Matemática - Ciência de Dados

Alexandre Garcia de Oliveira

August 2021

Chapter 1

Teoria dos Conjuntos

Definição 1.1 *Um conjunto, intuitivamente, é simplesmente uma coleção de "coisas" quer seja objetos matemáticos ou não. Outros conjuntos também podem fazer parte de um conjunto.*

Exemplo 1.1 $A = \{1,2,3,4\}$

A notação { } é a principal forma de se expressar um conjunto. No exemplo acima temos que 1, 2, 3 e 4 são elementos do conjunto A.

Exemplo 1.2 $C = \{$*Winicios, Sofia, Uara, Pedro, Matheus*$\}$

O conjunto C representa o conjunto dos alunos do primeiro ciclo do curso de Ciência de Dados. Usa-se essa forma de escrever um conjunto quando possuimos poucos elementos.

Exemplo 1.3 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

O conjunto acima existe por causa de um axioma (algo tomado como verdade sem precisar de evidências). Esse axioma é chamado de axioma do infinito e nos diz que existe o conjunto infinito dos números naturais.

Exemplo 1.4 $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, ...\}$

Outra forma de se representar um conjunto é pela forma de compreensão (comprehension, set builder notation).

Definição 1.2 *Seja A conjunto e φ uma regra que decide que se um elemento de A é verdadeiro ou falso de acordo com essa regra. A notação consiste em filtrar os elementos de A deixando apenas os elementos que são verdadeiros de acordo com tal regra para montar um novo conjunto B.*

$$B = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$$

ou

$$B = \{Expr(x) \mid \varphi(x)\}$$

onde, $Expr(x)$ é alguma expressão matemática que possui x.

Exemplo 1.5 *Pares* $= \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{$*0, 2, 4, 6, 8, ...*$\}$

Definição 1.3 *O símbolo* $\in$ *é a notação que indica que um elemento faz parte de um conjunto. O símbolo* $\notin$ *representa que um elemento não pertence a um conjunto.*

Exemplo 1.6 *Considere o conjunto* $A = \{$*1,2,3,4*$\}$*, temos que*

- $1 \in A$
- $2 \in A$
- $3 \in A$
- $4 \in A$
- $5 \notin A$
- *chocolate* $\notin A$

Exemplo 1.7 $B = \{$*3n+1* $\mid n \in \mathbb{N}\} = \{3(0)+1, 3(1)+1, 3(2)+1, 3(3)+1, 3(4)+1, 3(5)+1, ...\} = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, ...\}$.

De acordo com as definições acima temos que $7 \in B$, $14 \notin B$, $OI \notin B$.

Definição 1.4 *Seja* B *o conjunto de todos os Brasileiros.* $P = \{$ *..., Kubitschek, Sarney, Collor, Itamar, FHC, Lula, Dilma, Temer, Bolsonaro* $\} = \{p \in B \mid$ *p foi presidente do Brasil*$\}$

Observação 1.1 *Para nomearmos conjuntos usamos letras maiúsculas, ao passo que as variáveis são nomeadas com letras minúsculas.*

Uma representação dos números naturais na linguagem Haskell é a partir da expressão $[0, 1..]$, compare com o exemplo 3. Lembre-se que o conjunto dos números naturais é infinito e isso pode te gerar problemas na hora de usá-lo nesta representação.

Exemplo 1.8 $S = \{$*0,1,2,3,4,5,6,7,8,9*$\}$ *é o mesmo que, em Haskell, take* 10 $[0, 1..]$ *ou* $[0..9]$

No exemplo 4, o conjunto dos pares é representado, em Haskell, pela expressão $[2 * n | n \leftarrow [0, 1..]]$. No exemplo 6, usamos a notação de construção de conjuntos que pode ser representada no Haskell com uma "list comprehesion". O conjunto $B = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ é representado pela expressão $[3 * n + 1 | n \leftarrow [0, 1..]]$ em Haskell. Uma observação é que listas e conjuntos não são a mesma estrutura para representar coleção objetos matemáticos.

Fato 1.1 *Uma lista é uma estrutura que permite elementos repetidos, ao passo que um conjunto não (idempotente). Um conjunto* $A = \{1, 2, 2, 3\}$ *é o mesmo que* $A = \{1, 2, 3\}$*, se A fosse lista não haveria essa relação, enquanto* $A = [1, 2, 2, 3]$ *é uma lista pronta para uso. Conjuntos também não possuem ordem (comutativo), logo* $C = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{2, 1, 3\}$ *são o mesmo conjunto. Se B e C fossem listas elas não seriam as mesmas. Uma Bag é uma lista ao qual a ordem não importa e possui elementos repetidos.*

Estrutura	*Propriedade*
Conjunto	*idempotente e comutativo*
Bag	*comutativo*
Lista	-

A representação de um conjunto sem elementos é pelo símbolo $\emptyset$, em uma lista vazia usamos o símbolo [] e para bags $\{\{\}\}$.

Exemplo 1.9 $\emptyset$ *é o conjunto vazio. Ou seja, um conjunto com 0 elemento.* $F = \{$*o conjunto de todos os alunos do curso de Farmácia da Fatec-Santos*$\} = \emptyset$. $S = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 0\} = \emptyset$*. Em Haskell, podemos representar S por* $[n|n \leftarrow [0..15000000], n < 0] = []$*. Obviamente que* $\mathbb{N}$ *não é o mesmo que* $\{0, 1, 2, ..., 15 \times 10^6\}$*, porém o uso de* $[0..]$ *travaria o programa.*

Definição 1.5 *Um conjunto B está contido A, se todo elemento pertencente a B também pertence a A. Escreve-se* $B \subset A$*. Se algum elemento de um conjunto X não pertencer a um conjunto Y temos que X não está contido em Y e escrevemos* $X \not\subset Y$.

É importante ressaltar que para termos uma igualdade de conjuntos, por exemplo $A = B$, devemos ter que $A \subset B$ e $B \subset A$. Ou seja, todo elemento que está em A deve estar em B e todo elementos de B deve pertencer a A.

Exemplo 1.10 $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$*, ou seja, todo elemento de P também é um elemento de* $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.11 *Cores* $= \{$*azul, verde, vermelho, roxo, laranja, amarelo, rosa*$\}$. *Seja* $C = \{$*verde, vermelho*$\}$*, temos que* $C \subset Cores$. $D = \{$*branco, azul, verde*$\}$, $D \not\subset$ *Cores, pois branco* $\notin$ *Cores.*

Uma observação para o contido/não contido deve-se checar TODOS os elementos. A operação de contido/não contido funciona com dois conjuntos, ao passo que o pertence funciona com elemento e conjunto.

- Elemento $\in$ Conjunto
- Conjunto $\subseteq$ Conjunto

É possível listar todos os subcojuntos de um conjunto A (conjuntos contidos em outros, ele mesmo incluso, vazio também). Escreve-se $\mathcal{P}(A)$ e lê-se conjuntos das partes A (powerset).

Definição 1.6 *Dado A conjunto, temos que $\mathcal{P}(A) = \{B|B \subseteq A\}$ é o conjunto das partes de A.*

Exemplo 1.12 *$C = \{$preto, branco, azul, verde$\}$, qual seria $\mathcal{P}(C)$ (conjunto das partes de C)?*
$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{preto\}, \{branco\}, \{azul\}, \{verde\}, \{preto, branco\}, \{preto, azul\}, \{preto, verde\}, \{branco, azul\}, \{branco, verde\}, \{azul, verde\}, \{preto, branco, azul\}, \{preto, azul, verde\}, \{preto, branco, verde\}, \{branco, azul, verde\}, C\}$. Por exemplo, $\{preto\} \in \mathcal{P}(C)$.

- $\emptyset \subset C$
- $\{preto\} \subset C$ *(note que* $preto \in C$*)*
- $\{branco\} \subset C$
- $\{azul\} \subset C$
- $\{verde\} \subset C$
- $\{preto, branco\} \subset C$
- $\{preto, azul\} \subset C$
- $\{preto, verde\} \subset C$
- $\{branco, azul\} \subset C$
- $\{branco, verde\} \subset C$
- $\{azul, verde\} \subset C$
- $\{preto, branco, azul\} \subset C$
- $\{preto, branco, verde\} \subset C$
- $\{preto, azul, verde\} \subset C$
- $\{branco, azul, verde\} \subset C$
- $\{preto, branco, azul, verde\} \subseteq C$

Em Haskell, o conjunto das partes pode ser representado pela função subsequence do módulo Data.List. Para chamar o módulo usa-se o comando ":m Data.List" e o exemplo acima é dado por: subsequences ["preto","branco","azul","verde"]

Definição 1.7 *O número de elementos do conjunto das partes de um conjunto A é dado por $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, lê-se, dois elevado ao número de elementos de A.*

Exemplo 1.13 *$C = \{$preto, branco, azul, verde$\}$, $|C| = 4$. $|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|} = 2^4 = 16$. $D = \{1, 2\}$, logo $|D| = 2$ e $|\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} = 2^2 = 4$. Use a função length do Haskell para medir o tamanho de uma lista (se houver elementos repetidos não se esqueça do nub).*

É possível realizar operação com quaisquer conjuntos. As básicas são: união, intersecção, diferença e produto cartesiano.

Definição 1.8 *A união é uma operação que recebe dois conjuntos e forma um novo com os elementos em comum sem repetições. Essa operação é representada pelo símbolo* $\cup$.

Exemplo 1.14 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Em Haskell, podemos representar uma operação similar à união usando (++) seguido de um nub. No exemplo anterior devemos usar o comando: nub ([1,2,3,4] ++ [3,4,5,6]).

Definição 1.9 *A operação união possui as seguintes propriedades abaixo. Sejam* A, B, C *conjuntos, vale que:*

- *(Neutro):* $A \cup \emptyset = A$ *e* $\emptyset \cup A = A$
- *(Associatividade)* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- *(Comutatividade)* $A \cup B = B \cup A$

Definição 1.10 *A intersecção é uma operação que recebe dois conjuntos e devolve um novo conjunto contendo os elementos em comum sem repetições. É representada pelo símbolo* $\cap$.

Exemplo 1.15 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$

A intersecção possui uma função em Data.List (Haskell) chamada intersect. Para o exemplo anterior usa-se o comando: intersect [1,2,3,4] [3,4,5,6].

O tamanho da união de conjunto e da intersecção de conjuntos são relacionados pela expressão $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Para calcular o tamanho da união do primeiro exemplo usamos a expressão: length [1,2,3,4] + length [3,4,5,6] - (length (intersect [1,2,3,4] [3,4,5,6])). Para sabermos a intersecção usamos uma simples manipulação da expressão acima $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$.

Definição 1.11 *A diferença de conjuntos é uma operação que recebe dois conjuntos e retorna um novo com os elementos do primeiro sem os elementos que pertecem ao segundo. É representado pelo símbolo* $-$ *ou* $\backslash$. $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$.

Exemplo 1.16 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, $A \backslash B = \{1, 2\}$

Em Haskell usa-se \\ do módulo Data.List para representar a operação em questão. Com o exemplo anterior em mente podemos verificar em Haskell através do comando: $[1, 2, 3, 4] \backslash\backslash [3, 4, 5, 6]$. O complemento de um conjunto A, simbolicamente A^c é o conjunto dos elementos pertecentes a universo de discurso que não são elementos de A, ou seja, $A^c = \{x \in U | x \notin A\} = U \backslash A$.

Exemplo 1.17 *Considere o universo dos números naturais, e* $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $X^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$.

É possível formar novos conjuntos considerando todas as combinações entre dois conjuntos A e B (pares ordenados), isso é chamado de produto cartesiano.

Definição 1.12 *Sejam* A *e* B *conjuntos, o produto cartesiano entre entre eles, chamado de* $A \times B = \{(a, b)|x \in A \wedge x \in B\}$.

Exemplo 1.18 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in \{1, 2, 3\} \wedge b \in \{2, 4\}\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$.
$B \times A = \{(2, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (2, 3), (4, 3)\}$. *Note que* $A \times B$ *não é igual a* $B \times A$. *Em Haskell,* $A \times B$ *pode ser representado pela lista a seguir.*

```
Prelude> [(a,b) | a <- [1,2,3], b <- [2,4]]
Prelude> [(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)]
```

O tamanho de um conjunto $A \times B$ é dado pela multiplicação dos elementos de A e de B.

