Álgebra Linear - Ciência de Dados
Fatec Rubens Lara

Prof. Me. Alexandre Garcia de Oliveira

August 2022

Chapter 1

Matrizes e sistemas lineares

1.1 Sistemas Lineares

Um sistema de equções lineares é quando temos várias equações que envolvem várias variáveis. Dois métodos básicos serão investigados em um primeiro momento e depois será investigado a forma matricial de um sistema linear.

Definição 1.1 *Um sistema linear com duas variáveis e duas equações possuem a forma:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{1.1}$$

Nota-se que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e x, y são incógnitas.

Um método para solucionar um sistema linear é o de substituição.

Definição 1.2 *(Método da substituição) esse método consiste em isolar uma das variáveis na primeira equação e substituir na segunda, eliminando assim uma das variáveis. Por exemplo, queremos isolar x no sistema:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{1.2}$$

para isso devemos subtrair by dos dois lados na primeira equação e dividir depois por a (assumimos que $a \neq 0$).

$$\begin{cases} x = \frac{c-by}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{1.3}$$

Agora, substitui-se x por $\frac{c-by}{a}$ na segunda equação.

$$d\left(\frac{c - by}{a}\right) + ey = f$$

Agora, sepramos a fração

$$\frac{dc}{a} - \frac{dby}{a} + ey = f$$

Subtraimos a quantidade $\frac{dc}{a}$ *em ambos os lados*

$$-\frac{dby}{a} + ey = f - \frac{dc}{a}$$

Agora, o y fica em evidência.

$$(e - \frac{db}{a})y = f - \frac{dc}{a}$$

Dividimos em ambos os lados pela quantia $(e - \frac{db}{a})$.

$$y = \frac{f - \frac{dc}{a}}{\frac{db}{a} + e}$$

E finalmente substituimos novamente na expressão que possui x (primeira equação).

$$x = \frac{c - b\left(\frac{f - \frac{dc}{a}}{\frac{db}{a} + e}\right)}{a}$$

A fórmula fechada e reduzida para x fica como exercício. Uma observação é que para termos solução devemos ter que $\frac{db}{a} + e \neq 0$.

Exemplo 1.1 *Resolva*

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 2y = 15 \end{cases}.$$

Primeiro passo, isolar x.

$$\begin{cases} x = 9 - y \\ x - 2y = 15 \end{cases}.$$

Substituimos x *na segunda equação.*

$$9 - y - 2y = 15$$

Resolvemos a equação de primeiro grau em y.

$$9 - 3y = 15$$

$$-3y = 6$$

$$y = -2$$

Agora, substituimos y *na primeira equação.*

$$x = 9 - y = 9 - (-2) = 11$$

Logo, $x = 11$ *e* $y = -2$

Outro método é quando multiplicamos uma das equações por uma constante e somamos ou subtraimos uma equação da outra de modo a eliminar uma das variáveis.

Definição 1.3 *(Método da eliminação) Dado o sistema:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{1.4}$$

Queremos eliminar x, para isso devemos deixar que o coeficiente de x na primeira equação seja $-d$. Para isso, divide-se a primeira equação por $a \neq 0$ e multiplicamos por $-d$.

$$\begin{cases} x + \frac{by}{a} = \frac{c}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} .$$

$$\begin{cases} -dx - \frac{dby}{a} = \frac{-dc}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} .$$

Somando as duas equações, temos que x é eliminado.

$$-\frac{dby}{a} + ey = f - \frac{dc}{a}$$

$$(-\frac{db}{a} + e)y = f - \frac{dc}{a}$$

$$y = \frac{f - \frac{dc}{a}}{e - \frac{db}{a}}$$

Procedemos da mesma maneira para x.

Exemplo 1.2 *Resolva*

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 2y = 15 \end{cases} .$$

Devemos multiplicar por -1 (o oposto do inverso do coeficiente de x que é 1) a primeira equação e somar com a segunda

$$\begin{cases} -x - y = -9 \\ x - 2y = 15 \end{cases} .$$

$$-3y = 6$$

Logo,

$$y = -2$$

Substituindo na primeira equação $y = -2$

$$x - 2 = 9$$

$$x = 11$$

Exemplo 1.3 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases} .$$

Primeiro passo é multiplicar pelo inverso do coeficiente de x na primeira equação, que no caso é 3, logo seu inverso é $\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{10}{3} \\ 8x + y = 7 \end{cases} .$$

O próximo passo é multiplicar pelo oposto do coeficiente de x da segunda equação, que no caso é 8, nos dando -8.

$$\begin{cases} -8x - \frac{16}{3}y = \frac{-80}{3} \\ 8x + y = 7 \end{cases} .$$

Agora é somar as duas equações

$$y - \frac{16}{3}y = 7 - \frac{80}{3}$$

$$\frac{3y}{3} - \frac{16}{3}y = \frac{21}{3} - \frac{80}{3}$$

$$-\frac{13}{3}y = \frac{-59}{3}$$

$$-13y = -59$$

$$y = \frac{-59}{-13} = \frac{59}{13}$$

Substituimos $y = \frac{59}{13}$ na primeira equação.

$$3x + 2\frac{59}{13} = 10$$

Multiplicando tudo por 13 para facilitar

$$39x + 118 = 130$$

$$39x = 12$$

$$x = \frac{12}{39}$$

Logo, $x = \frac{12}{39}$ e $y = \frac{59}{13}$

Exemplo 1.4 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases} .$$

Podemos sempre eliminar se os coeficientes das duas equações (em x) sejam opostos. Nesse caso, multiplica-se, na primeira equação, por -8 que é o oposto de 8 (coeficiente de x na segunda equação). Na segunda equação multiplica-se por 3 para obtermos coeficientes opostos.

$$\begin{cases} -24x - 16y = -80 \\ 24x + 3y = 21 \end{cases}.$$

Somando as duas equações

$$-13y = -59$$

$$y = \frac{-59}{-13} = \frac{59}{13}$$

Para x procede-se da mesma forma que a solução anterior.

Uma observação é que podemos sempre eleiminar y primeiro se bem quisermos.

1.2 Forma matricial de um sistema linear

Definição 1.4 *Uma matrix quadrada 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$ é o seguinte conjunto $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Para matrizes quadrados 2×2 $(n \times n)$ basta indicar com o número em questão abaixo do M. Por exemplo $M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R} \right\}$. Para matrizes retangulares, por exemplo (2×3), escrevemos $M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}$*

Exemplo 1.5

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Exemplo 1.6

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -8 & 9 \\ 9 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Todo sistema linear pode ser escrito em forma de matriz, para isso devemos relembrar as operações com matrizes.

