Gleichwohl unterscheidet sich der Gegenstand unserer Untersuchung wesentlich von Überfällen, Kriegen und anderen historischen Ereignissen. Weder die Gebrauchsweisen von Zeichen noch die sprachlichen Praktiken, in die sie eingewoben sind, sind Ereignisse. Wenn überhaupt, sind sie Klassen von Ereignissen, wobei diese Ereignisse über einen

[241] Für die Geschichte dieser Verengung, vgl. Frede (1980) und Gourinat (2013).

beinah beliebig weiten Zeitraum verstreut sein können. Entsprechend verfehlt wäre es, die Variablengeschichte als Abfolge von Einzelereignissen in der Zeit darstellen zu wollen. Die Fixierung auf Bewegungsursachen – auf das, was den Anstoss gab zu Veränderungen im Variablengebrauch – würde vielmehr für ein sicheres Scheitern des Unterfangens sorgen. Denn, bevor sich nach Bewegungsursachen suchen lässt, müssen erst die relevanten Veränderungen erfasst und beschrieben sein, wofür wiederum die anderen Ursachen zwingend in die Betrachtung miteinbezogen werden müssen. Das betrifft nicht nur die jeweiligen Stoff- und Formursachen, sondern auch die Zweckursachen, da die verschiedenen Zwecke, denen Variablen heute dienen, nicht alle von Anfang vorgegeben, ja nicht einmal erdenklich waren. Vieles von dem, was uns im Umgang mit Variablen selbstverständlich erscheint, erhält überhaupt erst einen Sinn vor dem Hintergrund der Mathematisierung und Formalisierung der Logik im Verlauf des 19. Jahrhunderts. Zu keinem Zeitpunkt in der Geschichte war auch nur ansatzweise vorauszusehen, wie und wozu sich dieses Werkzeug, das zu Aspektwechseln geradezu einlädt, sonst noch anwenden liesse. Das gilt nach wie vor.

Ungeachtet aller Unwägbarkeiten, Kontingenzen und Singularitäten, die den Variablengebrauch in der Vergangenheit zweifellos geprägt haben und wohl weiterhin prägen werden, stellt sich am Ende dieses Abschnitts dennoch die Frage, ob in dem Durcheinander der Wandlungen gewisse Regelmässigkeiten auszumachen sind, die auf ein zugrundeliegendes Gesetz hindeuten könnten. Da es sich dabei letztlich um eine Form von Sprachwandel handelt, und Sprachen ihrem Wesen nach regelhaft sind, ist die Frage weniger abwegig, als sie auf den ersten Blick erscheinen mag. Eine Geschichte des Buchstabengebrauchs in Logik und Mathematik müsste versuchen, eine Antwort auf die Gesetzesfrage zu bieten. Geschrieben wurde diese Geschichte noch nicht.

1.4.3. Eingrenzung des Untersuchungsgebiets

Der Vorschlag besteht also darin, die sokratische Frage nach dem Was, die sich als zu eng erwies, in die breiter gefächerte aristotelische Warumfrage mit ihren vier Aspekten zu entfalten: *Warum, d. h. zu welchen Zwecken, gebrauchen wir Variablen? Warum müssen sie so beschaffen sein und so gebraucht werden, um diese Zwecke zu erfüllen?* Oder: *Warum können sie dabei helfen, diese Zwecke zu erfüllen, wenn sie so beschaffen sind und so gebraucht werden?* Und schliesslich: *Warum gebrauchen wir überhaupt Variablen, d. h., wie sind wir dazu gekommen Buchstaben auf diese Weise und für diese Zwecke einzusetzen?* Die ursprüngliche Was-ist-Frage, von der die Untersuchung ausging, verschwindet dadurch nicht. Vielmehr tritt sie unter den verschiedenen Aspekten jeweils als Frage nach der Einheit in der Vielfalt wieder auf: *Gibt es einen übergeordneten Zweck, dem der Variablengebrauch verpflichtet ist? Gibt es ein gemeinsames Substrat an Praktiken, aus dem dieser Gebrauch hervorgegangen ist? Gibt es eine grundlegende Gebrauchsweise, die in allen anderen enthalten ist oder auf die sie abzielen?* Schliesslich: *Gibt es Regelmässigkeiten im Wandel des Buchstabengebrauchs, an denen eine Entwicklungsrichtung ersichtlich wird, oder zerfällt dieser Gebrauch in disparate Teile?* Und ferner: *Gibt es einen Ursprung, aus dem der Gebrauch von Buchstaben als Variablen entstanden ist, oder sind verschiedene Ursprünge anzunehmen?*

Um den Gegenstand unserer Untersuchung – den Gebrauch von Buchstaben als Variablen – in seiner Vielfältigkeit erfassen zu können, braucht es diese Entfaltung der Grundfrage. Das Verständnis, nach dem ich strebe und das den Hauptzweck dieser Arbeit darstellt, müsste eines sein, das sich durch die Warumfragen, die der Variablengebrauch aufwirft, nicht in Verlegenheit bringen lässt. Zugleich ist klar, dass ich mir damit eine Lebensaufgabe gestellt habe. Die entfaltete Fragestellung spannt jedenfalls ein Untersuchungsgebiet auf, dessen Umfang und Komplexität bei Weitem übersteigt, was ich auf den hier verbleibenden Seiten bewältigen könnte. Für die Zwecke des vorliegenden Texts braucht es daher nach der Entfaltung der Grundfrage eine Eingrenzung. Ich werde mich hier darauf beschränken müssen, die Grundlagen zu schaffen, derer ich bedarf, um eine philosophisch fruchtbare Untersuchung des Zusammenhangs von Variablengebrauch und Entscheidbarkeit anzugehen. In dem, was nun folgt, wird dieser Entscheid ausführlich begründet. Die Begründung enthält sowohl theoretische als auch praktische Erwägungen.

Da sie noch nicht geschrieben wurde, läge es nahe, mit der Geschichte des Variablengebrauchs zu beginnen. Die historische Betrachtungsweise kann oder muss sogar, wie wir sahen, alle vier Aspekte unserer entfalteten Fragestellung berücksichtigen. Wenngleich das Augenmerk auf die Wandlungen und ihre Ursachen gelegt würde, müssten, um diese zu verstehen, auch die anderen „Ursachen" des betreffenden Buchstabengebrauchs untersucht werden. Doch gerade dieses Erfordernis spricht dagegen, mit der historischen Arbeit zu beginnen. Es wäre verkehrt, eine gesamtheitliche Darstellung der Geschichte von Variablen anzugehen, bevor aus der Untersuchung der anderen Aspekte bessere Ergebnisse vorliegen. Ferner könnte an der Variablengeschichte ein etwas allgemeineres Interesse bestehen, sodass es klüger wäre, aus diesem Teil der Untersuchung eine separate Arbeit zu machen, die für die Veröffentlichung in Buchform und für eine breitere Leserschaft konzipiert ist. Die ganzen methodologischen Überlegungen, die hier enthalten sind, wären in diesem Umfang fehl Platz.

Der hier vorliegende Text erfüllt denn auch eine andere Funktion. Wie im Vorwort festgehalten, stellt er eine Bestandsaufnahme meiner bisherigen Bemühungen dar und versammelt die wichtigsten Gedanken, die mir seit Beginn der Arbeit an diesem Stoff gekommen sind. Entsprechend soll dieser Text als Grundlage und Ausgangspunkt dienen, um in Zukunft verschiedene weitere Vorstösse zu unternehmen: in die Geschichte der Logik und Mathematik einerseits, andererseits aber auch auf technischeres Terrain. Hier werden die philosophischen Vorbetrachtungen geleistet, die mir für diese Zwecke nötig erscheinen.

Wie wir gesehen haben, herrscht viel Unklarheit darüber, was für Zeichen Variablen sind. Ihr semantisches Wesen wirft nach wie vor Rätsel auf. Was liegt also näher, als damit zu beginnen und Variablen unter dem Aspekt ihrer Stoff- und Formursachen zu untersuchen? Da sich aber unser Untersuchungsgegenstand hier von seiner mannigfaltigsten Seite zeigt, erscheint die Gefahr, sich darin zu verlieren, am grössten. Zuerst wären weitere Vorarbeiten mit begrenzteren Zielen erforderlich. So bedürfen die Fragen, ob Variablen referieren oder nicht und welche Eigenschaften sie mit Namen teilen und welche nicht, einer gezielteren und vertiefteren Behandlung, als hier geboten werden konnte. Ausserdem handelt es sich dabei um Fragen, über die in der Literatur zurzeit debattiert wird, sodass es klüger wäre, die Voruntersuchungen in ein kompakteres Format zu fassen, das sich für die Veröffentlichung in entsprechenden Zeitschriften eignet. Dessen ungeachtet sind aus meiner Sicht weitere Fallstudien zum Buchstabengebrauch in den halb-formalen Kontexten der Mathematik dringend notwendig, um einen besseren Eindruck von der dort bestehenden Mannigfaltigkeit an Gebrauchsweisen zu erhalten. Und schliesslich ist für die Untersuchung der Mythen und Missverständnisse, die diesen Buchstabengebrauch mitunter begleiten, der historische Blickwinkel unerlässlich. Deshalb gehört dieser Teil der Untersuchung in die eben erwähnte historische Arbeit.

Es bleibt also allein der Aspekt der Zweckursache übrig. Da auch hier die Gefahr besteht, den Überblick zu verlieren, diesmal vor lauter aufkeimenden Zwecken, braucht es die Konzentration auf Wesentliches. Im Verlauf dieses Kapitels hat sich immer wieder gezeigt hat, dass die Kenntlichmachung von Form zu den wichtigsten wiederkehrenden Aufgaben von Variablen gehören. Viele Gebrauchsweisen hängen wesentlich damit zusammen, letztlich vielleicht alle. Dieser Vermutung nachzugehen und den Zweck auszuleuchten, der womöglich den Wesenskern des Variablengebrauchs ausmacht, erscheint hinreichend erstrebenswert. Wie sich indessen gezeigt hat, treten Variablen, wenn sie dazu verwendet werden, logische Formen kenntlich zu machen, charakteristischerweise als Marken oder Grenzzeichen auf: Sie markieren Grenzen von logischer und epistemologischer Bedeutung. Welche sind das?

In Aristoteles' schematischer Darstellung syllogistischer Modi wird durch den Gebrauch von Buchstaben die konstante Form von der variablen Materie abgegrenzt. Indem die Buchstaben erstens anzeigen, was allen Schlüssen eines Modus gemeinsam ist, und zweitens die Stellen markieren, an denen die Gattungsnamen in das Schema einzutreten haben, damit ein konkreter Schluss hervorgeht, dienen sie der Kenntlichmachung syllogistischer Formen. Dabei gehören die Buchstaben selbst weder Form noch Materie an, sondern markieren die Grenze dazwischen. Semantisch betrachtet, erscheinen diese Buchstaben als *termini transcendentes*, wie sie in der mittelalterlichen Logik hiessen. Als transzendentale Zeichen bezeichnen sie zugleich alles und nichts: nichts, weil sie keine Materie bestimmen, alles, weil sie auf jede Materie anwendbar sind.

In der neuzeitlichen Algebra wird dem Buchstabengebrauch die Aufgabe zugeteilt, die bekannten Grössen einer Gleichung von den noch unbekannten abzugrenzen. Die Verwendung von Elementen aus verschiedenen Segmenten des Alphabets verstärkt diese Wirkung. Durch das Einsetzen einfacher Zeichen auch für die Unbekannten wird so getan, als sei bereits bekannt, was es erst noch zu bestimmen gilt. Dass es möglich ist, mit diesen eigentlich bedeutungslosen Zeichen auf Unbekanntes zuzugreifen, wird einfach angenommen. Dem liegt eine Haltung zugrunde, die als anmassend bezeichnet werden müsste, wäre sie nicht so charakteristisch für die Mathematik und ihre Erfolgsgeschichte. Hilbert hat diese Haltung in einer Vorlesung auf den Punkt gebracht. Da sich die Gelegenheit bis jetzt nicht geboten hat, die einschlägige Stelle anzuführen, sei dies hier nachgeholt:[242]

> Ich habe die Fähigkeit, *Dinge* zu denken und sie durch einfache Zeichen $(a, b, ..., X, Y, ...)$ derart in vollkommen charakteristischer Weise zu bezeichnen, dass ich sie daran stets eindeutig wiedererkennen kann; mein Denken operiert mit diesen Dingen in dieser Bezeichnung in gewisser Weise nach bestimmten Gesetzen und ich bin fähig, diese Gesetze durch Selbstbeobachtung zu erkennen und vollständig zu beschreiben.

So kühn dies klingen mag, der Erfolg scheint der Haltung, die hier zum Ausdruck kommt, recht zu geben. Gerade in der Algebra hat sie sich bewährt, da durch die Einführung von Buchstaben für unbekannte Grössen ihr Wert leichter bestimmt werden kann. Als noch folgenreicher erwies sich die konsequente Anwendung dieser Methode auf Fälle, in

[242] Die Stelle ist der Mitschrift einer Vorlesung Hilberts über die *Logischen Prinzipien des mathematischen Denkens* von 1905 entnommen. Meines Wissens ist diese durch Ernst Hellinger angefertigte Mitschrift weiterhin unveröffentlicht. Der erste Satz aus dem obigen Zitat ist in Grattan-Guinness (2000, S. 215 (Anm. 41)) abgedruckt.

denen zunächst keine Lösung gefunden wurde. Denn daraus unter anderem ergab sich die schrittweise Erweiterung des Zahlbereichs auf negative, irrationale, transzendente und schliesslich imaginäre Zahlen. Indem Buchstaben für das Denken über Dinge zum Einsatz kommen, deren Legitimität umstritten ist, dienen sie nicht nur dazu, die Grenzen des Bekannten, sondern auch die Grenzen des Denkbaren zu verschieben und dadurch, um hier nochmals Frege anzuführen, «die geistige Kraft der Menschheit» zu vermehren.[243]

Nach unserer Analyse weiter oben dient der algebraische Buchstabengebrauch letztlich ebenfalls der Kenntlichmachung von Form. Indem die Buchstaben Argumentstellen und ihre verwandtschaftlichen Verflechtungen anzeigen, lassen sie die Form von Begriffen und Beziehungen in ihren logischen Verhältnissen hervortreten. Ähnlich wie bei Aristoteles sind auch Freges Buchstaben blosse Hilfszeichen zur Markierung der Grenze zwischen konstanter Form und variabler Materie, d. i. zwischen dem Funktionszeichen und den Argumentzeichen, die dieses zu ergänzen vermögen. Die Buchstaben an den Argumentstellen gehören weder zur Funktion noch zum Argument, sondern markieren die Grenze dazwischen.

Bei Frege und anderen Logizisten sind diese Buchstaben ausserdem Grenzzeichen noch in einem anderen Sinn. Als logische Variablen reichen sie, semantisch betrachtet, über alles, worüber widerspruchsfrei quantifiziert werden kann. Ihre einzigen Grenzen sind die Schranken des logisch Sinnvollen, von aussen markiert durch Antinomien. Um die Antinomien zu umgehen, die ein schrankenloses Quantifizieren nach sich ziehen würde, bedarf es entsprechender Vorsichtsmassnahmen, wozu auch die Typisierung von Variablen gehört. Manche wie Quine lehnen solche Massnahmen jedoch ab und ziehen es vor, Variablen, d. s. Buchstaben, die an Quantoren gebunden werden dürfen, nur für die erste Stufe zuzulassen und damit jede Quantorenlogik höherer Stufe zu verbieten. Andere hingegen betonen die Kontinuitäten, die zwischen der ersten und den höheren Stufen der Prädikatenlogik bestehen. Folglich läge es nahe, die Untersuchung auf diesen Grenzstreit zu richten, bei dem der Gebrauch von Variablen offenbar eine zentrale Rolle spielt. Weiter oben haben wir ja bereits den Anfang gegen Quine gemacht. Und selbst für Quinianer handelt es sich bei der strittigen Grenze um eine höchst bedeutsame. Immerhin kann sie dazu dienen, Logik und Mathematik voneinander abzutrennen.

Gegen diese Wahl spricht, dass vor allem auch ausserlogische Gründe gegen die Möglichkeit von Logiksystemen höherer Stufe geltend gemacht werden. Um die metaphysischen Gründe zu bewerten, die etwa Quine anführt, müsste zuerst die Frage nach der Referenz von Variablen geklärt werden. Dies aber, haben wir gesagt, soll für eine an-

[243]Frege (1879, S. V); siehe auch Anm. 76.

dere Gelegenheit und ein kompakteres Format aufgespart werden. Hingegen beziehen sich die logischen Gründe, die nicht nur Quine, sondern auch andere anführen, auf metalogische Resultate, insbesondere auf die semantische Unvollständigkeit von Kalkülen höherer Stufe. Um diese Gründe näher untersuchen zu können, braucht es eine vertiefte philosophische Auseinandersetzung mit ebendiesen Resultaten – was im Folgenden auch geschehen soll. Die metalogischen Sätze betreffend die Vollständigkeit von Kalkülen werden allerdings Nebensache bleiben. In den Vordergrund rücken wird vielmehr das Auftreten von *syntaktischer* Unvollständigkeit bei erststufigen Theorien sowie die damit zusammenhängende Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe. Denn auch hier wieder treten Variablen an einer logisch und wohl auch epistemologisch bedeutsamen Grenze in Erscheinung.

Mit der Formalisierung mathematischer Theorien war die Erwartung verbunden, die Mathematik mechanisieren zu können. Es sollte eine vollständige und im Prinzip unfehlbare Kontrolle über ihre Wahrheiten erlangt werden. (Das Zitat aus einem Vortrag Hilberts, das dem zweiten Kapitel als Leitwort vorangestellt ist, bringt diese kühne, im Rückblick fast anmassend wirkende Erwartung zum Ausdruck.) Der Buchstabenschreibweise, die keinen geringen Anteil an diesem Unterfangen hatte, kam die Aufgabe zu, logische Formen in solcher Weise kenntlich zu machen, dass die formale Gültigkeit von Beweisen und die tautologische Wahrheit von Formeln an den Zeichen selbst – als rein syntaktischen Gebilden – erkennbar würde. Dies sollte es ermöglichen, allein durch die Anwendung mechanischer Verfahren über Wahrheit und Falschheit beliebiger Behauptungen mathematischen Inhalts zu entscheiden. Das mathematische Denken, meinten manche, wäre weitgehend obsolet geworden.

Dieser Erwartung ist nun auch das sogenannte Entscheidungsproblem entsprungen. Im Allgemeinen erwies es sich jedoch als unlösbar. Bereits auf der ersten Stufe sorgt die schiere Fülle an begrifflichen Verflechtungen, die mit Hilfe von Individuenvariablen dargestellt werden kann, für Unentscheidbarkeit. Der Anteil, den Variablen an diesem Sachverhalt haben, ist daran zu ermessen, dass bestimmte Einschränkungen ihrer syntaktischen oder semantischen Mannigfaltigkeit die Entscheidbarkeit des resultierenden Sprachfragments gleichwohl erzwingen. (Die Zitate aus Aufsätzen Quines, die dem dritten Kapitel als Leitwort vorangestellt sind, geben einen ersten Hinweis auf die syntaktischen Freiheitsgrade, die für Unentscheidbarkeit sorgen.) Anders gesagt, verschieben gewisse Veränderungen im Variablengebrauch die Grenze zwischen den Wahrheiten, die mechanisch und gedankenlos entschieden werden können, und den Wahrheiten, die sich insgesamt dem Zugriff durch mechanische Verfahren entziehen.

Für den Entscheid, mit der Untersuchung des Zusammenhangs von (Un-)Entscheidbarkeit und Variablengebrauch zu beginnen, spricht Mehreres. Erstens wird dadurch sowohl das syntaktische als auch das semantische Wesen von Variablen, und vor allem das Zusammenspiel dieser beiden Seiten, aus einem vernachlässigten Winkel beleuchtet. Auf die Grenze des Entscheidbaren wirken sich nämlich nicht nur syntaktische, sondern auch gewisse semantische Beschränkungen aus. Zweitens wird durch «die Frage nach der Entscheidbarkeit [...] das Wesen des mathematischen Denkens tief berührt» (um es mit Hilberts Worten aus dem vorhin erwähnten Vortrag zu sagen).[244] Entsprechend darf erwartet werden, dass die philosophische Betrachtung des Entscheidbarkeitsbegriffs und seiner Anwendungen manchen Wesenszug der Mathematik klarer hervortreten lässt – und vielleicht sogar aufschlussreichere Einblicke erlaubt als eine Untersuchung der Grenze zwischen Logiksystemen erster und solchen höherer Stufe. Schliesslich spricht für diesen Entscheid, dass mein philosophisches Interesse an Variablen (wie dem Vorwort zu entnehmen ist) durch die Ahnung veranlasst wurde, ihr Gebrauch könnte in einem bedeutsamen Zusammenhang mit Fragen der Entscheidbarkeit stehen. Der alten Ahnung weiter nachzugehen, erscheint mir noch immer vielversprechend.

Der hier vorliegende Text hat denn auch zum Ziel, die philosophischen Grundlagen zu legen für eine umfassende Untersuchung des Zusammenhangs von (Un-)Entscheidbarkeit und Buchstabengebrauch in logischen Formalsprachen. Nachdem in diesem ersten Kapitel bereits Einiges über den Gebrauch von Buchstaben als Variablen eingesammelt wurde, wendet sich das gleich folgende zweite Kapitel daher dem relevanten Entscheidbarkeitsbegriff und seinen mathematischen Anwendungen zu. Die zweite Grundfrage dieser Arbeit fragt aus erkenntnistheoretischer Sicht nach der Bedeutung von Urteilen über die Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit formaler Sprachen und Theorien. Im dritten Kapitel schliesslich erfolgt eine erste Annäherung an den Zusammenhang von Entscheidbarkeit und Variablengebrauch. Mehr als um ein vollständiges Kapitel wird es sich dabei aber eher um ein längeres Schlusswort handeln, das den hier vorliegenden Teil der Arbeit abschliesst und zugleich wichtige Ausblicke bietet auf das, was im Rahmen besser geeigneter Gefässe folgen soll.

[244] Die Stelle findet sich in Hilbert (1970, S. 153).

2. Betrachtungen über den Begriff der Entscheidbarkeit, das Lösen von Entscheidungsproblemen und das Beweisen von Sätzen

Bei näherer Überlegung erkennen wir nämlich bald, dass die Frage der Widerspruchslosigkeit bei den ganzen Zahlen und Mengen nicht eine für sich alleinstehende ist, sondern einem grossen Bereiche schwierigster erkenntnistheoretischer Fragen von spezifisch mathematischer Färbung angehört: ich nenne, um diesen Bereich von Fragen kurz zu charakterisieren, das Problem der prinzipiellen Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage*, das Problem der nachträglichen* Kontrollierbarkeit *des Resultates einer mathematischen Untersuchung, ferner die Frage nach einem* Kriterium für die Einfachheit *von mathematischen Beweisen, die Frage nach dem Verhältnis zwischen* Inhaltlichkeit und Formalismus *in Mathematik und Logik und endlich das Problem der* Entscheidbarkeit *einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen. […] Unter den genannten Fragen ist die letzte, nämlich die Frage nach der Entscheidbarkeit durch eine endliche Anzahl von Operationen, die bekannteste und die am häufigsten diskutierte, weil sie das Wesen des mathematischen Denkens tief berührt.*

2.1. Einleitung

Der Satz von der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe gilt neben Kurt Gödels Unvollständigkeitssätzen als eines der wichtigsten metalogischen Theoreme. Ähnlich wie Gödels Sätze hat auch dieser Satz, der fast zeitgleich, aber auf bemerkenswert unterschiedlichen Wegen durch Alonzo Church und Alan Turing bewiesen wurde, zu

Die dem Kapitel vorangestellte Passage ist einem Vortrag Hilberts entnommen, den er 1917 vor der Schweizerischen mathematischen Gesellschaft in Zürich gehalten hat. Eine Abschrift des Vortrags ‚Axiomatisches Denken' erschien 1918 in den *Mathematischen Annalen*, Bd. 78, und ist in Hilbert (1970, S. 146-156) abgedruckt. Die zitierte Stelle findet sich auf S. 153.

grandiosen Folgerungen philosophischer Färbung Anlass gegeben. Für die einen sind damit unüberwindbare Grenzen, also Schranken, unseres Erkenntnisvermögens markiert: Welche Mittel wir auch anwenden, immer existierten endlos viele Fragen mathematischen Inhalts, die sich mit diesen Mitteln nicht entscheiden lassen. Für die anderen dagegen folgt das Gegenteil. Der Satz zeige, dass unserem Denkapparat offenbar noch andere Mittel zur Verfügung stehen als einer Turingmaschine oder gleichwertigen Modellen finiter Berechenbarkeit. In mathematischen Beweisen könne das menschliche Erkenntnisvermögen die Grenzen des mechanisch Berechenbaren transzendieren. Seit den Beweisen von Church und Turing gab es zahlreiche Versuche, philosophischen Gewinn aus dem Unentscheidbarkeitstheorem zu schlagen.[245] Diese Versuche einzusammeln, auf ihre Prämissen abzuklopfen und zu beurteilen, wäre, wie mir scheint, eine lohnenswerte Aufgabe, die hier jedoch nicht zu stemmen ist. Hier lassen sich lediglich die Grundlagen dafür schaffen.

Das Ziel der philosophischen Betrachtungen in diesem Kapitel besteht denn auch darin, sich ein klareres Verständnis von Entscheidbarkeits- und Unentscheidbarkeitsurteilen zu erarbeiten. Dabei werden wir das Augenmerk auf die Frage legen, inwiefern solche Urteile Aussagen darüber enthalten, was man jeweils weiss oder wissen könnte, wenn Entscheidbarkeit nachweislich vorliegt oder fehlt. Leiten wird uns eine Bemerkung Gödels über den Begriff der Berechenbarkeit, der mit dem der Entscheidbarkeit, um den es hier geht, eng verwandt ist:[246]

> Tarski has stressed in his lecture (and I think justly) the great importance of the concept of general recursiveness (or Turing's computability). It seems to me that this importance is largely due to the fact that with this concept one has for the first time succeeded in giving an absolute definition of an interesting epistemological notion, i. e., one not depending on the formalism chosen. In all other cases treated previously, such as demonstrability or definability, one has been able to define them only relative to a given language, and for each individual language it is clear that the one thus obtained is not the one looked for. For the concept of computability however, although it is merely a special kind of demonstrability or decidability the situation is different. By a kind of miracle it is not

[245] Für eine erhellende Besprechung der beiden Standpunkte, die hier angedeutet sind, und der Versuche, sie mit den Unvollständigkeits- und Unentscheidbarkeitsergebnissen zu begründen, vgl. Sieg (1994); vgl. auch den historisch noch reichhaltigeren Beitrag Sieg (2007). Für eine gute Übersicht über weitere Standpunkte, vgl. Shapiro (1998).

[246] Gödel (1946, S. 150). Die enge Verwandtschaft von Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit kann im hier vorliegenden Teil der Arbeit nicht weiter untersucht werden (siehe 3.1). Oberflächlich äussert sich diese Verwandtschaft im Zusammenhang zwischen der Entscheidbarkeit eines Prädikats P über der Prüfmenge M (siehe dafür 2.2) und der Berechenbarkeit der charakteristischen Funktion von P über M: P ist über M genau dann entscheidbar, wenn χ_P berechenbar ist, wobei $\chi_P : M \to \{0, 1\}$ mit $\chi_P(x) = 1$, falls P auf x zutrifft, und $\chi_P(x) = 0$, falls P auf x nicht zutrifft. Vgl. hierfür Hermes (1978, S. 14-15).

necessary to distinguish orders, and the diagonal procedure does not lead outside the defined notion.

Wie Beweisbarkeit und Berechenbarkeit ist auch Entscheidbarkeit zunächst ein erkenntnistheoretischer Begriff und kein mathematischer. Mit Hilfe dieser Begriffe können epistemische Sachlagen beschrieben werden, die in der Mathematik erstrebenswert erscheinen. Entsprechend lassen sich damit offene Probleme der mathematischen Forschung formulieren: „Ist diese Vermutung aus diesen Postulaten beweisbar?", „Kann diese Grösse mit Hilfe dieser Operationen berechnet werden?", „Gibt es ein Verfahren, mit dem sich jede Frage dieser Art entscheiden lässt?", etc. In der mathematischen Praxis und in den philosophischen Diskursen über Mathematik hatten diese Hilfsbegriffe ihre Verwendung, lange bevor an der Wende zum 20. Jahrhundert das Streben nach Formalisierung und Mechanisierung einsetzte.[247] Erst im Zuge dieser Entwicklungen wurden sie selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchung. Ohne begriffliche Anpassungen jedoch liess sich der Aspektwechsel nicht vollziehen. Um nicht-mathematische Begriffe für mathematische Untersuchungen zugänglich zu machen, braucht es explikative Definitionen. Die epistemisch gefärbten Hilfsbegriffe mussten also durch mathematische Begriffe präzisiert werden, die das Wesentliche in den ursprünglichen Bedeutungen beibehielten. Für den Begriff der Beweisbarkeit gelang dies bekanntlich früher, aber immer nur relativ zu einem vorgegebenen Formalismus. Für den Begriff der Berechenbarkeit, und somit auch für den Begriff der Entscheidbarkeit, um den es hier gehen wird, brauchte es etwas länger. Dafür gelang zum ersten Mal eine Definition durch absolute, d. h. formalismusunabhängige[248] Begriffe: durch den von Gödel (in Anlehnung an einen Vorschlag von Jacques Herbrand)

[247] Beispiele für solche Verwendungen vor der metamathematischen Wende bieten Unmöglichkeitsbeweise. Ein berühmtes Beweisbarkeitsproblem, das weit in die Antike zurückreicht, betraf das Parallelenaxiom. Ursprünglich bestand das Problem darin, dieses etwas sonderbare und umständlich formulierte Axiom aus den anderen Axiomen Euklids abzuleiten, sodass es nicht mehr separat postuliert werden müsste. Die sich häufenden Fehlversuche liessen einen Beweis jedoch immer unwahrscheinlicher erscheinen und die Bemühungen drehten sich in die entgegengesetzte Richtung. Der Beweis der Unbeweisbarkeit, mithin dass das Parallelenaxiom aus den anderen nicht abgeleitet werden kann, gelang schliesslich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Andere berühmte Berechnungs- und Entscheidungsprobleme, die sich als unlösbar erwiesen, sind die Quadratur des Kreises, die Winkeldreiteilung mit euklidischen Hilfsmitteln sowie die Frage nach einem Entscheidungsverfahren für die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen (d. i. Hilberts zehntes Problem). Für eine Geschichte wichtiger Unmöglichkeitsbeweise, vgl. Lützen (2023).

[248] In Bezug auf die behauptete Absolutheit bemerkt Wilfried Sieg richtig: «Gödel's claim that ‹an absolute definition of an interesting epistemological notion› has been given, i. e., a definition that does not depend on the formalism chosen, is only partially correct: the definition does not depend on the details of the formalism, but depends crucially on the fact that we are dealing with a ‹formalism› in the first place. In that sense absoluteness has been achieved only relative to an un-explicated notion of an elementary formalism» Sieg (1997, S. 168).

eingeführten Begriff der allgemeinen Rekursivität und durch den (bekanntlich extensionsgleichen) Begriff der Turing-Berechenbarkeit.

Dieses Kapitel handelt indessen weder von allgemeiner Rekursivität noch von Turing-Berechenbarkeit. Der Entscheidbarkeitsbegriff, um den sich die folgenden Betrachtungen drehen werden, stellt vielmehr eine Vorstufe dar zu den Begriffen der Metamathematik. Er liegt gewissermassen zwischen seinem Ursprung in der mathematischen Praxis und seiner vollständigen Extensionalisierung für (meta-)mathematische Zwecke. Im Vergleich zum praktischen Hilfsbegriff, von dem er abstammt, wirkt der Begriff, auf den wir uns festlegen werden, extensionaler, da in ihm eine klassische (d. h. nicht-konstruktive) Existenzaussage enthalten ist. Um das Vorliegen von Entscheidbarkeit im hier festgelegten Sinn zu beweisen, reicht es nämlich, die *Existenz* eines Entscheidungsverfahrens zu zeigen. Und dafür braucht es die Angabe eines solchen Verfahrens nicht immer. Andererseits ist durch unsere Bestimmungen nicht streng festgelegt, was als Entscheidungsverfahren alles infrage kommt. Gefordert wird lediglich, dass es sich dabei um einen korrekten und überall terminierenden *Algorithmus* handeln soll. Unser Entscheidbarkeitsbegriff weist folglich eine Unbestimmtheit auf, die es erlaubt, ihn bei Bedarf intensional anzureichern und seiner praktischen Herkunft gleichsam anzunähern.

Die Vorteile dieses Vorgehens liegen auf der Hand. Der gewählte Entscheidbarkeitsbegriff bietet erstens einen allgemeinen Gesichtspunkt an, unter dem sich seine verschiedenen Präzisierungen (etwa durch Begriffe der Rekursivitätstheorie oder der Theorie der Turingmaschinen) philosophisch untersuchen lassen. Da unsere Festlegungen möglichst einfach und generell gehalten sind, kann das gesetzte Ziel – die erkenntnistheoretische Bedeutung von (Un-)Entscheidbarkeitsurteilen besser zu verstehen – zweitens ohne Ablenkung durch technische Details verfolgt werden. Die Unbestimmtheit, die unserem Begriff deshalb anhaftet, hat drittens den Vorteil, dass verschiedene Ausprägungen möglich werden. Von besonderem Interesse für unsere Zwecke sind Ausprägungen des Begriffs, die den Urteilen, worin sie vorkommen, unterschiedliches epistemisches Gewicht verleihen. Um den Variationsraum unserer Betrachtungen noch zu erweitern, werden wir ausserdem eine zweite Begriffsebene anlegen mit den konstruktiven Entsprechungen zu den klassischen Begriffen. Ausgehend von einem einzigen Entscheidbarkeitsbegriff wird sich so ein ganzes Spektrum epistemischer Sachlagen beleuchten lassen, die mit Entscheidbarkeit oder Unentscheidbarkeit in Verbindung gebracht werden können. Am Ende sollen sich

Kosten und Gewinne einer extensionalen Auffassung von Entscheidbarkeit klar ersichtlich gegenüberstehen.[249]

Der Gegenstand unserer Betrachtungen, unser Entscheidbarkeitsbegriff, wird zusammen mit seiner begrifflichen Entourage gleich zu Beginn des ersten Unterkapitels (2.2) eingeführt. Dabei wird hervorgehoben, was manchmal vergessen geht oder unbeachtet bleibt: dass Entscheidbarkeitsurteile relational sind. Entscheidbar oder unentscheidbar ist ein mathematisches Prädikat immer nur in Bezug auf eine Menge zu prüfender Gegenstände. Der erste Abschnitt (2.2.1) enthält darum einige klärende Bemerkungen über die Relate der Entscheidbarkeitsbeziehung, mithin über Prädikate und Prüfmengen. Unter anderem wird die gängige Rede von der (Un-)Entscheidbarkeit formaler Sprachen oder Theorien mit der unsrigen abgeglichen, nach der es sich zuerst um eine Eigenschaft von Prädikaten handelt.

Wie üblich sehen auch unsere Festlegungen vor, dass sich die beiden Relate der Entscheidbarkeitsbeziehung unterschiedlich zueinander verhalten können. Zu Beginn des zweiten Abschnitts (2.2.2, 2.2.2.1) werden daher mit Blick auf die verfolgten Ziele mehrere Sachlagen unterschieden. Im typischen Fall umfasst die Prüfmenge abzählbar unendlich viele Elemente, wobei das fragliche Prädikat auf unendlich viele darunter zutrifft und auf ebenso viele nicht. Bei *untypischer* Sachlage dagegen trifft das Prädikat auf höchstens endlich viele Elemente zu oder auf höchstens endlich viele nicht zu. Für die klassische Mathematik ist der untypische Fall uninteressant, zumal jedes Prädikat, das sich in einer solchen Sachlage befindet, *per definitionem* entscheidbar wird. Unentscheidbarkeit kann es aus extensionaler Sicht nur bei typischer Sachlage geben. Doch gerade dieser begriffliche Zwang lässt die untypischen Sachlagen aus philosophischer Sicht diskussionswürdig erscheinen. Und dies umso mehr, als diese Sachlagen so untypisch gar

[249] Wir werden uns in diesem Kapitel also einer gemischten Begrifflichkeit bedienen, die sowohl klassisch extensionale als auch intensionale und konstruktivistische Elemente enthält. In Bezug auf ein ähnliches Vorgehen hat Stewart Shapiro zu Recht bemerkt, dass es sich gut dazu eigne, die konstruktiven und epistemischen Aspekte in den Begriffen der normalen mathematischen Praxis besser zu verstehen, vgl. Shapiro (1985, S. 11, 40). In diesem Kapitel werden wir gewissermassen die systematischen Ambiguitäten ausmessen, die zwischen dem vor-formalen, pragmatischen Gebrauch von Begriffen und ihren vollständigen Präzisierungen für metamathematische Zwecke bestehen. Shapiro beschreibt diesen Graben wie folgt (S. 41): «A consequence of this gap between the language of classical deductive systems and the pre-formal language of mathematics is a systematic ambiguity in certain mathematical terms such as ‹computable›, ‹decidable›, [...]. On one hand, in standard formulations – in the established formal languages – these items designate *objective* properties of mathematical objects. That is to say, the definitions of these objective properties do not involve reference to a knowing subject. In this connotation, such terms designate properties which are *internal* to mathematics. On the other hand, in practice these same terms are sometimes used to indicate *pragmatic* properties – properties that mathematical objects have or lack in virtue of human abilities, achievements or knowledge, often idealized».

nicht sind, wenn man bedenkt, dass sie den Bedingungen entsprechen, unter denen reale Menschen und Maschinen mathematisch arbeiten.

Auf die Einführung der Begriffe zu Beginn folgt eine ausführliche Erörterung der untypischen Sachlagen, die sich über den zweiten Abschnitt hinaus auf den dritten (2.2.3) ausdehnt. Dabei wird klar, wie stark die Idealisierungen sind, die unser Entscheidbarkeitsbegriff bereits enthält, und welche Nachteile sich daraus ergeben. Offenbar sind Sachlagen möglich, in denen wir aufgrund unserer Festlegungen gezwungen sind, jedes Prädikat für entscheidbar zu erklären, obwohl sich die Lage aus epistemischer Sicht nicht besser darstellt als in typischen Fällen von Unentscheidbarkeit (siehe 2.2.2.2, 2.2.2.8 und vor allem 2.2.3.1). Unweigerlich drängt sich die Frage auf, wie dieser Makel behoben werden könnte und ob sich der Entscheidbarkeitsbegriff in Annäherung an seine praktische Herkunft mit epistemischen Ansprüchen verknüpfen liesse. Zu diesem Zweck werden verschiedene Versuche unternommen, den Begriff eines Entscheidungsverfahrens intensional anzureichern, sodass nur noch solche Algorithmen darunter fallen würden, die in einem bestimmten Sinn dazu *geeignet* sind, offene Probleme tatsächlich zu lösen (siehe dafür insbesondere 2.2.2.3, 2.2.2.4 und 2.2.2.5 sowie 2.2.3.2 und 2.2.3.3). Im Verlauf der Diskussion treten jedoch zahlreiche Schwierigkeiten auf und am Ende überwiegen die Vorteile der extensionalen Begrifflichkeit. Anstatt Unentscheidbarkeit auch bei untypischer Sachlage zuzulassen, wird folglich vorgeschlagen, bei Bedarf verschiedene Grade der Entscheidbarkeit auseinanderzuhalten (andeutungsweise bereits in 2.2.2.5, definitiv dann in 2.2.3.5).

Im zweiten Unterkapitel (2.3) richtet sich der Blick auf ein naheliegendes Anwendungsgebiet unseres Entscheidbarkeitsbegriffs: auf das durch praktische Zwänge und Zwecke geprägte Lösen von Entscheidungsproblemen. Auch hier wieder zeigt sich, dass nicht jede Lösung, jedes Urteil über die Entscheidbarkeit oder Unentscheidbarkeit eines Prädikats den gleichen epistemischen Wert besitzt. Entscheidbar heisst nicht immer wirklich entscheidbar. Für die Diskrepanzen zwischen verschiedenen Lösungen eines Problems sorgt aber nicht die fehlende epistemische Eignung der angegebenen Verfahren, sondern ihre algorithmische Ineffizienz, mithin ihre fehlende *praktische Eignung*. Vor diesem Hintergrund wird der Bedarf nach stets neuen Algorithmen für längst gelöste Probleme verständlich. Gefragt sind nicht bloss theoretisch terminierende Verfahren, die für jede Eingabe irgendwann das korrekte Ergebnis liefern, sondern solche, die dafür ein vernünftiges Mass an Zeit und Aufwand benötigen.

In dieser Hinsicht gleicht das Lösen von Entscheidungsproblemen der mathematischen Beweispraxis. Denn auch hier lässt sich ein Streben nach immer neuen Beweisen für denselben, längst zur Gewissheit verhärteten Satz feststellen. Die weitere Erkundung dieser Gemeinsamkeit wirft nun ein Licht sowohl auf das Gebiet des Entscheidbaren und die darin stattfindende Entwicklung neuartiger Verfahren als auch auf das Gebiet des Beweisbaren und das darin festzustellende Streben nach kürzeren, einfacheren oder elementareren Beweisen. Aus diesem Grund ist das zweite Kapitel als ausführlicher Vergleich von Algorithmus und Beweis angelegt, an dem letztlich der Kontrast ersichtlich wird zwischen einer rechnenden Mathematik, die computergestützt nach immer effizienteren Problemlösungen strebt, und einer reinen Mathematik, die mit begrifflichen Mitteln um vertieftes Verständnis ringt. Während der erste Abschnitt (2.3.1) das Material einsammelt, das für den Vergleich benötigt wird, stellt der deutlich kürzere zweite Abschnitt (2.3.2) die wichtigsten Punkte zusammen und schliesst die vergleichenden Betrachtungen ab.

Nach einer historischen Fiktion zum Einstieg wendet sich die Untersuchung in der ersten Hälfte des ersten Abschnitts (2.3.1.1–2.3.1.5) der mathematischen Beweispraxis zu. Die Betrachtungen erfolgen an Beispielen aus der Geschichte der Zahlentheorie, hauptsächlich am Satz von Bertrand-Tschebyschow (2.3.1.3) und am Primzahlsatz (2.3.1.5). Beide Sätze weisen lange und lehrreiche Beweisgeschichten auf. Diesen Fallstudien vorangestellt ist ein umfangreicher philosophischer Unterabschnitt, der über Beweise, Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik handelt (2.3.1.2). Die zweite Hälfte des Abschnitts (2.3.1.6–2.3.1.8) untersucht dann die Entwicklung effizienter Algorithmen zur Lösung von Entscheidungsproblemen. Den Anfang macht das sogenannte SAT-Problem der Aussagenlogik, zu dem intensive Forschung betrieben wird, obwohl die herkömmliche Methode der Wahrheitstafeln eine triviale Lösung bietet (2.3.1.6). Die beiden letzten Unterabschnitte bewegen sich wieder auf zahlentheoretischem Gebiet und enthalten Betrachtungen zuerst über die Geschichte des Primzahltestens (2.3.1.7), danach über ein vergleichsweise neues und als besonders effizient geltendes Entscheidungsverfahren für Primalität, den sogenannten AKS-Algorithmus (2.3.1.8).

2.2. Die Grundbegriffe

Beginnen wir gleich mit den wichtigsten Festlegungen.

Ein *Entscheidungsproblem* ist, allgemein gefasst, die Frage nach einem Entscheidungsverfahren für ein Prädikat P über einer Menge M. Ein *Entscheidungsverfahren für P über M* ist ein Algorithmus, der für jedes x in M nach endlich vielen Schritten korrekt anzeigt, ob P auf x zutrifft oder nicht. Gibt es für ein Prädikat P ein

Entscheidungsverfahren, ist P *entscheidbar* und das betreffende Entscheidungsproblem *lösbar*. Als *gelöst* gilt das Entscheidungsproblem indes erst, wenn ein Algorithmus angegeben ist, von dem bewiesen wurde, oder bei dem es offenkundig ist, dass es sich um ein Entscheidungsverfahren handelt. Das Prädikat gilt dann als durch dieses Verfahren *entschieden*.

So unverfänglich sich dieses Begriffsgefüge ausnehmen mag, es bietet Anlass genug zu Missverständnissen und Einsprüchen. In dem, was nun folgt, wird versucht, manches Missverständnis zu klären und verschiedene Einwände gegen diese Begriffsbestimmungen mit der ihnen gebührenden Gründlichkeit zu besprechen.

Das Problematische an den getroffenen Festlegungen ist nicht auf die besondere Art zurückzuführen, wie die Begriffe hier eingeführt wurden. Unsere Festlegungen stimmen mit den etablierten Definitionen aus der Literatur im Wesentlichen überein. Und dort, wo die Definitionen von den unsrigen abweichen, sind die Unterschiede entweder stilistischer Art oder sie verstärken die Probleme noch, die bereits für uns entstehen.

Die folgenden Betrachtungen über die eben eingeführten Grundbegriffe sind denn auch mit dem Anspruch verbunden, diejenige Begrifflichkeit kritisch auszuleuchten, die in Logik und Mathematik gebräuchlich ist. Das Augenmerk wird dabei auf gewisse Voraussetzungen gelegt, die das Verhältnis der beiden Argumente der Entscheidbarkeitsbeziehung – das zu entscheidende Prädikat P und die Menge M der zu prüfenden Gegenstände – betreffen und die dem Entscheidbarkeitsbegriff einen extensionalen Charakter verleihen. Wie sich zeigen wird, ergeben sich aus diesen Voraussetzungen Urteile, die wenig plausibel erscheinen. Und insofern diese Urteile und ihre Voraussetzungen zumeist implizit bleiben, mitunter am Rande Erwähnung finden, nie aber erörtert werden, obgleich eben durchaus Problematisches aus ihnen folgt, scheint es auf den ersten Blick, als lägen hier *Vor*urteile durch Übereilung vor. Dass die besagten Voraussetzungen gleichwohl ihre Rechtfertigung haben und der Verzicht auf einen extensionalen Begriff von Entscheidbarkeit gewichtige Nachteile mit sich brächte, ist etwas, was es zuerst zu zeigen gilt.

Werfen wir nun also einen prüfenden Blick auf die einzelnen Begriffe und ihre Bestandteile sowie auf die Art, wie sie ineinandergreifen. Drei Abschnitte sind dafür veranschlagt. Der erste Abschnitt (2.2.1) enthält einige klärende Bemerkungen zu den beiden Argumentstellen der Entscheidbarkeitsbeziehung: über die für die P-Stelle infrage kommenden Prädikaten zuerst, dann über die an M-Stelle eintretenden Mengen und deren Elemente. Im zweiten Abschnitt (2.2.2) folgt eine ausführliche Erörterung der sogenannten untypischen Sachlagen, bei denen sich die problematischen Züge der gängigen

Begrifflichkeit deutlich zeigen. Dabei wird die Ersetzung des extensionalen Entscheidbarkeitsbegriffs durch einen intensionalen ins Spiel gebracht, welcher strengere Anforderungen an Entscheidungsverfahren stellen würde. Im dritten und letzten Abschnitt dieses Unterkapitels (2.2.3) werden die gesammelten Einsichten ausgewertet und Vorteile des extensionalen Begriffs gegenüber intensionalen Varianten gewürdigt.

2.2.1. Der relationale Charakter der Entscheidbarkeit: Prädikat, Prüfmenge und partielle Lösungen eines Entscheidungsproblems

Nicht immer wird Entscheidbarkeit wie hier als Eigenschaft von *Prädikaten* definiert. Oftmals ist von Entscheidungsverfahren für Mengen (über Mengen) die Rede, manchmal von Entscheidungsverfahren für Eigenschaften und Relationen, die dann allerdings extensional aufgefasst werden. So ist ein Entscheidungsverfahren nach dem deutschen Standardwerk der Aussagen- und Prädikatenlogik «ein abbrechender Algorithmus über einem Anwendungsbereich, der die Frage beantwortet, ob ein Element des Anwendungsbereiches zu einer bestimmten Menge [N] gehört».[250] Die Fragen, auf die das Verfahren eine Antwort liefern soll, sind dann nicht von der Form, ob P auf x zutrifft, sondern, ob x in N enthalten ist. Entsprechend sind es Mengen (oder eben Eigenschaften), die als entscheidbar oder unentscheidbar gelten.

Es gibt aber auch genug Autoren, die wie hier die Festlegung über Prädikate einer rein mengentheoretischen (und damit gewissermassen noch extensionaleren) Auffassung vorziehen. Das gilt insbesondere für diejenigen Darstellungen von Churchs Unentscheidbarkeitstheorem, die sich der Theorie rekursiver Funktionen bedienen, da in dieser Theorie üblicherweise von Prädikaten und nicht von Eigenschaften und Relationen die Rede ist.[251] Auch wir werden von dieser Theorie Gebrauch machen (wenngleich nur informell und sporadisch). Dass es noch andere Gründe gibt, für unsere Zwecke hier diese Wahl zu treffen, wird sich im weiteren Verlauf der Erörterung immer wieder zeigen. Dennoch soll damit kein inhaltlicher Unterschied markiert werden. Überall sollte es ohne Bedeutungsänderung möglich sein, die Rede von der (Un-)Entscheidbarkeit einer Menge oder Eigenschaft durch Ausdrücke zu ersetzen, die sich unseren Festlegungen gemäss auf ein entsprechendes Prädikat beziehen.

[250] Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 352). Vgl. ausserdem Ebbinghaus u. a. (2007, S. 161); Boolos u. a. (2007, S. 73); Smullyan (1993, S. 39).

[251] Vgl. für diese Feststellung Hermes (1971, S. 155). Weitere Beispiele sind Stegmüller (1973), wo von Entscheidungsverfahren für Prädikate (S. 66), sowie Kleene (1952) und Hermes (1978), wo von (un)entscheidbaren Prädikaten die Rede ist.

Unter einem Prädikat soll hier und im Folgenden denn auch kein rein syntaktischer Gegenstand verstanden werden, etwa eine mit Leerstellen versehene Zeichenkette von bestimmter Form, sondern ausserdem die damit verbundene Bedeutung des Ausdrucks. Wenn zwei Prädikatsausdrücke die gleiche Bedeutung haben, gehören sie im Wesentlichen (d. h. abgesehen von rein syntaktischen Variationen) zu ein und demselben Prädikat. Wenn zwei Ausdrücke auf die gleichen Gegenstände zutreffen, gehören sie dagegen nicht unbedingt ein und demselben Prädikat an. Denn verschiedene Prädikate können die gleiche Extension haben. Prädikatsausdrücke mit verschiedener Extension indes gehören zwingend verschiedenen Prädikaten an.[252]

Dem gilt es anzufügen, dass nicht jedes Prädikat sinnvollerweise in die erste Argumentstelle der Entscheidbarkeitsbeziehung eintreten kann. Als zulässige Argumente sind hier allein *mathematische* Prädikate gedacht, d. s. Prädikate, die innerhalb der Mathematik zur Anwendung kommen, z. B. ‚n ist prim' oder ‚φ ist aus Θ beweisbar'. Das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen solcher Prädikate zu bestimmen, hat eine ausschliesslich mathematische Angelegenheit zu sein. Offensichtlich ist nicht jedes Prädikat, das auf Mathematisches Bezug nimmt, auch ein mathematisches in dem angedeuteten Sinn. Das Prädikat ‚n ist die Anzahl Personen, die sich zu irgendeinem Zeitpunkt in 2020 zugleich in der Basler Bahnhofshalle befanden' zum Beispiel trifft nur auf natürliche Zahlen zu. Dennoch ist die Bestimmung seiner Extension mit mathematischen Mitteln allein nicht zu leisten. Es wäre also als Argument der Entscheidbarkeitsbeziehung unzulässig.[253]

Das historische Umfeld, in dem der Begriff eines Entscheidungsproblems erstmals klar in Erscheinung trat, war von dem Bemühen geprägt, die Mathematik insgesamt zu formalisieren und ihre Theorien in eine axiomatische Form zu bringen. Entsprechend beschränkten sich Entscheidbarkeitsfragen zunächst auf diejenigen logischen Prädikate, die für das Axiomatisieren besondere Bedeutung haben und auf eine spezifische Klasse mathematischer Gegenstände Anwendung finden: auf die Elemente formaler Sprachen, d. h. auf wohlgeformte Ausdrücke über einem gegebenen Alphabet.

[252] Was hier Prädikat genannt wird, entspricht dem, was im ersten Kapitel als Begriff oder Relation bezeichnet wurde. Der terminologische Wechsel dient nichts anderem als der Anpassung an die hier relevante Literatur (siehe Anm. 251). Natürlich entsprechen Prädikaten nicht nur Begriffe, sondern auch Relationen beliebiger endlicher Arität. Unsere Festlegungen zu Beginn lassen sich auf naheliegende Weise auch auf mehrstellige Prädikate anwenden.

[253] Damit soll keinesfalls ausgeschlossen werden, dass sich oft auch aussermathematische Prädikate durch Algorithmen entscheiden lassen. Listenverfahren zum Beispiel sind breit anwendbar, insbesondere wenn die Prüfmenge endlich ist (siehe 2.2.2.6). Aussermathematische Prädikate werden hier deshalb aus dem Entscheidbarkeitsbegriff herausgehalten, weil sich die folgenden Betrachtungen auf innermathematische Anwendungen von Algorithmen beschränken.

Typischerweise wurde nach einem Verfahren gesucht, das für jede Formel einer Formalsprache korrekt anzeigt, ob sie allgemeingültig (d. i. eine Tautologie), widersprüchlich (d. i. eine Kontradiktion) oder erfüllbar ist. Die Frage nach einem solchen Verfahren wurde, und wird auch heute noch häufig, als *das* Entscheidungsproblem der betreffenden Sprache bezeichnet. So ist zum Beispiel von *dem Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe* die Rede. Je nachdem, wie die Antwort ausfällt, gilt die Sprache selbst als entscheidbar oder als unentscheidbar. (Dass sich mit ein und demselben Entscheidungsverfahren gleich alle drei genannten Prädikate entscheiden lassen, mithin im Wesentlichen nur ein Problem zugrunde liegt und der obige Gebrauch des definiten Artikels folglich seine Richtigkeit hat, wird in 2.3.1.6 am Beispiel des Entscheidungsproblems der Aussagenlogik dargelegt.) Eng verwandt mit der Unterscheidung von entscheidbaren und unentscheidbaren Sprachen ist die Unterscheidung von entscheidbaren und unentscheidbaren *Theorien*. Als Theorie wird jede Teilmenge aus der Menge aller Formeln einer gegebenen Formalsprache bezeichnet. Das zugrundeliegende Problem ist in diesem Fall die Frage nach einem Entscheidungsverfahren, das für jede Formel der beim Formalisieren verwendeten Sprache korrekt anzeigt, ob sie aus der Theorie folgt oder nicht.[254] Je nachdem, wie die Antwort auf die Frage nach einem solchen Verfahren ausfällt, gilt die Theorie selbst als entscheidbar oder als unentscheidbar.

Die Verwandtschaft zwischen Sprachen und Theorien und den Fragen nach ihrer jeweiligen Entscheidbarkeit ist vielfältig. Insbesondere ist jede Theorie, die mit Hilfe einer entscheidbaren Sprache formalisiert werden kann und für die es überdies ein endliches Axiomensystem gibt, selbst entscheidbar. Mit dem allgemeinen Entscheidungsverfahren, das für jede Formel β der betreffenden Sprache zu entscheiden vermag, ob es sich um eine Tautologie handelt oder nicht, lässt sich nämlich auch entscheiden, ob β aus den Axiomen der Theorie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ logisch folgt oder nicht. Es genügt dafür die Tautologizität von $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ zu prüfen. Andererseits lässt sich das Entscheidungsproblem einer Formalsprache als Spezialfall der Frage nach der Entscheidbarkeit einer Theorie betrachten. Die Theorie ist in diesem Fall schlicht die leere Menge. Demnach ist das Entscheidungsproblem einer Formalsprache genau dann lösbar, wenn die leere Theorie in dieser Sprache entscheidbar ist.

[254] Oft wird der Theoriebegriff auf diejenigen Teilmengen der gesamten Formelmenge beschränkt, die unter der Folgerungsbeziehung abgeschlossen sind. Unter dieser Definition enthält eine Theorie stets alle Formeln, die aus ihr folgen. Das zugrundeliegende Entscheidungsproblem ist dann die Frage nach einem Entscheidungsverfahren, das korrekt anzeigt, ob eine Formel in der Theorie enthalten ist oder nicht. Vgl. dazu etwa Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 281 f.); Boolos u. a. (2007, S. 191).

Ungeachtet der historischen Ursprünge werden wir unsere Betrachtungen jedoch nicht auf Prädikate über formalen Sprachen beschränken. Eine Formalsprache oder eine formalisierte Theorie wird im Folgenden nur dann angegeben, wenn es sich als erforderlich für die Untersuchung erweist. Meistens werden wir uns der vorhin eingeführten Begrifflichkeit bedienen, da sie insofern allgemeiner ist, als sie sich auch auf Prädikate anwenden lässt, in deren Extension keine Formeln enthalten sind, sondern mathematische Gegenstände anderer Art, etwa natürliche Zahlen (siehe Anm. 257). Die meisten nicht-logischen Prädikate, die wir betrachten werden, gehören denn auch ins Gebiet der Zahlentheorie.

Kommen wir jetzt zum zweiten Argument der Entscheidbarkeitsbeziehung. Nicht immer findet sich in Definitionen und Beispielen der ausdrückliche Bezug auf die Menge der Gegenstände, für die ein Entscheidungsverfahren korrekt anzeigen muss, ob das fragliche Prädikat darauf zutrifft oder nicht. Wo dieser Bezug implizit bleibt, ist es unerlässlich, ihn hinreichend bestimmt mitzudenken. Liest man beispielsweise bei Hilbert und Ackermann, *das* Entscheidungsproblem sei gelöst, «wenn man ein Verfahren kennt, das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt»[255] ergibt sich nur dann ein bestimmter Sinn, wenn mitgedacht wird, dass unter die logischen Ausdrücke, für die das Verfahren eine Entscheidung erlauben muss, alle Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe fallen. Freilich geht das aus dem Kotext dieser Passage klar genug hervor.

In der zu Beginn des Abschnitts zitierten Definition[256] wird diese Menge – d. i. die Menge, auf deren Elemente ein Entscheidungsverfahren nicht nur anwendbar sein muss, sondern für die er, wenn er auf sie angewandt wird, zudem korrekte Antworten liefern soll – als der Anwendungsbereich eines Algorithmus bezeichnet. Das ist, wie mir scheint, etwas irreführend, denn es verleitet dazu, Verschiedenes, das es auseinanderzuhalten gilt, für dasselbe zu halten. Als den *Anwendungsbereich* eines Algorithmus würde ich die Gesamtheit aller Gegenstände bezeichnen wollen, die der Algorithmus als Eingabe zulässt, mit denen er operieren kann. Diese Gesamtheit lässt sich ohne Eingriff in das Innere des Algorithmus weder einschränken noch erweitern. Hingegen ist es das jeweilige Entscheidungsproblem, das gleichsam von aussen vorgibt, für welche Gegenstände ein Algorithmus korrekte Antworten zu liefern hat. Ein Entscheidungsproblem setzt gewissermassen

[255] Hilbert und Ackermann (1928, S. 73). Die ursprüngliche Kursivierung wurde weggelassen, da sie den ganzen Satz umfasst. Für die zweite Auflage von 1938 wurde die Passage etwas umformuliert (S. 91): «Im weitgehendsten Sinne kann man das Entscheidungsproblem als gelöst bezeichnen, wenn man ein Verfahren hat, das bei jeder vorgelegten Formel die Entscheidung darüber gestattet, *für welche Individuenbereiche sie allgemeingültig bzw. erfüllbar ist und für welche nicht.*» Die Bedeutung des Hinzugefügten wird erst im nächsten Kapitel behandelt.

[256] Aus Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 352).

Gegenstände der Prüfung aus. Und da kann sich herausstellen, dass ein bestimmter Algorithmus ein Entscheidungsverfahren über diesen Gegenständen bildet, obwohl er über seinen gesamten Anwendungsbereich gesehen nicht immer abbricht oder mitunter falsche Antworten liefert. (Ein Beispiel dafür wird im nächsten Absatz gegeben, ein weiteres im übernächsten.) Wenn wir nun diese Menge der zur Prüfung ausgesetzten Gegenstände als *Prüfmenge* bezeichnen wollen, dann können wir Folgendes festhalten: Damit ein Algorithmus als Lösung eines Entscheidungsproblems überhaupt in Frage kommt, muss sein Anwendungsbereich alle Elemente der vorgegebenen Prüfmenge umfassen.

Ein Entscheidungsproblem wirft eine Reihe von Fragen auf und verlangt nach einem allgemeinen Verfahren, mit dem jede unter ihnen entschieden werden kann. Die aufgeworfenen Fragen nehmen alle die gleiche Form an: *Trifft das Prädikat P auf den Gegenstand x zu oder nicht?* Während das ‚P' durch das Problem auf ein einzelnes Prädikat festgelegt wird, reicht die Variable ‚x' über eine Menge von Gegenständen, d. i. die Prüfmenge.[257] Entscheidungsprobleme enthalten, wenn sie hinreichend bestimmt sind, demnach zwei Vorgaben und können sich entsprechend in zwei Hinsichten unterscheiden: Sie können auf verschiedene Prädikate Bezug nehmen oder nicht die gleichen Gegenstände der Prüfung aussetzen. So ist zum Beispiel die Frage nach einem Verfahren, das für jede aussagenlogische Formel korrekt entscheidet, ob das Prädikat ‚φ ist eine Tautologie' auf sie zutrifft oder nicht, ein anderes Entscheidungsproblem als die Frage nach einem Verfahren für das gleiche Prädikat, aber über den Formeln der Prädikatenlogik. Während das erste Problem leicht gelöst ist, hat sich das zweite als unlösbar herausgestellt. Daran ändert auch die Tatsache nichts, dass sich, zum Beispiel, ein auf dem Beth-Kalkül beruhendes und auf die Aussagenlogik beschränktes Entscheidungsverfahren zu einem

[257]Diese Auffassung von Entscheidungsproblemen, wie sie bereits in den ersten Festlegungen zum Ausdruck kommt, ist weitaus allgemeiner, als was sich in der Literatur zumeist findet, und dort eher selten anzutreffen. Oftmals ist die Prüfmenge durch die Art der Untersuchung implizit vorgegeben (etwa als die Formelmenge einer formalen Sprache oder die Menge der natürlichen Zahlen) und mitunter gilt das auch für das zu entscheidende Prädikat oder die zu entscheidende Menge, sodass nicht selten in Bezug auf mehr oder weniger implizit bleibende Vorgaben von *dem* Entscheidungsproblem gesprochen wird, als könne es nur eines geben. Shoenfield, der den Begriff zuerst auf formale Systeme bezieht, bemerkt dazu: «We can abstract a more general problem from the decision problem for formal systems. Suppose that A is a subset of E. A *decision method* for A in E is a method by which, given an element a of E, we can decide in a finite number of steps whether or not a is in A. The *decision problem* for A in E is the following: find a decision method for A in E or prove that no such method exists. The decision method for a formal system F is the special case in which E is the set of formulas in F and A is the set of theorems of F. Many other examples have arisen in mathematics. An example of a decision problem which is still unsolved is Hilbert's tenth problem: find a method for deciding if a given Diophantine equation has a solution. Here E is the set of Diophantine equations, and A is the set of Diophantine equations having a solution» Shoenfield (1968, S. 106). Ähnlich allgemeine Auffassungen finden sich in Beth (1959), ab S. 583, in Kleene (1967), ab S. 223 und in Goodstein (1957, S. 29).

Algorithmus erweitern lässt, dessen Anwendungsbereich sowohl die Menge der aussagenlogischen als auch die Menge der prädikatenlogischen Formeln umfasst.[258] Jedes so erweiterte Verfahren wird, selbst wenn es das Prädikat über der ersten Menge entscheidet, für gewisse Formeln aus der zweiten Menge entweder nicht abbrechen oder falsche Antworten liefern. Das folgt unter anderem aus dem Theorem von Church, dem wir uns in diesem Kapitel schrittweise annähern.

Dafür, dass zwei verschiedene Entscheidungsprobleme vorliegen, die es auch auseinanderzuhalten gilt, ist also bereits hinreichend, dass das eine Problem nicht die gleichen Gegenstände der Prüfung aussetzt wie das andere, ungeachtet des Umstands, ob beide auf dasselbe Prädikat Bezug nehmen oder nicht. Wie durch Erweiterung der Prüfmenge aus einem gelösten Problem ein unlösbares hervorgehen, mithin die Entscheidbarkeit des Prädikats verloren gehen kann, so kommt es umgekehrt vor, dass ein Prädikat, für das zunächst kein Entscheidungsverfahren angegeben werden konnte, durch Einschränkungen der Prüfmenge ab einem gewissen Punkt entscheidbar wird. So ist das Prädikat ‚φ ist eine Tautologie' über der gesamten Prädikatenlogik erster Stufe eben unentscheidbar, über gewissen Fragmenten derselben jedoch entscheidbar. Um die Verwandtschaft hervorzuheben, die in solchen Fällen zwischen den beiden Entscheidungsproblemen besteht, dem ursprünglichen und dem durch Einschränkung gewonnenen, werden wir von partiellen Lösungen des (ursprünglichen) Problems sprechen.[259]

Vielleicht auch um solche Sprechweisen zu vermeiden, sicher aber, um das relationale Wesen der Entscheidbarkeit klar ersichtlich zu machen, führt Hans Hermes den Begriff explizit als einen relativen ein. Nach seiner Bestimmung gilt für zwei Mengen M_1 und M_2, «dass M_1 *entscheidbar ist relativ zu* M_2, wenn es einen abbrechenden Algorithmus gibt, mit dessen Hilfe man für jedes Wort aus M_2 effektiv feststellen kann, ob es zu M_1 gehört oder nicht».[260] Nach unserer Festlegung hingegen, und in der einschlägigen Literatur meistens auch, tritt Entscheidbarkeit im Gewand eines einstelligen Prädikats auf. Das „Verschlucken" der zweiten Argumentstelle durch die gewählte Ausdrucksweise soll aber neben der gewünschten stilistischen Wirkung nichts Weiteres zur Folge haben. Insbesondere soll sie keinesfalls dazu verleiten, die relationale Form des Begriffs zu vergessen. Wo nicht wenigstens implizit vorgegeben wird, welche Gegenstände zur

[258] Für die Erweiterung von aussagenlogischen Entscheidungsverfahren auf die Prädikatenlogik, vgl. Harrison (2009, Kap. 3) (insbes. S. 151-179).

[259] Beispiele partieller Lösungen werden im nächsten Kapitel besprochen, in dem es unter anderem um Entscheidbarkeitssätze für Fragmente der Prädikatenlogik erster Stufe gehen wird.

[260] Hermes (1978, S. 13). Gleich im Anschluss an die Passage führt Hermes einen „absoluten" Entscheidbarkeitsbegriff ein. Eine Menge sei als schlechthin entscheidbar zu bezeichnen, wenn sie relativ entscheidbar ist zur Menge aller Worte über einem Alphabet.

Prüfung ausgesetzt sind, ist die Rede von der Entscheidbarkeit eines Prädikats oder der Lösbarkeit eines Entscheidungsproblems sinnlos.

Ausserdem sollte die vorgegebene Prüfmenge nicht leer sein. Denn, wird von *keinem* Gegenstand gefragt, ob ein Prädikat zutrifft, gibt es nichts zu entscheiden, und wo es nichts zu entscheiden gibt, da liegt auch kein Entscheidungsproblem vor.

2.2.2. Das Verhältnis von Prädikat und Prüfmenge

Ein Entscheidungsproblem gibt zwei Inhalte vor: das Prädikat P und die Prüfmenge M. In welchem Verhältnis die beiden Inhalte stehen können, lassen unsere Bestimmungen hingegen offen. Typischerweise verhalten sie sich so, wie es in den vorhin erwähnten Beispielen der Fall war: Auf unendlich viele Elemente der Prüfmenge trifft das Prädikat zu und auf ebenso viele trifft es nicht zu. Etwas präziser gesagt, enthält die Schnittmenge aus M und der Extension von P, ebenso wie das Komplement dieser Schnittmenge in M, abzählbar unendlich viele Elemente. Das ist die *typische Sachlage*.

Obwohl anders gelagerte Konstellationen begrifflich nicht ausgeschlossen sind, können – so zumindest die herrschende Lehre[261] – die weiteren Sachlagen unbeachtet bleiben. Denn immer, wenn bei abzählbarer Prüfmenge das Prädikat auf höchstens endlich viele Gegenstände darin zutrifft oder auf höchstens endlich viele darin nicht, folgt *bereits daraus* dessen Entscheidbarkeit. Wenn die Prüfmenge hingegen überabzählbar viele Elemente enthält, ist das Prädikat immer deshalb nicht entscheidbar, weil jeder Algorithmus einen höchstens abzählbaren Anwendungsbereich aufspannt. Folglich kann nur bei typischer Sachlage sowohl Entscheidbarkeit als auch Unentscheidbarkeit auftreten.

Ganz so bedenkenlos, wie es fast immer geschieht, sollten wir diesem Urteil jedoch nicht zustimmen. Um einzusehen, inwiefern es zutrifft und wo sich berechtigte Zweifel regen, bedarf es einer umfangreicheren und vor allem kritischeren Erörterung der untypischen Sachlagen, als ihnen für gewöhnlich eingeräumt wird.

[261] Mehr als um eine Lehre handelt es sich um einen dieser für derart trivial erachteten Befunde, dass auf seine Anmerkung zumeist verzichtet wird. Hermes stellt in dieser Hinsicht eine Ausnahme dar, vgl. Hermes (1978, S. 13, 17); siehe auch Anm. 279.

2.2.2.1. Vier untypische Sachlagen im Überblick

Den überabzählbaren Fall[262] beiseite lassend, werden wir nun nacheinander und an Beispielen die folgenden Fälle besprechen: Die Schnittmenge aus M und der Extension von P ist leer oder gleich M (d. h. ihr Komplement in M ist leer); oder sie ist zwar nicht leer, aber endlich, oder ihr Komplement in M ist zwar nicht leer, aber endlich. In halb formalisierter und etwas übersichtlicherer Darstellung handelt es sich also um diese vier Sachlagen:[263]

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{S}_1) & M \cap \{x \mid P \text{ trifft auf } x \text{ zu}\} = \emptyset \\
(\mathrm{S}_2) & M \setminus \{x \mid P \text{ trifft auf } x \text{ zu}\} = \emptyset \\
(\mathrm{S}_3) & 0 < |M \cap \{x \mid P \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}| < \aleph_0 \\
(\mathrm{S}_4) & 0 < |M \setminus \{x \mid P \text{ trifft auf } x \text{ zu}\}| < \aleph_0.
\end{array}
$$

Es gilt zu beachten, dass sich die vier Sachlagen nicht alle paarweise ausschliessen. Zum Beispiel liegen die Sachlagen S_1 und S_4 vor, wenn M nur endlich viele Gegenstände und keine Ps enthält, sowie die Sachlagen S_3 und S_4, wenn M nur endlich viele Gegenstände enthält, wovon mindestens einer ein P und mindestens einer kein P ist. Die getroffene Fallunterscheidung richtet sich in erster Linie nach den Zwecken der Untersuchung.

Beginnen wir mit der ersten untypischen Sachlage und nehmen die zweite gleich hinzu, da sie zusammengehören.

2.2.2.2. Leere Entscheidungsverfahren bei Sachlage S_1 und S_2

Angenommen, der Schnitt aus M und der Extension von P sei leer. P trifft dann auf kein Element in M zu, entweder weil P auf überhaupt keinen Gegenstand zutrifft (d. i. seine Extension leer ist) oder weil alle Gegenstände, auf die P zutrifft, ausserhalb von M liegen. In beiden Fällen ist mit dem Algorithmus, der ohne Arbeit zu verrichten für jedes x in M umgehend anzeigt, dass P nicht darauf zutrifft, ein Entscheidungsverfahren

[262] Wir werden diesen Fall hier nicht behandeln können. Es lässt sich aber anmerken, dass die Vorstellung, wonach ein Algorithmus auf *alle* Elemente einer überabzählbaren Menge anwendbar wäre, etwas Widersinniges hat. Da Zeichen endliche Entitäten, insbesondere von endlicher Länge sind und folglich keine Menge mehr als abzählbar viele Zeichen enthalten kann, müsste ein Algorithmus mit überabzählbarem Anwendungsbereich auch auf Nicht-Zeichen anwendbar sein, was in Widerspruch stünde zu der Vorstellung, dass Algorithmen auf Zeichen, oder allgemeiner auf manipulierbaren Gegenständen, operieren, vgl. dazu Hermes (1971, S. 154) und Hermes (1978, S. 246 f.).