Definição 1.13 $|A \times B| = |A||B|$

Note que (a, b) é chamado de par ordenado e possui a seguinte definição.

Definição 1.14 $(a, b) = \{\{a, \overline{1}\}, \{b, \overline{2}\}\}$, *onde* $\overline{1}$ *e* $\overline{2}$ *são marcadores. Usa-se esses marcadores, pois conjuntos não possuem valores repetidos nem ordem. Por exemplo,* $(a, a) = \{\{a, \overline{1}\}, \{a, \overline{2}\}\}$ *e* $(b, a) = \{\{b, \overline{1}\}, \{a, \overline{2}\}\}$. *Note que* $(a, b) \neq (b, a)$.

Em Haskell, os pares ordenados são chamados de tuplas ($n-$upla) e são usados para o agrupamento de dados.

Exemplo 1.19 *Uma tabela de um banco de dados relacional pode ser representado em termos de produto cartesiano.* $Cliente = \mathbb{N} \times String \times String \times \mathbb{N}$. *Os registros da tabela seria um subconjunto deste conjunto Cliente.* $R = \{(1, joao, joao@joao.com, 25),\ (2, maria, maria@maria.com, 20)\}$. *Para uma hipotética união usuariamos a seguinte expressão* $R \cup \{(3, teste, teste@teste.com, 30)\}$. *Em Haskell (ghci) também podemos testar.*

```
Prelude> let r = [(1,"joao","joao@joao.com",25),
     (2,"maria","maria@maria.com",20)]
```

para usarmos o nome r de modo a representação dessde "conjunto" (lista) e

```
Prelude> r ++ [(3,"teste","teste@teste.com",30)]
Prelude> [(1,"joao","joao@joao.com",25),
          (2,"maria","maria@maria.com",20),
          (3,"teste","teste@teste.com",30)]
```

para representação a dita união.

Exemplo 1.20 *Considere R o conjunto de registro de uma "tabela" cliente conforme exemplo anterior.* $A = \{x|x \in R \wedge \pi_1(x) = 2\} = \{(2, "maria", "maria@maria.com", 20)\}$. *Onde* π_1 *projeta o primeiro elemento da tupla.* $B = \{x|x \in R \wedge \pi_2(x) = pedro\} = \emptyset$. *O* π_2 *projeta o nome do Cliente (exemplo anterior). Em Haskell, o seguinte comando*

```
[(cp,nome,email,idade)| (cp,nome,email,idade) <- r, cp == 2]
```

teria o mesmo efeito de A.

O conceito de função é derivado de um produto cartesiano entre conjuntos. Uma função associa um elemento de um conjunto de entrada com um e só um elemento no conjunto de saída. Uma função seria o conjunto de pares ordenados ao qual a primeira coordenada deve ser única e a segunda coordenada depende da primeira como se fosse uma lei de associação.

Definição 1.15 *Seja A e B conjuntos. A função $f : A \to B$ é o subconjunto $f \subseteq A \times B$ tal que*

- *Para qualquer elemento $a \in A$ tem que existir um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, ou melhor escrevendo $f(a) = b$.*
- *Se $f(a) = b$ e $f(a) = b'$, temos que $b = b'$*

O conjunto A é chamado de domínio e o cojunto B é chamado de contra-domínio. A imagem é um subcojunto do contra-domínio formado por elementos atingidos pela função $Im(f) = \{y \in B|f(x) = y \text{ para algum } x \in A\ \}$.

Exemplo 1.21 *Seja $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, então $f = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1)\}$ ou podemos escrever também como $g : A \to B$ tal que $g(a_1) = b_3$ e $g(a_2) = b_1$. $Dom(g) = A$, $CDom(g) = B$ e $Im(g) = \{b_1, b_3\}$.*

O exemplo acima pode ser feito em Haskell usando o conceito de tipos. Para representar os conjuntos A e B definidos no exemplo anterior, usamos o conceito de tipos. Um tipo possui uma preocupação sintática e possui um agrupamento natural dos elementos, um conjunto possui uma preocupação semântica e não possui nenhum tipo de agrupamento. Usaremos esses dois conceitos como sinônimos apesar de não serem para fins didáticos. Para fazer um programa basta criar um arquivo, por exemplo, Func.hs em uma pasta e chamar o ghci (ou stack ghci) de dentro da mesma em uma linha de comando.

```
-- conteudo de um arquivo chamado Func.hs
module Func where

-- representa o conjunto A
data A = A1 | A2 deriving Show

-- representa o conjunto B
data B = B1 | B2 | B3 | B4 deriving Show.
```

```
g :: A -> B
g A1 = B3
g A2 = B1
```

A palavra deriving permite que o tipo possa ter uma estrutura extra. A palavra Show indica tal estrutura e significa que podemos mostrar os valores de A e B sempre que necessário. Para carregar o módulo na memória use o comando abaixo.

```
Prelude> :l Func.hs
```

Para executar a função g do exemplo basta fazê-lo como segue.

```
*Func> g A1
B3

*Func> g A2
B1
```

Exemplo 1.22 *Uma função pode ser escrita como uma expressão dependente de uma (ou mais) variável (is) como se fosse uma lei de formação para a saída.* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dado por* $f(n) = 2n$. *Temos que* $f(-2) = -4$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, ..., $f(101) = 202$, ...

A função do exemplo também pode ser escrita em Haskell.

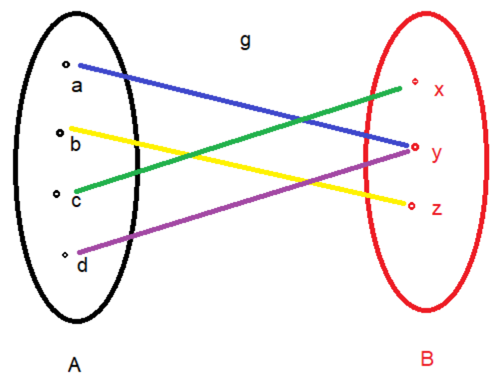
```
f :: Int -> Int
f n = 2*n
```

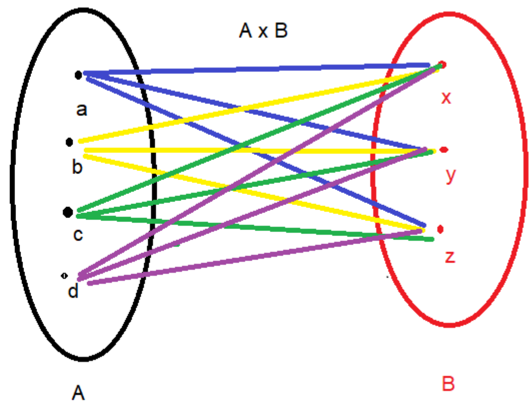
Os dois exemplos dados (21 e 22) e os tipos A e B devem ser definidos em um arquivo *.hs*.

Exemplo 1.23 *Seja* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dado por* $f(n) = 2n + 5$, *quanto vale* $f(7)$? $f(7) = 2(7) + 5 = 19$. *Faz sentido* $f(2.8)$? *Não faz sentido, pois* $2.8 \notin \mathbb{Z}$. *Faz sentido* $f(\pi)$? *Não, pois* $\pi \notin \mathbb{Z}$. *Lembrete:* $f \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *e* f *é escrito em notação de conjunto sendo o conjunto de todas as entradas e saídas possíveis.* $f = \{..., (-1, 3), (0, 5), (1, 7), (2, 9), ...\}$

```
f :: Int -> Int
f n = 2*n + 5
```

Exemplo 1.24 *Seja* $A = \{a, b, c, d\}$ *e* $B = \{x, y, z\}$ *com* $g = \{(a, y), (b, z), (c, x), (d, y)\} \subset A \times B$, *escreva* g *por uma lei de formação. Resp:* $g(a) = y$, $g(b) = z$, $g(c) = x$ *e* $g(d) = y$. *A figura abaixo mostra a comparção entre* g *e* $A \times B$. *Compare também os os comandos abaixo.*






```
[(x,g(x)) | x <- [AA .. DD]]

 [(x,y) | x <- [AA .. DD], y <- [XX .. ZZ]]
```

Abaixo o programa para executar os comandos definidos acima.

```
module Aula5 where

-- A = {a,b,c,d}
data A = AA | BB | CC | DD deriving (Show, Enum)

-- B = {x,y,z}
data B = XX | YY | ZZ deriving (Show, Enum)

-- Se a entrada for AA, a saida será YY
-- Se a entrada for BB, a saida será ZZ
-- Se a entrada for CC, a saida será XX
-- Se a entrada for DD, a saída será YY
g :: A -> B
g AA = YY
g BB = ZZ
g CC = XX
g DD = YY
```

Exemplo 1.25 *Seja* $h : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $h(x, y) = 3x+5y$*, calcule* $h(3, 1) = 3(3) + 5(1) = 14$*. Faz sentido* $h(4, 7.7)$*? Não, pois* $7.7 \notin \mathbb{Z}$*. Cuidado, se tivessemos* $h(x, y) = 3y + 5x$*,* $h(3, 1) = 3(1) + 5(3) = 18$*.*

Exemplo 1.26 *Seja* $w : \mathbb{Z}\times B \to \mathbb{Z}$*, onde* $B = \{xx, yy, zz\}$*, dada por* $w(n, xx) =$

$3n$, $w(n, yy) = 3n + 1$, $w(n, zz) = 3n + 2$. Ou podemos escrever também:

$$w(n,a) = \begin{cases} 3n & , \ \textit{se } a = xx \\ 3n+1 & , \ \textit{se } a = yy \\ 3n+2 & , \ \textit{se } a = zz. \end{cases}$$

Calcule $w(7, yy) = 3(7){+}1 = 22$, $w(7, zz) = 3(7){+}2 = 23$, $w(7, xx) = 3(7) = 21$.

Exemplo 1.27 *Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{x, y, z\}$ e $v : A \cup B \to \mathbb{Z}$ dada por*

$$v(t) = \begin{cases} 5 & , \ \textit{se } t \in A \\ 7 & , \ \textit{se } t \in B \end{cases}$$

Lembre-se que $A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}$. Calcule $v(a) = 5$ e $v(z) = 7$. Faz sentido $v(5)$? Não, pois $5 \notin A \cup B$.

Símbolo	Explicação
$\in$	Pertence. Verifica se está ou não em conjunto.
$\notin$	Não pertence. Verifica se o elemento não está no conjunto.
$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\vert$	Separador, lê-se "tal que".
$\wedge$	Conjunção (E), uma coisa E outra são verdadeiras.
$<$	Comparação, menor que.
$\subset$	Verifica se um conjunto está todo contido dentro de outro.
$\not\subset$	Verifica se um conjunto não está todo contido dentro de outro.
$\subseteq$	Verifica se um conjunto está todo contido dentro de outro ou é o próprio.
$\cup$	União de conjuntos
$\cap$	Intersecção de conjuntos
$\setminus$	Diferença de conjuntos
$\times$	Produto cartesiano entre conjuntos

Exercício 1.1 *Dado os conjuntos abaixo, indique seus elementos:*

- $A = \{3n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 4 \wedge n < 30\}$
- $A = \{n + 7 | n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \wedge n < 10\}$
- $A = \{5n - 4 | n \in \mathbb{N} \wedge n > 0 \wedge n < 19\}$
- $A = \{8 | n \in \mathbb{N} \wedge n > 10 \wedge n < 20\}$
- $A = \{n - 44 | n \in \mathbb{N} \wedge n > 50 \wedge n < 60\}$

Exercício 1.2 *Construa um conjunto N constitudo das letras de seu nome. Qual o tamanho deste conjunto? Qual é o conjunto $\mathcal{P}(N)$?*

Exercício 1.3 *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e $Z = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n > 0 \wedge n < 1\}$, calcule:*

- $\mathbb{N} \cup Z$
- $\mathbb{N} \cap Z$
- $\mathbb{N} \backslash Z$
- $Z \cup Z$
- $\mathcal{P}(Z)$

Exercício 1.4 *Seja* $A = \{4, 7\}$, *calcule* $\mathcal{P}(A)$.

Exercício 1.5 *Seja* $F = \{f, a, t, e, c\}$, *a partir das operações de conjuntos (união, diferença e intersecção) com quaisquer outros conjuntos relevantes, construa* $F' = \{t, e\}$

Resposta 1.1 $F = \{f, a, t, e, c\}$.