Definição 1.5 *(Soma de matrizes) para somarmos duas matrizes de mesma dimensão (mesmas linhas e colunas) devemos somar ordenamente na mesma posição sempre. Por exemplo, $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ com $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, logo $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$*

Exemplo 1.7 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, *logo* $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

Uma observação é que as matrizes satisfazem os axiomas de associatividade, oposto, neutro e comutatividade para a soma $(+)$. No caso de $M_2(\mathbb{R})$, o neutro seria a matriz $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e dado uma matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$, seu oposto é $-B$ que possui todos os seus coeficientes multiplicados por (-1).

Definição 1.6 *Dado uma matriz* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, *a matriz* $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ *possuindo os mesmos valores.*

Nota-se que as entradas de uma linha i e coluna j são trocadas para uma entrada em uma linha j e coluna i.

Exemplo 1.8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}),$$

sua transposta é

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Trabalhando com matrizes quadradas (mesmo número de linhas e de colunas) existe uma função que associa a cada matriz um número real. Essa função auxilia para verificar se uma matriz possui uma inversa ou não.

Definição 1.7 *O determinante é a função* $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *e possui a seguinte regra de cálculo.*

$n = 2$: *Seja*

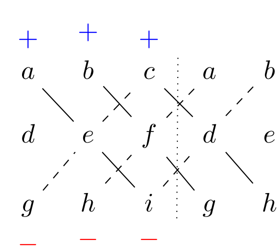
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

Seu determinante é $det(A) = ad - bc$

$n = 3$: *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

Seu determinante (regra de Sarrus) $det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$



Exemplo 1.9 *Calcule* $det(A)$ *para*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$det(A) = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 8 = 10 - 8 = 2$

Exemplo 1.10 *Calcule* $det(A)$ *para*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

$det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + (-1 \cdot 0 \cdot 3) - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 2 \cdot 1) = 8$

Definição 1.8 *Seja* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *e* $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$*, a multiplicação* $A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ *dada pelo critério abaixo.*

$$A = \begin{bmatrix} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \\ b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,p} \end{bmatrix}$$

Para calcular os coeficientes de $A \cdot B$ *devemos fazer o produto de cada elemento da linha de* A *com cada elemento da coluna de* B *e fazer a soma. Por exemplo* $c_{1,1} = a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + ... + a_{1,n} \cdot a_{m,1}$*. Genericamente,* $c_{i,j} = c_{i,1} \cdot c_{j,1} + c_{i,2} \cdot c_{2,j} + ... + c_{i,n} \cdot c_{j,m}$*.*

Exemplo 1.11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + ((-1) \cdot (-1)) & 1 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + ((-1) \cdot 1) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (2 \cdot (-1)) & 0 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Definição 1.9 *No caso da multiplicação de matrizes quadradas (mesmo número de linhas e colunas), a multiplicação possui um elemento neutro $I_n \in M_n(\mathbb{R})$, com as entradas da diagonal sempre sendo 1 e o resto sempre sendo 0. Por exemplo*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Definição 1.10 *Dado uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, sua inversa $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, satisfaz*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Observação: $det(A) \neq 0$

Aplicando as definições de matrizes acima, conseguimos achar uma forma matricial para um sistema linear. Basicamente temos que achar uma solução de um sistema é a mesma coisa do que achar a inversa de uma matriz de coeficientes. Note que para isso funcionar o sistema deve possuir o mesmo número de equações e incógnitas para termos a matrix quadrada.

Definição 1.11 *Um sistema linear na forma matricial é dado por:*

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

. Por exemplo, se um sistema linear possuir 3 incógnitas e 3 variáveis temos que $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. A matriz A representa os coeficientes, a matriz $\mathbf{x}$ de variáveis e a matriz $\mathbf{b}$ de resultados.

Exemplo 1.12

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases},$$

A equação em forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A solução de um sistema linear se dá pela multiplicação à esquerda da matriz inversa de coeficientes. Ou seja, se tivermos o sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, devemos fazer os seguintes passos para resolver.

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

O primeiro passo é multiplicar a inversa de A pela esquerda

$$A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$I_n \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

o segundo passo é notar que $I_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para obtermos

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

e por fim devemos realizar a multiplicação de $A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ nos dando a solução do sistema.

1.3 Matrizes Inversas

Para calcularmos a inversa de uma matriz 2 por 2 basta apenas usar uma fórmula. Para todos os outros casos usa-se o método da eliminação de Gauss.

Definição 1.12 *(Caso 2 por 2) Dado*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

note que $det(A) = ad - bc \neq 0$

Exemplo 1.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

$det(A) = 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = 7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

Exemplo 1.14 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases}$$

Primeiro colocamos em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Depois achamos a inversa da matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 - 2 \cdot 8} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-3}{13} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-3}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{13} + \frac{14}{13} \\ \frac{80}{13} - \frac{21}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{59}{13} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x = \frac{4}{13}$ *e* $y = \frac{59}{13}$.

Definição 1.13 *(Algoritmo da eliminação de Gauss) consiste em achar a inversa de uma matriz quadrada* A *de qualquer dimensão. O algoritmo consiste na aplicação de 3 regras até que a matriz inversa desejada seja formada. A regras são:*

1. *Troca de linhas*
2. *Soma e subtração de linhas (ou múltiplos de linhas)*
3. *Multiplicação por uma constante na linha toda.*

O algoritmo consiste de deixar a matriz desejada e a matriz identidade correspondente lado-a-lado, o algoritmo deve ser efetuada com a sucessiva aplicação das regras até que a matriz identidade aparece do lado esquerdo onde estava a matriz A *inicial, a matriz do lado direito será a matriz inversa desejada.*

Exemplo 1.15 *Calcular a inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Divide-se por 9 a primeira linha toda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Linha 2 menos 7 vezes a linha 1 e substituo pela linha 2 ($l_2 - 7l_1 \to l_2$).

- $7 - 1 \cdot 7 = 0$

- $10 - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{30-7}{3} = \frac{23}{3}$
- $11 - \frac{4}{9} \cdot 7 = \frac{99-28}{9} = \frac{71}{9}$
- $0 - \frac{7}{9} = \frac{-7}{9}$
- $1 - 0 \cdot 7 = 1$
- $0 - 0 \cdot 7 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{71}{9} & \frac{-7}{9} & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Linha 3 menos 12 vezes a linha 1 e substituo pela linha 3

- $12 - 12 = 0$
- $13 - \frac{12}{3} = 13 - 4 = 9$
- $6 - \frac{4 \cdot 12}{9} = \frac{54-48}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $0 - \frac{12}{9} = \frac{-4}{3}$
- $0 - 12 \cdot 0 = 0$
- $1 - 12 \cdot 0 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{71}{9} & \frac{-7}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Divide-se tudo na linha 2 por $\frac{23}{3}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{71}{9} \cdot \frac{3}{23} & \frac{-7}{9} \cdot \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplca-se $\frac{1}{3}$ *da linha 2 e subtrai-se da linha 1 e substitui-se pela linha 1* $l_1 - \frac{l_2}{3} \to l_1$

- $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
- $\frac{4}{9} - \frac{213}{621} = \frac{2484-1917}{5589} = \frac{7}{69}$
- $\frac{1}{9} + \frac{21}{621} = \frac{621+189}{5589} = \frac{10}{69}$
- $0 - \frac{3}{23 \cdot 3} = \frac{1}{23}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplca-se -9 da linha 2 e soma-se da linha 3 e substitui-se pela linha 3 $(l_3 - 9l_2 \to l_3)$

- $\frac{2}{3} - 9 \cdot \frac{213}{207} = \frac{2}{3} - \frac{1917}{207} = \frac{414-5751}{621} = \frac{-5337}{621} = \frac{593}{69}$
- $\frac{-4}{3} + \frac{189}{207} = \frac{-29}{69}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{593}{69} & \frac{-29}{69} & \frac{-27}{23} & 1 \end{array}\right].$$

Multiplica-se por $\frac{69}{593}$ a linha 3 toda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O proximo passo é fazer $l_2 - \frac{213}{207}l_3 \to l_2$.