[263] Mit ‚$\emptyset$' sei die leere Menge und mit ‚$\aleph_0$' die Kardinalzahl der Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnet.

angegeben. Denn für jeden Gegenstand aus der Prüfmenge gibt der Algorithmus nach endlich vielen Schritten die korrekte Antwort aus.

Aber handelt es sich bei diesem Verfahren – nennen wir es *das leere Nein-Verfahren* – überhaupt um einen Algorithmus? Es führt keine Schritte aus und zeigt immer die gleiche Antwort, ganz egal, was die Eingabe war. Auch ist nicht klar, wozu es angewendet werden könnte und wo die Grenzen seines Anwendungsbereichs liegen sollen.

Der Einwand, dass die leeren Verfahren keine Algorithmen sind, weil sie keine Schritte ausführen, lässt sich sogleich ausräumen. Denn für jede Prüfmenge kann ein beliebig komplexer Algorithmus mit entsprechendem Anwendungsbereich angegeben werden, der viel Arbeit leistet, etwa an dem eingegeben x lange Rechnungen durchführt, die dennoch umsonst sind, da für jede mögliche Eingabe das Ergebnis dieser Arbeit immer das gleiche ist: „P trifft auf x nicht zu“. Auch wenn Algorithmen dieser Art unnötig redundant und kaum zweckmässig erscheinen, sind wir nach unseren Festlegungen gezwungen, sie zu den Entscheidungsverfahren für das Prädikat zu zählen, sofern dieses eben über der Prüfmenge leer ist.[264]

Schwieriger auszuräumen ist hingegen der Einwand, dass es sich weder bei den leeren noch bei den redundanten Verfahren um Algorithmen handelt, weil die Antworten, die sie ausgeben, von der Eingabe nicht abhängt, sofern sie zulässig ist. Im Verlauf dieses Kapitels wird sich jedoch zeigen, wie schwierig es ist, den Begriff eines Entscheidungsverfahrens auf solche Weise intensional anzureichern, dass die richtige begriffliche Abhängigkeit zwischen Eingabe und Ausgabe stets gewährleistet ist. Vom extensionalen Standpunkt unserer Festlegungen aus gilt jedenfalls für jedes Prädikat P, dass es über allen Mengen, die keine Ps enthalten, entscheidbar ist. Und dasselbe gilt für die Sachlage S_2, bei der die Schnittmenge aus Prüfmenge und Prädikatsextension die Prüfmenge selbst ist. An die Stelle des leeren Nein-Verfahrens tritt ganz einfach *das leere Ja-Verfahren* oder eine seiner komplexeren, aber redundanten Varianten, die für jede Eingabe das Zutreffen des Prädikats anzeigen. Folglich ist jedes Prädikat P auch über allen Mengen entscheidbar, die nichts anderes als Ps enthalten.

Aber ist der Witz eines Entscheidungsverfahrens nicht gerade der, dass wir damit über eine allgemeine und zugleich einheitliche Methode verfügen, mit der wir ermitteln können, wie sich die Dinge verhalten: ob es sich bei einem beliebig vorgelegten x aus der Prüfmenge um ein P oder um kein P handelt?[265] Sollten Entscheidungsverfahren

[264] Tatsächlich kann sich der Einsatz von Verfahren, die nichts bzw. einen sog. *no-operation*-Befehl ausführen, beim Programmieren als nützlich erweisen. Vgl. für ein Beispiel Knuth (1997, S. 136, 140).

[265] Auch in der Literatur wird oft erwähnt, dass Entscheidungsverfahren zum Zweck haben, eine Reihe offener Fragen auf gleiche Weise zu beantworten, mithin Unbekanntes methodisch durch Erkenntnis

nicht dazu dienen können, unsere Erkenntnis zu erweitern? Wenn wir nicht wissen, dass das Prädikat über der Prüfmenge leer ist, dürfen wir weder das leere Nein-Verfahren noch eine seiner Varianten zu diesem Zweck heranziehen. Am Aufbau dieser Verfahren ist zwar ersichtlich, dass sie für jede Eingabe abbrechen und immer eine Antwort ausgeben. Sie liefern jedoch keinen triftigen Grund, die ausgegebenen Antworten auf die zu entscheidenden Fragen für wahr zu halten, seien diese Verfahren im Innern nun leer oder mit redundanten Mechanismen versehen. Von ihrer Korrektheit darf nur ausgegangen werden, wenn bekannt ist, dass sich unter den Elementen der Prüfmenge kein einziges P befindet: wenn wir also die richtige Antwort auf jede Frage, die das Entscheidungsproblem aufwirft, bereits kennen. Kennen wir die Antwort, müssen wir nicht erst herausfinden, wie sich die Dinge verhalten. Wir wissen es schon. Es liegt dann allerdings kein Problem vor, über das wir uns den Kopf zerbrechen müssten, und es wäre ganz zwecklos, ein Entscheidungsverfahren angeben zu wollen. Gleiches gilt freilich, *mutatis mutandis*, für das leere Ja-Verfahren und seine Varianten.

Darauf lässt sich erwidern, dass es, um ein Entscheidungsproblem zu lösen, nach unseren Festlegungen eben nicht genügt, einen Algorithmus anzugeben, der für jede Eingabe nach endlich vielen Schritten eine Antwort ausgibt, sei es auch immer die richtige. Es braucht, wo es nicht offensichtlich ist, einen Beweis dafür, dass der Algorithmus die Bedingungen an ein Entscheidungsverfahren erfüllt. Erst dann *erlaubt* uns der Algorithmus die richtigen Entscheidungen über das Zutreffen und Nicht-Zutreffen des Prädikats und erst dann ist das Problem also *gelöst* (um unsere Wortwahl mit der oben aus Hilbert und Ackermann zitierten abzugleichen).

Um aber die Korrektheit des leeren Nein-Verfahrens und seiner Varianten zu beweisen, muss gezeigt werden, dass Sachlage S_1 vorliegt; für das leere Ja-Verfahren und seine Varianten gilt es entsprechend, das Vorliegen von S_2 zu zeigen. Andere Beweiswege stehen keine offen. Ist das Vorliegen von S_1 oder S_2 einmal gezeigt, gibt es jedoch nichts mehr zu entscheiden.

Also eignen sich die leeren und redundanten Algorithmen offenbar nicht dazu, den Zweck zu erfüllen, der mit der Entwicklung und dem Gebrauch von Entscheidungsverfahren in Verbindung gebracht wird. Sie gestatten uns nicht, *Fragen zu entscheiden*; nicht, weil sie falsche oder keine Antworten ausgeben, sondern, weil wir uns – solange wir die

---

zu ersetzen. Kleene beispielsweise versteht unter einem Entscheidungsproblem und dem Verfahren, das es löst, Folgendes: «we inquire whether for the given class of questions a procedure can be described, or a set of rules or instructions listed, once and for all to serve as follows. If (*after* the procedure has been described) we select *any* question of the class, the procedure will then tell us how to perform successive steps, after a finite number of which we will have the answer to the question we selected» Kleene (1967, S. 223).

richtigen Antworten nicht kennen – auf das, was sie ausgeben, nicht verlassen dürfen. All das aber ändert nichts daran, dass nach unseren Begriffen allein schon die Existenz eines solchen Verfahrens die Entscheidbarkeit jedes Prädikats verbürgt, das sich in einer der beiden ersten untypischen Sachlagen befindet.

2.2.2.3. Starke und schwache Lösungen von Entscheidungsproblemen

Die Entscheidbarkeit eines Prädikats kann demnach, wie es scheint, auf der Existenz von Verfahren beruhen, die keine oder nur überflüssige Arbeit leisten und mit denen nichts Neues herauszufinden ist. Obwohl nichts an unseren Festlegungen diese Möglichkeit verhindert, hinterlässt sie einen schalen Nachgeschmack. Es ist ein bisschen, wie wenn man von einem Felsblock sagte, er lasse sich mühelos in die Dorfmitte tragen, sofern er sich bereits dort befinde; oder von einem Schlüsselhalm ohne Bart, damit könne jedes Schloss geöffnet werden, allerdings nur, wenn es schon offen ist.

Man gerät daher leicht in Versuchung, den Begriff eines Entscheidungsverfahrens auf solche Weise anpassen zu wollen, dass Algorithmen, die nicht dazu geeignet sind, offene Fragen zu entscheiden, aufhören, unter ihn zu fallen. Dazu müssten lediglich die überall abbrechenden und korrekten Algorithmen in *geeignete und ungeeignete* aufgeteilt und zu den Entscheidungsverfahren ausschliesslich die ersteren gezählt werden. So würde jedes Entscheidungsverfahren, im Gegensatz zu den leeren und redundanten Algorithmen, dazu dienen können, die korrekte Antwort auf Fragen betreffend die Extension des Prädikats ausfindig zu machen. Entscheidbarkeit bestünde folglich in der Existenz eines Algorithmus, der nicht nur immer die richtige Antwort ausgibt, sondern dessen Korrektheit und Terminierung überdies gezeigt werden kann, ohne dass dafür (oder dadurch) jede Frage, die das Problem aufwirft, bereits entschieden sein müsste.

Die Auswirkungen dieser Begriffsanpassung sollten jedoch nicht unterschätzt werden. So wäre die Unentscheidbarkeit eines Prädikats nunmehr mit der Existenz von Algorithmen verträglich, die alle Fragen über dessen Zutreffen und Nicht-Zutreffen richtig beantworten. Unentscheidbarkeitsurteile würden erheblich geschwächt, sodass insbesondere die zwangsläufige Entscheidbarkeit von Prädikaten beim Vorliegen einer untypischen Sachlage infrage stünde. Denn es ist nicht ersichtlich, wodurch sichergestellt sein soll, dass in diesen Fällen nicht nur korrekte Algorithmen existieren, sondern eben auch geeignete. Ist aber die Existenz geeigneter Algorithmen bei untypischer Sachlage nicht immer gegeben, hätte die vorgeschlagene Anpassung zur Folge, dass sich die Grenzen zwischen Entscheidbarem und Unentscheidbarem verschieben.

Ohnehin mag es unklug erscheinen, hier derart tief greifende Anpassungen vornehmen zu wollen, die den untersuchten Entscheidbarkeitsbegriff von der klassischen, in der Literatur fest verankerten Auffassung entfernen würde. Vorsichtiger ist es, und vielleicht auch der Sache angemessener, den Unterschied zwischen geeigneten und ungeeigneten Verfahren auf die andere Ebene unserer Festlegungen zu tragen, d. i. auf die der konstruktiven Begriffe. Obschon diese Begriffsebene in der Literatur eher selten[266] eigens eingeführt wird, ist sie immer mitgedacht. Denn bei typischer Sachlage erfolgt der Nachweis von Entscheidbarkeit mittelbar oder unmittelbar durch die Angabe eines Entscheidungsverfahrens. Unsere Festlegungen weichen hier von den üblichen nur insofern ab, als sie Implizites auseinanderfalten und verschiedene begriffliche Momente deutlicher unterscheiden.[267]

Begnügen wir uns zunächst also damit, die verschiedenen Lösungen eines Entscheidungsproblems in *starke* und *schwache* zu unterteilen. Entsprechend soll ein Prädikat erst dann als *im starken Sinn entschieden* gelten, wenn ein geeigneter Algorithmus angegeben und als Entscheidungsverfahren erwiesen werden konnte. Wenn sich hingegen nur von ungeeigneten Algorithmen zeigen liess, dass sie für jede aufgeworfene Frage die korrekte Antwort anzeigen, gilt das Prädikat als nur *im schwachen Sinn entschieden.*

[266] Eine klare Unterscheidung der beiden Ebenen findet sich bei van Dalen, allerdings für den Begriff der Rekursivität. Er selbst hält freilich nur die konstruktiven Begriffe für sinnvoll: «There is a constructive and a non-constructive approach to the notion of recursiveness. There seems little doubt that the proper framework for a theory of (abstract) computability is the constructive one. Let us illustrate an anomaly of the non-constructive approach: there is a partial recursive function with at most one output, that is the Gödel number of the name of the President of America in office on the first of January of the year two thousand, if there is such a president, and which diverges otherwise. This may seem surprising; is the future fully determined? A moments reflection shows that the above statement is a cheap, magician's trick: consider the empty function and all constant functions [...]. Exactly one of those partial (recursive) functions is the required one, we don't know *which one*, but a repeated application of the principle of the excluded third proves the statement. [...] Constructively viewed, the above examples are defective, since the principle of the excluded third is constructively false [...]. The constructive reading of ‹there exists a partial recursive function φ› is: we can effectively compute an index e» Dalen (1983, S. 453). Konstruktivistisch ist auch die Definition in Goodstein (1957, S. 29): «If a decision procedure for a class is known, the class is said to be *decidable*; if on the other hand it can be shown that no decision procedure is possible, then the class is said to be *undecidable.*»

[267] Entscheidbarkeit konstruktiv nachzuweisen, d. h. durch die Angabe eines entsprechenden Algorithmus, wird oft als der erstrebenswertere Weg angesehen, selbst wenn manchmal andere, kürzere Wege offen stünden. Für die weitere mathematische Arbeit ist das algorithmische Material fruchtbarer als der blosse Entscheidbarkeitssatz. Diese Präferenz kommt z. B. in Dreben und Goldfarb (1979, S. 1) zum Ausdruck: «solvability requires only that some recursive decision procedure exist; whether or not we know how to specify such a procedure is immaterial. But, with one minor exception [...], our solvability proofs are all constructive: they actually provide decision procedures for the classes considered.»

Durch diese Ergänzungen des zu Beginn Festgelegten wird wohlgemerkt weder der Begriff eines Entscheidungsverfahrens noch der mit ihm eng verknüpfte Begriff der Entscheidbarkeit umdefiniert. Beide behalten ihren im Wesentlichen extensionalen Charakter bei.

2.2.2.4. Ein Umgehungsversuch über den Begriff des Entscheidungsproblems

Vielleicht aber lassen sich die Schwierigkeiten eleganter umgehen. Anstatt an dem Begriff eines Entscheidungsverfahrens zu schrauben oder Grade des Entschiedenseins zu unterscheiden, könnten die zweifelhaften Sachlagen *per definitionem* aus dem Begriff des Entscheidungsproblems herausgehalten werden. Man könnte sich einfach darauf festlegen, dass kein Entscheidungsproblem besteht, wo die Extension des Prädikats über der Prüfmenge leer ist oder die ganze Prüfmenge umfasst. Dafür mag einstweilen sprechen, dass vorhin bei der Betrachtung der leeren und redundanten Algorithmen nicht klar wurde, wofür sie denn eine Lösung sein könnten. Denn entweder wissen wir nicht, wie sich die Extension des Prädikats zur Prüfmenge genau verhält, und dann dürfen wir diese Algorithmen nicht als Lösungen des Problems anerkennen. Oder wir wissen, dass die Extension des zu entscheidenden Prädikats über der Prüfmenge leer ist bzw. diese umfasst, aber dann benötigen wir kein Entscheidungsverfahren, da es nichts zu entscheiden gibt. Ist das jedoch Grund genug zur Annahme, bei Sachlage S_1 oder S_2 könne kein echtes Problem vorliegen?

So verlockend sich dieser Umgehungsversuch ausnimmt, es wäre ein Fehler, die Klasse der Entscheidungsprobleme auf diese Weise zu beschneiden. Denn dadurch würden neben belanglosen Fragestellungen auch Probleme ausgeschlossen, die keineswegs immer schon trivial erscheinen müssen und für die losgelöst von der Frage nach dem Verhältnis von Prädikat und Prüfmenge starke Lösungen gesucht und gefunden werden können. Ein kurzer Ausflug in die Geschichte der Mathematik wird uns dabei behilflich sein, einzusehen, dass Probleme dieser Art selbst bei Sachlage S_1 und S_2 auftreten können.

Eine Frage, die bis heute nicht abschliessend beantwortet wurde, ist, wie gross die Lücke zwischen einer beliebigen, aber gegebenen natürlichen Zahl n und der nächsten Primzahl höchstens ausfallen kann. (Die Lücken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen können freilich beliebig gross werden. Hier ist die Frage aber, ob sich ausgehend von einer gegebenen Zahl n die maximale Entfernung zur nächsten Primzahl in Abhängigkeit der Ausgangszahl, d. i. als Funktion von n, abschätzen lässt.) Joseph Bertrand äusserte 1845 die Vermutung, dass n (wenn $n > 1$) von der nächst grösseren Primzahl weniger weit entfernt ist als von 0, dass es also für jedes n in $\mathbb{N}$ eine Primzahl

p gibt, sodass gilt: $n < p < 2n$ für $n > 1$.[268] Bertrand gelang es jedoch nicht, die Vermutung in ihrer Allgemeinheit zu beweisen, sondern lediglich für natürliche Zahlen bis $3 \cdot 10^6$. Es konnte zum damaligen Zeitpunkt nicht ausgeschlossen werden, dass sich eines Tages eine Zahl finden würde, auf die das Prädikat ‚Zwischen n und $2n$ liegt keine Primzahl' zutrifft. Den Beweis, dass zwischen jeder natürlichen Zahl und ihrem Zweifachen mindestens eine Primzahl liegt (dass also das genannte Prädikat leer ist), erbrachte fünf Jahre später Pafnuti Tschebyschow.[269]

Indessen waren Algorithmen, die das entsprechende Entscheidungsproblem lösen, schon lange vor dem 19. Jahrhundert bekannt. Ein einfaches, nicht gerade ausgeklügeltes Verfahren, das aber dafür offenkundig korrekt ist und immer abbricht, besteht darin, beginnend bei $n+1$ und schrittweise fortfahrend bis $2n-1$ zu prüfen, ob eine Primzahl vorliegt oder nicht. Und obwohl in früheren Epochen für die einzelnen Prüfschritte nicht wie heute eine breite Palette an Primzahltests von verschiedener Komplexität zur Verfügung stand, war natürlich bekannt, dass sich im Prinzip für jede Zahl durch endlich viele Probedivisionen ermitteln lässt, ob sie prim ist oder nicht.[270] Rudimentäre Algorithmen dieser Art ergeben sich denn auch auf ziemlich direktem Weg aus dem Begriff der Primzahl. Bertrand und seine Zeitgenossen jedenfalls hätten die Frage nach einem Entscheidungsverfahren für das Prädikat ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl' oder dessen Negation als geradezu trivial abgetan. Die Frage nach der Extension des Prädikats hingegen hätten sie als wichtiges, noch offenes Problem angesehen.

Nicht viel anders verhält es sich mit der Goldbachschen Vermutung, nach der jede gerade Zahl grösser als 2 die Summe zweier Primzahlen ist. Auch hier ist die prinzipielle Entscheidbarkeit des Prädikats (‚n ist gerade, grösser als 2 und die Summe zweier Primzahlen') leicht einzusehen. Aufgrund beschränkter Rechenkapazitäten ist es für hinreichend grosse Zahlen natürlich alles andere als trivial, zwei entsprechende Primzahlen tatsächlich anzugeben. Im Unterschied zum Beispiel vorhin jedoch bleibt die Frage, ob das Prädikat auf alle Elemente in der Prüfmenge, d. h. hier auf alle geraden Zahlen, zutrifft, nach vielen Versuchen weiter unbeantwortet. Die Kluft zwischen der Verfügbarkeit simpler Entscheidungsverfahren und der Schwierigkeit, die allgemeine Vermutung zu beweisen, fällt in diesem Beispiel also noch etwas grösser aus.

[268] Um genau zu sein, formulierte der französische Mathematiker eine etwas andere, wenn auch fast gleichwertige Vermutung: «quel que soit un nombre n supérieur à 6, il existe toujours un nombre premier, au moins, compris entre $n-2$ et $\frac{n}{2}$. Cette proposition est vraie pour tous les nombres inférieurs à six millions, et tout porte à croire qu'elle est générale» Bertrand (1845, S. 129).

[269] Tschebyschow (1852).

[270] Zur Geschichte von Primzahltests, vgl. Williams (1998) und siehe 2.3.1.

In anderen Fällen wiederum bereitet der Beweis der allgemeinen Vermutung kaum mehr Schwierigkeiten als der Nachweis der Entscheidbarkeit für das Prädikat. Man denke etwa an das Prädikat ‚p hat eine Nachfolgerin' über der Primzahlenreihe und an die Vermutung, dass jede Primzahl eine Nachfolgerin hat, es also unendlich viele Primzahlen gibt.[271]

Den angeführten Beispielen lassen sich zwei wichtige Punkte entnehmen. Erstens kann das Problem, ob und wie sich ein Prädikat allgemein entscheiden lässt, oft für sich allein behandelt und gelöst werden – unabhängig von der Frage, welche Elemente aus der Prüfmenge alle in seiner Extension enthalten sind. Auf dieser Möglichkeit beruht denn auch die Existenz von Verfahren, die es gestatten, eine Reihe noch offener Fragen auf einheitliche Weise zu entscheiden. Und zweitens korreliert die Schwierigkeit der Frage nach der genauen Zusammensetzung der Prädikatsextension im Allgemeinen nicht mit der Schwierigkeit des entsprechenden Entscheidungsproblems. Letzteres ist unter anderem dadurch bedingt, dass selbst Algorithmen, bei denen es sich erwiesenermassen um Entscheidungsverfahren handelt, nicht dazu verwendet werden können, das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen eines Prädikats an mehr als endlich vielen Gegenständen festzustellen. Ist die Prüfmenge unendlich, lässt sich mit *brute force* weder zeigen, dass die Extension des Prädikats die ganze Prüfmenge umfasst, noch, dass der Schnitt aus beiden Mengen leer ist.

In Anbetracht dieser beiden Punkte scheint nun ein Ablauf, der die gegenüber den bisherigen Beispielen umgekehrte Situation herbeiführt, ebenfalls denkbar: Von einem Prädikat Q werde vermutet, dass es auf jedes Element einer unendlichen Menge N zutrifft. Obwohl erhebliche Anstrengungen unternommen wurden, liess sich bisher kein Algorithmus angeben, von dem bewiesen werden konnte, dass er Q über N entscheidet (oder bei dem es sich offenkundig, ohne dass ein Beweis nötig wäre, um ein Entscheidungsverfahren für Q über N handelt). Schliesslich gelingt der Beweis der Vermutung (oder wenigstens ihre Erhärtung), *bevor* sich ein unabhängiges Entscheidungsverfahren angeben und als solches erweisen lässt.[272] Ist aber einmal bewiesen, dass die Extension von Q die ganze Menge N abdeckt, ist Q – nach der gängigen Auffassung – nachweislich entscheidbar, d. h. entschieden, wenn auch nur im schwachen Sinn durch das leere Ja-Verfahren.

Wie steht es jetzt um die vorhin in Erwägung gezogene Beschneidung der Klasse aller Entscheidungsprobleme? Offenbar hätte sie zur Folge, dass keines der Probleme,

[271] Eine Diskussion unterschiedlicher Beweise für die Unendlichkeit der Menge aller Primzahlen findet sich in Detlefsen und Arana (2011, S. 13-14).

[272] Beispiele für diese Sachlage werden sich erst später in Abschnitt 2.2.3.1 angeben lassen.

das in den seither besprochenen Beispielen erwähnt wurde, in dieser Klasse Platz fände, nicht einmal das letzte. Es würden nicht nur Probleme ausgeschlossen, für die sich durchaus gehaltvolle (wenngleich im mathematischen Sinn triviale) Algorithmen angeben lassen, sondern auch solche, für die es alles andere als trivial, ja vielleicht unmöglich ist, einen Algorithmus anzugeben, der unabhängig von der Feststellung einer untypischen Sachlage als Entscheidungsverfahren erwiesen werden kann. Beides spricht dafür, den Umgehungsversuch über den Begriff eines Entscheidungsproblems aufzugeben.

Strenge Extensionalisten jedoch, die Entscheidbarkeit allein auf Mengen, nicht auf Prädikate beziehen, könnten dagegenhalten, dass sich die genannten Nachteile nur für uns ergeben, weil wir uns darauf festgelegt haben, ausschliesslich Prädikate in die erste Argumentstelle der Entscheidbarkeitsbeziehung eintreten zu lassen. Aus ihrer Sicht ist das Problem, ein Entscheidungsverfahren für das Prädikat ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl' oder für die Negation von Q (im letzten Beispiel) anzugeben, nichts anderes als das Problem, die leere Menge über $\mathbb{N}$ bzw. über N zu entscheiden. Freilich stellt es, über welcher Prüfmenge auch immer, kein echtes Problem dar, die leere Menge zu entscheiden. Aber gerade diese Konsequenz der streng extensionalistischen Sichtweise spricht dafür, an unserem Begriff festzuhalten und Entscheidbarkeit weiterhin als eine relationale Eigenschaft von Prädikaten zu betrachten.

Ein weiterer Grund, Entscheidbarkeit als Eigenschaft von Prädikaten anzusehen, ist der, dass nur abzählbar unendlich viele entscheidbare Mengen von natürlichen Zahlen existieren und folglich überabzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ unentscheidbar sind.[273] Urteile über die Entscheidbarkeit oder Unentscheidbarkeit von Mengen können uns nur insofern interessieren, als diese Mengen durch ein Prädikat gegeben sind. Die überabzählbar vielen unentscheidbaren Mengen, für die wir kein Prädikat haben und auch nie haben werden, sind für die Arbeit an Entscheidungsproblemen und die Suche nach entsprechenden Algorithmen eine *quantité négligeable* – nicht wegen ihrer geringen Anzahl, sondern gerade umgekehrt, weil es so viele sind.[274]

[273] Vgl. dazu Urchs (1993, S. 123 f.); Hunter (1988).

[274] Ein ganz ähnliches Argument findet sich in Dalen (1983, S. 468): «We have seen that decision problems can be considered to be of the form ‹does n belong to a set X?›, so – up to a coding – the powerset of $\mathbb{N}$ presents us with all possible decision problems. Put in this way, we get too many unrealistic decision problems. For, a reasonable decision problem is usually presented in the form: test to find out if an element of a certain effectively generated (or described) set is an element of another such set, e. g. if a formula is a theorem. So among the subsets of $\mathbb{N}$, we are interested in certain sets that are somehow effectively described.»

2.2.2.5. Eignung und Trivialität

Die Schwierigkeiten, die wir zu umgehen suchten, haben sich indessen nicht in Luft aufgelöst. Vielmehr erscheint im Vergleich der Beispiele, die eben besprochen wurden, manches problematischer als zuvor. Es gelingt uns zwar, mit Hilfe der Begriffe eines *gelösten* Entscheidungsproblems und eines *entschiedenen* Prädikats die Abläufe innerhalb der Beispiele angemessen wiederzugeben. Und dank der nachträglich eingeführten Unterscheidung von starken und schwachen Lösungen eines Problems lässt sich sogar das Besondere am Endzustand im letzten Beispiel einigermassen einfangen. Aufgrund der zu Beginn getroffenen Festlegungen sehen wir uns aber gezwungen, letztlich allen angeführten Prädikaten – ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl' ebenso wie dem hypothetischen Q – den gleichen Status zu attestieren und sie alle als entscheidbar, mehr noch: als entschieden, gelten zu lassen. Dies obwohl im letzten Beispiel das Verfahren, das die Entscheidbarkeit des Prädikats verbürgen soll, nicht dazu geeignet ist, Fragen zu entscheiden. Denn, wie sich zeigte, kann das leere Ja-Verfahren nicht dazu dienen, *herauszufinden*, ob ein vorgelegtes x aus N ein Q ist oder nicht. Generell lässt sich mit ungeeigneten Verfahren unsere Erkenntnis nicht erweitern.

Die fehlende Eignung in dem letzten Beispiel aus 2.2.2.4 scheint nun darauf zurückzuführen, dass zwischen Prädikat und Algorithmus überhaupt kein inhaltlicher Zusammenhang erkennbar ist. Dass Q über N durch das leere Ja-Verfahren trotzdem entschieden wird, hängt einzig und allein am allgemeinen Satz, wonach N nur Qs enthält, d. h. S_2 vorliegt. Bei anderer Sachlage würde dasselbe Verfahren kläglich scheitern. Die Antworten, die es liefert, lassen an haltlose Vorhersagen denken, die dann gleichsam aus Zufall eintreffen.

Anders verhält es sich mit dem rudimentären Algorithmus aus dem ersten Beispiel in 2.2.2.4. Das dort skizzierte Verfahren lässt sich durchaus dazu verwenden, das Zutreffen und Nicht-Zutreffen des Prädikats (d. i. von ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl') festzustellen. Sein Mechanismus ist weder leer noch redundant, sondern der linearen Anordnung der natürlichen Zahlen und dem Begriff einer Primzahl nachgebildet. Entsprechend evident ist der enge begriffliche Zusammenhang mit dem fraglichen Prädikat. Die Antworten, die das Verfahren ausgibt, sind denn auch nicht einfach korrekt. Sie sind dies, wie man versucht sein könnte zu sagen, mit einer besonders zwingend erscheinenden Notwendigkeit. Immerhin hätte der rudimentäre Algorithmus selbst dann seine Korrektheit behalten und sich als Entscheidungsverfahren bewährt, wenn Bertrands Vermutung falsifiziert worden wäre. Ein Gegenbeispiel dazu (d. i. die Existenz einer Zahl, zwischen der und ihrem Zweifachen keine Primzahl zu liegen gekommen wäre) hätte demnach

„lediglich“ gezeigt, dass sich die Primzahlen über die Gesamtheit der natürlichen Zahlen anders verteilten, als vermutet. Überhaupt ist nicht einzusehen, welche Annahmen sich als Falschheiten und welche sich als Wahrheiten herausstellen müssten, damit der Algorithmus inkorrekt würde.

Um diese seltsame Modalität auszudrücken, reicht der herkömmliche Irrealis freilich nicht hin. (Trotzdem kommen wir um einen Ausdruck dafür nicht herum bei der Beschreibung historischer Entwicklungen, insbesondere der wechselnden epistemischen Lagen, in denen sich Mathematiktreibende befinden können.) Die suggerierte Annahme eines Gegenbeispiels ist hier nicht nur kontrafaktisch, sondern notwendigerweise falsch, da sie einem mathematischen Satz, der inzwischen auch bewiesen wurde, widerspricht. Dennoch wirft die Vorstellung, wonach sich diese Annahme als Wahrheit (und Bertrands Vermutung damit als Falschheit) herausgestellt hätte, nicht alles auf den Kopf, was wir über die natürlichen Zahlen und die Primzahlen darunter zu wissen glauben. Wie ist das zu erklären?

Auf der einen Seite ist da der enge, an begriffliche Unmittelbarkeit grenzende Zusammenhang zwischen dem Prädikat (‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl‘) und dem Algorithmus, durch den es entschieden wird. Das weiter oben skizzierte Verfahren läuft, wenn es einmal ausgeführt wird, vom eingegebenen Wert aus die Reihe der natürlichen Zahlen ab, bis es auf eine Primzahl trifft oder das Zweifache des Ausgangswerts erreicht hat. Für die Prüfung auf Primalität, die in jedem Schritt aufs Neue durchgeführt werden muss, ist ein Primzahltest eingebaut, bei dem es sich ebenfalls um ein Entscheidungsverfahren handelt (diesmal für das Prädikat ‚n ist eine Primzahl‘). Eine Version dieses Tests ergibt sich nahezu direkt aus dem Begriff einer Primzahl: Schrittweise wird das eingegebene n durch alle Zahlen dividiert, die als Teiler von n in Frage kommen; wenn sich neben 1 und n keine weiteren Teiler finden, wird ausgegeben, dass n prim ist, andernfalls, dass keine Primzahl vorliegt. Um einzusehen, dass dieser Test ebenso wie das Verfahren, in das er eingebaut wurde, für jede Eingabe eine Antwort liefert und immer die korrekte, bedarf es neben des Primzahlbegriffs und des Wissens um seine Anwendung tatsächlich nur rudimentärer Kenntnisse auf dem Gebiet der Arithmetik.

Auf der andern Seite hängt die Extension des Prädikats (‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl‘), mithin die Verteilung der Primzahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen mit dem Primzahlbegriff nicht in gleicher Weise zusammen. Hier ist die Verbindung insofern eine erst herzustellende, als durch eine Analyse des Primzahlbegriffs allein das Auftreten der einzelnen Primzahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen für uns nicht vorauszusehen ist. Oder um es noch näher an einer Bemerkung Wittgensteins zu sagen, ist die Primzahlenverteilung «ein ideales Beispiel für das, was man synthetisch *a priori* nennen könnte».[275] Selbst wer sich also auf den Standpunkt stellt, wonach die Sätze der Mathematik begriffliche Verbindungen anzeigen (und nicht etwa das Bestehen von Beziehungen zwischen abstrakten Gegenständen behaupten), wird natürlich zugeben, dass nicht jede Verbindung naheliegt. Wie es beliebig enge Verbindungen gibt, so gibt es auch beliebig ferne. Verbindungen zwischen mathematischen Begriffen herzustellen, erfordert mitunter den vollen Einsatz der höchsten geistigen Fähigkeiten, die dem Menschen vergönnt sind. Offenbar liegt darin eine mögliche Erklärung dafür, dass die Negation eines Theorems nicht ohne Weiteres als Widerspruch erkannt wird und die Vorstellung eines rudimentären Verfahrens, mit dem die vermutete Aussage dieses Theorems falsifiziert worden wäre, nicht absurd erscheint.[276]

Gleichwohl wäre es falsch, die Situation im Beispiel um Bertrands Vermutung für paradigmatisch zu halten. Der enge begriffliche Zusammenhang, der hier zwischen Prädikat und Algorithmus besteht, ist kein verlässliches Kennzeichen dafür, ob ein Verfahren geeignet ist, offene Fragen zu entscheiden, oder nicht. Eher ist damit Trivialität angezeigt, zeichnen sich doch gerade die trivialen Probleme dadurch aus, dass sich eine Lösung, mithin ein Entscheidungsverfahren ohne (viel) Weiteres aus den vorgegebenen Inhalten ergibt. Bei trivialen Problemen ist in den prüfenden Gegenständen, wie sie uns gegeben sind, bereits alles enthalten, was es braucht, um das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen des fraglichen Prädikats durch direkte (oder nahezu direkte) Anwendung derjenigen Begriffe allein zu entscheiden, die von der Problemstellung vorgegeben sind. Ein Algorithmus, der ein solches Problem löst, kann selbst als trivial bezeichnet werden, wenn er aus den vorgegebenen Inhalten, insbesondere aus dem zu entscheidenden Prädikat, ohne weitere

[275] Die relevante Passage bei Wittgenstein lautet: «Man könnte vielleicht sagen, dass der synthetische Charakter der mathematischen Sätze sich am augenfälligsten im unvorhersehbaren Auftreten der Primzahlen zeigt.

Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht weniger *a priori*. Man könnte sagen, will ich sagen, dass sie nicht aus ihren Begriffen durch eine Art von Analyse erhalten werden können, wohl aber einen Begriff durch Synthese bestimmen, etwa wie man durch die Durchdringung von Prismen einen Körper bestimmen kann.

Die Verteilung der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das, was man synthetisch *a priori* nennen könnte, denn man kann sagen, dass sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist» Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, IV.43 (S. 246). Dass wichtige Sätze über die Verteilung der Primzahlen, *pace* Wittgenstein, gleichwohl mit elementaren Mitteln zu gewinnen sind, hat die weitere Entwicklung der Zahlentheorie im 20. Jahrhundert gezeigt (siehe 2.3.1.5).

[276] An eine Diskussion weiter oben (in 1.3.3.6) anknüpfend, könnte man darauf hinweisen, dass die Prädikate ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl' und ‚n ist eine natürliche Zahl grösser als 1' zwar extensionsgleich, aber nicht äquipollent sind.

begriffliche Beigaben gewonnen werden kann. Entsprechend leicht lässt sich von einem trivialen Verfahren zeigen, dass es korrekt ist und überall abbricht.

Diese, wie mir scheint, nützliche Charakterisierung trivialer Entscheidungsprobleme findet sich bei Kleene in seiner nach wie vor massgebenden *Introduction to Metamathematics*. Da Kleene seine Ausführungen an Beispielen illustriert, die auch für die vorliegende Untersuchung wichtig sind, wird die Passage hier fast *in toto* wiedergegeben:[277]

> Now, in connection with a given formal system [...] there are some general questions, such as ‹Is a given formal expression a formula?› and ‹Is a given finite sequence of formal expressions a proof?›, for which a decision method is provided directly by the definitions establishing the system. [...] Of a different nature is the question ‹Is a given formula provable?› To see this difference, let us compare the definitions of the three notions: ‹formula›, ‹proof›, ‹provable formula›. For each of the three definitions, in applying it to a particular given object, we have to recognize that the given object belongs to the class defined (if it does belong) through the consideration of a sequence of objects, namely respectively: the formulas obtained on the way in the construction of the given formula, the segments of the given proof, the formulas in a proof of the given provable formula. In the cases of formula and proof, this sequence of objects is contained within the given object, from which it can be regained for our consideration. But in the case of provable formula, this sequence of objects is not contained within the given object. Hence, for the last question, if a decision method exists, it must consist in something else than a direct or nearly direct application of the definition, and the decision problem for this question is not trivial.

Die gleiche oder zumindest eine sehr ähnliche Form von Trivialität weist auch das Entscheidungsproblem für das Primzahlprädikat auf, für das der oben skizzierte Test eine (triviale) Lösung darstellt. Ist die Reihe der natürlichen Zahlen (oder ein ausreichend langes Anfangssegment derselben) in dezimaler Notation gegeben, enthält die Darstellung jedes Reihenglieds alle erforderlichen Angaben, um das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen des Prädikats ‚n ist eine Primzahl' jeweils korrekt festzustellen: Aus der üblichen Definition für Primzahlen ergibt sich das Schema der durchzuführenden Prüfungen und aus dem Ziffernwert ein abzusuchender Bereich endlicher Grösse sowie die Abbruchbedingungen. Es muss nichts hergestellt, bloss eine Reihe von vorgegebenen Gegenständen auf das Vorhandensein einer leicht prüfbaren Beziehung zum eingegebenen Gegenstand hin abgesucht werden. Ausserdem sind in diesem Fall Korrektheit und Terminierung des Verfahrens beide derart offenkundig, dass sich ein Beweis erübrigt.

Wenn hingegen das Entscheidungsproblem nicht trivial ist (wie zum Beispiel jenes für beweisbare Formeln), wird seine Lösung nicht darin bestehen, die zu prüfenden Ge-

[277] Kleene (1952, S. 137).

genstände einer Analyse zu unterziehen und an ihren Bestandteilen oder an einer durch sie bestimmten Reihe vorgegebener Gegenstände simple Tests durchzuführen. Wo das Problem für die reine Mathematik von Interesse ist, kann es kein Entscheidungsverfahren geben, das dem fraglichen Prädikat so nahesteht wie der eben erwähnte rudimentäre Test dem Begriff einer Primzahl. Um das Problem zu lösen, muss in mühsamer Arbeit ein Zusammenhang erst hergestellt werden. Typischerweise ist es dafür erforderlich, von den zu prüfenden oder sonst vorgegebenen Gegenständen (etwa den Axiomen) auszugehen und Zwischenglieder zu konstruieren, bis das Zutreffen oder das Nicht-Zutreffen des Prädikats festgestellt wird oder eine Abbruchbedingung erfüllt ist. Manche Prädikate sind fernerhin so beschaffen, dass sie eine direkte algorithmische Umsetzung nicht erlauben oder sich eine solche aus praktischen (d. h. nicht rein mathematischen) Gründen als unvorteilhaft erweist. Es gilt dann einen zum Prädikat koextensionalen Begriff zu finden, für den die Bildung eines entsprechenden Algorithmus leichter fällt oder wenigstens möglich wird (siehe 2.3.1.7). In all diesen nicht-trivialen Fällen stellt der Beweis von Korrektheit und Terminierung des Verfahrens keine leichte Aufgabe dar.

Der enge begriffliche Zusammenhang, der in trivialen Fällen zwischen Prädikat und Entscheidungsverfahren besteht, ist als Kriterium für die Eignung dieser Verfahren jedenfalls denkbar untauglich. Offensichtlich gibt es geeignete Verfahren, die insofern nicht trivial sind, als ihre Verbindung zum fraglichen Prädikat nicht leicht herzustellen war. Mehr noch als für die Verfahren zur Prüfung der Beweisbarkeit einer aussagenlogischen oder prädikatenlogischen Formel, die inzwischen wohlbekannt sind, gilt dies zum Beispiel für das sogenannte AKS-Verfahren, einem neueren Primzahltest. Dass dieses Verfahren für diesen Zweck eingesetzt wird und werden darf und also insbesondere korrekt ist, beruht darauf, dass ein Begriff gefunden werden konnte, der koextensional zur Primalität und zugleich algorithmisch umsetzbar ist. (Wie sich bei der Besprechung des AKS-Algorithmus in 2.3.1.8 zeigen wird, bestand die eigentliche Schwierigkeit weniger in der Auffindung des koextensionalen Begriffs, als vielmehr in seiner algorithmischen Umsetzung.) Zwar ist das Problem, Primalität zu entscheiden, aus theoretischer Sicht ein triviales, wie wir gesehen haben. Aber zu zeigen, dass sich dieses Problem mit dem AKS-Verfahren lösen lässt, bedarf eines Beweises, der kaum als trivial bezeichnet werden kann. Entsprechend ist das Verfahren selbst alles andere als trivial, was nicht zuletzt daran ersichtlich wird, dass es das Problem auf effizientere Weise löst als alle früheren Entscheidungsverfahren für Primalität.

Man könnte nun sogar vermuten, dass sich Trivialitätsgrad und Effizienz umgekehrt proportional zueinander verhalten, zumindest in einigen wichtigen Fällen. Das oben skizzierte und in jeder Hinsicht triviale Primzahlverfahren scheidet aufgrund seiner Ineffizienz als praktisch anwendbare Lösung für grössere Zahlen denn auch sofort aus. Daraus aber – und das ist hier der wichtigere Punkt – folgt nicht, dass es weniger *geeignet* wäre, Primalität zu entscheiden, als dies effizientere Verfahren sind. Eignung ist ein in diesem Sinn theoretischer Begriff, wenngleich ein noch zu erkundender Zusammenhang zur Effizienz bestehen mag.

Auch dürfte jetzt klarer geworden sein, dass selbst zwischen einem leeren Verfahren und einem Prädikat, das es erwiesenermassen entscheidet, eine begriffliche Verbindung besteht, deren Herstellung mehr oder weniger nahelag. Beim Prädikat ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl', das haben wir gesehen, brauchte es den Beweis von Bertrands Vermutung, der keineswegs als trivial gelten konnte. Dagegen bedarf es bei einem Prädikat wie ‚n ist kleiner als 3 und grösser als 5' keines Beweises dafür, dass es über $\mathbb{N}$ durch das leere Nein-Verfahren entschieden wird. Unter den Entscheidungsproblemen, die S_1 oder S_2 als Sachlage vorgeben, finden sich sowohl triviale als auch nicht-triviale Fälle.

Ohnehin muss es jetzt ganz zwecklos erscheinen, die Eignung von Entscheidungsverfahren an dem Bestehen einer charakteristischen und entsprechend ersichtlichen Verbindung von Prädikat und Algorithmus festmachen zu wollen. Welche «Begriffsbahnen» – um eine Redeweise Wittgensteins aufzunehmen[278] – die Weiterentwicklungen der mathematischen Wissenschaften dereinst noch zeitigen werden, ist nicht vorauszusehen. Aus dem gleichen Grund ist auch nicht vorauszusehen, welche begrifflich noch so weit entfernten Algorithmen sich dazu eignen könnten, ein gegebenes Prädikat zu entscheiden.

Dieser Gedanke verdient es, weitergeführt zu werden, doch zuerst müssen wir uns den beiden anderen untypischen Sachlagen, S_3 und S_4, zuwenden. Aus ihrer Besprechung wird unter anderem deutlicher hervorgehen, dass der Nachweis von Korrektheit und Terminierung auch bei ungeeigneten Verfahren Schwierigkeiten bereiten, ja sogar unmöglich sein kann. Denn anders als bei den leeren oder redundanten Algorithmen von vorhin ist für die noch zu besprechenden Verfahren der Beweis ihrer Korrektheit nicht schon dadurch erbracht, dass das Vorliegen der untypischen Sachlage erwiesen wurde.

Ausserdem wird sich bestätigen, worauf der kurze Ausflug in die Mathematikgeschichte und seine anschliessende Besprechung bereits hindeuten: dass zwei Arten der *Entscheidbarkeit* auseinandergehalten werden müssen: eine *starke*, die durch die Existenz geeigneter Algorithmen verbürgt ist, von einer *schwachen*, die bloss die Existenz

[278] Vgl. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, V.42 (S. 296). Wittgenstein spricht zwar davon, dass Gleichungen eine Begriffsbahn bildeten, das Bild scheint mir aber auf Sätze, die Äquivalenzen ausdrücken, insbesondere die Koextensionalität von Begriffen, mindestens ebenso gut zu passen.

von leeren oder anderen ungeeigneten Verfahren impliziert. Im Gegenzug wird sich die unvorsichtigere Option ausschliessen lassen, welche darin bestanden hätte, das intensionale Moment der Eignung in den Begriff der Entscheidbarkeit einzubauen, um die unplausiblen Folgen abzufedern, die sich zumindest bei untypischer Sachlage aus der Extensionalität unserer Begriffe ergeben.

Die Frage nach der begrifflichen Verbindung zwischen Prädikat und Algorithmus werden wir dagegen erst im nächsten Unterkapitel (ab 2.3.1.6) wiederaufnehmen können.

2.2.2.6. Listenverfahren bei Sachlage S_3 und S_4

Werfen wir also einen Blick auf die Sachlage S_3, bei der die zu prüfenden Gegenstände, auf die das Prädikat zutrifft, eine nicht-leere endliche Menge bilden, sowie auf die Sachlage S_4, bei der es die Gegenstände, auf die das Prädikat *nicht* zutrifft, sind, die in endlicher, von 0 verschiedener Anzahl vorkommen.

Angenommen, es liege S_3 vor, d. h. der Schnitt aus der Prüfmenge M und der Extension des Prädikats P sei zwar nicht leer, aber endlich. Dann lässt sich eine Liste erstellen, die alle Gegenstände aus der Prüfmenge aufführt, auf die das Prädikat zutrifft, und keine Gegenstände, auf die das Prädikat nicht zutrifft. Durch den Algorithmus, der für jedes vorgelegte x in M anzeigt, dass P darauf zutrifft, wenn x in der Liste aufgeführt ist, und umgekehrt, wenn x nicht in der Liste aufgeführt ist, anzeigt, dass P nicht darauf zutrifft, ist P bereits entschieden. Denn beides, sowohl das Erstellen der Liste als auch die nachfolgende Prüfung einzelner Gegenstände mit Hilfe des Algorithmus, bedarf nur endlich vieler Schritte – so zumindest die Annahme.[279]

Gleiches gilt für die andere Sachlage S_4, wenn das Komplement der Schnittmenge aus M und der Extension von P zwar nicht leer, aber endlich ist. In diesem Fall ist das Prädikat durch den Algorithmus entschieden, der analog verfährt wie der eben skizzierte, jedoch mit einer Liste aller und nur jener Gegenstände aus der Prüfmenge arbeitet, auf

[279] Vgl. Hermes (1978, S. 13) für eine klare Formulierung dieser Annahme, die zumeist unausgesprochen bleibt. Vgl. Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 280) für eine noch knappere Formulierung. Für eine andere Beschreibung des Verfahrens, die allerdings ohne explizite Bezugnahme auf eine Liste auskommt, vgl. Urchs (1993, S. 123 f.): «Für ein zu überprüfendes Objekt vergleicht man dieses mit dem ersten Element der Menge, bei Nichtübereinstimmung mit dem zweiten usw. bis zur Übereinstimmung des fraglichen Objekts mit einem Element der Menge oder aber bis hin zum Resultat, dass es mit keinem Element der Menge übereinstimmt. Da die Menge nur endlich viele Elemente umfasst, führt dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten zum Ziel.» Die implizite Anwendung einer Liste zeigt sich an der Annahme, dass die Elemente der zu entscheidenden Menge linear angeordnet sind, und der Möglichkeit, die zu prüfenden Objekte mit den Elementen dieser Menge zu vergleichen. Handelte es sich bei diesen Vergleichsgegenständen um einen Teil der zu prüfenden Objekte selbst und nicht um Listeneinträge, bestünde das Verfahren, wie es beschrieben wird, mitunter darin, ein Objekt mit sich selbst zu vergleichen, was freilich sinnlos wäre.

die das Prädikat *nicht* zutrifft: Wenn x in der Liste aufgeführt ist, wird angezeigt, dass P nicht darauf zutrifft, und umgekehrt, wenn x nicht in der Liste aufgeführt ist, dass P darauf zutrifft. Algorithmen wie dieser werden im Folgenden als *negative Listenverfahren* bezeichnet; analoge Algorithmen, die ein Prädikat bei Vorliegen von S_3 entscheiden, entsprechend als *positive Listenverfahren*.

Demnach ist es die Existenz positiver und negativer Listenverfahren, die dafür sorgt, dass jedes Prädikat P über allen Mengen M mit nur endlich vielen Ps oder nur endlich vielen nicht-Ps entscheidbar ist. So lautet unangefochten die oftmals unausgesprochen bleibende Orthodoxie.[280] Ist zudem wahr, was mitunter für wahr gehalten wird – dass bei untypischer Sachlage in endlich vielen Schritten eine vollständige Liste aller Ps oder aller nicht-Ps in M erstellt werden kann –, lässt sich mit der Angabe des passenden Listenverfahrens das Prädikat tatsächlich entscheiden. Aber ist dem wirklich ohne Weiteres beizupflichten?

2.2.2.7. Das Erstellen von Listen und der Nachweis ihrer Vollständigkeit

Misstrauen erregt als erstes die zuletzt genannte Annahme: Mit endlichem Aufwand könne eine Liste aller Ps in M erstellt werden, wenn es nur endlich viele davon gibt. (Gleiches gilt, *mutatis mutandis*, für die Liste aller nicht-Ps bei Sachlage S_4.) Hier scheint vergessen zu gehen, dass auch bei unendlicher Prüfmenge der Schnitt mit der Prädikatsextension (oder mit ihrem Komplement) endlich ausfallen kann. Anders gesagt, ist es durchaus möglich, dass ein Entscheidungsproblem mehr als endlich viele Gegenstände der Prüfung aussetzt, ja sogar ein Prädikat von unendlicher Extension vorgibt, und trotzdem eine untypische Sachlage vorliegt. Wenn aber die Prüfmenge mehr als endlich viele Elemente enthält, ist nicht ersichtlich, wie *im Allgemeinen* – d. h. ohne weitere Annahmen – mit nur endlichem Aufwand eine vollständige Liste erstellt werden könnte. Denn es müsste für die Fertigstellung einer Liste aller Ps in M insbesondere ihre Vollständigkeit feststehen. Wie sonst wüsste man, wann die Aufgabe erledigt ist? Und eine Liste, von der man nicht weiss, ob sie tatsächlich alle Ps enthält, gestattet es nicht, alle Fragen über das Zutreffen und das Nicht-Zutreffen des Prädikats zu entscheiden, selbst wenn sie vollständig ist.

[280] Den einzigen Hinweis darauf, dass diesem Befund etwas Problematisches anhaften könnte, fand ich in einer kurzen Anmerkung in Dreben und Goldfarb (1979, S. 1). Dass für Entscheidbarkeit die Existenz eines Entscheidungsverfahrens hinreicht – dass es also einerlei sei, ob wir ein solches Verfahren auch zu beschreiben wüssten–, habe die wenig intuitive Konsequenz, dass über jeder endlichen Formelklasse das Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit lösbar sei.

Mit dem Auflisten aller Ps, auf die man trifft, ist es also nicht getan. Es müsste erst festgestellt werden, dass in den womöglich unendlichen Weiten der Prüfmenge kein P übersehen wurde. Und da kann das Vorgehen nicht darin bestehen, für jedes Element in M einzeln nachzuprüfen, ob es sich um ein P handelt oder nicht. Wie aber soll Gewissheit darüber erlangt werden, dass kein P übersehen wurde, die erstellte Liste mithin vollständig ist, wenn nicht durch lückenloses Durchprüfen?

Wenn auf der Prüfmenge eine Ordnung definiert ist, in Bezug auf die jede endliche Teilmenge ein Maximum besitzt, lässt sich die Suche nach allen Ps durch die Angabe einer oberen Schranke auf ein endliches Gebiet eingrenzen. Um das allgemeine Vorgehen an einem Beispiel zu veranschaulichen, sei $\mathbb{N}$ die Prüfmenge und P ein Prädikat, das auf endlich viele natürlichen Zahlen zutrifft. Da jede endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen genau ein grösstes Element enthält (d. h. ein Maximum besitzt), gibt es ein m in der Extension von P über $\mathbb{N}$, das grösser ist als alle anderen Elemente darin. Wenn sich zudem eine obere Schranke für die Ps angeben lässt (d. i. ein n in $\mathbb{N}$ (möglicherweise identisch mit m, aber nicht zwingend), sodass jedes k in der Extension von P sicher nicht grösser ist als n), dann genügt es, in dem Segment $\{0, 1, ..., n\}$ das Zutreffen und Nicht-Zutreffen von P zu überprüfen. Dass sich in $\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., n\}$, dem unendlichen Rest der natürlichen Zahlen, ein weiteres P verbirgt, ist damit ausgeschlossen.

Unter der Bedingung, dass die Prüfmenge mit einer entsprechenden Ordnung versehen ist, wir diese kennen und zudem eine obere Schranke angeben können, wären wir also in der Lage mit nur endlich viel Aufwand die Liste aller Gegenstände zu erstellen, auf die das Prädikat zutrifft – wenigstens prinzipiell. Auch durch solche Ergänzungen der Sachlage, die Rückschlüsse auf die genaue Anzahl der Elemente in dieser Schnittmenge erlauben, würde das Erstellen einer Liste möglich. Allerdings müsste dafür, sofern nichts Weiteres angenommen wird, ohne obere Schranke die Prüfmenge so lange durchpflügt werden, bis die Gegenstände, auf die das Prädikat zutrifft, in der richtigen Anzahl gefunden wurden. Das könnte beliebig viel Zeit in Anspruch nehmen. (Bei Sachlage S_4 gilt wiederum, *mutatis mutandis*, Gleiches für die Liste aller Gegenstände, auf die das Prädikat nicht zutrifft.)

Ohne diese zusätzliche Bedingung oder eine gleichwertige Ergänzung der Sachlage ist im Allgemeinen nicht gewährleistet, dass bei unendlicher Prüfmenge das sparsamste Vorgehen zur Listenerstellung nur endlich viel Aufwand erfordert. Die Allgemeinheit des Entscheidbarkeitsbegriffs aber würde durch eine solche Bedingung an die zulässigen Sachlagen auf unerwünschte Weise eingeschränkt. Denn weshalb sollte über Entscheidbarkeit nur geurteilt werden können, wenn die Menge der Gegenstände, die auf das Zutreffen oder das Nicht-Zutreffen eines Prädikats hin zu prüfen wären, mit einer gewissen Ordnung versehen ist? Das zugrundeliegende Entscheidungsproblem müsste ausserdem eine obere Schranke vorgeben, die innerhalb der Prüfmenge einen endlichen Bereich als den zu prüfenden markiert. Diese Zusatzannahmen würden viele interessante Entscheidungsprobleme als solche disqualifizieren.

Stattdessen könnte man nun annehmen wollen, dass eine Liste nicht erst erstellt werden muss, da ein Algorithmus mit einer Liste der Antworten zu allen Fragen, die das Entscheidungsproblem aufwirft, *vorab gegeben* sei. Diese Liste bestünde bei unendlicher Prüfmenge aus unendlich vielen Einträgen. Im entsprechenden Listenverfahren müsste daher eine unendliche Informationsmenge irgendwie abgelegt sein, was mit dem für unsere Zwecke relevanten Algorithmusbegriff nicht vereinbar ist. Die Annahme von Algorithmen mit derartigen Speicherkapazitäten hätte zur Folge, dass ungeachtet der vorliegenden Sachlage *jedes* Prädikat über *jeder* Prüfmenge entscheidbar würde. Denn, wie es die Funktion gibt, die eine vorgegebene Prüfmenge M auf die Menge $\{0, 1\}$ abbildet, sodass jedem x in M die 1 zugeordnet wird, wenn das vorgegebene Prädikat P auf x zutrifft, und die 0, wenn P nicht zutrifft, so gibt es eine unendliche Liste, die im Wesentlichen dasselbe leistet. (Eine erschöpfende Liste könnte beispielsweise so aufgebaut sein, dass die Ps an ungerader, die nicht-Ps an gerader Position vorkommen. Bei untypischer Sachlage würde in die Stellen, die nach der Auflistung aller Ps (bei S_3) oder aller nicht-Ps (bei S_4) unbesetzt geblieben sind, einfach ein Sonderzeichen eingetragen.) Kein Prädikat könnte dem Verfahren, das sich dieser oder einer anderen erschöpfenden Liste korrekt bedient, widerstehen. Unentscheidbarkeit würde überhaupt ein Ding der Unmöglichkeit, auch bei typischer Sachlage.

Diese Konsequenz gilt es selbstverständlich zu vermeiden. Algorithmen, die mit unendlichen Listen arbeiten (und gleichwohl für jede Eingabe irgendwann abbrechen und die korrekte Antwort anzeigen), darf es nicht geben, wenn uns der Entscheidbarkeitsbegriff etwas bedeuten soll.[281] Lediglich das *Gegebensein* positiver und negativer Lis-

[281] Ein Weg, unendliche Listen doch zuzulassen, ohne die Möglichkeit von Unentscheidbarkeit auszuschliessen, bestünde darin, an einer oberen Schranke für die Bearbeitungszeit einzelner Aufgaben festzuhalten. Man könnte sich denken, dass ein erster Algorithmus damit beginnt, eine Liste mit allen Fragen, die das Problem aufwirft, herzustellen, und die erzeugten Einträge dann einem zweiten Algorithmus zwecks Entscheidung des Prädikats weiterleitet. Der zweite Algorithmus würde insofern mit einer unendlichen Liste arbeiten, als sie nie fertiggestellt werden könnte. Da indessen auch die Forderung bestünde, dass der zweite Algorithmus auf jede Frage, die ihm ein Anwender stellt, innerhalb einer vorgegebenen Zeitspanne eine Antwort ausgibt, würden all diejenigen Fragen nicht (oder nicht korrekt) beantwortet, die einen Gegenstand betreffen, der von dem ersten Algorithmus noch nicht in die Liste aufgenommen wurde, als die vorgesehene Bearbeitungszeit ablief. Anders gesagt, wäre es auch möglich, die im Algorithmusbegriff enthaltene Finitheitsbedingung nicht an den Speicherkapazitäten seiner Instanzen festzumachen, sondern vielmehr an einer oberen Schranke

tenverfahren, wie sie vorhin beschrieben wurden, dürfte für die Sachlagen S_3 und S_4 angenommen werden. Die dadurch postulierten Listen bestünden immer nur aus endlich vielen Einträgen: einen für jedes P in M bei S_3 bzw. einen für jedes nicht-P in M bei S_4.

Dass diese mit endlichen Listen ausgestatteten Verfahren immer abbrechen, ist offensichtlich und bedarf keines Beweises. Um sie aber als Entscheidungsverfahren verwenden *zu dürfen*, müsste zuerst ihre Korrektheit, mithin die Vollständigkeit der eingebauten Listen feststehen. Dafür müsste nicht nur gezeigt werden, dass jeder Gegenstand, der in die Liste aufgenommen wurde, zu Recht dort aufgeführt ist, sondern desgleichen, dass es ein Fehler wäre, auch nur einen der unendlich vielen Gegenstände, die nicht in die Liste aufgenommen wurden, dort aufzuführen. Ohne Zusatzannahme ist jedoch nicht sichergestellt, dass die Vollständigkeit der Liste in jedem Fall mit endlichem Aufwand nachgewiesen werden kann. Wiederum müsste die genaue Zahl der Ps bzw. der nicht-Ps in der Prüfmenge bekannt oder es müsste auf der Prüfmenge eine hinreichende Ordnung definiert und vor allem eine obere Schranke angegeben sein. Beide Annahmen würden aber die Allgemeinheit des Entscheidbarkeitsbegriffs über Gebühr einschränken.

Um solche Einschränkungen zu vermeiden und gleichwohl in jedem Fall zu garantieren, dass die für gegeben genommenen Listenverfahren überhaupt als Lösungen eines Entscheidungsproblems erkannt werden können, scheint kein anderer Ausweg mehr offen, als anzunehmen, dass die eingebauten Listen mit „Metadaten" versehen sind, aus denen eben ihre Vollständigkeit hervorgeht. Damit würde der Algorithmus gewissermassen in sich selbst die lesbare Information tragen, dass er korrekt ist. Doch diese Annahme erscheint bestenfalls *ad hoc* und es ist nicht ersichtlich, wodurch sie zu rechtfertigen wäre – ausser durch den Wunsch, die nachweisliche Entscheidbarkeit jedes Prädikats bei Sachlage S_3 und S_4 zu erzwingen.

2.2.2.8. Die fehlende Eignung der Listenverfahren

Die Behauptung, bei untypischer Sachlage lasse sich für jedes Prädikat in endlich vielen Schritten eine Liste erstellen, mit deren Hilfe dieses entschieden wird, ist im Allgemeinen also falsch. Sie scheint vielmehr auf den speziellen Fall gemünzt, dass beide Sachlagen, S_3 und S_4, zugleich vorliegen. Denn dann ist die Prüfmenge M selbst endlich.[282] Wenn

---

für den zeitlichen Aufwand, den das Lokalisieren eines Elements in einer (potenziell oder aktual) unendlichen Liste beanspruchen darf. Denn sobald eine Zeitlimite vorgegeben wäre, würden unendlich viele Einträge einer solchen Liste ausser Reichweite jedes Suchalgorithmus bleiben.

[282] Vgl. dazu Kleene (1967, S. 226). Kleene führt die „triviale" Entscheidbarkeit in diesem Fall darauf zurück, dass das jeweilige Entscheidungsproblem nur endlich viele Fragen aufwirft. Deshalb lasse

aber M endlich ist und – wie zumeist nur implizit angenommen wird – auf jede Einzelfrage, die das Problem aufwirft, eine Antwort gefunden werden kann, dann muss es im Prinzip möglich sein, für jedes Element in M einzeln zu prüfen, ob das Prädikat P darauf zutrifft oder nicht, und entsprechend eine Liste aller angetroffenen Ps und eine Liste aller angetroffenen nicht-Ps zu führen. Folglich lassen sich, wenn S_3 und S_4 zugleich vorliegen, mit endlichem Aufwand Listen erstellen, die offenbar auf alle Fragen die richtigen Antworten bereithalten. Mit der Angabe des passenden Listenverfahrens ist das zugrundeliegende Entscheidungsproblem sodann gelöst.

Worauf aber beruht diese nun doch zwangsläufig erscheinende Entscheidbarkeit bei endlicher Prüfmenge? Jedenfalls nicht auf der Existenz von *geeigneten* Algorithmen. Listenverfahren eignen sich nicht dazu, offene Fragen zu entscheiden. Denn sofern keine besonderen Bedingungen an die Sachlage bestehen, beinhaltet die Erstellung einer vollständigen Liste auch im endlichen Fall das lückenlose Durchprüfen der Prüfmenge: d. i. das Feststellen an jedem einzelnen Element darin, ob das fragliche Prädikat zutrifft oder nicht. Ist aber einmal die Menge durchgeprüft und in Listenform das Protokoll des Prüfprozesses erstellt, ist damit auch schon die Antwort auf jede aufgeworfene Frage gegeben. Die Verfahren, die um die so entstandenen Listen herum gebaut werden, enthalten *in expliziter Form* die gesamte Information über das Zutreffen und Nicht-Zutreffen des Prädikats innerhalb der Prüfmenge. Es lässt sich mit ihnen die Prädikatsextension nicht weiter erforschen.

Daran ändert auch die Annahme vorab gegebener Listen nichts. Denn bevor ein Verfahren, das sich einer solchen Liste bedient, dazu verwendet werden darf, Fragen zu entscheiden, muss seine Korrektheit und Terminierung bewiesen sein. Dieser Beweis indes besteht hauptsächlich darin, die Vollständigkeit der eingebauten Liste nachzuweisen, und das einzige Vorgehen, das sich *immer* anwenden lässt und nur deshalb zwangsläufig für Entscheidbarkeit sorgt, ist wiederum ein lückenloses Durchprüfen der Prüfmenge. Nachdem aber eine solche Prüfung durchgeführt wurde, ist, wie gesagt, keine Frage mehr offen. Es lässt sich also mit einem Listenverfahren nichts beantworten, worauf nicht schon eine Antwort gegeben wurde, sei die Liste nun selbst erstellt oder übernommen.

Damit ist natürlich nicht behauptet, dass Listenverfahren überhaupt keinen Nutzen haben können. Unter gewissen Umständen (und in einem bestimmten Wortsinn) lassen

---

sich dieses durch das Vorbereiten einer Liste aller Antworten immer lösen, zumindest theoretisch. Offenbar bezieht sich Kleenes Befund allein auf Probleme mit endlicher Prüfmenge. Dasselbe gilt für die Bemerkungen in Hunter (1988, S. 176-177). Hermes' Behauptung dagegen ist stärker (siehe Anm. 279). Er behauptet, dass jede endliche Menge – ob nun relativ zu einer endlichen oder zu einer unendlichen Prüfmenge – auf ebenso triviale Weise entschieden sei. Diese stärkere Behauptung findet sich auch bei Urchs (1993).

sie sich durchaus dazu verwenden, Fragen zu beantworten. Zum Beispiel könnte mir jemand, dem ich vertraue, eine Liste aushändigen und versichern, sie enthalte in aufsteigender Reihenfolge alle Primzahlen zwischen 1 und 10^6, sodass ich mit ihrer Hilfe Fragen beantworte, deren Antwort *ich* vorher nicht kannte. Der Liste könnte ich unter anderem leicht entnehmen, was die grösste Primzahl ist, die im dezimalen Gewand noch fünfstellig erscheint.[283] Solche und ähnliche Verwendungen müssen aber, wenn sie nicht unerlaubt sein sollen, auf der wahren und begründeten Annahme beruhen, dass die Vollständigkeit der Liste letztlich durch ihre Erstellungsweise oder durch einen Nachweis verbürgt ist. Andernfalls sind die Antworten, die ihr entnommen werden, wertlos für den verfolgten Verwendungszweck. Wurde die Liste auf eine Weise erstellt, die ihre Vollständigkeit garantiert, oder wurde diese nachgewiesen, sind indes die Antworten auf alle aufgeworfenen Fragen bereits hinreichend bekannt; d. h., in der hier relevanten Bedeutung von ‚bekannt sein', durch die freilich nicht ausgeschlossen ist, dass ich, der ich weder die Liste erstellt noch ihre Vollständigkeit nachgewiesen habe, die Antwort auf manche Frage nicht kenne.

Im endlichen Fall beruht also die zwangsläufige Entscheidbarkeit von Prädikaten auf der Existenz ungeeigneter Entscheidungsverfahren. Dadurch ist für jedes Entscheidungsproblem, das nicht mehr als endlich viele Gegenstände der Prüfung aussetzt, lediglich die Existenz einer *schwachen* Lösung sichergestellt. Doch immerhin besteht die prinzipielle Möglichkeit, eine solche Lösung auch anzugeben. Nicht so im unendlichen Fall. Denn sobald mehr als endlich viele Gegenstände einzeln geprüft werden müssten, ist das Erstellen einer vollständigen Liste unmöglich. Und wo sich die Anwendung eines bereits gegebenen Listenverfahrens anbietet, bleibt dies unerlaubt, solang die Vollständigkeit der eingebauten Liste nicht nachgewiesen wurde. Beides aber – die Möglichkeit sowohl der Listenerstellung als auch des Vollständigkeitsnachweises – erfordert von der Sachlage, dass sie gewisse Zusatzbedingungen erfüllt, von denen man nicht ohne Weiteres annehmen kann, dass sie gegeben sind. Und wo diese Bedingungen gleichwohl erfüllt sind, können die Listenverfahren aus denselben Gründen wie im endlichen Fall nicht dazu verwendet werden, Fragen zu entscheiden. Als gesichert gilt demnach auch bei unendlicher Prüfmenge allein die Existenz von schwachen Problemlösungen.

Anders als im endlichen Fall ist bei unendlicher Prüfmenge überdies nicht ausgeschlossen, dass es sich bei den schwachen Lösungen, die gewiss existieren, gleichwohl um Algorithmen handelt, die weder konstruiert noch als Entscheidungsverfahren erwiesen werden können. Da fragt sich schon, was das für eine Entscheidbarkeit sein soll, die

[283] Dass Listen von Primzahlen, selbst wenn sie unvollständig sind, von grossem Nutzen sein können, zeigt die Geschichte des Primzahltestens. Vgl. dazu Williams (1998, Kap. 2.5, 8.5, 13.1).

aufgrund einer untypischen Sachlage zwar zwangsläufig angenommen wird, in manchen Fällen womöglich aber keinen Nachweis durch die Angabe eines Algorithmus zulässt.

Dagegen liesse sich einwenden, es sei nicht ausgeschlossen, dass sich für alle lösbaren Probleme *geeignete* Algorithmen finden lassen, die sie im starken Sinn lösen. Bei unserem Ausflug in die Mathematikgeschichte vorhin sind wir trotz untypischer Sachlage mehreren solchen Beispielen begegnet. Dennoch erscheint es zumindest zweifelhaft, dass für jedes denkbare Entscheidungsproblem mit untypischer Sachlage *allein schon deshalb* ein geeignetes Entscheidungsverfahren existiert, weil der Schnitt der Prüfmenge mit der Prädikatsextension oder mit ihrem Komplement endlich ausfällt. Damit aber jedes dieser Probleme einer starken Lösung zugeführt werden kann, müsste es möglich sein, ein solches Verfahren jeweils anzugeben.

2.2.3. Zwangsläufige Entscheidbarkeit bei untypischer Sachlage

Immer, wenn sich ein Prädikat in untypischer Sachlage befindet, existiert entweder ein leeres oder ein Listenverfahren, wodurch es entschieden wird. Doch sind auch alle Verfahren dieser Art denkbar ungeeignet, die Extension eines Prädikats zu bestimmen. Mit ihnen lässt sich unmöglich feststellen, was nicht schon bekannt ist: auf welche Gegenstände das Prädikat zutrifft und auf welche nicht. Trotzdem zwingen uns unsere Begriffe jedes Entscheidungsproblem, das eine untypische Sachlage vorgibt, für lösbar zu befinden, was immer das Prädikat und was die zu prüfenden Gegenstände sein mögen. Für Unentscheidbarkeit bleibt da kein Platz, selbst dann nicht, wenn kein geeignetes Entscheidungsverfahren existieren und es uns unmöglich sein sollte, das korrekte und vollständige Listenverfahren anzugeben.

Eine solche Entscheidbarkeit – allein durch die Existenz von uns unzugänglichen Algorithmen verbürgt und dennoch durch die Definitionen erzwungen – wäre, wenn keine Form von *Un*entscheidbarkeit, dann wenigstens von anderer Art als diejenige Entscheidbarkeit, die bei typischer Sachlage auftritt und deswegen auf geeigneten Verfahren beruhen *muss*. Entsprechend müsste die Lehre von der zwangsläufigen Entscheidbarkeit in diesen Fällen aufgegeben oder zumindest angepasst werden. Deshalb drängt sich jetzt die Klärung der Frage auf, ob das Vorliegen einer untypischen Sachlage neben der Existenz von ungeeigneten Verfahren auch die von geeigneten impliziert oder nicht. Wie sich am Ende dieses Abschnitts zeigen wird, hängt an der Antwort auf diese Frage in gewissen Sachlagen auch die Annahme, dass es keine unentscheidbaren Einzelfragen gibt.