1. $X = F \backslash \{f\} = \{a, t, e, c\}$
2. $Y = X \backslash \{a\} = \{t, e, c\}$
3. $F' = Y \backslash \{c\} = \{t, e\}$

ou $F' = \{f, a, t, e, c\} \backslash \{f, a, c\} = \{t, e\}$ *ou* $F' = \{f, a, t, e, c\} \cap \{t, e\} = \{t, e\}$

Exercício 1.6 *Seja* $F = \{h, a, s, k, e, l\}$, *a partir das operações de conjuntos (união, diferença e intersecção) com quaisquer outros conjuntos relevantes, construa* $F' = \{a, s, k\}$

Exercício 1.7 *Reescreva, em notação de construtor de conjuntos (Exemplo 9, por exemplo), os seguintes conjuntos:*

1. $X = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$
2. $X = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
3. $X = \{510, 511, 512, 513, 514, 515, 516\}$
4. $X = \{8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32\}$
5. $X = \{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$
6. $X = \{12\}$
7. $X = \emptyset$
8. $X = \{\emptyset, \{1\}\}$

Exercício 1.8 *Quantos elementos possui o conjunto* $X = \{e, t, e, c\}$*? Qual é o conjunto das partes de* X*?*

Exercício 1.9 *Usando apenas conjuntos com um elemento e operações de conjuntos, construa os seguintes outros conjuntos:*

1. $X = \{o, i\}$
2. $X = \{verde, vermelho, laranja, branco, roxo\}$
3. $X = \{7, 8, 9, 10\}$
4. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
5. $X = \{14, 19, 777\}$

Exercício 1.10 *Considere como universo o conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$*, calcule:*

1. A^c*, onde* $A = \{4, 5, 6\}$*. Resp:* $A^c = \mathbb{N} \backslash \{4, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, ...\}$ *ou* $A^c = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 4 \wedge n \neq 5 \wedge n \neq 6\}$
2. A^c*, onde* $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$
3. A^c*, onde* $A = \{54\}$
4. A^c*, onde* $A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, ...\}$*. Resp:* $A^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, ...\}$*. Ou* $A^c = \{k | k \in \mathbb{N} \wedge k$ *não é múltiplo de 5*$\}$.

```
[k | k <- [0..100],mod k 5 /= 0]
```

5. $\mathbb{N}^c$
6. $\emptyset^c$

Exercício 1.11 *Seja* $A = \{5, 7\}$*, calcule* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$*. Qual o tamanho desse conjunto?*

Exercício 1.12 *Calcule* $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$*. Qual o tamanho desse conjunto?*

Exercício 1.13 *Seja* A *um conjunto qualquer. Quem é o conjunto* $A \cap \emptyset$*?. E* $A \backslash \emptyset$*?*

Exercício 1.14 *De um total de 40 alunos, 28 gostam das disciplinas de administração e 15 das disciplinas de matemática. Quantos alunos gostam de ambas?*

Exercício 1.15 *De um total de 100 pessoas, 77 gostam de uma marca A e 40 gostam ao mesmo tempo da marca A e de outra marca B. Quantas pessoas gostam apenas da marca B?*

Exercício 1.16 *Um grupo de 200 pessoas esperam um evento em uma sala A e outro grupo de 150 pessoas esperam em uma sala B. Quantas duplas possíveis podemos fazer contendo pessoas da sala A e da sala B?*

Exercício 1.17 *Seja* $U = \{*\}$ *e um conjunto* A *não-vazio. Calcule:*

1. $|A \times U|$

2. $|U \times A|$
3. $|U \times U|$
4. $|A \times \emptyset|$

Exercício 1.18 *Considere* $U = \{*\}$ *e* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Liste todos os elementos de:*

1. $B \cup U$
2. $U \times B$
3. $B \times U$
4. $U \times U$
5. $B \cap U$
6. $U \cap U$

Exercício 1.19 *Seja* A *e* B *conjuntos não-vazios e diferentes. Indique se é verdadeiro ou falso as seguintes expressões:*

1. $|A| > 0$
2. $|B| = 0$
3. $A \cap A = A$
4. $B \cup B = B$
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
6. $B \cap \emptyset = B$
7. $B \cap \emptyset \neq B$
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$
9. $A \cup \emptyset = A$
10. $A \subset \mathcal{P}(A)$
11. $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$
12. $\mathcal{P}(A) \subset A$
13. $A \times B = B \times A$
14. $A \times \emptyset = \emptyset$

Exercício 1.20 *Considere* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dado por* $f(n) = n + 15$, *calcule* $f(140)$, $f(0)$ *e* $f(5)$. *Faz sentido* $f(-12)$*?*

Exercício 1.21 *Considere* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dado por* $f(n) = n + 15$. *Faz sentido* $f(-12)$*?*

Exercício 1.22 *Considere o conjunto* $\{(0,8),(1,9),(2,10),(3,11),(4,12),...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Escreva uma função e sua lei de formação usando uma variável para descrever este conjunto.*

Exercício 1.23 *Considere o conjunto* $A = \{1,2,3\}$ *e* $B = \{4,7,10\}$ $f = \{(1,7),(2,10),(3,4)\} \subset A \times B$. *Escreva uma função para descrever este conjunto* f.

Exercício 1.24 *Considere o conjunto* $A = \{1,2,3\}$ *e* $B = \{4,7,10\}$ $f = \{(1,7),(1,10),(3,4)\} \subset A \times B$. *É possível escrever uma função para descrever este conjunto* f*? Justifique.*

Exercício 1.25 *Considere o conjunto* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,7,10\}$ *e* $f = \{(1,7),(2,7),(3,4)\} \subset A \times B$. *Escreva uma função para descrever este conjunto* f. *Liste os elementos de* $Im(f)$.

Exercício 1.26 *Considere a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por* $f(n) = n + 10$. *Liste alguns elementos de* $Im(f)$. *É verdade que* $7 \in Im(f)$*?*

Exercício 1.27 *Considere a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por* $f(n) = 2n + 31$. *Liste alguns elementos de* $Im(f)$. *É verdade que* $58 \in Im(f)$*?*

Exercício 1.28 *Considere* $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *dado por* $s((x,y)) = s(x,y) = x + y$ *(não precisamos usar os parênteses extra). Calcule:*

1. $s(1,1)$
2. $s(1,2)$
3. $s(3,4)$
4. $s(9,7)$
5. *Faz sentido* $s(-9,1)$, $s(4,-5)$ *e* $s(-7,-3)$*?*

Exercício 1.29 *Seja* $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$. *Considere* $g : A \cup B \to \{t,f\}$ *dada por*

$$g(x) = \begin{cases} t & , \text{ se } x \in A \\ f & , \text{ se } x \in B \end{cases}$$

Calcule:

1. $g(1)$
2. $g(2)$
3. $g(a)$

4. $g(b)$
5. $g(c)$
6. $g(3)$
7. *Faz sentido* $g(4)$*?*

Exercício 1.30 *Considere* $A = \{a, b, c\}$ *e* $f : \mathcal{P}(A) \to \mathbb{N}$ *dada por* $f(X) = |X|$ *(a função recebe um subconjunto de* A *e retorna seu tamanho). Liste todas as possíveis entradas e saídas de* f*. Listarei duas e vocês completam.*

- $f(\{a\}) = 1$
- $f(\{a, c\}) = 2$

Chapter 2

Conjuntos Numéricos

O objetivo deste capítulo é estudar a estrutura dos conjuntos $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ (conjunto dos números inteiros, racionais e reais respectivamente). O números naturais $\mathbb{N}$ não serão foco aqui por ter pouca estrutura para estudar. Aborderemos como é feita a aritmética básica nos conjuntos inteiros e racionais.

2.1 Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros possui o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ como subconjunto e temos também o conceito de número negativo (como se fosse uma dívida bancária). Neste conjuntos conseguimos realizar 3 das quatro operações aritméticas (soma, subtração e a multiplicação). A divisão existe porém não é definida sempre (não é bem comportada), por isso há uma área que estuda tal propriedade de divisibilidade e afins chamada Teoria dos Números. O conjunto dos número inteiros é denotado por $\mathbb{Z}$, em Alemão *Zahlen (número).*

Definição 2.1 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$

Pode-se definir duas operações aritméticas conhecidas e a multiplicação.

Definição 2.2 *(Adição) é a operação binária (função de dois parâmetros)* $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*. Para escrevermos uma soma (adição) podemos usar a notação prefixa* $+(4, 5) = 9$ *ou infixa* $4 + 5 = 9$*.*

Definição 2.3 *(Multiplicação) é a operação binária (função de dois parâmetros)* $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*. Para escrevermos um produto (multiplicação) podemos usar a notação prefixa* $\cdot(4, 5) = 20$ *ou infixa* $4 \cdot 5 = 20$*, ou* $4(5) = 20$*, ou como em muitos lugares* $4 \times 5 = 20$*. O símbolo* $\times$*, neste trabalho, será usado apenas como produto cartesiano. Quando tratarmos de variáveis usaremos a concatenação delas para representar uma multiplicação, ou seja* xy *é o mesmo que* $x \cdot y$*. A multiplicação é definida em relação à soma, ou seja,* $4 \cdot 5 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$*. Genericamente,*

$$nm = \underbrace{m + m + m + ... + m}_{n \text{ vezes}} \tag{2.1}$$

As duas operação possuem as seguintes propriedades.

1. *(Fechamento $+\ \cdot$) Se* $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}$ *então* $a+b \in \mathbb{Z}$ *e* $ab \in \mathbb{Z}$.
2. *(Associatividade +)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ (x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$.
3. *(Neutro)* $(\exists u \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\ u+x = x+u = x$. *Temos que* $u = 0$. *Por exemplo,* $5+0 = 0+5 = 5$. *Isso nos diz que o número 0 é irrelevante na soma.*
4. *(Oposto)* $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists e \in \mathbb{Z})\ e+x = x+e = 0$. *Temos que* $e = -x$. *A expressão* $6+(-6) = 6-6 = 0$. *O elemento* -6 *é chamado de oposto de 6. O oposto de* -4 *é* 4.
5. *(Comutatividade +)* $\forall x, y \in \mathbb{Z}\ x+y = y+x$. *A ordem das parcelas não altera a soma.*
6. *(Associatividade $\cdot$)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$.
7. *(Unidade)* $(\exists u \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{Z})\ u \cdot x = x \cdot u = x$. *Temos que* $u = 1$. *Por exemplo,* $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$. *Isso nos diz que o número 1 é irrelevante na multiplicação.*
8. *(Comutatividade $\cdot$)* $\forall x, y \in \mathbb{Z}\ x \cdot y = y \cdot x$. *A ordem dos fatores não altera o produto.*
9. *(Distributiva)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$. *Vale também que* $(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

A divisão entre números inteiros é um caso a parte e não possui as propriedades listadas.

Definição 2.4 *A divisão inteira* a/b*, ou algoritmo da divisão, é quando achamos um quociente* q *e um resto* r *tal que*

$$a = bq + r \tag{2.2}$$

Quando $r = 0$ *dizemos que* b *é um divisor de* a. *Observa-se que* $r < b$.

Exemplo 2.1 *Queremos dividir 93 por 11, temos que*

$$93 = 11 \cdot 8 + 5 \tag{2.3}$$

Temos que o quociente é 8 e o resto 5.

Exemplo 2.2 *Queremos dividir 18 por 9*

$$18 = 9 \cdot 2 + 0 \tag{2.4}$$

O quociente é 2 e o resto é 0. Logo, 9 é divisor de 18.

Dado dois números inteiros conseguimos definir o máximo divisor comum entre os mesmos. Esta operação será útil quando tivermos que manipular frações.