- $\frac{213}{207} - \frac{213}{207} = 0$
- $\frac{-21}{207} - \frac{213}{207}(\frac{-29}{593}) = \frac{-21}{207} + \frac{213}{207}(\frac{29}{593}) = \frac{-12453+6177}{122751} = \frac{-18630}{122751} = \frac{-90}{593}$
- $\frac{-3}{23} - \frac{213}{207}(\frac{-81}{593}) = \frac{-6}{593}$
- $\frac{-213}{207}(\frac{69}{593}) = \frac{-71}{593}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O último passo é fazer $l_1 - \frac{7}{69}l_3 \to l_1$.

- $\frac{7}{69} - \frac{7}{69} = 0$
- $\frac{10}{69} - \frac{-7}{69}(\frac{-29}{593}) = \frac{10}{69} - \frac{7}{69}(\frac{29}{593}) = \frac{5930}{40917} - \frac{203}{40917} = \frac{5727}{40917} = \frac{83}{593}$
- $\frac{1}{23} - \frac{7}{69}(\frac{-81}{593}) = \frac{3}{69} - \frac{7}{69}(\frac{81}{593}) = \frac{1779}{40917} + \frac{567}{40917} = \frac{2346}{40917} = \frac{34}{593}$
- $0 - \frac{-7}{69}(\frac{69}{593}) = \frac{7}{69}(\frac{69}{593}) = \frac{483}{40917} = \frac{7}{593}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{83}{593} & \frac{34}{593} & \frac{7}{593} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O algoritmo termina nos dando a matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{83}{593} & \frac{34}{593} & \frac{7}{593} \\ \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{bmatrix}$$

Colocando em evidência $\frac{-1}{593}$, também podemos escrever a inversa na forma a seguir.

$$A^{-1} = \frac{-1}{593}\begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ 29 & 81 & -69 \end{bmatrix}$$

Esta última forma de escrever a matriz inversa não é coincidência, pois o determinante de A é exatamente -593 (pede-se para o leitor o cálculo).

Teorema 1 *Dado uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, com $det(A) \neq 0$, sua inversa A^{-1} pode ser calculada pela fórmula a seguir.*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A),$$

onde $Adj(A)$ é a matriz adjunta de A.

A matriz adjunta é calculada através da transposta da matriz de cofatores A.

Definição 1.14 *A matriz de cofatores de A é calculada pela expressão*

$$C = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

onde $M_{i,j}$ é o determinante da matriz A eliminando-se a linha i e a coluna j. A matriz adjunta é apenas $Adj(A) = C^T = (-1)^{i+j} M_{j,i}$ e devemos, nesse caso, eliminar a linha i e coluna j da transposta de A.

O exemplo feito através do método da eliminação de Gauss pode também ser feito com a fórmula apresentada pelo Teorema.

Exemplo 1.16 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

temos que o determinante $det(A) = -593$. Vamos agora calcular a adjunta, para isso devemos achar a matriz C dos cofatores. Primeiro obtenha a transposta de A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 12 \\ 3 & 10 & 13 \\ 4 & 11 & 6 \end{bmatrix},$$

$$M_{1,1} = (-1)^{1+1} det\left(\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (60 - 143) = -83$$

$$M_{1,2} = (-1)^{1+2} det\left(\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = (-1)^3 \cdot (18 - 52) = (-1)(-34) = 34$$

$$M_{1,3} = (-1)^{1+3} det\left(\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (33 - 40) = -7$$

$$M_{2,1} = (-1)^{2+1} det \left(\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot (42 - 132) = 90$$

$$M_{2,2} = (-1)^{2+2} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (54 - 48) = 6$$

$$M_{2,3} = (-1)^{2+3} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot (99 - 28) = -71$$

$$M_{3,1} = (-1)^{3+1} det \left(\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 13 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (91 - 120) = -29$$

$$M_{3,2} = (-1)^{3+2} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot (117 - 36) = -81$$

$$M_{3,3} = (-1)^{3+3} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (90 - 21) = 69$$

Logo, a adjunta de A é dada por

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ -29 & -81 & 69 \end{bmatrix}$$

que nos dá

$$A^{-1} = \frac{-1}{593} \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ -29 & -81 & 69 \end{bmatrix}.$$

O método dos cofatores é rápido para matrizes quadradas de tamanhos 2 e 3, porém é mais lento para fazer manualmente em casos para dimensões maiores que 3, por causa do cálculo dos determinantes. Neste último caso o método indicado é o da eliminação de Gauss.

Exemplo 1.17 *Resolver o sistema linear abaixo.*

$$\begin{cases} x - y + z = 67 \\ x + y - z = -53 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

A forma matricial dessa equação é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A solução consiste em achar a matriz A^{-1} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e depois multiplicaremos pela matriz de resultados

$$\begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

para acharmos x, y *e* z*. Vamos proceder pelo método dos cofatores. Sabe-se que* $det(A) = 4$*.*

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,1} = (-1)^{1+1} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$M_{1,2} = (-1)^{1+2} det \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^3 \cdot (-1 - 1) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$M_{1,3} = (-1)^{1+3} det \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{2,1} = (-1)^{2+1} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^3 \cdot (1 - (-1)) = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$M_{2,2} = (-1)^{2+2} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{2,3} = (-1)^{2+3} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^5 \cdot (-1 - 1) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$M_{3,1} = (-1)^{3+1} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{3,2} = (-1)^{3+2} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^5 \cdot (1 - (-1)) = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$M_{3,3} = (-1)^{3+3} det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = (-1)^6 \cdot (1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Que nos dá

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

ou multiplicando todas as entradas por $\frac{1}{4}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Para verificar se a matriz A^{-1} é realmente a inversa de A, devemos efetuar, por exemplo, $A \cdot A^{-1}$ e verificar se temos a matriz identidade I_3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A seguir as contas necessária para se efetuar a multiplicação acima.