2.2.3.1. Die Göttin Arithmetica

Versuchen wir die gestellte Frage an einem Beispiel zu klären. Arithmetica, die Göttin der gleichnamigen Wissenschaft, trage bei sich jeweils eine Liste logischer Formeln, aus der sie uns einen Eintrag nach dem andern zur Prüfung übergibt. Unsere Aufgabe sei es, jedes Mal zu entscheiden, ob es sich bei der vorgelegten Formel um eine Kontradiktion handelt oder nicht. Da wir nicht für jede vorgelegte Formel aufs Neue nach einem Lösungsweg suchen wollen, ist das Ziel unserer Bestrebungen ein allgemeines Verfahren, das jede einzelne Frage auf gleiche Weise entscheidet, ohne unsere höheren geistigen Fähigkeiten zu beanspruchen. Nehmen wir ausserdem an, dass die Aufgaben, die uns die Göttin in jedem Schritt stellt, für sich genommen immer lösbar sind. Als unlösbar erweisen kann sich nur das Entscheidungsproblem, das aus diesen einzelnen Aufgaben besteht. Denn um dieses zu lösen, muss ein allgemeines Verfahren angegeben werden, das jede Einzelfrage *auf gleiche Weise* entscheidet.

Szenario 1 Die erste Liste in Arithmeticas Hand enthalte ausnahmslos alle Formeln der Prädikatenlogik erster Stufe. Aus dem Theorem von Church (und einer weiteren, ebenfalls nach ihm benannten Annahme, auf die wir im nächsten Kapitel kurz zu sprechen kommen werden) folgt, dass unser Ziel hier unerreichbar bleiben muss. Es gibt kein Entscheidungsverfahren für das Prädikat ‚φ ist eine Kontradiktion'. Wir können zwar mit Hilfe eines vollständigen Kalküls Kontradiktionen und ebenso Tautologien als solche effektiv erkennen, wenn sie uns vorgelegt werden. Aber von keinem Verfahren wird sich je beweisen lassen, dass es für jede Formel, die uns die Göttin übergeben könnte, nach endlich vielen Schritten das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen des fraglichen Prädikats richtig anzeigt – und dies schlicht deshalb, weil kein solches Verfahren existiert. Jeder erdenkliche noch so ausgeklügelte Algorithmus würde früher oder später an der Aufgabe scheitern. Genauer gesagt, würde uns kein Algorithmus erlauben, die Menge der Kontradiktionen und ihr Komplement in der Prüfmenge, d. i. die Menge aller erfüllbaren Formeln (worin auch die Tautologien enthalten sind), überall auseinanderzuhalten. Jeder Algorithmus würde für gewisse erfüllbare Formeln entweder nicht abbrechen oder sie fälschlicherweise als Kontradiktionen werten. Darin besteht eben die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe.[284]

[284] Diese Unentscheidbarkeit beruht nicht etwa darauf, dass für die Erkennung von Kontradiktionen zwar ein vollständiger Kalkül, aber eben kein algorithmisches, mechanisch ausführbares Verfahren existiere. Es ist zwar richtig, dass ein Kalkül (d. i. eine Menge von Regeln) noch keinen Algorithmus definiert, «da nicht vorgeschrieben ist, in welcher Reihenfolge die einzelnen Regeln angewandt werden sollen» Hermes (1978, S. 7). Jedoch lässt sich aus einem gegebenen Kalkül endlich vieler Regeln

Szenario 2 Das Entscheidungsproblem, dem wir uns im ersten Szenario gegenübersehen, gibt wohlgemerkt eine typische Sachlage vor. Sowohl die Menge der Kontradiktionen als auch ihr Komplement enthalten unendlich viele Formeln. Von Arithmetica aber, da sie eine Göttin ist, dürfen wir annehmen, dass sie ausserdem über eine zweite Liste verfügt, worin wiederum alle erfüllbaren Formeln enthalten sind (also auch die Tautologien), jedoch nur endlich viele Kontradiktionen. Angenommen, sie lege also die erste Liste weg und nehme die zweite zur Hand. Das Problem, das es nun zu lösen gilt, gibt eine untypische Sachlage vor, nämlich S_3. Folglich wird das Prädikat (,φ ist eine Kontradiktion') entscheidbar, sei es nur aufgrund der Existenz eines entsprechenden Listenverfahrens.

Was aber ändert sich für uns, die wir mit den zur Verfügung stehenden Mitteln das Problem lösen sollen? Gewiss, wenn sich Arithmetica dazu überwinden könnte, die Liste mit den eingestreuten Kontradiktionen vorab auszuhändigen und für ihre Vollständigkeit zu bürgen, wäre es, sofern wir ihr vertrauen dürfen, ein Kinderspiel, das Prädikat zu entscheiden. Immer noch hilfreich, wenngleich umständlicher, wäre es, wenn die Göttin uns mitteilte, wie viele Kontradiktionen in ihrer zweiten Liste enthalten sind. Denn das fragliche Prädikat mag zwar im Allgemeinen unentscheidbar sein, trotzdem verfügen wir über ein Verfahren, das uns erlaubt, Kontradiktionen effektiv als solche zu erkennen. Dies beruht darauf, dass korrekte und vollständige Kalküle über der gesamten Menge der prädikatenlogischen Formeln existieren und uns bekannt sind. Ausgehend von einem solchen Kalkül können Algorithmen konstruiert werden, die für jede eingegebene Kontradiktion nach endlich vielen Schritten korrekt anzeigen, dass es sich um eine Kontradiktion handelt.[285] Da wir also über ein zuverlässiges Verfahren zur Erkennung von Kontradiktionen verfügen, könnten wir im Wissen um ihre genaue Zahl nicht nur damit

---

immer ein entsprechender Algorithmus gewinnen. Neben der Implementierung der Kalkülregeln bedarf es dazu lediglich «einer ergänzenden Vorschrift darüber, in welcher Reihenfolge diese Regeln angewandt werden sollen» Hermes (1978, S. 8). Ein Kalkül liefert demnach das Material für im Prinzip unbegrenzt viele Algorithmen. Existierte ein korrekter und vollständiger Kalkül der ersten Stufe, mit dem auch die *Erfüllbarkeit* von prädikatenlogischen Formeln bewiesen werden könnte, gäbe es auf dieser Stufe keine Unentscheidbarkeit. Vgl. ergänzend dazu Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 351-354).

[285] Deshalb werden die Prädikate ,φ ist eine Kontradiktion' und ,φ ist eine Tautologie' in der Literatur mitunter als halb-entscheidbar (*semi-decidable*) bezeichnet. (Dass dies für beide Prädikate gelten muss, ist daran zu erkennen, dass die Tautologien quasi das Spiegelbild der Kontradiktionen unter der logischen Negation darstellen und *vice versa*: ψ ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg\psi$ eine Kontradiktion ist. Für den Zusammenhang von Kalkül und Algorithmus, siehe Anm. 284.) Das Prädikat ,φ ist erfüllbar' hingegen ist nicht halb-entscheidbar. Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, welche Teilmenge innerhalb der Menge aller erfüllbaren Formeln dafür verantwortlich ist und die Unentscheidbarkeit der drei Prädikate verursacht. Es sind dies die sogenannten *infinity axioms* oder *infinity schemata*, mithin diejenigen erststufigen Formeln, deren Modelle eine unendliche Trägermenge aufweisen müssen.

beginnen, die von der Göttin vorgelegten Kontradiktionen zu zählen, wir hätten auch ein Kennzeichen für die Vollständigkeit der Zählung, mithin für den Zeitpunkt, ab dem nur noch erfüllbare Formeln zu erwarten sind. Dem Aufwand, den unser Unterfangen mit sich bringt, wäre dennoch keine obere Schranke gesetzt. Arithmetica könnte beliebig lange zuwarten, bis sie uns die letzte Kontradiktion auf ihrer Liste mitteilt.

Vor allem aber, und das ist die wichtige Feststellung, wären wir ohne die Zahlangabe oder andere göttliche Hilfestellung in keiner besseren Lage, das Problem zu lösen, als zuvor im ersten Szenario. Selbst wenn wir um das Vorliegen der untypischen Sachlage wüssten, mithin die Existenz eines positiven Listenverfahrens annehmen dürften, wäre es uns im Allgemeinen unmöglich, die dafür nötige Liste zu erstellen. Und jedes andere Verfahren, das wir entwerfen könnten in der Hoffnung, die Kontradiktionen von den erfüllbaren Formeln zu unterscheiden, würde aus dem gleichen Grund wie vorhin für gewisse erfüllbare Formeln entweder nie oder dann ein falsches Ergebnis ausgeben. (Denn ein solches Verfahren müsste uns erlauben, *jede* erfüllbare Formel effektiv als solche zu erkennen, sodass wir zusammen mit dem korrekten Kontradiktionentest über ein Entscheidungsverfahren für die gesamte Prädikatenlogik erster Stufe verfügen würden, was ausgeschlossen ist.) Eine starke Lösung des Problems ist unter diesen Umständen unmöglich. Wir wüssten also um die Entscheidbarkeit des Prädikats und wären doch für immer ausserstande, es zu entscheiden.

Bemerkenswert ist ausserdem, dass sich für uns auch dann nicht viel änderte, wenn die Göttin kurzentschlossen die eingestreuten Kontradiktionen in ihrer Liste jeweils ausliesse und uns nur erfüllbare Formeln zur Prüfung übergäbe. Eine starke Lösung des Problems ist bei dieser Sachlage ebenfalls nicht möglich. (Denn damit wäre wiederum ein Entscheidungsverfahren über der gesamten Formelmenge der Prädikatenlogik gegeben.) Wüssten wir aber um die neue Sachlage, d. h. dass jetzt S_1 vorliegt, liesse sich wenigstens das leere Nein-Verfahren als schwache Lösung anführen. Wir hätten hier also jenen Fall, der weiter oben (2.2.2.4) bloss schematisch angedeutet wurde: Während feststeht, dass das Prädikat über der Prüfmenge leer ist oder sie ganz umfasst, mithin durch ein leeres Verfahren entschieden wird, bleibt eine starke Lösung des Problems weiterhin unbekannt, ja erweist sich sogar als unmöglich.[286]

[286] Ein aus mathematischer Sicht interessanteres Beispiel für dieselbe Sachlage liefert das Prädikat ‚φ ist arithmetisch falsch und aus den Axiomen von N beweisbar', wenn (i) die Prüfmenge alle Formeln der erststufigen Sprache der Arithmetik mit Signatur $\{0, S, +, \cdot, <\}$ und Identität umfasst und (ii) es sich bei N um die Theorie einer fragmentarischen Arithmetik aus Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, Kap. 12) handelt. N enthält alle Formeln, die aus den neun Axiomen beweisbar sind, in denen die übliche arithmetische Bedeutung der nicht-logischen Zeichen festgehalten wird: ‚0' steht dann für die Null, ‚S' für die Nachfolgerfunktion, ‚+' für die Addition und ‚$\cdot$' für die Multiplikation zwischen

Szenario 3 Noch einmal anders sähe es für uns aus, wenn sich Arithmetica nicht der ersten, auch nicht der zweiten, sondern einer dritten Liste bemächtigte, die zwar Kontradiktionen in endloser Zahl enthält, aber nur endlich viele erfüllbare Formeln. Denn bei dieser Sachlage (d. i. S_4) fehlte uns das sichere Fangnetz, um aus dem endlosen Fluss der Formeln, auf die das Prädikat zutrifft, die nur endlich vielen herauszugreifen, auf die es nicht zutrifft. Wir wissen ja nichts Spezifisches über die Auswahl der erfüllbaren Formeln auf Arithmeticas Liste. Und aufgrund der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik ist es unmöglich, mit einem einzigen Verfahren, zuverlässig *alle* Elemente aus *jeder* endlichen Auswahl an erfüllbaren Formeln als solche zu erkennen. Für jedes Verfahren muss es eine Auswahl geben, bei der das eine oder andere Element durch die Maschen fällt. (Sonst existierte ein Entscheidungsverfahren über der gesamten prädikatenlogischen Formelmenge.) Kenntnis von der Anzahl erfüllbarer Formeln in der Liste würde uns, im Gegensatz zu vorhin für die endlich vielen Kontradiktionen, nicht immer weiterbringen.

Andererseits stellt die Menge der potenziell problematischen Formeln in diesem dritten Szenario lediglich eine Auswahl dar aus der gesamten Menge aller erfüllbaren Formeln. Es ist daher nicht ausgeschlossen, dass wir gerade für diejenige Auswahl an Nicht-Kontradiktionen, die Arithmetica in ihrer dritten Liste führt, über ein geeignetes Entscheidungsverfahren oder eine Kombination von solchen verfügen. Dies wäre zum Beispiel der Fall, wenn es sich dabei ausschliesslich um Tautologien handelte. (Um aus dem erwähnten Kontradiktionentest ein Entscheidungsverfahren zu gewinnen, genügte es in diesem Fall, für jede eingegebene Formel ϕ den Test sowohl auf ϕ als auch auf $\neg\phi$ anzusetzen und die Ausgabe entsprechend der zurückerhaltenen Ergebnisse anzupassen.) Eine starke Lösung wäre auch möglich, wenn die Liste zwar keine Tautologien enthielte, dafür aber alle aufgeführten Formeln endliche Modelle hätten. Denn für die Eigenschaft der *endlichen* Erfüllbarkeit gibt es einen Test, der zwar nicht für jede prädikatenlogische Formel abbricht, mit dem sich aber das Vorliegen der Eigenschaft korrekt erkennen lässt.

---

natürlichen Zahlen. (Die Axiome sind auf S. 351 aufgelistet.) Für eine hinreichende Zahlentheorie fehlt in N ein Axiom oder Axiomenschema der Induktion. Trotzdem ergibt sich folgendes Bild: Die Extension des fraglichen Prädikats über der Prüfmenge ist leer, da N widerspruchsfrei ist und nur Formeln enthält, die arithmetische Wahrheiten darstellen. (Bemerkenswerterweise lässt sich die Widerspruchsfreiheit von N mit finiten Mitteln beweisen, vgl. Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 342-343).) Aus einer Variante des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes (Th. 12.2 auf S. 373-374) und aus Churchs Theorem (Th. 12.1 auf S. 367) folgt dennoch, dass für das fragliche Prädikat kein *geeignetes* Entscheidungsverfahren existiert. Es ergibt sich also eine Entscheidbarkeit *per definitionem*, die zwar durch die Angabe des leeren Nein-Verfahrens nachgewiesen ist, aber auch eine schwache bleiben muss, da aus allgemeinen Sätzen über die Grenzen der Beweisbarkeit in formalen Systemen die Unmöglichkeit einer starken Lösung folgt.

(Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, inwiefern diese Eigenschaft bei der Bestimmung der Grenzen zwischen entscheidbaren und unentscheidbaren Teilen der Prädikatenlogik von Bedeutung ist.)

Szenario 4 In den Szenarien 2 und 3 steht es also ungeachtet der Existenz von Listenverfahren nicht besonders gut um unsere Aussichten, das jeweilige Problem zu lösen, jedenfalls kaum besser als in Szenario 1, bei dem ein typischer Fall von Unentscheidbarkeit vorliegt. Die Vermutung liegt nahe, dass dies auch mit der unendlichen Anzahl an zu prüfenden Gegenständen zusammenhängt. In der Absicht, unsere Ausgangslage zu verbessern, könnten wir daher die Göttin darum bitten, anstelle der früheren Listen eine vierte zu verwenden, die nur endlich viele Kontradiktionen und nur endlich viele erfüllbare Formeln enthält. Doch käme sie uns damit wirklich entgegen?

Sofern angenommen werden darf, dass sich jede mathematische Frage auf die eine oder andere Weise entscheiden lässt, wären wir im Unterschied zu den Szenarien davor zumindest prinzipiell immer in der Lage, ein Listenverfahren und damit eine Lösung des Problems anzugeben. Für jede vorgelegte Formel müsste sich ein Weg – nicht derselbe für alle Formeln, aber für jede mindestens ein Weg – finden lassen, ihre Erfüllbarkeit oder Nicht-Erfüllbarkeit zu bestimmen. Durch das geduldige Zusammentragen der einzelnen Antworten in ein Listenverfahren wäre das Problem zu lösen, wenn auch nur im schwachen Sinn.

Dagegen scheint eine starke Lösung, die *jeder beliebigen* endlichen Auswahl an erfüllbaren Formeln standhält, aus den gleichen Gründen wie im vorherigen Szenario nicht möglich. Und wiederum lässt sich dennoch nicht ausschliessen, dass für jede endliche Auswahl jeweils ein geeigneter Algorithmus existiert, der die Formeln darin effektiv als erfüllbar erkennt. Damit solche Algorithmen als Lösungen des Problems erkannt werden können, müsste allerdings aus zusätzlichen Angaben hervorgehen oder an den Formeln selbst ersichtlich sein, welcher der infrage kommenden Algorithmen das Zutreffen und Nicht-Zutreffen des Prädikats für gerade diese Auswahl an Formeln korrekt anzeigt. Wenn es sich bei den in der Prüfmenge enthaltenen erfüllbaren Formeln um Tautologien handelte, stünde mit dem vorhin erwähnten zweifachen Test jeder Formel und ihrer Negation wiederum ein starkes Entscheidungsverfahren zur Verfügung. Desgleichen liessen sich mit Hilfe eines Tests auf endliche Erfüllbarkeit die Nicht-Kontradiktionen von den Kontradiktionen in der Prüfmenge klar trennen, sofern sich unter den Nicht-Kontradiktionen ausschliesslich Formeln fänden, die diese Eigenschaft besitzen.

2.2.3.2. Das Dogma der zwangsläufigen Entscheidbarkeit

Wie steht es nun nach diesen Betrachtungen um die Lehre von der zwangsläufigen Entscheidbarkeit bei untypischer Sachlage? Offenbar gibt es Entscheidungsprobleme, für die es keine starke Lösung geben kann und die sich nicht einmal einer schwachen zuführen lassen, obwohl die Existenz eines Listenverfahrens und damit die Lösbarkeit des Problems durch das Vorliegen der dritten untypischen Sachlage (S_3) gesichert scheint. In solchen Fällen beruht das Fehlen einer starken Lösung darauf, dass ein umfassenderes Entscheidungsproblem unlösbar, genauer: das fragliche Prädikat bei typischer Sachlage unentscheidbar ist. Die Unentscheidbarkeit, die in dem zweiten obigen Szenario auf das engere Problem zurückwirkt, ist die der Kontradiktionen (bzw. der Tautologien) im ersten Szenario, d. i. ihre Unentscheidbarkeit über der gesamten Menge aller prädikatenlogischen Formeln. Verursacht ist diese Unentscheidbarkeit wiederum dadurch, dass für die unendlich vielen Nicht-Kontradiktionen der Prädikatenlogik kein allgemeines Verfahren existiert, mit dem sich ihre Erfüllbarkeit (d. i. das Nicht-Zutreffen des in unserem Beispiel zu entscheidenden Prädikats) verlässlich feststellen lässt.

Gegenüber dem Entscheidungsproblem aus dem ersten Szenario fällt jenes im zweiten Szenario insofern enger aus, als die Menge der zu prüfenden Gegenstände reduziert wurde. Dennoch bleibt auch im zweiten Szenario die Prüfmenge unendlich, weshalb wir, selbst wenn wir um das Vorliegen der untypischen Sachlage wüssten, auf göttlichen Beistand angewiesen wären, wollten wir die Lösbarkeit des engeren Problems nicht bloss aus Definitionen erschliessen, sondern durch die Angabe eines Algorithmus tatsächlich nachweisen. Darin liegt also die Ursache für die Unmöglichkeit, trotz untypischer Sachlage wenigstens eine schwache Lösung für das Entscheidungsproblem im zweiten Szenario anzugeben.

In Anbetracht dieser Befunde erscheint das weitere Festhalten an der zwangsläufigen Entscheidbarkeit bei *allen* untypischen Sachlagen dogmatisch. Es gibt untypische Sachlagen, die sich aus epistemischer Sicht derart ungünstig ausnehmen, dass die Wahrheit des entsprechenden Entscheidbarkeitsurteils allein durch die Existenz eines für uns nicht herzustellenden oder zu gebrauchenden Listenverfahrens verbürgt ist. Weder die Existenz eines geeigneten Algorithmus noch die Möglichkeit der Angabe eines ungeeigneten ist in solchen Fällen gegeben. Trotzdem soll jedes Prädikat in dieser extremen Sachlage immer entscheidbar sein. Offenbar geht aus unseren Festlegungen ein Begriff von Entscheidbarkeit hervor, der zumindest in diesen Fällen seinen ursprünglichen Konnotationen diametral entgegensteht. Daher wäre es, wie jetzt scheint, das Mindeste, diese Art der Entscheidbarkeit, die in solchen extremen Sachlagen auftritt, von derjenigen zu unterscheiden, die auf der Existenz starker Lösungen beruht, und sie als die schwächere einzuordnen. Eher besteht sogar die Versuchung, das Dogma aufzugeben und dem Prädikat zumindest bei dieser besonderen Sachlage – d. i. wenn keine starke Lösung existiert und selbst eine schwache ausser Reichweite bleibt – Unentscheidbarkeit zu attestieren. Wie aber wäre das begrifflich zu bewerkstelligen und was wären die Folgen der Anpassung?

2.2.3.3. Unentscheidbarkeit bei untypischer Sachlage?

Um den Zwang durch unsere Festlegungen zu lösen, da er künstlich wirkt und die ursprüngliche Intention verzerrt, könnte man versuchen, die Entscheidbarkeit eines Prädikats an der Existenz *geeigneter* Algorithmen festzumachen. Eine Möglichkeit, dies zu bewerkstelligen, bietet die weiter oben (in 2.2.2.3) bereits ins Spiel gebrachte, engere Auffassung des Begriffs eines Entscheidungsverfahrens, die ungeeignete Algorithmen ausschliesst. Unentscheidbarkeit würde nach diesem neuen Begriff allerdings nicht nur in dem eben beschriebenen ungünstigsten Fall auftreten, sondern auch noch bei etwas günstigerer Sachlage. Wenn uns im zweiten der obigen Szenarien die Göttin die genaue Anzahl der eingestreuten Kontradiktionen mitteilte, wären wir zwar in der Lage – unter Umständen sogar ganz praktisch –, ein Listenverfahren herzustellen. Da es sich dabei aber um einen ungeeigneten Algorithmus handelte, dürften wir es als Entscheidungsverfahren, mithin als Lösung des Problems nicht mehr zulassen. Wir wären begrifflich gezwungen, das Prädikat für unentscheidbar zu befinden, obgleich wir über ein einheitliches, mechanisch ausführbares Verfahren verfügten, das überall abbricht und die korrekte Antwort auf jede aufgeworfene Frage liefert.

Umgekehrt müsste in Fällen, die dem dritten Szenario entsprechen, das fragliche Prädikat immer als entscheidbar gelten. Denn es existiert in diesen Fällen, da ausser den Kontradiktionen nur endlich viele erfüllbare Formeln in der Prüfmenge enthalten sind, ein *geeignetes* Entscheidungsverfahren – zumindest wenn wir annehmen wollen, wie wir es bis anhin ohne grosses Aufheben getan haben, dass die Lösbarkeit von Entscheidungsproblemen nicht an der Unlösbarkeit einer einzelnen Frage scheitern kann. Wie sich indes zeigen wird, bleibt der geeignete Algorithmus, dessen Existenz zwar erschliessbar ist, im Allgemeinen für uns ausser Reichweite, sodass er nicht angegeben und folglich auch nicht als Lösung des zugrundeliegenden Problems angesehen werden kann. Die blosse Existenz eines solchen Verfahrens bedeutet daher noch keine Verbesserung unserer Situation. Aus epistemischer Sicht kann sich die Lage im dritten Szenario als ebenso ungünstig darstellen wie im zweiten. Trotzdem wären wir wegen der vorgeschlagenen Begriffsanpassung gezwungen, in allen Fällen, die diesem Szenario entsprechen, die Entscheidbarkeit des Prädikats einzuräumen.[287]

Dieser Befund würde einen weiteren, diesmal wohl entscheidenden Grund dafür liefern, das ohnehin nicht leicht einzufangende Moment der Eignung aus dem Begriff der Entscheidbarkeit definitiv herauszuhalten und sich mit dem extensionalen Begriff eines Entscheidungsverfahrens abzufinden. Doch zuerst gilt es, den skizzierten Argumentationsgang mit Inhalt zu füllen. Woher wissen wir, dass im dritten Szenario ein geeigneter Algorithmus existiert, wenn er auch unter gewissen Umständen unbestimmt bleiben muss?

Der ausschlaggebende Unterschied gegenüber dem zweiten Szenario besteht darin, dass die Menge der erfüllbaren Formeln – d. h. jener Formeln, für die wir über kein Erkennungsverfahren von der Art des erwähnten Kontradiktionentests verfügen – endlich ist. Nur bei endlich vielen der Einzelfragen, die das zugrundeliegende Entscheidungsproblem aufwirft, müssen wir also ohne ein Verfahren auskommen, auf das über der *gesamten* prädikatenlogischen Formelmenge insofern Verlass ist, als es immer eine korrekte Antwort anzeigt, wenn es für die Eingabe abbricht und überhaupt eine Antwort liefert. Wenn P für das Prädikat ‚φ ist eine Kontradiktion' steht und durch $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ die Nicht-Kontradiktionen in der göttlichen Liste angedeutet sind, handelt es sich um die folgenden Fragen: „Trifft P auf φ_1 zu?", „Trifft P auf φ_2 zu?", ..., „Trifft P auf φ_n zu?". Das Entscheidungsproblem E_0, das es im dritten Szenario zu lösen gilt, fragt nach einem Entscheidungsverfahren für P über der Menge $M_0 = \{\varphi \mid \varphi \,\text{ist eine prädikatenlogische Kontradiktion}\} \cup \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$.

Betrachten wir für $1 \leq i \leq n$ diejenigen Teilprobleme E_i, die durch das Entfernen von jeweils $n-1$ erfüllbaren Formeln aus M_0 hervorgehen, mithin $M_i = \{\varphi \mid \varphi$ ist eine prädikatenlogische Kontradiktion$\} \cup \{\varphi_i\}$ als neue Prüfmenge vorgeben. Entweder

[287] Hier ist es wichtig einzusehen, dass die Sachlage im dritten Szenario nicht einfach S_4 entspricht. Es kommt hinzu, dass (i) derjenige Teil der Prüfmenge, für den kein Algorithmus von der Art eines Kontradiktionentests existiert (d. i. hier die Menge der erfüllbaren Formeln), endlich ist und (ii) für das unendliche Komplement davon hingegen ein solcher Algorithmus existiert. (In den vollständig präzisierten Begriffen der Metamathematik ausgedrückt, heisst das, dass die Sachlage folgende Struktur aufweisen muss: während (i) das Komplement der Prädikatsextension endliche Teilmenge einer rekursiv nicht aufzählbaren (und damit freilich unendlichen) Menge ist, ist (ii) die Prädikatsextension selbst, obwohl unendlich, rekursiv aufzählbar. Die dazu duale Situation, die der einem Spezialfall von S_3 entspräche, ist in der hier relevanten Hinsicht natürlich gleichwertig.) Erst unter diesen zusätzlichen Bedingungen ist die Existenz eines starken Entscheidungsverfahrens gesichert. Der unten skizzierte Algorithmus A baut denn auch auf entsprechenden Zusatzannahmen. Einzig, wenn S_3 und S_4 zugleich vorlägen, mithin die Prüfmenge endlich wäre, könnte man wohl ohne die Forderung eines Verfahrens von der Art des Kontradiktionentests für mindestens einen der beiden Teile der Prüfmenge auskommen.

ist nun jedes Entscheidungsproblem E_i lösbar oder mindestens eines dieser Probleme ist unlösbar.

Trifft ersteres zu, existiert (nach den angepassten Begriffen) für jedes M_i ein *geeigneter* Algorithmus A_i, der P über dieser Menge entscheidet. Dann existiert auch der Algorithmus A, der simultan alle $A_1, A_2, ..., A_n$ auf die jeweils eingegebene Formel ansetzt, eine negative Antwort ausgibt, sobald mindestens einer der A_i ein „Nein“ anzeigt, und erst dann eine positive Antwort ausgibt, wenn alle A_i „Ja“ anzeigen. Damit sind bereits alle möglichen Fälle abgedeckt und A zeigt das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen des Prädikats über M_0 nach endlich vielen Schritten korrekt an. Denn: Ist φ eine Kontradiktion, werden *alle* in A enthaltenen A_i nach endlich vielen Schritten die gleiche und korrekte Antwort zurückgeben (d. i. „Ja“), da es sich um Entscheidungsverfahren über den respektiven Prüfmengen M_i handelt und φ in allen M_i enthalten ist. Ist φ hingegen erfüllbar, also mit einem φ_j identisch, wird mindestens der Algorithmus A_j *qua* Entscheidungsverfahren über M_j nach endlich vielen Schritten korrekt anzeigen, dass es sich *nicht* um eine Kontradiktion handelt. Wiederum übernimmt A diese korrekte Antwort, diesmal ungeachtet dessen, was die anderen Subalgorithmen anzeigen mögen oder nicht. Auch die Eignung erbt A von den A_i, zumal dessen Korrektheit und Terminierung direkt auf seine Subalgorithmen zurückgeführt werden kann und sich gemäss Annahme das Vorhandensein dieser Eigenschaften an den A_i zeigen lässt, ohne dass dadurch oder dafür jede durch die E_i aufgeworfene Frage bereits entschieden sein müsste. Ausserdem handelt es sich offenbar weder bei den A_i noch bei A selbst um Listen- oder leere Verfahren.

Mit dem Algorithmus A existiert folglich ein geeignetes Entscheidungsverfahren für P über M_0 und A würde, einmal angegeben, eine (starke) Lösung von E_0 darstellen. Wenn also alle Entscheidungsprobleme E_i lösbar sind, dann ist es auch das umfassende Problem E_0. Wollten wir hingegen annehmen, dass P über der Menge M_0 unentscheidbar (d. h. E_0 unlösbar) ist, müsste die Unlösbarkeit mindestens eines der Teilprobleme – sagen wir von E_k – eingeräumt werden. Von den Fragen, die E_k aufwirft, wäre indes nur eine problematisch, d. i. „Trifft P auf φ_k zu?“, da für die endlos vielen anderen die richtige Antwort mit Hilfe ein und desselben Kontradiktionentests herausgefunden werden kann. Es läge dann nicht bloss ein unentscheidbares Prädikat vor, sondern gewissermassen eine unentscheidbare Einzelfrage, für die es keine starke Lösung geben kann – eine Frage also, deren Antwort nicht herauszufinden ist, die sich nur beantworten lässt, wenn die Antwort bereits bekannt ist.

Dem gilt es noch anzufügen, dass sich dieselbe Folgerung für alle Beispiele dieser Art ergibt. Nichts Wesentliches hängt an der Bestimmung von P als Prädikat für Nicht-Erfüllbarkeit. (Das gilt auch für die gleich folgenden Betrachtungen.) Gegeben sein muss lediglich, dass das Komplement der Prädikatsextension in der Prüfmenge endlich ausfällt und zugleich eine Teilmenge der Extension eines anderen Prädikats darstellt, für das kein Erkennungsverfahren von der Art des Kontradiktionentests existiert. Diese Bedingung ist indes auch im vierten Szenario erfüllt, sodass bei endlicher Prüfmenge dasselbe Unheil droht wie in dem eben besprochenen Fall.

2.2.3.4. Digression über formale und absolute Unentscheidbarkeit

Mit dieser Feststellung gelangen wir an einen Berührungspunkt unterschiedlicher Begriffe. Wo von unentscheidbaren *Einzel*fragen die Rede ist, wird der Ausdruck ‚unentscheidbar' in einer Weise gebraucht, von der es immer heisst, sie müsse von dem zu Beginn dieses Kapitels festgelegten Begriff streng unterschieden werden.[288] Es ist dies der Gebrauch, der sich insbesondere bei Gödel findet, wenn dieser in seiner bahnbrechenden Arbeit *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* die Vermutung widerlegt, wonach die Axiome und Schlussregeln solcher Systeme «dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden».[289] Mit der *formalen* Unentscheidbarkeit gewisser Sätze der Arithmetik ist freilich etwas anderes gemeint, als wenn von der Unentscheidbarkeit eines Prädikats die Rede ist. Ein Satz ist in Bezug auf ein gegebenes System (wie etwa das der *Principia Mathematica*) genau dann formal unentscheidbar, wenn weder seine Negation noch er selbst nach den vorgesehenen Schlussregeln aus den Axiomen abgeleitet, mithin formal bewiesen werden kann. Dagegen erschöpft sich die Unentscheidbarkeit eines Prädikats in dem Fehlen eines Algorithmus für die Beantwortung einer Reihe von Fragen über die Prädikatsextension.

Gleichwohl offenbart sich durch das Ausreizen ihrer Anwendungsgrenzen ein aufschlussreicher Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen. Ein Entscheidungsverfahren, sagten wir, sei ein Algorithmus, d. h. ein allgemeines Rezept, nach dem sich eine Reihe verwandter Fragen – typischerweise endlos viele – auf einheitliche Weise beantworten lassen. Wir liessen jedoch neben dem typischen Fall auch Untypisches zu, insbesondere Entscheidungsprobleme, die nur endlich viele Fragen aufwerfen. Weshalb nicht

[288] Vgl. zum Beispiel Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 371), Hunter (1988, S. 187) oder Boolos u. a. (2007, S. 224).

[289] Gödel (1931, S. 173).

auch solche, die nur einen Gegenstand der Prüfung aussetzen, nur eine Frage aufwerfen? Unlösbar wäre ein solches Entscheidungsproblem allerdings nur dann, wenn *partout* kein Algorithmus existierte, mit dem sich die aufgeworfene Frage – sei es allein oder im Verbund mit anderen – beantworten liesse. Wenn wir nun die eher unstrittige und verbreitete Annahme[290] treffen wollen, dass sich jeder Kalkül, d. h. insbesondere jedes mit entsprechenden Schlussregeln versehene endliche Axiomensystem, zu einem Algorithmus ergänzen lässt, der jeden Beweis im System ganz mechanisch auszuführen vermag, dann impliziert die Unlösbarkeit eines Problems, das nur eine einzelne Frage aufwirft, dass es überhaupt kein Kalkül geben kann, in dem sich die richtige Antwort auf die aufgeworfene Frage beweisen lässt. Die Frage wäre, wie auch ihre Antwort und deren Negation, nicht bloss in Bezug auf einen bestimmten Kalkül – auf ein bestimmtes formales System, um Gödels Begrifflichkeit aufzunehmen – unentscheidbar, sondern in einem absoluten Sinn.[291]

Tatsächlich befasste sich Gödel selbst mit diesem Grenzfall seines Unentscheidbarkeitsbegriffs. Nach der Entdeckung einer Methode zur Herstellung von Sätzen, die in einem gegebenen formalen System trotz beträchtlicher Ausdrucksmittel (ja gewissermassen gerade deswegen) nicht entschieden werden können, schien ihm zunächst durchaus denkbar, dass sich auch Sätze angeben lassen würden, die, obzwar wahr, mit den Mitteln überhaupt keines wohlbegründeten[292] Systems zu beweisen sind. Sätze dieser

[290] Siehe Anm. 284.

[291] Hier zeigt sich wieder der gewichtige Unterschied, auf den Gödel in der zu Beginn dieses Kapitels (in 2.1) zitierten Passage selbst hinweist: der Unterschied zwischen Begriffen der Beweisbarkeit oder Definierbarkeit, die immer nur relativ zu einem vorgegebenen Formalismus Anwendung finden, und dem Begriff der Berechenbarkeit, der – wie unser Begriff der Entscheidbarkeit eben auch – formalismusunabhängig ist. Indem wir unseren *in diesem Sinn* absoluten Unentscheidbarkeitsbegriff auf einen Fall anwenden, bei dem die typische Allgemeinheit (d. i. die Mannigfaltigkeit der aufgeworfenen Fragen) fehlt, öffnet sich sozusagen ein Übergang zu einer entrelativierten Fassung von Gödels Unentscheidbarkeitsbegriff.

[292] Die hier aufgeworfene Frage wird in Koellner (2010, S. 189) so formuliert: «A natural and intriguing question is whether there are mathematical statements that are in some sense absolutely undecidable, that is, undecidable relative to any set of axioms *that are justified*» [meine Kursivsetzung]. Worin aber die angedeutete Begründetheit bestehen könnte, bleibt äusserst unklar. Da es sich bei den in Betracht gezogenen Kandidaten für absolut unentscheidbare Sätze zumeist um Behauptungen handelt, die als unabhängig von der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC) erwiesen wurden, z. B. die Kontinuumshypothese, drängt sich zunächst die etwas spezifischere Frage auf, ob auch stärkere Systeme als ZFC wohlbegründet im relevanten Sinn sein könnten oder nicht. Peter Koellner argumentiert für eine bejahende Antwort (S. 190): «there is a remarkable amount of structure and unity beyond ZFC and [...] a network of results in modern set theory make for a compelling case for new axioms that settle many questions undecided by ZFC». Im weiteren Verlauf seines Aufsatzes versucht Koellner ausserdem zu zeigen, dass sich die meisten angeblichen Fälle von absoluter Unentscheidbarkeit mit Hilfe neuer, über ZFC hinausgehender Axiome auflösen lassen, um am Ende festzustellen, dass zurzeit kein starkes Argument für die Annahme von absolut un-

Art wären demnach nicht bloss in Bezug auf eine bestimmte Klasse formaler Systeme nicht zu entscheiden – d. h. *formal* unentscheidbar –, sondern überhaupt, losgelöst von der Einschränkung auf ein bestimmtes System oder eine Klasse von solchen. Als vielversprechender Kandidat erschien Gödel denn auch der Satz, wonach jede Menge konstruierbar sei, etwas später dann ausserdem die Kontinuumshypothese. Doch die anfängliche Zuversicht ging mit der Zeit und weiterer Arbeit verloren. Schliesslich verwarf er die Vermutung und suchte nun ihr Gegenteil zu beweisen: dass es in der Mathematik absolut unentscheidbare Sätze nicht gibt. Wiederum schwebte ihm eine Verabsolutierung vor, diesmal jedoch nicht des relativen Unentscheidbarkeitsbegriffs, sondern seines älteren Vollständigkeitssatzes, sodass für jede mathematische Aussage gelten sollte, dass sie oder ihre Negation in einem entsprechend ausdrucksstarken System formal bewiesen werden könne.[293]

Gegen absolute Unentscheidbarkeit sprechen nicht nur Gödels eigene Gründe, an der Beweisbarkeit jedes wahren mathematischen Satzes festzuhalten. Auch aktuelle mengentheoretische Arbeiten deuten in diese Richtung und es scheint niemand ein starkes Argument für die Annahme absolut unentscheidbarer Sätze vorgelegt zu haben.[294] In Anbetracht solcher Zweifel wäre es überaus ungeschickt, wenn wir *unsere* Begriffe so wählten, dass sie die Existenz von absolut unentscheidbaren Sätzen implizierten.

Genau dies jedoch würde geschehen, wenn erstens die Entscheidbarkeit von Prädikaten an der Existenz geeigneter Entscheidungsverfahren festgemacht wäre und wir zweitens das Entscheidungsproblem E_0 aus dem dritten obigen Szenario für unlösbar befänden (wofür es aus epistemischer Sicht durchaus gute Gründe gäbe). Denn dann wäre auch eines der Teilprobleme – wir bezeichneten es weiter oben als E_k – unlösbar, mithin das Prädikat P über der Prüfmenge M_k unentscheidbar. Da sich jedes mit Schlussregeln versehene Axiomensystem zu einem Algorithmus ergänzen lässt, dürfte es folglich auch kein wohlbegründetes System – welcher Stufe auch immer – geben, in dem sowohl das Zutreffen von P auf alle Elemente in $M_k \setminus \{\varphi_k\}$ als auch das Nicht-Zutreffen von P auf φ_k bewiesen werden kann.[295] Anders gesagt, wäre jede Theorie, die φ_k ent-

entscheidbaren Sätzen bekannt sei, ja dass wir nicht einmal eine Vorstellung davon hätten, wie ein solches Argument überhaupt aussehen könnte (S. 219).

[293]Für eine kompakte Darstellung von Gödels Gedankenwegen, vgl. Koellner (2010, S. 195-199).

[294]Siehe Anm. 292.

[295]Hier liesse sich einwenden, dass immer ein Axiomensystem existiert, in dem sowohl das Zutreffen von P auf alle Elemente in $M_k \setminus \{\varphi_k\}$ als auch das Nicht-Zutreffen von P auf φ_k bewiesen werden kann: Man versehe die prädikatenlogische Sprache mit dem Prädikat P und ergänze einen axiomatischen Kalkül erster Stufe (etwa den „Hilbert-Kalkül“ in Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 178-182)) um das Axiom „P trifft auf φ_k zu“, sodass der vermeintlich unentscheidbare Satz auf triviale Weise beweisbar wird. Allerdings ergäbe sich daraus kein *geeignetes* Entscheidungsverfahren und

hält, nicht-axiomatisierbar, mithin läge ein mit den Ausdrucksmitteln der ersten Stufe formulierbarer Satz vor, der sich gleichwohl über alle Stufen hinweg jeder Axiomatisierungsbemühung entzieht.

2.2.3.5. Grade der Entscheidbarkeit bei untypischer Sachlage

Bevor dieser Abschnitt zu Ende gehen kann, muss der unterbrochene Argumentationsgang (aus 2.2.3.3) wieder aufgenommen werden. Es galt noch zu zeigen, dass der Algorithmus A – auch wenn er existiert und sich eignen würde, offene Fragen zu beantworten – im Allgemeinen für uns ausser Reichweite bleibt und folglich nicht als Lösung des zugrundeliegenden Entscheidungsproblems angesehen werden kann. Weshalb es sich so verhält, geht aus dem, was schon gesagt worden ist, deutlich genug hervor. Über die endliche Auswahl an erfüllbaren Formeln $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, die Arithmetica im dritten Szenario unter die Kontradiktionen mischt, wissen wir nichts. Und wir verfügen auch über kein allgemeines Kennzeichen, mit dem wir sie zuverlässig als erfüllbar erkennen und aus dem endlosen Kontradiktionenstrom herausgreifen könnten. Um einen Algorithmus A aus den richtigen Subalgorithmen A_i zusammenzustellen, sodass sich beweisen liesse, dass A jede Frage nach endlich vielen Schritten korrekt beantwortet (ohne dass dadurch bereits alle Fragen entschieden wären), müsste Arithmetica zusätzliche Angaben über die $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ machen. Sie müsste uns zum Beispiel mitteilen, dass alle eingestreuten Formeln die Eigenschaft der endlichen Erfüllbarkeit besitzen, wenn dies der Fall ist. Ohne weitere Angaben bietet das dritte Szenario aus epistemischer Sicht keine besseren Aussichten, das Entscheidungsproblem zu lösen, als das zweite Szenario.

Ähnliches gilt für das vierte Szenario, bei dem die Prüfmenge auf ein endliches Mass reduziert wurde. Auf den ersten Blick mag es zwar erscheinen, als bewirke dies eine Verbesserung der epistemischen Lage, da bei endlicher Prüfmenge die Möglichkeit besteht, eine vollständige Liste aller Kontradiktionen und eine vollständige Liste aller erfüllbaren Formeln zu erstellen (siehe 2.2.2.7). Aber damit wäre lediglich eine schwache Lösung des Problems angegeben (siehe 2.2.2.8). Nach unserem verschärften Begriff reicht das für die Entscheidbarkeit des Prädikats nicht hin, es braucht ein *geeignetes* Entscheidungsverfahren. Und tatsächlich lässt sich mit dem gleichen Argument wie vorhin die Existenz eines geeigneten Algorithmus erschliessen. Im Unterschied zum dritten Szenario liegt die Angabe eines entsprechenden Verfahrens sogar im Bereich des Möglichen. Denn die Informationen über Arithmeticas Auswahl an erfüllbaren Formeln, die uns im dritten

mithin keine starke Lösung von E_k. Das Problem müsste also weiterhin für unlösbar befunden werden.

Szenario noch fehlten, um ein Verfahren aus den richtigen Subalgorithmen zusammenzustellen, könnten im endlichen Fall den erstellten Listen entnommen werden. Wenn wir aber diese Listen brauchen, um den vermeintlich geeigneten Algorithmus auch angeben zu können – und es ist nicht zu sehen, wie dies sonst im Allgemeinen möglich wäre –, dann ergibt sich gegenüber dem dritten Szenario doch keine Verbesserung der epistemischen Lage bei endlicher Prüfmenge. Denn sind die vollständigen Listen einmal erstellt, bleiben keine Fragen mehr offen. Ein Entscheidungsverfahren, dessen Konstruktion die Angabe einer schwachen Lösung des Problems voraussetzt, kann unmöglich als starke Lösung angesehen werden.[296]

Ungeachtet der Existenz potenziell starker Lösungen befinden wir uns in den Szenarien 3 und 4 aus epistemischer Sicht mehr oder weniger in derselben ungünstigen Lage wie in Szenario 2. Wenn wir unseren Entscheidbarkeitsbegriff nun dadurch verschärften, dass nur noch geeignete Algorithmen als Entscheidungsverfahren infrage kämen (wie in 2.2.3.3 vorgeschlagen wurde), dann wären wir gezwungen, über die beiden letzten Szenarien günstiger zu urteilen als über das zweite. Gegenüber unseren extensionalen Festlegungen zu Beginn des Kapitels würde dies keinen Gewinn darstellen, im Gegenteil. Anstatt also weiterhin nach der intensionalen Zutat zu suchen, die unsere Urteile über Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit bei untypischer Sachlage zurechtbiegen könnte, erscheint es der Sache angemessener, sich mit dem extensionalen Begriff abzufinden und dafür verschiedene Grade der Entscheidbarkeit auseinanderzuhalten.

In einem ersten Schritt gilt es (wie in 2.2.2.5 schon angedeutet), eine starke Entscheidbarkeit, die durch die Existenz geeigneter Entscheidungsverfahren verbürgt ist, von einer schwachen zu unterscheiden, die bloss die Existenz ungeeigneter Verfahren impliziert: Existiert für ein Prädikat P ein geeignetes Entscheidungsverfahren, ist P *stark* entscheidbar; *schwach* entscheidbar ist P dagegen, wenn nur ungeeignete Verfahren für P existieren. Indem darüber hinaus berücksichtigt wird, ob wir die Verfahren, die jeweils für Entscheidbarkeit sorgen, prinzipiell angeben könnten oder nicht, ergibt sich die Möglichkeit feinerer Graduierungen: Ist es uns unmöglich, für ein stark entscheidbares P ein

[296] Kleene, der seinen Begriff eines Entscheidungsproblems auf den Fall beschränkt, dass die Prüfmenge abzählbar unendlich ist, weist auf einen Aspekt noch anderer Art hin, der die epistemische Lage im endlichen Fall eintrüben kann (und auf den wir im nächsten Unterkapitel ab 2.3.1.6 zu sprechen kommen werden), d. i. die Komplexität von Entscheidungsproblemen: «For a finite class of questions, the decision or computation problem [...] is trivial from the classical standpoint. For (theoretically at least), it could be solved simply by preparing a list of the answers to all the questions of the class. [...] ‹Given any permissible position in chess, can white win (irrespective of black's responses)?› It is notorious that in this case, although a finite list of the answers for all positions exists theoretically, for practical purposes it is unavailable. If it were, the fun in chess would be lost» Kleene (1967, S. 226-227).

geeignetes Entscheidungsverfahren anzugeben, ist P nur *scheinbar stark* entscheidbar; analog ist ein schwach entscheidbares P nur *sehr schwach* entscheidbar, wenn es uns unmöglich ist, ein ungeeignetes Verfahren anzugeben.

Sehr schwache Entscheidbarkeit kann es nur bei unendlicher Prüfmenge in den Sachlagen S_3 oder S_4 geben. (Es müssen ausserdem weitere Bedingungen erfüllt sein, die unter Szenario 2 besprochen wurden. Unter diesen Bedingungen ist das Prädikat im allgemeinen Fall nur sehr schwach entscheidbar.) Liegen S_3 und S_4 zusammen oder je S_1 oder S_2 vor, ist das Prädikat stärker als nur sehr schwach entscheidbar. Dafür sorgt bei Sachlagen S_1 oder S_2 die Existenz leerer Verfahren. Bei endlicher Prüfmenge sowie unter gewissen anderen Bedingungen (die unter Szenario 3 besprochen wurden) ist jedes Prädikat aufgrund der Existenz geeigneter Algorithmen sogar stark entscheidbar. Im Allgemeinen handelt es sich dabei jedoch nur um scheinbar starke Entscheidbarkeit.

Insgesamt lassen all diese Betrachtungen den zu Beginn eingeführten Begriff von Entscheidbarkeit, der ohne das intensionale Moment der Eignung auskommt, in etwas günstigerem Licht erscheinen. Keine Unentscheidbarkeit bei untypischer Sachlage zuzulassen, kann, wie sich gezeigt hat, insbesondere auch als ein Entscheid darüber angesehen werden, absolut unentscheidbare Fragen aus der Mathematik herauszuhalten. Dem entsprach vorhin in den Arithmetica-Beispielen die Erwartung, dass die Aufgaben, vor die uns die Göttin in jedem Schritt aufs Neue stellt, für uns lösbar, jede Einzelfrage mit einem schlichten „Ja“ oder „Nein“ beantwortbar sein sollte. Als unlösbar kann sich demnach erst das *allgemeine* Entscheidungsproblem herausstellen, zumal dessen Lösung die Angabe eines Verfahrens verlangt, mit dem sich nicht nur eine, sondern eben alle Einzelfragen, die das Problem aufwirft, entscheiden lassen.

Dieser Erwartung entspricht eine Annahme, die genauer besehen eine begriffliche Forderung ist und sich durch die Geschichte der Disziplin zieht, wenngleich sie nur zu bestimmten Zeiten, bezeichnenderweise in Krisenzeiten, klar ausgesprochen wurde: Jede mathematische Frage lässt sich beantworten! Nicht zwingend nach ein und demselben Schema, doch immer auf die eine oder andere Weise. Den berühmtesten Ausdruck hat Hilbert dieser Forderung verliehen, als er 1900 in seinem Vortrag auf dem zweiten internationalen Mathematikkongress ausrief: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!*[297]

[297] Hilbert (1970, S. 298).

2.2.4. Zusammenfassung

Ein Entscheidungsproblem, sagten wir, sei erst gelöst, wenn ein Algorithmus angegeben ist, von dem bewiesen wurde, oder bei dem es offenkundig ist, dass es sich um ein Entscheidungsverfahren handelt. Um ein Entscheidungsproblem zu lösen, bedarf es demnach neben der Angabe eines Algorithmus auch des Beweises, dass sich mit ihm jede aufgeworfene Frage nach endlich vielen Schritten korrekt beantworten lässt. (Die Beweisforderung entfällt freilich, wenn es offenkundig ist, dass der Algorithmus beide Eigenschaften, Korrektheit und Terminierung, besitzt.) Ist ein Entscheidungsproblem gelöst, mithin ein Entscheidungsverfahren angegeben, ist damit auch die Entscheidbarkeit des Prädikats über der Prüfmenge nachgewiesen.

Wie die Untersuchung der untypischen Sachlagen zeigte, ist es unter Umständen möglich, die Entscheidbarkeit eines Prädikats zu beweisen, ohne dass damit das zugrundeliegende Entscheidungsproblem bereits gelöst wäre. Es ist, mit anderen Worten, möglich zu wissen, dass das Problem lösbar ist, und doch im Unwissen darüber zu bleiben, wie es gelöst werden könnte. Im äussersten Fall weiss man sogar darum, dass die Lösung für uns ausser Reichweite bleiben muss, obwohl die Lösbarkeit des Problems aus der untypischen Sachlage, deren Vorliegen nachgewiesen wurde, zwangsläufig folgt. Das Wissen um die Entscheidbarkeit eines Prädikats impliziert mitunter nicht mehr, als dass das Problem nicht unlösbar ist, und verträgt sich damit, dass wir gleichwohl für immer ausserstande sind, das Prädikat zu entscheiden – und dies sogar wissen.

Um die Entscheidbarkeit eines Prädikats zu beweisen, reicht also der Nachweis – wenn er denn gelingt –, dass die vorliegende Sachlage untypisch ist, d. h. die Prädikatsextension oder ihr Komplement über der Prüfmenge höchstens endlich ausfällt. Da jedoch aus dem Vorliegen untypischer Sachlagen im Allgemeinen nur die Existenz von ungeeigneten Verfahren (d. h. von schwachen Problemlösungen) folgt, lässt sich mit dem Nachweis einer solchen Sachlage im Allgemeinen nur schwache Entscheidbarkeit zeigen. Im äussersten Fall sorgt die Unentscheidbarkeit des fraglichen Prädikats bei typischer Sachlage (d. i. die Unlösbarkeit eines umfassenderen Entscheidungsproblems) sogar dafür, dass kein geeigneter Algorithmus existieren und nicht einmal eine schwache Lösung angegeben werden kann. Diese Konstellation, die bei untypischer Sachlage unter besonderen Umständen auftritt, kommt dem sehr nahe, was bei typischer Sachlage die Unlösbarkeit eines Entscheidungsproblems ist. Oder anders gesagt ist das Gegenstück zur Unentscheidbarkeit eines Prädikats die sehr schwache Entscheidbarkeit desselben Prädikats bei untypischer Sachlage.

An diesem Zusammenhang wird denn auch ersichtlich, dass und wie sich die Unentscheidbarkeit eines Prädikats auf untypische Sachlagen auswirken kann. Obwohl jedes Entscheidungsproblem, das eine untypische Sachlage vorgibt, *per definitionem* lösbar ist und Unentscheidbarkeit in diesen Fällen begrifflich nicht vorgesehen ist, kann sich, wer ein solches Entscheidungsproblem lösen möchte, in einer aus epistemischer Sicht ebenso ungünstigen Lage befinden wie in Fällen echter Unentscheidbarkeit bei typischer Sachlage. Dies erklärt wiederum, weshalb sich aus dem Unentscheidbarkeitstheorem von Church Einschränkungen für die praktische Implementierung von Entscheidungsverfahren ergeben können. Auf wirklichen Rechnern sind nie mehr als endlich viele Formeln überhaupt darstellbar, sodass sich immer nur untypische Sachlagen mit endlichen Prüfmengen verwirklichen lassen. Trotzdem ist es unmöglich, ohne besondere Einschränkung der Prüfmenge (etwa auf Formeln des monadischen Fragments der Prädikatenlogik) für die bekannten Entscheidungsalgorithmen auszuschliessen, dass sie für einige der darstellbaren Formeln keine korrekte Antwort anzeigen.

All das ändert indessen nichts daran, dass es auch bei untypischer Sachlage gelingen kann, einen Algorithmus anzugeben, der sich dazu eignet, offene Fragen zu beantworten und das fragliche Prädikat tatsächlich zu entscheiden. In solchen Fällen, sagten wir, sei das Entscheidungsproblem im starken Sinn gelöst und die starke Entscheidbarkeit des Prädikats nachgewiesen. Unter besonderen Umständen aber kann die starke Entscheidbarkeit des Prädikats erschlossen werden, obwohl es uns ohne weiteres Wissen nicht gelingen wird, ein geeignetes Entscheidungsverfahren anzugeben und als solches nachzuweisen. In diesem Fall wissen wir um die starke Lösbarkeit des Problems und sind doch ausserstande, eine starke Lösung zu liefern. Diese Konstellation einer nur scheinbar starken Entscheidbarkeit kommt den unentscheidbaren Fällen bei typischer Sachlage wiederum sehr nahe.

2.3. Das Lösen von Entscheidungsproblemen

Nachdem die Grundbegriffe eingeführt und besprochen wurden, wenden wir uns nun ihrem hauptsächlichen Anwendungsgebiet zu, d. i. dem Lösen von Entscheidungsproblemen und dem Beweisen von Unentscheidbarkeit. Den Hintergrund für die folgenden Betrachtungen bilden drei Fragen, die an bereits Begonnenes anknüpfen und über das Erreichte hinausführen: (1) Wie werden Entscheidungsprobleme gelöst? (2) Wie lässt sich die Entscheidbarkeit eines Prädikats zeigen? Und (3) wie wird die Unentscheidbarkeit eines Prädikats bewiesen?

Aus dem vorangegangenen Unterkapitel wissen wir, dass es nicht immer der Angabe einer Lösung bedarf, um die Entscheidbarkeit eines Prädikats zu zeigen. Liegt eine untypische Sachlage vor, reicht es, diese nachzuweisen. Damit ist die Entscheidbarkeit des Prädikats selbst dann erwiesen, wenn eine Lösung des Entscheidungsproblems ausser Reichweite bleibt. Umgekehrt hingegen ist mit der Angabe eines Entscheidungsverfahrens für ein Prädikat auch dessen Entscheidbarkeit gezeigt. Die Möglichkeit, ein solches Verfahren anzugeben, hängt nicht davon ab, ob eine typische oder eine untypische Sachlage vorliegt.

Offenbar besteht also zwischen dem Lösen eines Entscheidungsproblems und dem Zeigen, dass ein Prädikat entscheidbar ist, trotz des engen Zusammenhangs ein begrifflicher Graben. Geschuldet ist dieser, wie wir sahen, der Extensionalität der Grundbegriffe. Entsprechend gilt es die Fragen (1) und (2) klar auseinanderzuhalten – zumindest bei untypischer Sachlage.

Eine Diskrepanz lässt sich jedoch auch bei typischer Sachlage feststellen. Der Blick in die Praxis zeigt, dass ein beträchtlicher Teil der Arbeit in die Entwicklung immer neuer Algorithmen für längst gelöste Probleme fliesst, von denen viele sogar triviale Lösungen besitzen. Offenbar kann es von Interesse sein, die Entscheidbarkeit eines Prädikats auf neue Weise zu zeigen, obgleich ausser Frage steht, dass und wie das zugrundeliegende Problem zu lösen ist. Dieser Umstand wird dadurch bedingt, dass – auch wenn eine typische Sachlage vorliegt und folglich weder ein positives noch ein negatives Listenverfahren existiert – Prädikate auf direkten oder weniger direkten Wegen entschieden werden können.

In dieser Hinsicht gleichen Entscheidungsverfahren mathematischen Beweisen. Denn auch Theoreme lassen sich in der Regel mehr oder weniger direkt oder dann auf Umwegen beweisen. Ein kurzer Blick in die Geschichte der Mathematik verrät, dass von dieser Möglichkeit reger Gebrauch gemacht wird. Wie sich im Verlauf dieses Unterkapitels indes zeigen wird, lässt der Vergleich von Entscheidungsverfahren mit Beweisen neben weiteren Gemeinsamkeiten vor allem aufschlussreiche Unterschiede erkennen. Beweise können nicht so leicht durch Algorithmen ersetzt werden. Selbst wenn sich das allgemeine Entscheidungsproblem als lösbar herausgestellt hätte, hätte dies die Mathematik keinesfalls in eine ungeheure Trivialität verwandelt, wie manche zur Pionierzeit der mathematischen Logik meinten.

Am Ende des Unterkapitels wird aus dem Vergleich von Beweisen und Entscheidungsverfahren klarer hervorgehen, dass die Grenze zwischen Entscheidbarem und Unentscheidbarem eine theoretische ist, die in beträchtlicher Entfernung zu allem praktisch

Machbaren angelegt wurde. Ausserdem wird sich zeigen, dass es für die Beantwortung von Frage (3) einer Präzisierung unseres Begriffs eines Entscheidungsverfahrens bedarf. Wie eine solche Präzisierung aussehen könnte, wird sich aber erst im nächsten Kapitel und dort auch nur kurz besprechen lassen.

2.3.1. Die Geschichte von der Verwandlung der Mathematik in eine ungeheure Trivialität

Ein König fragte einmal Euklid, ob nicht ein kürzerer, einfacherer Weg zu den Ergebnissen der Geometrie führe als jener, der in seinen *Elementen* beschrieben sei. Euklid habe darauf geantwortet, dass es keinen Königsweg zur Geometrie gebe.[298] Ohne den Einsatz der höchsten Geisteskraft einiger Auserwählter ist es demnach unmöglich, zu ihren tieferen Theoremen vorzudringen. Auch die Erkundung bereits angelegter Wege um des Lernens willen braucht Geduld, und sie kostet bekanntlich viel Arbeit und Mühe.

Im ausgehenden 19. und vor allem zu Beginn des 20. Jahrhunderts erfuhr Euklids Methode eine erstaunliche Renaissance. Diesmal wurde sie weit über die Grenzen der Geometrie hinausgetrieben und des Königs Wunsch erlangte neue Bedeutung. Die axiomatische Methode sollte auf solche Weise ergänzt werden, dass sich mit ihrer Hilfe über das gesamte Gebiet der Mathematik nachgerade ein Netz von Königswegen hätte legen lassen. Begleitend zur strengen Axiomatisierung mathematischer Theorien wurde nach Verfahren gesucht, die es erlauben sollten, über die Wahrheit oder Falschheit *beliebiger* Behauptungen zu befinden und dies nach endlich vielen eindeutig festgelegten und rein mechanisch ausführbaren Schritten. Dafür mussten die fraglichen Behauptungen lediglich in die neuen logischen Formalsprachen übersetzt werden. Mit einem derartigen Algorithmus in der Hand wäre es, wie man meinen könnte, selbst dem denkfaulen König gelungen, sich mühelos auf dem mathematischen Wegenetz zu bewegen, ja sogar neue Begriffsbahnen anzulegen, ohne dafür die Dienste und höheren geistigen Fähigkeiten der Mathematiker in Anspruch nehmen zu müssen. An der Speerspitze dieser Bewegung zur Mechanisierung der Mathematik war anfangs der 1920er Jahre denn auch davon die Rede, «die Arbeit des Beweisens aufgestellter Sätze etwa einem mathematischen Hilfsarbeiter» zu übertragen.[299]

[298] Das zumindest erzählt uns Proklos in seinem Kommentar zum ersten Buch der *Elemente* Euklids, vgl. Proklos, *Euklid-Kommentar*, S. 214.

[299] Aus einem Vortrag Heinrich Behmanns mit dem Titel ‚Entscheidungsproblem und Algebra der Logik', gehalten am 10. Mai 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen. Der Text wurde in Mancosu und Zach (2015) ediert. Die zitierte Stelle findet sich dort auf S. 178. Ein bunteres Bild des vermeintlichen Paradieses, in das sich die Mathematik verwandelt hätte, wäre das allgemeine Ent-

Allerdings, so schien es, hätte die Angabe eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens «die ganze Mathematik in eine ungeheure Trivialität» verwandelt.[300] An die Stelle der altehrwürdigen Disziplin wäre «eine absolut mechanische Vorschrift» getreten, «mit deren Hilfe jedermann von jeder gegebenen Aussage entscheiden könnte, ob diese bewiesen werden kann oder nicht».[301] Die breiten königlichen Alleen hätten sich als Allerweltsstrassen entpuppt. Für Intuition, Erfindungskraft und heuristische Methoden, wie sie bis dahin zur Anwendung kamen, wäre demnach in der Mathematik kaum Platz geblieben. Unentscheidbarkeit als Ungewissheit darüber, ob sich eine gegebene Vermutung beweisen lässt oder nicht, wäre überall durch Wissen um die Entscheidbarkeit dieser Frage verdrängt worden.[302] Die vielfältige Praxis des Beweisens hätte schlicht ausgedient gehabt. Übriggeblieben wäre das monotone Anwenden der Algorithmen, d. i. die mechanische Ausführung von Rechenoperationen.[303]

Zum Glück für die Mathematik liess sich ihre totale Trivialisierung gerade noch abwenden. Gödel gelang zu Beginn der 1930er Jahre der erste Gegenschlag, indem er für eine der elementarsten Theorien überhaupt, für die Arithmetik, die Existenz formal unentscheidbarer Sätze nachweisen konnte. Fünf Jahre später bewies Church dann die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe. Aus diesem Resultat ergab sich

---

scheidungsproblem gelöst worden, gibt Yehuda Ravs Erzählung der Geschichte: «Let us fancifully pretend that the general decision problem did after all have a positive solution, that every axiomatisable theory was decidable, and that a universal decision algorithm was invented and implemented on oracular computers, marketed under the trade name of PYTHIAGORA (Pythia + Pythagoras). [...] Not only can PYTHIAGORA answer all our questions, but she does so at the speed of light, having no complexes about complexity of computation. [...] Fermat's Last Theorem? No more unpalatable stretching of the margin so that it can contain all the subtleties of elliptic curves, Iwasawa theory, automorphic forms, deformation theory and what not. No sooner have you typed in Fermat's problem than the long-awaited answer appears on your magic screen, without any brain-wracking help from Andrew Wiles! [...] With due accommodations, think of the explosion in mathematical knowledge thanks to PYTHIAGORA. [...] After all, if all our toil and sweat in proving theorems served only to ascertain whether they were true or not, then PYTHIAGORA would deliver us of useless labours and frustrations. No more ‹dirty work›; all our creative energies would be channelled into brilliant and daring conjecturing. We mathematicians would only have to produce conjectures, and let PYTHIAGORA weed out the false from the true. What a paradise!» Rav (1999, S. 5-6).

[300] Behmann (1922, S. 166).

[301] Neumann (1927, S. 12).

[302] Bereits bevor ein Weg gefunden war, Unentscheidbarkeit zu beweisen, bezeichnete John von Neumann ihr Vorhandensein als «Conditio sine qua non dafür, dass es überhaupt einen Sinn habe, mit den heutigen heuristischen Methoden Mathematik zu treiben» Neumann (1927, S. 12).

[303] Vergleichbare Vorstellungen fanden sich auch ausserhalb der Hilbert-Schule. Noch 1930 äusserte Wittgenstein in einem Gespräch mit Moritz Schlick die Überzeugung, die Mathematik werde, «wenn der Grundlagenstreit beendet sein wird, das Gesicht annehmen, das sie auf der Volksschule hat, wo man mit der russischen Rechenmaschine arbeitet. Die Art, wie man in der Volksschule Mathematik treibt, ist absolut streng und exakt. Es braucht in keiner Weise verbessert zu werden. Die Mathematik ist immer eine Maschine, ein Kalkül« *Wittgenstein und der Wiener Kreis*, S. 105 f.

insbesondere, dass für zahlreiche Theorien, die mit den von der Prädikatenlogik zur Verfügung gestellten Ausdrucksmitteln formalisierbar sind, kein Entscheidungsverfahren existiert. Die drögen Umdrehungen der Algorithmen würden auf dem Gebiet solcher Theorien, wovon viele als bedeutsam[304] gelten, aus Prinzip nie zu jenen Höhen vordringen, in die sich der mathematische Intellekt emporzuschwingen vermag.

So zumindest erzählt es eine beliebte Fassung der Geschichte.

2.3.1.1. Vielfaches Beweisen und Trivialisierung in der mathematischen Praxis

Dem König wie auch allen, die auf Königswege in der Mathematik hoffen, muss gleichwohl zugestanden werden, dass der mathematische Satz seinem Wesen nach verschiedene und bisweilen überaus unterschiedliche Beweise zulässt. Holprige Beweise werden, um im Bild zu bleiben, durch glattere, kürzere und übersichtlichere ersetzt. Selbst steile und schwierige Pfade, die in mathematische Höhen hinaufführen, lassen sich zu Königswegen ausbauen, wenn nur einmal der richtige Standpunkt gefunden ist. In solchen Fällen sprechen die Sachverständigen davon, dass ein Problem oder eine Lösung *trivial* (geworden) sei.

Der Gebrauch, der in diesem Zusammenhang vom Ausdruck ‚trivial' gemacht wird, scheint mir denn auch aufschlussreicher, als gemeinhin zugestanden würde. (Gleiches gilt übrigens für andere von der Philosophie der Mathematik vernachlässigte Ausdrücke wie ‚klar', ‚tief', ‚fruchtbar' oder ‚schön'.) Gewiss, mit einem Urteil, wonach dieser oder jener Satz trivial sei, lässt sich allerlei Belangloses und Subjektives, etwa eine persönliche Vorliebe oder Abneigung, ausdrücken. Insgesamt betrachtet aber deutet gerade die zeitliche Verteilung von solchen Trivialitätsurteilen einen Wesenszug der Mathematik an: den Drang, ihre schon sicheren Ergebnisse zu trivialisieren.

Diesen Zug hat auch Gian-Carlo Rota im Blick, wenn er (freilich etwas zugespitzt) Folgendes feststellt:[305]

> Proofs of mathematical theorems, such as the proof of the prime number theorem, are achieved at the cost of great intellectual effort. They are then gradually whittled down to trivialities. [...] Every mathematical theorem is eventually proved trivial. [...] The mathematician's ideal of truth is triviality, and the community of mathematicians will not cease its beaver-like work on a newly discovered result until it has shown to everyone's satisfaction that all difficulties in the early proofs were spurious, and only an analytic triviality is left at the end of the road.

[304] Immerhin zählen die algebraischen Gruppen-, Ring- und Körpertheorien der ersten Stufe desgleichen wie die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre dazu. Für eine Auflistung weiterer unentscheidbarer Theorien und Probleme, vgl. Hunter (1988, S. 189).

[305] Rota (1991, S. 492 f.).

Obwohl ein einziger Beweis hinreicht, um eine Behauptung mit derjenigen Gewissheit zu versehen, die mathematischen Theoremen eigen ist, bleibt es kaum je bei dem ersten Beweis. Im Gegenteil, nach jedem neuen Beweisgang macht sich die mathematische Gemeinschaft, genauer gesagt, die für das Gebiet zuständige Abteilung, „bieberhaft“ daran, den Satz mitsamt seiner Beweise Stück für Stück abzuschleifen, bis schliesslich der triviale Wahrheitskern freigelegt ist.

In der Mathematikgeschichte hat sich dieser Drang zur Trivialisierung in unzähligen Fällen manifestiert. Inwieweit die Bewegung zur Mechanisierung der Mathematik selbst diesem Drang geschuldet war, wäre, wie mir scheint, eine lohnenswerte Frage. Ihr direkt nachzugehen, würde uns jedoch von dem eingeschlagenen Weg abbringen. Im Verlauf des Abschnitts wird sich vielmehr zeigen, dass dieser von Rota angesprochene Drang, welcher hauptsächlich in der *reinen* Mathematik am Werk ist, eine wesentlich andere Art der Trivialisierung anstrebt als die einer mechanisierten Mathematik. Das Ziel ist nicht die Entwicklung allgemeiner, mechanisch anwendbarer Methoden, mit denen möglichst viele Einzelfragen einheitlich behandelt werden können, sondern begriffliche Vereinfachung: Beweiswege, die sparsam und einprägsam sind, begrifflich besonders naheliegen oder sich auf andere Weise als aufschlussreich für das Verständnis mathematischer Sätze erweisen.

Am Ende dieses Unterkapitels sollen denn auch einige wichtige und oftmals unbeachtet bleibende Eigenheiten von Algorithmen, insbesondere von Entscheidungsverfahren, im kontrastierenden Vergleich mit mathematischen Beweisen herausgearbeitet werden (2.3.2). Die Betrachtungen geschichtlicher Abläufe, die dem Vergleich vorangestellt sind, dienen allein diesem Zweck und nicht dazu, die Abläufe selbst zu erklären. Um das ubiquitäre Muster des vielfachen Beweisens als historisches Phänomen begreiflich zu machen, bedürfte es einer anderen Arbeit.

Dennoch lohnt es sich im Hinblick auf diesen Vergleich ein etwas detaillierteres Bild des vielfachen Beweisens zu entwerfen. Dafür werden weiter unten (in 2.3.1.3 und 2.3.1.5) zwei prototypische Beispiele aus der Arithmetik näher untersucht: der Satz von Bertrand-Tschebyschow und der bei Rota erwähnte Primzahlsatz.[306] Das Augenmerk werden wir auf die Beantwortung einer Frage legen, die sich bereits angedeutet hat: weshalb für bewiesene Sätze immer neue Beweiswege angelegt werden, obwohl im Prinzip ein einziger Beweis genügt, damit sich die Vermutung zum Satz verfestigt und als solcher verwendet werden darf. Dass dem so ist, ist ein erster Hinweis darauf, dass Beweisen nicht allein dazu dient, die Wahrheit eines Satzes sicherzustellen, sie dem Zweifel zu entziehen. Bevor

[306] Für weitere Beispiele aus verschiedenen Gebieten der Mathematik, vgl. Detlefsen (2008b). In Dawson (2006) werden in einem kurzen Anhang (S. 281-284) verschiedene Beweise für den Fundamentalsatz der Arithmetik miteinander verglichen.

wir uns aber den Fallstudien aus der Geschichte der Mathematik zuwenden können, muss etwas ausführlicher dargelegt werden, worin diese sicherstellende Funktion des Beweisens besteht.