Definição 2.5 *Dado $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, define-se o máximo divisor comum entre a e b, ou $mdc(a, b)$, ou, em inglês, $gcd(a, b)$ como o maior divisores mútuo entre os dois números. Dois números $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ são ditos primos entre si se $mdc(a, b) = 1$. Um lembrete, um número é dito primo se ele possui apenas 1 e ele mesmo como divisor.*

Exercício 2.1 *Calcular: $mdc(16, 14) = 2$*
$Divisores(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
$Divisores(14) = \{1, 2, 7, 14\}$
$Divisores(16) \cap Divisores(14) = \{1, 2\}$. *Pegamos o maior elemento do conjunto* $\{1, 2\}$

Exercício 2.2 *Calcular: $mdc(15, 10) = 5$*
$Divisores(15) = \{1, 3, 5, 15\}$
$Divisores(10) = \{1, 2, 5, 10\}$
$Divisores(15) \cap Divisores(10) = \{1, 5\}$. *Pegamos o maior número que é 5.*

Observação 2.1 *Divisores é uma função $\mathbb{Z} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $Divisores(n) = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq 1 \wedge x \leq n \wedge mod(n, x) = 0\}$. Note que mod significa modulus em inglês que nada tem a ver com o módulo em português. Em inglês o módulo é chamado de absolute value (abs). A expressâo $mod(n, x)$ extrai o resto da divisão entre a e b.*

2.2 Números Racionais

Um número racional é construído a partir de um par ordenado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, com a propriedade desse pode ser reduzindo usando o máximo comum até que se encontre $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ até que $mdc(c, d) = 1$, ou seja c, d primos entre si.

Definição 2.6 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \wedge mdc(a, b) = 1\}$. *Ao invés de escrevermos em forma de par ordenado, escrevemos em forma de fração.*

Exemplo 2.3 *Considere os números.*

1. $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{7}{1} \in \mathbb{Q}$, *escrevemos* $\frac{7}{1} = 7$
3. $\frac{2}{0} \notin \mathbb{Q}$
4. $\frac{75}{9} = \frac{25}{3} \in \mathbb{Q}$. *note que o $mdc(75, 9) = 3$, portanto dividimos 75 por 3 e 9 por 3.*
5. $\frac{81}{18} = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q}$

Nos números é possível também definir as operações aritméticas de soma e multiplicação.

Definição 2.7 *A soma é definida pela operação* $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.4 *Calcular* $\frac{2}{7} + \frac{3}{8} = \frac{16+21}{56} = \frac{37}{56}$.

Exemplo 2.5 *Calcular* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$.

Exemplo 2.6 *Calcular* $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5+10}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$.

Definição 2.8 *A multiplicação é definida pela operação* $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.7 *Calcular* $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50}$.

Exemplo 2.8 *Calcular* $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$.

As mesmas propriedades que valem para os números inteiros são válidas também para os números racionais. No caso dos números racionais todo elemento possui um inverso multiplicativo, ao passo que apenas ± 1 *possui tal inverso no conjunto numérico dos inteiros.*

1. *(Fechamento + ·) Se* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *e* $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ *então* $\frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$ *e* $\frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$.

2. *(Associatividade +)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\ (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.

3. *(Neutro)* $(\exists u \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{Q})\ u + x = x + u = x$. *Temos que* $u = \frac{0}{b} = 0$ *com* $b \neq 0$.

4. *(Oposto)* $(\forall x \in \mathbb{Q})(\exists e \in \mathbb{Q})\ e+x = x+e = 0$. *Temos que* $e = -x$. *O oposto de* $\frac{5}{4}$ *é* $-\frac{5}{4}$

5. *(Comutatividade +)* $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ x + y = y + x$. *A ordem das parcelas não altera a soma.*

6. *(Associatividade ·)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$.

7. *(Unidade)* $(\exists u \in \mathbb{Q})(\forall x \in \mathbb{Q})\ u \cdot x = x \cdot u = x$. *Temos que* $u = \frac{b}{b} = 1$ $b \neq 0$.

8. *(Inverso)* $(\forall x \in \mathbb{Q})(x \neq 0)(\exists e \in \mathbb{Q})\ e \cdot x = x \cdot e = 1$. *Temos que* $e = \frac{1}{x}$. *por exemplo, o inverso de* 5 *é* $\frac{1}{5}$, *pois,* $\frac{1}{5} \cdot 5 = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$. *O inverso de* $\frac{1}{5}$ *é* 5, *pois* $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 1 \cdot \frac{5}{1} = 5$.

9. *(Comutatividade ·)* $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ x \cdot y = y \cdot x$. *A ordem dos fatores não altera o produto.*

10. *(Distributiva)* $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. *Vale também que* $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Exemplo 2.9 *Calcular* $\frac{10}{3} \cdot 18 = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 18$, *pela associatividade da multiplicação fazer a conta pelo lado direito, ou seja, calcular* $10 \cdot (\frac{1}{3} \cdot 18) = 10 \cdot \frac{18}{3} = 10 \cdot 6 = 60$. *As propriedades facilitam a manipulação de expressões que envolvem frações.*

Exemplo 2.10 4% *de 50 é o mesmo que* 50% *de 4. Calculando temos,* $\frac{4}{100} \cdot 50 = 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 50 = 4 \cdot (\frac{50}{100})$, *logo temos* 50% *de 4.*

Um ponto a se levantar é quando dividimos dois números racionais, nesse caso a fração do numerador se mantém e do denominador se inverte (inverso multiplicativo).

Exemplo 2.11 *Seja* $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ *e* $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, *temos que* $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. *Por exemplo,* $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{8}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{8}{9} = \frac{3 \cdot 8}{7 \cdot 9} = \frac{3 \cdot 8}{9 \cdot 7} = \frac{3}{9} \cdot \frac{8}{7} = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{7} = \frac{8}{21}$. *A comutatividade da multiplicação de inteiros nos permitiu a trocar a ordem das frações.*

2.3 Números Reais

Os números reais são números que podem ser racionais (escritos em forma de fração ou expansão decimal finita ou expansão decimal infinita e periódica) ou irracionais (números que não ser escritos em forma de fração ou números com expansão decimal infinita e sem período). Números como $\sqrt{2}$ *e o* π *são exemplos de números que não podem ser escritos em forma de fração (irracionais). A maneira de construir esse conjunto é bastante complexa e possui uma área especializada para tal fim chamada de análise real. Denotamos esse conjunto como* $\mathbb{R}$. *Neste trabalho usaremos os números reais para estudar potenciação, radiação, equações de primeiro e segundo grau, funções, distâncias e limites.*

2.4 Potenciação e Radiciação

A potenciação é uma operação que consiste em aplicar a replicar várias vezes a multiplicação de um determinado número. A radiciação opera como uma "operação inversa" da potenciação e também pode ser vista quando replicação uma quantidade fracionária de vezes a multiplicação de um número.

Definição 2.9 *Dado* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, *temos que* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n\ vezes}$. *Porém podemos definir* a^b *onde* $b \in \mathbb{R}$. *Lê-se a elevado a potência b.*

Exemplo 2.12 $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. *Lê-se 7 elevado a 3 (ao cubo).*

A operação de potenciação, em Haskell, é representada pelo operador $\wedge$, *ou seja,* $7 \wedge 3 = 343$. *Matematicamente, a potenciação possui algumas propriedades úteis para sua manipulação.*

1. *Seja* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *então* $a^0 = 1$.
2. *Seja* $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a^b \cdot a^c = a^{(b+c)}$
3. *Seja* $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
4. *Seja* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$. *Genericamente, seja* $b \in \mathbb{R}$ $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.
5. *Seja* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$ *com* $a \neq 0$.
6. *Seja* $a, b, c \in \mathbb{R}$ $a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$. *Válido por causa da comutatividade da multiplicação. Por exemplo,* $5^2 \cdot 4^2 = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) = (5 \cdot 4)^2$
7. *Seja* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\frac{a^c}{b^c} = (\frac{a}{b})^c$.

A radiciação ocorre quando os expoentes são números racionais.

Definição 2.10 *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *e* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, *definimos a raiz n-esima de* a^m *por* $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplo 2.13 $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$ *e* $\sqrt[11]{25} = \sqrt[11]{5^2} = 5^{\frac{2}{11}}$.

Exemplo 2.14 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

Exemplo 2.15 $\sqrt[11]{4} \cdot \sqrt[7]{4} = 2^{\frac{2}{11}} \cdot 2^{\frac{2}{7}} = 2^{\frac{2}{11} + \frac{2}{7}} = 2^{\frac{14+22}{77}} = 2^{\frac{36}{77}}$

Em Haskell, para calcular $2^{\frac{36}{77}}$, *usamos a expressão* $2**(36/77)$, *que nos exibirá um resultado aproximado (aritmética de ponto flutuante) do valor real. Para raízes quadradas pode-se usar a função sqrt.*

2.5 Exercícios

Exercício 2.3 *Calcule:*

- *mdc(1,18)*
- *mdc(18999,7853)*
- *mdc(18,3)*
- *mdc(21,7)*
- *mdc(77,121)*
- *mdc(169,13)*
- *mdc(1000000,5000)*

Exercício 2.4 *Efetue a divisão inteira das expressões abaixo.*

- *9/5*
- *13/4*
- *177/99*
- *16040/72*
- *389176/2345*
- *111/22*
- *247/89*
- *1890167/46*

Exercício 2.5 *Exiba dois números primos entre si.*

Exercício 2.6 *Seja $a \in \mathbb{Z}$, ache um valor de a que satisfaça $mdc(a, 77) = 7$.*

Exercício 2.7 *Escolha dois inteiros a, b tal que $mdc(a, b) = 29$*

Exercício 2.8 *Reduza até a forma irredutível*

1. $\frac{666}{777}$
2. $\frac{1000}{50}$
3. $\frac{75}{100}$
4. $\frac{175}{100}$
5. $\frac{215}{100}$
6. $\frac{60}{90}$
7. $\frac{1900}{3800}$

Exercício 2.9 *Efetue as expressões*

1. $\frac{5}{6} - \frac{1}{7} + \frac{2}{9}$
2. $\frac{5}{6} \cdot (\frac{1}{7} + \frac{2}{9})$
3. $\frac{2}{\frac{4}{30}}$
4. $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{9}}$
5. $5 \cdot (\frac{15}{25} + \frac{71}{5})$

Exercício 2.10 *Quanto é 10% de 24 horas em minutos?*

Exercício 2.11 *Um professor ganha 50 reais por hora, quanto ele receberá de salário bruto se ele trabalhar 80 horas no mês?*

Exercício 2.12 *Calcule:*

1. 5^2
2. 7^4
3. $\frac{200^2-199^2}{399}$
4. $\sqrt[300]{2^{300}}$
5. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$
6. $5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$
7. $5^6 \cdot 25$

Exercício 2.13 *Quanto é a metdade de* 2^{650}*?*

Exercício 2.14 *Calcule* $4^{50\%}$

Exercício 2.15 *Seja* $x, y \in \mathbb{R}$*, calcule:*

1. $(x+y)^2$
2. $(x-y)^2$
3. $(x+y)^3$
4. x^2-y^2

Chapter 3

Equações, Inequações e Sistemas Lineares

Primeiramente começaremos com a noção de igualdade segundo a teoria dos conjuntos para enterdemos melhor as equações. Depois a relação de ordem para estudarmos a inequações. E finalmente algoritmos para a solução de sistemas lineares.

3.1 A noção de igualdade

Para entendermos como se resolve uma equação precisamos entender o funcionamento da igualdade como relação de conjuntos. O famoso "passa pra cá, passa pra lá" é consequência direta do entendimento dessde conceito que nem sempre é abordado no ensino convencional.

Definição 3.1 *Dado um conjunto A, uma relação de equivalência (igualdade) é o subconjunto $R \subseteq A \times A$ que satisfaz as propriedades:*

- *(reflexividade)* $(a, a) \in R$, *ou também* aRa.
- *(simetria) Se* $(a, b) \in R$ *então* $(b, a) \in R$. *Ou, se vale* aRb, *vale* bRa
- *(transitividade) Se* $(a, b) \in R$ *e* $(b, c) \in R$, *temos que* $(a, c) \in R$. *Ou, se* aRb *e* bRc, *temos que* aRc.

A noção de igualdade de elementos de um mesmo conjunto A, $=$ *é um subconjunto* $A \times A$ *que satisfaz as 3 propriedades listadas.*

Exemplo 3.1 *Se* $A = \{1, 2, 3\}$, $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$, *a relação* $R \subseteq A \times A$ *que representa a igualdade é* $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

a congruência é uma propriedade da igualdade que diz que se aplicarmos uma função nos dois lados da igualdade, ela deve se manter.

Definição 3.2 *(Congruência) Dado $f : A \to B$ e $x, y \in A$ tal que $x = y$, temos que vale $f(x) = f(y)$ como igualdade do conjunto B.*

As propriedades da congruência e da reflexividade, simetria e transitividade são essenciais para um melhor entendimento de muitas identidades (equações) que aparecem o tempo todo ao se estudar matemática. Por exemplo, uma equação de primeiro grau pode ser resolvida usando sucessivas aplicações da regra da congruência de modo a isolar uma variável.