- *linha 1, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot 0 = 1$
- *linha 1, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0$
- *linha 1, coluna 3:* $1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$
- *linha 2, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + (-1) \cdot 0 = 0$
- *linha 2, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{-1}{2} = 1$
- *linha 2, coluna 1:* $1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$
- *linha 3, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot 0 = 0$
- *linha 3, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0$
- *linha 3, coluna 3:* $1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Para achar a solução final devemos fazer a seguinte multiplicação.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{67}{2} - \frac{53}{2} + 0 \cdot 10 \\ \frac{-67}{2} - 0 \cdot (-53) + \frac{10}{2} \\ 0 \cdot 67 + \frac{53}{2} + \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{57}{2} \\ \frac{63}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 7, y = \frac{-57}{2}$ *e* $z = \frac{63}{2}$.

No caso de sistemas lineares, uma simplificação do método de Gauss pode ser feita e podemos reuzir a matriz A junta com a matriz de resultados e não com a identidade como fizemos anteriormente nos facilitando um pouco a vida. O nome dessa técnica chama-se escalonamento da matriz de coeficientes.

Exemplo 1.18 *Considere a mesma equação anterior em sua forma matricial. A forma matricial dessa equação é dada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Devemos agora escalonar a matriz $[A|b]$, *onde* b *é a matriz*

$$\begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

O primeiro passo é $-l_2 + l_3 \to l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 0 & 0 & 2 & 63 \end{array}\right].$$

O segundo passo é multiplicar por $\frac{1}{2}$ *a linha 3.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O terceiro passo é $-l_1 + l_2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 0 & 2 & -2 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O quarto passo é multiplicar a linha 2 por $\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 0 & 1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O quinto passo é somar linhas 1 e 1 e substituir na linha 2 $(l_2 + l_1 \to l_1)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O último passo é somar linhas 2 e 3 e substituir na linha 2 $(l_2 + l_3 \to l_2)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O algoritmo deve para, pois a matriz identidade apareceu. Logo, $x = 7, y = \frac{-57}{2}$ *e* $z = \frac{63}{2}$.

Note que todos os sistemas resolvidos possuem matrizes de coeficientes com o determinante diferente de zero. Quando o determinante for zero temos o caso de infinitas soluções (retas coincidentes) ou nenhuma solução (retas paralelas).

Exemplo 1.19 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 8x + 12y = 20 \end{cases}$$

Em forma matricial, temos a seguinte equação.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Notemos que o determinante da matriz de coeficientes é 0. Vamos tentar escalonar a matriz de coeficientes juntada com a de resultados.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 12 & 20 \end{array} \right].$$

Devemos multiplicar a primeira por 4 e subtrair da segunda linha substituindo na própria $4l_1 - l2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Nota-se que a segunda linha zerou, logo teremos infinitas soluções. Pois, temos apenas uma equação válida $2x+3y = 5$. *A equação* $8x+12y = 20$ *não acrescenta nenhuma informação a mais (retas paralelas). Para ver isso basta multiplicar por 4 em ambos lados de* $2x + 3y = 5$. *Na literatura esse sistema é chamado de possível porém indeterminado.*

Exemplo 1.20 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 5x + 15y = 15 \end{cases}$$

Em forma matricial, temos a seguinte equação.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz de coeficientes é 0. Vamos escalonar a matriz de coeficientes juntada com a de resultados.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 5 & 15 & 15 \end{array} \right].$$

Fazemos então $-5l_1 + l_2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -35 \end{array} \right].$$

Note que não conseguiremos mais efetuar o algoritmo, pois temos que a parte da matriz dos coeficientes está zerada. Diferentemente do outro exemplo, neste temos a linha $0\ 0\ -35$ *que nos daria a equação* $0x+0y = -35$, *ou seja,* $0 = -35$ *que é um absurdo. Portanto, o sistema acima é impossível (não há soluções). Nesse caso teriamos duas retas paralelas.*

1.4 Matrizes - Revisão

Note que até o momento foi possível observar algumas operações simples com matrizes. A soma de matrizes, por exemplo, onde temos que: $M_{lk}(\mathbb{R}) + M_{lk}(\mathbb{R}) \to M_{lk}(\mathbb{R})$. Logo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \to (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.21 *(+)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 1+1 \\ 0+(-1) & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.22 *(+)*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 3+(-1) \\ 5+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Agora, é importe ressaltar que há casos em que não é possível calcular essas matrizes, pois pertencem a conjuntos diferentes, como:

Exemplo 1.23

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

pois $\in M_2(\mathbb{R})$ e $\in M_{2,1}(\mathbb{R})$

Outra operação vista foi a multiplicação de matrizes, a qual muda as suas dimensões, $M_{lk}(\mathbb{R}) \cdot k_n \to \mathrm{M}_{ln}(\mathbb{R})$:

Exemplo 1.24

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\cdot 9 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot 9 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\in M_{2,1}(\mathbb{R})$

Exemplo 1.25 *Imagine o seguinte cenário: e se fosse $B \cdot A$?*

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{3,1}(\mathbb{R})$, $M_{2,3}(\mathbb{R})$, não seria possível, pois $1 \neq 2$, portanto, não pode ser realizada a multiplicação.

Observação: As ordens dos fatores altera o produto.

Ainda temos a multiplicação por escalar, onde: $\mathbb{R} \cdot M_{lk}(\mathbb{R}) \to M_l \cdot k(\mathbb{R})$. Ou seja, $\lambda(a_{ij}) \to (\lambda a_{ij})$.

Exemplo 1.26

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5A = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 0 & 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Uma matriz é nula quando independentemente de sua dimensão, todos os seus elementos são iguais a zero.

Exemplo 1.27

$$O_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O + A = \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 0+5 & 0+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + O = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 5+0 & (-1)+0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade recebe esse nome quando ela possui os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os restante dos elementos iguais a 0. Veja um exemplo:

Exemplo 1.28

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos elaborar um sistema a partir da solução:

Exemplo 1.29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = b$$

$$Ax = b \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y+3z \\ 2x+y+2z \\ x+y+2z \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{cases} x+2y+3z = -2 \\ 2x+y+2z = 0 \\ x+y+2z = -1 \end{cases}$$

Definição 1.15 *Duas matrizes são iguais quando cada elemento de mesma posição for igual. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ com A e B de mesma dimensão, vale que: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall_{ij}$.*

Exemplo 1.30

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} \\ a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} \\ a_{22} = b_{22} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ -x+3y \end{bmatrix}$$

Portanto, com a noção de igualdade de matrizes, gera o sistema linear.

Quando você multiplica a inversa, você obtém como resultado a inversa (à esquerda).

Note que: Matrizes não são comutativas.

Exemplo 1.31

$$Ax = b$$

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

$$(A^{-1}A)x = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Para solucionar sistemas lineares, uma das propostas vistas que iremos utilizar daqui para frente, foi o "escalonamento da matriz de coeficientes", chamada também de "operações elementares". Para isso é necessário seguir as regras abaixo:
1. Trocar de linhas;
2. Multiplicar linhas;
3. Atualizar linha por combinação de duas.