2.3.1.2. Beweis, Wahrheit und Gewissheit

Es ist nicht leicht, sich dem Beweisen philosophisch zu nähern, ohne sogleich in schwierige Aporien zu geraten, sei es über Wahrheit in der Mathematik, die besondere Gewissheit ihrer Sätze oder über den Beweisbegriff selbst. Das nun Folgende ist der Versuch, den historischen Digressionen wie auch dem Vergleich am Ende dieses Unterkapitels, so gut es geht, den Boden zu bereiten, ohne sich zu weit in Probleme hineinziehen zu lassen, deren zufriedenstellende Behandlung im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu leisten ist. Die Bestimmungen und Unterscheidungen, die es für die Erreichung der gesetzten Ziele braucht, werden daher in kurzen, nummerierten Absätzen eingeführt und jeweils direkt danach in Rückgriff auf ausgewählte Stellen aus neueren und älteren Quellen so weit kommentiert, wie es nützlich erscheint. Die Fragen, die in den verschiedenen Paragraphen behandelt werden, sind die folgenden: *I. Was ist ein mathematischer Beweis? II. Wie hängen in der Mathematik Beweis und Wahrheit zusammen? III. Wozu dienen Beweise in der Mathematik? IV. Worin besteht die besondere Gewissheit mathematischer Sätze?*

Hannes Leitgeb bemerkte vor einem Jahrzehnt, es gebe vergleichsweise wenig philosophische Literatur über die Praxis des Beweisens in der Mathematik und über ihre realen Erzeugnisse, d. s. (zumeist) nicht-formale Beweise.[307] Seither scheint sich einiges bewegt zu haben, wie den neueren Aufsätzen entnommen werden kann, auf die weiter unten verwiesen wird. Dennoch bleibt es bei dem Befund, dass zahlreiche Aspekte des Beweisens einer neueren philosophischen Besprechung harren, was indessen nicht heisst, dass in der Vergangenheit und besonders zu Beginn des 20. Jahrhunderts der mathematischen Beweispraxis keine philosophische Beachtung zuteil wurde, ganz im Gegenteil, wie Paolo Mancosu zu Recht anmerkt.[308] Über Vieles, was uns heute wieder rätselhaft und schwierig erscheint, wurde schon einmal scharf nachgedacht. Es lohnt sich daher durchaus, auch bei älteren Vertretern oder Kritikern klassischer Positionen nachzulesen, was

[307] Vgl. Leitgeb (2009, S. 263).

[308] Vgl. Mancosu (2001, S. 97): «all the programs in foundations of mathematics in this century have, in my opinion, been concerned with mathematical practice. In the grand foundational programs, say Hilbert's, attention to practice was necessary to insure that the consistency program be able to account for all of mathematics, as opposed to a small part of it. And setting up the formalisms does require a very good sense of how much you need for various parts of mathematical practice».

sie über das Beweisen, über Wahrheit und Gewissheit in der Mathematik geschrieben haben. Wir werden uns vor allem bei Frege, Wittgenstein und Dummett bedienen.

I. Beweisen ist eine Tätigkeit: ein von Regeln geleitetes Voranschreiten auf ein Ziel hin. Das Ziel – die zu beweisende Behauptung – kann erreicht oder verfehlt werden. Gelingt es, den Beweisgang ohne Regelbrüche oder unerlaubte Sprünge ins Ziel zu bringen, liegt mit der bereinigten Aufzeichnung der ausgeführten Gedankenbewegungen ein Beweis der Behauptung vor. Der Beweis selbst ist keine Bewegung, auch keine Aufführung oder *performance*. Er ist, wie man sagen könnte, das Bild eines gelungenen Beweisgangs.

Kommentar Alan Robinson kritisiert zu Recht eine in der Logik verbreitete Sicht, die Beweise nur als mathematische Gegenstände zu betrachten vermag, ähnlich geometrischen Figuren, in denen nichts vor sich geht, nichts geschieht. Diese Sichtweise blendet wesentliche Aspekte des Beweisens aus und versperrt, wenn sie die einzige Sichtweise bleibt, das Verständnis für die unterschiedlichen Funktionen, die Beweise im Dienst der Mathematik erfüllen:[309]

> If we confine our attention to proofs in this sense it is as though we only ever experience music in the form of the structured, silent, static scores written down by the composers in the traditional music notation. Studying these scores is of course important, but there is much more to music than descriptive diagrams. [...] The music itself is what happens when it is performed, either in the open and in public in the usual way, or in the private mental performances which some people can conjure up in their musical imaginations.

Beweise sind keine toten Zeichenfolgen, Ansammlungen bedeutungsloser Formen auf Papier, sondern lebendig durch ihren Gebrauch in der Mathematik.[310] Wenn Robinson aber den Beweis selbst – und nicht wie wir bloss das Beweisen – als *performance* bestimmt, hat er die Abfolge mentaler Zustände im Sinn, die das individuelle Nachvollziehen eines Beweistextes aus der mathematischen Fachliteratur begleitet: gleichsam die innerlich aufgeführte Sinfonie. Der Beweis wäre demnach primär etwas Subjektives, das in der

[309] Robinson (2000, S. 281).

[310] Eine, wie mir scheint, lohnenswerte Frage, der hier nicht nachgegangen werden kann, ist die nach möglichen Anwendungen von Beweisen ausserhalb der Mathematik. Ein mathematischer Beweis kann für eine nicht (rein) mathematische Theorie natürlich insofern von Bedeutung sein, als er die Wahrheit eines Satzes zeigt, der in dieser Theorie Anwendung findet. Die Frage ist jedoch, ob (und wenn ja, inwiefern) auch der Beweis selbst – der Beweiskörper sozusagen oder ein Bestandteil daraus – ausserhalb der Mathematik von Nutzen sein kann oder ob sich sein ganzes Leben quasi innerhalb der Mauern dieser einen Wissenschaft abspielt. Unter anderem könnte man sich fragen, ob und, wenn ja, wie sich Beweise für die Entwicklung von Algorithmen nützlich erwiesen haben. Vgl. dazu weiterführend Rota (1997, S. 189-192).

Fülle seiner partikulären Ausprägung privat bleiben muss: «The real proof is the series of cognitive events called for in the script. [...] As the proof proceeds so do the stages of the evolution of the (subjective) mental state of seeing that, and knowing why, the theorem is true».[311] Um den besonderen Charakter der mathematischen Gewissheit einzufangen, bedarf es aber (wie sich im Kommentar zu Paragraph IV zeigen wird) eines Begriffs, der von allem bloss subjektiv Zugänglichen bereinigt ist und die Mitteilbarkeit von Beweisen als wesentliches Merkmal enthält.[312] Insofern der mathematische Beweis seinem Wesen nach mitteilbar, mithin verständlich sein muss, lässt er sich durchaus mit anderem *vergleichen*, mit Geschichten etwa oder Musik.[313] Die wahre Herausforderung besteht jedoch darin, Beweise als Wesen *sui generis* zu verstehen. Ihre Einteilung unter eine übergeordnete Gattung kann womöglich behilflich sein, aber nur, wenn diese als minimale Anforderung das Moment der Mitteilbarkeit besitzt, da andernfalls das Abgleiten in eine Art mathematischen Solipsismus droht. Aus diesem Grund eignet sich der Gattungsbegriff der (mentalen) Konstruktion, von dem der Intuitionismus Gebrauch macht, nur bedingt. Michael Dummett, der eine eigene Spielart des Intuitionismus vertritt, hat dies immer wieder hervorgehoben:[314]

> Intuitionists usually say that written proofs are only the imperfect representations of the corresponding mental constructions: but, unless we are to acquiesce in a purely solipsistic interpretation of the whole conception, they must be communicable, and, if communicable, to be communicated by means of language; there is therefore no justification for holding that their linguistic representations may, in certain cases, necessarily be imperfect. The important point is not that the mental construction is, as it were, in a different medium from the written proof, but, rather, that the written proof is a proof in the required sense only in virtue of its being couched in an interpreted language: the features which make it genuinely a proof of its conclusion, and effectively recognizable as such, are neither

---

[311] Robinson (2000, S. 281).

[312] Die Vorstellung eines privaten „Beweises" ist mit der Vorstellung eines privaten Plans vergleichbar, wie sie Wittgenstein in den *Philosophischen Untersuchungen* beschreibt: «Ich sage Einem, ich sei einen gewissen Weg gegangen, einem Plan gemäss, den ich zuvor angefertigt habe. Ich zeige ihm darauf diesen Plan, und er besteht aus Strichen auf einem Papier; aber ich kann nicht erklären, inwiefern diese Striche der Plan meiner Wanderung sind, dem Andern keine Regel sagen, wie der Plan zu deuten ist. Wohl aber bin ich jener Zeichnung mit allen charakteristischen Anzeichen des Kartenlesens nachgegangen. Ich könnte so eine Zeichnung einen ‹privaten› Plan nennen» Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*, § 653, S. 269.

[313] Nicht nur bei Robinson, auch an vielen Stellen in Wittgensteins Nachlass finden sich Vergleiche zwischen Musik und Mathematik. In einer Notiz aus den *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (III.63, S. 192) zum Beispiel weist er auf die «*genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik und in der Mathematik» hin. Vgl. auch I.171, S. 100-101; III.77, S. 203; VI.2, S. 304; VII.11, S. 370; VII.24, S. 390; VII.40, S. 407.

[314] Dummett (2000, S. 270). Vgl. auch Dummett (1973, S. 226).

> identifiable with nor isomorphic to any of its purely formal characteristics as a complex structure of written signs, but belong to it solely in virtue of the meanings of those signs.

Auf Dummetts zweiten langen Satz, in dem er das semantische Wesen von Beweisen hervorhebt, werden wir gleich zurückkommen.

Indem wir hier einen abstrakten Bildbegriff dem der Konstruktion vorziehen, folgen wir Wittgenstein, der in einer seiner *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* festhält: «Der Beweis (das Beweisbild) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); und wir sind überzeugt, dass ein so geregeltes Vorgehen immer zu diesem Bild führt».[315] Abgesehen von der Abwendung der solipsistischen Gefahr besteht ein weiterer Vorteil dieser Begriffswahl vielleicht darin, dass die Rolle bildlicher Darstellungen in Beweisen dadurch einfacher zu erklären ist.[316] Schwierigkeiten bereitet dafür die Frage nach Einheit und Identität von Beweisen: was als ein Beweis zählt, was als zwei; was wieder derselbe, was ein anderer Beweis ist. Der eingeworfene Bildbegriff lässt weitgehend offen, wie stark von den Umständen abstrahiert werden muss, unter denen schriftlich, mündlich, diagrammatisch bewiesen wird, um das Beweisbild zu fassen. Diese Vagheit muss indes kein Nachteil sein, im Gegenteil. In der mathematischen Praxis kommen durchaus verschiedene Zählweisen und Identitätskriterien zur Anwendung, so etwa wenn es heisst, Landaus Beweis von Bertrands Vermutung sei im Wesentlichen identisch mit Tschebyschows ursprünglichem Beweis, wohingegen die Beweise des Primzahlsatzes von Erdős und Selberg trotz aller Übereinstimmung als verschieden angesehen werden (siehe 2.3.1.3).

Um der Vielfalt an Individuierungsmöglichkeiten gleichwohl Grenzen zu setzen, wäre es denkbar, Beweise aufgrund ihrer Beziehung zu Entitäten mit festeren Identitätsbedingungen in Äquivalenzklassen einzuordnen. Infrage kämen dafür Ableitungen (d. s. formale Beweise), sofern sie tatsächlich strikteren Identitätskriterien genügen und jeder Beweis in einer relevanten rechtseindeutigen Relation zu einer Ableitung steht. So könnte man Beweise, wie sie aus der mathematischen Praxis bekannt sind (d. s. in der Regel nicht-formale Beweise), gleichsam als Skizzen auffassen, die insofern eine vollständige Ableitung anzeigen, als sich eine solche aus ihnen rekonstruieren lässt. Um festzustel-

[315] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.22, S. 159. An zahlreichen weiteren Stellen werden Beweise als Bilder bezeichnet oder mit Bildern verglichen, vgl. besonders IV.21, S. 235 und VII.9, S. 365.

[316] Für eine Besprechung der Frage, ob und inwiefern nicht nur bildliche Aspekte symbolischer Notationen, sondern insbesondere auch Diagramme unersetzliche Bestandteile von Beweisen sein können, vgl. Giaquinto (2020, § 3). Bei Wittgenstein selbst hängt diese Begriffswahl auch mit dem zusammen, was er die *geometrische* Beweis- oder Überzeugungskraft eines Beweises nennt, vgl. Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.43, S. 174 f.

len, ob zum Beispiel in verschiedenen Algebra-Lehrbüchern Varianten ein und desselben Beweises abgedruckt sind, müsste demnach geprüft werden, ob sie sich zu derselben Ableitung formalisieren lassen oder nicht. Angesichts der Probleme, die das Formalisieren von mathematischen Sätzen und ihren Beweisen bekanntlich aufwirft, nimmt sich die Annahme, dass die relevante Beziehung rechtseindeutig ausfiele, jedoch höchst zweifelhaft aus.[317]

Die schwächere Annahme, wonach jeder Beweis formalisiert und in (mindestens) eine Ableitung übertragen werden kann, lässt sich zwar nicht mehr ohne Weiteres für die Individuierung von Beweisen heranziehen. Sie kann aber einem anderen Zweck dienen und mitunter wird sie entsprechend verwendet: um ein Kriterium für die Korrektheit von Beweisen anzugeben.[318] Unter dieser Annahme ist ein nicht-formaler Beweisversuch genau dann ein Beweis, mithin korrekt, wenn er sich in eine den Schlussregeln gemässe Ableitung aus geeigneten Axiomen umbauen lässt. Die Korrektheit mathematischer Beweise wäre also durch die Gültigkeit von Ableitungen verbürgt, d. h. durch eine rein formale Gültigkeit, in etwa so, wie die Gültigkeit von Enthymemen durch die Gültigkeit entsprechender Schlüsse verbürgt sein kann. Ob und inwiefern damit ein verlässliches Kriterium für die Korrektheit von Beweisen vorliegt, lässt sich hier nicht ausführlich genug erörtern.[319] Gleichwohl muss dem, was Dummett im zweiten Teil der vorhin zitierten Passage sagt, zugestimmt werden: dass der mathematische Beweis in der Regel nicht, oder zumindest nicht allein, aufgrund seiner formalen Beschaffenheit als solcher erkannt wird, sondern über ein Verständnis der *Bedeutung* der in ihm vorkommenden Zeichen.[320] Nach dem Kriterium aber, das die Korrektheit von Beweisen an formale Gültigkeit knüpft, dürfen material gültige Schlüsse – da ihre Gültigkeit auch an der Be-

[317] Für eine kritische Diskussion der Behauptung, wonach Beweise Ableitungen eindeutig anzeigen, vgl. Tanswell (2015). Auch in Leitgeb (2009) wird darauf hingewiesen, wie kompliziert sich das Verhältnis zwischen formaler und nicht-formaler Beweisbarkeit gestaltet; dass überhaupt eine Beziehung besteht, die für eine begriffliche Klärung nicht-formaler Beweisbarkeit von Interesse sein könnte, müsse sich zuerst zeigen.

[318] Für zwei kürzlich erschienene Besprechungen dieses Kriteriums, in denen auch verschiedene Positionen aus der Literatur erwähnt und zum Teil erörtert werden, vgl. Tatton-Brown (2020) und Avigad (2021).

[319] Argumente, die gegen die Annahme sprechen, dass die Korrektheit mathematischer Beweise auf die formale Gültigkeit entsprechender Ableitungen zurückgeführt werden kann, finden sich in Rav (2007), in Leitgeb (2009) und in Antonutti Marfori (2010). Versuche, Korrektheit über formale Gültigkeit zu begründen, finden sich in Tatton-Brown (2020) und Avigad (2021).

[320] Dieses Verständnis, meint Dummett weiter, setze die volle Beherrschung der Sprache voraus, worin der Beweis ausgedrückt ist: «We therefore have no reason to expect that any proof of some given statement will be recognizable as such by any means that falls short of demanding a full understanding of the language in which the proof is expressed» Dummett (2000, S. 270).

deutung der darin vorkommenden Termini hängt – nicht in mathematischen Beweisen vorkommen, es sei denn, sie lassen sich auf formal gültige Schlüsse zurückführen.

Als zu Beginn des Paragraphen das Beweisen als *regelgeleitetes* Voranschreiten charakterisiert wurde, sollte dies indes nur eine schwächere Forderung implizieren: dass Beweisversuche nur dann gelingen können, mithin korrekt sind, wenn sie nicht gegen logische Gesetze verstossen. Um dieser Forderung Gehalt zu verleihen, müsste allerdings ein bestimmtes Regelsystem angegeben werden, was wiederum die Frage aufwirft, welches System beim Beweisen in der Mathematik tatsächlich zur Anwendung kommt (oder: welches System dieser Anwendung am nächsten kommt). Bekanntlich herrscht in dieser Frage wenig Einigkeit, wie die Vielzahl ungleichwertiger Vorschläge, die seit dem ausgehenden 19. Jahrhundert vorgebracht wurden, bezeugt: Liefert die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom die geeignetste Grundlage, wie nicht wenige glauben, oder müsste Russells Typentheorie (bzw. die durch Ramsey vereinfachte Version derselben) wenigstens in Betracht gezogen werden? Braucht es überhaupt eine Prädikatenlogik zweiter Stufe oder muss, wie Quine meinte, die erste Stufe ausreichen?[321] Haben nur die intuitionistischen Gesetze Geltung oder die Gesamtheit der klassischen? Braucht es parakonsistente Logiken, um die Antinomien in den Griff zu bekommen, oder kann an *ex falso quodlibet* festgehalten werden? Steht womöglich ein Kalkül des natürlichen Schliessens dem mathematischen Denken am nächsten oder trotz allem ein axiomatischer? Usw. usf.

Zu dieser Unbestimmtheit kommt hinzu, dass beim Beweisen nicht nur logische Regeln befolgt werden müssen, sondern auch solche, die sich aus einer etablierten Technik ergeben, Rechenregeln zum Beispiel. Offenbar aber bleibt die Menge *dieser* Regeln weder über die Zeit noch über Gebietsgrenzen hinaus unverändert. Während die Entwicklung neuer Methoden das Regelrepertoire erweitert, können tradierte Techniken an Bedeutung verlieren, bis sie ganz aus dem Werkzeugkasten verschwunden sind; und auch zwischen den Gebieten, ja sogar zwischen verschiedenen Theorien aus demselben oder verwandten

[321] Vgl. hierzu Leitgeb (2009, S. 269): «should we formalize a concrete instance of complete induction over natural numbers in a ‹real world› proof in number theory or in real analysis as an instantiation of the first-order scheme of induction or as an instance of the second-order axiom of induction? No part or aspect of the actual mathematical proof seems to necessitate an answer, and the manner in which mathematicians communicate, check, and learn from such a proof does not do so either. [...] The logical structure of a reconstructing formal system is, at best, underdetermined by the reconstructed fragment of mathematics, but it is more likely that there is simply no fact of the matter at all whether that fragment of mathematics is first-order, second-order, third-order, or whatever else». Dieser Befund ist mit unseren Ergebnissen gegen Ende des ersten Kapitels (in 1.3.3.6) durchaus vereinbar.

Gebieten lassen sich erhebliche Unterschiede ausmachen.[322] Die Menge der Regeln, die beim Beweisen angewandt werden dürfen oder beachtet werden müssen, ein für allemal und für die Mathematik insgesamt festsetzen zu wollen, wäre ein von Grund auf fehlgeleitetes Unterfangen. Vielmehr trifft zu, was Wittgenstein in einer Bemerkung auf den Punkt bringt:[323]

> *Das* ist wahr daran, dass Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unserer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung. [...]
>
> Aber wie –, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*? – Sie schafft immer neue und neue Regeln: baut immer neue Strassen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

II. Der mathematische Beweis zeigt, dass die Behauptung, die er beweist, wahr sein *muss*. Jeder Versuch, eine Falschheit zu beweisen, ist daher zum Scheitern verurteilt. Beweisen lassen sich allein Wahrheiten. Führt der Beweisgang in eine offensichtliche Falschheit, insbesondere in eine Aussage der Form $\varphi \wedge \neg\varphi$, liegt damit kein Beweis für diese Aussage vor, sondern für die Negation der Annahme, von der das Beweisen ausging. Auch mit einer *reductio ad absurdum* kann nur Wahres bewiesen werden, wenn es gleich auf indirektem Weg geschieht. Bewiesene Behauptungen können also unmöglich falsch sein. Hingegen ist es möglich zu beweisen, *dass* eine Behauptung falsch ist, unter anderem über einen indirekten Beweis ihrer Negation. Die Behauptung selbst ist dann nicht bewiesen, sondern widerlegt.

Kommentar Dass ein bewiesener Satz nicht falsch sein kann, mag auf den ersten Blick als Begriffswahrheit der langweiligeren Art erscheinen. Dennoch fragt sich, welche begrifflichen Fäden sie zusammenhalten und ob vielleicht nicht doch ein Beweisbegriff denkbar wäre, durch den nicht ausgeschlossen wird, dass es für gewisse Falschheiten Beweise gibt.

Einen Weg zeichnet der Dialetheismus, demnach es wahre Aussagen gibt, deren Negation ebenfalls wahr ist.[324] Unter der Annahme, dass eine Aussage genau dann falsch ist, wenn ihre Negation wahr ist, wäre eine solche dialetheische Aussage sowohl wahr als auch falsch. Die Negation einer dialetheischen Aussage wäre ebenfalls sowohl wahr als auch falsch, wenn wie in der klassischen Aussagenlogik doppelte Negationen ver-

[322] Für Beispiele topik-spezifischer Schritte in Beweisen, vgl. Rav (1999, S. 21-27).
[323] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.165-166, S. 99.
[324] Für eine neuere Sammlung philosophischer Beiträge zum Dialetheismus, vgl. Priest, Beall u. a. (2004).

schwinden. Für die intuitionistische Aussagenlogik gilt dies nicht, da dort das Schema $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ nicht tautologisch ist.[325]

Nehmen wir also an, ψ sei ein bewiesener Satz aus irgendeinem mathematischen Teilgebiet, mithin wahr nach unseren Bestimmungen. Nehmen wir ausserdem an, was der Dialetheismus erlaubt: dass $\neg\psi$ ebenfalls wahr ist. Dann liegt (unter der Annahme, dass die Falschheit eines Satzes mit der Wahrheit seiner Negation zusammenfällt) ein Beweis für einen Satz vor, der auch falsch ist. Wenn seine Negation, die ja wahr ist, nun ebenfalls bewiesen ist, dann liegt sogar ein Beweis für die Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ vor. Um zu verhindern, dass sich daraus die Beweisbarkeit aller möglichen Behauptungen ergibt, kann der Beweisbegriff an eine parakonsistente Logik geknüpft werden, sodass die Schlussweise des *ex falso quodlibet* nicht gilt. Und tatsächlich scheint dies ein gangbarer Weg, auf dem ein sinnvoller Beweisbegriff gebildet werden kann, nach dem es nicht ausgeschlossen ist, Falschheiten zu beweisen.[326]

Obwohl die Beweisbarkeit falscher Sätze zugestanden wird, kann in dem eben skizzierten Fall die Wahrheit eines Satzes notwendige Bedingung seines Bewiesenseins bleiben. Denn selbst von der Kontradiktion $\psi \wedge \neg\psi$ würde man am ehesten annehmen, dass ihr sowohl Wahrheit als auch Falschheit zukommt, da ψ dailetheisch ist.[327] Anders stellt sich die Sachlage dar, wenn die Möglichkeit einer Aussage χ zugestanden wird, für die zwar ein Beweis vorliegt, die aber nicht wahr, sondern *nur* falsch ist (oder weder wahr

[325]Nach den Gesetzen der klassischen Aussagenlogik gilt für beliebige Theorien Φ, dass eine Formel φ genau dann in Φ beweisbar ist ($\Phi \vdash \varphi$), wenn auch $\neg\neg\varphi$ in Φ beweisbar ist ($\Phi \vdash \neg\neg\varphi$). Nach den Gesetzen der intuitionistischen Logik dagegen gilt dieser Zusammenhang in die eine Richtung – wenn $\Phi \vdash \varphi$, dann $\Phi \vdash \neg\neg\varphi$ –, umgekehrt jedoch nicht. Unter der BHK-Interpretation (‚BHK' steht für Brouwer, Heyting, Kolmogorow) des intuitionistischen Systems wird dieser Unterschied wie folgt verständlich. Ich folge hier der Darstellung in Dalen (2004, S. 154-155): Angenommen, es gelte φ, d. h. es liege ein Beweis a für φ vor. Nehmen wir ausserdem hypothetisch an, dass ein Beweis b für $\neg\varphi$ vorliege. Dann können wir a und b so zusammensetzen, dass sich aus ihrer Zusammensetzung ein Widerspruch (nämlich $\varphi \wedge \neg\varphi$) ergibt. Mit Hilfe von a lässt sich also jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in den „Beweis" eines Widerspruchs, in eine *reductio ad absurdum* verwandeln. Das heisst aber (gemäss BHK-Interpretation) nichts anderes, als dass die Negation von $\neg\varphi$ gilt, mithin ein Beweis für $\neg\neg\varphi$ vorliegt. Gehen wir umgekehrt von der Annahme aus, dass ein Beweis c für $\neg\neg\varphi$ vorliegt, gelangen wir nicht zur Folgerung, dass auch ein Beweis für φ vorliegt. Denn: Über den Beweis c wissen wir (gemäss BHK-Interpretation), dass sich mit ihm jeder Beweisversuch von $\neg\varphi$ in einen Widerspruch führen lässt. Wir wissen also, dass es keinen Beweis für $\neg\varphi$ geben kann. Da ein Beweis für $\neg\varphi$ eine Konstruktion wäre, die einen Beweis für φ in einen Widerspruch führte, können wir aus dem Vorliegen eines Beweises für $\neg\neg\varphi$ lediglich folgern, dass es keine Konstruktion geben kann, die einen Beweis für φ in einen Widerspruch führt. Damit aber liegt uns noch kein Beweis für φ vor. Kurzum: Wenn ein Beweis für φ vorliegt, dann auch einer für $\neg\neg\varphi$; wenn einer für $\neg\neg\varphi$, dann nicht zwingend auch für φ.

[326]Ein Standardwerk über parakonsistente Logik ist Priest, Routley u. a. (1989), eines über inkonsistente Mathematik Mortensen (1995). Für eine Diskussion des Gebrauchs parakonsistenter Logiken im Umgang mit Antinomien, insbesondere mit der Antinomie des Lügners, vgl. Brendel (1992, Kap. 11).

[327]Vgl. indes Sainsbury (2004).

noch falsch). In diesem zweiten Fall lässt sich die Verknüpfung von Wahrheit und Beweisbarkeit nicht aufrecht erhalten. Dass ein Satz wahr ist, wäre nicht mehr zuverlässig am Vorliegen eines Beweises erkennbar.

Durch unsere Bestimmungen, wonach nur Wahrheiten und keine Falschheiten bewiesen werden können, sind freilich beide Fälle ausgeschlossen, d. h. wir werden sie in dem, was folgt, nicht berücksichtigen. Im ersten Fall, der die Beweisbarkeit dialetheischer Aussagen vorsieht, geschieht dies lediglich der Einfachheit halber. Ein Vergleich von Beweisen und Algorithmen unter parakonsistenten Gesichtspunkten dürfte sich als durchaus aufschlussreich erweisen. Inkonsistente Informationen stellen für die Datenspeicherung und -verarbeitung ein Problem dar, bei dessen Lösung die Anwendung parakonsistenter Logik behilflich sein kann.[328] Der zweite Fall dagegen wird deshalb ausgeschlossen, weil in ihm der enge begriffliche Zusammenhang zwischen mathematischer Wahrheit und Beweis aufgehoben ist. Wie das Beweisen da noch dem Sicherstellen dienen könnte, ist nicht zu sehen. Vielmehr fragt sich, ob in diesem Fall überhaupt festzustellen wäre, dass ein Satz wahr, eine Behauptung falsch ist.

Als es zu Beginn dieses Paragraphen hiess, der Beweis zeige, dass der Satz, den er beweist, wahr sein muss, blieb offen, worin die Wahrheit des mathematischen Satzes besteht. Dies geschah nicht nur deshalb, weil man sich beim Versuch, diese Aporie zu beantworten, besonders leicht in Widersprüche verstrickt, sondern auch und vor allem, weil sich viele durch sie sogleich dazu veranlasst sehen, Annahmen über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände zu treffen. Die Ergebnisse, die in diesem Abschnitt angestrebt werden, sollen jedoch nicht an einer bestimmten metaphysischen Auffassung hängen, weshalb die erforderlichen Bestimmungen so zu treffen sind, dass sie möglichst wenig *a priori* ausschliessen.

Wer eine realistische Auffassung – einen mathematischen Platonismus – vertritt, wäre geneigt, die sicherstellende Funktion des Beweisens dahingehend zu beschreiben, dass an dem zu beweisenden Satz eine Eigenschaft nachgewiesen wird, die dieser losgelöst von jedem Beweis und allen Bedingungen der Möglichkeit menschlicher Erkenntnis ein für allemal besitzt: allein aufgrund seiner Übereinstimmung mit einer idealen Wirklichkeit mathematischer Gegenstände und Strukturen, die uns in Teilen, aber womöglich nicht vollständig zugänglich ist. Das entspricht zwar nicht der Beschreibung, die weiter unten (in Paragraph IV) von der sicherstellenden Funktion des Beweisens gegeben wird, wäre aber mit ihr nicht unverträglich. Und selbst für naive Platonisten gilt, dass, wer die Wahrheit einer umstrittenen Behauptung zeigen möchte, einen Beweis zu geben hat,

[328] Vgl. Abe u. a. (2015, Kap. 6).

und, wer die Wahrheit einer angeblich bewiesenen Behauptung bezweifelt, bestreiten muss, dass ein Beweis vorliegt. Wo sie nicht offenkundig ist, erkennen wir die Wahrheit mathematischer Sätze an ihrem Beweis; und wo kein Beweis vorliegt, darf ihre Wahrheit nicht behauptet werden, ausser sie ist offenkundig. (Um die Wahrheit von Sätzen zu erkennen, die keines Beweises bedürfen, weil ihre Wahrheit offenkundig (evident) ist, reicht es mitunter die involvierten Definitionen zu verstehen oder eine Technik zu erlernen, sodass die Korrektheit des Satzes überprüft werden kann. Darauf werden wir bei der Besprechung des nächsten Paragraphen kurz zurückkommen.)

Wenn wir von den offenkundigen Wahrheiten absehen, ist der Beweis demnach das untrügliche Kennzeichen mathematischer Wahrheit. Müsste also die Antwort auf die offengelassene Aporie nicht einfach lauten, dass eine Behauptung mathematischen Inhalts genau dann wahr ist, wenn ein Beweis für sie tatsächlich vorliegt? So jedenfalls sehen es die Intuitionisten. Dummett begründet dies in seiner philosophischen Apologie des Intuitionismus unter anderem mit bedeutungstheoretischen Überlegungen:[329]

> What we actually learn to do, when we learn some part of the language of mathematics, is to recognise, for each statement, what counts as establishing that statement as true or as false. In the case of very simple statements, we learn some computation procedure which decides their truth or falsity: for more complex statements, we learn to recognise what is to be counted as a proof or a disproof of them. That is the practice of which we acquire a mastery: and it is in the mastery of that practice that our grasp of the meanings of the statements must consist. We must, therefore, replace the notion of truth, as the central notion of the theory of meaning for mathematical statements, by the notion of *proof*: a

[329] Dummett (1973, S. 225). Dummetts Argument ist weitaus länger und komplexer, als dass es hier angemessen wiedergegeben werden könnte. Zu seinen Prämissen gehört unter anderem das Prinzip, wonach die Bedeutung einer Behauptung durch ihren Gebrauch vollständig bestimmt sei, dass es also keinen versteckten Bedeutungsgehalt geben kann, der im Gebrauch nicht manifestierbar, mithin nicht mitteilbar wäre. Vgl. dazu Dummett (1973, S. 223-225).
In demselben Aufsatz skizziert Dummett ausserdem eine zweite Argumentationslinie für den Intuitionismus in der Mathematik (ab S. 226). Diese fällt gegenüber den bedeutungstheoretischen Betrachtungen, die sehr allgemein gehalten sind, insofern spezifischer aus, als sie den genuin mathematischen Charakter mathematischer Behauptungen berücksichtigt. Ausgangspunkt dieser Argumentation ist die anti-realistische These, wonach sich mathematische Behauptungen nicht auf eine objektive, unabhängig von uns existierende Wirklichkeit beziehen, sondern auf «creations of the human mind», auf «objects of thought» (S. 227-228). Letztlich aber führe diese Argumentation, wie Dummett zu zeigen versucht, in einen resoluten und, wie ich meine, nicht gerade ansprechenden Skeptizismus: «it must deny that there exists any proposition which is now true about what the result of a computation which has not yet been performed would be if it were to be performed» (S. 247). Nicht nur deshalb erscheint mir die bedeutungstheoretische Argumentationslinie vielversprechender. Zu Recht rekonstruiert sie den *eigentlichen* Streitpunkt zwischen Platonismus und Intuitionismus als einen semantischen, betreffend die Wahrheitsbedingungen mathematischer Behauptungen. So gesehen, erweist sich der metaphysische Dissens lediglich als ein Symptom der semantischen Differenz. Vgl. dazu Dummett (1963, S. 153-154) und Dummett (1978, S. xxvi-xxix).

> grasp of the meaning of a statement consists in a capacity to recognise a proof of it when one is presented to us [...].

Eine mathematische Behauptung *verstehen*, ihre Bedeutung erfassen, heisst, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen können. Eine Wahrheit, für die es keinen nachvollziehbaren Beweis geben kann, wären wir ausserstande zu verstehen, geschweige denn als wahr zu erkennen. Sie hätte für uns keine Bedeutung, wäre kein Stück Mathematik. Und obwohl wir durchaus in der Lage sind, Behauptungen zu verstehen, die weder bewiesen noch widerlegt wurden, ist es doch erst und allein das Vorliegen eines Beweises oder einer Widerlegung, das ein Urteil über Wahrheit oder Falschheit erlaubt. Die Wahrheit einer Behauptung hängt an nichts anderem als an ihrem Beweis.

Von diesem intuitionistischen Standpunkt aus erweist sich unsere anfängliche Bestimmung, wonach der mathematische Beweis die Wahrheit eines Satzes zeige, freilich als Tautologie. Wenn die Wahrheit einer Behauptung mathematischen Inhalts darin besteht, dass ein Beweis für sie vorliegt, dann zeigt demzufolge der Beweis eines Satzes, dass ein Beweis für ihn vorliegt – gewiss. Tautologizität und Zirkularität sind jedoch nicht immer das Symptom schlechter Definitionen. Hier drücken sie die Ersetzung des Wahrheitsbegriffs auf dem Gebiet der Mathematik durch den des Beweises aus, sodass die zu tragende Last vollumfänglich auf letzteren abgewälzt wird. Die drängende Frage ist dann, was Beweise – ihre Korrektheit und Vollständigkeit – ausmacht, was sie von gescheiterten Beweisversuchen unterscheidet.

Gegen die intuitionistische Auffassung mathematischer Wahrheit spricht indes, dass sich ihr zufolge von bekanntlich unbewiesenen Behauptungen nicht sinnvoll sagen lässt, man halte sie für wahr oder man vermute, sie seien wahr. Wer Wahrheit als das Vorliegen eines Beweises auffasst, ist gezwungen, Vermutungen, von denen man weiss, dass sie noch nie bewiesen wurden, für *nicht* wahr zu befinden. Überhaupt scheint es aus Sicht des Intuitionismus kaum sinnvoll, in der Mathematik Vermutungen anzustellen, d. h. unbewiesene Behauptungen für wahr zu halten oder zu sagen, sie seien wahrscheinlich wahr – ausser man wollte damit die Wahrscheinlichkeit zum Ausdruck bringen, dass irgendwo ein Beweis für sie vorliegt, den man nicht kennt. Gerade aber für die Praxis des Beweisens sind Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit noch unbewiesener Behauptungen wichtig, ja vielmehr essenziell.[330] Sie geben dem Beweisbestreben eine Richtung vor und womöglich ein erreichbares Ziel. Als zum Beispiel Bertrand die Wahrheit seiner Vermutung postulierte, tat er dies in der Annahme, dass ein Beweis für sie

[330] In Tappenden (2008) findet sich eine kurze Erörterung der Bedeutung des Vermutens für die mathematische Praxis, vgl. S. 289-293 und insbes. Anm. 10 für weitere Literaturhinweise.

noch nie gelungen war, sich dies aber bald ändern könnte, zumal vieles, wenn auch noch nichts Zwingendes, für ihre Wahrheit sprach (siehe 2.2.2.4). Dadurch stellte er sie als ein lohnenswertes und wahrscheinlich erreichbares Beweisziel heraus. Historisch gesehen veranlasste dies tatsächlich ihren Beweis durch Tschebyschow und zeitigte darüber hinaus eine Reihe damit verwandter Ergebnisse (siehe 2.3.1.3).[331]

Dem Intuitionismus Zugeneigte könnten nun entgegenhalten, dass sich Vermutungen nicht auf die aktuale Wahrheit von Aussagen beziehen, sondern auf ihren zukünftigen Wahrheitswert. Wer eine Vermutung aufstellt, würde demnach nicht vermuten, dass eine bestimmte Aussage jetzt schon wahr ist, sondern ihr zusprechen, dass sie irgendwann wahr werden wird, sich mithin früher oder später ein Beweis finden lässt. Da Vermutungen aber nichts über den Zeitpunkt aussagen, an dem spätestens ein Beweis zu erwarten ist, müsste die betrachtete Zeitspanne grenzenlos sein, damit kein zufällig noch unverwirklichter Beweis unberücksichtigt bliebe. Bei der Eigenschaft, auf die sich Vermutungen gemäss dieser Auffassung beziehen, muss es sich folglich um eine modalisierte Variante dessen handeln, woran das intuitionistische Wahrheitskriterium geknüpft war. Vermutungen würden sich also nicht auf das zeitgebundene Vorliegen eines Beweises beziehen, sondern auf die Möglichkeit, eine Behauptung zu beweisen: auf ihre Beweisbarkeit.

Es fragt sich dann allerdings, ob diese modalisierte Eigenschaft dem Begriff der mathematischen Wahrheit ohnehin nicht viel eher entspricht als das ursprüngliche Wahrheitskriterium – d. i. das Vorliegen eines Beweises –, das dem Wirken historischer Kontingenz zu sehr unterworfen scheint. Müssten also Behauptungen mathematischen Inhalts nicht vielmehr genau dann als wahr gelten, wenn sie bewiesen werden *können*, beweis*bar* sind? Nach diesem neuen Kriterium stellt es jedenfalls keinen Widerspruch mehr dar, Behauptungen für wahr zu halten, von denen man weiss, dass sie noch unbewiesen sind. Inkonsistent wäre es lediglich, an ihrer Wahrheit und zugleich an ihrer Unbeweisbarkeit festzuhalten. Dass mathematische Wahrheiten beweisbar sein müssen, wäre Ausdruck einer begrifflichen Regel, was jedoch angemessen erscheint. Denn nichts spricht dafür, durch die Wahl unserer Begriffe die Möglichkeit offenzulassen, dass uns manche mathematische Wahrheit für immer verborgen bleiben muss – ausser ein platonistisches Vorurteil über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände würde uns dazu zwingen.[332]

[331] Für die weiteren Ergebnisse, vgl. Narkiewicz (2000, S. 116-118).

[332] Dass platonistische Positionen typischerweise die Möglichkeit von für uns unerkennbaren, mithin unbeweisbaren Wahrheiten offenlassen, ist ein Einwand, den Dummett vorbringt, vgl. Dummett (1973, S. 224-225). Was für diese Möglichkeit sorgt, ist gleichwohl nicht unmittelbar die metaphysische Auffassung über die Existenz und das Wesen mathematischer Gegenstände, sondern ein Realismus in Bezug auf Wahrheitswerte, d. i. die These, wonach mathematische Behauptungen eine Bedeutung

Manche behaupten, darunter auch Dummett, dass die Festlegung auf die Beweisbarkeit einer Behauptung als das Kriterium für ihre Wahrheit letztlich immer in einem Platonismus mündet.[333] Das sehe ich anders, gestehe aber zu, dass es nicht leicht fällt, eine passende Modalität zu bestimmen. Obwohl hier der Raum für eine sorgfältige Erörterung dieses Problems nicht ausreicht, möchte ich, bevor wir zum nächsten Paragraphen übergehen, doch Hinweise geben.

Um nicht sogleich in eine Art Platonismus zu fallen, darf die Beweisbarkeit einer Behauptung natürlich nicht mit der Existenz eines entsprechenden Beweises – im klassischen, extensionalen Sinn von ‚existieren' – gleichgestellt werden. Denn dadurch würden die Beweise selbst zu idealen Gegenständen, die nicht alle für uns zugänglich sein müssten. Andererseits kann, wie sich bereits zeigte, die Beweisbarkeit einer Behauptung nicht darin bestehen, dass ein Beweis für sie bereits vorliegt oder spätestens zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft nachgereicht wird. Die Schwierigkeit liegt also darin, einen Mittelweg zwischen den Extremen zu finden.[334]

Sich aus begrifflichen Gründen dazu gezwungen sehen, einer Vermutung Wahrheit abzusprechen, nur um sie gleichsam im nächsten Augenblick, da ein Beweis für sie vorliegt, für wahr zu halten, mag verständlicherweise Unbehagen auslösen. Als Bertrand, um unser Beispiel wieder aufzunehmen, seine Vermutung äusserte, hatte sie sich in derart vielen Einzelfällen bereits bewahrheitet (siehe 2.2.2.4), dass alles für ihre Beweisbarkeit sprach. Wäre es nicht unangemessen, ihm vorzuwerfen, beim Postulieren ihrer Wahrheit eine Widersinnigkeit, einen begrifflichen Fehler begangen zu haben? Weitaus weniger problematisch ist es hingegen sich darauf festzulegen, dass eine mathematische Behauptung zu einer Zeit, als die Theorie, der sie angehört, nicht einmal angedacht war, keine Bedeutung und damit auch keinen Wahrheitswert besass. Zu sagen, dass, bevor die Menschen zählen konnten, jene Behauptung, die Bertrand viel später für wahr hielt,

---

und einen objektiven Wahrheitswert besitzen, wenn sie nur wohlgeformt sind: unabhängig davon, ob wir diesen Wahrheitswert jemals erkennen können.

[333] Vgl. Dummett (1963, S. 164): «The identification of mathematical truth with intuitive provability is thus not a possible constructivist standpoint, if ‹intuitive provability› is understood as meaning the *existence* of an intuitively correct proof in a sense weaker than that of our being in possession of such a proof». In späteren Schriften scheint Dummett jedoch die Möglichkeit eines Mittelwegs einzuräumen, vgl. Dummett (2000, S. 12).

[334] Gegen die Möglichkeit eines solchen Mittelwegs könnte man eine Variante von Fitchs *Paradox of Knowability* ins Feld führen und zu zeigen versuchen, dass aus der Annahme, wonach jede wahre Behauptung beweisbar ist (in Symbolen: $\forall\varphi(\varphi \to \diamond B\varphi)$), modallogisch folge, dass jede wahre Behauptung bereits bewiesen wurde ($\forall\varphi(\varphi \to B\varphi)$)). Dummett und andere haben jedoch gezeigt, wie sich die paradoxe Konklusion intuitionistisch vermeiden lässt. Für eine Diskussion verschiedener Lösungsvorschläge, vgl. Murzi (2010).

weder wahr noch falsch, sondern ganz und gar bedeutungslos war, erscheint der Sachlage durchaus angemessen.

Die Frage ist freilich, was es braucht – was für eine praktische und begriffliche Umgebung bereitstehen muss –, damit eine Behauptung wie die von Bertrand über die Verteilung der Primzahlen Bedeutung erlangt, und ob damit sogleich auch ihr Wahrheitswert bestimmt ist. Hier scharfe Grenzen zu erwarten, wäre illusorisch und solche zu ziehen, kaum hilfreich. Dennoch könnte es sich, wie mir scheint, als lohnenswerte Aufgabe für die Philosophie der Mathematik erweisen, diese Fragen an einzelnen und zunächst einfacheren Beispielen aus der Geschichte zu untersuchen. Auf dem Gebiet der Arithmetik etwa wäre zu fragen, was die Voraussetzungen dafür sind, dass Vermutungen über die Wahrheit und Falschheit von Gleichungen, die das Ergebnis einfacher Additionen zwischen natürlichen Zahlen ausdrücken ($a + b = c$, für $a, b, c \in \mathbb{N}$), ernsthaft aufgestellt werden können. Um den Wahrheitswert von solchen Gleichungen festzustellen, scheinen auf den ersten Blick das Beherrschen einer adäquaten Notation und das Addierenkönnen darin auszureichen. Einen elaborierteren Begriff von den natürlichen Zahlen, der auch ihre Unendlichkeit enthielte, braucht es nicht.

Mit zunehmenden arithmetischen Fähigkeiten und entsprechendem Ausbau einer operationalen Notation lassen sich jedoch sehr rasch Prädikate bilden und Aussagen über ihre Extension formulieren, bei denen es zweifelhaft wird, dass sie ohne eine enorme und nicht vorauszusehende Weiterentwicklung ihrer begrifflichen Umgebung einen bestimmten Wahrheitswert besitzen. Das Prädikat $a^n + b^n = c^n$ zum Beispiel ist auf so einfache Weise aus elementaren Operationen zusammengestellt, dass für ein initiales Verständnis der Aussage, es treffe für beliebige natürliche Zahlen a, b, c auf keine natürliche Zahl $n > 2$ zu, Kenntnisse aus der Schulzeit hinreichen. Aber wenngleich ein gewisses Verständnis für die Behauptung – d. i. für den erst 1994 durch Andrew Wiles bewiesenen Grossen Fermatschen Satz – selbst Schulkindern zugestanden werden kann, überwiegt doch bei Weitem die kaum überbrückbare Distanz, welche die allermeisten unter uns von einem Nachvollzug eines Beweises, geschweige denn von dem Entwurf eines eigenen trennt. Entsprechend wäre es zu einer Zeit, als das gesammelte arithmetische Wissen das heutige Schulwissen kaum überstieg, nicht sinnvoll, sondern lediglich ein glücklicher Treffer gewesen, die Wahrheit der Behauptung zu vermuten. Die begriffliche Umgebung, um einen ernsthaften Beweisversuch zu wagen, der auch einen Fortschritt bedeutet und nicht sogleich in Ratlosigkeit geendet hätte, war schlichtweg nicht vorhanden. Ins Blaue hinein Vermutungen anzustellen, nur weil man über die syntaktischen Fähigkeiten dazu verfügt, entspricht nicht derjenigen Art des Vermutens, die sich in der Mathematik bewährt hat.

III. Ob eine Behauptung nun bewiesen oder widerlegt werden soll – Beweise dienen dem Überzeugen. Indem der Beweis die notwendige Wahrheit einer Behauptung zeigt, erzwingt er ihre Anerkennung als ein Satz der Mathematik und die Ablehnung ihrer Negation. Wer sich oder andere davon überzeugen möchte, eine Behauptung als mathematische Wahrheit anzuerkennen oder sie abzulehnen, gibt einen entsprechenden Beweis.

Kommentar Der mathematische Beweis zeitigt auf eine ihm eigene Weise das Fürwahrhalten des Satzes, den er beweist. Anders als Befehle, Expertisen oder Offenbarungen kommt er ohne Autoritätsbezug aus. Auch muss man nicht, um das, was der Beweis zeigt, für wahr halten zu dürfen, darauf vertrauen, dass im Hintergrund fehlerfrei gearbeitet wurde, wie bei einem Rechner, der Zwischenschritte ausblendet und nur Ergebnisse anzeigt.[335] Ein Beweis muss in sich selbst all das offen und nachvollziehbar enthalten, was erforderlich ist, um in Subjekten mit hinreichendem Vorwissen und Können die gewünschte Wirkung zu erzielen. Wer ihn entworfen, wer ihn geprüft und für richtig befunden hat – all das ist für sein Wirken bloss zweitrangig. Der Beweis hat gewissermassen für sich selbst zu sorgen.

Selbstverständlich vermag kein Beweis losgelöst von allem andern für sich selbst zu sorgen. Nur innerhalb einer etablierten Praxis des Beweisens kann er seine Wirkung entfalten. Charakteristisch für die Wirkungsweise des mathematischen Beweises im Rahmen dieser Praxis ist, dass er überzeugt. Das Beweisbild ist, wie man sagen könnte, «ein Instrument des Überzeugens».[336] Es soll nicht einfach dazu bewegen, Sätze für wahr zu halten, sondern ihre notwendige Wahrheit überzeugend darlegen. Dafür müssen die Schritte, die das Bild zusammensetzen, einzeln – je für sich – nachvollziehbar sein. (Ausserdem müssen sie alle zulässig sein, d. h. sie dürfen keine unerlaubten Sprünge enthalten, keine logischen oder anderen etablierten Regeln verletzen und, wenn in ihnen neuartige Regeln zur Anwendung kommen, bedürfen diese der Rechtfertigung: siehe dazu den Kommentar zu Paragraph I.) Damit der Beweis zu überzeugen vermag, reicht dies jedoch nicht aus. Das Beweisbild muss *insgesamt* als stimmig wahrgenommen werden können:

[335] Bei Wittgenstein findet sich eine ähnliche Abgrenzung des Beweisens vom Rechnen. Das Bild des Beweisens ändere sich gänzlich, sobald es als blosses Rechnen, d. h. als schrittweises Transformieren von Zeichenfolgen, aufgefasst wird: «Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)» Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.8, S. 365.

[336] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, VII.72, S. 435.

Es muss in seiner Gesamtheit übersehbar sein. Und dafür müssen nicht nur auf jeder Strukturebene die relevanten Zusammenhänge zwischen den Bestandteilen nachvollziehbar, es muss auch das Zusammenspiel der verschiedenen Ebenen erkennbar sein. Um nur einen simplen Fall anzuführen: Wenn die Oberflächenstruktur des Beweises einem *modus ponens*, also einem Schluss der Form $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \vDash \psi$ entspricht, dann kann der Beweis nur überzeugen, wenn diese Form erkannt wird. Es genügt nicht, die Schritte, die zu $\varphi \rightarrow \psi$, und die Schritte, die zu φ führen, nachvollzogen zu haben; um ψ zu erreichen, bedarf es des Aufstiegs auf die nächsthöhere Ebene, auf der die Identität von φ mit dem Antezedens von $\varphi \rightarrow \psi$ ersichtlich wird. Ohne diese Feststellung wäre der *modus ponens* von ungültigen Schlussweisen, insbesondere von $\varphi \rightarrow \psi, \psi \vDash \varphi$, nicht zu unterscheiden.[337]

Selbst Frege, der in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* auf die «Lückenlosigkeit der Schlussketten» eher als auf ihre Übersichtlichkeit bedacht war, stellte seinen begriffsschriftlichen Ableitungen eine Skizze des Beweisgangs voraus.[338] Diese Skizzen sollten das Verständnis der Beweise, ihren Nachvollzug, *erleichtern*, indem sie der Leserschaft helfen, die zum Teil seitenlangen und ohne Worte auskommenden Schlussketten zu übersehen. Daraus folgt indessen nicht, dass die begriffsschriftlichen Beweise selbst unübersehbar und unverständlich wären, im Gegenteil, zumal sie sich mehr oder weniger übersichtlich darstellen lassen. Unübersehbar wären „Beweise", die überhaupt nicht übersichtlich dargestellt und auch nicht in eine solche Darstellung übertragen, mithin von uns nicht nachvollzogen, nicht verstanden werden *könnten*.

Durch einen Beweis überzeugt werden kann freilich nur, wer ihn versteht, und als Beweis verstehen können wir ein Bild nur, wenn wir es übersehen. Ein Bild, das wir nicht übersehen, kann uns nicht als Instrument des Überzeugens dienen. Wer aber einen Beweis verstanden hat, *sollte* sich, sofern ein Beweis wirklich vorliegt, von der notwendi-

[337] Für die detaillierte Untersuchung eines echten und nicht trivialen Beispiels – Erdős' Beweis des Satzes von Bertrand-Tschebyschow (siehe 2.3.1.3) – verweise ich auf Robinson (2000, S. 283-291). Obgleich Robinson keine philosophischen, sondern eher psychologische Fragen zu beantworten sucht, gelingt es ihm gut, die Lemmata, aus denen Erdős' Beweis zusammengesetzt ist, zu erläutern (u. a. mit Hilfe der Tabelle auf S. 285, die ein anschauliches Bild abgibt). Auch das Zusammenspiel der verschiedenen Strukturebenen, das dem Beweis Übersichtlichkeit und dadurch erklärende Kraft verleiht, wird aus seiner Beschreibung deutlich. (Auf den S. 285-289 wird das Zusammenspiel der Hauptlemmata, also sozusagen die Oberflächenstruktur beschrieben; auf den S. 289-291 wird dann die den Lemmata zugrundeliegende Idee skizziert.)

[338] «Die Beweise sind allein in den mit ‹Aufbau› überschriebenen Paragraphen enthalten, während die mit ‹Zerlegung› überschriebenen das Verständniss erleichtern sollen, indem sie vorläufig den Gang des Beweises in groben Umrissen vorzeichnen» Frege (1893, S. V). Weiter hinten im Werk heisst es dann, diese Zerlegungen dienten «nur der Bequemlichkeit des Lesers [...]; sie könnten fehlen, ohne dem Beweise etwas von seiner Kraft zu nehmen» Frege (1893, S. 70).

gen Wahrheit des bewiesenen Satzes überzeugen lassen haben. Wittgenstein meint nun gerade darin das Wesentliche in der Erfordernis der Übersichtlichkeit zu erkennen:[339]

> Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozess, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, dass diese Zahl herauskommt, vermerken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiss nicht: ‹was herauskommen *soll*›.
> «Der Beweis muss übersehbar sein» heisst eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich im Beweis ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, dass es sich so ergeben *muss*.

Mathematische Beweise liefern keine Indizien oder gute Belege für die Wahrheit eines Satzes, verleihen ihr keine erhöhte Wahrscheinlichkeit. Auf diejenigen, die mit der Praxis des Beweisens vertraut sind und die nötigen Kenntnisse besitzen, üben Beweise einmal nachvollzogen einen Zwang aus. Nicht aber wie Befehle: Der Beweis gebietet nicht, den Satz, den er beweist, als notwendige Wahrheit anzuerkennen. Er zwingt insofern dazu, als er einen zwingenden Grund dafür gibt.

Mit dem Beweis eines Satzes lässt sich demnach nicht nur die Frage, ob die Behauptung, die er beweist, wahr ist, beantworten, sondern auch eine Antwort auf die Frage geben, *weshalb* sie wahr sein muss (und damit auf die Frage, weshalb wir sie als notwendige Wahrheit anerkennen sollten). Von der sicherstellenden kann also eine *begründende* Funktion des Beweisens unterschieden werden, wenngleich beide eng miteinander verflochten sind. Frege schreibt dazu in seinen *Grundlagen der Arithmetik*:[340]

> Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück [...].

Diese Einsicht, die der Beweis gewährt, vermag ihre Überzeugungskraft in uns nur soweit zu entfalten, wie wir von den Wahrheiten, die der Beweis *nicht* beweist, sondern als gegeben annimmt, überzeugt sind. Und so mag es den Anschein haben, als müsse die Wahrheit der ganzen Mathematik letztlich auf einigen Urwahrheiten beruhen, «die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind».[341]

[339] Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, I.154, S. 95; III.39, S. 170.
[340] Frege (1884, S. 2).
[341] Frege (1884, S. 4).

Freges Unterfangen, die letzten Urwahrheiten der Arithmetik zu finden, war seinem «Wurzeltrieb» geschuldet: dem Drang zu wissen, «worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens»[342] ihrer Sätze beruht. Dieser tiefste Grund, auf dem sich alles andere stützt, war indes mit arithmetischen Sätzen, selbst mit denen elementarster Art, keineswegs erreicht. Für die logizistischen Augen erwiesen sich sogar einfache Gleichungen wie $5 + 7 = 12$ als eines Beweises bedürftig. Jene Urwahrheiten, zu denen Frege und nach ihm Russell und Whitehead vorgestossen waren, konnten die Erwartungen jedoch nicht erfüllen: entweder, weil sich aus ihnen (wie aus Freges Grundgesetzen) ein Widerspruch ableiten liess, oder, weil ihnen (wie dem Axiom der Reduzierbarkeit bei Russell und Whitehead) das typische Merkmal der rein logischen Wahrheiten fehlte und für ihre Anerkennung als Axiome nichts anderes sprach, als dass aus ihnen ebenjene elementaren Wahrheiten, von denen man auch ohne logischen Unterbau längstens überzeugt war, bewiesen werden konnten.[343]

In Ermangelung eines Systems selbsteinleuchtender Grundsätze, aus dem sich erwiesenermassen alles Erwünschte, aber – verbürgt durch einen Widerspruchsfreiheitsbeweis – nicht alles Erdenkliche ableiten lässt, müssen wir lernen, mit der Möglichkeit von Widersprüchen zu leben (wie in der inkonsistenten Mathematik, siehe Anm. 326), oder aber bestreiten, dass eine Theorie wie die Arithmetik mit ihren elementaren, ja nachgerade trivialen Wahrheiten überhaupt einer solchen Grundlegung bedarf.[344] Die zweite Option wählend könnte man sagen, einfache Gleichungen seien zwar auf gewisse Axiome rückführbar und insofern eines Beweises fähig, deswegen aber noch lange nicht eines solchen bedürftig. Wer aufrichtige Zweifel an einer als trivial geltenden Wahrheit hegt, erlerne zuerst die Technik, die dem Satz zugrunde liegt (zum Beispiel das Einmaleins bei Gleichungen wie ‚$5 + 7 = 12$'), oder studiere noch einmal die relevanten Definitionen (man denke hier an Sätze wie ‚Der grösste gemeinsame Teiler zweier Primzahlen ist die 1').

[342] Frege (1893, S. XIII) und Frege (1884, S. 3).

[343] In Mancosu (2001, S. 104-105) wird Russell in der Frage, welche Kriterien bei der Wahl der Axiome zur Anwendung kommen dürfen, eine Form von «h-inductivism» zugeschrieben: «the acceptance of axioms for a mathematical discipline might be motivated not by criteria of evidence and certainty but rather, like hypotheses in physics, by their success in deriving and systematizing a certain number of familiar consequences» (S. 103). Hätte Russell aber diese Position nach der Fertigstellung der *Principia Mathematica* weiterhin vertreten, hätte er Wittgensteins Kritik am Axiom der Reduzierbarkeit entkräften können, zumal das Axiom durchaus erfolgreich Russells verzweigtes Typengebäude aufrecht erhält. In seiner Einleitung zur zweiten Ausgabe der *Principia* hält Russell jedoch fest: «One point in regard to which improvement is obviously desirable is the axiom of reducibility [...]. This axiom has purely pragmatic justification: it leads to the desired results, and to no others. But clearly it is not the sort of axiom with which we can rest content» Whitehead und Russell (1910, S. xiv). Vgl. dazu Linsky (2011, S. 128-134).

[344] Für eine aktuelle Besprechung pluralistischer Ansätze (Putnam, Wittgenstein) sowie grundlagenkritischer Positionen (Rav, Lakatos), vgl. Wagner (2019).

Sich auf solche Weise der Wahrheit einer Behauptung zu vergewissern, ist gegenüber dem Beweisen nicht minderwertig, im Gegenteil, setzen doch Beweise das Beherrschen zahlreicher Techniken und die Kenntnis gängiger Definitionen und Lemmata voraus.

Indessen bleibt die begründende Funktion des Beweisens auch bestehen, wenn die Forderung nach einer axiomatischen Grundlegung der Mathematik fallengelassen wird. Einen Satz begründen, heisst dann nicht, ihn auf die ihm zugrundeliegenden Urwahrheiten zurückführen, sondern seinen Zusammenhang mit anderen, bereits sichergestellten Sätzen zeigen.[345] Offenbar zeigen verschiedene Beweise desselben Satzes verschiedene Zusammenhänge auf, sodass ein Satz, der auf unterschiedlichen Beweiswegen erreichbar ist, besser beleuchtet, verständlicher erscheint. Es liegt nun nahe anzunehmen, dass einem solchen Verständnisgewinn nachgestrebt wird, wenn bereits bewiesene Sätze stets aufs Neue bewiesen werden, bis letztlich ihr trivialer Wahrheitskern offenliegt. Dabei handelt es sich freilich um keinen Wurzeltrieb hin zu den Urwahrheiten, wie Frege ihn sich für die Mathematik gewünscht hätte, sondern um den Drang, Sichergestelltes in offensichtliche, von allem Rätselhaften geklärte und entsprechend vertraute Gewissheit zu verwandeln.

In der zeitgenössischen Literatur wird diese zweite Funktion des Beweisens, die vorhin als begründende charakterisiert wurde, oft unter dem Begriff der *mathematischen Erklärung* abgehandelt. Robinson zum Beispiel schreibt: «For the most part (although sometimes a proof may establish its result without affording an explanation why it holds) a proof does indeed seem to have two different roles: to be a proof-as-guarantee and to be a proof-as-explanation».[346] Da der Beweis eines Satzes auch eine mögliche Antwort auf die Frage gibt, weshalb er wahr sein muss, ist es nicht unzutreffend, von einer *erklärenden* Funktion des Beweisens zu sprechen. Gerade wenn die Frage nach den Grundlagen der Mathematik nicht im Vordergrund steht, liegt es nahe, eher als ein Erläutern oder Erklären zu charakterisieren, was Frege und anderen als ein Begründen erschien. Allerdings muss darauf geachtet werden, nicht Unterschiedliches zu vermengen. Wie es übersichtlichere und weniger übersichtliche, aber keine unübersehbaren Beweise gibt, so mag es Beweise von grösserer und solche von geringerer Erklärungskraft geben, aber keinen Beweis, der die Wahrheit des Satzes, den er beweist, in keiner Weise begründete, sondern gleichsam nur sagte: „Dieser Satz ist wahr, glaube mir!“ Wenn Robinson indes

[345] Dieser Sichtweise entspricht am ehesten eine kohärentistische Wahrheitstheorie. Wie mir scheint, könnte sich eine solche Theorie nicht nur mit dem weiter oben (im Kommentar zu Paragraph II) angedeuteten Wahrheitskriterium vertragen, sondern auch mit schwächeren Formen des (Neo-)Logizismus. Für Letzteres, vgl. Tennant (2017).

[346] Robinson (2000, S. 279).

zugesteht, dass mancher Beweis seinen Satz als mathematische Wahrheit sicherstellt, ohne jedoch zu erklären, weshalb er wahr sei, dann hat er eine (steigerbare) *Eigenschaft* im Sinn, die gewisse Beweise besitzen, andere hingegen nicht – und nicht eine *Funktion*, die jeder Beweis *qua* Beweis erfüllt.[347]

Unbestreitbar scheint mir jedenfalls die Feststellung, dass durch Beweise nicht nur neue Wahrheiten erschlossen werden, sondern auch das Verständnis dieser Wahrheiten eine Erweiterung, mitunter eine Vertiefung erfährt. Eine Behauptung, dessen Beweis wir nachvollziehen konnten, verstehen wir insofern besser, als wir einen Weg kennen, der sie mit anderen Wahrheiten unauflöslich verknüpft und auf dem wir jederzeit zwischen ihnen hin und her wandeln können. Bei einer noch unbewiesenen Behauptung dagegen ist nicht ohne Weiteres auszuschliessen, dass dereinst ein Weg von ihr aus in den Widerspruch führen, sie sich mithin als notwendige Falschheit erweisen wird. Gleichwohl wäre es falsch zu sagen, dass erst der Beweis einer Behauptung uns erlaubt, sie zu verstehen. Denn wir verstehen gewiss auch widerlegte Behauptungen. Und um überhaupt etwas beweisen zu können, müssen wir Unbewiesenes verstehen, zumal das Verstehen einer mathematischen Behauptung – das Erfassen ihrer Bedeutung – darin besteht, einen Beweis oder eine Widerlegung für sie erkennen zu können (siehe den Kommentar zu Paragraph II).

Fassen wir das Wichtigste zusammen. *Dass* ein Satz wahr sein muss, zeigt der mathematische Beweis, indem er einen Weg beschreibt, *wie* man ausgehend von anerkannten Wahrheiten zu dieser Einsicht gelangt. Er gibt eine Anleitung, wie wir uns selbst von der Wahrheit dieses Satzes überzeugen können. Nicht selten indes kommt es vor, dass der Weg, welcher historisch als erster beschritten wurde, schwierig, abwegig oder zufällig erscheint, sodass sein Nachvollzug Probleme bereitet und man sich zwar überzeugen liess, mithin um die Wahrheit des Satzes weiss, die Gründe dafür aber nicht klar angeben kann, da man nicht gut genug versteht, weshalb der Satz wahr ist. Immer neue Beweise

[347]Tatsächlich ist die Unterscheidung von Beweisen, die erklären, und solchen, die nicht erklären, ein wiederkehrender Topos in der Geschichte der Mathematik, wenngleich nur wenig Übereinstimmung darüber herrscht, wie die Unterscheidung zu ziehen ist. In Mancosu (2001) findet sich der Versuch, die Unterscheidung an drei verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras zu illustrieren (S. 98-100) und aus Bemerkungen anderer Autoren zu rekonstruieren (S. 101-108). Wegen der Mehrdeutigkeit des Ausdrucks ‚Erklärung', und auch weil es von individuellem Vorwissen und Können abhängt, ob ein Beweis erklärend wirken kann oder nicht, scheint sich am Ende der Bestandsaufnahme eher die Frage aufzudrängen, ob hier nicht vielmehr verschiedene Unterscheidungen zusammengeworfen werden. Als Paradebeispiele nicht-erklärender Beweise werden in Rota (1997) Verifizierungen angeführt, d. s. Beweise durch Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle. Obwohl das Verlangen, die Gründe für die Wahrheit eines Satzes zu kennen, mit seiner blossen Verifizierung gewiss nicht immer zu befriedigen ist, wäre es, wie mir scheint, falsch zu verneinen, dass mit der Auflistung und Prüfung aller möglichen Fälle kein Verständnisgewinn, etwa in Form einer Übersicht, einhergeht. Ausserdem braucht es ja noch den Nachweis, dass die Auflistung vollständig ist – dass wirklich alle Fälle berücksichtigt wurden –, was zur Begründung des so gewonnenen Satzes durchaus beiträgt.

desselben Satzes können nun – indem sie etwa kürzere oder begrifflich einfachere Wege anzeigen und uns triftigere Gründe geben, den Satz für wahr zu halten – dazu beitragen, diesen immer besser zu verstehen. Da mit der Zeit stets neue und kürzere Wege aus diversen Richtungen kommend das begriffliche Terrain überziehen, das den Satz umgibt, wird dieser immer näher an wohlbekannte und leicht einzusehende Wahrheiten gerückt – wird er immer vertrauter –, bis sich schliesslich seine eigene Wahrheit, sich der Satz selbst trivial ausnimmt.

Das Verstehen mathematischer Sätze erschöpft sich folglich nicht im Wissen um Satzbedeutungen und Wahrheit. Wer einen „tiefen“ Satz wie etwa den Primzahlsatz wirklich verstehen möchte, wird sich nicht mit dem erstbesten Beweis zufrieden geben. Der Ausdruck ‚verstehen‘ kann hier freilich nur vage gebraucht werden, denn Beweise können durchaus verschiedene Weisen des Verstehens befördern und dies in unterschiedlichen Ausmassen. In den folgenden Unterabschnitten werden sich unsere Betrachtungen auf Beweise einer bestimmten Art beschränken: auf solche, die mit möglichst elementaren Beweismitteln auskommen. Denn von elementaren Beweisen erhoffen sich manche ein tieferes Verständnis der durch sie bewiesenen Sätze, bessere Erklärungen dafür, weshalb sie wahr sind, weil sie nichts Fremdes, nichts weit Entferntes in die Beweisführung einfliessen lassen. Bevor wir uns jedoch den elementaren Beweisen zuwenden, gilt es im letzten Paragraphen dieses Unterabschnitts darzulegen, inwiefern sich die Funktion des Beweisens nicht darin erschöpft, *einzelne Subjekte* von der Wahrheit oder Falschheit gewisser Behauptungen zu überzeugen.

IV. Der mathematische Beweis hebt aus den bezweifelbaren Behauptungen eine heraus, um sie als Satz sicherzustellen, ihr diejenige Gewissheit zu verleihen, die sie in den Rang eines Theorems erhebt. Die Gewissheit, von der hier die Rede ist, bezeichnet nicht primär eine psychische Verfasstheit, sondern eine besondere Stellung innerhalb (wie auch ausserhalb) der Mathematik, die der Beweis dem Satz, den er beweist, durch seine Beweiskraft verschafft. Zu dieser Stellung gehört, dass, wenn ein Beweis einer Behauptung vorliegt und als Beweis dieser Behauptung anerkannt wird, an ihr kein (vernünftiger) Zweifel mehr möglich ist. Der mathematische Satz ist dem Zweifel entzogen. Aufgrund seiner Stellung darf er ohne Weiteres als Lemma, d. h. als Hilfssatz, in anderen Beweisen verwendet werden. Oder vielleicht treffender: Dass er ohne Weiteres als Lemma verwendet wird, zeigt seine allgemeine Anerkennung als ein Satz der Mathematik, seine besondere Gewissheit.

Kommentar Die Quellen für diese Darstellung des Zusammenhangs von Beweis und Gewissheit sind in Wittgensteins späterer Philosophie zu finden, vornehmlich in den in *Über Gewissheit* versammelten Bemerkungen. Obwohl das Hauptaugenmerk dieser Sammlung nicht auf der besonderen Gewissheit des mathematischen Satzes liegt, kommt sie doch an mehreren Stellen zur Sprache, oft zu Vergleichszwecken, sodass sich am Ende ein facettenreiches Bild ergibt.[348] In einer dieser Bemerkungen wird die Sonderstellung mathematischer Sätze zwar mit anderen Begriffen und Metaphern beschrieben als hier, der Sache nach gleichwohl ganz ähnlich wie vorhin:[349]

> Dem mathematischen Satz ist gleichsam offiziell der Stempel der Unbestreitbarkeit aufgedrückt worden. D. h.: ‹Streitet euch um andre Dinge; *das* steht fest, ist eine Angel, um die sich euer Streit drehen kann›.

Zwei Bemerkungen später[350] heisst es dann, die Sätze der Mathematik seien Petrefakten: derart versteinert also, dass sie – wie sich die Welt der Tatsachen um sie herum auch verändert – keinen Wandel ihres Wahrheitswerts von wahr zu falsch zulassen. Dieses Feststehen, diese Unbeweglichkeit des mathematischen Satzes unterscheidet ihn von anderen Gewissheiten wie etwa der, dass ich R. B. heisse oder nie auf dem Mars war. Denn nicht nur könnten zukünftige Entwicklungen Sätze wie diese falsch werden lassen, solchen Gewissheiten kommt innerhalb ihrer Gebrauchsumgebung nicht dieselbe offizielle Stellung zu wie einem Theorem innerhalb der Mathematik.[351] Worin aber besteht diese besondere Stellung des mathematischen Satzes und wie wird sie ihm verliehen?

Zweifel oder Uneinigkeiten über die Wahrheit von Behauptungen werden in der Mathematik durch Beweise ausgeräumt. Wer den „Streit“ um eine Behauptung für sich entscheiden möchte, liefere einen Beweis, der die anderen überzeugt. Damit aber der Streit entschieden, mithin die Behauptung oder ihre Negation bewiesen werden kann, müssen andere Behauptungen als unbestrittene und unumstössliche Wahrheiten aner-

[348] Vgl. Wittgenstein, *Über Gewissheit*, S. 127-30, 143, 186, 209, 233, 251-253. Vgl. auch Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, III.39, S. 170.

[349] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 655, S. 252.

[350] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 657, S. 253.