3.2 Equações

É uma uma igualdade entre expressões numéricas ao qual uma delas possuirá uma variável (indeterminada).

Definição 3.3 *(Equação linear) Dado $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ conhecidos e $x \in \mathbb{R}$ não conhecido, temos que a equação linear é dada por:*

$$ax + b = 0$$

Para resolver essa equação devemos ter em mente as propriedas da igualdade. Usa-se a congruência, num primeiro passo, para isolar b. A função em questão será $f(z) = z - b$.

$$f(ax + b) = f(0)$$

Mas $f(0) = 0 - b = -b$, $f(ax + b) = (ax + b) - b = ax + (b - b) = ax + 0 = ax$, portanto sobra,

$$ax = -b$$

usando novamente a congruência com a função $g(z) = \frac{z}{a}$, o segundo passo é aplicar g aos dois lados.

$$g(ax) = g(-b)$$

Temos que $g(ax) = \frac{ax}{a} = x$ e $g(-b) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a}$, nos dando

$$x = -\frac{b}{a}$$

resolvendo a equação. A equação foi resolvida pois a única de termos a igualdade é x sendo $-\frac{b}{a}$ e nenhum outro valor mais.

Exemplo 3.2 *Resolver $3x - 2 = 10$.*

- *Tome $f(z) = z+2$, use a congruência para obter $f(3x-2) = (3x-2)+2 = 3x + (-2 + 2) = 3x + 0 = 3x$ e $f(10) = 10 + 2 = 12$, logo*

$$3x = 12.$$

- *Tome $g(z) = \frac{z}{3}$, use a congruência para obter $g(3x) = \frac{3x}{3} = x$, $g(12) = \frac{12}{3} = 4$, nos dando*

$$x = 4.$$

3.3 Equações de segundo grau

Podemos ter uma equação onde a variável incógnita está na segunda potência, quando isso ocorre a técnica para resolvê-la é diferente do que a visto anteriormente.

Definição 3.4 *Uma equação quadrática ou de segundo grau é da forma*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$.

Para resolvermos a equação acima devemos utilizar os seguintes passos:

1. *Dividir ambos os lados (congruência) por a.*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

2. *Diminuir ambos os lados por* $-\frac{c}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3. *Para completar o quadrado, deve-se somar* $\frac{b}{2a}$ *em ambos os lados da igualdade.*

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

4. *Usando o produto notável (ver exercício do capítulo anterior)*

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

5. *Extrair a raiz quadrado em ambos os lados (ou elevar a meio)*

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

6. *Diminuir ambos os lados por* $-\frac{b}{2a}$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{(2a)^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

7. *Fazer a conta de frações*

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{ab^2 - 4a^2c}{4a^3}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{a(b^2 - 4ac)}{4a^3}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8. *Chame de* $\Delta = b^2 - 4ac$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Note que $\Delta \geq 0$, *caso* $\Delta < 0$ *não temos solução nos números reais (apenas com os números complexos). Se* $\Delta > 0$, *teremos dois valores possíveis para* x *e se* $\Delta = 0$ *teremos um valor possível apenas.*

Exemplo 3.3 *Resolver* $x^2 - 13x + 40 = 0$. *Temos* $a = 1$, $b = -13$ *e* $c = 40$. $\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9$. *A solução é dada por*

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{2}$$

Como $\Delta > 0$ *temos duas soluções possíveis*

$$x_1 = \frac{13 + 3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{13 - 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Logo as soluções são 8 e 5. Ou, em forma de conjunto solução, $S = \{5, 8\}$.

Outro método de solução é supondo conhecido as raízes x_1 e x_2, temos que

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Equalizando termo a termo temos que

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$$

multiplicando por (-1) ambos os lados e invertendo a equação, temos

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e, finalmente,

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

O método chama-se fórmula (relações) de Vieta.

Exemplo 3.4 *Resolver $x^2 - 21x + 110$. $a = 1$, $b = -21$ e $c = 110$. Usando a fórmula de Vieta, temos*

$$x_1 + x_2 = -(-21) = 21$$

$$x_1x_2 = 110.$$

Logo, $x_1 = 11$ e $x_2 = 10$. Ou $S = \{10, 11\}$.

Em Haskell, o programa a seguir resolve qualquer equação de segundo grau.

```haskell
delta :: Double -> Double -> Double -> Double
delta a b c = b*b - 4*a*c

solucao :: Double -> Double -> Double -> (Double, Double)
solucao a b c
    | d >= 0 = ((- b + sqrt d)/2*a, (- b - sqrt d)/2*a)
    | d < 0 = error "Nao ha solucao"
    where
        d = delta a b c
```

Para resolver o exemplo anterior

```
Equacao> solucao 1 (-21) 110
Equacao> (11.0,10.0)
```

3.4 A noção de relação de ordem

A ordem, por exemplo $\leq$, também é uma relação de conjunto, assim como a igualdade.

Definição 3.5 *Dado um conjunto A, uma relação de ordem (parcial) é o subconjunto $R \subseteq A \times A$ que satisfaz as propriedades:*

- *(reflexividade) $(a, a) \in R$, ou também $a \leq a$.*
- *(anti-simetria) Se $a \leq b$ e $b \leq a$. Então $a = b$*
- *(transitividade) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, temos que $a \leq c$.*

Um ponto a se levantar é que no caso de uma relação de ordem, a propriedade da congruência válida no caso de uma relação de equivalência possui uma versão diferente. Dado $f : A \to B$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

quer dizer que f é crescente, por exemplo, soma e subtração em ambos os lados e multiplicação por positivos, ou seja, $f(x) = ax + b$ com $a > 0$ é um exemplo. Ao passo que

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y),$$

nos indica que a função é decrescente. Por exemplo quando $f(x) = ax + b$ com $a < 0$ ou quando tomamos recíprocos $f(x) = \frac{1}{x}$.

3.5 Intervalos

Muitos subconjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ podem ser escritos em forma de intervalo. Um intervalo é uma representação de um segmento da reta real.

Definição 3.6 *Um intervalo é um segmento da reta real e pode ser classificado de algumas formas:*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a \wedge x \leq b\}$. *Note que $a \leq b$, $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$ e $\frac{a+b}{2} \in [a, b]$. Intervalo fechado.*
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a \wedge x < b\}$. *Note que $a < b$, $a \in [a, b[$, $b \notin [a, b[$ e $\frac{a+b}{2} \in [a, b[$. Intervalo semi-aberto.*
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | x > a \wedge x \leq b\}$. *Note que $a < b$, $a \notin]a, b]$, $b \in]a, b]$ e $\frac{a+b}{2} \in]a, b]$. Intervalo semi-aberto.*
4. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | x > a \wedge x > b\}$. *Note que $a < b$, $a \notin]a, b[$, $b \notin]a, b[$ e $\frac{a+b}{2} \in]a, b[$. Intervalo aberto.*
5. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$.

6. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$.
7. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.
8. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.

Exemplo 3.5 *$I = [1,2] \cup]3,4] \cup]10, +\infty[$. $5 \notin I$, $3 \notin I$, $\frac{3}{2} \in I$, $12 \in I$, $4.7 \in I$, ...*

3.6 Inequações

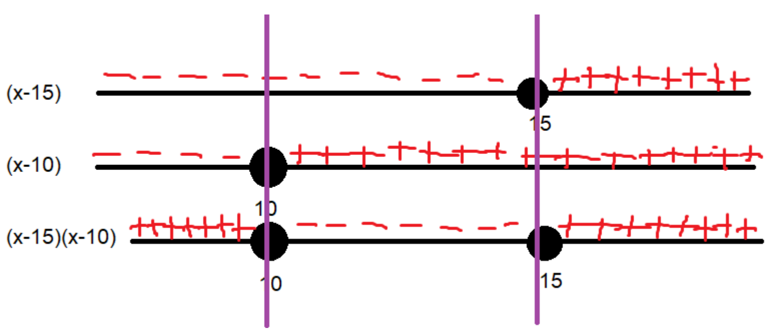
um método possível para se resolver inequações tanto de primeiro quanto de segundo grau é o do do varal. O método consiste em solucionar primeiramente a equação e depois raciocinar sobre a inequação.

Exemplo 3.6 *Resolver $3x - 8 \leq 0$.*

1. *Resolva a equação $3x - 8 = 0$. esolvendo temos que $x = \frac{8}{3}$*
2. *Escolha um ponto maior que $\frac{8}{3}$ (3) e um menor que $\frac{8}{3}$ (2).*
3. *Substitua 3 em x na expressão $3x - 8$, isso nos dá $3(3) - 8 = 9 - 8 = 1$. Para checar substitua 2 em $3x - 8 = 3(2) - 8 = 6 - 8 = -2$.*
4. *$S =]-\infty, \frac{8}{3}]$*

Exemplo 3.7 *Resolver $x^2 - 25x + 150 \geq 0$*

1. *Resolva a equação $x^2 - 25x + 150 = 0$. Pela fórmula de Vieta temos que $x_1 = 15$ e $x_2 = 10$.*
2. *Resolver a inequação $x - 15 \geq 0$*
3. *Resolver a inequação $x - 10 \geq 0$*
4. *Usar a intersecção e as regras da multiplicação*



5. *$S =]-\infty, 10] \cup [15, +\infty[$*

3.7 Exercícios

Exercício 3.1 *Resolva a equação*

$$27x - 90 = 112$$

Exercício 3.2 *Seja $a \in \mathbb{R}$ sua idade e b o número do mês de seu nascimento. Resolva a equação*

$$ax + b = 15$$

Exercício 3.3 *Resolva a equação em y*

$$(\sqrt{2})y - 10 = 0$$

Exercício 3.4 *Resolva a equação:*

$$\frac{3}{4}x - \frac{7}{50} = \frac{6}{77}$$

Exercício 3.5 *Resolva a equação em x*

$$10ax + k = m$$

com $a \neq 0$.

Exercício 3.6 *Explique o motivo de $a \neq 0$ (a não ser igual a 0) para termos uma equação linear $ax + b = 0$ válida.*

Exercício 3.7 *Resolva a equação e mostre TODOS os passos necessários.*

$$23x - 15 = 8$$

Exercício 3.8 *Considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Exiba 10 elementos da relação $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que representa uma relação de equivalência de $\mathbb{N}$*

Exercício 3.9 *Um professor ganha 40 reais por hora, quantas horas de trabalho são necessárias para ele ganhar 5200 reais?*

Chapter 4

Matrizes e sistemas lineares

4.1 Sistemas Lineares

Um sistema de equções lineares é quando temos várias equações que envolvem várias variáveis. Dois métodos básicos serão investigados em um primeiro momento e depois será investigado a forma matricial de um sistema linear.

Definição 4.1 *Um sistema linear com duas variáveis e duas equações possuem a forma:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{4.1}$$

Nota-se que $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e x, y são incógnitas.

Um método para solucionar um sistema linear é o de substituição.

Definição 4.2 *(Método da substituição) esse método consiste em isolar uma das variáveis na primeira equação e substituir na segunda, eliminando assim uma das variáveis. Por exemplo, queremos isolar x no sistema:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{4.2}$$

para isso devemos subtrair by dos dois lados na primeira equação e dividir depois por a (assumimos que $a \neq 0$).

$$\begin{cases} x = \frac{c-by}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{4.3}$$

Agora, substitui-se x por $\frac{c-by}{a}$ na segunda equação.

$$d\left(\frac{c-by}{a}\right) + ey = f$$

Agora, sepramos a fração

$$\frac{dc}{a} - \frac{dby}{a} + ey = f$$

Subtraimos a quantidade $\frac{dc}{a}$ *em ambos os lados*

$$-\frac{dby}{a} + ey = f - \frac{dc}{a}$$

Agora, o y fica em evidência.

$$(e - \frac{db}{a})y = f - \frac{dc}{a}$$

Dividimos em ambos os lados pela quantia $(e - \frac{db}{a})$.

$$y = \frac{f - \frac{dc}{a}}{\frac{db}{a} + e}$$

E finalmente substituimos novamente na expressão que possui x (primeira equação).

$$x = \frac{c - b\left(\frac{f - \frac{dc}{a}}{\frac{db}{a} + e}\right)}{a}$$

A fórmula fechada e reduzida para x fica como exercício. Uma observação é que para termos solução devemos ter que $\frac{db}{a} + e \neq 0$.