Exemplo 1.32 *Resolva o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x + 2z = -1 \\ -2x - 3z = 1 \\ 2y = -2 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

O primeiro passo é $l_2 + l_1 \to l_2$ (Regra 3)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

O segundo passo é trocar $l_2 \Leftrightarrow l_3$ (Regra 1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

O terceiro passo é $l_2/2 \to l_2$ (Regra 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

O quarto e último passo $l_1 + (-2)l_3 \to l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

O algoritmo deve parar, pois a matriz identidade apareceu.

Logo, $x = 1$ $y = -1$ e $z = -1$.

Exemplo 1.33 *Vamos resolver o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y + 2z = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Sendo assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

O primeiro passo é $l_3 + (-3)l_1 \rightarrow l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \end{array}\right]$$

O segundo passo $l_3 + (-4)l_2 \rightarrow l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array}\right]$$

O terceiro passo é $\frac{1}{-11}l_3 \rightarrow l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O quarto passo é $l_2 + (-2)l_3 \rightarrow l_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O quinto passo, basta multiplicar l_2 *por* (-1)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O sexto passo é $l_1 + (-1)\ l_3 \rightarrow l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

O sétimo e último passo é $l_1 + (-1)\ l_2 \rightarrow l_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Logo, $x = 1,\ y = 2$ *e* $z = 3$.

Cada operação elementar, é na verdade uma multiplicação à esquerda de uma matriz elementar no sistema.

Exemplo 1.34

$$Ax = b$$

$$M_1(Ax) = M_1 b$$

$$M_2(M_1(Ax)) = M_2 M_1 b$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{11} \end{bmatrix}$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicar todas essas matrizes, obtém-se a inversa

$$A^{-1} = M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$$

$$x = M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$$

1.5 Exercícios

Exercício 1 *Dado as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a) $3\mathbf{A} + 7B$

b) $B - A$

c) $A \cdot B$

d) $2 \cdot (AB)$

e) $B \cdot \mathbf{A}$

f) A^2

g) B^2

Exercício 2 *Dado a matriz:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

a) Quem são as matrizes elementares?
b) Calcular A^{-1} *(opcional).*

Chapter 2

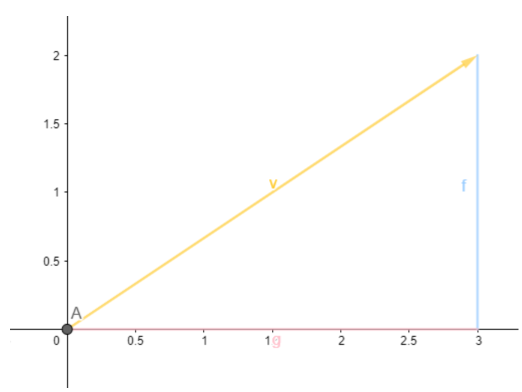
Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial é um conjunto formado com as operações de adição de vetores (+) e de multiplicação por escalar ($\cdot\lambda$) os quais satisfazem as 8 propriedades que veremos mais adiante. A ideia é mostrar que alguns conjuntos possuem estrutura similar as dos espaços vetoriais.

2.1 Noção Geométrica de um Vetor

Definição 2.1 *Vetor é um objeto matemático que possui direção, magnitude e sentido no plano ou espaço. Pode ser representado como: $\vec{v}$ ou em negrito **v**. A seta $\rightarrow$ aponta na direção e no sentido da ação e seu comprimento fornece a magnitude da ação.*

Exemplo 2.1 *Considere o vetor $\vec{v}$ em amarelo, onde: $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.*

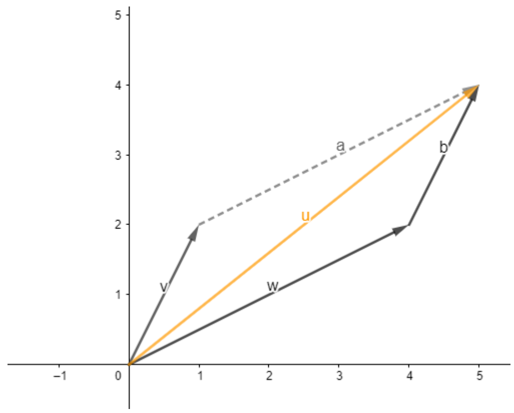


Definição 2.2 *(+) A soma de vetores pode ser realizada através da operação chamada soma vetorial, a qual devem ser considerados o módulo, direção e sentido, que gera um $\vec{v}$ resultante, ou seja, ligando a origem com a extremidade obtém-se o vetor soma.*

Exemplo 2.2 *(Comutatividade): Considerando que* $\vec{v} = \binom{1}{2}$ *e* $\vec{w} = \binom{4}{2}$*:*

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\vec{u} = \vec{w} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Representação gráfica do vetor $\vec{u}$*:*

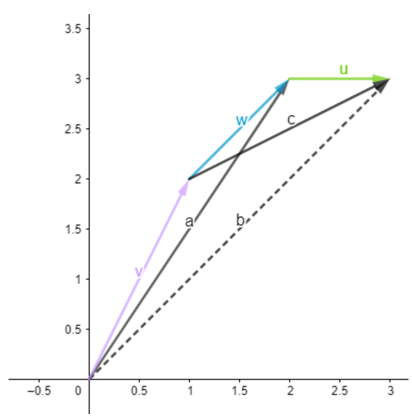


NOTA: *A soma geralmente formará paralelogramos. O gráfico acima ilustra como a ordenação da soma vetorial possui a propriedade de comutatividade.*

Exemplo 2.3 *(Associatividade) : Considerando que* $\vec{v} = \binom{1}{2}$, $\vec{w} = \binom{1}{1}$ *e* $\vec{u} = \binom{1}{0}$.

$$\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = \vec{a}$$
$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{c}$$
$$\vec{w} + \vec{u} = \vec{b}$$

Representação gráfica dos vetores $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ *e* $\boldsymbol{u}$*:*



Definição 2.3 *O vetor com comprimento equivalente a 0 é o vetor nulo (neutro):* $\vec{0} = \binom{0}{0}$*, além disso, é o único sem direção específica.*

Exemplo 2.4 *(Neutro): Considerando que* $\vec{v} = \binom{1}{2}$*:*

$$\vec{v} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{0} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