[351] Vgl. für Teile dieser Lesart Schulte (2005, S. 64): «[Wittgenstein] does not wish to say that there is no real difference between mathematical propositions, for instance, and certain empirical ones that are regarded as ‹*incontrovertible*› (OC 657). He says that mathematical propositions have, ‹as it were officially, been given the stamp of incontestability› (OC 655). They might be called ‹fossilized› (OC 657), whereas a proposition like ‹I am called J.S.› should, even though it is correctly regarded as incontrovertible, not be so called. These two types of propositions have something in common, namely their apparent incontestability, but they play importantly different roles. One type is *officially* exempted from doubt; the other one does not do any official job at all» (‚OC‘ steht für ‚On Certainty‘, den englischen Titel der Textsammlung, die Zahlen für die Nummer der Bemerkung, aus der zitiert wird).

kannt werden und zwar von allen Beteiligten. Die Angelfunktion mathematischer Sätze zeigt sich denn auch in ihrer allgemein akzeptierten Verwendung als Lemmata zur Entscheidung offener Streitfragen (d. h. in Beweisen für andere Sätze). Für diese Verwendung ist es unerlässlich, dass der Stempel, der die Unbestreitbarkeit anzeigt, nach aussen hin als ein offizielles, durch die mathematische Gemeinschaft beglaubigtes Kennzeichen erkennbar ist und nicht bloss das Zeichen eines subjektiven Urteils. Ist ein Streit einmal beigelegt, eine Behauptung anerkanntermassen bewiesen, wird ihr, um zukünftige Fragen zu entscheiden, derselbe offizielle Stempel aufgedrückt. Dadurch ist die Behauptung als mathematischer Satz gekennzeichnet und dem Zweifel entzogen. Wer dann noch ihre Gewissheit bezweifeln möchte, muss zeigen, dass der Versuch, der als ihr Beweis anerkannt wurde, in Wahrheit scheitert und keinen Beweis für sie darstellt.

Obgleich die Gewissheit bewiesener Behauptungen mit Gemütszuständen bestimmter Subjekte in einer gewissen Beziehung steht – der Beweis soll ja überzeugen und als solcher möglichst von allen anerkannt werden –, korreliert sie durchaus nicht immer mit diesen. Das Nachvollziehen eines Beweises durch ein geeignetes Subjekt mag zwar oft «völlige Überzeugung, die Abwesenheit jedes Zweifels» und mithin *subjektive* Gewissheit über die Wahrheit des bewiesenen Satzes bewirken.[352] Doch der Versuch, einen Beweis nachzuvollziehen, kann freilich scheitern, sodass das Subjekt keine Gewissheit erlangt oder sogar irrtümlicherweise den Beweis anstelle des Nachvollzugs für gescheitert und den Satz für womöglich falsch befindet. Umgekehrt kommt es vor, dass ein erfolgloser Beweisversuch (d. i. etwas, was die Kriterien an einen Beweis *nicht* erfüllt) fälschlicherweise für ein Beweis gehalten wird, sodass sich subjektive Gewissheit über die Wahrheit einer unbewiesenen Behauptung, womöglich eine Falschheit, einstellt.

Die Gewissheit des mathematischen Satzes ist also keine subjektive, verbürgt etwa durch eine besonders klare und deutliche Einsicht (um ein Kriterium aus der Tradition aufzugreifen). Sie ist, wie man geneigt sein könnte zu sagen, *objektiv.* Was heisst das aber, etwas sei objektiv gewiss? Dass im Gegensatz zur subjektiven Gewissheit «ein Irrtum nicht möglich ist».[353] Und ein weiterer wichtiger Unterschied, auf den Wittgenstein hinweist, ist der, dass sich über objektive Gewissheit – «darüber, ob etwas gewiss *ist*»[354] – streiten lässt. Tatsächlich geschieht es öfter, als man vielleicht meinen könnte, dass mit mathematischen Argumenten darüber gestritten wird, ob es sich bei dem vorgeschlagenen Versuch, eine Behauptung zu beweisen, um einen Beweis handelt oder nicht. Hingegen erschiene es aus mathematischer Sicht vollkommen belanglos, andere

[352] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[353] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 194, S. 159.
[354] Wittgenstein, *Über Gewissheit*, § 273, S. 173.

von der *eigenen* Gewissheit (davon, dass man sich eines bewiesenen Satzes wirklich gewiss genug sei) überzeugen zu wollen. Wittgensteins Hinweise deuten also in die richtige Richtung, beleuchten aber noch zu wenig den Zusammenhang zwischen der Überzeugung Einzelner und der Gewissheit des mathematischen Satzes. Die Betrachtung zweier entgegengesetzter Szenarien hilft uns weiter.

Es ist nicht undenkbar, dass der Beweis einer Behauptung, obwohl er irgendwo auf Papier tatsächlich existiert, fast allen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft unbekannt geblieben ist, oder dass sie diesem fälschlicherweise das Beweissein absprechen. Die Situation überblickend, würde man in solchen Fällen sagen, dass der Behauptung die für die Mathematik typische Gewissheit fehlt, auch wenn man sich selbst durch den Nachvollzug des Beweises von ihrer Wahrheit überzeugen und jeden Zweifel beseitigen konnte. Einzelne mögen die Behauptung zwar zu Recht für eine Gewissheit halten, aber weil zu wenige ihren Beweis kennen oder sich von ihm überzeugen liessen, ermangelt es ihr insgesamt doch des offiziellen Stempels, der sie als mathematischen Satz auszeichnete. Umgekehrt kann es vorkommen, dass eine unbewiesene, ja sogar unbeweisbare Behauptung von sehr vielen Mitgliedern der mathematischen Gemeinschaft für bewiesen gehalten wird. Wer um die Fehlerhaftigkeit des vorgeschlagenen Beweisversuchs wüsste, würde gleichwohl sagen wollen, dass die Behauptung keine Gewissheit darstellt und sie fälschlicherweise in den Rang eines mathematischen Satzes erhoben wurde, selbst wenn die Anzahl derer, die ihr diesen Rang zusprechen, überwältigend ist.

Offenbar liegt eine Spannung in und zwischen diesen Aussagen. Es macht den Anschein, als seien verschiedene Kriterien am Werk, wenn über die Gewissheit mathematischer Behauptungen geurteilt wird. Um diese Spannungen aufzulösen, gilt es daher zwei Sachlagen zu unterscheiden und ihren Zusammenhang zu untersuchen:

(i) das Vorliegen eines Beweises für eine Behauptung, d. h. eines Texts, Diagramms oder anderer Darstellungen, worin ihre notwendige Wahrheit gezeigt wird;

(ii) die breite Anerkennung einer Behauptung als mathematischen Satz, d. h. insbesondere die Akzeptanz ihrer Verwendung als Lemma in Beweisen, Definitionen etc.

Normalerweise folgt auf den Beweis einer Behauptung, nach dessen Prüfung durch geeignete Mitglieder der mathematischen Gemeinschaft, bald ihre breite Anerkennung als ein neuer Satz der Mathematik. In der Regel zieht also das Eintreten der ersten Sachlage mehr oder weniger zeitnah das der zweiten nach sich.

Die vorherigen Betrachtungen haben jedoch gezeigt – und die folgenden Beispiele aus der Mathematikgeschichte werden es bestätigen – dass es durchaus Ausnahmen zum normalen Ablauf geben kann. Sollte Fermat einen Beweis für den nach ihm benannten Grossen Satz entgegen aller Wahrscheinlichkeit tatsächlich besessen haben, dann erfüllte dieser Satz vor 1994 die erste, nicht aber die zweite Bedingung. In der gleichen, vielleicht nicht ganz so unwahrscheinlichen Lage könnte sich zurzeit die ABC-Vermutung befinden. Womöglich liegt hier aber auch der Fall eines privaten oder esoterischen „Beweises“ vor.[355] Das Vier-Farben-Theorem dagegen erfüllte elf Jahre lang nur die zweite Bedingung. Obwohl Alfred Kempes Beweisversuch von 1879 für korrekt befunden wurde und auf breite Anerkennung stiess, konnte Percy Heawood in einem 1890 veröffentlichten Papier zeigen, dass Kempes Versuch fehlerhaft, die Vermutung mithin nicht bewiesen war.[356]

In Anbetracht solcher Beispiele liegt es nahe, das Kriterium für mathematische Gewissheit an der Erfüllung *beider* Bedingungen festzumachen: dem Vorliegen eines Beweises und der breiten Anerkennung als Satz der Mathematik infolge dieses Beweises. Bewiesene Behauptungen sind demnach erst mit ihrer breiten Anerkennung in Stein gemeisselt; breite Anerkennung allein aber reicht nicht aus, ihr muss ein Beweis zugrunde liegen, damit sich mathematische Gewissheit einstellt. Doch woher wissen wir, dass sich die mathematische Gemeinschaft in Bezug auf die erste Bedingung jeweils nicht irrt und in Wahrheit bloss ein fehlerhafter Beweisversuch vorliegt? Die Antwort auf diese Frage ist freilich, dass sie sich manchmal irrt, wie dies zum Beispiel beim Vier-Farben-Theorem zwischen 1879 und 1890 der Fall war. Dies eröffnet jedoch nicht die Möglichkeit, dass sich alle immer geirrt haben und sich eines Tages herausstellt, dass niemandem je ein richtiger Beweis gelungen ist und also alle mathematischen Sätze, die man für bewiesen hielt, in Wahrheit ihres Beweises noch harren.

Gedankenspiele wie diese entspringen der konfusen Vorstellung eines Beweisbegriffs, der – obschon wir seine Anwendungskriterien zu beherrschen glauben – unseren bisherigen Gebrauch übersteigt. Dem steht die tatsächliche Anwendung des Begriffs innerhalb einer Praxis des Beweisens entgegen, die sich in vieler Hinsicht bewährt hat. Eine der Annahmen, die dieser Praxis zugrunde liegt, ja sie in der Form, wie sie gelebt wird, überhaupt erst ermöglicht, ist die, dass sich die breite Anerkennung eines mathematischen Satzes im Regelfall aus dem prüfenden Nachvollzug eines entsprechenden Beweises

[355] Vgl. Castelvecchi (2020).
[356] Vgl. Wilson (2014, Kap. 5-7).

ergibt und nur in seltenen und – das ist der ausschlaggebende Punkt – korrigierbaren Fällen infolge eines mangelhaften Versuchs.

Von dem radikalen Zweifel, der einer philosophischen Behandlung bedarf, lässt sich also ein pragmatischer Zweifel unterscheiden, der seine Berechtigung im Wissen um die punktuelle Fehlbarkeit der mathematischen Gemeinschaft hat. Ein Weg, pragmatische Zweifel auszuräumen, besteht darin, immer neue und, wenn möglich, immer klarere, einfachere, übersichtlichere Beweise für die fragliche Behauptung zu geben, bis die Möglichkeit, dass sich alle vorgelegten Versuche als fehlerhaft erweisen, praktisch ausgeschlossen werden kann und auch in den letzten Zweiflern die unerschütterliche Gewissheit darüber herangereift ist, dass es sich um eine Wahrheit handelt. Man könnte daher annehmen, dass vielfaches Beweisen desselben Satzes dem Bestreben geschuldet sei, die Erfüllung der ersten der obigen Bedingungen, d. i. das tatsächliche Vorliegen eines Beweises, sicherzustellen. Die gleich folgenden Digressionen in die Mathematikgeschichte werden diese Annahme widerlegen, zumal die immer neuen Bemühungen, den Satz von Bertrand-Tschebyschow oder den Primzahlsatz abermals zu beweisen, auch dann noch fortgesetzt wurden, als es an ihren Beweisen längst nichts mehr zu bezweifeln gab und sich die Behauptungen selbst zu anerkannten und als solchen verwendeten Sätzen verfestigt hatten. Für das vielfache Beweisen werden sich denn auch andere, mit der Zeit dominierende Beweggründe manifestieren. Bevor wir uns gleich der Beweisgeschichte dieser beiden Sätze zuwenden, sei noch ein letzter Punkt erwähnt.

Eine zweite, bereits erwähnte Annahme, die der mathematischen Beweispraxis zugrunde liegt, ist die, dass Beweise in der Regel überzeugen: dass also, nachdem ein Beweis vorgelegt wurde, dieser nicht nur die nötige Verbreitung findet und einer Prüfung unterzogen wird, sondern die Schlüsselpersonen der jeweiligen Disziplin von der Wahrheit der bewiesenen Behauptung auch überzeugt. Wäre dem nicht so, könnte die Mathematik nicht sein, was sie ist – wäre sie vielleicht der Philosophie ähnlicher. Unter diese zweite Grundannahme fällt nun auch die Forderung der Mitteilbarkeit und Nachvollziehbarkeit von Beweisen (auf die bereits im Kommentar zu Paragraph I hingewiesen wurde). Denn, was nur einem Subjekt oder einem esoterischen Kreis von Eingeweihten verständlich bleiben muss, hätte zur Praxis des Beweisens nichts beizutragen.

2.3.1.3. Die vielen Beweise von Bertrands Vermutung

Nachdem Tschebyschow 1850 den ersten Beweis vorgelegt hatte, blieb es zunächst ruhig um die zum Satz avancierte Vermutung von Bertrand (siehe 2.2.2.4). Dass ab der 2 zwischen jeder natürlichen Zahl und ihrem Zweifachen mindestens eine Primzahl zu liegen kommt, stand jetzt fest. Der Satz konnte nun weiteren Untersuchungen als Lemma dienen und nicht mehr nur als Postulat, wie es bei der Verwendung durch Bertrand noch der Fall gewesen war. Desgleichen konnte er als Korollar aus anderen Ergebnissen folgen. 1892 bewies James Joseph Sylvester den allgemeineren Satz, wonach es unter den natürlichen Zahlen $n, n+1, n+2, ..., n+k-1$ mindestens eine gibt, die einen Primteiler grösser als k enthält, sofern $n > k$. Unter der zusätzlichen Bedingung, dass $n = k+1$, ergibt sich als Spezialfall der Satz von Bertrand-Tschebyschow.[357]

Die Mathematikergilde gab sich indes weder mit Tschebyschows Beweis noch mit Sylvesters allgemeinerem Theorem zufrieden. So legte Edmund Landau in seinem berühmten *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* eine vereinfachte und kürzere Variante von Tschebyschows Beweisgang vor.[358] Da sie ohne unendliche Summen oder Reihen sowie ohne Funktionen komplexer Variablen auskommt, ordnete Landau seine eigene Version den *elementaren* Beweisen zu.[359] Srinivasa Ramanujan jedoch befand den einfacheren Beweis Landaus für im Wesentlichen identisch mit dem von Tschebyschow und schlug 1919 einen ganz eigenen und kürzeren Beweis vor, den er als viel einfacher bezeichnete.[360] Allerdings erkaufte sich Ramanujan die Kürze durch den Einsatz von vergleichsweise voraussetzungsreichen Hilfsmitteln aus dem Gebiet der Analysis. An entscheidender Stelle erfolgt eine Abschätzung mittels der Γ-Funktion (einer Erweiterung der Fakultätsfunktion auf reelle oder komplexe Argumente) sowie der Stirlingformel, mit der sich Näherungswerte für die Γ-Funktion berechnen lassen.[361]

Einen Beweis, der ohne solche Hilfsmittel auskommt, lieferte dann 1932 der neunzehnjährige Paul Erdős in seiner ersten Veröffentlichung.[362] Ramanujans elegante Beweisführung war ihm zunächst unbekannt geblieben, sodass er erst nach Fertigstellung seines Papiers die Ähnlichkeit feststellte. Rückblickend bemerkte Erdős, dass sein Beweis gegenüber dem Ramanujans vielleicht doch den Vorzug habe, arithmetischer zu sein.[363]

[357] Sylvester (1892). Vgl. dazu auch Erdős (1934, S. 282).

[358] Landau (1909, S. 89-92).

[359] Unter «elementaren Methoden» versteht Landau solche, die nur mit endlichen Summen operieren. Zugleich nimmt er sich aber heraus, für die Abschätzung dieser Summen «die Hilfsmittel der Integralrechnung zu benutzen», vgl. Landau (1909, S. VII). Anders, als mitunter behauptet wird (vgl. etwa Boolos u. a. (2007, S. 238)) kommt, wie mir scheint, bereits Tschebyschows Beweis ohne Funktionen komplexer Variablen aus. Vgl. dazu auch Narkiewicz (2000, S. 104); Goldstein (1973, S. 606 f.).

[360] Ramanujan (1919).

[361] Erst 2013 lieferten Jaban Meher and M. Ram Murty eine Variante des Beweises von Ramanujan, die ohne Stirlingformel auskommt, vgl. Meher und Murty (2013).

[362] Erdős (1932).

[363] Erdős (1998, S. 81). Im Papier von 1932 wird zwar Ramanujans Beweis erwähnt, das sei aber einer Überarbeitung durch László Kalmár geschuldet, wie Erdős klarstellt.

Zumindest in dieser Hinsicht also war Erdős' Beweis, wie man hinzufügen möchte, elementarer ausgefallen.

Dieser Bericht über das Streben nach immer kürzeren, einfacheren oder elementareren Beweisen für den Satz von Bertrand-Tschebyschow liesse sich leicht fortsetzen.[364] Für unsere Zwecke hier reicht es, zusammenfassend festzuhalten, dass zu Beginn des 20. Jahrhunderts stets neue Beweisvarianten ihren Weg in die Fachzeitschriften fanden, *obwohl* sich Bertrands Vermutung längst als wohlbekannter und völlig unumstrittener Satz der Zahlentheorie etabliert hatte. Nichts daran ist ungewöhnlich. Das vielfache Beweisen längst sichergestellter Sätze ist ein in der Mathematik weit verbreitetes Phänomen.

Darüber hinaus ist festzustellen, dass Vereinfachungen von der Art, wie sie Erdős gelungen waren, auf besondere Anerkennung stiessen. 1950 erhielt Atle Selberg sogar die Fields-Medaille für seinen elementaren Beweis eines anderen, noch wichtigeren, aber ebenfalls schon längst bewiesenen Satzes aus derselben Theorie: des Primzahlsatzes (d. i. des bei Rota erwähnten *prime number theorem*, siehe 2.3.1.1). Auch Erdős legte zu dieser Zeit einen fast identischen und ebenso elementaren Beweis für diesen Satz vor.[365] Gefragt waren (und sind) also nicht irgendwelche neuen Beweise, sondern solche, die mit möglichst elementaren Mitteln geführt werden.

Doch weshalb nur sind elementare Beweise so begehrt, fragt sich, zumal das Streben nach Elementarität mitunter zu Einbussen in Hinblick auf Kürze oder Einfachheit führt? Wie Rota bemerkt, fielen die Beweisführungen von Selberg und Erdős für den Primzahlsatz länger aus und waren schwieriger nachzuvollziehen als alle vorangegangenen Beweise des Satzes.[366] Erst Mitte der 1960er Jahre sei ein Beweis gelungen, der sich ausschliesslich elementarer Mittel bedient und trotzdem „leicht“ nachvollziehbar ist, d. h. «one that can be followed by careful reading by anyone with no more knowledge of mathematics than that of undergraduates at an average American college». Danach habe die Suche nach weiteren Beweisen nachgelassen.[367]

[364] Weitere Beweise sind in Narkiewicz (2000, S. 116) erwähnt. (Das ganze Kapitel 3 von Narkiewicz' Buch (S. 97-129) ist den Arbeiten Tschebyschows gewidmet. Es enthält an vielen Stellen zuverlässige und präzise Angaben zum historischen Ablauf.) Ausserdem sei darauf hingewiesen, dass neue Beweise des Satzes von Bertrand-Tschebyschow für Formalisierungs- und Beweisprogramme entwickelt wurden. Für den Versuch, einen elementaren und konstruktiven Beweis zu formalisieren, vgl. Asperti und Ricciotti (2012).

[365] Vgl. Rota (1991, S. 490); Dawson (2006, S. 280).

[366] Vgl. dafür wie für das gleich Folgende Rota (1991, S. 490). Zu der Frage, ob elementare Beweise tendenziell schwieriger und länger ausfallen als nicht-elementare, vgl. Arana (2017).

[367] Zu erwähnen wäre allerdings die noch etwas jüngere Beweisführung durch Donald J. Newman, die mit vergleichsweise bescheidenen analytischen Mitteln auskommt und einen sehr kurzen Beweis ermöglicht, vgl. Newman (1980).

2.3.1.4. Elementare Beweise und das Reinheitsideal

Weshalb also werden mathematische Sätze selbst dann auf immer neuen und mehr oder weniger stark voneinander abweichenden Wegen bewiesen, wenn sich das einst Vermutete längstens zum Satz verfestigt hat und als solcher verwendet wird? Was sind Gründe für dieses allgegenwärtige Vorgehen, das unter Umständen zu komplizierteren Beweisen führt? Und welche Rolle spielt dabei ihre Elementarität?

Dass es den einen Grund für das mehrfache Beweisen alter Sätze nicht gibt, versteht sich; desgleichen, dass oftmals Unterschiedliches, ja geradezu Disparates in die historischen Abläufe hineinspielt. Vielleicht fand sich ein eleganterer Weg ans Ziel; oder es offenbarten sich Lücken oder andere Mängel in einem früheren Beweis; mit einer Beweisvariante kann die Macht neuer Methoden demonstriert werden; oder es gelingt auf dem neuen Beweisweg eine Verallgemeinerung des bereits bewiesenen Satzes; etc. etc.[368] Einen Anlass anderer Art bieten freilich Formalisierungsbestreben, sofern zur vollständigen Formalisierung einer Theorie auch das Herstellen formaler Beweise für ihre Theoreme dazugehört, sei es nach der Vorlage nicht-formaler Beweise oder mit Hilfe von Beweise erzeugenden Algorithmen.[369]

Um hier verschiedene kausale Zusammenhänge klar herausarbeiten zu können, müsste einige begriffliche Vorarbeit geleistet werden, sodass Auseinanderzuhaltendes nicht vermischt wird. Denn je nach Sachverhalt kommen Faktoren unterschiedlicher Art als Gründe infrage. So ist zum Beispiel denkbar, dass eine neuerliche Beweisführung durch das Streben nach Eleganz veranlasst wurde, während ihre längerfristige Wirkung oder ihre Funktion innerhalb des mathematischen Betriebs darin bestand, einer neuartigen Methode zum Durchbruch zu verhelfen. In einer ausführlichen Erörterung der gestellten Frage müssten also – um nur zwei der erforderlichen Distinktionen anzudeuten – Ideale (und weniger edle Ziele) von Motiven, die sich nach solchen richten, unterschieden werden und diese wiederum von den Wirkungen, die ein neuer Beweis zeitigt, oder von den Funktionen, die er erfüllt. Ferner könnte es sich als aufschlussreich erweisen, neben weiteren Fallstudien auch Gegenbeispiele zu orten: ältere, aber noch immer gebräuchliche Sätze also, für die nach dem ersten Beweis aus Gründen, die es zu eruieren gilt, keine weiteren gegeben wurden, womöglich keine weiteren gegeben werden konnten.

[368] In Dawson (2006, S. 275-281) werden acht mögliche Gründe für erneutes Beweisen, darunter die vier hier genannten, aufgezählt und kurz diskutiert.

[369] Siehe Anm. 364 für ein Beispiel. Dawson hat diesen Punkt ebenfalls bedacht, aber nicht in seine Liste aufgenommen, weil er seine Untersuchung aus verschiedenen Gründen auf nicht-formale Beweise beschränkt, vgl. Dawson (2006, S. 270-272). Für eine Übersicht über Formalisierungen bekannter Beweise sowie für eine kurze Diskussion von algorithmisch erzeugten Beweisen (*fully automated computer proofs*), vgl. Hales (2008).

In dem, was gleich folgt, werden wir uns damit begnügen müssen, einen Faktor etwas genauer zu beleuchten: d. i. die Elementarität der verwendeten Beweismittel. Dass Elementarität mitunter als besonders erstrebenswert gilt und die Suche nach immer neuen Beweisen mit dieser Eigenschaft zu beflügeln vermag, hat sich bereits angedeutet. Dieser Umstand hängt mit einer zweiten Funktion des Beweisens zusammen, die von der sicherstellenden zu unterscheiden ist, wie die Betrachtung des nächsten Beispiels aus der Arithmetik (in 2.3.1.5) deutlicher zeigen wird. Offenbar funktionieren Beweise nicht wie Orakelsprüche. Ein Beweis bejaht ja nicht bloss, *dass* der fragliche Satz notwendig wahr ist, sondern zeigt auch, *wie* man zu der notwendigen Wahrheit gelangt. Insofern dieses Wie aufzeigt, *weshalb* der Satz wahr sein muss, ist es nicht unzutreffend hier von der erklärenden Funktion des Beweisens zu sprechen, wie es in der einschlägigen Literatur oft geschieht.[370] Von elementaren Beweisen erhoffen sich nun manche, bessere Erklärungen dafür, weshalb ein gewisser Satz wahr ist. Wie im Fall von Bertrands Vermutung bereits festgestellt, wird daher nach immer neuen Beweiswegen gesucht, die mit möglichst elementaren Hilfsmitteln gebaut sind. Darin liegt denn auch einer der Gründe für das vielfache Beweisen.

Was aber zeichnet elementare Beweise aus? In dem hier relevanten Zusammenhang gelten Beweismittel als elementar, die sich aus denjenigen Begriffen allein ergeben, die in der zu beweisenden Behauptung enthalten sind oder zu den Grundbegriffen der Theorie zählen, in die sich die Behauptung einfügt. Ein Beweis gilt genau dann als elementar, wenn in ihm nur (oder hauptsächlich) elementare Mittel zur Anwendung kommen und insbesondere auf Techniken fremder Theorien und Teilgebiete (weitgehend) verzichtet wird.[371] Es mag zwar nicht immer eindeutig bestimmt sein, was in Bezug auf einen gegebenen Satz noch als elementares Mittel zählt und was nicht, oder ob dieses Mittel elementarer ist als jenes.[372] In der Regel hindert dies die, die auf dem Gebiet arbeiten, jedoch nicht daran, einigermassen übereinstimmende Urteile über die Elementarität von Beweismitteln zu fällen und gemeinsame Anstrengungen in die gleiche Richtung zu unternehmen. Da es sich, unser erstes Beispiel wieder aufnehmend, bei Bertrands Vermutung

[370] Vgl. etwa Mancosu (2001). Siehe auch den Kommentar zu Paragraph III in 2.3.1.2.

[371] Eine ähnliche Charakterisierung elementarer Beweise am Beispiel des Primzahlsatzes findet sich in Rota (1991, S. 489): «What does it mean to say that a proof is ‹elementary›? In the case of the prime number theorem, it means that an argument is given that shows the ‹analytic inevitability› (in the Kantian sense of the expression) of the prime number theorem on the basis of an analysis of the concept of prime, without appeal to extraneous techniques».

[372] Vgl. dazu etwa Narkiewicz (2000, S. 285 (Anm. 24)): «The word ‹elementary› was understood sometimes in different ways. Usually it meant ‹without the use of complex functions›, hence the use of real analysis was allowed, but other people were more strict and forbade the utilization of all limit processes.» Siehe auch Anm. 359 für Landaus Charakterisierung von Elementarität.

um eine rein arithmetische Aussage handelt, sollten idealerweise alle herangezogenen Beweismittel aus der elementaren Arithmetik stammen.

Die Forderung nach elementaren Beweisen ist indessen keine moderne Erscheinung. Sie entspricht einem Reinheitsideal, dessen Wirken bis in die ältesten Überlieferungen mathematischen Inhalts zurückverfolgt werden kann.[373] Das angestrebte Ziel ist eine im aristotelischen Sinn kategoriale oder sogar generelle Reinheit. Unrein ist demnach das, was bei Aristoteles μετάβασις εἰς ἄλλο γένος heisst: das Überschreiten von Gattungsgrenzen. Einer solchen Transgression macht sich schuldig, wer beim Beweisen eines Satzes aus einer bestimmten Gattung oder beim Lösen von Problemen dieser Gattung, Begriffe oder Methoden heranzieht, die in eine andere Gattung fallen. Aus aristotelischer Sicht ist eine μετάβασις deshalb zweifelhaft, weil sich mit ihr bestenfalls das Vorliegen von akzidentellen Eigenschaften nachweisen lässt. Wer aber, wie die Mathematiker, demonstratives Wissen erlangen möchte, muss nach den „Ursachen", den αἰτίαι, Ausschau halten und fragen, *weshalb* sich die Dinge so verhalten müssen, wie sie es tun. Nur so lässt sich Einsicht in die Wesenseigenschaften der untersuchten Gegenstände gewinnen (siehe 1.4.2). Um dabei Erfolg zu haben, ist es unerlässlich, die Untersuchung strikt innerhalb der richtigen Gattung durchzuführen, d. h. unter anderem, auf begriffliche und methodische Reinheit zu achten.[374]

2.3.1.5. Das Streben nach einem elementaren Beweis des Primzahlsatzes

Der Primzahlsatz ist insofern ein arithmetischer Satz, als er eine Aussage über die Verteilung der Primzahlen innerhalb der Reihe der natürlichen Zahlen trifft. Er besagt, dass sich die Funktion $\pi(x)$ – welche Primzahlen zählt, indem sie für ein reelles Argument x die Anzahl Primzahlen zurückgibt, die kleiner oder gleich x sind – asymptotisch

[373] Für die Darlegung der aristotelischen, ja womöglich voraristotelischen Wurzeln dieses Ideals und seiner historischen Auswirkungen auf dem Gebiet der Mathematik verweise ich auf Detlefsen (2008b).

[374] An der einschlägigen Stelle der *Analytica posteriora* heisst es: «Vom Zufälligen aber, das nicht an sich zutrifft [...], gibt es kein demonstratives Wissen [...]. Da aber mit Notwendigkeit auf jede einzelne Gattung zutrifft, was an sich zutrifft und als jedes einzelne, so ist einleuchtend, dass es die an sich zutreffenden Dinge sind, auf die sich die wissenschaftlichen Demonstrationen beziehen [...]. Denn das an sich Zutreffende wird man dann [wenn man auf etwas Zufälliges schliesst, selbst wenn es immer wahr ist] nicht an sich wissen, und auch nicht das Weshalb – das Wissen des Weshalb ist aber das Wissen durch das Ursächliche. [...] Es ist daher nicht möglich, aus einer anderen Gattung überzuwechseln und dadurch zu beweisen, wie etwa das Geometrische durch Arithmetik. [...] wovon dagegen die Gattung verschieden ist, wie von Arithmetik und Geometrie, da ist es nicht möglich, die arithmethische Demonstration anzuwenden auf das auf die Grössen zutreffende Zufällige, es sei denn die Grössen sind Zahlen» (S. 26-27: 75 a 18 f., 28-30, 34 f. 38 f. und b 3-5).

äquivalent zur Funktion $x/\ln x$ verhält:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

Offensichtlich widerspricht es dem Reinheitsideal, komplexwertige Funktionen oder andere Hilfsmittel aus der höheren Analysis heranzuziehen, um einen Satz zu beweisen, der allein von natürlichen Zahlen handelt. Ein solcher Gebrauch aber findet sich in den ersten Beweisen des Primzahlsatzes durch Jacques Hadamard und Charles-Jean de La Vallée Poussin.

In seinem berühmten Bericht ‚Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse' von 1859 hatte Bernhard Riemann einen Zusammenhang zwischen dem asymptotischen Verhalten von $\pi(x)$ und den Nullstellen der später nach ihm benannten ζ-Funktion hergestellt.[375] Bereits Leonhard Euler hatte auf diesen Zusammenhang hingewiesen, doch erst Riemanns Ausweitung des Definitionsbereichs der ζ-Funktion auf komplexe Zahlen brachte die entscheidende Wende.[376] Weitere Vorarbeiten wurden auch von Tschebyschow geleistet, die, obwohl sie nicht in einem Beweis des Primzahlsatzes mündeten, immerhin ausreichten, um Bertrands Vermutung zu beweisen.[377] Ohne Riemanns Intervention aber wären die Beweise von Hadamard und de La Vallée Poussin auf dem eingeschlagenen Weg nicht gelungen.[378]

Dass der Umweg über Eigenschaften der ζ-Funktion letztlich zum Ziel führte, wurde als Triumph der analytischen Zahlentheorie gewertet.[379] Zwar blieb es rätselhaft, weshalb

[375] Riemann (1859). Für eine kompakte Darlegung, vgl. Goldstein (1973, S. 608-609).

[376] Vgl. Narkiewicz (2000, S. 133-136); Goldstein (1973, S. 600-607).

[377] Vgl. Narkiewicz (2000, S. 103-115).

[378] Für eine detailreiche Darlegung der Beweise von Hadamard und de La Vallée Poussin, vgl. Narkiewicz (2000, S. 183-219).

[379] Vgl. etwa Diamond (1982, S. 554-555). Die Geschichte dieses Triumphzugs wird in Goldstein (1973, S. 606) wie folgt rekapituliert: «Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progressions was one of the major achievements of 19th century mathematics, because it introduced a fertile new idea into number theory – that analytic methods [...] could be fruitfully applied to arithmetic problems [...]. To the novice, such an application of analysis to number theory would seem to be a waste of time. After all, number theory is the study of the discrete, whereas analysis is the study of the continuous; and what should one have to do with the other! However, Dirichlet's 1837 paper was the beginning of a revolution in number-theoretic thought, the substance of which was to apply analysis to number theory. At first, undoubtedly, mathematicians were very uncomfortable with Dirichlet's ideas. They regarded them as very clever devices, which would eventually be supplanted by completely arithmetic ideas. For although analysis might be useful in proving results about the integers, surely the analytic tools were not intrinsic. Rather, they entered the theory of the integers in an inessential way and could be eliminated by the use of suitably sophisticated arithmetic. However, the history of number theory in the 19th century shows that this idea was eventually repudiated and the rightful connection between analysis and number theory came to be recognized».

sich das Auftreten der Primzahlen in der Reihe der natürlichen Zahlen mit Hilfe einer Funktion abschätzen liess, die über komplexe Zahlen reicht und in keiner erkennbaren inhaltlichen Beziehung zu den im Satz enthaltenen Grundbegriffen steht. Doch lange Zeit schien kein anderer Weg gangbar. Die Erwartung eines Beweises, der ohne Hilfsmittel aus der komplexen Analysis auskommt, wurde für illusorisch gehalten.[380] Entsprechend kamen elementare Ansätze in der Zahlentheorie zunächst ausser Mode.[381]

Durch die Erfolge analytischer Methoden zur Lösung arithmetischer Probleme wurde die Fruchtbarkeit transdisziplinärer Vermischungen auf eindrückliche Weise bestätigt. Trotzdem liess sich nicht leugnen, dass dem vielfach nachgewiesenen und völlig unumstrittenen Zusammenhang der ζ-Funktion mit dem Auftreten der Primzahlen etwas Zufälliges anhaftet. *Weshalb* – aus welchen tieferen Gründen – die Abschätzung mittels dieser Funktion gelingt, wurde auf den analytischen Umwegen nicht klar genug. Der Zusammenhang der Begriffe war zwar erwiesen, jedoch nicht zur Befriedigung aller verstanden worden.[382] Von einem elementaren Beweis hingegen konnte weiterhin erhofft werden, Einsicht in das Wesen der Primzahlen zu gewinnen und gründlicher zu verstehen, wie ihre Verteilung innerhalb der natürlichen Zahlenreihe mit ihrer Primalität zusammenhängt.[383]

In dieser Hoffnung liegt nun auch eine Erklärung für den Einfluss des Reinheitsideals auf das Beweisen: Über die Gewissheit hinaus, die jeder mathematische Beweis verschafft,

[380] Godfrey H. Hardy, um nur ein Beispiel für diese Ansicht zu geben, bemerkte 1921 in einer Vorlesung vor der Mathematischen Gesellschaft in Kopenhagen: «No elementary proof of the prime number theorem is known, and one may ask whether it is reasonable to expect one. Now we know that the theorem is roughly equivalent to a theorem about an analytic function, the theorem that Riemann's zeta function has no roots on a certain line. A proof of such a theorem, not fundamentally dependent on the theory of functions, seems to me extraordinarily unlikely. It is rash to assert that a mathematical theorem *cannot* be proved in a particular way; but one thing seems quite clear. We have certain views about the logic of the theory; we think that some theorems, as we say ‹lie deep› and others nearer to the surface. If anyone produces an elementary proof of the prime number theorem, he will show that these views are wrong, that the subject does not hang together in the way we have supposed, and that it is time for the books to be cast aside and for the theory to be rewritten» (zitiert aus Goldfeld (2004, S. 181)).

[381] Vgl. Diamond (1982, S. 556).

[382] Albert Ingham bemerkt dazu in seinem Buch *The Distribution of Prime Numbers* von 1932: «The solution just outlined [d. i. der Beweis von Hadamard] may be held to be unsatisfactory in that it introduces ideas very remote from the original problem, and it is natural to ask for a proof of the prime number theorem not depending on the theory of functions of a complex variable. To this we must reply that at present no such proof is known. We can indeed go further and say that it seems unlikely that a genuinely ‹real variable› proof will be discovered» Ingham (1932, S. 5 f.). Wie sich gleich zeigen wird, traf das Unwahrscheinliche ein.

[383] Auch in Diamond (1982, S. 556) wird als Grund dafür, dass ungeachtet der offenkundigen Fruchtbarkeit analytischer Methoden manche weiterhin nach einem elementaren Beweis für den Primzahlsatz strebten, die Hoffnung angegeben, ein solcher Beweis könnte neues Licht auf die Struktur der Primzahlen werfen.

verspricht der reinere, d. i. der elementarere Beweis ein tieferes Verständnis dafür, weshalb sich die Dinge so zueinander verhalten müssen, wie sie es tun. Nur auf direkten Wegen wäre es demnach möglich, ein Theorem wie den Primzahlsatz nicht bloss zu beweisen (d. h. sicherzustellen), sondern ihn «in seinen tiefsten Gründen zu beleuchten».[384] Weiter hergeholte Begriffe und Methoden können sich zwar als in vielerlei Hinsicht nützlich erweisen, indem sie Brücken zwischen verschiedenen Gebieten schlagen. Aufgrund der begrifflichen Distanz aber werden sie nie das gleiche Verständnis herbeiführen, wie es die direkten, mit elementaren Mitteln gebauten Wege vermögen.[385]

Den ersten Hinweis darauf, dass die Primzahlenverteilung auf einer begrifflichen Grundlage ruht, die wider Erwarten mit arithmetischen Mitteln fassbar sein könnte, lieferte Norbert Wiener mit seinen Arbeiten über die sogenannten *Tauberian theorems*.[386] Durch die Anwendung eines solchen Theorems gelang es Wiener, einen Beweis für den Primzahlsatz zu gewinnen, der lediglich von einer einzigen nicht-elementaren Eigenschaft der ζ-Funktion Gebrauch macht.[387] Das Reinheitsideal dürfte bei dieser Wende keine führende Rolle gespielt haben, zumal Wiener vor allem die Macht seiner neuen Methode demonstrieren wollte.[388] Doch plötzlich erschien es wieder möglich, den Primzahlsatz ganz ohne Umweg über die komplexe Analysis allein aus dem Begriff der Primalität und anderen arithmetischen Grundbegriffen abzuleiten. Dankbar um diesen Hinweis verfolgten andere den angedeuteten direkten Weg weiter. Diese Bemühungen gipfelten, wie bereits erwähnt, in den gefeierten Beweisen von Selberg und Erdős.[389]

Ob nun die Erreichung des geforderten Reinheitsgrads tatsächlich den Verständnisgewinn brachte, den sich manche davon erhofft hatten, ist allerdings fraglich. Selberg selbst scheint keine Hoffnungen dieser Art gehegt und eher die Ansicht geteilt zu haben, dass sein elementarer Beweis des Primzahlsatzes keine bahnbrechenden Neuerungen zeitigte.[390] Andere dagegen berichten von wichtigen Resultaten, deren Erzielung nur dank der elementaren Methoden von Selberg und Erdős gelang.[391]

[384] Landau (1909, S. VII).
[385] Für eine weiterführende Diskussion der epistemischen Vorzüge methodischer Reinheit, vgl. Detlefsen und Arana (2011) sowie Arana (2011).
[386] Vgl. Rota (1991, S. 489).
[387] Vgl. Wiener (1932, S. 40). Die Eigenschaft der ζ-Funktion, die Wieners Beweis verwendet, ist die, dass sie keine Nullstelle hat für Argumente, deren Realteil gleich 1 ist.
[388] Wiener (1932, S. 4-6).
[389] Vgl. Diamond (1982, S. 555-557); Narkiewicz (2000, S. 309-314).
[390] Vgl. Goldfeld (2004, S. 190).
[391] Vgl. Diamond (1982, S. 581-583). Diamond bemerkt indes (S. 584): «It is well to note here that many results have been achieved by a mixture of elementary and analytic methods».

Das Wesentliche für uns hier ist es, das Streben nach Elementarität, wie es insbesondere in der Zahlentheorie auftritt, beispielhaft an einigen seiner Auswirkungen konstatiert zu haben. Auf den Blick in die mathematische Praxis des Beweisens folgen nun Betrachtungen über Entscheidungsverfahren und ihre Entwicklung. Den Anfang macht wegen seiner Bedeutung das Entscheidungsproblem der Aussagenlogik (2.3.1.6). Die beiden darauffolgenden Abschnitte (2.3.1.7 und 2.3.1.8) wenden sich einem arithmetischen Entscheidungsproblem zu und nehmen die Geschichte des Primzahltestens in den Blick. Dabei wird sich zeigen, dass Entscheidungsverfahren unter dem Gesichtspunkt der Elementarität auf aufschlussreiche Weise mit den (nicht-formalen) Beweisen der Mathematik kontrastieren. Als Zusammenfassung folgt im letzten Abschnitt (2.3.2) schliesslich die angekündigte Gegenüberstellung von Beweisen und Entscheidungsverfahren.

2.3.1.6. Das Entscheidungsproblem der Aussagenlogik

Über der Menge $\mathcal{AL}$ aller aussagenlogischen Formeln gibt es nach den üblichen Festlegungen unzählige Entscheidungsprobleme. Extensional betrachtet, sind es sogar überabzählbar viele (siehe 2.2.2.4). Wenn dessen ungeachtet von *dem* Entscheidungsproblem der Aussagenlogik gesprochen wird, lenkt dies das Augenmerk auf einzelne Prädikate, die in dem unüberschaubaren Möglichkeitsraum aufgrund ihrer logischen Bedeutung herausragen. Gemeint ist damit in der Regel die Frage nach einem Entscheidungsverfahren für eines dieser drei Prädikate über $\mathcal{AL}$:

(P_1) φ ist erfüllbar
(P_2) φ ist kontradiktorisch
(P_3) φ ist tautologisch.

Obwohl es sich immer noch um drei verschiedene Entscheidungsprobleme handelt, hat es doch seine Richtigkeit, so zu reden, als läge nur eines vor. Denn für die Entscheidung der drei Prädikate kann ein und dasselbe Verfahren verwendet werden, wie die folgenden einfachen Überlegungen verdeutlichen.

Für jede aussagenlogische Formel gilt, dass sie genau dann erfüllbar ist, wenn sie nicht kontradiktorisch ist. Die ersten beiden Prädikate, P_1 und P_2, stehen also in kontradiktorischem Gegensatz zueinander. Sie zerteilen $\mathcal{AL}$ in zwei disjunkte und komplementäre Teile. Entsprechend gering ist die Anpassung, die es braucht, um das eine Prädikat mit Hilfe eines Entscheidungsverfahrens für das andere zu entscheiden. Ist A ein Entscheidungsverfahren für P_1 und ψ eine beliebige Formel in $\mathcal{AL}$, gilt: ψ ist genau dann kontradiktorisch, wenn A für ψ das Nicht-Zutreffen von P_1 anzeigt. Ist B ein Entscheidungsverfahren für P_2, gilt analog: ψ ist genau dann erfüllbar, wenn B für ψ das Nicht-Zutreffen von P_2 anzeigt.

Auch die beiden Prädikate P_2 und P_3 stehen in Opposition zueinander, doch die Art des Gegensatzes ist ein anderer. Eine aussagenlogische Formel ist genau dann kontradiktorisch, wenn ihre Negation tautologisch ist, und umgekehrt genau dann tautologisch, wenn ihre Negation kontradiktorisch ist. Daraus und aus dem Satz vom Widerspruch ergibt sich lediglich ein konträrer Gegensatz, der $\mathcal{AL}$ in drei disjunkte Mengen zerteilt: in die Menge der Tautologien auf der einen und in die der Kontradiktionen auf der anderen Seite – deren Vereinigung wir als die Menge der *logischen Formeln* bezeichnen werden –, und dazwischen in die übrigbleibende Menge der *nicht-logischen Formeln.* Um hier das eine Prädikat mit Hilfe eines Entscheidungsverfahrens für das andere zu entscheiden, muss das jeweilige Verfahren auf die Negation der Formel, nicht auf diese selbst, angewendet werden. Sind B und ψ wie vorhin, gilt also: ψ ist genau dann tautologisch, wenn B für $\neg\psi$ das Zutreffen von P_2 anzeigt. Ist C ein Entscheidungsverfahren für P_3, gilt analog: ψ ist genau dann kontradiktorisch, wenn C für $\neg\psi$ das Zutreffen von P_3 anzeigt.

Zwischen den Prädikaten P_1 und P_3 hingegen besteht kein Gegensatz. Jede Tautologie ist auch erfüllbar, wenngleich nicht jede erfüllbare Formel eine Tautologie ist. Im Unterschied zu vorhin, ist hier also möglich, dass beide Prädikate, P_1 und P_3, auf ein und dieselbe Formel zugleich zutreffen. Trotzdem lässt sich das eine Prädikat mit Hilfe eines Entscheidungsverfahrens für das andere entscheiden. Dafür wird das jeweilige Oppositionsverhältnis zu den Kontradiktionen ausgenutzt. Sind A, C und ψ wie vorhin, gilt: ψ ist genau dann erfüllbar, wenn C für $\neg\psi$ das Nicht-Zutreffen von P_3 anzeigt; und genau dann tautologisch, wenn A für $\neg\psi$ das Nicht-Zutreffen von P_1 anzeigt.

Wichtiger als die Darlegung dieser Trivialitäten ist für uns allerdings eine andere, ebenso simple Feststellung. Offenbar ist es möglich, mit Hilfe *ein und desselben* Algorithmus *verschiedene* Prädikate zu entscheiden. In dem eben behandelten Beispiel reicht die Angabe eines beliebigen Entscheidungsverfahrens für eines der drei Prädikate, um damit auch die beiden anderen zu entscheiden. Erforderlich ist dafür lediglich, dass die Prädikate in bestimmten Verhältnissen des Gegensatzes oder der Inklusion zueinander stehen. Das Verfahren ist dann jeweils um eine Gebrauchsanweisung zu ergänzen, die das bestehende Verhältnis widerspiegelt. Umgekehrt ist es möglich, das gleiche Ziel auf unterschiedlichen Wegen zu erreichen. Jedes der drei besprochenen Prädikate lässt sich sowohl durch direkte Anwendung „seines“ Verfahrens entscheiden als auch, wie gezeigt, durch die entsprechend angepassten Anwendungen der Verfahren für die beiden anderen Prädikate. (Ferner können unterschiedliche Gebrauchsanweisungen für dasselbe Verfahren zum gleichen Ziel führen. Um mit dem Verfahren C für Tautologizität die Erfüllbarkeit einer Formel ψ zu entscheiden, hätte man beispielsweise auf die Idee kommen können, C zunächst ohne zusätzliche Gebrauchsanweisung direkt auf ψ anzuwenden. Zeigt C das Zutreffen von P_3 an, weiss man, dass ψ erfüllbar ist. Da aber nicht jede erfüllbare Formel tautologisch ist, darf man, wenn C das Nicht-Zutreffen von P_3 anzeigt, weder auf die Erfüllbarkeit noch auf die Unerfüllbarkeit von ψ schliessen. Um in diesen Fällen die Entscheidung herbeizuführen, bedarf es einer zweiten Anwendung von C, diesmal auf $\neg\psi$. Dieses Vorgehen würde den Weg zum Ziel zwar für zahlreiche Eingaben verlängern, gleichwohl wäre es ein gangbarer Weg.)

Aus dem Festgestellten folgt freilich auch, dass sich die Prädikate P_1, P_2 und P_3 im Hinblick auf ihre Entscheidbarkeit gleich verhalten. Entweder sind sie alle drei entscheidbar oder alle drei sind unentscheidbar. Ob es nun darum geht, kontradiktorische von erfüllbaren, tautologische von falsifizierbaren oder logische von nicht-logischen Formeln zu trennen – immer liegt im Wesentlichen das gleiche Problem vor. Also sollte auch eine einzige Methode ausreichen, um es in seinen diversen Erscheinungsformen zu lösen.

Eine solche Lösung bietet die Methode der Wahrheitstafeln.[392] Diese ist nicht nur wohlbekannt, sondern zudem trivial in dem weiter oben beschriebenen Sinn (2.2.2.5), was sich am Beispiel des Erfüllbarkeitsprädikats P_1 leicht verdeutlichen lässt. Als erfüllbar werden diejenigen $\mathcal{AL}$-Formeln bezeichnet, deren Wahrheitswert nicht immer das Falsche ist, die also für mindestens eine aller möglichen Wahrheitswertverteilungen auf die in ihnen enthaltenen Satzkonstanten wahr sind. Der naheliegende Weg, zu prüfen, ob eine gegebene Formel diese Eigenschaft besitzt, besteht nun darin, jede mögliche Verteilung der Wahrheitswerte auf die Satzkonstanten systematisch aufzulisten und daneben jeweils den sich durch schrittweises Rechnen ergebenden Wahrheitswert für die ganze Formel festzuhalten. Genau das leistet eine Wahrheitstafel. Für das Erstellen der Wahrheitstafel einer gegebenen Formel muss diese lediglich in ihre Teilformeln analysiert werden. Jede zu prüfende Formel enthält in sich bereits alles, was es braucht. Es müssen keine neuen Verbindungen hergestellt, keine Zwischenglieder gefunden werden. An der einmal erstellten Wahrheitstafel lässt sich schliesslich das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen des fraglichen Prädikats direkt ablesen. Es muss bloss seine Definition richtig angewandt werden.

Das Entscheidungsproblem der Aussagenlogik ist also nicht nur gelöst, sondern in geradezu paradigmatischer Weise trivial. Trotzdem gibt es kaum ein Entscheidungspro-

[392] Für ein historisch frühes Entscheidungsverfahren, das von Paul Bernays auf der Grundlage eines Axiomensystems der Aussagenlogik entwickelt wurde und von einem Theorem Hilberts über Normalformen Gebrauch macht, vgl. Zach (1999, S. 341-343).

blem, zu dem mehr geforscht wurde und noch immer geforscht wird, als zum *SAT-Problem* der Aussagenlogik, d. i. zur Frage nach einem Entscheidungsverfahren für die Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln.[393] Jedes Jahr werden Dutzende neue Entscheidungsverfahren vorgestellt, es findet sogar ein Wettbewerb statt, um die besten sogenannten *SAT-Solver* auszuzeichnen, die in dem Jahr entwickelt wurden.[394]

Auf den ersten Blick scheint es sich fast wie mit den Beweisen in der Mathematik zu verhalten. Mit der Angabe eines ersten Entscheidungsverfahrens ist das Problem zwar gelöst, in der Regel aber nicht schon erledigt. Für längst entschiedene Prädikate werden stets neue Algorithmen entwickelt, wobei die Ergebnisse solcher Bemühungen auf grosses Interesse, bisweilen auch auf grosse Anerkennung stossen. Wie das Beispiel des SAT-Problems deutlich macht, gilt dies allerdings selbst für Prädikate, deren Entscheidbarkeit aufgrund der Existenz eines trivialen Algorithmus kaum je in Frage stand.

Hier zeigt sich bereits ein wichtiger Unterschied zur mathematischen Praxis des vielfachen Beweisens. Für triviale Sätze oder solche, die sich im Verlauf ihrer Beweisgeschichte erfolgreich trivialisieren liessen, werden keine neuen Beweise gesucht. Denn die Wahrheit solcher Sätze ist nicht nur gewiss genug, sie ist auch hinreichend verstanden worden, sodass es müssig wäre, noch andere Beweise zu führen, sei es um den Satz abermals sicherzustellen oder weitere Erklärungen zu liefern. Das Entwickeln immer neuer Lösungen für triviale Entscheidungsprobleme muss offenbar andere Gründe haben als die, die in der Mathematik das Streben nach weiteren Beweisen leiten. Bildeten bei Beweisen ihre Kürze oder ihr Grad an Elementarität dominante Faktoren, scheint bei Entscheidungsverfahren an erster Stelle ein Bündel von Eigenschaften zu kommen, die in der Fachliteratur unter den Begriff der Komplexität versammelt werden. Gesucht sind typischerweise immer effizientere Algorithmen, d. h. Algorithmen von möglichst niedriger Komplexität, wobei die Hinsichten, in denen jeweils höhere Effizienz erreicht wird, variieren können.[395]

Für das aussagenlogische SAT-Problem, zum Beispiel, sind Lösungen, die auf der Konstruktion einer vollständigen Wahrheitstafel beruhen, höchst ineffizient. Tatsächlich ist kein deterministischer Algorithmus bekannt, der das Problem löst, ohne dass der

[393] Die Bedeutung des aussagenlogischen SAT-Problems hängt auch damit zusammen, dass sich viele andere Probleme aus den Gebieten der Kombinatorik und der Graphentheorie darauf zurückführen lassen. Vgl. dazu Homer und Selman (2014, S. 310).

[394] Ausgerichtet wird der Wettbewerb von der *SAT Association* im Rahmen der jährlich wiederkehrenden *International Conference on the Theory and Applications of Satisfiability Testing*.

[395] Eine deutschsprachige Einführung in die Komplexitätstheorie bietet Wegener (2003). Die wenigen begrifflichen Ressourcen aus der Komplexitätstheorie, von denen wir hier Gebrauch machen, werden dort eingeführt, wo es sie braucht (siehe insbesondere Anm. 422 und 432).

Rechenaufwand in den schwierigen Fällen exponentiell mit der Anzahl Satzkonstanten anwächst.[396] Bereits für Formeln mit nur wenigen Satzkonstanten erweisen sich solche Verfahren als unbrauchbar – oder, wie man in Anlehnung an den weiter oben eingeführten Eignungsbegriff auch sagen könnte: als *praktisch ungeeignet*.

An der Geschichte von der drohenden Trivialisierung der Mathematik und ihrer heroischen Rettung, mit welcher dieser Abschnitt begann, kommen immer weitere Zweifel auf. Selbst wenn sich die Prädikatenlogik erster oder sogar höherer Stufen als entscheidbar herausgestellt hätte, wäre – wie das Beispiel der Aussagenlogik zeigt – dadurch nicht zwingend jede mathematische Arbeit an dem Entscheidungsproblem obsolet geworden. Denn auch in diesem kontrafaktischen Szenario hätte ein in praktischer Hinsicht geeigneter Algorithmus erst entwickelt werden müssen, was ungleich schwieriger gewesen wäre als im aussagenlogischen Fall.[397] Offenbar können gelöste Probleme, wie bewiesene Sätze, weiterhin beträchtliche Anziehungskraft ausüben und den Ausbau des Wegenetzes um sie herum geradezu beflügeln. Die Annahme, wonach sich die Mathematik in eine ungeheure Trivialität verwandelt hätte, wäre das Entscheidungsproblem gelöst worden, erscheint nunmehr haltlos.

2.3.1.7. Das Streben nach effizienten Algorithmen am Beispiel von Primzahltests

Vielleicht lässt sich die Geschichte gleichwohl retten. Nicht alles, was der reinen Mathematik trivial vorkommt, muss dies auch für ihre Anwendungen sein. Wenn etwa Hermes «die bemerkenswerte Tatsache» herausstellt, «dass ein schöpferischer Mathematiker durch die spezifisch mathematische Leistung der Entwicklung einer allgemeinen Methode den durch diese Methode beherrschten Bereich gewissermassen mathematisch entwertet»[398], so scheint er die *reine* Mathematik im Sinn zu haben. Auf den gleichen Standpunkt stellt sich Kleene, wenn er behauptet, die Kenntnis einer Lösung für das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik erster Stufe hätte im Hinblick auf offene ma-

[396] Vgl. Homer und Selman (2014, S. 309-310).

[397] Dass bei der algorithmischen Umsetzung praktische Schwierigkeiten auftreten würden, war denen, die am historischen Entscheidungsproblem arbeiteten, übrigens nicht entgangen. Vgl. dazu etwa Hilbert und Ackermann (1928, S. 74): «In der Untersuchung der logischen Abhängigkeitsverhältnisse zwischen den verschiedenen Axiomgruppen der Geometrie ist es ein besonders wichtiges und interessantes Ergebnis, dass der spezielle Pascalsche Satz [...] aus den Axiomen der Verknüpfung, der Anordnung und dem Parallelenaxiom allein nicht bewiesen werden kann.
Wir wollen uns klar machen, dass mit der Lösung des Entscheidungsproblems ein Verfahren gegeben wäre, durch das jene Unbeweisbarkeit sich wenigstens grundsätzlich feststellen lassen müsste, wenn auch vielleicht die Umständlichkeit des Verfahrens die praktische Durchführung illusorisch machen könnte.»

[398] Hermes (1978, S. 2 (Anm. 2)).

thematische Probleme, wie zu seiner Zeit etwa den Grossen Fermatschen Satz, einen *theoretischen* Gewinn dargestellt. Kleene räumt zwar ein, dass aus *praktischer* Sicht die Antwort auf einzelne Fragen auch mit einem allgemeinen Entscheidungsverfahren ausser Reichweite bleibt, wenn dessen erfolgreiche Anwendung mehr Raum und Zeit in Anspruch nähme, als uns zur Verfügung steht. Aber die Frage, ob sich ein Algorithmus in praktischer Hinsicht eigne, sei nicht Gegenstand der mathematischen Logik. Vielmehr fielen Probleme dieser Art unter die *computer sciences*.[399] Die Verwandlung in eine ungeheure Trivialität hätte demnach allein der reinen Mathematik gedroht und dies insofern, als mit der Verfügbarkeit eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens ihre Probleme und Methoden hinfällig geworden wären.

Die Frage, worin dieser theoretische Gewinn besteht, der sich aus dem Wissen um die Entscheidbarkeit eines Prädikats, einer Sprache oder einer Theorie ergeben soll, ist in der Grundfrage dieses Kapitels enthalten. Denn, wenn es diesen Gewinn gibt – was nicht wie ein Vorurteil angenommen werden sollte –, würde durch seine Beschreibung auch die Bedeutung von Entscheidbarkeits- und Unentscheidbarkeitsurteilen beleuchtet. Doch bevor wir uns diesen Fragen zuwenden können, gilt es zunächst die eben vorgebrachte Variante der Geschichte zu hinterfragen, der gemäss Unentscheidbarkeit notwendige Bedingung dafür ist, dass eine Theorie für die *reine* Mathematik einen Wert besitzt. Entwicklungen aus der späteren Geschichte des Entscheidungsproblems scheinen dieser Ansicht, die bei Hermes und Kleene durchschimmert, zu widersprechen.[400]

Wichtige Punkte erwähnt Michael Rabin, der für seinen folgenreichen Entscheidbarkeitsbeweis der monadischen Theorie unendlicher Binärbäume wie auch für die Entwicklung eines viel genutzten probabilistischen Primzahltests bekannt wurde:[401]

[399] Kleene (1967, S. 225 (Anm. 163)).

[400] Gegenteilige Ansichten finden sich übrigens schon früh, vor den technischen Entwicklungen, aus denen die Komplexitätstheorie hervorging, insbesondere bei Ackermann: «Auch nach der (einmal vorausgesetzten) Lösung des Entscheidungsproblems würden nämlich noch unbeantwortete Fragen, auch theoretisch, in der Mathematik übrigbleiben. Eine häufig auftretende Frage ist z. B. die nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung für das Vorhandensein irgendeiner Eigenschaft bei einer Gruppe, einem System von Zahlen usw. Dabei wird verlangt, dass die gesuchte Bedingung in gewisser Beziehung einfacher ist als die Eigenschaft selbst, der sie äquivalent ist, z. B. dass sich bei konkreten Zahlensystemen ihr Erfülltsein oder Nichterfülltsein leicht feststellen lässt. In den Bereich des Entscheidungsproblems würde nur die Frage fallen, ob eine bestimmte Vermutung, die wir über die genannte Bedingung haben, richtig ist oder nicht, nicht aber das Aufsuchen dieser Bedingung selbst» Ackermann (1934, S. 390). Interessant ist, dass Ackermann hier einen Unterschied zwischen Entscheidungs- und Eliminationsproblemen zieht. Letztere befassten sich gerade mit der Frage, «wie man einen logischen Ausdruck durch einen äquivalenten ersetzen kann, dessen logische Struktur in gewisser Weise einfacher ist» (S. 390).

[401] Rabin (1977, S. 599). Für seinen Entscheidbarkeitsbeweis, vgl. Börger u. a. (1997, S. 315); für den Miller-Selfridge-Rabin-Test, vgl. Williams (1998, S. 393-394).

> Only in recent years attention turned to the issue of the computational complexity of solvable decision problems. In the spirit of Hilbert's Programme and of Turing's analysis of computability, it was tacitly assumed that for a theory T proved decidable, the question whether a given sentence is a theorem of T is a trivial one. For one needs only to mechanically apply the decision procedure in order to answer any such question. No creative or intelligent thinking is required for this process. From this point of view, any decidable theory is trivial and uninteresting. Work of Fischer, Meyer, Rabin, and others has caused a reevaluation of this attitude. They have shown that many theories, even though decidable, are from the practical point of view undecidable because any decision algorithm would require a practically impossible number of computation steps. For the arithmetic of addition of natural numbers, proved decidable by Presburger, Fischer and Rabin (1974) have proved that for every decision algorithm AL there exist sentences A of size (i. e. number of symbols) n such that AL requires 2^{2^n} computational steps to decide A. Meyer (1975) has proved even more devastating complexity results for theories such as the theory of linear-order. [...] Results such as these cast doubt on the assertion that any theory proved decidable is trivial because its theorems could be checked by a computer program. Computations involving, say, $2^{2^{30}}$ steps cannot be considered as a feasible method for establishing the truth of a mathematical statement.

Dass eine Theorie ihren mathematischen Wert verliere, sobald ihr Entscheidungsproblem gelöst sei, leuchtet angesichts dieser Befunde nicht mehr ein. Und auch das rigide Festhalten an Disziplinengrenzen oder an einer angeblich klaren Unterscheidung zwischen reinen und angewandten Teilen einer Disziplin vermag nicht ohne Weiteres zu überzeugen. Zu offenkundig ist wesentlich Mathematik im Spiel, wenn nach effizienteren Algorithmen gesucht wird. Und ganz sicher handelt es sich um keine Aufgabe, die «mathematischen Hilfsarbeitern» übertragen werden könnte.

(Im Anschluss an die angeführte Passage stellt Rabin die Frage, ob es irgendeine Theorie gebe mit einem Entscheidungsproblem, das auch aus praktischer Sicht lösbar sei. Die Antwort darauf ist, wie in den 1970er Jahren, als dieses Problem zum ersten Mal aufgeworfen wurde, weiterhin unbekannt.[402] Zugrunde liegt das sogenannte P-NP-Problem, d. i. die Frage, ob die Klasse der P-Probleme (d. s. diejenigen Probleme, die in polynomiell anwachsender Zeit durch einen deterministischen Algorithmus gelöst werden können) identisch ist mit der Klasse der NP-Probleme (d. s. diejenigen Probleme, die in polynomiell anwachsender Zeit durch einen nichtdeterministischen Algorithmus gelöst werden können). Die NP-Klasse lässt sich koextensional auch als die Menge derjenigen Probleme definieren, von denen sich in polynomieller Zeit mit einem deterministischen Algorithmus entscheiden lässt, ob eine vorgeschlagene Lösung zutrifft.[403] Das Entschei-

[402] Vgl. Homer und Selman (2014, S. 310).
[403] Vgl. Wegener (2003, S. 75-77).

dungsproblem für Primalität zum Beispiel gehört in die P-Klasse, wie wir weiter unten sehen werden. Hingegen gehört das Problem, die Primfaktoren einer gegebenen Zahl zu bestimmen, in die NP-Klasse. Das P-NP-Problem wirft also unter anderem die Frage auf, ob es einen deterministischen Algorithmus gibt, der in polynomieller Zeit Primfaktorzerlegungen ausführt. Es gilt als eines der wichtigsten offenen Probleme der Mathematik.)

Des Weiteren wäre es verfehlt zu glauben, dass sich die Suche nach immer neuen Algorithmen für längst gelöste Entscheidungsprobleme auf das Gebiet der mathematischen Logik beschränkte. Ein lehrreiches Beispiel aus einer klassisch mathematischen Disziplin liefert «die Aufgabe, die Primzahlen von den zusammengesetzten zu unterscheiden», die in den Worten Carl Friedrich Gauß' «zu den wichtigsten und nützlichsten der gesamten Arithmetik gehört und die Bemühungen und den Scharfsinn sowohl der alten wie auch der neueren Geometer in Anspruch genommen hat».[404] Theoretisch betrachtet, ist dieses Entscheidungsproblem besonders trivial (siehe 2.2.2.4 und 2.2.2.5). Da alle Teiler einer natürlichen Zahl n höchstens halb so gross sind wie n selbst, müssen sie alle in der endlichen Menge $\{1, 2, ..., \lfloor n/2 \rfloor\}$ liegen.[405] Um die Frage zu entscheiden, ob n nur durch 1 und sich selbst oder auch durch weitere Zahlen teilbar ist, reichen also weniger als $n/2$ Probedivisionen. Aufgrund des Fundamentalsatzes der Arithmetik und unter Anwendung von Eratosthenes' Sieb lässt sich das Prüfen auf die Primzahlen im Bereich $\{1, 2, ..., \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ beschränken, da der kleinste Primfaktor einer natürlichen Zahl nicht grösser als ihre Quadratwurzel sein kann.[406]

«Trotzdem», um mit Gauß fortzufahren, «muss man gestehen, dass alle bisher angegebenen Methoden entweder auf sehr specielle Fälle beschränkt oder so mühsam und weitläufig sind, dass sie schon für solche Zahlen, welche die Grenzen der von verdienstvollen Männern aufgestellten Tafeln nicht überschreiten, [...] die Geduld sogar eines geübten Rechners ermüden, auf grössere Zahlen aber meistenteils kaum angewendet werden können».[407] Das trifft insbesondere auf das angedeutete Verfahren mittels Probedivisionen

[404] Gauß (1889, S. 387). Es handelt sich hier um die deutsche Übersetzung der *Disquisitiones arithmeticae* von 1801. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass Gauß an dieser Stelle das Problem der Primfaktorzerlegung hinzunimmt.

[405] Die Gaußklammer $\lfloor . \rfloor$ steht für die Abrundungsfunktion, die jedem reellen x die grösste ganze Zahl $\lfloor x \rfloor$ zuordnet, die kleiner oder gleich x ist.

[406] Der Fundamentalsatz der Arithmetik besagt, dass sich jede natürliche Zahl n als Produkt von k Primzahlen $p_1, p_2, ..., p_k$ darstellen lässt und diese Darstellung in kanonischer Form eindeutig ist: $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot ... \cdot p_k^{e_k}$. Das Sieb des Eratosthenes ist ein Algorithmus, der für ein vorgegebenes n die Liste aller Primzahlen $p_i \leq n$ zurückgibt. Die Ausgabeliste wird dadurch aus der Liste $1, 2, ..., n$ gewonnen, dass ausgehend von der 2 schrittweise für jede gefundene Primzahl p_i ihre Vielfachen $k \cdot p_i \leq n$ gestrichen werden.

[407] Gauß (1889, S. 387).

zu, dessen Rechenaufwand mit steigender Stellenzahl exponentiell zunimmt.[408] Braucht es, um auf diesem Weg die Primalität der grössten sechsstelligen Primzahl festzustellen, 168 Probedivisionen, sind für die grösste zwölfstellige Primzahl bereits 78'498 Probedivisionen erforderlich. Noch nicht eingerechnet ist da der Aufwand für die Erstellung und Speicherung der Liste aller relevanten Primzahlen.

Wenngleich wichtige Fortschritte bereits ab der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erzielt werden konnten, sorgte erst das Aufkommen und die rasche Weiterentwicklung elektronischer Rechenmaschinen für eine Revolution auf dem Gebiet.[409] Der Gewinn, den der Einsatz von Computern mit sich brachte, bestand indes nicht allein darin, dass die auf dem Gebiet Forschenden von der Mühsal des Handrechnens befreit wurden und mit ihrem neuen Werkzeug eine sehr viel grössere Zahl von Rechenoperationen in immer kürzerer Zeit ausführen konnten. Die ungeahnte Steigerung der Rechenkraft erlaubte es, Algorithmen zu verwirklichen, die aufgrund ihres komplizierten Aufbaus oder ihres grossen Ressourcenbedarfs ohne den Einsatz von Computern nicht zu gebrauchen wären.[410] Dadurch eröffnete sich ein ganz neuer Gestaltungsspielraum, in welchem Fragen betreffend algorithmische Komplexität für die Entwicklung neuer Primzahltests massgebend wurden. (Ein Beispiel dafür ist der AKS-Algorithmus, der mit der klaren Absicht entwickelt wurde, einen Primzahltest von polynomieller Komplexität zu finden, siehe 2.3.1.8). Obschon Komplexitätsschranken bereits im vorelektronischen Zeitalter auf die Suche nach praktikablen Verfahren einwirkten, zwangen sich die Grenzen des Machbaren derart früh auf, dass kein systematisches Denken darüber stattfand. Es scheint, dass erst die Möglichkeit, deutlich komplexere Algorithmen tatsächlich auszuführen und auf ihre Vorzüge hin zu überprüfen, es vermochte, die Bildung einer Theorie algorithmischer Komplexität zu befruchten.[411]

Als weitere wichtige Treiber für die ab den 1970er Jahren einsetzenden Umwälzungen auf dem Gebiet des Primzahltestens erwiesen sich Einflüsse aus der Kryptographie, deren Fortschritt selbst wiederum mit der Verfügbarkeit von immer leistungsstärkeren Rechnern eng zusammenhing. So kam es zu einer mustergültigen μετάβασις εἰς ἄλλο

[408] Vgl. Williams (1998, S. 34).

[409] Für die Geschichte des Primzahltestens vor dem Erscheinen des Computers, vgl. Williams (1998, Kap. 2-8).

[410] Vgl. Williams (1998, S. 287 f., 297).

[411] Das ist nicht mehr als eine plausible Vermutung, die eine noch zu schreibende Geschichte der Komplexitätstheorie überprüfen müsste. Sie findet sich bei Williams für die Disziplin des Primzahltestens angedeutet, vgl. Williams (1998, S. 287 u. 343). Die mir bekannten historischen Darstellungen beginnen mit dem Papier „On the Computational Complexity of Algorithms" von Juris Hartmanis und Richard E. Stearns und geben dessen Erscheinungsjahr (1965) als Geburtsstunde der Komplexitätstheorie an. Vgl. etwa Fortnow und Homer (2003).

γένος, indem Begriffe und Methoden aus der algebraischen Geometrie, die in der Kryptographie bereits breite Anwendung gefunden hatten, in die Theorie des Primzahltestens einflossen.[412] Trotz dieser Bereicherung waren die damaligen Methoden zur Prüfung von Primalität den kryptographischen Bedürfnissen nicht gewachsen. Dieser Umstand beförderte zunächst die Entwicklung und den Einsatz von probabilistischen Verfahren – d. s. Algorithmen, die nicht immer, sondern lediglich mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nach endlich vielen Schritten die korrekte Antwort ausgeben (entweder weil sie manchmal falsch oder manchmal nicht antworten).[413] Bei guten Algorithmen liess sich die Fehlerwahrscheinlichkeit zwar vernachlässigbar klein halten, letztlich erlangten sie ihre Effizienz und den daraus resultierenden Nutzen gleichwohl auf Kosten der Notwendigkeit, mit der Entscheidungsverfahren (im klassischen Sinn) nach endlich vielen Schritten korrekte Antworten liefern. Wenngleich Entscheidungsverfahren selbst keine Beweise sind oder solche erzeugen müssen, sollte ihren Antworten, insofern sie das Ergebnis der korrekten Anwendung eines Entscheidungsverfahrens sind, die gleiche Modalität zukommen wie den Ergebnissen mathematischer Beweise, also Theoremen.

Hier wird denn auch eine Forderung sichtbar, die unsere Festlegungen zu Beginn des Kapitels „verschlucken“: dass ein Algorithmus, der ein gegebenes Prädikat entscheidet, keine falschen Antworten liefern *kann*. In der Literatur bleibt dies, wie bei uns, meistens implizit. Die wenigsten Bestimmungen heben die Modalität der Korrektheits- und Terminierungsbedingung als distinkte Zutat hervor. Eine Ausnahme stellt Geoffrey Hunters Definition effektiver Methoden dar, unter deren Begriff er auch Entscheidungsverfahren fasst: «In logic and mathematics, an *effective method* for solving a problem is a method for computing the answer that, if followed correctly and as far as may be necessary, is logically bound to give the right answer (and no wrong answers) in a finite number of steps».[414] (Man kann sich fragen, ob auch epistemisch ungeeignete Algorithmen wie die Listen- und leeren Verfahren aus dem letzten Unterkapitel, diese Forderung erfüllen. Inwiefern kann zum Beispiel das leere Nein-Verfahren keine falschen Ergebnisse liefern? Die Antwort ist, dass dieser Algorithmus *qua* Entscheidungsverfahren für das Prädikat ‚Zwischen n und $2n$ liegt eine Primzahl‘ insofern keine falsche Antwort liefern *kann*, als er für jede Eingabe ‚Nein‘ anzeigt, was freilich immer korrekt ist, da das Prädikat leer sein *muss*, wie jeder Beweis des Satzes von Bertrand-Tschebyschow zeigt.)