Exemplo 4.1 *Resolva*

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 2y = 15 \end{cases}.$$

Primeiro passo, isolar x.

$$\begin{cases} x = 9 - y \\ x - 2y = 15 \end{cases}.$$

Substituimos x na segunda equação.

$$9 - y - 2y = 15$$

Resolvemos a equação de primeiro grau em y.

$$9 - 3y = 15$$

$$-3y = 6$$

$$y = -2$$

Agora, substituimos y na primeira equação.

$$x = 9 - y = 9 - (-2) = 11$$

Logo, $x = 11$ *e* $y = -2$

Outro método é quando multiplicamos uma das equações por uma constante e somamos ou subtraimos uma equação da outra de modo a eliminar uma das variáveis.

Definição 4.3 *(Método da eliminação) Dado o sistema:*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} . \tag{4.4}$$

Queremos eliminar x, para isso devemos deixar que o coeficiente de x na primeira equação seja $-d$. Para isso, divide-se a primeira equação por $a \neq 0$ e multiplicamos por $-d$.

$$\begin{cases} x + \frac{by}{a} = \frac{c}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} .$$

$$\begin{cases} -dx - \frac{dby}{a} = \frac{-dc}{a} \\ dx + ey = f \end{cases} .$$

Somando as duas equações, temos que x é eliminado.

$$-\frac{dby}{a} + ey = f - \frac{dc}{a}$$

$$(-\frac{db}{a} + e)y = f - \frac{dc}{a}$$

$$y = \frac{f - \frac{dc}{a}}{e - \frac{db}{a}}$$

Procedemos da mesma maneira para x.

Exemplo 4.2 *Resolva*

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 2y = 15 \end{cases} .$$

Devemos multiplicar por -1 (o oposto do inverso do coeficiente de x que é 1) a primeira equação e somar com a segunda

$$\begin{cases} -x - y = -9 \\ x - 2y = 15 \end{cases} .$$

$$-3y = 6$$

Logo,

$$y = -2$$

Substituindo na primeira equação $y = -2$

$$x - 2 = 9$$

$$x = 11$$

Exemplo 4.3 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases}.$$

Primeiro passo é multiplicar pelo inverso do coeficiente de x na primeira equação, que no caso é 3, logo seu inverso é $\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{10}{3} \\ 8x + y = 7 \end{cases}.$$

O próximo passo é multiplicar pelo oposto do coeficiente de x da segunda equação, que no caso é 8, nos dando -8.

$$\begin{cases} -8x - \frac{16}{3}y = \frac{-80}{3} \\ 8x + y = 7 \end{cases}.$$

Agora é somar as duas equações

$$y - \frac{16}{3}y = 7 - \frac{80}{3}$$

$$\frac{3y}{3} - \frac{16}{3}y = \frac{21}{3} - \frac{80}{3}$$

$$-\frac{13}{3}y = \frac{-59}{3}$$

$$-13y = -59$$

$$y = \frac{-59}{-13} = \frac{59}{13}$$

Substituimos $y = \frac{59}{13}$ na primeira equação.

$$3x + 2\frac{59}{13} = 10$$

Multiplicando tudo por 13 para facilitar

$$39x + 118 = 130$$

$$39x = 12$$

$$x = \frac{12}{39}$$

Logo, $x = \frac{4}{13}$ e $y = \frac{59}{13}$

Exemplo 4.4 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases}.$$

Podemos sempre eliminar se os coeficientes das duas equações (em x) sejam opostos. Nesse caso, multiplica-se, na primeira equação, por -8 que é o oposto de 8 (coeficiente de x na segunda equação). Na segunda equação multiplica-se por 3 para obtermos coeficientes opostos.

$$\begin{cases} -24x - 16y = -80 \\ 24x + 3y = 21 \end{cases}.$$

Somando as duas equações

$$-13y = -59$$

$$y = \frac{-59}{-13} = \frac{59}{13}$$

Para x procede-se da mesma forma que a solução anterior.

Uma observação é que podemos sempre eleiminar y primeiro se bem quisermos.

4.2 Forma matricial de um sistema linear

Definição 4.4 *Uma matrix quadrada 2×2 com coeficientes em $\mathbb{R}$ é o seguinte conjunto $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$. Para matrizes quadradas 2×2 $(n \times n)$ basta indicar com o número em questão abaixo do M. Por exemplo $M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ f & g & h \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R} \right\}$. Para matrizes retangulares, por exemplo (2×3), escrevemos $M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$*

Exemplo 4.5

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

Exemplo 4.6

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -8 & 9 \\ 9 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$$

Todo sistema linear pode ser escrito em forma de matriz, para isso devemos relembrar as operações com matrizes.

Definição 4.5 *(Soma de matrizes) para somarmos duas matrizes de mesma dimensão (mesmas linhas e colunas) devemos somar ordenamente na mesma posição sempre. Por exemplo, $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ com $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, logo $A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$*

Exemplo 4.7 *$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, logo $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$*

Uma observação é que as matrizes satisfazem os axiomas de associatividade, oposto, neutro e comutatividade para a soma (+). No caso de $M_2(\mathbb{R})$, o neutro seria a matriz $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e dado uma matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$, seu oposto é $-B$ que possui todos os seus coeficientes multiplicados por (-1).

Definição 4.6 *Dado uma matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, a matriz $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ possuindo os mesmos valores.*

Nota-se que as entradas de uma linha i e coluna j são trocadas para uma entrada em uma linha j e coluna i.

Exemplo 4.8

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}),$$

sua transposta é

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}).$$

Trabalhando com matrizes quadradas (mesmo número de linhas e de colunas) existe uma função que associa a cada matriz um número real. Essa função auxilia para verificar se uma matriz possui uma inversa ou não.

Definição 4.7 *O determinante é a função $det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, e possui a seguinte regra de cálculo.*

1. *$n = 2$: Seja*

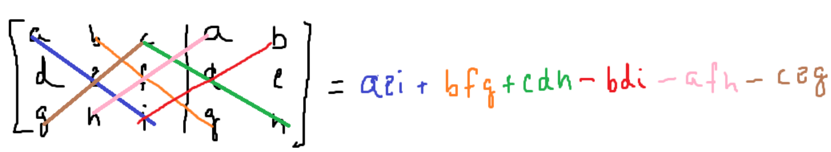
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

   seu determinante é $det(A) = ad - bc$

2. *$n = 3$: Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

   seu determinante (regra de Sarrus) $det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$



Exemplo 4.9 *Calcule* $det(A)$ *para*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$det(A) = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 8 = 10 - 8 = 2$

Exemplo 4.10 *Calcule* $det(A)$ *para*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

$det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + (-1 \cdot 0 \cdot 3) - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 2 \cdot 1) = 8$

Definição 4.8 *Seja* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *e* $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$*, a multiplicação* $A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ *dada pelo critério abaixo.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,p} \end{bmatrix}.$$

Para calcular os coeficientes de $A \cdot B$ *devemos fazer o produto de cada elemento da linha de* A *com cada elemento da coluna de* B *e fazer a soma. Por exemplo* $c_{1,1} = a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + ... + a_{1,n} \cdot a_{m,1}$*. Genericamente,* $c_{i,j} = a_{i,1} \cdot b_{1,j} + a_{i,2} \cdot b_{2,j} + ... + a_{i,n} \cdot b_{j,m}$*.*

Exemplo 4.11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}).$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + ((-1) \cdot (-1)) & 1 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + ((-1) \cdot 1) \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + (2 \cdot (-1)) & 0 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Definição 4.9 *No caso da multiplicação de matrizes quadradas (mesmo número de linhas e colunas), a multiplicação possui um elemento neutro $I_n \in M_n(\mathbb{R})$, com as entradas da diagonal sempre sendo 1 e o resto sempre sendo 0. Por exemplo*

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Definição 4.10 *Dado uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, sua inversa $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$, satisfaz*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Observação: det$(A) \neq 0$

Aplicando as definições de matrizes acima, conseguimos achar uma forma matricial para um sistema linear. Basicamente temos que achar uma solução de um sistema é a mesma coisa do que achar a inversa de uma matriz de coeficientes. Note que para isso funcionar o sistema deve possuir o mesmo número de equações e incógnitas para termos a matrix quadrada.

Definição 4.11 *Um sistema linear na forma matricial é dado por:*

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

. Por exemplo, se um sistema linear possuir 3 incógnitas e 3 variáveis temos que $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{b} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. A matriz A representa os coeficientes, a matriz $\mathbf{x}$ de variáveis e a matriz $\mathbf{b}$ de resultados.

Exemplo 4.12

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases},$$

A equação em forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A solução de um sistema linear se dá pela multiplicação à esquerda da matriz inversa de coeficientes. Ou seja, se tivermos o sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, devemos fazer os seguintes passos para resolver.

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

O primeiro passo é multiplicar a inversa de A pela esquerda

$$A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$I_n \cdot \mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

o segundo passo é notar que $I_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ para obtermos

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

e por fim devemos realizar a multiplicação de $A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ nos dando a solução do sistema.

4.3 Matrizes Inversas

Para calcularmos a inversa de uma matriz 2 por 2 basta apenas usar uma fórmula. Para todos os outros casos usa-se o método da eliminação de Gauss.

Definição 4.12 *(Caso 2 por 2) Dado*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

sua inversa é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

note que $det(A) = ad - bc \neq 0$

Exemplo 4.13

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

$det(A) = 1 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = 7 - (-3) = 7 + 3 = 10$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{-3}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

Exemplo 4.14 *Resolva*

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 8x + y = 7 \end{cases}$$

Primeiro colocamos em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Depois achamos a inversa da matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 - 2 \cdot 8} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \frac{-1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-3}{13} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{-3}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-10}{13} + \frac{14}{13} \\ \frac{80}{13} - \frac{21}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{59}{13} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x = \frac{4}{13}$ *e* $y = \frac{59}{13}$.

Definição 4.13 *(Algoritmo da eliminação de Gauss) consiste em achar a inversa de uma matriz quadrada A de qualquer dimensão. O algoritmo consiste na aplicação de 3 regras até que a matriz inversa desejada seja formada. A regras são:*

1. *Troca de linhas*
2. *Soma e subtração de linhas (ou múltiplos de linhas)*
3. *Multiplicação por uma constante na linha toda.*

O algoritmo consiste de deixar a matriz desejada e a matriz identidade correspondente lado-a-lado, o algoritmo deve ser efetuada com a sucessiva aplicação das regras até que a matriz identidade aparece do lado esquerdo onde estava a matriz A inicial, a matriz do lado direito será a matriz inversa desejada.

Exemplo 4.15 *Calcular a inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Divide-se por 9 a primeira linha toda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Linha 2 menos 7 vezes a linha 1 e substituo pela linha 2 ($l_2 - 7l_1 \to l_2$).

- $7 - 1 \cdot 7 = 0$
- $10 - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{30-7}{3} = \frac{23}{3}$
- $11 - \frac{4}{9} \cdot 7 = \frac{99-28}{9} = \frac{71}{9}$
- $0 - \frac{7}{9} = \frac{-7}{9}$
- $1 - 0 \cdot 7 = 1$
- $0 - 0 \cdot 7 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{71}{9} & \frac{-7}{9} & 1 & 0 \\ 12 & 13 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Linha 3 menos 12 vezes a linha 1 e substituo pela linha 3

- $12 - 12 = 0$
- $13 - \frac{12}{3} = 13 - 4 = 9$
- $6 - \frac{4 \cdot 12}{9} = \frac{54-48}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- $0 - \frac{12}{9} = \frac{-4}{3}$
- $0 - 12 \cdot 0 = 0$
- $1 - 12 \cdot 0 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{71}{9} & \frac{-7}{9} & 1 & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Divide-se tudo na linha 2 por $\frac{23}{3}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{71}{9} \cdot \frac{3}{23} & \frac{-7}{9} \cdot \frac{3}{23} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplca-se $\frac{1}{3}$ *da linha 2 e subtrai-se da linha 1 e substitui-se pela linha 1* $l_1 - \frac{l_2}{3} \to l_1$

- $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
- $\frac{4}{9} - \frac{213}{621} = \frac{2484-1917}{5589} = \frac{7}{69}$
- $\frac{1}{9} + \frac{21}{621} = \frac{621+189}{5589} = \frac{10}{69}$
- $0 - \frac{3}{23 \cdot 3} = \frac{1}{23}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 9 & \frac{2}{3} & \frac{-4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplca-se -9 *da linha 2 e soma-se da linha 3 e substitui-se pela linha 3* $(l_3 - 9l_2 \to l_3)$

- $\frac{2}{3} - 9 \cdot \frac{213}{207} = \frac{2}{3} - \frac{1917}{207} = \frac{414-5751}{621} = \frac{-5337}{621} = \frac{593}{69}$
- $\frac{-4}{3} + \frac{189}{207} = \frac{-29}{69}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{593}{69} & \frac{-29}{69} & \frac{-27}{23} & 1 \end{array}\right].$$

Multiplica-se por $\frac{69}{593}$ *a linha 3 toda.*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{213}{207} & \frac{-21}{207} & \frac{3}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O proximo passo é fazer $l_2 - \frac{213}{207} l_3 \to l_2$.