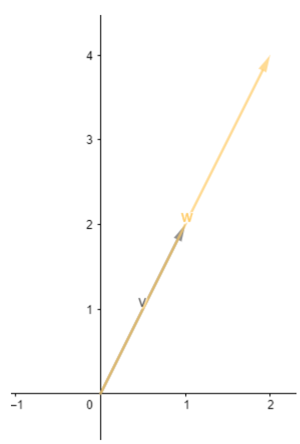
Exemplo 2.5 *(Oposto): O oposto de um vetor é representado por* $\vec{v}$ *e* $\vec{-v}$*, onde possuem a mesma magnitude e direção, mas no sentido contrário.*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \vec{-v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Definição 2.4 *(.) A multiplicação por escalar ou homotetia é a dilatação da distância entre um ponto em relação a um ponto fixo e* $\lambda \neq 0$*, segundo uma razão dada. Nesse contexto, podemos multiplicar um* $\lambda \in \mathbb{R}$ *por um* $\vec{v}$*, ou simplesmente* $\lambda \cdot \vec{v}$*, a ideia é fazer o* $\vec{v}$ *crescer* $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$*.*

Exemplo 2.6 *(Multiplicação por escalar): Considerando que* $\vec{v} = \binom{1}{2}$*,* $\vec{w} = \binom{2}{4}$ *e* $\lambda = 2$*:*

$$2 \cdot \binom{1}{2} = 2\vec{v}$$



Agora saindo da geometria, uma possível aplicação com carteiras de ativos, "teoria da carteira" ou "teoria de Markowitz". Essa teoria não é foco dessa disciplina, mas é possível termos uma exemplo menor que envolva finanças.

Exemplo 2.7 *Considerando que temos as seguintes corrência em mãos* BRL*,* USD *(real e dólar):*

a) $100BRL + 50BRL = (100+50) = 150BRL$

b) $10BRL$ - $10BRL = (10-10)BRL = 0BRL = 0$

c) $2 \cdot BRL + USD$. *Não se multiplica corrências e sim um escalar pela unidade de dinheiro.*

2.2 Exercícios

Exercício 1 *Dado* $\vec{v} = \binom{3}{1}$, $\vec{w} = \binom{1}{5}$, *represente geometricamente os vetores:*

a) $3\vec{v} + 6\vec{w}$

b) $\frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{5}\vec{w}$

c) $\vec{v} + \vec{w}$

d) $-\vec{v} - \vec{w}$

e) $\vec{v} + \vec{v}$

f) $\vec{w} + \vec{w} + \vec{w}$

Exercício 2 *Calcule as expressões abaixo:*

a) $\vec{v} = \binom{10}{11}$, $\vec{w} = \binom{-1}{4}$, $\vec{w} + \vec{v}$, $+ 3\vec{w} - 7\vec{v}$, $15\vec{w}$, $20\vec{v}$.

b) $\vec{v} = \binom{1}{1}$, $\vec{w} = \binom{-1}{1}$, $\vec{w}$ - $\vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $3\vec{v} + 2\vec{w}$, $5\vec{v}$, $17\vec{w}$.

Exercício 3 *Dado* $\vec{u} = \binom{1}{-1}$, $\vec{v} = \binom{-1}{-1}$ *e* $\vec{w} = \binom{3}{2}$, *calcule:*

a) $\vec{u} + 2\vec{v}$ - $5\vec{w}$

b) $7\vec{u} + 0\vec{v} + 15\vec{w}$

c) $\frac{1}{2}\vec{u} + \pi\vec{v}$

d) $\vec{u} - \vec{v}$

e) $\vec{v}$ - $\vec{u}$

f) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{w}$

g) $\vec{u} + \vec{u}$ - $\vec{v} + 3\vec{v}$

2.3 Noção Algébrica de um Vetor

O módulo de um vetor é representado pela dimensão do segmento de uma reta. A direção por sua vez pode ser representada através de diversas formas, sendo por pontos cardeiais (direção Norte-Sul, Leste-Oeste...), círculo trigonométrico e direção referencial.

Ainda podemos dizer que em um sistema de coordenadas (definidas pelos eixos direcionais) pode ser visto como 2 dimensões, 3 dimensões e etc. Os vetores podem, dessa forma, ser representados pelo par ordenado (x, y) ou através das expressões álgebricas.

Outra forma de representação vetorial é com a utilização da notação matricial.

Definição 2.5 *Um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V é um objeto matemático (conjunto) que satisfaz duas operações:*

$$(+) : V \times V \to V$$
$$(\cdot) : \mathbb{R} \times V \to V$$

Aqui, é possível observar as oito propriedades que satisfazem as operações de "Adição" e "Multiplicação por Escalar" para cálulos que envolvem os espaços vetoriais.

Adição de vetores, satisfaz:

1. Associatividade $(+)$: $(\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V)\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

2. Neutro $(+)$: $(\exists\ \boldsymbol{0} \in V)\ (\forall\ \boldsymbol{v} \in V)\ \boldsymbol{v} + 0 = 0 + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

3. Oposto $(+)$: $\forall\ v \in V\ \exists\ (-\boldsymbol{v}) \in V\ \ \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = 0$

4. Comutatividade $(+)$: $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\ \ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

Multiplicação de vetor por escalar, satisfaz:

5. Distributividade: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \ (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$

6. Distributividade: $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V\ \ a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{v}$

7. Distributividade: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{u} \in V\ \ (ab) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot (b \cdot u)$

8. Neutro $(\cdot)$: $\forall\ \boldsymbol{v} \in V\ \ 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Proposição 1 *Mostrar que o $\mathbb{R}^2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial.*

Demonstração 1 *Primeiramente, define-se:*

$$\begin{aligned}
(+) &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
(+) &: (a, b)(c, d) = (a + c, b + d) \\
(\cdot) &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
(\cdot) &: a(x, y) = (ax, ay)
\end{aligned}$$

Associatividade: *Sejam $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \\
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \\
(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} &= ((\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)+(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2))+(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \\
&= ((\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2))+(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1), \boldsymbol{u}_2 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2)) \\
&= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)+((\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)) \\
&= \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

Exemplo 2.8 *(Numérico):*

$$((1,2)+(0,3))+(1,1) = (1,5)+(1,1) = (2,6)$$
$$(1,2)+((0,3)+(1,1)) = (1,2)+(1,4) = (2,6)$$

Neutro: $\exists\ \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^2\ \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0} &= (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \\
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v} \\
(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})+(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}_2) \\
(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{0}) &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v} \\
(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.9 *(Numérico):*

$$(0,0)+(3,4) = (0+3, 0+4) = (3,4)$$

Oposto: Sejam $\forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\ \exists\ (-\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
-\boldsymbol{v} &= (-\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2) \\
\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) &= 0 \\
(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v} &= 0 \\
\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)+(-\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_1+(-\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_2+(-\boldsymbol{v}_2)) \\
&= (\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_1), (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2) \\
&= (0,0)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.10 *(Numérico):*

$$(5,-3)+(-5,3) = (5-5), (-3+3) = (0,0)$$

Comutatividade: Sejam $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \\
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 &\in \mathbb{R} \\
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)+(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
&= (\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}_2) \\
&= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \\
&= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.11 *(Numérico):*

$$(4,3)+(1,-1)=(5,2)$$
$$ou$$
$$(1,-1)+(4,3)=(5,2)$$

<u>*Distributividade:*</u> *Sejam* $\forall\ a,b \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\\
(a+b)\cdot\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = a\cdot\boldsymbol{v}+b\cdot\boldsymbol{v}\\
(a+b)\cdot\boldsymbol{v} &= ((a+b)\boldsymbol{v}_1, (a+b)\boldsymbol{v}_2)\\
&= (a\boldsymbol{v}_1, a\boldsymbol{v}_2)+(b\boldsymbol{v}_1, b\boldsymbol{v}_2)\\
&= a\cdot(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)+b\cdot(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\\
&= a\cdot\boldsymbol{v}+b\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.12 *(Numérico):*

$$(2+3)\cdot(1,1) = 5\cdot(1,1) = (5,5)$$
$$ou$$
$$2\cdot(1,1)+3\cdot(1,1) = (2,2)+(3,3) = (5,5)$$