[412] Vgl. Williams (1998, S. 444-450).
[413] Vgl. Homer und Selman (2014, S. 316-320); Williams (1998, S. 392-398). In Wegener (2003) (S. 31-34) heissen sie randomisierte Algorithmen.
[414] Hunter (1971, S. 14).

Nicht alle Algorithmen teilen jedoch diese wesentliche Gemeinsamkeit mit Beweisen. Offenbar entbehren probabilistische Verfahren dieser Eigenschaft, da es vorkommen kann, dass sie eine aufgeworfene Frage falsch oder überhaupt nicht beantworten. Solche Algorithmen können also keine Entscheidungsverfahren im hier festgelegten Sinn sein. Daraus folgt indes nicht, dass nur *deterministische* Verfahren – d. s. Algorithmen, bei denen «zu jedem Zeitpunkt der nächste Rechenschritt eindeutig festgelegt ist»[415] – als Entscheidungsverfahren infrage kämen. Auch nichtdeterministische Verfahren – d. s. Algorithmen, bei denen jeweils mehrere Rechenschritte zur Auswahl stehen – können so beschaffen sein, dass sie notwendigerweise auf jede aufgeworfene Frage nach endlich vielen Schritten die korrekte Antwort zurückgeben.[416]

Kehren wir nun zurück zur Geschichte des Primzahltestens, um jüngere Ergebnisse in den Blick zu nehmen.

2.3.1.8. Ein neuer Primzahltest: Der AKS-Algorithmus

Der Siegeszug des probabilistischen Paradigmas führte dazu, dass für viele wichtige Probleme Lösungen gefunden wurden, die den praktischen Anforderungen besser gewachsen waren als ihre Vorläufer. Dennoch begann sich ab den 1980er Jahren eine neuerliche Wende abzuzeichnen. Vermehrt wurden Versuche unternommen, probabilistische Algorithmen zu entrandomisieren und in deterministische umzubauen, ohne dabei die Vorzüge ihrer Vorlagen zu verlieren.[417] Einen Höhepunkt erreichte diese oft schrittweise erfolgende Rückkehr zum Determinismus mit dem nach seinen Entwicklern benannten AKS-Primzahltest.[418]

---

[415] Wegener (2003, S. 20 f).

[416] Historisch gesehen, ist die klare Unterscheidung deterministischer Algorithmen von nichtdeterministischen deutlich jünger als der Begriff eines Entscheidungsverfahrens. In der ersten Phase der Arbeit an Entscheidungsproblemen wurde unter einem Algorithmus mehr oder weniger implizit stets ein deterministisches Verfahren verstanden. Turing brachte 1950 die Möglichkeit probabilistischer Algorithmen ins Spiel, während nichtdeterministische Verfahren 1959 von Rabin und Dana Scott erstmals diskutiert wurden, vgl. Homer und Selman (2014, S. 316). Bei Behmann findet sich womöglich zum ersten Mal die explizite Forderung, wonach es deterministischer Verfahren bedarf, um Entscheidungsprobleme zu lösen. In seinem programmatischen Vortrag von 1921 spricht er diesbezüglich von «zwangläufigen Rechenverfahren» Mancosu und Zach (2015, S. 181, vgl. auch S. 178 u. 180). Wie Mancosu und Zach indes bemerken (S. 168), findet sich bei Behmann keine kohärente Analyse des Begriffs deterministischer Rechenverfahren.

[417] Vgl. Homer und Selman (2014, S. 317, 320-321).

[418] Das Lemma, von dem die Entwicklung dieses Tests ausging, hatte dem Hauptautoren, Manindra Agrawal, in einer etwas älteren Arbeit als Grundlage für einen probabilistischen Primzahltest gedient, vgl. Agrawal und Biswas (2003, S. 432-433). Die Wiederverwendung des Lemmas erweist den AKS-Algorithmus daher als ein besonders erfolgreiches Beispiel für die Entrandomisierung probabilistischer Verfahren.

Im August 2002 stellten Manindra Agrawal, Neeraj Kayal und Nitin Saxena einen Primzahltest vor, der deterministisch und effizient zugleich ist.[419] Erstmals in der Geschichte war es gelungen, einen Algorithmus anzugeben, der immer korrekt und in höchstens polynomieller Zeit über Primalität entscheidet, wobei Korrektheit und Effizienz ohne die Annahme unbewiesener Postulate gezeigt werden konnten.[420] Als *effizient* gilt ein Algorithmus, sobald seine Laufzeit selbst im ungünstigsten Fall nicht wesentlich schneller anwächst als die k-te Potenz der Stellenzahl des Eingabewerts.[421] Für den AKS-Primzahltest konnte $k = 10.5$ nachgewiesen werden und unter einer nicht ganz unplausiblen, aber unbewiesenen Annahme fällt k sogar nicht grösser als 3 aus. Seine Zeitkomplexität ist also $\mathcal{O}^{\sim}(\log^{21/2} n)$, vielleicht sogar $\mathcal{O}^{\sim}(\log^3 n)$.[422]

Vier Jahre nach der Bekanntgabe ihres Primzahltests erhielten Agrawal, Kayal und Saxena den Gödelpreis der *European Association for Theoretical Computer Science*. Ihre Arbeit wurde auch deshalb als Durchbruch gewürdigt, weil der Algorithmus erstaunlich einfach aufgebaut ist und die Beweise seiner Korrektheit und Effizienz elegant und nur mit elementaren Mitteln geführt werden.[423] So heisst es in einer frühen Stellungnahme etwa, die Einfachheit des Algorithmus habe die Experten auf dem Gebiet geradezu schockiert und die Frage aufgeworfen, welche einfachen Wege zur Primalität sonst noch übersehen wurden.[424]

[419] Agrawal, Kayal u. a. (2004). Vgl. auch Granville (2005, S. 4).

[420] Vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 782).

[421] Zur Sonderrolle polynomieller Rechenzeiten, vgl. Wegener (2003, S. 29-30).

[422] Vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 789-791). Wenn hier von der wachsenden Stellenzahl des Eingabewerts die Rede ist, ist damit die Funktion gemeint, die für eine natürliche Zahl die Anzahl Ziffern zurückgibt, die es braucht, um sie in einem gegebenen Stellenwertsystem darzustellen. Um in einem System der Basis b eine natürliche Zahl n darzustellen, braucht es genau $1 + \lfloor \log_b n \rfloor$ Ziffern. Um z. B. die 31 ($= 2^5 - 1$) im Dualsystem darzustellen, reichen demnach fünf Ziffern aus ($\log_2 2^4 < \log_2 31 < \log_2 2^5$). Die Stellenzahl des Eingabewerts lässt sich also gut mittels Logarithmusfunktion abschätzen; vgl. jedoch Wegener (2003, S. 22). Das Landau-Symbol $\mathcal{O}(g)$ bezeichnet die Klasse derjenigen Funktionen, die in Richtung Unendlichkeit nicht wesentlich schneller wachsen als g, vgl. Wegener (2003, S. 295-296). Wenn es heisst, ein Algorithmus liege in $\mathcal{O}(\log^3 n)$, ist damit gemeint, dass die Funktion, die seine Zeitkomplexität misst, nicht wesentlich schneller wächst als die dritte Potenz der Stellenzahl des Eingabewerts. Die von Agrawal, Kayal und Saxena verwendete Notation $\mathcal{O}^{\sim}(g)$ ist eine Abkürzung, um logarithmische Faktoren auszublenden und so die wichtigste Funktion hinsichtlich Wachstum hervorzuheben, vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 784); vgl. auch Wegener (2003, S. 297-299). Weitere Erläuterungen finden sich in Dietzfelbinger (2004, S. 17-18).

[423] Vgl. `https://www.sigact.org/prizes/gödel/2006.html`. In einer ersten Version des Korrektheitsbeweises hatten sich Agrawal, Kayal und Saxena eines nicht-elementaren Lemmas bedient, um eine untere Schranke aufzustellen. Dank eines Hinweises von Hendrik Lenstra konnte in der publizierten Version des Beweises auf dieses Lemma verzichtet werden, vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 787 u. 791).

[424] Granville (2005, S. 4 u. 7).

Tatsächlich ist das erste Lemma, auf dem der AKS-Algorithmus baut, aus algebraischer Sicht nichts anderes als eine naheliegende Verallgemeinerung eines der am häufigsten verwendeten Theoreme auf dem Gebiet: d. i. des Kleinen Fermatschen Satzes. Dieser Satz besagt, dass, wenn p eine Primzahl und a irgendeine ganze Zahl ist, das Kongruenzverhältnis

$$a^p \equiv a \pmod p$$

besteht.[425] Ein analoges Verhältnis lässt sich nun auch zwischen ganzzahligen Polynomen feststellen. Dort verschärft sich die konditionale Aussage zu dem folgenden Lemma: Ist n eine beliebige natürliche Zahl grösser als 1 und a irgendeine ganze Zahl, die kleiner als n und teilerfremd[426] zu n ist, ist n genau dann eine Primzahl, wenn im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ das Kongruenzverhältnis

$$(X+a)^n \equiv X^n + a \pmod n$$

besteht.[427] Bereits daraus lässt sich ein Entscheidungsverfahren für Primalität gewinnen, wenn auch kein effizientes, wie sich weiter unten zeigen wird.

Um zu erkennen, dass das Lemma eine direkte algorithmische Umsetzung erlaubt, ist es nicht nötig auf die Einzelheiten modularer Kongruenz zwischen Polynomen einzugehen. Es reicht, sich die logische Form der Aussage an ihrer Oberfläche klarzumachen. Diese lässt sich mit

$$\forall x \forall y (Qxy \rightarrow (Px \leftrightarrow R(f(x,y), g(x,y), x)))$$

[425] Sprich a^p und a sind kongruent *modulo* p, d. h. es existiert eine ganze Zahl k, sodass $a^p = k \cdot p + a$. Der Satz besagt also, dass p die Differenz $a^p - a$ teilt, wenn p prim ist.

[426] Zwei natürliche Zahlen n und a heissen *teilerfremd*, wenn 1 der grösste Teiler ist, den sie gemeinsam haben. In Symbolen: $\mathrm{ggT}(n,a) = 1$.

[427] Zwei Polynome f_1, f_2 in $\mathbb{Z}[X]$ heissen *kongruent modulo* g für ein Polynom g in $\mathbb{Z}[X]$, wenn g die Differenz $f_1 - f_2$ teilt, d. h. ein Polynom h in $\mathbb{Z}[X]$ existiert, sodass gilt: $f_1 = f_2 + g \cdot h$, vgl. dazu Dietzfelbinger (2004, S. 104). Angewandt auf das obige Lemma ergibt sich demnach die Aussage, dass n (für ein passend gewähltes a) genau dann prim ist, wenn ein Polynom h in $\mathbb{Z}[X]$ existiert, sodass gilt: $(X+a)^n = (X^n + a) + n \cdot h$. Übertragen wir diese Gleichung auf den Polynomring $\mathbb{Z}_n[X]$ (d. s. alle Polynome mit Koeffizienten aus dem Restklassenring $\mathbb{Z}_n$), verschwindet freilich das Polynom $n \cdot h$ und es bleibt die Identität $(X+a)^n = (X^n + a)$. Folglich lässt sich das obige Lemma auch so formulieren: n ist (für ein passend gewähltes a) genau dann prim, wenn die Polynome $(X+a)^n$ und $X^n + a$ im Polynomring $\mathbb{Z}_n[X]$ identisch sind. In der Literatur finden sich beide Formulierungen, vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 783), Dietzfelbinger (2004, S. 115), Granville (2005, S. 12).

adäquat darstellen, wenn folgende Interpretation zugrunde liegt:

$$\begin{aligned}
Px &:= x \text{ ist prim}\\
Qxy &:= x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ y \in \mathbb{Z},\ y < x \text{ und } \mathrm{ggT}(x,y) = 1\\
R(x,y,z) &:= x \equiv y \pmod{z}\\
f(x,y) &:= (X+y)^x\\
g(x,y) &:= X^x + y
\end{aligned}$$

Als Allaussage, die über ein Konditional reicht, dessen Konsequens ein Bikonditional ist, behauptet das Lemma die Äquivalenz der Primalität mit anderen, komplexeren Prädikaten, wenn die in Qxy zusammengefassten Bedingungen erfüllt sind. Von links nach rechts gelesen behauptet das Bikonditional für alle n und a, sodass Qna: Wenn n eine Primzahl ist, d. h. Px auf n zutrifft, dann treffen die Prädikate $R(f(x,a), g(x,a), x)$ alle ebenfalls auf n zu. Um die Nicht-Primalität von n nachzuweisen, genügt es folglich, ein einziges a zu finden, sodass $R(f(x,a), g(x,a), x)$ auf n nicht zutrifft. In umgekehrter Richtung behauptet das Bikonditional für alle passend gewählten n und a: Wenn das Prädikat $R(f(x,a), g(x,a), x)$ auf n zutrifft, dann ist n eine Primzahl. Um die Primalität von n nachzuweisen, reicht es also, ein einziges a zu finden, sodass $R(f(x,a), g(x,a), x)$ auf n zutrifft.[428]

Nach diesen Klärungen liegt ein Entscheidungsverfahren für Primalität auf der Hand: Um zu entscheiden, ob ein gegebenes n eine Primzahl ist oder nicht, wähle man zuerst aus der Menge der ganzen Zahlen ein zu n passendes a, multipliziere daraufhin das linke Polynom $(X+a)^n$ aus und prüfe es auf Kongruenz *modulo* n mit dem rechten Polynom $X^n + a$. Sind die beiden Polynome kongruent, ist n prim, sind sie es nicht, ist n nicht prim.

Das Lemma behauptet wohlgemerkt keine allgemeine Extensionsgleichheit der Primalität mit den Prädikaten $R(f(x,a), g(x,a), x)$ für jedes a in $\mathbb{Z}$. Die Aussage ist lediglich, dass für jedes gegebene a das Prädikat $R(f(x,a), g(x,a), x)$ mit Px in Bezug auf diejenigen n in $\mathbb{N}$ übereinstimmt, die jeweils Qna erfüllen. Es muss also für jedes n aufs Neue sichergestellt werden, dass ein a gewählt wurde, welches auch zu diesem n passt. Diese Komplikation lässt sich umgehen, indem $a = 1$ gewählt wird. Denn dann erstreckt sich die Äquivalenz zwischen Px und dem Prädikat $R(f(x,a), g(x,a), x)$ ge-

[428] Um einzusehen, dass für den Nachweis der Primalität von n ein einziges passend gewähltes a genügt, beachte man, dass Aussagen der Form $\forall x \forall y(\hat{Q}xy \to (\hat{R}xy \to \hat{P}x))$ äquivalent zu Aussagen der Form $\forall x(\exists y(\hat{Q}xy \wedge \hat{R}xy) \to \hat{P}x)$ sind.

mäss Lemma über alle natürlichen Zahlen (da $\mathrm{ggT}(n, 1) = 1$ für alle n in $\mathbb{N}$), abgesehen von der 1.[429] Die Extensionsgleichheit des Prädikats $(X + 1)^x \equiv X^x + 1 \pmod{x}$ mit der Primalität würde es erlauben, auf die Auswahl eines passenden a für jedes neue n zu verzichten und das eben skizzierte Verfahren auf die Ausmultiplizierung von $(X+1)^n$ und die anschliessende Kongruenzprüfung zu reduzieren.[430]

Da es sich bei diesem Entscheidungsverfahren für Primalität um eine direkte Umsetzung des Lemmas handelt, ergibt sich seine Korrektheit ohne Weiteres aus dem Beweis desselben. Dieser Beweis lässt sich übrigens ganz leicht und mit elementarsten Mitteln führen.[431] Ebenso offenkundig ist die Terminierung des Algorithmus bei jeder Eingabe. Leider jedoch steigt mit der Stellenzahl von n der Aufwand, den das Ausmultiplizieren von $(X + a)^n$ und die Prüfung der errechneten Koeffizienten verursachen, exponentiell.[432] Selbst die rudimentären Entscheidungsverfahren, von denen weiter oben (2.3.1.7) die Rede war und die auf Probedivisionen basieren, sind weniger ineffizient als der eben skizzierte.[433]

Um aus dem Kriterium der Polynomkongruenz doch noch einen effizienten Algorithmus zu gewinnen, muss das Ausmultiplizieren erheblich gekürzt werden. Dies gelingt durch eine geschickte Ergänzung des Arguments an der Modulostelle. Anstatt die Kongruenz zwischen den Polynomen nur *modulo n* zu prüfen, wird sie im AKS-Algorithmus *modulo n* und $X^r - 1$ zugleich durchgeführt.[434] Ein eingebauter Unteralgorithmus berechnet für das jeweils eingegebene n den Wert von r vorab. Allerdings besteht dieses neue Verhältnis

$$(X + a)^n \equiv X^n + a \pmod{X^r - 1, n}$$

selbst bei passender Wahl von a nicht nur dann, wenn n prim ist. Auch zusammengesetzte Zahlen erfüllen es. Um Primalität auf diesem kürzeren Weg zu entscheiden, reicht es

[429] Üblicherweise wird die 1 nicht zu den Primzahlen gezählt, d. h. Px trifft auf 1 nicht zu, wohingegen $(X + a)^1 \equiv X^1 + a \pmod{1}$ für beliebige a in $\mathbb{Z}$ wahr ist. Folglich stimmen Px und $R(f(x, 1), g(x, 1), x)$ bei $n = 1$ nicht überein.

[430] Vgl. Granville (2005, S. 12-13).

[431] Vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 783). Derselbe Beweis in etwas ausführlicherer Form findet sich in Dietzfelbinger (2004, S. 115-116).

[432] In Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 783) heisst es, die Zeitkomplexität für die Ausführung dieser Operationen entspreche $\mathcal{O}(n)$, d. h. der zeitliche Aufwand wachse linear mit dem Eingabewert n. Da der Wert von Zahldarstellungen exponentiell zur Zahl der Ziffern wächst (siehe Anm. 422), heisst das aber nichts anderes, als dass die Zeitkomplexität des angedeuteten Algorithmus *in Bezug zur Stellenzahl von n* exponentiell zunimmt. Vgl. dazu Agrawal und Biswas (2003, S. 433).

[433] Vgl. Dietzfelbinger (2004, S. 116).

[434] Zwischen Polynomen f_1, f_2, f_3 im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ und einem n in $\mathbb{N}$ besteht das Kongruenzverhältnis $f_1 \equiv f_2 \pmod{f_3, n}$ genau dann, wenn Polynome g, h in $\mathbb{Z}[X]$ existieren, sodass gilt: $f_1 = f_2 + f_3 \cdot g + n \cdot h$. Vgl. Granville (2005, S. 13 (Anm. 18)).

daher nicht mehr aus, das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen eines einzigen Prädikats zu prüfen.

Die Zahl der Werte von a, für die eine Prüfung des gekürzten Kongruenzverhältnisses durchgeführt werden muss, lässt sich aber klein genug halten, damit der anfallende Aufwand höchstens polynomiell zur Stellenzahl des Eingabewerts n anwächst. Dies zu zeigen – insbesondere passende Schranken für die Werte von a anzugeben –, stellte den weitaus schwierigsten Teil der Arbeit am AKS-Algorithmus, den eigentlichen Exploit dar. Entsprechend voraussetzungsreich sind die Lemmata, aus denen sich die Möglichkeit einer solchen Beschränkung ergibt. Da die Details dieser Zwischenschritte für unsere Zwecke unerheblich sind, können sie hier übersprungen werden. Sie lassen sich mit entsprechendem Vorwissen dem Korrektheitsbeweis für den Primzahltest entnehmen.[435] Dasselbe gilt für die Analyse der Zeitkomplexität.[436] Für uns sind die folgenden drei Feststellungen wichtig.

Das Lemma, von dem die Entwicklung des AKS-Algorithmus ausging, mag gemessen an seinem Beweis von fast schon trivialer Einfachheit sein. Und wie wir sahen, fällt es auch nicht schwer, einen Primzahltest aus dem Lemma direkt abzuleiten, zumal darin ein Prädikat eingeführt wird, das im Wesentlichen extensionsgleich zur Primalität ist, d. i. $R(f(x,1), g(x,1), x)$. Um ausgehend von diesem Lemma einen Test zu entwickeln, der effizient ist, bedurfte es jedoch eines viel komplexeren Kriteriums. Anstatt das Zutreffen nur eines einzelnen Prädikats zu prüfen, geht der AKS-Algorithmus denn auch für jede Eingabe – nachdem der Wert von r berechnet und die obere Schranke für die zu prüfenden a_i bestimmt wurde – der Reihe nach die Prädikate

$$R(f(x,a_i), g(x,a_i), (X^r - 1, x))$$

durch.[437] Nur wenn jedes dieser Prädikate auf n zutrifft, ist die Primalität von n gesichert. Trifft nur eines nicht zu, ist n zusammengesetzt. Der AKS-Primzahltest ist also nicht das Ergebnis der direkten algorithmischen Umsetzung eines Prädikats, das die gleiche Extension besitzt wie dasjenige, das es zu entscheiden gilt. Der Algorithmus enthält vielmehr eine Gebrauchsanweisung, um mit der Kongruenzrelation

$$R(f(x,y), g(x,y), (X^z - 1, x))$$

[435] Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 785-789). Vgl. auch Dietzfelbinger (2004, S. 122-131).

[436] Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 789-791). Vgl. auch Dietzfelbinger (2004, S. 118-122).

[437] Mit der Schreibweise ‚$R(f(x,a_i), g(x,a_i), (X^r - 1, x))$' soll angedeutet werden, dass ein komplexes Argument in die letzte Argumentstelle von $Rxyz$ eintritt. Der Ausdruck steht für $(X+a_i)^x \equiv X^x + a_i \pmod{X^r - 1, x}$.

als schematische Vorlage für jede neue Eingabe diejenigen Prädikate zu erzeugen, die es braucht, um entweder das Zutreffen oder das Nicht-Zutreffen der Primalität mit Sicherheit zu entscheiden. Das ist der erste Punkt, den es festzustellen gilt.

Zweitens gilt es festzuhalten, dass der AKS-Algorithmus auf Fragen der Primalität zwar immer die korrekte Antwort bereithält, aber nicht dazu angelegt wurde, darüber hinausgehende Informationen zu liefern. Insbesondere erlaubt seine Anwendung auf Nicht-Primzahlen im Allgemeinen keine Rückschlüsse auf ihre spezifische Zusammensetzung.[438] Das Ausgangslemma beleuchtet den Primzahlbegriff immerhin insofern, als es zeigt, wie jene Kongruenz, die dem Kleinen Fermatschen Satz gemäss über dem Ring der ganzen Zahl besteht, auf den entsprechenden Polynomring übertragen werden kann. Die elaborierte Gebrauchsanweisung, die das eigentliche Herzstück des Algorithmus ausmacht, dient hingegen nichts anderem als der Eruierung korrekter Antworten in höchstens polynomieller Zeit. Dass der Kunstgriff gelang, Korrektheit und Effizienz des Verfahrens mit elementaren Mitteln zu beweisen, kommt einer Krönung der Arbeit gleich, ändert aber nichts daran, dass der Algorithmus ganz und gar den Zwecken der Komplexitätsreduktion verpflichtet ist. Kurzum: Wenngleich Primalität mit dem AKS-Primzahltest verlässlich und effizient entschieden werden kann, trägt sein Aufbau nichts zu einem tieferen Verständnis des Primzahlbegriffs bei und seine Anwendung auf Nicht-Primzahlen sagt (in den allermeisten Fällen) nichts über die Art ihrer Zusammensetzung aus.

Den Zweck der Komplexitätsreduktion darf man sich drittens nicht allzu praktisch denken. In der Kryptographie und weiteren Anwendungsbereichen werden nach wie vor andere Verfahren, besonders probabilistische, aufgrund ihrer Schnelligkeit bevorzugt.[439] Der AKS-Algorithmus hat, wie es scheint, bis *dato* kaum praktische Anwendung gefunden.[440] Seine Bedeutung erklärt sich vielmehr aus dem theoretischen Beitrag, den er leistet, sowie aus seiner historischen Stellung. Er gilt als der erste deterministische Primzahltest von nachweislich polynomieller Zeitkomplexität und damit als Beweis dafür, dass das Entscheidungsproblem für Primalität in die P-Klasse fällt (siehe 2.3.1.7). Dies zu zeigen, war denn auch der hauptsächliche Antrieb hinter der Entwicklung des Algorithmus. Die grosse Resonanz, auf die das AKS-Verfahren stiess, obgleich es für den praktischen Einsatz zunächst keinerlei Verbesserung der Laufzeiten ermöglichte, zeigt,

[438] Ausgenommen sind perfekte Potenzen, d. s. Zahlen von der Form m^k, wobei $m, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Diese werden in einem separaten Verfahrensschritt zuerst ausgesiebt. Vgl. Agrawal, Kayal u. a. (2004, S. 784 u. 789); Dietzfelbinger (2004, S. 117).

[439] Vgl. Kochar u. a. (2016).

[440] Vgl. aber Granville (2005, S. 24), für mögliche Weiterentwicklungen des AKS-Tests, aus denen sich praktische Anwendbarkeit ergeben könnte.

dass die Komplexitätslehre, die neben den älteren Berechenbarkeitstheorien geradezu praktisch und anwendungsorientiert wirkte, inzwischen zu einer vollwertigen Theorie mit eigenen Zielen und Idealen herangereift ist. Sie ist «die Disziplin, die auslotet, wo die Grenze zwischen effizient lösbaren und nicht effizient lösbaren Problemen verläuft».[441]

2.3.2. Beweise und Entscheidungsverfahren im Vergleich

Nach diesen Digressionen in die Geschichte der Arithmetik und des Primzahltestens ist es an der Zeit, die Befunde einzusammeln und den Bestimmungsort des Unterkapitels anzusteuern. In einer Gegenüberstellung von Beweisen und Entscheidungsverfahren sollen nun Gemeinsamkeiten und Unterschiede dargelegt werden. Beginnen wird der Vergleich dort, wo dieser Abschnitt begann: bei der Geschichte von der Verwandlung der Mathematik in eine ungeheure Trivialität.

Den Kern der Geschichte bildet die Vorstellung eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens. Dieser gewaltige Algorithmus hätte, so die Vorstellung, die Wahrheit beliebiger Behauptungen mathematischen Inhalts entscheiden können. Ungeheuerlich wirkt vor allem die sich scheinbar daraus ergebende Konsequenz, wonach die Verfügbarkeit eines solchen Verfahrens die Mathematik, soweit sie formalisierbar ist, entwertet, ja geradezu trivialisiert hätte. Die vielgestaltige Praxis des mathematischen Beweisens, die seit Jahrtausenden wie kaum eine andere Disziplin die menschliche Denkkraft zu Höchstleistungen anstachelt, wäre demnach durch das mechanische Anwenden eines *einzigen* Algorithmus ersetzt worden. Der Beweis, dass auf diesem Weg – früher oder später – die korrekte Antwort auf jede Frage gefunden wird, hätte das Bedürfnis nach neuen Beweisen ein für allemal gestillt. Es wäre dies sozusagen der letzte mathematische Beweis im tradierten Sinn gewesen.

Dass hier ein *non sequitur* vorliegt, dürften die betrachteten Beispiele hinreichend gezeigt haben. Tatsächlich spricht aus unseren Befunden Mehreres gegen diese Annahme, wonach eine Lösung des Entscheidungsproblems in seiner allgemeinsten Form die Mathematik in eine ungeheure Trivialität verwandelt hätte. Denn offenbar werden auch für Entscheidungsprobleme mit bekannten, mitunter trivialen Lösungen stets neue Algorithmen entwickelt. Das erfordert mathematische Arbeit nicht-trivialer Art, unter anderem in Form von Beweisen neuer Theoreme. Auch wäre es ein Irrtum, Theorien – zum Beispiel die algebraische Theorie reell abgeschlossener Körper – für mathematisch wertlos zu halten, nur weil ein Entscheidungsverfahren bekannt ist. Aus der Entscheidbarkeit

[441] Wegener (2003, S. 293). An anderer Stelle zählt Wegener die Komplexitätstheorie zu jenen Disziplinen, welche die «Grenzen des mit den vorhandenen Ressourcen Machbaren» ausloten (S. 6).

einer Theorie folgt nicht, dass ein tatsächlich brauchbarer Algorithmus existiert, der ihre Theoreme von den Nicht-Theoremen überall auseinanderhält. Und selbst wenn ein effizientes Entscheidungsverfahren verfügbar ist, lassen sich dadurch nicht alle Funktionen, die ein mathematischer Beweis zu erfüllen vermag, ohne Weiteres ersetzen. Dass bisweilen dennoch von der Entwertung eines Prädikats oder einer Theorie gesprochen wird, hängt mit einer Gemeinsamkeit und einem Unterschied zwischen Beweisen und Entscheidungsverfahren zusammen.

A. Unterschiedliche Multiplizitäten Wie ein Beweis seinem Begriff nach keine falsche Aussage beweisen kann, kann ein Entscheidungsverfahren keine falschen Antworten geben. Die Ergebnisse, die ein Entscheidungsverfahren liefert, wenn die darin enthaltenen Vorschriften fehlerfrei angewandt wurden, müssen ebenso notwendig wahr sein, wie es das Ergebnis eines mathematischen Beweises zu sein hat (2.3.1.2 und 2.3.1.7). Das haben Beweise und Entscheidungsverfahren gemeinsam, weshalb die Ersetzung der ersteren durch die Anwendung der letzteren wenigstens den apodiktischen Charakter der Mathematik und ihrer Ergebnisse bewahrt hätte. Und in gewissem Sinn lässt sich ein Entscheidungsverfahren durchaus dazu verwenden, einen Satz zu „beweisen". Zeigt ein Algorithmus, von dem wir zum Beispiel wissen, dass es sich um ein Entscheidungsverfahren für Primalität handelt, für eine Zahl an, sie sei prim, *wissen* wir mit mathematischer Gewissheit, dass sie prim ist.

Diesen Vergleich könnte man nun umkehren und sagen, dass Beweise die Wahrheit von Sätzen insofern „entscheiden", als jeder Beweis eine Vermutung gleichsam als Eingabe annimmt, um nach endlich vielen Schritten auszugeben, dass sie wahr ist. In dieser Richtung aber hinkt der Vergleich und es drängen sich vielmehr die Unterschiede auf. Das Entscheidungsverfahren entscheidet eine ganze Reihe von Fragen, typischerweise abzählbar unendlich viele (2.2.2). Ausserdem schlägt es in beide Richtungen aus, indem es sowohl das Zutreffen als auch das Nicht-Zutreffen des Prädikats auf die geprüften Gegenstände korrekt anzeigt. Der Beweis dagegen vermag bloss die Wahrheit zu zeigen und dies auch nur für einen einzigen Satz. (Selbstverständlich lässt sich aus einem Beweis die Wahrheit weiterer Sätze *erschliessen* wie auch die Falschheit mancher Behauptung, insbesondere der Negation des Satzes, den er beweist. Aber dazu bedarf es eben weiterer Schritte und, wo der angehängte Schluss nicht offensichtlich ist, weiterer Beweise. Für sich betrachtet gilt der Beweis allein dem Satz, dessen notwendige Wahrheit er offenbart, 2.3.1.2.)

Der Beziehung des Entscheidens kommt folglich eine grössere Multiplizität zu als der entsprechenden Beweisbeziehung. Entscheidungsverfahren sind, wenn schon, Schablonen, die als schematische Vorlagen zur Herstellung von Beweisen dienen können. Ohne diesen wesentlichen Unterschied wäre die Vorstellung, dass an die Stelle einer Vielzahl von Beweisen ein einziges Entscheidungsverfahren für Tautologizität treten könnte, offensichtlich absurd. Auch die Ansicht, wonach die Verfügbarkeit von Entscheidungsverfahren das von ihnen abgedeckte Gebiet mathematisch entwertet (2.3.1.7), setzt eine weitreichende Multiplizität voraus. Jedes Verfahren, das eine Theorie entscheidet, muss alle Sätze, die in ihr enthalten sind oder aus ihr folgen, sicherstellen können (2.2.1). Nur so ist jeder Zweifel darüber aufgehoben, dass und mit welchen Mitteln jede Wahrheit auf dem Gebiet bewiesen werden kann – zumindest prinzipiell.

B. Hyperintensionalität und Extensionalität Gegen diese Kontrastierung von Beweisen und Entscheidungsverfahren liesse sich indes einwenden, dass die Glieder der Analogie falsch gewählt wurden. Entscheidungsverfahren entscheiden zwar typischerweise eine Vielzahl von Fragen, sie lösen jedoch, könnte man dagegenhalten, nur ein einzelnes Entscheidungsproblem, wie ja auch ein Beweis einen einzelnen Satz beweist. Was dem Beweis der bewiesene Satz ist, ist dem Entscheidungsverfahren das gelöste Problem.

So betrachtet wird tatsächlich eine zweite Gemeinsamkeit zwischen Beweisen und Entscheidungsverfahren sichtbar – wenn auch nicht die eben vermutete. Wie sich im Verlauf dieses Unterkapitels zeigte, erlauben bereits gelöste Entscheidungsprobleme immer neue Lösungen, und Gleiches gilt für Sätze und ihre Beweise. Aus den betrachteten Beispielen schien sogar hervorzugehen, dass dem Streben nach neuen Beweisen für alte Sätze das Streben nach neuen Algorithmen für längst gelöste Probleme entspricht. Wie auf den ersten Beweis eines Satzes zumeist viele weitere folgen, ist ein Problem mit seiner ersten, womöglich trivialen Lösung oft noch nicht erledigt.

In dieser Gemeinsamkeit zeigen sich wieder wichtige Unterschiede. Dasselbe Entscheidungsverfahren kann – unter gewissen Bedingungen – dazu dienen, verschiedene Entscheidungsprobleme zu lösen. Sind zwei Prädikate P und Q extensionsgleich über der relevanten Prüfmenge, ist *jedes* Entscheidungsverfahren für P zugleich ein Entscheidungsverfahren für Q. Ist die Extensionsgleichheit bekannt – sei es, weil sie offenkundig, oder, weil sie bewiesen ist –, darf jedes Entscheidungsverfahren für P ohne Weiteres zur Entscheidung von Q verwendet werden. Es müssen, wie aus der Besprechung des Entscheidungsproblems der Aussagenlogik hervorging (2.3.1.6), nicht einmal gleiche Extensionen vorliegen. Andere Verhältnisse, insbesondere der kontradiktorische Gegensatz zwischen Prädikaten, ermöglichen ebenfalls die Verwendung ein und desselben Verfahrens zur Entscheidung verschiedener Prädikate. Das Verfahren ist dann lediglich um eine passende Gebrauchsanweisung zu ergänzen. Entscheidungsverfahren entscheiden also nie nur ein einziges Prädikat, sondern immer auch alle diejenigen, von denen man weiss, dass sie zu dem ersten extensionsgleich sind; und darüber hinaus ermöglichen sie die Entscheidung einer Reihe weiterer Prädikate, die zu dem ersten in bestimmten Verhältnissen stehen – gleichgültig, wie weit die Prädikate inhaltlich auseinanderliegen mögen. Darin äussert sich die ausgeprägte Extensionalität des Begriffs eines Entscheidungsverfahrens.

Dagegen lässt sich ein und derselbe Beweis nicht ohne Weiteres dazu verwenden, verschiedene Sätze zu beweisen, selbst wenn ihre Äquivalenz feststeht. Bewiese der Beweis eines Satzes zugleich auch jeden bekanntlich äquivalenten Satz, wäre ein einziger Beweis ausreichend, um alle Sätze der Mathematik auf einen Schlag zu beweisen. Dieser Punkt lässt sich am Beispiel formaler Beweise besser verdeutlichen. Angenommen, φ sei ein Satz, für den in einem vollständigen Kalkül ein formaler Beweis vorliegt (d. i. eine den Schlussregeln gemässe Ableitung aus den vorgegebenen Axiomen). Ausserdem sei aufgrund semantischer Überlegungen über einen von φ verschiedenen Satz ψ bekannt, dass er zu φ äquivalent ist (dass also ψ unter allen Interpretationen wahr ist, unter denen φ wahr ist und *vice versa*). Ein formaler Beweis des Bikonditionals $\varphi \leftrightarrow \psi$ liege indessen nicht vor. Dann wissen wir zwar, dass ψ in dem Kalkül ebenfalls beweisbar ist, trotzdem kann uns der formale Beweis von ψ unbekannt sein. Die Ableitung von φ kann allein schon deshalb nicht als Beweis von ψ herhalten, weil in dieser eben φ und nicht ψ als die erreichte Konklusion ausgewiesen wird, typischerweise indem sie auf der letzten Zeile der Ableitung steht. Im Allgemeinen jedoch ist es nicht möglich, φ an dieser Stelle durch ψ zu ersetzen. Die Ableitung von φ müsste dafür um den formalen Beweis von $\varphi \leftrightarrow \psi$ ergänzt werden.

Ein Beweis kann seinem Begriff nach also gerade *einen* Satz beweisen, nicht mehr und nicht weniger. Jeder Beweis ist ein Beweis *seines* Satzes und keines anderen. Daraus ergibt sich, dass, wenn die Aussage „B ist ein Beweis für p“ wahr ist, die Aussage „B ist ein Beweis für q“ falsch sein kann, obwohl p und q logisch äquivalent sind und damit notwendigerweise den gleichen Wahrheitswert haben. Der Beweisbegriff ist – im Gegensatz zum Begriff eines Entscheidungsverfahrens[442] – hyperintensional. Das gilt für den

[442] Die Bedingungen, die durch unsere Festlegungen zu Beginn des Kapitels an Entscheidungsverfahren gestellt werden, sorgen dafür, dass die Hyperintensionalität, die durch den Prädikatsbegriff einfliesst, sogleich wieder eliminiert wird. Die anschliessende Diskussion epistemischer Eignung (in 2.2.2 und 2.2.3) enthält mehrere Versuche, die Hyperintensionalität in den Entscheidbarkeitsbegriff einzubau-

Begriff formaler Beweise ebenso. (Zugegeben, die Aussage, wonach kein Beweis mehr als einen Satz beweisen kann, macht von einem eher strengen Identitätskriterium für Beweise Gebrauch. Beim Reden über nicht-formale Beweise kommen oftmals weniger strenge Kriterien zur Anwendung. Zum Beispiel wäre es nicht unüblich von einem Beweis des allgemeinen Satzes $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ zu sagen, dass er auch Qa beweist, wenn es offensichtlich genug ist (d. h. keines Beweises bedarf), dass es sich bei a um ein P handelt.[443] Die Hyperintensionalität des Beweisbegriffs ist durch Redeweisen wie diese indes nicht tangiert. Zu behaupten, jeder Beweis von $\forall x(Px \rightarrow Qx)$ sei auch ein Beweis von $\forall x(Px \rightarrow Rx)$ für alle zu Q koextensionalen R, würde jeden Beweisbegriff sprengen, der sich zur Beschreibung mathematischer Praxis eignet.)

C. Trivialisierung und Effizienzsteigerung Wie derselbe Satz verschiedene Beweise haben kann, kann dasselbe Prädikat durch verschiedene Algorithmen entschieden werden. Diese gemeinsame Eigenschaft bildet die begriffliche Grundlage sowohl für den Trivialisierungsdrang, dem die Praxis des vielfachen Beweisens geschuldet ist, wie auch für das Streben nach algorithmischer Effizienz. Viel weiter als über diese Grundlage hinaus reichen die Gemeinsamkeiten indessen nicht. Es überwiegen vielmehr die Unterschiede.

Die ausgeprägte Extensionalität des Entscheidbarkeitsbegriffs – dass jedes Entscheidungsverfahren für P auch ein Entscheidungsverfahren für alle koextensionalen Q darstellt – gibt dem Streben nach neuen Algorithmen eine Richtung. Erlaubt das fragliche Prädikat keine direkte algorithmische Umsetzung oder lediglich eine ineffiziente, wird nach Prädikaten von gleicher Extension Ausschau gehalten, die sich direkt oder auf überschaubaren Umwegen in ein Entscheidungsverfahren umwandeln lassen. Das Ziel ist vergleichsweise klar bestimmt, inzwischen wurde dazu eine ganze Theorie entwickelt: Die Komplexität des Algorithmus soll möglichst gering ausfallen.[444] Ganz anders nimmt sich die Praxis des vielfachen Beweisens aus. Hier wird verschiedenen, teils gegensätzlichen Idealen nachgestrebt, neben der Einfachheit oder Kürze des Beweises insbesondere auch seiner Elementarität. Entsprechend verschiedenartig sind die Beweismittel – die Begriffe und Methoden –, die in den diversen Beweisen desselben Satzes zur Anwendung kom-

en, sodass Prädikate, die notwendigerweise extensionsgleich sind, nicht zwingend beide entscheidbar oder beide unentscheidbar sein müssen. Diese Versuche scheitern jedoch und der extensionale Begriff setzt sich durch. Auch Kleene deutet die Möglichkeit an, mit einem hyperintensionalen Entscheidbarkeitsbegriff zu arbeiten, allerdings ohne sie weiterzuverfolgen, vgl. Kleene (1967, S. 229 (Anm. 164)).

[443] Eine kompakte Besprechung unterschiedlicher Identitätskriterien für Beweise findet sich in Dawson (2006, S. 272-275).

[444] Für die Zwecke der Gegenüberstellung lasse ich hier ausser Acht, dass es verschiedene Dimensionen der Komplexität gibt: neben der zeitlichen Komplexität (siehe Anm. 422 und 432) auch eine räumliche Komplexität, die den Speicherplatz betrifft, vgl. Wegener (2003, Kap. 13).

men. Um den Satz, könnte man sagen, steht es umso besser, je grösser die Zahl und unterschiedlicher die Arten der zu ihm hinführenden Wege. In dieser ungeordnet wirkenden Beweistätigkeit Muster ausmachen zu wollen, mutet bisweilen aussichtslos an. Und selbst wenn sich durch die verschiedenen Unterfangen hindurch ein genereller Drang zur Trivialisierung tatsächlich feststellen lässt, wie Rota meint, fällt es doch schwer, genau zu sagen, was einen Beweis oder seinen Satz zu einem trivialen macht. Was den einen als trivial gilt, wirkte auf andere überraschend, verwirrend, ja unbegreiflich. Manchmal reicht es, die Darstellungsweise zu ändern, um einen Satz trivial erscheinen zu lassen, während in anderen Fällen zuerst die ganze begriffliche Umgebung umgepflügt werden muss. Jedenfalls ist es um den Trivialitätsbegriff zu keiner vergleichbaren Theoriebildung gekommen wie um den Komplexitätsbegriff.

Der mathematische Trivialisierungsdrang verlangt nach Verständnis. Man möchte besser verstehen, was man schon weiss. Ist die begriffliche Umgebung eines Satzes durchleuchtet, das Wegenetz um ihn herum ausreichend ausgebaut, nimmt das Beweisen ein Ende. Mit dem Lösen von Entscheidungsproblemen verhält es sich anders. Typischerweise erweist sich die Angabe eines trivialen Algorithmus, der das fragliche Prädikat entscheidet, als praktisch nutzlos. Gesucht sind vielmehr Lösungen, die den verschiedenen Anforderungen der Anwendungspraxis entsprechen. Das Effizienzstreben zielt darauf ab, Algorithmen zu entwickeln, die nicht auf die stark idealisierenden Annahmen abstrakter Berechenbarkeitstheorien angewiesen sind, um Ergebnisse zu liefern, sondern mit den tatsächlich vorhandenen Ressourcen auskommen. Für diesen Zweck ist man sogar bereit, auf probabilistische Verfahren auszuweichen und die mathematische Notwendigkeit der Ergebnisse zu opfern, wenn nur ein hinreichender Nutzen daraus hervorgeht. Dagegen ist ein Beweis, der es verpasst, die notwendige Wahrheit seines Satzes zu zeigen, schlicht kein Beweis.

Im Gegensatz zu Entscheidungsverfahren bedürfen Beweise denn auch keines Beweises ihrer Korrektheit. Jeder Beweis hat für sich selbst zu sorgen, mithin die notwendige Wahrheit des Satzes, den er beweist, hinreichend zu begründen. Ein Entscheidungsverfahren überzeugt von dem Ergebnis, das es anzeigt, folglich auf andere Weise als ein Beweis. Neben dem Korrektheitsbeweis braucht es noch das Vertrauen oder die Kontrolle, dass der Algorithmus in all seinen Durchläufen keine Fehler begangen hat. Während die Gewissheit mathematischer Sätze allein auf überschaubaren Beweisen beruht, braucht es, um sich der Richtigkeit algorithmischer Ergebnisse sicher zu sein, eines separaten Beweises sowie der Annahme fehlerfreier Anwendung.

Gewiss wird es bei der Suche nach effizienten Algorithmen oft nützlich sein, die begriffliche Umgebung des zu entscheidenden Prädikats zu durchforsten. Wie das Beispiel des AKS-Primzahltests jedoch verdeutlicht, liegt die Herausforderung nicht im Auffinden koextensionaler Prädikate oder in den Beweisen ihrer Extensionsgleichheit (2.3.1.8). Die Schwierigkeit besteht vielmehr darin, Gebrauchsanweisungen für diese Prädikate auszuklügeln, die eine effiziente Entscheidung des ursprünglichen Prädikats ermöglichen. Dass der resultierende Algorithmus korrekt arbeitet und überall terminiert, gilt es zwar mit einem mathematischen Beweis abzusichern. Ob dadurch aber die begriffliche Umgebung dieses Prädikats, etwa des Primzahlbegriffs, weiter beleuchtet wird, ist bestenfalls nebensächlich.

Durch die Angabe effizienter Entscheidungsverfahren werden Prädikate daher nicht zwingend entwertet. Ein Prädikat, dessen algorithmische Umsetzung alle Wünsche erfüllt, kann aus begrifflicher Sicht nach wie vor von Interesse sein. Als in der Pionierzeit der mathematischen Logik manche meinten, dass mit der Algorithmisierung eines Gebiets seine mathematische Entwertung einhergehe, übersahen sie nicht nur die Komplexitätsfrage, sondern auch die Kluft zwischen Algorithmen und Beweisen. Entscheidungsverfahren verschaffen in der Regel nicht das gewünschte Verständnis. Um einen respektablen Satz mathematisch zu entwerten, muss man ihn trivialisieren: ihn durch abermaliges Beweisen über verschiedene Wege auf solche Weise erschliessen, dass angenommen werden darf, alle begrifflichen Einsichten, die sich aus ihm ziehen lassen, seien nun klar und deutlich ausgebreitet. Der Satz kann dann noch als Knotenpunkt auf dem weiteren Wegenetz dienen und bestenfalls Begriffsbahnen eröffnen, die zu neuen und interessanten Begriffen führen.

Dieser Darstellung der Kluft zwischen einer algorithmischen und einer begrifflichen Mathematik lässt sich gleichwohl Verschiedenes entgegenstellen. So besteht mitunter die Möglichkeit, Verfahren zu entwickeln, die über das Prädikat, das sie entscheiden, mehr verraten, als lediglich sein Zutreffen und Nicht-Zutreffen. Auf dem Gebiet der Zahlentheorie zum Beispiel gibt es Algorithmen, die Primalität nicht nur entscheiden, sondern auch sogenannte Primzahlzertifikate ausstellen. Zertifikate dokumentieren die entscheidenden Schritte, die ein Algorithmus bis zur Ausgabe durchlaufen hat, und sind deutlich kürzer als die Aufzeichnung eines vollständigen Durchlaufs. Aus den Angaben, die in Primzahlzertifikaten enthalten sind, lassen sich vergleichsweise kurze und übersichtliche Beweise für die Primalität des Eingabewerts zusammenstellen, ohne dass nochmals alle

Schlaufen des Algorithmus durchlaufen werden müssten.[445] Zumindest für solche Zwecke scheint es daher denkbar, das Beweisen durch den Einsatz von Algorithmen zu ersetzen.

Auch Entscheidungsverfahren für Tautologizität oder andere logische Prädikate können an die Stelle von Beweisen treten. So ist es unter Umständen möglich, solche Algorithmen als Schablonen zu verwenden, um reihenweise Ableitungen, mithin formale Beweise für die Sätze einer gegebenen Theorie zu erzeugen. Voraussetzung ist, dass die Theorie vollständig axiomatisiert wurde. Ein Beispiel ist die vorhin erwähnte Theorie der reell abgeschlossenen Körper, da für sie ein Entscheidungsverfahren bekannt ist, das eine einheitliche Methode hergibt, um ihre Theoreme systematisch aus ihren Axiomen abzuleiten.[446] Es scheint demnach, als wäre wenigstens auf dem Gebiet der reell abgeschlossenen Körper das Ideal einer vollständigen Mechanisierung erreicht worden.

Formale Ableitungen, die auf solche Weise erzeugt wurden, entbehren in der Regel jedoch mehrerer Eigenschaften, die man von guten Beweisen erwartet. Ein Problem besteht darin, dass die Schrittfolgen, die aus der einheitlichen Anwendung des Entscheidungsverfahrens auf die Axiome resultieren, derart lang und unübersichtlich ausfallen können, dass sie sich mit vernünftigem Aufwand nicht nachvollziehen lassen.[447] Offenkundig wird es dem Nachvollzug des Beweisgangs kaum zuträglich sein, allen Schlaufen und Sackgassen zu folgen, die ein Algorithmus auf seinem langen Weg ins Ziel durchlaufen muss – sofern dies nicht ohnehin die Grenzen des praktisch Machbaren sprengen würde. Ein Mangel an Übersichtlichkeit lässt sich allerdings nicht nur bei Ableitungen feststellen, die durch das Anwenden von Entscheidungsverfahren erzeugt wurden. Formale Beweise gelten generell als unübersichtlicher und weniger leicht nachvollziehbar als ihre nicht-formalen Verwandten. Das hängt unter anderem damit zusammen, dass jede

[445] Vgl. dazu Riesel (1994, S. 106-107): «In the course of proving a number N prime using the above mentioned methods, the proof depends upon which of the numbers $N+1$ or $N-1$ or some other number has been factored, and to what extent. This procedure is often repeated recursively, until the numbers involved are small enough to be considered trivial with today's computing standards. In order to be able to reproduce the proof of primality without having to repeat this search for suitable numbers to factor, and to repeat their factoring, one could give a list of all the stepping stones used to arrive at the proof. Such a list, with some explanations, is called a *primality certificate* for the number N [...]. Also some of the modern methods of primality proving for general integers, such as the elliptic curve method, need a lot of computer search before a proof may be found, but after the proof is found, it is comparatively easy to reproduce it once the key information constituting the proof is available. The computer programs for these types of calculations thus normally output this key information in the form of a primality certificate». Für eine Darstellung der Mathematik, die verschiedenen Methoden der Herstellung von Primzahlzertifikaten zugrunde liegt, vgl. Williams (1998, Kap. 14).

[446] Vgl. Mancosu und Hafner (2008, S. 158-162).

[447] Für das Beispiel der reell abgeschlossenen Körper, vgl. Mancosu und Hafner (2008, S. 159 (insbes. Anm. 2)).

noch so triviale Annahme, jede noch so gängige Definition als separater Schritt in die Beweisführung aufgenommen werden muss. Formale Ableitungen von Theoremen, für die sich in Lehrbüchern kurze und prägnante Beweise finden, können zehntausende Zeilen oder mehr umfassen. Der erste mit einem Beweisassistenten überprüfte formale Beweis des Primzahlsatzes umfasst zum Beispiel rund 30'000 Zeilen (oder 673 Seiten Skript). Für Selbergs Beweis, nach dem sich der formale Beweis richtet, reichten dagegen weniger als 10 A4-Seiten.[448]

Fehlende Übersichtlichkeit im Beweis tangiert nicht nur die Gewissheit des Satzes, dessen Wahrheit es zu zeigen gilt, sondern auch das, was wir als begründende oder erklärende Funktion von Beweisen bezeichnet haben (2.3.1.2). Worüber man sich keine Übersicht zu verschaffen vermag, wird man auch kein Verständnis erlangen. Doch selbst wenn ein formaler Beweis kurz genug ausfällt, dass er in seiner Gesamtheit übersehbar ist – sich mithin die relevanten Zusammenhänge auf jeder Strukturebene in ihrem Zusammenspiel nachvollziehen lassen –, würden nicht wenige den Verständnisgewinn wenn nicht ganz in Abrede stellen, dann zumindest deutlich geringer einstufen als bei einem geschickt aufgebauten nicht-formalen Beweis. Einer verbreiteten Ansicht nach scheitern formale Beweise in der Regel daran, jene Art von Einsicht in die begrifflichen Zusammenhänge zu bieten, die von guten Beweisen erwartet wird. Aus diesem Grund lieferten sie auch keine befriedigende Erklärung für die Wahrheit der Sätze, die sie beweisen.[449]

Andererseits – und das scheint mir ein Punkt, der oft vergessen geht in den Diskussionen über die unterschiedliche Erklärungskraft von Beweisen – müssten formale Beweise doch als im strengsten Sinn des Worts *elementar* gelten. Formale Beweise stützen sich ja auf nichts anderes ab als auf die Axiome der betreffenden Theorie und bedienen sich von da aus nur rein logischer Mittel, um ihr Ziel zu erreichen. Keiner anderen Art von Beweis lässt sich so lückenlos entnehmen, auf welchen Axiomen das Theorem beruht und was die einzelnen Schritte sind, um es aus ihnen herzuleiten. Leistet dies nun nicht auch einen bedeutsamen Beitrag an das Verständnis dafür, weshalb die erreichte Konklusion wahr sein muss?[450] Wird darüber hinaus gefordert, dass die Konklusion nach Prinzipien einer relevantistischen Logik aus den Prämissen folgen muss, lassen sich zudem gewis-

[448] Für die beiden Beweise, vgl. Avigad, Donnelly u. a. (2007, S. 8) und Selberg (1949). Zur Diskrepanz bezüglich Umfang und Aufwand, vgl. Avigad und Harrison (2014, S. 75).

[449] Vgl. stellvertretend Robinson (2000); vgl. auch Avigad und Harrison (2014, S. 73) für eine interessante Verortung dieser Ansicht innerhalb einer breiteren Debatte über das Wesen mathematischer Forschung.

[450] Auf diesen oft übersehenen Punkt wird in Detlefsen (2008a, S. 19) hingewiesen.

se formale Beweise eliminieren, denen es deshalb an Erklärungskraft mangelt, weil sie Prämissen beinhalten, die es nicht braucht, um zur Konklusion zu gelangen.[451]

Abschliessend können wir also festhalten, dass formale Beweise womöglich doch ein grösseres Erklärungspotenzial besitzen, als ihnen oftmals zugestanden wird. Trifft dies zu, liegt der Schluss nahe, dass sich die Kluft zwischen rechnender und begrifflicher Mathematik verkleinern, ja vielleicht einmal ganz schliessen lassen könnte. Intelligente Algorithmen würden in diesem Fall nicht nur dazu dienen, Beweise zu verifizieren, sie wären auch dabei behilflich, das Verständnis mathematischer Sätze zu vertiefen, indem sie übersichtliche und begrifflich aufschlussreiche Beweise für uns bereitstellen.[452] Sollte sich hingegen bei näherer Betrachtung die Differenz in Bezug auf Erklärungskraft als grundlegend und unüberwindbar erweisen, ist nicht zu sehen, wie durch algorithmische Methoden alle Funktionen ersetzt werden könnten, die das Beweisen in der mathematischen Praxis erfüllt. In diesem Fall müsste die Vorstellung, wonach elementare Beweise besonders wertvolle Erklärungen liefern, überdacht werden. Entsprechende Bedenken hatten sich ja bereits am Ende der Digression in die Beweisgeschichte des Primzahlsatzes angedeutet (2.3.1.5).

Bevor an eine Überwindung oder Konsolidierung der festgestellten Kluft überhaupt gedacht werden kann, bedarf es – soviel ist klar – einer gründlicheren und weitaus umfassenderen Untersuchung des Verhältnisses zwischen sicherstellender und erklärender Funktion von Beweisen. Erst wenn wir die epistemischen Vorzüge normaler Beweise, wie sie typischerweise in mathematischen Forschungspapieren und Lehrbüchern anzutreffen sind, besser verstanden und mit den Vorzügen formaler Ableitungen abgewogen haben, lassen sich Fortschritte in die eine oder in die andere Richtung erwarten. Dabei gilt es zu bedenken, dass durch die allgemein feststellbare Zunahme der Länge und Komplexität von Beweisen sowie durch die Häufung computergestützter Arbeiten auch die Standards dafür, was als guter und erklärungskräftiger Beweis gilt, verschoben werden.

D. Fazit Die Betrachtungen in diesem Kapitel sollten den Boden vorbereiten für die Untersuchung des Zusammenhangs von Unentscheidbarkeit und Buchstabengebrauch in

[451] Dass die klassische Logik Ableitungen erlaubt, die aus semantischer oder epistemischer Sicht unzureichend sind, ist wohlbekannt. Ein schematisches Beispiel wird in Dawson (2006, S. 274) gegeben: «in classical first-order logic, any two theorems, proved from the same set of axioms, are equivalent in all models of those axioms. From a syntactic standpoint, that means that given a proof of S, together with a proof from the same axioms of any other statement T, we can obtain another formal proof of S by applying *modus ponens* to the concatenation of proofs of T and of $T \to S$, even though T may be semantically irrelevant to S. Such arguments, however, do not occur in actual mathematical practice».

[452] Für Entwicklungen in diese Richtung, vgl. Kaiyu und Deng (2019).

der Prädikatenlogik. Ziel war es, sich ein klareres Verständnis von Entscheidbarkeits- und Unentscheidbarkeitsurteilen zu verschaffen. Da das Kapitelende erreicht ist, gilt es jetzt das Wichtigste kurz zusammenzutragen und auf die Frage zu antworten, die zu Beginn gestellt wurde: Was weiss man, wenn man weiss, dass ein Prädikat P entscheidbar ist? Was ist damit ausgesagt über P und was lässt sich daraus folgern?

Die kurze Antwort lautet: Im Allgemeinen nicht viel. Wie sich im ersten Unterkapitel (genauer in 2.2.2) gezeigt hat, gibt es Sachlagen, in denen die Entscheidbarkeit von P allein darauf zurückzuführen ist, dass die Prüfmenge nur endlich viele Ps oder nur endlich viele nicht-Ps zählt. Dabei können die Umstände so gelagert sein, dass jeder Algorithmus, dessen Existenz die Entscheidbarkeit von P verbürgt, ausser Reichweite bleiben muss. In solchen Fällen ist es unmöglich, eine Lösung für das betreffende Problem anzugeben. Man weiss um die Entscheidbarkeit des Prädikats und ist doch ausserstande, es zu entscheiden.

Die Extensionalität des Entscheidbarkeitsbegriffs wirkt sich auch auf die typische Sachlage aus, bei der das fragliche Prädikat auf unendlich viele Elemente der Prüfmenge zutrifft und auf gleich viele nicht. Haben zwei Prädikate P und Q die gleiche Extension, ist jedes Entscheidungsverfahren für P zugleich ein Entscheidungsverfahren für Q. Es ist also möglich, P durch einen Algorithmus zu entscheiden, der dazu entwickelt wurde, Q zu entscheiden. Begrifflich können P und Q beliebig weit auseinanderliegen, sodass sich ihre Extensionsgleichheit nicht weniger zufällig ausnimmt als der Zusammenhang der ζ-Funktion mit dem Auftreten der Primzahlen (2.3.1.5). Die Angabe von Entscheidungsverfahren für koextensionale Q muss über den begrifflichen Gehalt von P folglich nicht viel verraten. Dass der Umweg über ein solches Q genommen wird, um P zu entscheiden, kann jedoch auf Schwierigkeiten bei der Algorithmisierung von P hindeuten. Womöglich lässt sich P in keinen effizienten Algorithmus umsetzen oder es ist überhaupt keine direkte Umsetzung möglich (2.2.2.5).

Fällt es hingegen leicht, ein Prädikat P algorithmisch umzusetzen, mithin aus dem begrifflichen Gehalt von P ein Entscheidungsverfahren zu gewinnen, ist das zugehörige Problem trivial. Der Befund über die Entscheidbarkeit von P sagt auch in diesem Fall nicht viel aus. Über ein triviales Entscheidungsverfahren für P zu verfügen, ist in der Praxis zudem oft nutzlos. Algorithmen von exponentieller Komplexität erweisen sich bei grösseren Eingabewerten rasch als gänzlich ungeeignet. Die anhaltende Forschung am SAT-Problem der Aussagenlogik (2.3.1.6) zeigt, dass nicht jedes triviale und längst gelöste Entscheidungsproblem deswegen schon erledigt ist, im Gegenteil. Aus der Angabe irgendeines Entscheidungsverfahrens für P lässt sich noch kein Anspruch auf Kontrolle über die Extension von P ableiten. Und selbst wenn, wie beim Primzahlbegriff (2.3.1.7), die Umsetzung in einen effizienten Algorithmus gelingt, kann das rein mathematische Interesse am betreffenden Prädikat bestehen bleiben. Ungeachtet der zu erwartenden Fortschritte auf dem Gebiet des Primzahltestens und der Primfaktorzerlegung wird der *Begriff* einer Primzahl auch kommende Generationen in seinen Bann schlagen und zu begrifflichen Höchstleistungen anspornen.

Gleiches gilt für entscheidbare Theorien. Mit der Angabe eines Entscheidungsverfahrens ist weniger erreicht, als mitunter gedacht wird. Gut möglich, dass sich der entscheidende Algorithmus in der Praxis als ungeeignet erweist, sodass zuerst nach effizienteren Verfahren gesucht werden muss. Ist einmal ein Entscheidungsverfahren entwickelt, das die Theorie in ihrer Gesamtheit entscheidet, ohne die gesetzten Komplexitätsgrenzen zu überschreiten, folgt daraus nicht zwingend die mathematische Entwertung des Gebiets, das durch die Theorie abgedeckt wird. Die erklärende Funktion des Beweisens (2.3.1.2) lässt sich durch algorithmisch Erzeugtes so leicht nicht ersetzen.

Was aber weiss man, wenn man weiss, dass ein Prädikat P oder eine Theorie T *un*entscheidbar ist? Mit Sicherheit, dass keine untypische Sachlage vorliegt, dass es also unendlich viele Ps und unendlich viele nicht-Ps geben muss, dass unendlich viele Sätze aus T folgen und unendlich viele nicht. Mehr als das weiss man, wie müssig es wäre, nach einem Algorithmus zu suchen, der das Zutreffen oder Nicht-Zutreffen von P und das Folgen oder Nicht-Folgen aus T überall mit endlichem Aufwand korrekt bestimmt. Einen solchen Algorithmus kann es nicht geben, wenn P und T unentscheidbar sind. Dass sie unentscheidbar sind, heisst ja, dass für ein bestimmtes Prädikat über einer gegebenen Prüfmenge *kein* Entscheidungsverfahren existiert. Unentscheidbarkeitsurteile enthalten also eine Allaussage über solche Verfahren. Um Beweise für Unentscheidbarkeitsurteile erbringen zu können, müssen daher die infrage kommenden Algorithmen als mathematische Gegenstände behandelt werden. Dafür braucht es aber eine «vollkommene mathematische Präzisierung» des Begriffs eines Entscheidungsverfahrens.[453]

Zu Beginn des nächsten Kapitels werden wir auf diese Notwendigkeit und ihre möglichen Umsetzungen zurückkommen. Im Rahmen des vorliegenden Texts wird es jedoch nicht möglich sein, diesen Punkt mit der nötigen Sorgfalt zu erörtern. Dieses zweite Kapitel bietet lediglich eine Grundlage, von der aus zu einem späteren Zeitpunkt weitere Betrachtungen ausgehen könnten. Hier sei dazu nur noch so viel gesagt: Obwohl die Logikpioniere der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts bestrebt waren, präzise einzufangen, was es heisst, mathematische Probleme mit *finiten* Mitteln zu lösen, wurden durch ihre

[453]Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 355).

Präzisierungen die Grenzen des Entscheidbaren weit ins theoretisch Idealisierende verlegt. So zieht etwa das Unentscheidbarkeitstheorem der Prädikatenlogik erster Stufe die Grenze in grosser Entfernung von allem praktisch Machbaren. Durch diese Grenze wird nach innen für das Berechenbare und Entscheidbare ein breites Gebiet abgesteckt, das erst erkundet und bearbeitet werden wollte. Entsprechend haben die Ergebnisse aus der Pionierzeit nicht nur die Entwicklung von Theorien wie die der rekursiven Funktionen oder der Turingmaschinen veranlasst, mit denen sich das Grenzgebiet von beiden Seiten her beleuchten lässt. Auch die Komplexitätstheorie mit ihren eigenen, vom technologischen Fortschritt getragenen Zielen und Idealen ist letztlich aus diesen frühen Resultaten hervorgegangen.

3. Annäherungen an den Zusammenhang zwischen Unentscheidbarkeit und Buchstabengebrauch in logischen Formalsprachen

What evidently gives general quantification theory its escape velocity is the chance to switch or fuse the variable attached to a predicate letter, so as to play ‹Fyx› or ‹Fxx› against ‹Fxy›.

It is in such permutations and identifications that the bound variable enters essentially into the algorithm, and here it is, by the way, that decision procedures cease to be generally available. [...] The variable, then, it seems, is the focus of indecision.

3.1. Einleitung

Das Entscheidungsproblem, dem wir uns in diesem Kapitel zuwenden, galt einmal als das Hauptproblem der mathematischen Logik. Es ist die Frage nach einem Entscheidungsverfahren für das semantische Prädikat der Tautologizität oder Allgemeingültigkeit über der gesamten Formelmenge einer logischen Formalsprache. Wie wir inzwischen wissen, ist die Prädikatenlogik bereits ab der ersten Stufe unentscheidbar. Doch als das Problem zu Beginn der 1920er Jahren erstmals klar gefasst wurde, fehlte die begriffliche Umgebung, um an einen Beweis seiner Unlösbarkeit auch nur zu denken. John von Neumann

Die dem Kapitel vorangestellten Passagen sind zwei Aufsätzen Quines entnommen, vgl. Quine (1981a, S. 162) und Quine (1976c, S. 282).

zweifelte früh daran, dass das Entscheidungsproblem gelöst werden könnte, und erachtete das Vorhandensein von Unentscheidbarkeit als «Conditio sine qua non dafür, dass es überhaupt einen Sinn habe, mit den heutigen heuristischen Methoden Mathematik zu treiben». 1925 sah er gleichwohl noch keinen «Anhaltspunkt dafür [...], wie ein solcher Unentscheidbarkeitsbeweis zu führen wäre».[454] Durch gewisse Einschränkungen der Formelmenge gelang es zwar ziemlich rasch, partielle Lösungen des allgemeinen Problems zu geben.[455] So konnte die im Wesentlichen bereits bewiesene Entscheidbarkeit über dem monadischen Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe zu Beginn der 1920er Jahren auch für die zweite Stufe (sogar inklusive Identität) bewiesen werden. Im weiteren Verlauf des Jahrzehnts liess sich ausserdem über mehreren Präfixklassen (d. h. über Formeln, die in Pränexform eine bestimmte Quantorenabfolge besitzen) Entscheidbarkeit nachweisen.[456] Aber diese Ergebnisse gründeten letztlich in einer Reduktion auf das aussagenlogische Entscheidungsproblem, dessen Lösung keine Schwierigkeiten aufgeworfen hatte. Wie ein Entscheidungsverfahren über der uneingeschränkten Formelmenge nur schon der ersten prädikatenlogischen Stufe aussehen könnte, blieb völlig unklar.

Die Hoffnung auf allgemeine Lösungen des Entscheidungsproblems wurde durch Kurt Gödels Unvollständigkeitssätze zu Beginn der 1930er Jahre weitgehend zerschlagen. Dass in jedem genügend ausdrucksstarken formalen System der Arithmetik unentscheidbare Sätze existieren, liess ein allgemeines Entscheidungsverfahren unmöglich erscheinen. Für einen Beweis der Unentscheidbarkeit war es 1931 dennoch zu früh. Obwohl Gödel mit seiner Arithmetisierung der Syntax, seinem damaligen Begriff rekursiver Funktionen und seiner Diagonalisierungsmethode überaus wichtige Werkzeuge entwickelt hatte, um die Unentscheidbarkeit als Theorem sicherzustellen, schien eine wesentliche Zutat zu fehlen. Der Algorithmusbegriff, der im Begriff eines Entscheidungsverfahrens enthalten ist, musste weiter präzisiert und von seiner Bindung an die Eigenheiten bestimmter Formalismen befreit werden.[457]

Die Arbeit an prädikatenlogischen Entscheidungsproblemen endete gleichwohl nicht 1936 mit Churchs Beweis der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik. Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, entstand über entscheidbarem Gebiet eine immer bedeutendere Theorie der Komplexität von Problemen und ihren algorithmischen Lösungen. Weniger als um das Lösen noch ungelöster Fragen ging und geht es dabei zumeist um das Auffin-

[454] Neumann (1927, S. 12 u. 11). Ähnliche Zweifel äusserte Hardy 1928, vgl. Gandy (1995, S. 62); ebenso Hermann Weyl, vgl. Mancosu und Zach (2015, S. 167 (Anm. 3)).

[455] Für den Begriff einer partiellen Lösung, siehe 2.2.1.

[456] Eine Formel steht in Pränexform, wenn alle Quantoren, die in ihr vorkommen, ihrer quantorenfreien Matrix als Präfix vorgeschaltet sind.

[457] Siehe auch das Zitat in 2.1 aus einem späteren Vortrag Gödels und Anm. 248.

den effizienter Algorithmen für wohlbekannte und im Prinzip längst gelöste Probleme. Parallel zu diesen Entwicklungen wurde weiterhin nach Entscheidungsverfahren für noch ungelöste Teilprobleme gesucht. Das allgemeine Entscheidungsproblem, das vor den Ergebnissen Gödels und Churchs noch als Hauptproblem der mathematischen Logik galt, verwandelte sich dadurch in ein Klassifikationsproblem. Wie es zu dieser Verwandlung kam, beschreibt in groben Zügen das erste Unterkapitel (3.2).

Daran anschliessend befasst sich dann das zweite Unterkapitel (3.3) inhaltlich mit Lösungen ausgewählter Teilprobleme. Im Vordergrund steht der Zusammenhang mit dem Variablengebrauch, zumal Einschränkungen ihrer semantischen oder syntaktischen Mannigfaltigkeit die Grenzen des (Un-)Entscheidbaren verschieben können. So ermöglicht die Einschränkung auf das monadische Fragment der Prädikatenlogik, mithin auf Prädikate in nur einer Variablen, eine Zurückführung auf das aus theoretischer Sicht triviale Entscheidungsproblem der Aussagenlogik (3.3.1.1). Sind hingegen mehrstellige Prädikate zugelassen, liegt die Lösbarkeit oder Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems über Formeln in Pränexform auch an den Abfolgen der Quantoren und der daran gebundenen Variablen, die im jeweiligen Fragment vorgesehen sind (3.3.2.1). Erzwingen lässt sich Entscheidbarkeit ausserdem durch die Fixierung des Gegenstandsbereichs auf eine bestimmte endliche Zahl von Individuen (3.3.1.2). Die Beschränkung auf endliche Gegenstandsbereiche ohne obere Schranke im Endlichen führt jedoch nicht zur allgemeinen Entscheidbarkeit (3.3.1.3).