- $\frac{213}{207} - \frac{213}{207} = 0$
- $\frac{-21}{207} - \frac{213}{207}(\frac{-29}{593}) = \frac{-21}{207} + \frac{213}{207}(\frac{29}{593}) = \frac{-12453+6177}{122751} = \frac{-18630}{122751} = \frac{-90}{593}$
- $\frac{-3}{23} - \frac{213}{207}(\frac{-81}{593}) = \frac{-6}{593}$
- $\frac{-213}{207}(\frac{69}{593}) = \frac{-71}{593}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{69} & \frac{10}{69} & \frac{1}{23} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O último passo é fazer $l_1 - \frac{7}{69} l_3 \to l_1$.

- $\frac{7}{69} - \frac{7}{69} = 0$
- $\frac{10}{69} - \frac{-7}{69}(\frac{-29}{593}) = \frac{10}{69} - \frac{7}{69}(\frac{29}{593}) = \frac{5930}{40917} - \frac{203}{40917} = \frac{5727}{40917} = \frac{83}{593}$
- $\frac{1}{23} - \frac{7}{69}(\frac{-81}{593}) = \frac{3}{69} - \frac{7}{69}(\frac{81}{593}) = \frac{1779}{40917} + \frac{567}{40917} = \frac{2346}{40917} = \frac{34}{593}$
- $0 - \frac{-7}{69}(\frac{69}{593}) = \frac{7}{69}(\frac{69}{593}) = \frac{483}{40917} = \frac{7}{593}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{83}{593} & \frac{34}{593} & \frac{7}{593} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{array}\right].$$

O algoritmo termina nos dando a matriz inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{83}{593} & \frac{34}{593} & \frac{7}{593} \\ \frac{-90}{593} & \frac{-6}{593} & \frac{-71}{593} \\ \frac{-29}{593} & \frac{-81}{593} & \frac{69}{593} \end{bmatrix}$$

Colocando em evidência $\frac{-1}{593}$*, também podemos escrever a inversa na forma a seguir.*

$$A^{-1} = \frac{-1}{593} \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ 29 & 81 & -69 \end{bmatrix}$$

Esta última forma de escrever a matriz inversa não é coincidência, pois o determinante de A é exatamente -593 (pede-se para o leitor o cálculo).

Teorema 1 *Dado uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, com $det(A) \neq 0$, sua inversa A^{-1} pode ser calculada pela fórmula a seguir.*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A),$$

onde $Adj(A)$ é a matriz adjunta de A.

A matriz adjunta é calculada através da transposta da matriz de cofatores A.

Definição 4.14 *A matriz de cofatores de A é calculada pela expressão*

$$C = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

onde $M_{i,j}$ é o determinante da matriz A eliminando-se a linha i e a coluna j. A matriz adjunta é apenas $Adj(A) = C^T = (-1)^{i+j} M_{j,i}$ e devemos, nesse caso, eliminar a linha i e coluna j da transposta de A.

O exemplo feito através do método da eliminação de Gauss pode também ser feito com a fórmula apresentada pelo Teorema.

Exemplo 4.16 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 6 \end{bmatrix},$$

temos que o determinante $det(A) = -593$. Vamos agora calcular a adjunta, para isso devemos achar a matriz C dos cofatores. Primeiro obtenha a transposta de A.

$$A^T = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 12 \\ 3 & 10 & 13 \\ 4 & 11 & 6 \end{bmatrix},$$

$$M_{1,1} = (-1)^{1+1} det\left(\begin{bmatrix} 10 & 13 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (60 - 143) = -83$$

$$M_{1,2} = (-1)^{1+2} det\left(\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = (-1)^3 \cdot (18 - 52) = (-1)(-34) = 34$$

$$M_{1,3} = (-1)^{1+3} det\left(\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (33 - 40) = -7$$

$$M_{2,1} = (-1)^{2+1} det\left(\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (42 - 132) = 90$$

$$M_{2,2} = (-1)^{2+2} det\left(\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (54 - 48) = 6$$

$$M_{2,3} = (-1)^{2+3} det\left(\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (99 - 28) = -71$$

$$M_{3,1} = (-1)^{3+1} det \left(\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 13 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (91 - 120) = -29$$

$$M_{3,2} = (-1)^{3+2} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \right) = (-1) \cdot (117 - 36) = -81$$

$$M_{3,3} = (-1)^{3+3} det \left(\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot (90 - 21) = 69$$

Logo, a adjunta de A é dada por

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ -29 & -81 & 69 \end{bmatrix}$$

que nos dá

$$A^{-1} = \frac{-1}{593} \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ -29 & -81 & 69 \end{bmatrix}.$$

O método dos cofatores é rápido para matrizes quadradas de tamanhos 2 e 3, porém é mais lento para fazer manualmente em casos para dimensões maiores que 3, por causa do cálculo dos determinantes. Neste último caso o método indicado é o da eliminação de Gauss.

Exemplo 4.17 *Resolver o sistema linear abaixo.*

$$\begin{cases} x - y + z = 67 \\ x + y - z = -53 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

A forma matricial dessa equação é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A solução consiste em achar a matriz A^{-1} da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e depois multiplicaremos pela matriz de resultados

$$\begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

para acharmos x, y e z. Vamos proceder pelo método dos cofatores. Sabe-se que $det(A) = 4$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,1} = (-1)^{1+1} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$M_{1,2} = (-1)^{1+2} det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^3 \cdot (-1 - 1) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$M_{1,3} = (-1)^{1+3} det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{2,1} = (-1)^{2+1} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^3 \cdot (1 - (-1)) = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$M_{2,2} = (-1)^{2+2} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{2,3} = (-1)^{2+3} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^5 \cdot (-1 - 1) = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$M_{3,1} = (-1)^{3+1} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^4 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{3,2} = (-1)^{3+2} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^5 \cdot (1 - (-1)) = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$M_{3,3} = (-1)^{3+3} det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^6 \cdot (1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Que nos dá

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

ou multiplicando todas as entradas por $\frac{1}{4}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Para verificar se a matriz A^{-1} é realmente a inversa de A, devemos efetuar, por exemplo, $A \cdot A^{-1}$ e verificar se temos a matriz identidade I_3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A seguir as contas necessária para se efetuar a multiplicação acima.

- *linha 1, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot 0 = 1$
- *linha 1, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0$
- *linha 1, coluna 3:* $1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$
- *linha 2, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + (-1) \cdot 0 = 0$
- *linha 2, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{-1}{2} = 1$
- *linha 2, coluna 1:* $1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$
- *linha 3, coluna 1:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{-1}{2} + 1 \cdot 0 = 0$
- *linha 3, coluna 2:* $1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = 0$
- *linha 3, coluna 3:* $1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Para achar a solução final devemos fazer a seguinte multiplicação.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{67}{2} - \frac{53}{2} + 0 \cdot 10 \\ \frac{-67}{2} - 0 \cdot (-53) + \frac{10}{2} \\ 0 \cdot 67 + \frac{53}{2} + \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -\frac{57}{2} \\ \frac{63}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, $x = 7, y = \frac{-57}{2}$ *e* $z = \frac{63}{2}$.

No caso de sistemas lineares, uma simplificação do método de Gauss pode ser feita e podemos reuzir a matriz A junta com a matriz de resultados e não com a identidade como fizemos anteriormente nos facilitando um pouco a vida. O nome dessa técnica chama-se escalonamento da matriz de coeficientes.

Exemplo 4.18 *Considere a mesma equação anterior em sua forma matricial. A forma matricial dessa equação é dada por*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Devemos agora escalonar a matriz $[A|b]$, *onde* b *é a matriz*

$$\begin{bmatrix} 67 \\ -53 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right].$$

O primeiro passo é $-l_2 + l_3 \to l_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 0 & 0 & 2 & 63 \end{array}\right].$$

O segundo passo é multiplicar por $\frac{1}{2}$ *a linha 3.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 1 & 1 & -1 & -53 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O terceiro passo é $-l_1 + l_2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 0 & 2 & -2 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O quarto passo é multiplicar a linha 2 por $\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 67 \\ 0 & 1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O quinto passo é somar linhas 1 e 1 e substituir na linha 2 ($l_2 + l_1 \to l_1$*).*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -60 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O último passo é somar linhas 2 e 3 e substituir na linha 2 ($l_2 + l_3 \to l_2$*).*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{57}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{63}{2} \end{array}\right].$$

O algoritmo deve para, pois a matriz identidade apareceu. Logo, $x = 7, y = \frac{-57}{2}$ *e* $z = \frac{63}{2}$.

Note que todos os sistemas resolvidos possuem matrizes de coeficientes com o determinante diferente de zero. Quando o determinante for zero temos o caso de infinitas soluções (retas coincidentes) ou nenhuma solução (retas paralelas).

Exemplo 4.19 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 8x + 12y = 20 \end{cases}$$

Em forma matricial, temos a seguinte equação.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Notemos que o determinante da matriz de coeficientes é 0. Vamos tentar escalonar a matriz de coeficientes juntada com a de resultados.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 12 & 20 \end{array}\right].$$

Devemos multiplicar a primeira por 4 e subtrair da segunda linha substituindo na própria $4l_1 - l2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nota-se que a segunda linha zerou, logo teremos infinitas soluções. Pois, temos apenas uma equação válida $2x+3y = 5$. *A equação* $8x+12y = 20$ *não acrescenta nenhuma informação a mais (retas paralelas). Para ver isso basta multiplicar por 4 em ambos lados de* $2x + 3y = 5$. *Na literatura esse sistema é chamado de possível porém indeterminado.*

Exemplo 4.20 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ 5x + 15y = 15 \end{cases}$$

Em forma matricial, temos a seguinte equação.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Note que o determinante da matriz de coeficientes é 0. Vamos escalonar a matriz de coeficientes juntada com a de resultados.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 5 & 15 & 15 \end{array}\right].$$

Fazemos então $-5l_1 + l_2 \to l_2$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -35 \end{array}\right].$$

Note que não conseguiremos mais efetuar o algoritmo, pois temos que a parte da matriz dos coeficientes está zerada. Diferentemente do outro exemplo, neste temos a linha $0\ 0\ -35$ *que nos daria a equação* $0x+0y = -35$, *ou seja,* $0 = -35$ *que é um absurdo. Portanto, o sistema acima é impossível (não há soluções). Nesse caso teriamos duas retas paralelas.*

4.4 Exercícios

Exercício 4.1 *Calcule o determinante das matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} -83 & 34 & -7 \\ 90 & 6 & -71 \\ -29 & -81 & 69 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.2 *Calcular o determinante da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 4.3 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -8x + 4y = 17 \end{cases}$$

Exercício 4.4 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercício 4.5 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x - y - z + w = 0 \\ y + w = 6 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Exercício 4.6 *Resolva o sistema linear usando o método da eliminação de Gauss.*

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x - 4y + 9z = 97 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.7 *Resolva o sistema linear usando o método dos cofatores.*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 37 \\ x - y - z = -4 \\ x + 2z = 18 \end{cases}$$

Exercício 4.8 *Resolva o sistema linear.*

$$\begin{cases} x + 2z = \frac{7}{2} \\ x - y = \frac{1}{2} \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Chapter 5

Equações Exponenciais e Logaritmos

O logaritmo é uma operação que busca o expoente. Ele é definido em forma de equação exponencial, ao qual a solução dessa equação é o resultado do logaritmo.