<u>*Distributividade:*</u> *Sejam* $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\\
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\\
a\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= a\cdot\boldsymbol{u}+a\cdot\boldsymbol{v}\\
a\cdot(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2)&\\
&= (a(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1), a(\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2))\\
&= (a\boldsymbol{u}_1+a\boldsymbol{v}_1, a\boldsymbol{u}_2+a\boldsymbol{v}_2)\\
&= (a\boldsymbol{u}_1, a\boldsymbol{u}_2)+(a\boldsymbol{v}_1, a\boldsymbol{v}_2)\\
&= a\cdot(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)+a\cdot(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\\
&= a\cdot\boldsymbol{u}+a\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.13 *(Numérico):*

$$7\cdot((1,1)+(1,0)) = 7\cdot(2,0) = (14,0)$$
$$ou$$
$$7\cdot(1,1)+7\cdot(1,0) = (7,7)+(7,0) = (14,0)$$

Distributividade: *Sejam* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \forall\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
(ab)\cdot\boldsymbol{v} &= a\cdot(b\cdot\boldsymbol{v}) \\
(ab)\cdot\boldsymbol{v} &= (ab)\cdot(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
&= (ab\boldsymbol{v}_1, ab\boldsymbol{v}_2) \\
&= (a(b\boldsymbol{v}_1), a(b\boldsymbol{v}_2)) \\
&= a\cdot(b\boldsymbol{v}_1, b\boldsymbol{v}_2)
\end{aligned}$$

Exemplo 2.14 *(Numérico):*

$$\begin{aligned}
6\cdot(1,1) &= (6,6) \\
&ou \\
(2\cdot3)\cdot(1,1) &= 2\cdot(3\cdot(1,1)) \\
2\cdot(3,3) &= (6,6)
\end{aligned}$$

Neutro: *Sejam* $\forall\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2\ 1\ \cdot\ \boldsymbol{v}\ =\ \boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
1\cdot\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \\
1\cdot\boldsymbol{v} &= 1\cdot(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\
(\boldsymbol{v}_1, 1\boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.15 *(Numérico):*

$$1\cdot(3,2) = (3,2)$$

Logo, $\mathbb{R}^2$ *é um* $\mathbb{R}$*-Espaço vetorial.*

Vejamos mais alguns exemplos:

Proposição 2 $(\mathbb{C}) = \{a + bi \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *(vetores = números complexos).*

$$\begin{aligned}
&+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
&(a + bi)+(c + di) \to (a + c) + (b + d)i \\
&+ : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
&\lambda(a + bi) \to +bi
\end{aligned}$$

Exemplo 2.16 *Comutatividade:* $\forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 i(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}) \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 i(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}) \\
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 i)+(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 i) \\
&= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2)i \\
&= (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1)+(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2)i \\
&= (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 i)+(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 i) \\
&= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Exemplo 2.17 *Distributividade:* $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(ab)\cdot\boldsymbol{u} &= a\cdot(b\boldsymbol{u})\\ (ab)\boldsymbol{u} &= (ab)\cdot(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 i)\\ &= ab\boldsymbol{u}_1 + ab\boldsymbol{u}_2 i\\ &= a(b\boldsymbol{u}_1) + a(b\boldsymbol{u}_2 i)\\ &= a\cdot(b\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 i)\\ &= a\cdot(b\cdot(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 i))\\ &= a\cdot(b\cdot\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

2.4 Exercícios

Exercício 1 *Mostre que são* $\mathbb{R}$*-Espaços vetoriais os seguintes conjuntos:*

a) $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$

$a \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^a$

b) $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\mathbb{R}^n,\ \forall\ n > 2$

d) $\mathbb{R}^3$

e) $\mathbb{R}^4$

f) $\mathbb{R}^5$

g) $\mathbb{R}^6$

h) $\mathbb{R}^7$

i) $\mathbb{R}^8$

j) $\mathbb{R}^{10}$

2.5 Subespaços

Um subconjunto W de um espaço vetorial V, recebe o nome de "Subespaço Vetorial" de V se esse subconjunto é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e está relacionado com as oito propriedades vistas, as quais satisfazem as operações de adição e multiplicação por escalar.

Teorema 2 *: Seja* $W \subseteq V$*, onde* V *é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial,* W *é um espaço vetorial de* V *se satisfaz:*

a) $\boldsymbol{0} \in W$;

b) Se $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$*, então* $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$;

c) Se $a \in \mathbb{R}$ *e* $\boldsymbol{w} \in W$*, então* $a \cdot w \in W$.

Exemplo 2.18 *$W = \{(x_1, x_2) \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.*

Resposta:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 &= 2x_2 \end{aligned}$$

então: $W = \{(2x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

a) $\boldsymbol{0} \in W$

$$\begin{aligned} (0,0) &= (2x_2, x_2) \\ 2x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ (0,0) &\in W \end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \to \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \\ \boldsymbol{v} &= (2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2)+(2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \\ &= (2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) \\ &= (2(\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) \\ &= (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2)\cdot(2,1) \end{aligned}$$

Exemplo 2.19 *(Numérico):*

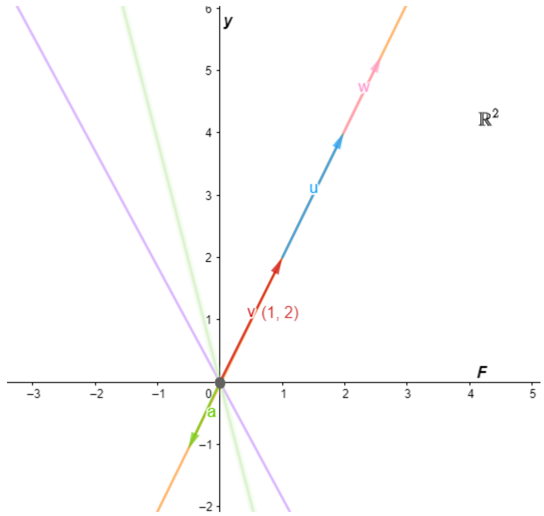
$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= (4,2) = 2\cdot(2,1) \\ \boldsymbol{w}_2 &= (6,3) = 3\cdot(2,1) \\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 &= (10,5) \\ &= 5\cdot(2,1) \end{aligned}$$

c) $a \in \mathbb{R}\boldsymbol{u} \in W \to a\cdot\boldsymbol{u} \in W$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) \\ a\cdot\boldsymbol{u} &= (2\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}a) \\ &= (2a\boldsymbol{u}_2, a\boldsymbol{u}_2) \in W \\ &= a\boldsymbol{u}_2\cdot(2,1) \end{aligned}$$