Der Gegenstand dieses dritten Kapitels – der Zusammenhang zwischen Unentscheidbarkeit und Buchstabengebrauch in logischen Formalsprachen – ist überaus komplex und vielschichtig. Die Fülle an Resultaten zum Klassifikationsproblem, das aus dem ursprünglichen allgemeinen Problem hervorging, überblicke ich noch zu wenig, um ein gesamtheitliches Bild und abschliessende Urteile bieten zu können. Und auch für eine breitere Untersuchung über rekursive Variablen, die gewiss erforderlich wäre, fehlt hier der Platz. In den Abschnitten über semantische Beschränkungen (3.3.1) und syntaktische Restriktionen (3.3.2) können daher bloss einzelne Aspekte des Untersuchungsgegenstands etwas näher untersucht werden, und dies auch nur ansatzweise. Wie schon Ende des ersten Kapitels festgehalten (in 1.4.3), besteht das bescheidene Ziel dieses letzten Kapitels lediglich darin, erste vorbereitende Schritte für eine umfassende philosophische Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Buchstabengebrauch und Unentscheidbarkeit zu unternehmen. Weniger als um eine in sich abgeschlossene Teiluntersuchung handelt es sich hier also eher um ein längeres Schlusswort, das den vorliegenden Teil der

Arbeit abschliesst und zugleich wichtige Ausblicke bietet auf das, was hoffentlich folgen wird.

3.2. Zur Geschichte des Entscheidungsproblems

Die Geschichte des Entscheidungsproblems ist eng verknüpft mit jenem Forschungsprogramm, das David Hilbert Anfang der 1920er Jahre entworfen hatte und das heute seinen Namen trägt. Erklärtes Ziel des Hilbertprogramms war es, die Mathematik insgesamt zu axiomatisieren und die Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Axiomensysteme mit finiten Mitteln zu beweisen. Die Frage der Widerspruchsfreiheit sah Hilbert in Zusammenhang mit einer ganzen Reihe grundlegender Fragen stehen, zu denen er als vielleicht wichtigste die Entscheidbarkeitsfrage zählte. Innerhalb dieses Fragekomplexes kam den endlichen Verfahren, die das allgemeine Entscheidungsproblem oder Teile davon lösen sollten, mithin zentrale Bedeutung zu. An der Umsetzung des entworfenen Programms und der Suche nach solchen Entscheidungsverfahren waren verschiedene Schüler und Mitarbeiter Hilberts beteiligt, darunter Heinrich Behmann, Paul Bernays, Moses Schönfinkel und Wilhelm Ackermann.

Wichtige Beiträge wurden indessen auch ausserhalb des engen Kreises um Hilbert geleistet. Leopold Löwenheim, Thoralf Skolem, Kurt Gödel, László Kalmár, Jacques Herbrand und Frank Ramsey arbeiteten alle auf die eine oder andere Weise an Entscheidungs- oder verwandten Problemen. Manche dieser Beiträge entstanden unabhängig vom Hilbertprogramm oder gingen diesem sogar voraus. Dass ein solches Zusammenwirken möglich war, dass es zu diesen Überschneidungen und Konvergenzen kam, mag erstaunen. Es lässt sich aber unter anderem durch die Verwandtschaft des Entscheidungsproblems mit einer Familie älterer Probleme erklären, den sogenannten Eliminationsproblemen, die aus der algebraischen Logiktradition weitergegeben wurden. Nach Ackermanns Urteil stellt das Hilbertsche Entscheidungsproblem einen Spezialfall des Eliminationsproblems dar – wenngleich einen wichtigen.

Die folgende Darstellung gibt in groben Zügen einige wichtige Ergebnisse wieder, die bis 1936, d. h. bis zum Beweis der Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik durch Alonzo Church, auf dem Gebiet erzielt wurden. Der erste Teil zeichnet die Arbeit in der Hilbertschule nach. Im zweiten Teil werden erste aufkommende Zweifel an der Lösbarkeit des Entscheidungsproblems erwähnt. Der dritte Teil handelt von den Konsequenzen, die Gödels Unvollständigkeitssätze für die weitere Arbeit am Entscheidungsproblem hatten. Und in einem vierten und letzten Teil folgen kurze Bemerkungen über die Verwandlung des Entscheidungsproblems nach 1936 sowie über seine algebraische Vorgeschichte. Erwähnt wird dabei auch ein Entwicklungsstrang, der ausgehend von Alfred North Whitehead über Ludwig Wittgenstein bis zu den Arbeiten Ramseys führt.

Das Entscheidungsproblem im Hilbertprogramm «Diese Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!*» Diese kühnen Worte stammen bekanntlich von David Hilbert. Er rief sie 1900 in seiner epochalen Rede am zweiten Internationalen Mathematikerkongress zu Paris aus. Siebzehn Jahre später, in einem in Zürich gehaltenen Vortrag, spricht Hilbert dann etwas vorsichtiger von dem Problem «der prinzipiellen *Lösbarkeit einer jeden mathematischen Frage*» und ordnet es einem Bereich «schwierigster erkenntnistheoretischer Fragen von spezifisch mathematischer Färbung» zu. Zu diesen damals noch weitgehend offenen Problemen zählt er ausserdem die Frage der Widerspruchslosigkeit von Axiomensystemen, die «der nachträglichen *Kontrollierbarkeit* des Resultates einer mathematischen Untersuchung» sowie die «nach dem Verhältnis zwischen Inhaltlichkeit und Formalismus in Mathematik und Logik». Die «bekannteste und am häufigsten diskutierte» Frage aus diesem Problemkreis jedoch sei – weil «sie das Wesen des mathematischen Denkens tief berührt» – «das Problem der *Entscheidbarkeit* einer mathematischen Frage durch eine endliche Anzahl von Operationen».[458]

Zwischen Paris und Zürich liegt eine Zeit, in der sich nicht nur für die Welt im Ganzen, sondern auch für die Logik und die Grundlagen der Mathematik nachgerade Umwälzendes ereignete: Freges Fertigstellung des zweiten Bands seiner *Grundgesetze der Arithmetik*, Russells Formulierung der nach ihm benannten Antinomie, infolgedessen das Scheitern des Fregeschen Grundlegungsversuchs und als Antwort darauf das Erscheinen in drei Bänden der *Principia Mathematica* von Russell und Whitehead. Hilbert, der sich in diesen Jahren anderem zugewandt hatte, sah sich durch das letztgenannte Ereignis angeregt, seine Arbeit auf dem Gebiet wiederaufzunehmen. Zusammen mit Teilen seiner Schülerschaft – insbesondere mit Heinrich Behmann und Paul Bernays, die früh damit begonnen hatten, die *Principia Mathematica* zu studieren – entwarf Hilbert in einer Reihe von Vorlesungen zwischen 1917 und 1921 jenes berühmte Programm zur Grundlegung

[458] Alle zitierten Ausschnitte sind in Hilbert (1970, S. 153) zu finden. Die ganze Passage ist hier als Leitwort dem zweiten Kapitel vorangestellt. In der dazugehörigen Anmerkung finden sich weitere bibliographische Angaben.

der Mathematik, das über zehn Jahre lang die mathematische Logik dominieren sollte und bis heute mit Hilberts Namen verbunden ist.[459]

Das Hilbertprogramm sah vor, die Mathematik mit Hilfe der durch die *Principia* zur Verfügung gestellten Ausdrucksmittel vollständig zu formalisieren und in axiomatische Form zu bringen. Um sicherzustellen, dass die axiomatisierten Theorien auf festem Grund stünden, sollte für jedes aufgestellte Axiomensystem der Beweis seiner Widerspruchsfreiheit mit finiten Mitteln erbracht werden. Für diesen metamathematischen Zweck wäre es überaus nützlich gewesen, ein Verfahren zu kennen, «das bei einem vorgelegten logischen Ausdruck durch endlich viele Operationen die Entscheidung über die Allgemeingültigkeit bzw. Erfüllbarkeit erlaubt».[460] Denn mit einem solchen Entscheidungsverfahren würde sich die Widerspruchsfreiheit axiomatisierter Theorien rein rechnerisch nachweisen oder widerlegen lassen. Es müsste lediglich berechnet werden, ob die Konjunktion aller Axiome der Theorie erfüllbar oder unerfüllbar ist.[461] Und da bei einem Entscheidungsverfahren die dafür nötige Anzahl Operationen wie auch die Ausführung der einzelnen Schritte endlich bliebe, wäre damit das metamathematische Ziel allein mit «finiten Mitteln» erreicht – mit Mitteln also, die sich aus epistemischer Sicht unproblematisch ausnehmen.

Das Entscheidungsproblem, das auf allen Stufen der beim Axiomatisieren verwendeten Formalismen auftrat, erwies sich aus Sicht des Programms demnach nicht nur

[459] Vgl. Zach (2007, S. 412-414) und Mancosu (2003). Die Vorlesungen wurden in Hilbert (2013) herausgegeben. Die erste Ausgabe der *Grundzüge der theoretischen Logik* (= Hilbert und Ackermann (1928)), aus der hier mehrfach zitiert wurde und auch gleich wieder zitiert wird, beruht in weiten Teilen auf Notizen für Vorlesungen, die Hilbert 1917/18 und 1920 gehalten hatte. Doch gerade die für uns relevanten Abschnitte 11 und 12 des dritten Kapitels, die das Entscheidungsproblem behandeln, sind spätere Hinzufügungen. Ein Teil des hinzugefügten Materials stammt aus einer etwas späteren Vorlesung, die 1922/23 gehalten wurde. Vgl. dazu Hilbert (2013, S. 806-808, 50, 540-545).

[460] Hilbert und Ackermann (1928, S. 73). Man bemerke, dass Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit in Bezug auf Entscheidbarkeit oft gleichwertig sind: Ist die eine Eigenschaft entscheidbar, ist es auch die andere (siehe 2.3.1.6). Hilbert und Ackermann bezeichnen das ‹Problem der *Allgemeingültigkeit*› zusammen mit dem ‹Problem der *Erfüllbarkeit*› denn auch als *das* Entscheidungsproblem des ‹engeren Funktionenkalküls› (S. 73).

[461] Vgl. Hilbert und Ackermann (1928, S. 74-77). Wahlweise könnte auch berechnet werden, ob die Negation des Axiomenprodukts allgemeingültig ist. Fällt die Antwort negativ aus, ist damit gezeigt, dass sich kein Widerspruch aus den Axiomen ableiten lässt – sofern freilich die Korrektheit des betreffenden Kalküls feststeht. Entsprechend braucht es für den allgemeinen Umkehrschluss – von der Allgemeingültigkeit des negierten Axiomenprodukts auf die Existenz einer Ableitung dieser Negation, mithin auf die syntaktische Inkonsistenz des Axiomensystems – den Beweis der (semantischen) Vollständigkeit jenes Kalküls. In Hilbert und Ackermann (1928, S. 68) heisst es dazu: «Ob das Axiomensystem [für den engeren Funktionenkalkül] wenigstens in dem Sinne vollständig ist, dass wirklich alle logischen Formeln, die für jeden Individuenbereich richtig sind, daraus abgeleitet werden können, ist eine noch ungelöste Frage». Dass der von Hilbert verwendete Kalkül tatsächlich in diesem Sinn vollständig ist, wurde bekanntlich erst 1929 durch Gödel bewiesen.

als eine von mehreren offenen Fragen, sondern geradezu als «das Hauptproblem der mathematischen Logik».[462] Im Verlauf der 1920er Jahre gelang es Mitgliedern der Hilbertschule verschiedene Teilprobleme zu lösen. So skizzieren Bernays und Hilbert im Rahmen einer Vorlesung über die *Logischen Grundlagen der Mathematik*, die sie im Wintersemester 1922/23 gemeinsam halten, einen Beweis für die Entscheidbarkeit des monadischen Fragments der Prädikatenlogik *erster* Stufe.[463] Die Beweisidee beruht auf einfachen semantischen Überlegungen, auf die wir (in 3.3.1.1) zurückkommen werden.

Ein wenig früher war Behmann der Nachweis gelungen, dass die monadische Prädikatenlogik auch auf der zweiten Stufe entscheidbar ist. Auf ihn scheint ausserdem die erste öffentliche Formulierung des *allgemeinen* Entscheidungsproblems zurückzugehen; sie findet sich in jenem Vortrag von 1921, aus dem im letzten Kapitel (zu Beginn von 2.3.1) bereits zitiert wurde.[464] In seiner Habilitationsschrift von 1922, *Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem*, beschreibt Behmann jedenfalls ein Entscheidungsverfahren für Allgemeingültigkeit über der monadischen Prädikatenlogik zweiter Stufe.[465] Im Vergleich zu den semantischen Überlegungen Hilberts und Bernays wirkt das Verfahren zwar schwerfällig und kompliziert, bemerkenswert ist aber, dass es nicht auf einem axiomatischen Kalkül oder semantischen Abkürzungen beruht, sondern eine praktische Anleitung gibt, wie sich die Allgemeingültigkeit einer Formel mit monadischen Prädikaten rein rechnerisch – ohne die höheren geistigen Vermögen der Mathematiker in Anspruch zu nehmen – entscheiden lässt. Behmann selbst bemerkt dazu:[466]

> Die Darstellungsform wird nicht die axiomatische sein, sondern es sollen hier die Bedürfnisse des praktischen Rechnens im Vordergrund stehen. Das Ziel ist also nicht, alles auf eine möglichst geringe Zahl logisch voneinander unabhängiger Formeln und Regeln zurückzuführen; im Gegenteil werden möglichst leicht aufzufassende und dabei möglichst weittragende Regeln in solcher Anzahl gegeben werden, wie nach meiner Ansicht dem praktischen Bedürfnis entspricht. Dabei wird uns die logische Abhängigkeit von Regeln durchaus nicht kümmern, sofern diesen nur eine selbständige praktische Bedeutung zuerkannt wird. Der Beweis der Regeln, soweit ein solcher gegeben wird, wird infolgedessen nicht im eigentlichen Sinne ein Zurückführen auf Axiome sein können; vielmehr erstrebe

462 Hilbert und Ackermann (1928, S. 77).

463 Die relevanten Vorlesungsnotizen finden sich in Hilbert (2013, S. 540-542). Allerdings fehlen zwei Seiten, die wohl den Anfang des Gedankengangs beinhalteten. Eine vollständige und verbesserte Version findet sich in Hilbert und Ackermann (1928, § 12 (S. 77-79)).

464 Vgl. dazu Mancosu und Zach (2015, S. 166-167). Neben der Edition des Vortragskripts ist in Mancosu und Zach (2015) auch eine kompakte Besprechung des Inhalts sowie des historischen Kontexts enthalten.

465 Vgl. Behmann (1922).

466 Behmann (1922, S. 167).

> ich in der gegenwärtigen Abhandlung nichts weiter, als ihre Gültigkeit zur klaren Einsicht zu bringen. Ich werde mich also hier durchaus mit demjenigen Mass von Strenge begnügen, das gemeinhin von mathematischen Untersuchungen gefordert zu werden pflegt, wo man seine Ergebnisse durch einleuchtende Schlüsse und Überlegungen gewinnt, ohne die Richtigkeit der verwendeten Schlussweisen ihrerseits zu beweisen.

Ganz nach dem Vorbild algebraischer Eliminationsverfahren wandelt Behmanns Entscheidungsverfahren jede vorgelegte Formel der monadischen Prädikatenlogik mit Identität – sofern sie weder Individuen- noch Prädikatskonstanten enthält – in eine bestimmte Normalform um, sodass sich die zweitstufigen Quantoren eliminieren lassen. Übrig bleiben am Ende nur Identitätssätze, mithin Aussagen über die Grösse des Individuenbereichs von der Art ‚Es gibt mindestens n Gegenstände' oder ‚Es gibt höchstens n Gegenstände'.[467] Die Details des Verfahrens lassen sich hier nicht weiter besprechen, aber ein bestimmter Aspekt – die ‹Hineintreibung der Operatoren›[468], d. h. Quantoren – müsste im Zusammenhang mit den Überlegungen am Ende dieses Texts (in 3.3.2.2) näher untersucht werden. Denn das Hineintreiben der Quantoren bewirkt, im Gegensatz zur Umbildung einer Formel in ihre pränexe Form, eine Verengung der Quantorbereiche, sodass die Schnittbereiche möglichst klein werden. Ähnliche Verschiebungen ergeben sich durch das Übertragen einer Formel in Wittgensteins exklusive Variablenschreibweise.[469]

Weitere wichtige Teilergebnisse zum Entscheidungsproblem wurden schon früh auch für gewisse Präfixklassen erzielt – für prädikatenlogische Formeln also, die in Pränexform bestimmte Quantorenabfolgen aufweisen.[470] So konnten Bernays und Schönfinkel die Entscheidbarkeit der Präfixklasse $\forall^*\exists^*$ beweisen, genauer gesagt, dass die Eigenschaft der Allgemeingültigkeit über der Menge derjenigen Pränex-Formeln entscheidbar ist, deren Präfix aus einer endlichen (möglicherweise leeren) Reihe von Allquantoren, gefolgt von einer endlichen (möglicherweise leeren) Reihe von Existenzquantoren besteht.[471] Ackermann gelang etwas später dasselbe für die Präfixklasse $\exists^*\forall\exists^*$ in Bezug auf die Eigenschaft der *Erfüllbarkeit*.[472] In den frühen 1930er Jahren zeigten dann Gö-

[467] Vgl. dazu Mancosu und Zach (2015, S. 169-170).

[468] Behmann (1922, S. 187).

[469] Vgl. dazu Büchi (2016, S. 174-176). Siehe auch Anm. 233.

[470] Für einen Überblick über die folgenden Ergebnisse, vgl. Mancosu, Zach und Badesa (2009, S. 382-383). Für eine ausführlichere Diskussion, vgl. Hilbert und Ackermann (1938, § 12 (S. 90-99)).

[471] Vgl. Bernays und Schönfinkel (1928, ab S. 355). In die Präfixklasse $\forall^*\exists^*$ fallen also z. B. sowohl $\forall x \exists y Rxy$ als auch $\forall x_1 ... \forall x_n S x_1 ... x_n$ oder $\exists x Px$. Eine strengere Einführung dieser gebräuchlichen Notation für Präfixklassen wird in Börger u. a. (1997, S. 6 u. 8-10) gegeben.

[472] Man beachte hier die Dualität: Die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems für Erfüllbarkeit über der Präfixklasse $\exists^*\forall\exists^*$ zu zeigen, ist gleichwertig damit, die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems für Allgemeingültigkeit über der Präfixklasse $\forall^*\exists\forall^*$ zu zeigen. Weshalb? Sei φ eine Formel der Präfixklasse $\forall^*\exists\forall^*$, mithin in Pränexform, und F ihre quantorenfreie Matrix. Dann gehört die Formel

del, Kalmár und Schütte unabhängig voneinander die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems für Erfüllbarkeit über der Präfixklasse $\exists^*\forall^2\exists^*$. Ausserdem erbrachte Gödel den bemerkenswerten Beweis, dass die Präfixklasse $\forall^3\exists^*$ eine Reduktionsklasse zur gesamten prädikatenlogischen Formelmenge darstellt. In anderen Worten, wäre jede Lösung des Entscheidungsproblems für Erfüllbarkeit über der Präfixklasse $\forall^3\exists^*$ zugleich eine Lösung des allgemeinen Entscheidungsproblems über der Prädikatenlogik erster Stufe gewesen. Ein analoges Resultat hatte Skolem bereits 1920 für die Präfixklasse $\forall^*\exists^*$ erzielt.[473]

Zweifel an der Lösbarkeit des Entscheidungsproblems Trotz dieser Fortschritte hegten einige Zeitgenossen Zweifel, dass ein *allgemeines* Entscheidungsverfahren in absehbarer Zeit angegeben werden könnte – wenn überhaupt.[474] Immerhin wäre damit, so eine verbreitete Vorstellung, «die Mathematik in eine *ungeheure Trivialität* verwandelt» worden.[475] Für jeden nur erdenklichen formalisierbaren Satz hätte demnach die Anwendung dieses gewaltigen Algorithmus nach endlich vielen mechanisch ausführbaren Rechenschritten den notwendigerweise richtigen Entscheid darüber angezeigt, ob es sich um eine mathematische Wahrheit handelt oder nicht. Dazu hätte lediglich die Allgemeingültigkeit desjenigen Konditionals geprüft werden müssen, dessen Antezedens aus dem logischen Produkt aller Axiome der Theorie besteht und dessen Konsequens der zu prüfende Satz selbst ist. Der Weg zur Lösung eines beliebigen mathematischen Problems wäre nicht mehr «ein nach irgend einer Himmelsrichtung *zu suchender* und neu *zu bahnender*» gewesen, sondern «nunmehr ein *fertig vorhandener* [...] und mit deutlichen Wegweisern versehener, der [...] *zwangläufig* auf das Ziel hinführt».[476]

$\neg\varphi$, wenn sie in ihre pränexe Form gebracht wird, zur Präfixklasse $\exists^*\forall\exists^*$ und hat als quantorenfreie Matrix $\neg F$. Liegt ein Entscheidungsverfahren für Erfüllbarkeit über der Präfixklasse $\exists^*\forall\exists^*$ vor, lässt sich damit für die Formel φ aus der Präfixklasse $\forall^*\exists\forall^*$ prüfen, ob sie allgemeingültig ist. Man bringe dafür $\neg\varphi$ in ihre pränexe Form, woraus eine Formel der Präfixklasse $\exists^*\forall\exists^*$ hervorgeht, und prüfe einfach, ob diese Formel erfüllbar ist oder nicht: Ist sie erfüllbar, ist φ keine Tautologie, ist sie nicht erfüllbar, ist φ eine Tautologie. In die umgekehrte Richtung verläuft der Gedankengang analog (siehe 2.3.1.6). Von dieser Dualität wird bereits in Bernays und Schönfinkel (1928) explizit Gebrauch gemacht. Ein Teil des Beweises (ab S. 360) wird in Bezug auf Allgemeingültigkeit geführt.

[473] Vgl. dazu Börger u. a. (1997, S. 6, 81 ff., 146 ff., 310 ff.).

[474] Zu den Zweiflern gehörten von Neumann, Hardy und Weyl (siehe 3.1 und dort Anm. 454). Vgl. auch Hilbert und Ackermann (1928, S. 77): «Während im Aussagenkalkül das Entscheidungsproblem unschwer zu lösen war, bildet im Funktionenkalkül die Auffindung eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens ein noch ungelöstes schwieriges Problem».

[475] Das sind Behmanns Worte, vgl. Mancosu und Zach (2015, S. 179). Doch auch andere teilten diese Ansicht und sahen sich durch sie, wie von Neumann und Weyl, in ihren Zweifeln an der Lösbarkeit des Entscheidungsproblems bestätigt.

[476] Wiederum Behmanns Worte, vgl. Mancosu und Zach (2015, S. 178).

Dass die Richtigkeit dieser Vorstellung an starken Annahmen über die Vollständigkeit sowohl der verwendeten Kalküle als auch der axiomatisierten Theorien hing, wurde erst allmählich klar.[477] Gödels Vollständigkeitssatz von 1929 brachte für die Prädikatenlogik erster Stufe in dieser Hinsicht eine gewisse Klärung. Ihre logischen Sätze, ihre Tautologien und Kontradiktionen, waren wenigstens halb-entscheidbar. Letzte Klarheit verschafften aber erst Gödels Unvollständigkeitssätze, die bald darauf folgten. Eine vollständige Axiomatisierung der Arithmetik mit den Mitteln der *Principia Mathematica* erwies sich als unmöglich. In jedem System mit hinreichender Ausstattung, um die elementare Arithmetik zu formalisieren, würde es *formal* unentscheidbare Sätze geben, sodass weder sie selbst noch ihre Negation aus den Axiomen beweisbar sind. Es musste also nicht viel Theorie in Axiome gegossen werden und schon gingen Wahrheit und Beweisbarkeit, Falschheit und Widerlegbarkeit getrennte Wege.

Unentscheidbarkeit nach Gödels Unvollständigkeitsbeweis Nach den Beweisen Gödels zu Beginn der 1930er Jahren war an ein Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik *zweiter* Stufe nicht mehr zu denken. In dieser Sache war man sich einig. Hilbert und Ackermann hielten in der zweiten Ausgabe ihrer *Grundzüge der theoretischen Logik* denn auch fest, «dass *ein vollständiges Axiomensystem für die identischen Formeln des Prädikatenkalküls der zweiten Stufe nicht existiert*». Denn es lassen sich, wie Gödel gezeigt habe, «für jedes System von Grundformeln und Ableitungsregeln identische Formeln angeben, die nicht abgeleitet werden können».[478]

Eine Lösung des Entscheidungsproblems auf der ersten Stufe hingegen schien weiterhin möglich oder zumindest nicht ausgeschlossen. Genau betrachtet, hatte Gödel allerdings gezeigt, dass in jedem hinreichend ausgestatteten formalen System der Arithmetik *erststufige* Sätze existieren, für die mit den Mitteln des Systems Allgemeingültigkeit weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Dieser Satz – Satz IX seiner bahnbrechenden Arbeit – liess ein allgemeines Entscheidungsverfahren selbst für die Prädikatenlogik erster Stufe eigentlich unmöglich erscheinen.[479] Rückblickend urteilt Robin Gandy über die Folgerungen aus diesem lange etwas vernachlässigten Satz: «Gödel's result meant that it was almost inconceivable that the Entscheidungsproblem should be decidable: a solution could, so to speak, only work by magic».[480] Saul Kripke geht in einem viel

[477] Für die semantische Vollständigkeit, siehe Anm. 461.

[478] Hilbert und Ackermann (1938, S. 104). Als identische werden hier die allgemeingültigen Formeln bezeichnet, vgl. S. 56.

[479] Für Satz IX, vgl. Gödel (1931, S. 193).

[480] Gandy (1995, S. 63).

beachteten Beitrag sogar weiter und führt gute Gründe für seine Ansicht an, Gödel sei einer negativen Auflösung des Entscheidungsproblems so nahe gekommen, dass ihm am Ende lediglich eine Version von Churchs These gefehlt habe.[481]

Tatsächlich bewirkten Gödels Unvollständigkeitssätze ein Umdenken bei den Zeitgenossen. Kalmár etwa meinte, es sei nach diesen Ergebnissen fraglich, ob «das Entscheidungsproblem einmal allgemein gelöst wird», da eine Lösung «gewisse Widerspruchsfreiheitsfragen in einem, den klassischen Vermutungen entgegengesetzten Sinne beantworten» würde.[482] Doch so wahnwitzig sich die Suche nach einer allgemeinen Lösung des Entscheidungsproblems nun auch ausnehmen mochte, nicht weniger unerreichbar erschien zunächst eine negative Auflösung desselben, d. i. ein strenger Beweis dafür, dass es ein Entscheidungsverfahren für die Prädikatenlogik nicht geben kann.

Was zu Beginn der 1930er Jahre noch fehlte, war eine Präzisierung des Begriffs eines Entscheidungsverfahrens bzw. des eng damit verknüpften Begriffs einer berechenbaren Funktion.[483] Darüber hinaus brauchte es die begründete Behauptung, dass die vorgeschlagene Präzisierung der Sache angemessen ist, oder eben: Churchs These. Der aus der Praxis genommene Verfahrensbegriff war ungeachtet seiner Vorzüge doch zu unscharf und für eine mathematische Behandlung ungeeignet. Um den Beweis über die Unentscheidbarkeit einer Eigenschaft führen zu können, musste ein strenger, überall klar abgegrenzter Begriff zur Verfügung stehen. Denn als negierter Existenzsatz trifft ein Unentscheidbarkeitssatz eine Aussage über die Gesamtheit der in Frage kommenden Entscheidungsverfahren: Er besagt, dass *keines* dieser Verfahren die fragliche Eigenschaft entscheiden kann.

Gödel hatte mit seiner Verwendung *primitiv* rekursiver Funktionen bereits beträchtliche Vorarbeit in eine mögliche Richtung geleistet. Die Klasse dieser Funktionen erwies sich jedoch als zu eng. Ackermann war es schon früher gelungen, eine Funktion anzugeben, die als berechenbar angesehen werden musste, obwohl sie den Rahmen der primitiven Rekursivität sprengte. Ausgehend von Bestimmungen Herbrands entwickelte Gödel daher einen allgemeineren Begriff der Rekursivität, ohne sich indessen davon überzeugen zu können, dass damit die Klasse der berechenbaren Funktionen auf angemessene

[481] Kripke (2013, S. 87). Kripkes Argumentation erstreckt sich über die S. 85-88.

[482] Kalmár (1933, S. 467 (Anm. 7)). Dem fügt er gleich hinzu, dieser Umstand verhindere natürlich nicht, dass für Spezialfälle des Entscheidungsproblems Lösungen gefunden werden können. Vgl. auch Schütte (1934, S. 572): «Von grundlegender Bedeutung für die gesamte mathematische Logik ist das Entscheidungsproblem. [...] Dieses Problem ist für den Aussagenkalkül trivial, dagegen schon im Prädikatenkalkül mit grossen Schwierigkeiten verbunden. Es sind dort bisher nur einige Spezialfälle gelöst, eine allgemeine Lösung in diesem Kalkül ist wahrscheinlich überhaupt nicht möglich». Herbrand gab sich ebenfalls skeptisch, vgl. dafür Gandy (1995, S. 63).

[483] Zu dieser Verknüpfung, siehe Anm. 246.

Weise eingefangen wurde. Erst Church, der mit seiner λ-Definierbarkeit einen weiteren begrifflichen Anwärter für die erforderliche Präzisierung entwickelt hatte, wagte es nach wichtigen Gleichwertigkeitsergebnissen Kleenes, seine These aufzustellen, um von da aus den Beweis für die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik erster Stufe anzutreten. 1936 war es dann so weit. Gödel selbst gab Turings Präzisierungen den Vorzug, da sie seiner Ansicht nach das Wesen der Berechenbarkeit auf angemessenere Weise darzustellen vermochten.[484]

Das Entscheidungsproblem nach 1936 Nach der Präzisierung des Algorithmusbegriffs und Churchs Unentscheidbarkeitsbeweis löste sich das Entscheidungsproblem gleichwohl nicht in Luft auf. Man hatte gewissermassen zu viel erreicht, zu viel investiert, um einfach aufzuhören.[485] Ausserdem bestand weiterhin die Möglichkeit, Lösungen für Spezialfälle zu finden. Das historische Entscheidungsproblem verwandelte sich dadurch in ein Klassifikationsproblem, bei dem es darum ging, bestimmte Fragmente der Prädikatenlogik als entscheidbar oder als unentscheidbar einzuordnen – je nachdem, ob das Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit oder Allgemeingültigkeit über dem Fragment lösbar ist oder nicht.

Die Arbeit an Lösungen für partielle Probleme, insbesondere über Präfixklassen, hatte lange vor 1936 begonnen, wie wir sahen, und sie wurde nach 1936 fortgesetzt. Es kamen nun aber immer ausgefeiltere Mittel zur Anwendung, die unter anderem die sich stetig weiterentwickelnden Theorien der Rekursivität und der Turing-Berechenbarkeit lieferten. Auf dem Gebiet des Entscheidbaren entstand ausserdem, wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, eine an Bedeutung gewinnende Theorie über die Komplexität von Problemen und ihren algorithmischen Lösungen. Durch diese und noch weitere Einflüsse kam es zu einer wahren Flut von Ergebnissen, die sich aus heutiger Sicht nicht leicht überschauen lassen. Die Geschichte dieser Weiterführungen und Neuentwicklungen ist jedenfalls noch nicht geschrieben.[486]

Vergleichsweise wenig beleuchtet ist auch die Vorgeschichte des Entscheidungsproblems.[487] Auf den Zusammenhang mit sogenannten Eliminationsproblemen, die in der algebraischen Logiktradition eine wichtige Rolle spielten, hatten verschiedene Vertreter der Hilbertschule hingewiesen, insbesondere Behmann und Ackermann. Seine ‚Untersu-

[484] Für die Details dieser in Wirklichkeit viel verwickelteren Geschichte, vgl. Sieg (1997).

[485] So sieht es Yuri Gurevich, der selbst wichtige Beiträge auf dem Gebiet geleistet hat, vgl. Gurevich (1990).

[486] Wertvolle Hinweise geben die historischen Bemerkungen, die allen Kapiteln in Börger u. a. (1997) beigefügt sind.

[487] Vgl. allerdings Mancosu und Zach (2015, S. 166-170) sowie die dort angegebene Literatur.

chungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik' von 1934 beginnt letzterer denn auch mit den folgenden Bemerkungen:[488]

> Das Eliminationsproblem der mathematischen Logik ist von Schröder aufgeworfen worden und gehört ebenso wie das Entscheidungsproblem zu den Hauptproblemen dieses Wissenschaftszweiges. Es enthält sogar in seiner allgemeinsten Fassung das Entscheidungsproblem. Auch nach der (einmal vorausgesetzten) Lösung des Entscheidungsproblems würden nämlich noch unbeantwortete Fragen, auch theoretisch, in der Mathematik übrigbleiben. Eine häufig auftretende Frage ist z. B. die nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung für das Vorhandensein irgendeiner Eigenschaft bei einer Gruppe, einem System von Zahlen usw. Dabei wird verlangt, dass die gesuchte Bedingung in gewisser Beziehung einfacher ist als die Eigenschaft selbst, der sie äquivalent ist, z. B. dass sich bei konkreten Zahlensystemen ihr Erfülltsein oder Nichterfülltsein leicht feststellen lässt. In den Bereich des Entscheidungsproblems würde nur die Frage fallen, ob eine bestimmte Vermutung, die wir über die genannte Bedingung haben, richtig ist oder nicht, nicht aber das Aufsuchen dieser Bedingung selbst. Dagegen befasst sich gerade das Eliminationsproblem mit der Frage, wie man einen logischen Ausdruck durch einen äquivalenten ersetzen kann, dessen logische Struktur in gewisser Weise einfacher ist.

Schröders Arbeiten beeinflussten freilich nicht nur Hilbert und seine Schülerschaft. Ein kaum beleuchteter Strang führt von Schröder über Whitehead und Wittgenstein zu Ramsey.[489]

Als Ramsey 1928 seinen bemerkenswerten Beweis für die Entscheidbarkeit der Bernays-Schönfinkel-Präfixklasse mit hinzugefügter Identität vorlegte (siehe 3.3.2.2), war ihm klar, dass er ein Problem der Hilbertschule behandelte. Dass sein Beitrag an das Entscheidungsproblem mit der Erweiterung um Identität zusammenhing, war dennoch kein Zufall. Zu dieser Zeit war er in einen Streit mit Wittgenstein über das Wesen der Identität und ihre Definierbarkeit verwickelt. Ramsey hatte in einem Brief an Wittgenstein eine Definition der Identität angeregt, die auf einer Klasse merkwürdiger, weil höchst extensionaler Funktionen gründete, und damit den Vorschlag aus der *Logisch-philosopischen Abhandlung* zurückgewiesen, wonach das Identitätszeichen aus der Begriffsschrift zu streichen und im Gegenzug die Variablenschreibweise anzupassen sei.

Wie genau sich diese Auseinandersetzung auf Ramseys Beweis auswirkte, bleibt zu untersuchen. Klar ist, dass Wittgensteins Auffassung der Identität und seine eigenartige

---

488 Ackermann (1934, S. 390)

489 Im Vorwort seines *Treatise on Universal Algebra* erwähnt Whitehead den Einfluss Schröders, vgl. Whitehead (1898, S. x). Das Eliminationsproblem charakterisiert er zudem wie folgt (S. 47): «The object of elimination may be stated thus: Given an equation or a subsumption involving certain terms among others, to find what equations or subsumptions can be deduced not involving those terms».

Variablenschreibweise selbst dem Versuch entsprungen waren, ein Problem von der Art des allgemeinen Entscheidungsproblems zu lösen.[490] Dass er dabei unter dem gewissermassen über die *Principia* und Russell hinweg wirkenden Einfluss Whiteheads stand, habe ich an anderer Stelle zu zeigen versucht.[491]

3.3. Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit in der Prädikatenlogik

Variablen verwenden wir, um über *alles* zu sprechen. Wenn wir ausdrücken wollen, dass alles entweder F oder G ist, schreiben wir in der Prädikatenlogik die Formel ‚$\forall x(Fx \vee Gx)$' hin. Einer verbreiteten Vorstellung nach reicht hier der Buchstabe ‚x' über alles, worüber gesprochen werden soll; und worüber gesprochen werden soll, bestimmt die Interpretation, die wir der Formel geben wollen. Dazu gehört auch die Angabe eines Gegenstandsbereichs. Typischerweise ist der Umfang dieses Bereichs bestimmt durch die Interpretation der beteiligten Prädikate: Ist die Aussage, dass alle algebraischen Zahlen berechenbar sind, wird der Gegenstandsbereich mindestens alle reellen Zahlen umfassen; ist die Aussage, dass alle gleichseitigen Dreiecke gleichwinklig sind, wird der Bereich mindestens alle Dreiecke umfassen; etc. Die quantifizierte Variable reicht demnach über den gesamten Gegenstandsbereich. Das gilt, so die gängige Auffassung, auch wenn sie in einer Formel wie ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' vorkommt.

Man könnte nun geneigt sein, Konditionale wie diesen anders zu lesen, als wäre die Variable ‚x' hier in ihrer Reichweite begrenzt auf die Extension von ‚F'. Die Formel würde dann lediglich von allem, was F ist, behaupten, es sei auch G. Wie aber verhielte es sich mit der Umkehrung des Konditionals, mit ‚$\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$'? Müsste man sagen, dass hier im Gegensatz zu vorhin die gebundene Variable über alle nicht-Gs reicht? Es wäre doch merkwürdig, wenn in äquivalenten Aussagen nicht von denselben Dingen die Rede ist. Ausserdem wäre nicht klar, welcher Wahrheitswert dem Konditional ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' zugewiesen werden soll, wenn die Extension von ‚F' leer ist. Man müsste sich festlegen und zwar so, dass ‚$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$' und ‚$\forall x(\neg Fx \vee Gx)$' denselben Wahrheitswert erhalten, wenn die Äquivalenz der beiden Formeln erhalten bleiben soll. Wie aber liesse sich verhindern, dass dann auch ‚$\forall x(Fx \vee \neg Gx)$' und letztlich alle anderen Formeln denselben Wahrheitswert besitzen, wenn die darin vorkommenden Variablen über nichts reichen? Einfacher ist es, an den üblichen Forderungen festzuhalten:

[490] Vgl. dazu Büchi (2016).
[491] Vgl. Büchi (2021).

Die Gegenstandsbereiche dürfen nicht zu eng gewählt werden und müssen mindestens die Signifikanzbereiche der beteiligten Begriffe enthalten, d. h. nicht nur ihre Extensionen, sondern auch deren Komplemente. Damit ist sichergestellt, dass die Variablen über genügend Reichweite verfügen.[492]

Den Logizisten und Absolutisten ist das gleichwohl zu wenig. Logisch grundlegend ist aus ihrer Sicht die unbegrenzte Variable, die über absolut alles reicht, worüber sie nur reichen kann. Begriffliche Begrenzungen der Variablenreichweite – egal, wie grosszügig diese ausfallen – sind letztlich abzulehnen, zumal es nicht schwer fällt, Formeln, in denen begrifflich begrenzte Variablen vorkommen, in solche ohne Begrenzung, aber mit identischen Wahrheitsbedingungen umzuwandeln. Man füge der Formel einfach den begrenzenden Begriff als Antezedens in einem Konditional voran. Doch selbst hartgesottene Logizisten gestehen ein, dass diese Grenzenlosigkeit ihre Grenzen, oder besser gesagt, ihre Schranken hat. Sonst droht Unsinn oder sogar ein Widerspruch. Würde in ‚$\exists xFx$' schrankenlos über absolut alles quantifiziert, was es gibt, müsste daraus ‚$F(Fx)$' oder Ähnliches folgen, wenn ‚F' etwas bezeichnet, das es gibt. Doch was soll sich mit ‚$F(Fx)$' ausdrücken lassen? Bestenfalls nichts, und auf jeden Fall ist dafür zu sorgen, dass sich damit kein Ausdruck für Mengen bilden lässt, die sich selbst enthalten oder, schlimmer noch, *nicht* enthalten, da sonst Russells Antinomie wartet.[493]

3.3.1. Semantische Betrachtungen

Es besteht also Einigkeit, dass dem Quantifizieren gewisse Schranken auferlegt werden müssen, um Unsinn, Paradoxien oder anderes zu vermeiden, was sich mit Logik nicht verträgt. Ist nun aber nicht auch Unentscheidbarkeit unverträglich mit der Logik und müsste aus ihren Systemen herausgehalten werden? Zum Wesen logischer Wahrheiten gehört doch, dass sie Bestand haben ganz gleich, wie es sich in der Welt verhält. Deshalb muss logische Wahrheit am Ausdruck selbst, an den Zeichen, zu erkennen sein und mechanisch festgestellt werden können. So auch der Widerspruch, die logische Falschheit. Weshalb sollte sich nicht genau gleich mechanisch feststellen lassen, dass eine Formel *keine* logische Wahrheit und auch *keine* logische Falschheit ausdrückt, mithin dass ihr das, was Formeln zu logischen macht, fehlt? Das ist doch seltsam. Ausserdem ist die Existenz von Entscheidungsverfahren über weite und wichtige Teile der Logik gegeben.

[492] Die gleichen Gedanken wurden bereits im ersten Kapitel, insbesondere in 1.3.2.3 und 1.3.3.3, formuliert.

[493] Vgl. hierfür Whitehead und Russell (1910, S. 42-43, 65-66).

Erst der prädikatenlogische Quantorenapparat in seiner vollen Ausstattung sorgt, so scheint es, für ihr Verschwinden. Vielleicht ist er schlicht überladen.

In Analogie zu den Betrachtungen über begrenzte und unbegrenzte Variablen könnte man daher vermuten, dass Unentscheidbarkeit einer semantischen Masslosigkeit beim Quantifizieren geschuldet ist. Um diesen Überfluss zu beheben, der einen logischen Mangel darstellt, müsste demnach die Reichweite gebundener Variablen eingedämmt werden. (Es lässt sich ja auch die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik zweiter Stufe beheben, indem die Reichweite der Prädikats- und Funktionsvariablen limitiert wird, wie Leon Henkin gezeigt hat.[494]) Der erste Gedanke wäre, die Mächtigkeit der Gegenstandsbereiche nach oben hin zu beschränken. So könnte man fordern, dass nur noch abzählbare, keine überabzählbaren Mengen zugelassen sind – was allerdings nichts nützen würde. Der (absteigende) Satz von Löwenheim-Skolem besagt nämlich, dass jede prädikatenlogische Formel, die über irgendeinem unendlichen Gegenstandsbereich erfüllbar ist, dies bereits über einem abzählbar unendlichen ist.[495] In anderen Worten: Jede Formel mit einem unendlichen Modell hat ein abzählbares Modell.[496] Folglich verschiebt sich durch die vorgeschlagene Beschränkung die Menge der erfüllbaren Formeln nicht: Keine erfüllbare Formel wird zur Kontradiktion und keine zur Tautologie, die nicht schon vor der Beschränkung tautologisch war.

Die Forderung muss also verschärft werden und dies naheliegenderweise dahingehend, dass nur noch endliche Gegenstandsbereiche zugelassen sind. Und tatsächlich führt dies zu Verschiebungen: Einige Formeln, die über unendlichen Gegenstandsbereichen erfüllbar waren, sind es über den endlichen Bereichen nicht mehr. In anderen Worten, gibt es in der Prädikatenlogik erfüllbare Formeln, die kein endliches Modell besitzen. Wir werden solche Formeln in Anlehnung an Quine als *Unendlichkeitsschemata* bezeichnen.[497] Wie uns der Satz von Trachtenbrot lehrt, verschieben sich die Grenzen gleichwohl nicht, wie erhofft. Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit bleiben auch über einer Prädikatenlogik, die Interpretationen nur mit endlichen Gegenstandsbereichen zulässt, unentscheidbar. Doch bevor wir uns dem Satz von Trachtenbrot und seinen Korollaren zuwenden, lohnt es sich, die vorhin (in 3.2) erwähnten semantischen Überlegungen in den Blick zu neh-

[494] Vgl. dafür etwa Shapiro (1991, Kap. 4), wo allerdings auch gezeigt wird, dass durch diese semantischen Beschränkungen aus der Prädikatenlogik zweiter Stufe im Wesentlichen Prädikatenlogik erster Stufe wird (vgl. Kap. 3 dort).

[495] Vgl. Ebbinghaus u. a. (2007, S. 91, 148). Für eine historisch informierte Besprechung verschiedener Versionen des Theorems und ihrer Beweise, vgl. Mancosu, Zach und Badesa (2009, S. 357-368).

[496] Für klärende Bemerkungen über diese Sprechweise, die derjenigen in der englischsprachigen Literatur entspricht, vgl. Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 415-416).

[497] Vgl. Quine (1982, S. 215).

men, die Hilbert und Bernays als Beweis für die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems über dem monadischen Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe (ohne Identität!) anführen.[498] Diese einfachen Überlegungen waren für zahlreiche weitere Arbeiten am Entscheidungsproblem richtungsweisend.

3.3.1.1. Entscheidbarkeit im monadischen Fragment

Sei φ irgendeine Formel der monadischen Prädikatenlogik erster Stufe, die weder Individuenkonstanten noch freie Individuenvariablen enthält.[499] Neben logischen Konstanten, erststufigen Quantoren und daran gebundenen Individuenvariablen wird φ im Allgemeinen k Prädikatsbuchstaben enthalten. Bezeichnen wir sie mit ‚P_1', ..., ‚P_k'. Allgemeingültig ist φ genau dann, wenn φ unter allen möglichen Interpretationen der Prädikatsbuchstaben P_1, ..., P_k wahr wird. Um zu zeigen, dass φ *nicht* allgemeingültig ist, reicht es demnach, eine Interpretation anzugeben, die φ falsch macht. Und hier gilt nun folgender Satz: Wenn φ nicht allgemeingültig ist, gibt es eine Interpretation der P_1, ..., P_k über einem Gegenstandsbereich von höchstens 2^k Elementen, die φ falsch macht. Oder umgekehrt: Wenn φ unter allen Interpretationen der P_1, ..., P_k über einem Gegenstandsbereich von höchstens 2^k Elementen wahr wird, ist φ allgemeingültig.[500] Weshalb?

Nehmen wir an, es existiere eine Interpretation über einem Gegenstandsbereich mit mehr als 2^k Elementen, die φ falsifiziert. Für jedes Element im Gegenstandsbereich gilt, dass P_1 darauf zutrifft oder dass P_1 nicht darauf zutrifft, dass P_2 darauf zutrifft oder dass P_2 nicht darauf zutrifft, ..., und dass P_k darauf zutrifft oder dass P_k nicht darauf zutrifft.

[498] Das gleich Folgende orientiert sich meistens an der Darstellung in Hilbert und Ackermann (1928). Dafür, dass neben Hilbert vor allem auch Bernays an der inhaltlichen Ausgestaltung beteiligt war, vgl. Anm. 463.

[499] Für das Entscheidungsproblem der ganzen Prädikatenlogik erster Stufe – oder des ‹engeren Funktionenkalküls›, wie es bei Hilbert und Ackermann heisst – müssen die vorgelegten Ausdrücke gemäss Hilbert und Ackermann (1928, S. 72-73) folgende Bedingungen erfüllen: (i) sie dürfen keine ‹individuellen Zeichen›, d. h. keine nicht-logischen Konstanten enthalten (ausser allenfalls die Identität wie bei Löwenheim und Behmann, vgl. S. 77); (ii) die darin vorkommenden freien Variablen, an denen Einsetzungen vorgenommen werden dürfen, sind Prädikatsbuchstaben; (iii) alle Individuenvariablen kommen an Quantoren gebunden vor. Dieselben Bedingungen gelten auch für den monadischen Spezialfall des Entscheidungsproblems, der in § 12 (S. 77-79) behandelt wird. Weshalb freie Individuenvariablen ausgeschlossen werden, wurde mir nicht ganz klar. Jedenfalls fällt diese Einschränkung in der zweiten Ausgabe weg, vgl. Hilbert und Ackermann (1938, S. 90). Für unsere Zwecke hier reicht es jedoch, den einfachen Fall zu betrachten, bei dem Individuenvariablen immer gebunden vorkommen; ab S. 94 wird das in Hilbert und Ackermann (1938) ebenfalls so gehandhabt. Und auch in Börger u. a. (1997, S. 8-9) werden Formeln mit freien Variablen aus der Untersuchung ausgeschlossen, da durch ihre Berücksichtigung keine neuen Fälle hervorgehen würden. Generell gilt: «We can restrict attention to closed formulae, i. e. sentences, because a formula ψ with free variables $x_1, ..., x_n$ is satisfiable over the same domains as its existential closure $\exists x_1 ... \exists x_n \psi$» (S. 26).

[500] Vgl. Hilbert und Ackermann (1928, S. 77).

In Bezug auf das Zutreffen und Nicht-Zutreffen der P_1, ..., P_k gehört jedes Element aus dem Gegenstandsbereich genau einer von 2^k möglichen Klassen an. Zwei Elemente a und b, die derselben Klasse angehören, lassen sich durch die k Prädikate nicht unterscheiden, da für sie gilt:

$$
\begin{array}{rcl}
P_1(a) & \equiv & P_1(b) \\
& \dots & \\
P_k(a) & \equiv & P_k(b)
\end{array}
$$

Indem wir für jede dieser Klassen, sofern sie nicht ohnehin leer ist, ein Element auswählen und alle anderen Elemente derselben Klasse aus dem Gegenstandsbereich entfernen, ergibt sich auf naheliegende Weise über einem Gegenstandsbereich mit höchstens 2^k Elementen eine Interpretation, die φ falsch macht.[501] Damit ist der Satz bewiesen.

Entsprechendes gilt für die Eigenschaft der Erfüllbarkeit, wie sich an einem einfachen Beispiel einsehen lässt. Sei ψ eine Formel wie φ vorhin, aber mit nur drei Prädikatsbuchstaben ‚P', ‚Q' und ‚R'. Nehmen wir an, es existiere über einem Gegenstandsbereich mit mehr als 2^3 Elementen eine Interpretation, unter der ψ wahr wird. Dann enthält mindestens eine der acht verschiedenen Klassen, denen die Elemente in Bezug auf das Zutreffen und Nicht-Zutreffen der Prädikate angehören können, mehr als ein Element. (Wenn wir uns die Extensionen der Prädikate in einem Venn-Diagramm mit drei Kreisen veranschaulicht denken und der Interpretation nach die Elemente des Gegenstandsbereichs einzeln in die verschiedenen Felder einzeichnen, dann wird mindestens eines der acht Felder mehrfach besetzt sein.) Indem wir auch hier wieder in jeder Klasse (bzw. in jedem Feld) die überschüssigen Elemente streichen, erhalten wir ein Modell von ψ mit höchstens acht Elementen. Anders gesagt, können monadische Formeln mit drei Prädikatsbuchstaben wie ψ höchstens acht Gegenstände auseinanderhalten; ist der Gegenstandsbereich grösser, wird es zwingend Elemente geben, die in Bezug auf diese Prädikate ununterscheidbar sind.

Aus diesem einfachen Beispiel auf den allgemeinen Fall schliessend, lässt sich analog zu vorhin festhalten: Jede erfüllbare Formel der monadischen Prädikatenlogik mit k

[501] Anstatt auf eine neue Interpretation zu wechseln, werden in Hilbert und Ackermann (1928, S. 78) k neue Prädikate definiert.

Prädikatsbuchstaben hat ein Modell mit höchstens 2^k Elementen.[502] Oder umgekehrt: Hat die Formel kein Modell mit höchstens 2^k Elementen, ist sie eine Kontradiktion.

Es zeigt sich hier in besonderer Ausprägung eine Eigenschaft, die für die Untersuchung der Grenzen zwischen entscheidbaren und unentscheidbaren Fragmenten der Prädikatenlogik von grundlegender Bedeutung ist: die endliche Kontrollierbarkeit.[503] Eine Formel heisst *endlich kontrollierbar*, wenn gilt, dass, wenn sie überhaupt erfüllbar und keine Kontradiktion ist, sie im Endlichen erfüllbar ist, mithin ein endliches Modell besitzt. Entsprechend wird eine ganze Formelklasse als endlich kontrollierbar bezeichnet, wenn jede Formel darin endlich kontrollierbar ist. Besitzt eine Formelklasse diese Eigenschaft, hat darin also jede erfüllbare Formel ein endliches Modell und ist jede Formel, die kein endliches Modell hat, eine Kontradiktion. So wichtig diese Eigenschaft im Hinblick auf Entscheidbarkeitsfragen auch sein mag: dass eine Formelklasse endlich kontrollierbar ist, ist weder notwendig noch hinreichend für die Lösbarkeit ihres Entscheidungsproblems (d. h. dafür, dass Erfüllbarkeit über dieser Formelklasse entscheidbar ist).[504] Doch für die Entscheidbarkeit des monadischen Fragments ist dieser Sachverhalt ohnehin unerheblich, da ja hier eine besondere Form von endlicher Kontrollierbarkeit vorliegt. Es lässt sich in diesem Fall relativ zur Komplexität der vorgelegten Formel eine obere Schranke

[502] Zu recht wird man hier an das Verhältnis zwischen den Kardinalzahlen endlicher Mengen und ihrer Potenzmengen (d. i. der Mengen ihrer Teilmengen) denken. Die Potenzmenge einer Menge mit k Elementen enthält bekanntlich 2^k Elemente. Der Zusammenhang zeigt sich, wenn für eine Formel mit k Prädikaten ein bestimmtes Modell gebaut wird: Bilden wir die Potenzmenge der Menge dieser Prädikate, ergeben sich daraus 2^k verschiedene Prädikatsbündel. Jedes Bündel entspricht genau einer der verschiedenen Kombinationen des Zutreffens und Nicht-Zutreffens der k Prädikate. Indem wir nun die Menge der Prädikatsbündel zum Gegenstandsbereich unseres Modells machen, ist für jede Kombination, die unsere Formel überhaupt auszudrücken vermag, ein Gegenstand vorgesehen, der sie wahr macht. Mehr Gegenstände braucht es nicht, nur die Interpretation der Prädikate muss noch an die Formel angepasst werden und schon steht das Modell. Kurzum: Mit den beschränkten Mitteln der monadischen Prädikatenlogik (ohne Identität) lassen sich Gegenstände lediglich als Bündel ihrer Eigenschaften behandeln.

[503] In der englischsprachigen Literatur ist sowohl von ‚finite controllability' als auch von ‚finite model property' die Rede.

[504] In Börger u. a. (1997, S. 240) heisst es, dass, wenn die betreffende Formelklasse rekursiv ist und folglich sowohl sie selbst als auch ihr Komplement innerhalb der gesamten prädikatenlogischen Formelmenge rekursiv aufzählbar ist, sei endliche Kontrollierbarkeit für Entscheidbarkeit über der Formelklasse hinreichend. Ich frage mich, ob rekursive Aufzählbarkeit der Formelklasse als Zusatzbedingung nicht bereits genügt. In Dreben und Goldfarb (1979, S. 78) heisst es denn auch: «The class of schemata having finite models is recursively enumerable (but not, as shown by Trakhtenbrot (1950) recursive); so too is the class of unsatisfiable schemata. Hence any effectively specifiable class that is finitely controllable is also solvable.» Damit endliche Kontrollierbarkeit für Entscheidbarkeit hinreicht, müssen also zusätzliche Bedingungen erfüllt sein (siehe Anm. 533 für ein Beispiel). Umgekehrt gibt es viele, darunter auch interessante Formelklassen mit lösbarem Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit, die aber nicht endlich kontrollierbar sind, vgl. dazu Dreben und Goldfarb (1979, Kap. 5) und Börger u. a. (1997, Kap. 7).

angeben (2^k, wenn die Zahl der Prädikatsbuchstaben in der Formel k beträgt), sodass die Formel genau dann erfüllbar ist, wenn nicht einfach ein endliches Modell existiert, sondern eines mit nicht mehr Elementen, als angegeben (d. s. 2^k).[505]

Wie aber folgt jetzt Entscheidbarkeit? Um zu entscheiden, ob eine Formel aus dem monadischen Fragment erfüllbar ist oder nicht, reicht es zu prüfen, ob ein Modell für sie existiert, das nicht mehr Elemente zählt, als durch die berechnete Schranke vorgegeben. Wie ein entsprechendes Entscheidungsverfahren aussehen könnte, lässt sich mit einem einfachen Beispiel andeuten. Sei die Formel, die es zu entscheiden gilt

$$\forall x \exists y \neg (Px \to Py).$$

Wenn sie erfüllbar ist, hat sie nach dem obigen Satz ein Modell mit höchstens 2 Elementen. Wählen wir als Gegenstandsbereich $\{\alpha, \beta\}$ und führen die Konstanten ‚a' und ‚b' für α und β ein. Über diesem Gegenstandsbereich lassen sich die Quantoren schrittweise eliminieren, indem Allaussagen durch zweigliedrige Konjunktionen und Existenzaussagen durch zweigliedrige Disjunktionen ersetzt werden:

$$\begin{array}{ccc} \exists y \neg (Pa \to Py) & \wedge & \exists y \neg (Pb \to Py) \\ \neg (Pa \to Pa) \vee \neg (Pa \to Pb) & \wedge & \neg (Pb \to Pa) \vee \neg (Pb \to Pb). \end{array}$$

Dass mit der quantorenfreien Formel eine aussagenlogische Kontradiktion vorliegt, zeigt sich nach wenigen Umformungen, aus denen die offenkundig unerfüllbare Formel

$$Pa \wedge \neg Pa \wedge Pb \wedge \neg Pb$$

hervorgeht. Egal, wie man das Prädikat über $\{\alpha, \beta\}$ auch interpretiert, nie wird die vorgelegte Formel wahr.[506] Damit ist die Unerfüllbarkeit nachgewiesen; die einelementigen Gegenstandsbereiche müssen nicht separat berücksichtigt werden. Da nämlich der Gegenstandsbereich eines Modells durch beliebig viele Elemente, die von bereits enthaltenen Elementen ununterscheidbar sind, angereichert werden kann, hat eine Formel mit einem m-elementigen Modell zudem für jedes $n > m$ ein n-elementiges Modell.[507]

---

[505] In der Literatur wird diese Eigenschaft mitunter auch ‹small model property› genannt, vgl. Börger u. a. (1997, S. 240 f.).

[506] Das Beispiel ist aus Hilbert und Ackermann (1938, S. 92-93) auf den monadischen Fall adaptiert. Das Verfahren, das in Hilbert und Ackermann (1928, S. 79) angegeben wird, entscheidet die *Allgemeingültigkeit* vorgelegter Formeln. Auch dort wird das Entscheidungsproblem der monadischen Prädikatenlogik letztlich auf das aussagenlogische Entscheidungsproblem zurückgeführt.

[507] Vgl. dazu Hilbert und Ackermann (1938, S. 92).

3.3.1.2. Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit im Endlichen

Diese Überlegungen zum monadischen Fragment lassen sich auf die ganze Prädikatenlogik extrapolieren. Sind für die Interpretation einer Formel nur Gegenstandsbereiche zugelassen, die eine bestimmte endliche Kardinalität – sagen wir N – nicht überschreiten, stellt sich sogleich Entscheidbarkeit ein. Indem man wie oben Allaussagen durch Konjunktionen, Existenzaussagen durch Disjunktionen ersetzt, wird das prädikatenlogische auf das aussagenlogische Entscheidungsproblem zurückgeführt.[508] Aus Effizienzgründen kann es sich lohnen, parallel zur Umformung in quantorenfreie Ausdrücke nach einem Modell für die vorgelegte Formel zu suchen. In der rudimentärsten Version des Verfahrens werden zu diesem Zweck iterativ aufsteigend alle Interpretationen mit $1 \leq k \leq N$ Elementen (bis auf Isomorphie) gebildet und daraufhin geprüft, ob sie die Formel bei geeigneter Interpretation ihrer Prädikatsbuchstaben wahr machen.[509] Während für jede erfüllbare Formel früher oder später ein Modell gefunden wird, steht die Unerfüllbarkeit einer Formel spätestens dann fest, wenn sich unter den Interpretationen mit N Elementen oder weniger keine fand, die ein Modell der Formel darstellt. Auch dieses Verfahren terminiert also in jedem Fall nach endlich vielen Schritten.[510]

Die zulässigen Kardinalitäten für Gegenstandsbereiche auf diese Weise zu beschränken, um Entscheidbarkeit zu erzwingen, wirkt indessen nicht nur *ad hoc*, sondern hat auch unerwünschte Folgen. Zum Beispiel würden aus gewissen erfüllbaren Formeln des monadischen Fragments mit k Prädikatsbuchstaben plötzlich Kontradiktionen, bloss weil die willkürlich festgelegte Schranke für Gegenstandsbereiche kleiner als 2^k gewählt wurde, diese Formeln aber mindestens so viele Gegenstände bräuchten, um wahr sein zu können. Auch die Darstellung endlicher Gruppen mit prädikatenlogischen Mitteln käme, um ein weiteres Beispiel zu geben, nicht über die festgelegte Schranke hinaus, sodass Gruppen höherer Ordnung ausgeblendet werden müssten. Wenn die Prädikatenlogik der Formalisierung mathematischer Theorien dienen können soll, ist nicht zu sehen, wie der-

[508] Für die Umformung in quantorenfreie Ausdrücke gibt es zahlreiche Abkürzungen, die von effizienteren Algorithmen genutzt werden. Für eine ausführliche Darstellung verschiedener Ansätze und ihrer algorithmischen Umsetzung, vgl. Harrison (2009, Kap. 3 (ab S. 129)).

[509] Auch hier wieder gibt es viele Möglichkeiten, Verfahren für das Auffinden von Modellen oder Gegenbeispielen effizienter zu gestalten. In Harrison (2009, S. 322-324) wird ein vergleichsweise einfaches, aber wenig effizientes Verfahren skizziert; zwei mächtigere Algorithmen, Mace4 und Paradox, werden erwähnt.

[510] Dass es auch für das ineffizienteste Verfahren dieser Art jeweils ausreicht, nur eine Interpretation derselben Isomorphieklasse zu prüfen, folgt aus dem sogenannten Isomorphielemma, wonach isomorphe Interpretationen dieselben Formeln wahr machen. Für das Isomorphielemma und die Rolle, die es im Beweis für die Terminierung des angedeuteten Verfahrens spielt, vgl. Boolos u. a. (2007, S. 140-142) und Ebbinghaus u. a. (2007, S. 42, 180-181).

art brachiale Beschränkungen ihrer Semantik zu billigen wären; dass jede Rumpftheorie, die sich prädikatenlogisch noch darstellen liesse, dadurch entscheidbar würde, wiegt die Nachteile nicht auf. Ausserdem ist schwer zu sehen, wie zu begründen wäre, dass der Begriff eines Entscheidungsverfahrens, der ja zum Gegenstand mathematischer Theorien gemacht wird, solchen ultrafinitistischen Beschränkungen selbst nicht unterliegt. Es muss bessere Wegen geben, Entscheidbarkeit sicherzustellen.

Anstatt willkürlich irgendeine natürliche Zahl als obere Schranke zu bestimmen, die, wenn sie auch für gewisse Zwecke ausreichen würde, für anderes ungenügend ist, liegt es nahe, die kleinste unendliche Kardinalität als strikte Schranke zu wählen. Unendliche Gegenstandsbereiche wären damit weiterhin ausgeschlossen, jedoch alle endlichen zugelassen. Auf den ersten Blick könnte man erwarten, dass mit dieser gemässigteren Beschränkung die gröbsten Nachteile vermieden werden und sich dennoch Entscheidbarkeit über der prädikatenlogischen Formelmenge einstellt. Aber im Unterschied zur Beschränkung auf ein endliches N können All- und Existenzaussagen nicht mehr ohne Weiteres durch Konjunktionen und Disjunktionen ersetzt werden. Denn es sind jetzt Interpretationen über Gegenstandsbereichen mit beliebig vielen Elementen zulässig, solange es nur endlich viele sind. Und deshalb ist es auch nicht mehr möglich, für eine vorgelegte Formel *alle* Interpretationen (bis auf Isomorphie) durchzugehen, um zu entscheiden, ob sie erfüllbar oder kontradiktorisch ist.

Die Sachlage ist folglich eine ganz andere als vorhin. Ein Entscheidungsverfahren für endliche Erfüllbarkeit müsste andere Wege einschlagen als die beiden eben genannten. Tatsächlich aber existiert kein Entscheidungsverfahren für diese Eigenschaft. Das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik bleibt unlösbar, selbst wenn die Interpretation ihrer Formeln auf endliche Gegenstandsbereiche beschränkt wird. Dies folgt aus dem Satz von Trachtenbrot unter der Annahme, dass der Algorithmusbegriff durch den Begriff der allgemeinen Rekursivität präzisiert werden kann.

3.3.1.3. Der Satz von Trachtenbrot und Unendlichkeitsschemata

Der Satz von Trachtenbrot besagt, dass die Tautologien des Endlichen – d. s. diejenigen Formeln, die unter allen Interpretationen mit endlichem Gegenstandsbereich wahr bleiben – nicht rekursiv aufzählbar sind.[511] In anderen Worten gibt es keinen Algorith-

[511] Ein fundiertes Verständnis des Satzes von Trachtenbrot und seines Beweises setzt Begriffe aus der Rekursionstheorie voraus, die hier nicht eingeführt werden konnten. Für den jetzigen Zweck reicht es, die rekursive Aufzählbarkeit einer Menge mit der Existenz eines Algorithmus gleichzusetzen, der ihre Elemente vollständig aufzählt. Für präzise Definitionen, vgl. Hermes (1978, § 28 (S. 188-192)). In Börger u. a. (1997, S. 33-35) wird ein Beweis des Satzes von Trachtenbrot gegeben; eine begrifflich

mus, der die Tautologien des Endlichen lückenlos aufzählt. Dasselbe gilt freilich für die Kontradiktionen des Endlichen, da sie deren negiertes Spiegelbild darstellen: φ ist genau dann eine Tautologie des Endlichen, wenn $\neg\varphi$ eine Kontradiktion des Endlichen ist. Daraus folgt, dass es über endlichen Gegenstandsbereichen kein Beweisverfahren für logische Formeln geben kann, weder für solche, die immer wahr, noch für solche, die immer falsch sind. Denn sonst wären die Tautologien und Kontradiktionen des Endlichen rekursiv aufzählbar, zumal Beweisverfahren zu aufzählenden Algorithmen erweitert werden können.[512] Die erfüllbaren Formeln dagegen werden im Endlichen rekursiv aufzählbar, wie sich weiter oben bereits andeutete.[513] Wären sie aber auch entscheidbar – d. h. gäbe es einen Algorithmus, der über endliche Erfüllbarkeit entscheidet – existierte damit ein Verfahren, das die Kontradiktionen (und auch die Tautologien) des Endlichen aufzählt. Endliche Erfüllbarkeit ist also lediglich halb-entscheidbar.[514]

Gödels Vollständigkeitssatz für die unbeschränkte Prädikatenlogik stellt bekanntlich die Existenz eines Verfahrens sicher, mit dem sich alle Tautologien beweisen und alle Kontradiktion widerlegen lassen. Die Tautologien und Kontradiktionen *tout court* sind denn auch rekursiv aufzählbar. Dass die Beschränkung auf endliche Gegenstandsbereiche die Existenz eines prädikatenlogischen Beweisverfahrens ausschliesst und die logischen Sätze im Endlichen ihre Aufzählbarkeit verlieren, ist daher bemerkenswert. Der Grund dafür ist in den Verschiebungen zu suchen, die durch diese Beschränkung in den Extensionen der Prädikate ‚φ ist unter allen Interpretationen wahr', ‚φ ist unter einer oder mehreren Interpretationen wahr' und ‚φ ist unter allen Interpretationen falsch' bewirkt werden. So zählt die Menge der Tautologien des Endlichen gegenüber der Menge *aller* Tautologien zusätzliche Elemente. Formeln, die nur über unendlichen Bereichen falsch sein können, sind zwar keine Tautologien *tout court*, aber über endlichen Bereichen immer wahr und damit Tautologien des Endlichen. Die Menge der Kontradiktionen des Endlichen auf der anderen Seite wird durch Formeln angereichert, die nur über unendlichen Bereichen wahr sein können, mithin über allen endlichen falsch sind. Es ist dieser Zuwachs, der dafür sorgt, dass weder die Tautologien noch die Kontradiktionen des Endli-

weniger voraussetzungsreiche Beweisskizze findet sich in Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S 499-504).

[512] Für die begrifflichen Beziehungen, die hier zugrunde liegen, siehe Anm. 284 und die dort angegebene Literatur.

[513] Um die im Endlichen erfüllbaren Formeln aufzuzählen, bilde man nach syntaktischen Regeln schrittweise alle Formeln der Prädikatenlogik, setze für jede erzeugte Formel einen Algorithmus zur Modellfindung in Gang und trage jede Formel, für die ein Modell gefunden wurde, in eine Liste ein. Dieses Verfahren erzeugt eine lückenlose Aufzählung der Formeln, die über einem endlichen Gegenstandsbereich erfüllbar sind.

[514] Siehe für diese Redeweise auch Anm. 285.

chen – im Gegensatz zu den Tautologien und Kontradiktionen *tout court* – algorithmisch aufgezählt werden können. Semantisch betrachtet bilden also die Formeln, die sich erst im Unendlichen von den logischen unterscheiden, die Saat der Unentscheidbarkeit. Um was für Ausdrücke handelt es sich?

Konsistente Aussagen, die nur über unendlichen Gegenstandsbereichen wahr sein können, sind aus vielen mathematischen Theorien wohlbekannt. In Anlehnung an Quine hatten wir entsprechende prädikatenlogische Formeln zu Beginn dieses Abschnitts als Unendlichkeitsschemata bezeichnet.[515] Zum Beispiel kann eine Relation, die über einem Gegenstandsbereich linkstotal ist, nur dann zugleich irreflexiv und transitiv sein, wenn dieser Bereich unendlich viele Elemente enthält. Entsprechend handelt es sich bei der Formel

$$\forall x \forall y \forall z \exists u (Rxu \land \neg Rxx \land (Rxy \land Ryz \rightarrow Rxz)) \tag{Υ}$$

um ein Unendlichkeitsschema.[516] Wie auch immer das Prädikat ‚R' interpretiert wird, ist Υ falsch, solange der zugrundeliegende Gegenstandsbereich endlich bleibt. Über unendlichen Gegenstandsbereichen dagegen gibt es offensichtlich Interpretationen von ‚R', unter denen Υ wahr wird. Umgekehrt ist die Negation dieser Formel über endlichen Bereichen immer wahr und genau unter denjenigen Interpretationen falsch, die Υ wahr machen. Die Negation von Υ ist also nur im Unendlichen falsifizierbar.[517] Diese Formeln, die nur über unendlichen Gegenstandsbereichen falsch sein können, bilden das duale Gegenstück der Unendlichkeitsschemata. Für die Untersuchung der Grenzen des Entscheidbaren sind sie daher ebenso bedeutsam.[518]

Der Versuch, Entscheidbarkeit zu erzwingen, indem die Reichweite von Variablen auf endliche Gegenstandsbereiche limitiert wird, scheitert also an den Unendlichkeitsschema-

[515] Vgl. Quine (1982, S. 215). Anstatt von ‚infinity schemata' wie bei Quine ist in der Literatur öfter von ‚infinity axioms' die Rede.

[516] Vgl. Börger u. a. (1997, S. 307).

[517] Ein Beispiel, das in Stegmüller und Varga von Kibéd (1984, S. 500) und in Ebbinghaus u. a. (2007, S. 180) erwähnt wird, lässt sich aus der Aussage entnehmen, wonach eine unbestimmt gelassene Funktion $f : X \rightarrow X$, die injektiv ist, auch surjektiv ist. Diese Aussage ist nur dann falsch, wenn X unendlich ausfällt. Bei der Negation der entsprechenden Formel handelt es sich um ein Unendlichkeitsschema, vgl. Börger u. a. (1997, S. 310).

[518] Man beachte, dass ein Unendlichkeitsschema υ unmöglich eine „Tautologie des Unendlichen", d. h. über allen unendlichen Gegenstandsbereichen wahr sein könnte. Denn die Negation eines solchen υ wäre über allen unendlichen Bereichen falsch und über allen endlichen wahr. Folglich wären alle und nur die endlichen Strukturen Modelle von $\neg\upsilon$, d. h., die Klasse der endlichen Strukturen würde sich als elementar herausstellen, was dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe (auch Endlichkeitssatz genannt) widerspricht, vgl. Ebbinghaus u. a. (2007, S. 93-97). Mit der Negation einer solchen hypothetischen „Tautologie des Unendlichen" liesse sich aussagen, was mit den Mitteln der ersten Stufe nicht ausgesagt werden kann: dass es nur endlich, wenn auch unbestimmt viele Gegenstände gibt.

ta und ihren Gegenstücken. Mit dieser Feststellung allein ist für unsere Untersuchung indes nicht viel gewonnen. Die Frage, die uns über diesen Text hinaus interessieren und der weiteren Arbeit die Richtung weisen muss, ist wiederum eine Verständnisfrage: *Weshalb sind Unendlichkeitsschemata nicht rekursiv aufzählbar? Woran genau scheitern Algorithmen hier?*[519] *Und welche Rolle spielen dabei Variablen?*

Wie wir eben gesehen haben, ist es keineswegs unmöglich, von einer Nicht-Kontradiktion zu zeigen, dass sie keine endlichen Modelle hat. Die Mathematik bietet mehr als genug Anschauungsmaterial, an dem sich die Eigenheiten von Unendlichkeitsschemata studieren lassen.[520] Ausserdem liegen auf dem Gebiet bereits zahlreiche Theoreme vor, aus denen sich erste Antworten ergeben. Zu den Resultaten, die hier nicht ausgewertet werden konnten, gehört insbesondere die fast vollständige Klassifikation minimaler Präfixklassen, in denen Unendlichkeitsaxiome enthalten sind.[521] Dieser Klassifikation lässt sich entnehmen, welche Quantorenabfolgen zugelassen sein müssen, damit die Grenzen der endlichen Kontrollierbarkeit überschritten werden. Gerade im Hinblick auf die Frage nach dem Beitrag, den Variablen dabei leisten, könnte sich eine Auswertung der betreffenden Theoreme als zuträglich erweisen.

Bevor wir uns im verbleibenden Teil dieses Texts syntaktischen Restriktionen zuwenden, insbesondere der Frage nach der Lösbarkeit des Entscheidungsproblems über Präfixklassen, seien hier zwei neuere Resultate kurz vorgestellt, die unsere bisherigen semantischen Betrachtungen auf unerwartete Weise ergänzen.

3.3.1.4. Entscheidbarkeit durch vorangestelltes Prädizieren

Geleitet hat uns in diesem Abschnitt der Gedanke, dass eine gewisse semantische Masslosigkeit beim Quantifizieren, ein Überfluss an Interpretationsmöglichkeiten, für die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik verantwortlich sein könnte. Obschon sich dieser Gedanke als falsch, oder zumindest nicht ganz wahr, erwiesen hat, wäre es auf den ersten Blick gleichwohl erstaunlich, wenn Entscheidbarkeit nicht durch eine weitere Beschränkung, sondern im Gegenteil durch eine Anreicherung der Menge möglicher Modelle herbeigeführt würde. Doch genau dies hat Aldo Antonelli vor einigen Jahren mit seiner ‹general semantics› für die Prädikatenlogik erster Stufe gezeigt.[522] Antonellis ‹general

[519] Diese m. W. eher selten behandelte Frage soll aus einer möglichst praxisnahen Warte und nicht nur in metalogischer Perspektive untersucht werden.

[520] Für einen Algorithmus, der voneinander unabhängige Unendlichkeitsschemata von begrenzter Länge erzeugt, vgl. Lampert und Nakano (2020).

[521] Vgl. dafür Börger u. a. (1997, S. 309).

[522] Antonelli (2017). Für den Hinweis danke ich Sebastian Speitel.

models›, wie er sie nennt, enthalten neben einer Interpretationsfunktion und einem Individuenbereich eine zweite Menge bestehend aus Teilmengen des Individuenbereichs. Diese zweite Menge dient der Interpretation des Existenzquantors als ‹generalized quantifier›.[523] Werden Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit über diese angereicherten allgemeinen Modelle definiert, wird das Entscheidungsproblem plötzlich lösbar.

Antonellis Beweis – und das führt uns zum letzten Punkt in diesem Abschnitt – erfolgt auf dem Umweg über das sogenannte *guarded fragment* der erststufigen Prädikatenlogik.[524] Alle quantifizierten Formeln, die in diesem Fragment enthalten sind, haben die Form

$$\exists y(\alpha(x,y) \land \psi(x,y))$$

oder

$$\forall y(\alpha(x,y) \to \psi(x,y))$$

wobei $\alpha(x,y)$ eine atomare Formel, d. i. ein einfacher Prädikatsbuchstabe, und $\psi(x,y)$ irgendeine Formel aus demselben Fragment ist.[525] Die atomaren Formeln, die der eigentlichen Prädikation vorgeschaltet sind, werden als *guards* bezeichnet.

Semantisch betrachtet könnte man vielleicht sagen, dass Quantifizieren im *guarded fragment* der Prädikatenlogik insofern begrifflich begrenzt ist, als jede quantifizierte Variable an der Argumentstelle eines *guards*, mithin eines einfachen Prädikats vorkommen muss. Jedenfalls bewirkt diese syntaktische Restriktion bei der Form quantorenhaltiger Ausdrücke, dass Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit entscheidbar werden. Die Fragen, die sich daher stellen und in einer anderen Arbeit als dieser untersucht werden müssten, sind: *Welchen Beitrag leistet dieses Muster im Variablenvorkommen, das für die guarded logic charakteristisch ist, an ihre Entscheidbarkeit?* Und: *Wie ist diese Entscheidbarkeit vor dem Hintergrund unserer Betrachtungen über begrenzte und unbegrenzte Variablen zu verstehen?*

3.3.2. Syntaktische Betrachtungen

Die Tautologien und Kontradiktionen der Prädikatenlogik sind unter Standardsemantiken unentscheidbar. Durch gewisse Anpassungen der Semantik können die Grenzen zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit zwar verschoben werden, wie die Be-

[523] Vgl. Antonelli (2017, S. 234-235). Für die Theorie der *generalised quantifiers*, siehe die Hinweise am Ende von 1.3.3.4.

[524] Vgl. Antonelli (2017, S. 245-249).

[525] Für eine kurze Einführung in die *guarded logic* und ihre Verknüpfung zur modalen Logik, vgl. Grädel u. a. (2002).

trachtungen im letzten Abschnitt gezeigt haben. Da es sich bei den Eigenschaften, die auf ihre Entscheidbarkeit hin untersucht wurden, um semantische handelt, erstaunt dieser Befund aber wenig. Bemerkenswert ist vielmehr, wie uneindeutig sich die Sachlage ausnimmt. Ob der semantische Zugang auf Entscheidungsprobleme ausreicht, um das angestrebte Verständnis der Unentscheidbarkeit und ihres Zusammenhangs mit dem Variablengebrauch herbeizuführen, ist daher fraglich. Womöglich handelt es sich bei der Unentscheidbarkeit auch oder sogar hauptsächlich um eine syntaktische Erscheinung. Jedenfalls existieren auf der ersten Stufe syntaktische Eigenschaften, die mit der semantischen Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit von Formeln extensionsgleich sind und deren Untersuchung geboten scheint, wenn die gesteckten Ziele erreicht werden sollen. Obwohl hier nicht der Ort ist, diese Untersuchung durchzuführen, lassen sich doch erste Betrachtungen aus syntaktischer Sicht anstellen.

Wie zu Beginn des letzten Abschnitts kann man sich wiederum fragen, ob Unentscheidbarkeit nicht einer gewissen Masslosigkeit geschuldet ist. Der ursächliche Überfluss wäre diesmal nicht in der Mannigfaltigkeit an Interpretationsmöglichkeiten und der semantischen Reichweite gebundener Variablen zu suchen, sondern in der schieren Multiplizität an Ausdrücken, die aus den syntaktischen Regeln der Formelbildung hervorgehen. Braucht es diese volle Multiplizität überhaupt, um mit der nötigen Ausdruckskraft Logik betreiben und mathematische Theorien formalisieren zu können? Für viele Zwecke, so scheint es, wäre weniger genug. Vielleicht sind die üblichen syntaktischen Regeln einfach zu freizügig und es würde sich lohnen, sie zu verschärfen – zumal im Gegenzug Entscheidbarkeit winkt.

Unsere Leitfrage ist also die nach den spezifischen Multiplizitäten, die ein Überschreiten der Entscheidbarkeitsgrenze verursachen. Um diese Frage zu beantworten, werden syntaktische Restriktionen verschiedener Art in Betracht gezogen. Im Hinblick auf Entscheidungsprobleme stellt jede solche Restriktion gegenüber der gesamten Formelmenge der Prädikatenlogik eine Verkleinerung der Prüfmenge dar. Da es jedoch überabzählbar viele Teilmengen der Gesamtformelmenge gibt, ist es unerlässlich, Hinsichten – wenn möglich die richtigen – zu wählen, in denen Restriktionen erfolgen sollen. Nach Churchs Theorem hat sich die Arbeit am Entscheidungsproblem vornehmlich an bestimmten Klassifikationskriterien orientiert und die Prädikatenlogik entsprechend in entscheidbare und unentscheidbare Fragmente unterteilt.[526] Als richtungsweisend für dieses Unterfangen und ausschlaggebend für die Entscheidbarkeitsbeweise haben sich sehr oft se-

[526] Auf die Wichtigkeit, die richtigen, d. h. mathematisch fruchtbaren Hinsichten zu wählen und entsprechende Klassifikationen anzustreben, hat Gurevich immer wieder hingewiesen, vgl. etwa Börger u. a. (1997, S. 9 u. 70-83).

mantische Überlegungen erwiesen. Zahlreiche Resultate, gerade betreffend Präfixklassen, ergaben sich aus der Berücksichtigung des Zusammenspiels von Syntax und Semantik.

Unseren Zwecken wäre gleichwohl nicht gedient, wenn wir nur die Verteilung semantischer Eigenschaften wie der endlichen Kontrollierbarkeit berücksichtigen würden. Dafür ist der begriffliche Zusammenhang mit der Entscheidbarkeit zu unklar und unbeständig, wie der letzte Abschnitt gezeigt hat. Andererseits gilt es bei der Wahl der Restriktionen darauf zu achten, dass sie nicht bloss eine schwache Entscheidbarkeit bewirken, die allein der Extensionalität der Begriffe geschuldet ist, da wir sonst kaum über die Betrachtungen im zweiten Kapitel hinauskämen. Meine Vermutung ist, dass die systematische Untersuchung des Variablengebrauchs an den Grenzen zur Entscheidbarkeit die nötige Richtung und Orientierung verschaffen könnte. Allerdings lässt sich dies im nun letzten Teil dieses Texts lediglich andeuten.

3.3.2.1. Restriktionen in Signatur und Präfix

Der erste Gedanke ist, die Signatur der untersuchten Formalsprache und damit die nichtlogischen Ausdrucksmittel zu restringieren. Beginnen wir jedoch mit den Individuenvariablen.[527] Wird die Zahl der Individuenvariablen auf ein endliches $k \geq 3$ reduziert, bleibt das Entscheidungsproblem unlösbar. Stehen dagegen nur noch zwei Variablen zur Verfügung, sind alle Formeln der prädikatenlogischen Sprache, die aus dieser Restriktion hervorgeht, endlich kontrollierbar. Es treten keine Unendlichkeitsschemata auf und für jede Formel kann eine obere Schranke angegeben werden. Das Entscheidungsproblem dieser Sprache ist folglich lösbar.[528] Bemerkenswert ist dieses Resultat auch deshalb, weil die Restriktion auf bloss zwei Variablen für gewisse algorithmische Anwendungen in und ausserhalb der Computerwissenschaft von grossem Nutzen sein kann.[529]

[527] Üblicherweise werden Individuenvariablen zusammen mit den logischen Konstanten zu den festen Bestandteilen eines Alphabets gezählt. Hier werden sie wie Elemente der Signatur behandelt, weil sich aus ihrer eingeschränkten Verfügbarkeit ein interessantes Resultat ergibt.

[528] Börger u. a. (1997, S. 377).

[529] Vgl. Börger u. a. (1997, S. 381-382): «In applications of logic to computer science and linguistics (related e. g. to knowledge representation systems, automatic verification, concurrent systems) a number of logic problems arose that are closely related to the classical decision problem, but are not covered by the standard framework. Indeed, many logics used in computer science applications can be seen as (parts of) fragments of first-order logic. In many cases, however, the relevant fragments are *not* those determined by quantifier prefix and vocabulary that were traditionally studied by logicians. Among important fragments are those determined by the number of variables and, in fact, a number of logics used in computer science can be embedded into L_2 or C_2. In particular this is the case for *propositional modal logics* and for a number of *knowledge representation logics* (or *concept logics*) belonging to the so-called KL-ONE family. Thus the results on decidability, upper complexity bounds and finite model property for L_2 and C_2 immediately imply corresponding results for those logics.» L_2 ist die erwähnte prädikatenlogische Sprache mit nur zwei Individuenvariablen, C_2 eine Erweiterung

Anstatt die Zahl der Individuenvariablen zu reduzieren, lässt sich die Zahl der Argumentstellen von Prädikaten, ihre Arität, kleinhalten. Die monadische Prädikatenlogik ist das erste Fragment, das aus dieser Art von Restriktion hervorgeht. Dass und weshalb sich hier Entscheidbarkeit einstellt, haben wir bereits gesehen (in 3.3.1.1). Der Kontrast zum dyadischen Fragment fällt umso schärfer aus, als sich an der Entscheidbarkeit im monadischen Fall nichts ändert, wie gross die Zahl der Prädikatsbuchstaben in der Signatur auch sein mag. Während das Entscheidungsproblem auf fast triviale Weise lösbar ist, wenn nur einstellige Prädikate zur Verfügung stehen, wird es unlösbar, sobald die Signatur auch nur ein einziges zweistelliges Prädikat enthält.[530] Dies widerspiegelt denn auch den grossen Unterschied in der Ausdruckskraft, der zwischen monadischen und dyadischen Fragmenten besteht. Um diese auf den ersten Blick erstaunliche Diskrepanz zu erklären, könnte man darauf hinweisen, dass sich mit k monadischen Prädikaten höchstens 2^k Elemente des Gegenstandsbereichs auseinanderhalten lassen, wohingegen ein einziges dyadisches Prädikat genügt, um Ausdrücke zu bilden, die erst über unendlichen Bereichen erfüllbar werden (siehe 3.3.1.3 für ein Beispiel). Andererseits erstaunt die festgestellte Diskrepanz weniger, wenn man bedenkt, wie komplex und fruchtbar die Theorie der Digraphen (die im genannten dyadischen Fragment formalisiert werden kann) sich im Vergleich zur geradezu trivial wirkenden Klassenlogik ausnimmt.

Wir können festhalten, dass, sobald ein mehrstelliges Prädikat zur Verfügung steht, die Grenze der Entscheidbarkeit überschritten wird. Um auf der entscheidbaren Seite zu bleiben, ohne ins monadische Fragment zurückzufallen, reicht es folglich nicht aus, die Anzahl Prädikate in der Signatur zu reduzieren. Es müssen Restriktionen auch an der Multiplizität des Quantorenapparats vorgenommen werden, d. h. (wenn man der Einfachheit halber nur Formeln in Pränexform berücksichtigt) an den möglichen Quantorenabfolgen im Präfix. Wird die Zahl der zulässigen Quantorenabfolgen auf ein endliches Mass reduziert und bleibt auch die Zahl der zur Verfügung stehenden Prädikate endlich, ergeben sich Formelklassen, die, wie es in der Literatur heisst, ‹essentially finite› – im Wesentlichen endlich – sind.[531] Diese Fragmente umfassen zwar unendlich viele Elemente, aber jede Formel darin kann immer nur aus einer Auswahl aus denselben, endlich vielen atomaren Formeln zusammengesetzt sein. Und da an die beliebig langen Matrizen, die aus wahrheitsfunktionalen Kombinationen der Atome bestehen, nur end-

---

von L_2 durch Zählquantoren. Für Erweiterungen von L_2 mit unlösbarem Entscheidungsproblem, vgl. Börger u. a. (1997, S. 219-227).

[530] Dieses Unentscheidbarkeitsresultat geht auf eine Arbeit Kalmárs von 1936 sowie auf Churchs Theorem aus demselben Jahr zurück, vgl. Börger u. a. (1997, S. 146).

[531] Vgl. Börger u. a. (1997, S. 239-240).

lich viele Quantorenabfolgen präfigiert werden können, lässt sich jedes im Wesentlichen endliche Fragment auf eine tatsächlich endliche Klasse von Formeln zurückführen, deren Matrizen in minimaler konjunktiver Normalform stehen.

Aus der Möglichkeit dieser Zurückführung auf eine endliche Prüfmenge, folgt freilich *per definitionem* die Lösbarkeit des Entscheidungsproblems über jeder Formelklasse, die im Wesentlichen endlich ist. Angesichts unserer früheren Diskussionen (in 2.2) über zwangsläufige Entscheidbarkeit bei untypischer Sachlage, ist dieses Resultat kritisch zu beurteilen. Insbesondere gilt es zu bedenken, dass Fragmente, die im Wesentlichen endlich sind, gleichwohl Unendlichkeitsschemata enthalten können – im Prinzip auch solche, an denen jeder heute bekannte Algorithmus scheitern würde. Es scheint demnach, als sei hier in Bezug auf diese Fragmente bloss schwache Entscheidbarkeit bewiesen worden.[532] Und solange kein algorithmisch anwendbares Kriterium vorliegt, mit dem sich alle Unendlichkeitsschemata der Klasse von den übrigen Formeln aussondern lassen, stellt sich die Lage aus epistemischer und praktischer Sicht nicht besser dar, als bei echter Unentscheidbarkeit. Umso wichtiger wäre es, zu verstehen, welche syntaktischen Multiplizitäten für die Möglichkeit von Unendlichkeitsschemata sorgen, und ob es hinreichende Kriterien gibt, die zumindest ihre partielle Klassifikation erlauben. Von besonderem Interesse für unsere Zwecke sind daher folgende Fragen: *Welche Rolle kommt Variablen bei der Bildung von Unendlichkeitsschemata zu? Welche Möglichkeiten ihres Gebrauch sind dafür unerlässlich?* Oder spezifischer: *Wie viele Variablen braucht es und in welchen Verhältnissen zueinander müssen sie stehen, damit ein Ausdruck der endlichen Kontrollierbarkeit entfliehen kann?* Dass für das Auftreten von Unendlichkeitsschemata mindestens drei verschiedene Individuenvariablen und mindestens ein zweistelliger Prädikatsbuchstabe zur Verfügung stehen müssen, haben wir bereits gesehen.

Historisch betrachtet hat sich die Untersuchung von Präfixklassen, bei denen Prädikate beliebiger Stelligkeit zugelassen sind, als besonders beliebt und auch fruchtbar erwiesen. Für die Präfixklassen $\exists^*\forall^*$ (Bernays, Schönfinkel 1928), $\exists^*\forall\exists^*$ (Ackermann 1928) und $\exists^*\forall^2\exists^*$ (Gödel 1932, Kalmár 1933, Schütte 1934) konnte das Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit noch vor Churchs Unentscheidbarkeitsbeweis gelöst werden (siehe 3.2).[533] In all diesen Fällen gelang dies durch den Nachweis endlicher Kontrollier-

[532] Eine ähnliche Sachlage liegt bei der Klasse jener Formeln vor, die aus höchstens zwei verschiedenen atomaren Teilformeln zusammengesetzt sind, vgl. Dreben und Goldfarb (1979, S. 194-197) und Börger u. a. (1997, S. 203-205). Tatsächlich betrifft der einzige nicht-konstruktive Beweis, der in Dreben und Goldfarb (1979) gegeben wird, diese Klasse.

[533] Hier gilt es anzumerken, dass die Gleichwertigkeit der dualen Entscheidungsprobleme für Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit nicht immer gegeben ist, wenn die Prüfmenge lediglich ein Fragment der Prädikatenlogik ausmacht. Betrachten wir das Fragment bestehend aus den Tautologien des Endli-

barkeit, wobei sich auch hier jeweils obere Schranken für minimale Modelle vorgelegter Formeln angeben liessen.[534]

Dennoch ist endliche Kontrollierbarkeit keine notwendige Bedingung für Entscheidbarkeit. Es gibt Präfixklassen, deren Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit gelöst werden konnte, obwohl nicht alle Formeln darin endlich kontrollierbar sind. Offenbar muss die Entscheidbarkeit in solchen Fällen auf andere Eigenschaften zurückzuführen sein. Die semantischen Überlegungen, die sich bei endlicher Kontrollierbarkeit als so nützlich erwiesen hatten, sind hier nicht anwendbar. Es müssen andere Methoden entwickelt werden. Ein bedeutendes Resultat, aus dem alternative Methoden gewonnen werden konnten, ist Rabins Entscheidbarkeitsbeweis für die monadische Theorie unendlicher Binärbäume $S2S$.[535] Auch wenn sich dieses wichtige Ergebnis hier nicht weiter besprechen lässt, deutet es doch eine Reihe von Fragen an, um die unsere Betrachtungen zu erweitern wären: *Welche Theorien sind entscheidbar, welche nicht und weshalb?*[536] Spezifischer: *Für die Formalisierung welcher Art von Theorien genügen welche Präfixklassen?* Und: *Gibt es Paare verwandter Theorien, von denen das eine Glied entscheidbar, das andere unentscheidbar ist?*

Diese Fragen würden sich insofern in unsere bisherigen Betrachtungen einfügen, als gehaltvolle axiomatische Theorien gegenüber der leeren Prädikatenlogik den Gegenstandsbereichen gewissermassen semantische Beschränkungen auferlegen – Beschränkungen, die wohlgemerkt über jene hinausgehen, von denen der letzte Abschnitt handelte. Indem wir fragen, welche Theorien entscheidbar sind, fragen wir nach den Vorstrukturierungen der Variablenbereiche, die notwendig sind, um Entscheidbarkeit sicherzustellen. Andererseits besteht auch ein Anknüpfungspunkt zu den syntaktischen Betrachtungen. Denn beim Formalisieren einer Theorie wird die übervolle Signatur der Prädikatenlogik

chen, d. i. die Vereinigung der Menge aller Tautologien mit der Menge aller erfüllbaren Formeln, die nur im Unendlichen falsifizierbar sind. Da es nach dem Satz von Trachtenbrot kein Beweisverfahren für Allgemeingültigkeit über endlichen Gegenstandsbereichen geben kann, ist dieses Fragment nicht rekursiv aufzählbar, *a fortiori* keine rekursive Menge. Da aber die Menge der Tautologien *tout court* rekursiv aufzählbar ist, kann die Menge der Formeln, die nur im Unendlichen falsifizierbar sind, nicht rekursiv aufzählbar sein. Allgemeingültigkeit ist über dieser Formelklasse folglich unentscheidbar, wohingegen beim Entscheidungsproblem für Erfüllbarkeit eine untypische Sachlage (nämlich S_2) vorliegt und daher eine triviale Lösung existiert. An diesem Beispiel ist ausserdem zu erkennen, dass endliche Kontrollierbarkeit keine hinreichende Bedingung für die Entscheidbarkeit von Allgemeingültigkeit ist.

[534] Vgl. Börger u. a. (1997, S. 249).

[535] Vgl. dafür Börger u. a. (1997, S. 315).

[536] Frühe und wegweisende Resultate zu dieser Frage wurden in Tarski u. a. (1953) geliefert. Weitere Resultate finden sich in Rabin (1977), Grigorieff (1991) sowie in Harrison (2009, Kap. 5).

auf das Vokabular der Sprache reduziert, in der sich die Theorie formulieren lässt. So betrachtet, stellen Theorien mithin auch syntaktische Restriktionen dar.

3.3.2.2. Identität und (Un-)Entscheidbarkeit

Die Klassifizierung der Prädikatenlogik in entscheidbare und unentscheidbare Präfixklassen ist inzwischen ein abgeschlossenes Unterfangen. Durch eine sorgfältige Untersuchung der zahlreichen Resultate, die zu diesem Abschluss geführt haben, könnte gewiss hinreichend geklärt werden, welchen Beitrag die Möglichkeiten der Quantorenverschachtelung an das Auftreten von Unendlichkeitsschemata und von Unentscheidbarkeit im Allgemeinen leisten. So fruchtbar sich eine solche Untersuchung auch erweisen dürfte, wird sie denen, die dem Wesen von Variablen nachjagen, weniger wichtig erscheinen, als man auf den ersten Blick denken könnte. Denn die Rolle, die gebundenen Variablen beim Anzeigen von Quantorenabfolgen und der Verschachtelung ihrer Bereiche mitunter zukommt, ist, wie wir im ersten Kapitel gesehen haben (in 1.3.3.5), eliminierbar. Ihren wesentlichen Beitrag leisten Variablen nicht im Präfix, sondern in der Matrix, wo sie die Verwandtschaft von Argumentstellen anzeigen.

Aus diesem Grund erscheint der Gebrauch von Variablen im Zusammenhang mit logischer Identität für unsere Zwecke bedeutsamer. Im Zusammenspiel mit dem Identitätszeichen dienen Variablen nämlich dazu, den Zugriff auf *verschiedene* Gegenstände zu sichern oder, richtiger gesagt, das Gegenstück zur Verwandtschaft von Argumentstellen anzuzeigen: jene Beziehung, die ich *faute de mieux* als Fremdschaft bezeichnet habe (siehe 1.4.2 unter ‚Stoff- und Formursache'). Eine eingehende Untersuchung dieser Beziehung wäre umso wichtiger, als die Möglichkeit, sie auszudrücken – was üblicherweise durch das Aufnehmen des Identitätszeichens in die Signatur gewährleistet wird –, die Grenzen der Entscheidbarkeit verschieben kann.

Zwei der drei vorhin erwähnten Präfixklassen mit lösbarem Entscheidungsproblem – die Bernays-Schönfinkel- und die Ackermann-Klasse – bleiben auch nach Hinzufügung des klassisch interpretierten Identitätszeichens entscheidbar. Dasselbe gilt für das monadische Fragment der Prädikatenlogik. Bemerkenswerterweise wird nun aber die dritte Präfixklasse – die Gödel-Kalmár-Schütte-Klasse –, anders als Gödel behauptet hatte, unentscheidbar, sobald Identität zur Verfügung steht. Dass Gödel diesbezüglich falsch lag, konnte erst 1984 von Warren Goldfarb bewiesen werden.[537] Weshalb dem so ist,

[537] Vgl. Börger u. a. (1997): S. 249-270, 281-290 für eine moderne Behandlung der klassischen Resultate; S. 161-188 für die Unentscheidbarkeit der Gödel-Kalmár-Schütte-Klasse mit Identität. Vgl. auch Goldfarbs Einleitung zu Gödels ursprünglichem Aufsatz von 1932 in Gödel (1986, S. 229-230).

kann hier nicht geklärt werden, aber es lassen sich erste, einfache Betrachtungen darüber anstellen, inwiefern das Hinzufügen von Identität die Sachlage verändert.

Schauen wir uns an, was Ramsey – dem es 1928 gelang, das Ergebnis von Bernays und Schönfinkel um die Identität zu erweitern – darüber zu sagen hat:[538]

> The formulae to be considered are thus of the form
>
> $$(x_1, x_2, ..., x_n)F(\phi, \chi, \psi, ..., =, x_1, x_2, ..., x_n),$$
>
> where the matrix F is a truth-function of values of the functions ϕ, χ, ψ, etc., and $=$ for arguments drawn from $x_1, x_2, ..., x_n$. [...]
>
> If identity does not occur in F the problem is trivial, since in this case whether the formula is consistent or not can be shown to be independent of the number of individuals in the universe, and we have only the easy task of testing it for a universe with one member only.
>
> But when we introduce identity the question becomes much more difficult, for although it is still obvious that if the formula is consistent in a universe U it must be consistent in any universe with fewer members than U, yet it may easily be consistent in the smaller universe but not in the larger. For instance,
>
> $$(x_1, x_2)[x_1 = x_2 \vee \{\phi(x_1) \,.\, {\sim}\phi(x_2)\}]$$
>
> is consistent in a universe with only one member but not in any other.

Formeln in Pränexform, deren Präfix nur aus Allquantoren besteht, sind genau dann erfüllbar, wenn sie ein Modell mit nur einem Element besitzen.[539] Das gilt sowohl, wenn die Matrix F das Identitätszeichen nicht enthält, als auch, wenn sie es enthält. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Fällen besteht nun darin, dass, wenn eine solche Formel erfüllbar ist und ihre Matrix kein Identitätszeichen enthält, für jede natürliche Zahl n ein Modell dieser Formel mit n Elementen existiert, wohingegen, wenn das Identitätszeichen in der Matrix vorkommt, dies nicht zwingend der Fall ist, wie Ramseys Beispiel zeigt.

Allgemeiner gefasst, gilt ohne die logische Identität, dass jede Formel mit k-elementigem Modell für jede Kardinalität $n > k$ ein Modell mit n Elementen besitzt. Insbeson-

[538] Ramsey (1928, S. 92-93).

[539] Ramsey verweist für diesen Punkt auf Bernays und Schönfinkel (1928, S. 359). Um sich klar zu machen, weshalb das zutrifft, reicht folgende Überlegung aus: Sei F eine Matrix ohne Identität, wie sie Ramsey beschreibt, und $\forall x_1 ... \forall x_n F(x_1, ..., x_n)$ erfüllbar. Dann ist auch $\exists x F(x, ..., x)$ erfüllbar. Für $\exists x F(x, ..., x)$ aber existiert offenkundig ein Modell mit nur einem Element und dieses ist auch ein Modell von $\forall x_1 ... \forall x_n F(x_1, ..., x_n)$. Um die Entscheidbarkeit für die ganze Bernays-Schönfinkel-Klasse mit Identität zu zeigen, muss Ramsey sein Ergebnis freilich auf Formeln mit einem Präfix der Form $\exists^*\forall^*$ ausweiten. Das geschieht auf den letzten Seiten seines Aufsatzes, vgl. Ramsey (1928, S. 109-111).

dere besitzt keine Formel ohne Identität nur endliche, aber keine unendlichen Modelle. Denn einem Modell der Formel können immer beliebig viele Gegenstände hinzugefügt werden, die mit den in der Formel enthaltenen Prädikaten von mindestens einem der Elemente im ursprünglichen Modell nicht zu unterscheiden sind. Auf diese Weise ergibt sich aus einem kleineren immer ein beliebig viel grösseres Modell.[540] Mit Hilfe des Identitätszeichens dagegen (sofern es als logische Identität ausgelegt wird) lassen sich Formeln bilden, die über allen Gegenstandsbereichen mit einer bestimmten Anzahl Elementen und mehr immer falsch werden, obwohl sie keine Kontradiktionen sind. Umgekehrt lassen sich damit Formeln bilden, die über allen Gegenstandsbereichen mit einer bestimmten Anzahl Elementen und mehr immer wahr werden, obwohl sie keine Tautologien sind. Deshalb können solche Formeln dazu verwendet werden, Aussagen von der Art ‚Es gibt höchstens n Gegenstände' bzw. ‚Es gibt mindestens n Gegenstände' zu formalisieren. Ohne dieses Werkzeug ist das im Allgemeinen nicht möglich. Mit Prädikatsbuchstaben allein lassen sich aus dem Gegenstandsbereich lediglich Teilmengen oder ein kartesisches Produkt von solchen herausgreifen.[541]

Nun wäre es sicher aufschlussreich, im Einzelnen nachzuvollziehen, wie und weshalb Ramseys Aufgabe – die Lösung des Entscheidungsproblems für Erfüllbarkeit über der Präfixklasse $\exists^*\forall^*$ – durch die Hinzufügung der Identität derart erschwert wurde. Und mehr noch gilt das für Goldfarbs Unentscheidbarkeitsbefund zur Präfixklasse $\exists^*\forall^2\exists^*$. Im Hinblick auf die Zwecke, die hier formuliert und verfolgt wurden, erscheint es gleichwohl wichtiger, sich zuerst über das seltsame, zwischen Relation und logischer Konstante changierende Wesen der Identität klar zu werden. Denn es verleitet zur Illusion, dass ein vorprädikativer Zugriff auf Gegenstände möglich sei, und unterstützt dadurch die ohnehin schon verbreitete Auffassung von Variablen als den Vehikeln reiner Referenz, ja als dem Referenzmittel schlechthin. Nach der Auffassung jedoch, die sich hier im Verlauf des ersten Kapitels schrittweise ergeben hat, dient das Identitätszeichen letztlich bloss dazu, ein besonderes Verhältnis zwischen den Argumentstellen von Begriffen und Relationen anzuzeigen: ihre Fremdschaft. Seinen wesentlichen Beitrag leistet das Identitätszeichen denn auch, wenn es im Skopus einer Negation steht.

Nach einem bekannten Vorschlag Wittgensteins lässt sich dieser Beitrag so in die Variablenschreibweise einbauen, dass das Identitätszeichen selbst obsolet wird und ohne Verlust an Ausdruckskraft aus der Signatur gestrichen werden kann.[542] Diese sogenannte exklusive Schreibweise hat für uns den Vorteil, dass sie sich mit der Auffassung von Va-

[540]Vgl. dazu nochmals Hilbert und Ackermann (1938, S. 92).
[541]Vgl. Quine (1986, S. 61-64).
[542]Siehe das Vorwort und Anm. 233. Für eine Umsetzung des Vorschlags, vgl. Hintikka (1956).

riablen als blossen Hilfszeichen zur Kenntlichmachung der logischen Form von Begriffen und Relationen gut verträgt. Denn exklusiv gelesen fügen Variablen der Gebrauchsanweisung für die Prädikate, deren Argumentstellen sie offenhalten, lediglich einen weiteren Aspekt hinzu: Indem verschiedene Variablen wie in ‹$\forall x \forall y(Fxy \rightarrow Fyx)$› innerhalb desselben syntaktischen Bereichs vorkommen, zeigen sie uns an, dass im Falle einer Instanziierung verschiedene Argumente für die verschiedenen Variablen einzusetzen sind. Anders gesagt, ist im Gegensatz zur üblichen inklusiven Schreibweise das Schema ‹Fxx› im Schema ‹Fxy› nicht enthalten. Die unterschiedlichen Formen, die ein Prädikat annehmen kann, werden bei exklusiver Schreibweise also deutlicher auseinandergehalten. Darüber hinaus drückt jede exklusiv geschriebene Formel, worin verschiedene Variablen im Schnittbereich ihrer Quantoren vorkommen, eine Aussage über die Zahl der Elemente im Gegenstandsbereich aus.

Die Frage, der sich die weitere Arbeit als erstes zuwenden sollte, da dieser Text sein Ende erreicht hat, ist daher die folgende: *Wo verlaufen bei exklusiver Variablenschreibweise die Grenzen zwischen Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit?* Um ein von den gewählten Darstellungsmitteln möglichst unverfälschtes Bild zu erhalten, würde es sich lohnen, mit verschiedenen Notationen des prädikatenlogischen Systems zu arbeiten, in erster Linie mit Quines *predicate-functor logic*. Wie sich indes das Identitätszeichen oder die exklusive Variablenschreibweise am besten in die Funktorenlogik übertragen lässt, ist nicht ganz klar. Ebenfalls zu berücksichtigen wäre in diesem Zusammenhang Quines *fluted logic*, in der Individuenvariablen ihrer eigentlichen Rolle beraubt sind. Es handelt sich dabei um ein weiteres Fragment der Prädikatenlogik, für das Entscheidbarkeitsresultate vorliegen und das überdies in der *predicate-functor logic* gut abzubilden ist. Die Formelklasse ergibt sich in diesem Fall nicht durch Vorgaben an die Signatur oder Präfixstruktur, sondern durch die Fixierung der Reihenfolge, in welcher Variablen innerhalb der Formelmatrizen vorkommen dürfen.[543]

[543] Vgl. Purdy (1996) und für eine neuere Arbeit Pratt-Hartmann u. a. (2019).

Literatur

Abe, Jair Minoro, Seiki Akama und Kazumi Nakamatsu

2015 (Hrsg.), *Introduction to Annotated Logics: Foundations for Paracomplete and Paraconsistent Reasoning*, Springer, Dordrecht.

Ackermann, Wilhelm

1928 „Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke", *Mathematische Annalen* (100), S. 638–649.

1934 „Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik", *Mathematische Annalen* (110, 4), S. 390–413.

Agrawal, Manindra und Somenath Biswas

2003 „Primality and Identity Testing via Chinese Remaindering", *Journal of the ACM* (50, 4), S. 429–443.

Agrawal, Manindra, Neeraj Kayal und Nitin Saxena

2004 „PRIMES is in P", *Annals of Mathematics* (160, 2), S. 781–793.

Alexander von Aphrodisias

1883 *Alexandri in Aristotelis Analyticorum priorum librum I commentarium*, hrsg. v. Max Wallies, Reimer, Berlin.

1991 *Alexander of Aphrodisias: On Aristotle's Prior Analytics 1.1-7*, transl. by Jonathan Barnes, Susanne Bobzien, Kevin Flannery, and Katerina Ierodiakonou, Cornell University Press, Ithaca (NY).

Antonelli, Aldo

2017 „Completeness and Decidability of General First-Order Logic (with a Detour Through the Guarded Fragment)", *Journal of Philosophical Logic* (46, 3), S. 233–257.

Antonutti Marfori, Marianna

2010 „Informal Proofs and Mathematical Rigour", *Studia Logica* (96, 2), S. 261–272.

Arana, Andrew

2011 „L'infinité des nombres premiers : une étude de cas de la pureté des méthodes“, *Les Études philosophiques* (97, 2), S. 193–213.

2017 „On the Alleged Simplicity of Impure Proof“, in: *Simplicity: Ideals of Practice in Mathematics and the Arts*, hrsg. von Roman Kossak und Philip Ording, Springer, Cham, S. 207–226.

Aristoteles

1983 *Nikomachische Ethik*, übers. und komm. v. Franz Dirlmeier, Akademie Verlag, Berlin.
(zitiert: *Nikomachische Ethik*)

1993 *Analytica posteriora*, übers. und erl. v. Wolfgang Detel, Akademie Verlag, Berlin.
(zitiert: *Analytica posteriora*)

1995 *Physikvorlesung*, übers. v. Hans Wagner, Akademie Verlag, Berlin.
(zitiert: *Physik*)

2003 *Metaphysik*, übers. v. Thomas Szlezák, Akademie Verlag, Berlin.
(zitiert: *Metaphysik*)

2007 *Analytica priora. Buch I*, übers. und erl. v. Theodor Ebert und Ulrich Nortmann, Akademie Verlag, Berlin.
(zitiert: *Analytica priora*)

Asperti, Andrea und Wilmer Ricciotti

2012 „A Proof of Bertrand's Postulate“, *Journal of Formalized Reasoning* (5, 1), S. 37–57.

Avigad, Jeremy

2021 „Reliability of Mathematical Inference“, *Synthese* (198), S. 7377–7399.

2022 „Varieties of Mathematical Understanding“, *Bulletin of the American Mathematical Society* (59, 1), S. 99–117.

Avigad, Jeremy, Kevin Donnelly, David Gray und Paul Raff

2007 „A Formally Verified Proof of the Prime Number Theorem“, *ACM Transactions on Computational Logic* (9, 1), 2:1–2:23.

Avigad, Jeremy und John Harrison

2014 „Formally Verified Mathematics“, *Communications of the ACM* (57, 4), S. 66–75.

Barnes, Jonathan

2007 *Truth, etc.: Six Lectures on Ancient Logic*, Clarendon Press, Oxford.

Beaney, Michael

2006 „Frege and the Role of Historical Elucidation: Methodology and the Foundations of Mathematics“, in: *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, hrsg. von José Ferreirós und Jeremy Gray, Oxford University Press, Oxford, S. 47–66.

Behmann, Heinrich

1922 „Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem“, *Mathematische Annalen* (86, 3/4), S. 163–229.

Bernays, Paul

1970 „Hilberts Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik“, in: Hilbert (1970), Bd. 3, S. 196–21.

Bernays, Paul und Moses Schönfinkel

1928 „Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik“, *Mathematische Annalen* (99), S. 342–372.

Bertrand, Joseph

1845 „Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle enferme“, *Journal de l'École royale de polytechnique* (30, 18), S. 123–140.

Beth, Evert W.

1959 *The Foundations of Mathematics*, Harper, New York.

Black, Deborah L.

2011 „Avicenna's ‚Vague Individual‘ and its Impact on Medieval Latin Philosophy“, in: *Vehicles of Transmission, Translation, and Transformation in Medieval Textual Culture*, hrsg. von Robert Wisnovsky, Faith Wallis, Jamie C. Fumo und Carlos Fraenkel, Brepols, Turnhout, S. 259–292.

Boolos, George S., John P. Burgess und Richard C. Jeffrey

2007 *Computability and Logic*, 5. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge.

Börger, Egon, Erich Grädel und Yuri Gurevich

1997 *The Classical Decision Problem*, Springer, Berlin.

Breckenridge, Wylie und Ofra Magidor

2012 „Arbitrary Reference“, *Philosophical Studies* (158, 3), S. 377–400.

Brendel, Elke

1992 *Die Wahrheit über den Lügner. Eine philosophisch-logische Analyse der Antinomie des Lügners*, Walter de Gruyter, Berlin.

Brun, Georg

2004 *Die richtige Formel. Philosophische Probleme der logischen Formalisierung*, 2. Aufl., Ontos, Frankfurt a. M.

Büchi, Romain

2014 „Identität und Typentheorie bei Wittgenstein“, *Wittgenstein-Studien* (105), S. 101–132.

2016 „Identität und Tautologie bei Wittgenstein“, *Wittgenstein-Studien* (107), S. 149–180.

2021 „‚Neues, dem doch die Eierschalen des Alten ankleben‘. Wittgensteins neue Logik und Whiteheads universale Algebra“, in: *Wittgenstein und die Philosophiegeschichte*, hrsg. von Bernhard Ritter und Dennis Sölch, Karl Alber, Freiburg, S. 333–375.

Burley, Walter

1609 *Gualterii Burlaei Super Aristotelis libros de Physica*, Apud Petrus de Farris, Venetiis.

Cantwell, John

2018 „Making Sense of (In)Determinate Truth: The Semantics of Free Variables“, *Philosophical Studies* (175, 11), S. 2715–2741.

Cassin, Barbara und Irène Rosier-Catach

2004 „Homonyme / Synonyme“, in: *Vocabulaire européen des philosophies. Dictionnaire des intraduisibles*, hrsg. von Barbara Cassin, Le Robert / Seuil, Paris, S. 569–79.

Castelvecchi, Davide

2020 „Maths proof that rocked number theory will be published“, *Nature* (580), S. 177.

Church, Alonzo

1936a „A Note on the Entscheidungsproblem“, *Journal of Symbolic Logic* (1), S. 40–41.

1936b „An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory“, *American Journal of Mathematics* (58), S. 345–363.

1956 *Introduction to Mathematical Logic*, revised and enlarged edition, Princeton University Press, Princeton.

Collins, John

2020 „Quine on Ontological Commitment in Light of Predicate-Functor Logic“, in: *Quine, Structure, and Ontology*, hrsg. von Frederique Janssen-Lauret, Oxford University Press, Oxford, S. 56–81.

Cook, Roy T.

2009 *A Dictionary of Philosophical Logic*, Edinburgh University Press, Edinburgh.

Corcoran, John

1974 „Aristotle's Natural Deduction System“, in: *Ancient Logic and its Modern Interpretations*, hrsg. von John Corcoran, Reidel, Dordrecht, S. 85–131.

2006 „The Concept of Schema in the History of Logic“, *The Bulletin of Symbolic Logic* (12, 2), S. 219–240.

Creath, Richard

1991 (Hrsg.), *Dear Carnap, Dear Van. The Quine-Carnap Correspondence and Related Work*, University of California Press, Berkeley.

Dalen, Dirk van

1983 „Algorithms and Decision Problems: A Crash Course in Recursion Theory“, in: *Handbook of Philosophical Logic*, hrsg. von Dov M. Gabbay und Franz Guenthner, Springer, Dordrecht, Bd. 1, S. 409–478.

2004 *Logic and Structure*, 4. Aufl., Springer, Berlin.

Dawson, John W.

2006 „Why Do Mathematicians Re-prove Theorems?“, *Philosophia Mathematica* (14, 3), S. 269–286.

De Rijk, Lambert M.

2003 „The Aristotelian Background of Medieval *transcendentia*: A Semantic Approach“, in: *Die Logik des Transzendentalen*, hrsg. von Martin Pickavé, De Gruyter, Berlin, S. 3–22.

Detlefsen, Michael

2005 „Formalism“, in: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, hrsg. von Stewart Shapiro, Oxford University Press, Oxford, S. 236–317.

Detlefsen, Michael

2008a „Proof. Its Nature and Significance“, in: *Proof and Other Dilemmas. Mathematics and Philosophy*, hrsg. von Bonnie Gold und Roger A. Simons, Mathematical Association of America, Washington, D.C., S. 3–32.

2008b „Purity as an Ideal of Proof“, in: Mancosu (2008), S. 179–197.

Detlefsen, Michael und Andrew Arana

2011 „Purity of Methods“, *Philosophers' Imprint* (11, 2), S. 1–20.

Diamond, Harold G.

1982 „Elementary Methods in the Study of the Distribution of Prime Numbers“, *Bulletin of the American Mathematical Society* (7, 3), S. 553–589.

Dietzfelbinger, Martin

2004 *Primality Testing in Polynomial Time: From Randomized Algorithms to "PRIMES is in P"*, 4. Aufl., Springer, Berlin.

Downey, Rod

2014 (Hrsg.), *Turing's Legacy: Developments from Turing's Ideas in Logic*, Cambridge University Press, Dordrecht.

Dreben, Burton S. und Warren D. Goldfarb

1979 *The Decision Problem: Solvable Classes of Quantificational Formulas*, Addison-Wesley, Reading (Mass.)

Dudenredaktion

2009 (Hrsg.), *Duden. Die Grammatik*, 8. Aufl., Dudenverlag, Mannheim.

Dummett, Michael

1963 „Realism“, in: Dummett (1978), S. 145–165.

1973 „The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic“, in: Dummett (1978), S. 215–247.

1978 *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, London.

1981 *Frege: Philosophy of Language*, 2. Aufl., Duckworth, Cambridge (Mass.)

2000 *Elements of Intuitionism*, 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford.

Dutilh Novaes, Catarina

2012 „Reassessing Logical Hylomorphism and the Demarcation of Logical Constants“, *Synthese* (185, 3), S. 387–410.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas

2007 *Einführung in die mathematische Logik*, 5. Aufl., Spektrum Akademischer Verlag, Berlin.

Erdős, Paul

1932 „Beweis eines Satzes von Tschebyschef", *Acta Scientifica Mathematica* (5), S. 194–198.

1934 „A Theorem of Sylvester and Schur", *Journal of the London Mathematical Society* (9, 4), S. 282–288.

1998 „Ramanujan and I", *Resonance* (3, 3), S. 81–92.

Feys, Robert und Frederic B. Fitch

1969 *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam.

Fine, Kit

1983 „A Defence of Arbitrary Objects", *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes* (57), S. 55–77.

1985 *Reasoning with Arbitrary Objects*, Blackwell, Oxford.

2007 *Semantic Relationism*, Blackwell, Oxford.

Flannery, Kevin L.

1995 *Ways into the Logic of Alexander of Aphrodisias*, Brill, Leiden.

Fortnow, Lance und Steven Homer

2003 „A Short History of Computational Complexity", *Bulletin of the EATCS* (80), S. 95–133.

Frede, Michael

1974 „Stoic vs. Aristotelian Syllogistic", *Archiv für Geschichte der Philosophie* (56), S. 1–32.

1980 „The Original Notion of Cause", in: *Doubt and Dogmatism: Studies in Hellenistic Epistemology*, hrsg. von Jonathan Barnes, Myles F. Burnyeat und Malcolm Schofield, Oxford University Press, Oxford, S. 217–249.

Frege, Gottlob

1879 *Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Nebert, Halle.

1884 *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau.

Frege, Gottlob

1891 „Funktion und Begriff“, in: Frege (1990), S. 125–142.

1892a „Über Begriff und Gegenstand“, in: Frege (1990), S. 167–178.

1892b „Über Sinn und Bedeutung“, in: Frege (1990), S. 143–162.

1893 *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 1, Hermann Pohle, Jena.

1903 *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. 2, Hermann Pohle, Jena.

1904 „Was ist eine Funktion?“, in: Frege (1990), S. 273–280.

1906 „Über die Grundlagen der Geometrie“, in: Frege (1990), S. 281–323.

1908 „Die Unmöglichkeit der Thomaeschen Arithmetik“, in: Frege (1990), S. 329–333.

1976 *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Bd. 2, hrsg. v. Gottfried Gabriel, Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Christian Thiel, Albert Veraart, 1. Aufl., Meiner, Hamburg.

1983 *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel. Nachgelassene Schriften*, Bd. 1, hrsg. v. Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach, 2. Aufl., Meiner, Hamburg.

1990 *Kleine Schriften*, hrsg. von Ignacio Angelelli, 2. Aufl., Olms, Hildesheim.

Gandy, Robin

1995 „The Confluence of Ideas in 1936“, in: *The Universal Turing Machine. A Half-Century Survey*, hrsg. von Rolf Herken, 2. Aufl., Springer, Wien, S. 51–102.

Gauß, Carl Friedrich

1889 *Untersuchungen über höhere Arithmetik, (lat. Disquisitiones arithmeticae)*, dt. hrsg. v. Hermann Maser, Springer, Berlin.

Giaquinto, Marcus

2020 „The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics“, in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, hrsg. von Edward N. Zalta, Bd. Spring 2020 Edition.

Glock, Hans-Johann und Kai Büttner

2018 „Mathematik und Begriffsbildung“, in: *Wittgenstein und die Philosophie der Mathematik*, hrsg. von Joachim Bromand, Mentis, Paderborn, S. 175–193.

Gödel, Kurt

1931 „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“, *Monatshefte für Mathematik und Physik* (38, 1), S. 173–198.

1946 „Remarks before the Princeton Bicentennial Conference on Problems in Mathematics“, in: Gödel (1990), Bd. 2, S. 150–153.

1986 (Hrsg.), *Publications 1929-1936*, Bd. 1, Oxford University Press, Oxford.

1990 (Hrsg.), *Publications 1938-1974*, Bd. 2, Oxford University Press, Oxford.

Goldfarb, Warren D.

1979 „Logic in the Twenties: The Nature of the Quantifier“, *The Journal of Symbolic Logic* (44, 3), S. 351–368.

Goldfeld, Dorian

2004 „The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective“, in: *Number Theory*, hrsg. von David Chudnovsky, Gregory Chudnovsky und Melvyn B. Nathanson, Springer, New York, S. 179–192.

Goldstein, Larry J.

1973 „A History of the Prime Number Theorem“, *The American Mathematical Monthly* (80, 6), S. 599–615.

Goodstein, Reuben L.

1957 „The Decision Problem“, *The Mathematical Gazette* (41, 335), S. 29–38.

Gourinat, Jean-Baptiste

2013 „«Origine du mouvement» et «cause efficiente» chez Aristote“, in: *Aitia I. Les quatres causes: origines et interpretation*, hrsg. von Cristina Viano, Carlo Natali und Marco Zingano, Peeters, Leuven, S. 91–121.

Grädel, Erich, Colin Hirsch und Martin Otto

2002 „Back and Forth between Guarded and Modal Logics“, *ACM Transactions on Computational Logic* (3, 3), S. 418–463.

Granville, Andrew

2005 „It Is Easy to Determine Whether a Given Integer Is Prime“, *Bulletin of the American Mathematical Society* (42, 1), S. 3–38.

Grattan-Guinness, Ivor

2000 *The Search for Mathematical Roots: 1870-1940*, Princeton University Press, Princeton.

Grigorieff, Serge

1991 „Décidabilité et complexité des théories logiques“, in: *Logique et Informatique: Une Introduction*, hrsg. von Bruno Courcelle, INRIA, Rocquancourt, S. 7–97.

Gurevich, Yuri

1990 „On the Classical Decision Problem“, *Bulletin of the EATCS* (42), S. 140–150.

Hales, Thomas C.

2008 „Formal Proof“, *Notices of the AMS* (55, 11), S. 1370–1380.

Hankinson, Jim

1998 *Cause and Explanation in Ancient Greek Thought*, Clarendon Press, Oxford.

Harrison, John

2009 *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*, Cambridge University Press, Cambridge.

Heck, Richard G.

2012 *Reading Frege's Grundgesetze*, Clarendon Press, Oxford.

Hermes, Hans

1971 „Algorithmus“, in: *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Schwabe Verlag, Basel, Bd. 1, S. 153–161.

1978 *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*, 3. Aufl., Springer, Berlin.

Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Lebensgeschichte

1970 2. Aufl., Bd. 3, Springer, Berlin.

Hilbert, David

2013 *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933*, hrsg. von William Ewald und Wilfried Sieg, Springer, Berlin.

Hilbert, David und Wilhelm Ackermann

1928 *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin.

1938 *Grundzüge der theoretischen Logik*, 2. Aufl., Springer, Berlin.

Hilbert, David und Paul Bernays

1968 *Grundlagen der Mathematik I*, 2. Aufl., Springer, Berlin.

Hintikka, Jaakko

1956 „Identity, Variables, and Impredicative Definitions“, *The Journal of Symbolic Logic* (21, 3), S. 225–245.

1997 „No Scope for Scope?“, *Linguistics and Philosophy* (20, 5), S. 515–544.

Hischer, Horst

2021 *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*, 2. Aufl., Springer Spektrum, Berlin.

Homer, Steven und Alan L. Selman

2014 „Turing and the Development of Computational Complexity“, in: Downey (2014), S. 299–328.

Hooker, Cliff A.

1971 „Quine on the Referential Functions of Bound Variables and Quantifiers“, *Mind* (80, 320), S. 481–496.

Hopcroft, John E. und Jeffrey D. Ullman

1979 *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison-Wesley, Reading (Mass).

Horsten, Leon

2019 *The Metaphysics and Mathematics of Arbitrary Objects*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hunter, Geoffrey

1971 *Metalogic. An Introduction to the Metatheory of Standard First Order Logic*, University of California Press, Berkeley.

1988 „What Computers Can't Do“, *Philosophy* (63, 244), S. 175–189.

Ierodiakonou, Katerina

2002 „Aristotle's Use of Examples in the “Prior Analytics”“, *Phronesis* (47, 2), S. 127–152.

Ingham, Albert

1932 *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge.

Kaiyu, Yang und Jia Deng

2019 „Learning to Prove Theorems via Interacting with Proof Assistants“, in: *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning (PMLR 97)*, S. 6984–6994.

Kalmár, László

1933 „Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten“, *Mathematische Annalen* (108), S. 466–484.

Kleene, Stephen C.

1952 *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

1967 *Mathematical Logic*, Wiley, New York.

Kneale, William und Martha Kneale

1962 *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford.

Knuth, Donald E.

1997 *The Art of Computer Programming*, 3. Aufl., Addison-Wesley, Reading (Mass), Bd. 1.

Kochar, Vrinda, Dheeraj Puri Goswami, Mayank Agarwal und Sukumar Nandi

2016 „Contrast Various Tests for Primality“, in: *2016 International Conference on Accessibility to Digital World (ICADW)*, S. 39–44.

Koellner, Peter

2010 „On the Question of Absolute Undecidability“, in: *Kurt Gödel: Essays for his Centennial*, hrsg. von Solomon Feferman, Charles Parsons und Stephen G. Simpson, Cambridge University Press, Cambridge, S. 189–226.

Kreiser, Lothar

2001 *Gottlob Frege: Leben – Werk – Zeit*, Meiner, Hamburg.

Kripke, Saul A.

2013 „The Church-Turing ’Thesis’ as a Special Corollary of Gödel’s Completeness Theorem“, in: *Computability. Turing, Gödel, Church, and Beyond*, hrsg. von B. Jack Copeland, Carl J. Posy und Oron Shagrir, MIT Press, Cambridge (Mass), S. 77–104.

Lampert, Timm und Anderson Nakano

2020 „Deciding Simple Infinity Axiom Sets with One Binary Relation by Means of Superpostulates“, in: *Automated Reasoning (IJCAR 2020)*, hrsg. von Nicolas Peltier und Viorica Sofronie-Stokkermans, Springer, Cham, S. 201–217.

Landau, Edmund

1909 *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, Bd. 1.

Landini, Gregory

2018 *Frege’s Notations: What They Are and How They Mean*, Palgrave Macmillan, London.

Leitgeb, Hannes

2009 „On Formal and Informal Provability“, in: *New Waves in Philosophy of Mathematics*, hrsg. von Otávio Bueno und Oystein Linnebo, Palgrave, Basingstoke, S. 263–299.

2022 „Ramsification and Semantic Indeterminacy“, *The Review of Symbolic Logic* (First View), S. 1–51.

Linsky, Bernard

2011 *The Evolution of Principia Mathematica: Bertrand Russell’s Manuscripts and Notes for the Second Edition*, Cambridge University Press, Cambridge.

Łukasiewicz, Jan

1957 *Aristotle’s Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic*, 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford.

Lützen, Jesper

2023 *A History of Mathematical Impossibility*, Oxford University Press, Oxford (forthcoming).

Maier, Anneliese

1964 „Handschriftliches zu Wilhelm Ockham und Walter Burley“, in: *Ausgehendes Mittelalter. Gesammelte Aufsätze zur Geistesgeschichte des 14. Jahrhunderts I*, hrsg. von Anneliese Maier, Edizioni di Storia e Letteratura, Rom, S. 209–235.

Mancosu, Paolo

2001 „Mathematical Explanation: Problems and Prospects“, *Topoi* (20), S. 97–117.

2003 „The Russellian Influence on Hilbert and his School“, *Synthese* (137), S. 59–101.

2008 (Hrsg.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford University Press, Oxford.

Mancosu, Paolo und Johannes Hafner

2008 „Beyond Unification“, in: Mancosu (2008), S. 151–178.

Mancosu, Paolo und Richard Zach

2015 „Heinrich Behmann’s 1921 Lecture on the Decision Problem and the Algebra of Logic“, *The Bulletin of Symbolic Logic* (21, 2), S. 164–187.

Mancosu, Paolo, Richard Zach und Calixto. Badesa

2009 „The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski, 1900-1935“, in: *The Development of Modern Logic*, hrsg. von Leila Haaparanta, Oxford University Press, Oxford, S. 318–470.

Marmodoro, Anna

2013 „Causation without Glue: Aristotle on Causal Powers“, in: *Aitia I. Les quatres causes: origines et interpretation*, hrsg. von Cristina Viano, Carlo Natali und Marco Zingano, Peeters, Leuven, S. 221–246.

Meher, Jaban und M. Ram Murty

2013 „Ramanujan's Proof of Bertrand's Postulate“, *The American Mathematical Monthly* (120, 7), S. 650–653.

Menger, Karl

1956 „What are x and y?“, *The Mathematical Gazette* (40, 334), S. 246–255.

Moravcsik, Julius

1975 „*Aitia* as Generative Factor in Aristotle's Philosophy“, *Dialogue* (14, 4), S. 622–638.

1995 „Philosophic Background of Aristotle's *Aitia*“, in: *The Crossroads of Norm and Nature. Essays on Aristotle's Ethics and Metaphysics*, hrsg. von May Sim, Rowman und Littlefield, Lanham, MD, S. 237–246.

Mortensen, Chris

1995 *Inconsistent Mathematics*, Kluwer, Dordrecht.

Murzi, Julien

2010 „Knowability and Bivalence: Intuitionistic Solutions to the Paradox of Knowability“, *Philosophical Studies* (149, 2), S. 269–281.

Narkiewicz, Wladyslaw

2000 *The Development of Prime Number Theory*, Springer, New York.

Natali, Carlo

2013 „*Aitia* in Plato and Aristotle. From Everyday Language to Technical Vocabulary“, in: *Aitia I. Les quatres causes: origines et interpretation*, hrsg. von Cristina Viano, Carlo Natali und Marco Zingano, Peeters, Leuven, S. 39–73.

Netz, Reviel

1999 *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Neumann, John v.

1927 „Zur Hilbertschen Beweistheorie“, *Mathematische Zeitschrift* (26), S. 1–46.

Newman, Donald J.

1980 „Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem“, *The American Mathematical Monthly* (87, 9), S. 693–696.

Nolt, John

2006 „Free Logics“, in: *Philosophy of Logic*, hrsg. von Dale Jacquette, Elsevier, Amsterdam, S. 1023–1060.

Parry, William T.

1966 „Quantification of the Predicate and Many-Sorted Logic“, *Philosophy and Phenomenological Research* (26, 3), S. 342–360.

Patzig, Günther

1969 *Die aristotelische Syllogistik. Logisch-philologische Untersuchungen über das Buch A der „Ersten Analytiken“*, 3. Aufl., Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.

Petrus Hispanus

1972 *Tractatus, called afterwards Summule logicales*, hrsg. von Lambertus Marie de Rijk, Van Gorcum, Assen.

Pickel, Bryan und Brian Rabern

2016 „The Antinomy of the Variable: A Tarskian Resolution“, *The Journal of Philosophy* (113, 3), S. 137–170.

Pratt-Hartmann, Ian, Wieslaw Szwast und Lidia Tendera

2019 „The Fluted Fragment Revisited“, *The Journal of Symbolic Logic* (84, 3), S. 1020–1048.

Priest, Graham, Jeffrey C. Beall und Bradley Armour-Garb

2004 (Hrsg.), *The Law of Non-Contradiction: New Philosophical Essays*, Oxford University Press, Oxford.

Priest, Graham, Richard Routley und Jean Norman

1989 (Hrsg.), *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Philosophia Verlag, München.

Proklos

1945 *Proklus Diadochus 410-485: Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“*, hrsg. v. Max Steck, übers. v. Leander Schönberger, Deutsche Akademie der Naturforscher, Halle.

Purdy, William C.

1996 „Decidability of Fluted Logic with Identity“, *Notre Dame Journal of Formal Logic* (37, 1), S. 84–104.

Quine, Willard V.

1939 „Designation and Existence“, *The Journal of Philosophy* (36, 26), S. 701–709.

1941 „Whitehead and the Rise of Modern Logic“, in: *The Philosophy of Alfred North Whitehead*, hrsg. von Paul A. Schilpp, Northwestern University Press, Evanston, S. 125–163.

1960 *Word and Object*, MIT Press, Cambridge (Mass).

1961a *From a Logical Point of View*, 2. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1961b „Logic and the Reification of Universals“, in: Quine (1961a), S. 102–129.

1961c „On What There Is“, in: Quine (1961a), S. 1–19.

1961d „Speaking of Objects“, in: Quine (1961a), S. 1–25.

1969a „Existence and Quantification“, in: Quine (1969b), S. 91–113.

1969b *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press, New York.

1976a „Algebraic Logic and Predicate Functors“, in: Quine (1976d), S. 283–307.

1976b „On the Application of Modern Logic“, in: Quine (1976d), S. 33–39.

1976c „The Variable“, in: Quine (1976d), S. 272–282.

1976d *The Ways of Paradox and Other Essays*, 2. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1980 „The Variable and Its Place in Reference“, in: *Philosophical Subjects. Essays Presented to P. F. Strawson*, hrsg. von Zak Van Straaten, Clarendon Press, Oxford, S. 164–173.

1981a „On the Limits of Decision“, in: Quine (1981d), S. 156–163.

1981b „Predicate Functors Revisited“, *The Journal of Symbolic Logic* (46, 3), S. 649–652.

1981c „Predicates, Terms, and Classes“, in: Quine (1981d), S. 164–172.

1981d *Theories and Things*, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1982 *Methods of Logic*, 4. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1986 *Philosophy of Logic*, 2. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1987 *Quiddities: An Intermittently Philosophical Dictionary*, Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1995a *Selected Logic Papers*, 2. Aufl., Harvard University Press, Cambridge (Mass).

1995b „Variables Explained Away“, in: Quine (1995a), S. 227–235.

Rabin, Michael O.

1977 „Decidable Theories“, in: *Handbook of Mathematical Logic*, hrsg. von Jon Barwise, Elsevier, Amsterdam, S. 595–629.

Ramanujan, Srinivasa

1919 „A Proof of Bertrand’s Postulate“, *Journal of the Indian Mathematical Society* (11), S. 181–182.

Ramsey, Frank P.

1926 „Mathematical Logic“, hrsg. v. Richard B. Braithwaite, in: Ramsey (1950), S. 62–81.

1928 „On a Problem of Formal Logic“, hrsg. v. Richard B. Braithwaite, in: Ramsey (1950), S. 82–111.

1950 *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, hrsg. v. Richard B. Braithwaite, Routledge, London.

1991 „The Ideas of Mathematics“, in: *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*, hrsg. von Maria Galavotti, Bibliopolis, Napoli, S. 187–194.

Rav, Yehuda

1999 „Why Do We Prove Theorems?“, *Philosophia Mathematica* (7, 3), S. 5–41.

2007 „A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians’ Proof Practices“, *Philosophia Mathematica* (15, 3), S. 291–320.

Rayo, Augustin und Gabriel Uzquiano

2006 (Hrsg.), *Absolute Generality*, Clarendon Press, Oxford.

Riemann, Bernhard

1859 „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“, *Monatsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (November), S. 671–680.

Riesel, Hans

1994 *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, 2. Aufl., Birkhäuser, Boston.

Robinson, John A.

2000 „Proof = Guarantee + Explanation“, in: *Intellectics and Computational Logic*, hrsg. von Steffen Hölldobler, Springer, Dordrecht, S. 277–294.

Rosser, John B.

1953 *Logic for Mathematicians*, McGraw-Hill, New York.

Rota, Gian-Carlo

1991 „The Concept of Mathematical Truth“, *The Review of Metaphysics* (44, 3), S. 483–494.

1997 „The Phenomenology of Mathematical Proof“, *Synthese* (111, 2), S. 183–196.

Russell, Bertrand

1903 *The Principles of Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

1908 „Mathematical Logic as Based on the Theory of Types“, *American Journal of Mathematics* (30), S. 222–62.

1920 *Introduction to Mathematical Philosophy*, 2. Aufl., George Allen & Unwin, London.

Sainsbury, Richard M.

2004 „Option Negation and Dialetheias“, in: Priest u. a. (2004), S. 85–92.

Schulte, Joachim

2005 „Within a System“, in: *Readings of Wittgenstein's On Certainty*, hrsg. von Danièle Moyal-Sharrock und William H. Brenner, Palgrave, London, S. 59–75.

Schütte, Kurt

1934 „Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik“, *Mathematische Annalen* (109), S. 572–603.

Selberg, Atle

1949 „An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem“, *Annals of Mathematics* (50, 2), S. 305–313.

Serfati, Michel

2005 *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Pétra, Paris.

Shapiro, Stewart

1985 „Epistemic and Intuitionistic Arithmetic“, in: *Intensional Mathematics*, hrsg. von Stewart Shapiro, North-Holland, Amsterdam, S. 11–46.

1991 *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*, Clarendon Press, Oxford.

1998 „Incompleteness, Mechanism, and Optimism“, *The Bulletin of Symbolic Logic* (4, 3), S. 273–302.

Shoenfield, Joseph R.

1968 *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, London.

Sieg, Wilfried

1994 „Mechanical Procedures and Mathematical Experience“, in: *Mathematics and Mind*, hrsg. von Alexander George, Oxford University Press, Oxford, S. 71–117.

1997 „Step by Recursive Step: Church's Analysis of Effective Calculability“, *The Bulletin of Symbolic Logic* (3, 2), S. 154–180.

2007 „On Mind and Turing's Machines“, *Natural Computing* (6), S. 187–205.

Simons, Peter

2009 „Formalism“, in: *Philosophy of Mathematics*, hrsg. von Andrew Irvine, North Holland, Amsterdam, S. 291–310.

Smullyan, Raymond M.

1993 *Recursion Theory for Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Stegmüller, Wolfgang

1973 *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit*, Springer, Wien.

Stegmüller, Wolfgang und Matthias Varga von Kibéd

1984 *Strukturtypen der Logik*, Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Springer, Berlin, Bd. III.

Stein, Nathanael

2011 „Aristotle's Causal Pluralism", *Archiv für Geschichte der Philosophie* (93), S. 121–147.

2016 „Explanation and Hypothetical Necessity in Aristotle", *Ancient Philosophy* (36), S. 353–382.

Stekeler-Weithofer, Pirmin

2001 „Variable", in: *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, hrsg. von Joachim Ritter, Schwabe Verlag, Basel, Bd. 11, S. 546–548.

Stevenson, Leslie

1973 „Frege's Two Definitions of Quantification", *The Philosophical Quarterly* (23, 92), S. 207–223.

Sylvester, James Joseph

1892 „On Arithmetical Series", in: *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, hrsg. von H. F. Baker, Cambridge University Press, Cambridge, Bd. 4, S. 687–731.

Tanswell, Fenner

2015 „A Problem with the Dependence of Informal Proofs on Formal Proofs", *Philosophia Mathematica* (23, 3), S. 295–310.

Tappenden, Jamie

2008 „Mathematical Concepts: Fruitfulness and Naturalness", in: Mancosu (2008), S. 276–301.

Tarski, Alfred

1935 „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica* (1), S. 261–405.

Tarski, Alfred, Andrzej Mostowski und Raphael Robinson

1953 *Undecidable Theories*, North-Holland, Amsterdam.

Tatton-Brown, Oliver

2020 „Rigour and Proof", *The Review of Symbolic Logic* (First View), S. 1–29.

Tennant, Neil

2017 „Logicism and Neologicism", in: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, hrsg. von Edward N. Zalta, Bd. Winter 2017 Edition.

Tschebyschow, Pafnuti

1852 „Mémoire sur les nombres premiers“, *Journal de mathématiques pures et appliquées (1re série)* (17), S. 366–390.

Tucker, John V. und Jeffery I. Zucker

2001 „Computable Functions and Semicomputable Sets on Many Sorted Algebras“, in: *Handbook of Logic for Computer Science: Volume 5. Logic and Algebraic Methods*, hrsg. von Samson Abramsky, Dov M. Gabbay und Tom S. E. Maibaum, Oxford University Press, Oxford, S. 317–524.

Urchs, Max

1993 *Klassische Logik*, Akademie Verlag, Berlin.

Wagner, Roy

2019 „Does Mathematics Need Foundations?“, in: *Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts*, hrsg. von Stefania Centrone, Deborah Kant und Deniz Sarikaya, Springer, Cham, S. 381–396.

Wang, Hao.

1952 „Logic of Many-Sorted Theories“, *The Journal of Symbolic Logic* (17, 2), S. 105–116.

Wegener, Ingo

2003 *Komplexitätstheorie. Grenzen der Effizienz von Algorithmen*, Springer, Berlin.

Wehmeier, Kai F.

2018 „The Proper treatment of Variables in Predicate Logic“, *Linguistics and Philosophy* (41, 2), S. 209–249.

Westerståhl, Dag

2007 „Quantifiers in Formal and Natural Languages“, in: *Handbook of Philosophical Logic*, hrsg. von Dov M. Gabbay und Franz Guenthner, Springer, Dordrecht, Bd. 14, S. 223–338.

Whitehead, Alfred North

1898 *A Treatise on Universal Algebra with Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

1911 *An Introduction ot Mathematics*, Williams und Norgate, London.

Whitehead, Alfred North

1948 „Mathematics and the Good“, in: *Essays in Science and Philosophy*, Rider, London, S. 75–86.

Whitehead, Alfred North und Bertrand Russell

1910 *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, Bd. 1.

Wiener, Norbert

1932 „Tauberian Theorems“, *Annals of Mathematics* (33, 1), S. 1–100.

Williams, Hugh C.

1998 *Édouard Lucas and Primality Testing*, Wiley, New York.

Wilson, Robin J.

2014 *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, revised color edition, Princeton University Press, Princeton.

Wittgenstein, Ludwig

1979 *Notebooks 1914-1916*, hrsg. v. Georg H. v. Wright und G. E. M. Anscombe, 2. Aufl., Blackwell, Oxford.

1984a *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, hrsg. v. G. E. M. Anscombe, Rush Rhees und G. H. von Wright, Suhrkamp, Frankfurt a. M., Bd. 6.

1984b *Ludwig Wittgenstein und der Wiener Kreis*, Gespräche, aufgezeichnet von Friedrich Waismann, hrsg. v. Brian McGuinness, Suhrkamp, Frankfurt a. M., Bd. 3.

1984c *Philosophische Bemerkungen*, hrsg. v. Rush Rhees, Suhrkamp, Frankfurt a. M., Bd. 2.

1984d *Über Gewissheit*, hrsg. v. G. E. M. Anscombe, Suhrkamp, Frankfurt a. M., Bd. 8.

1989 *Logisch-philosophische Abhandlung: Kritische Edition*, hrsg. v. Brian McGuinness und Joachim Schulte, Suhrkamp, Frankfurt a. M.

2003 *Philosophische Untersuchungen*, hrsg. v. Joachim Schulte, Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Zach, Richard

1999 „Completeness Before Post: Bernays, Hilbert, and the Development of Propositional Logic“, *Bulletin of Symbolic Logic* (5), S. 331–366.

2007 „Hilbert’s Program Then and Now“, in: *Philosophy of Logic. Handbook of the Philosophy of Science*, hrsg. von Dale Jacquette, North-Holland, Amsterdam, S. 411–447.

2021 *Incompleteness and Computability*, Fall 2021, The Open Logic Project, University of Calgary.