Logo, W é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Representação gráfica → Subespaços de $\mathbb{R}^2$(Plano):



$-\ \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$	2
$-$ *Retas que passam em* $(0,0)$	1
$-\ \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$	0

Exemplo 2.20 *$W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_3 = 0 \ \wedge x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.*
Resposta:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= -2x_1 \end{aligned}$$

Então $W = \{(x_1 - 2x_1, x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.
a) $\boldsymbol{0} \in W$; $(0,0,0) = (0, -2 \cdot 0, 0) \in W$.
b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \rightarrow \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$

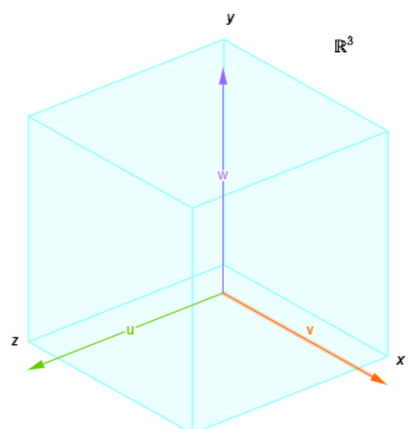
$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_1, -2\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) \\ \boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{v}_1, -2\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) \\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, -2\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) \\ &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, (-2)(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) \\ &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) \cdot (1, -2, 1) \end{aligned}$$

c) $a \in \mathbb{R}\boldsymbol{u} \in W \to a{\cdot}\boldsymbol{u} \in W$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{u}_1, -2\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) \\ a{\cdot}\boldsymbol{u} &= (a\boldsymbol{u}_1, -2a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1) \in W \\ &= (a\boldsymbol{u}_1{\cdot}(1, -2, 1) \end{aligned}$$

Logo, W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Representação gráfica $\to$ *Subespaços de* $\mathbb{R}^3$:



– $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$	3
– *Planos que passam em* $(0,0,0)$	2
– *Retas que passam em* $(0,0,0)$	1
– $\{(0,0,0)\}$	0

Subespaços de $\mathbb{R}^4$

– $\mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{R}^4$	4
– *Cubos que passam em* $(0,0,0,0)$	3
– *Planos que passam em* $(0,0,0,0)$	2
– *Retas que passam em* $(0,0,0,0)$	1
– $\{(0,0,0,0)\}$	0

Vajamos mais alguns exemplos:

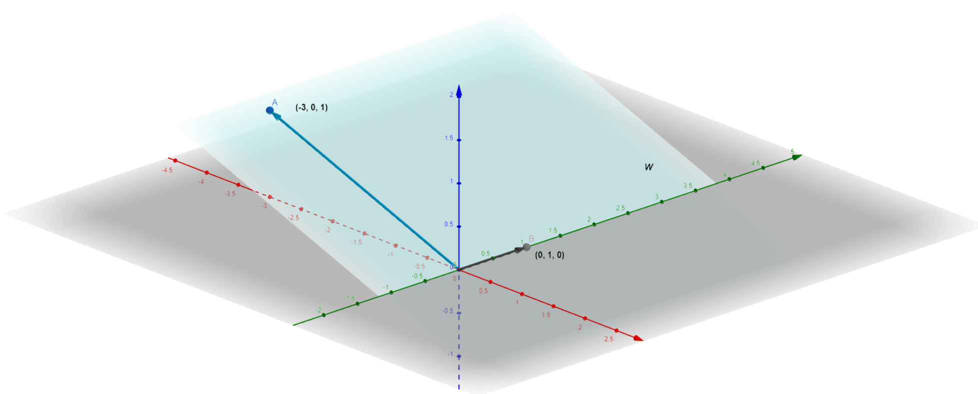
Exemplo 2.21 $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 3x_3 = 0\}$ *Mostre que* W *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

$$\rightarrow x_1 = -3x_3$$

Reescrevemos como: $W = \{(-3x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{gathered}(-3x_3, 0, x_3) + (0, x_2, 0)\\ x_3(-3, 0, 1) + x_2(0, 1, 0)\end{gathered}$$

Esse subespaço é um plano com os vetores diretores sendo (-3,0,1) e (0,1,0) passando por (0,0,0).



a) $(0,0,0) \in W$ $x_3 = 0$ *e* $x_2 = 0$

b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= (-3\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\\ \boldsymbol{v} &= (-3\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (-3\boldsymbol{u}_3 - 3\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3)\\ &= (-3(\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3), \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3)\\ &= (-3(\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3), 0, \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3) + (0, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2, 0)\\ &= (\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{v}_3)\cdot(-3, 0, 1) + (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2)(0, 1, 0)\end{aligned}$$

c) $a \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{u} \in W$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= (-3\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\\ a\cdot\boldsymbol{u} &= (-3a\boldsymbol{u}_3, a\boldsymbol{u}_2, a\boldsymbol{u}_3) \in W\\ &= (-3a\boldsymbol{u}_3, 0, a\boldsymbol{u}_3) + (0, a\boldsymbol{u}_2, 0)\\ &= a\boldsymbol{u}_3\cdot(-3, 0, 1) + a\boldsymbol{u}_3\cdot(0, 1, 0)\end{aligned}$$

2.6 Exercícios

Exercício 1 *Mostre que os conjuntos W são subespaços dos $\mathbb{R}$-Espaços vetoriais ao lado.*

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 - 5x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 + x_4 = 0\}$ $\mathbb{R}^4$

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 - 2x_3 = 0\}$ $\mathbb{R}^3$

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 5x_1 - x_2 = 0 \ \wedge \ x_2 - x_3 = 0\}$ $\mathbb{R}^3$

d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ $\mathbb{R}^3$

e) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 = 0\}$ $\mathbb{R}^4$

f) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 + x_3 = 0\}$ $\mathbb{R}^3$

g) $W = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 - x_3 + x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 + \frac{x_1}{2} = 0\right\}$ $\mathbb{R}^3$

h) $W = \{(x_1, x_2) \mid 9x_1 + 8x_2 = 0\}$ $\mathbb{R}^2$

i) $W = \{(x_1, x_2) \mid 5x_1 + 2x_2 = 0\}$ $\mathbb{R}^2$

Exercício 2 *Modifique os conjuntos acima de forma que não sejam mais subespaços. Explique.*