Definição 5.1 *O logaritmo de b na base $a \neq 0$ dando um resultado x é definido através da seguinte relação*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

A expressão $\log_a b$ procura o expoente de uma identidade que envolve potências.

Exemplo 5.1 *Calcule:*

- $\log_2 8 = x$, *pois* $2^x = 8$, $2^x = 2^3$, *logo* $x = 3$.
- $\log_3 27 = 3$, *pois* $3^3 = 27$
- $\log 10000 = 4$ *(quando a base é 10, não indicamos nada embaixo).*
- $\log_9 3 = \frac{1}{2}$, *pois* $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $\log 0.01 = -2$
- $\log_2 3 = x$, *nesse caso é complicado calcular x na mão. Ou usamos uma calculadora, ou uma linguagem de programação ou a resposta fica em termos de um intervalo. Neste caso* $x \in]1, 2[$.
- $\log_5 30 = x$, *neste caso* $x \in]2, 3[$
- $\log_9 2 = x$, *como* $2 \in]1, 3[$, *temos que* $x \in]0, \frac{1}{2}[$, *pois* $9^0 = 1$ *e* $9^{\frac{1}{2}} = 3$.
- $\log_9 81 = 2$, *pois* $9^2 = 81$.

- $\log 11111 = x$, *onde* $x \in]4,5[$. *Note que* x *estará mais próximo de 4 do que de 5, pois 11111 está mais próximo de* $10^4 = 10000$ *do que de* $10^5 = 100000$.
- $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$, *pois* $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$
- $\log 0.00002 = x$, *com* $x \in]-5,-4[$, *pois* $10^{-4} = 0.0001$ *e* $10^{-5} = 0.000001$.
- $\log 0.000000001 = -9$, *pois* $10^{-9} = 0.000000001$
- $\log 100000000000000000 = 17$, *pois* $10^{17} = 100000000000000000$.
- $\log 100000000000000005 = x$, *com* $x \in]17,18[$, *por causa do exercício anterior.*

Para facilitar o cálculo de um logaritmo algumas propriedades notórias podem ser de grande ajuda. Seja $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.
$$log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$$
$$\log_2 3 + \log_2 4 = \log_2(4 \cdot 3) = \log_2 12$$

2. *(Cancelamento)*
$$a^{\log_a b} = b$$
$$3^{\log_3 85} = 85$$

   A regra se justifica por causa da propriedade reflexiva da igualdade $\log_a b = \log_a b$, *depois usa-se a definição de logaritmo para obter a propriedade em questão* $\log_a b = \log_a b \Leftrightarrow a^{\log_a b} = b$.

3.
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$$
$$\log_2 3 - \log_2 4 = \log_2 \left(\frac{3}{4}\right) = \log_2 0.75$$

4. *(Regra do tombo)*
$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$$
$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3 \cdot \log_{10} 10 = 3 \cdot 1 = 3$$

5. *(Regra do tombo 2)*
$$\log_{a^b} c = \frac{1}{b} \log_a c$$
$$\log_{49} 7 = \log_{7^2} 7 = \frac{1}{2} \log_7 7 = \frac{1}{2}$$

6.
$$\log_a 1 = 0$$

7. *(Mudança de base)*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{27} = \frac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 \sqrt{3}} = \frac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

Definição 5.2 *A constante de Euler é dada por* $e \approx 2.718\ldots$*. A base natural de um logaritmo, ou logaritmo natural é um logaritmo possui a base* e*. Há uma notação especial para o logaritmo natural* $\log_e b = \ln b$*. Obviamente,* $\ln e = 1$*.*

Exemplo 5.2 *Calcule* $\log_{2.718\ldots} 7 = \log_e 7 = \ln 7 \approx 1.94$*.*

Em Haskell, a função log é calculada em termos da base natural, ao passo que outras calculadoras deixam a função log na base 10.

Exemplo 5.3 *Calcular* $\log_7 65$ *usando o Haskell. Como no Haskell a base padrão é a natural, devemos usar a mudança de base para esta base* e*.*

$$\log_7 65 = \frac{\ln 65}{\ln 7}$$

Em Haskell temos

```
> log 65 / log 7
> 2.145210698408757.
```

Podemos criar uma função que calcula o logaritmo em qualquer base.

```haskell
logaritmo :: Double -> Double -> Maybe Double
logaritmo a b
    | a > 0 && b /= 0 = Just (log b / log a)
    | otherwise = Nothing
```

A função acima calcula o logaritmo de b na base a. Se a for menor ou igual a zero ou $b = 0$*, teremos um erro representado pelo valor* $Nothing$ *do tipo Maybe Double. Se a for positivo e* $b \neq 0$*, retorno a conta da mudança de base dentro do Just que indica uma computação validada.*

```
> logaritmo 7 65
> Just 2.145210698408757
```

O logaritmo pode ser usado como uma ferramenta para descobrir, por exemplo, o número de parcelas de um financiamento em juros compostos.

Exemplo 5.4 *Suponha que sua entrada para pagar um produto foi de 10000 reais. O gerente lhe disse que o total a pagar vai ser de 90000 reais. O juros é de* 4%*. Quantas parcelas (unidades de tempo) serão necessárias para terminar este financiamento? A fórmula dos juros compostos é dada por:*

$$m = c_i(1 + i)^n.$$

Como o capital inicial é $c_i = 10000$*, o montante é* $m = 90000$*, a taxa é de* $i = \frac{4}{100}$*, nos resta achar* n.

$$90000 = 10000 \cdot (1 + 0.04)^n,$$

$$90000 = 10000 \cdot 1.04^n.$$

Dividindo ambos os lados por 10000*, temos a seguinte expressão.*

$$9 = 1.04^n$$

$$\log_{1.04} 9 = n$$

$$n = \frac{\log 9}{\log 1.04} \approx 56.02$$

Portanto, temos que o financiamento durará pelo menos 56 parcelas.

Exemplo 5.5 *(FATEC - 2/sem 2002) Uma pessoa precisava calcular um logaritmo decimal (base 10) de 360 e só tinha a tabela abaixo.*

x	*log x*
2	*0.3*
3	*0.48*
7	*0.85*
11	*1.04*

Qual é o valor de $\log 360$*? Resposta: Primeiramente fatoramos o 360.*

$$360 = 36 \cdot 10 = 6 \cdot 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10$$

$$\log 360 = \log(2^2 \cdot 3^2 \cdot 10).$$

Pela regra 1, podemos ter a soma dos logs, logo

$$\log 360 = \log(2^2 \cdot 3^2 \cdot 10) = \log 2^2 + \log 3^2 + \log 10.$$

Pelo tombo temos,

$$\log 360 = 2 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + \log 10 = 2 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.48 + 1.$$

Portanto,

$$\log 360 = 0.6 + 0.96 + 1 \approx 2.56.$$

5.1 Exercícios

Exercício 5.1 *Calcule os seguintes logaritmos ou providencie um intervalo aproximado para a resposta:*

- $\log_5 66$

- $\log_5 525$
- $\log_5 125$
- $\log_2 1024$
- $\log_{2048} 2$
- $\log_{2048} 32$
- $\log_{16} 256$
- $\log_{256} 4096$
- $\ln \pi$
- $\ln e^{85}$

Exercício 5.2 *Seja $k > 0$ suponha que $\log_k 8 \approx 0.64$ e $\log_k 19 \approx 0.91$, calcule o valor aproximado de $log_8 19$*

Exercício 5.3 *Resolva a equação*

$$4^{(x+1)} = 1096$$

Dica: use logaritmos.

Exercício 5.4 *Resolva a equação*

$$3^{(x-5)} = 81$$

Dica: use logaritmos.

Exercício 5.5 *Maria tomou um empreśtimo de 33000 reais e pagou por ele 78000 a juros de 6%. Quanto ela pagou cada parcela desse empréstimo? Observação: as parcelas são divididas igualmente.*

Exercício 5.6 *Calcule*

$$\log(\log 10^{100})$$

Exercício 5.7 *Calcule o valor aproximado dos seguintes logaritmos. Explique os passos feitos.*

- $\log_8 9$
- $\log_9 8$
- $\log_4 179$
- $\log_3 1189$
- $\log_2 1047$

- $\log_2 65$

Exercício 5.8 *Sabendo que* $\log_3 5 \approx 1.46$, $\log_3 7 \approx 1.77$ *e* $\log_3 13 \approx 2.33$, *calcule (SEM USAR CALCULADORA):*

- $\log_9 455$
- $\log_{81} 91$
- $\log_{27} 35$

Exercício 5.9 *Resolva a equação em* x

$$\log_{4913} x = \frac{1}{3}$$

Exercício 5.10 *Resolva a seguinte equação do segundo grau.*

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 8$$

Chapter 6

Funções

Como foi visto no Capítulo funções são uma tipo especial de uma relação, ao qual é associado um elemento da entrada (domínio) a apenas um elemento da saída (imagem). Nesse caso o conceito de função matemática nos diz que uma entrada deve possuir apenas uma saída. Vamos recapitular sua definição.

Definição 6.1 *Sejam A e B conjuntos. A função $f : A \to B$ é o subconjunto $f \subseteq A \times B$ tal que*

- *Para qualquer elemento $a \in A$ tem que existir um elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, ou melhor escrevendo $f(a) = b$.*
- *Se $f(a) = b$ e $f(a) = b'$, temos que $b = b'$*

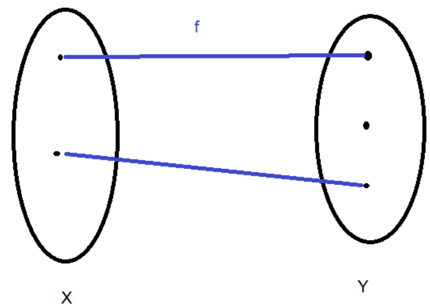
O conjunto A é chamado de domínio e o cojunto B é chamado de contra-domínio. A imagem é um subcojunto do contra-domínio formado por elementos atingidos pela função $Im(f) = \{y \in B | f(x) = y \text{ para algum } x \in A\}$.

6.1 Propriedades

Algumas propriedades são notáveis quando estudamos o conceito de função. A injetividade, a sobrejetividade e a bijetividade. Essas propriedades podem dar noção de estudar certas propriedades, analisar tamanho de conjuntos, e verficiar se há a possibilidade de se ter uma função inversa.

Definição 6.2 *Uma função $f : X \to Y$ é dita injetora se para todo $x_1, x_2 \in X$ vale que*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



Exemplo 6.1 *A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = n + 1$ é injetora. Para verificar a propriedade devemos pegar dois números inteiros quaisquer de modo a checar a propriedade acima. Esses inteiros devem ser duas variáveis pertencentes ao domínio. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ (domínio, entrada). Temos que $f(a) = a+1$ e $f(b) = b + 1$.*

$$f(a) = f(b)$$

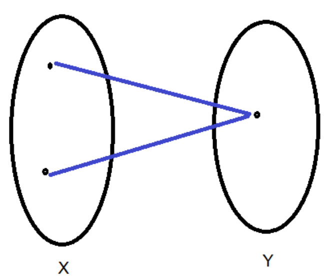
$$a + 1 = b + 1$$

$$a = b$$

Pois, subtraiu-se 1 de ambos os lados.

Definição 6.3 *Uma função $f : X \to Y$ não é injetora se existem $x_1, x_2 \in X$ vale que*

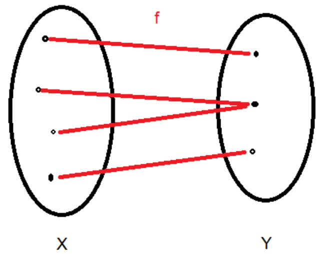
$$f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$$



Exemplo 6.2 *A função $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ não é injetora. Tome $x_1 = (1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $x_2 = (2, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Note que $+(1, 2) = 1 + 2 = +(2, 1) = 2 + 1 = 3$, mas $(1, 2) \neq (2, 1)$. Logo, a soma de inteiros não é injetora.*

Definição 6.4 *Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetora se para todo $y \in Y$, existe (um ou mais) $x \in X$, tal que*

$$f(x) = y$$



Exemplo 6.3 *A função* $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *é sobrejetora. A ideia é arrumar um número* $y \in \mathbb{Z}$ *(na saída) e achar um par* $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*, tal que*

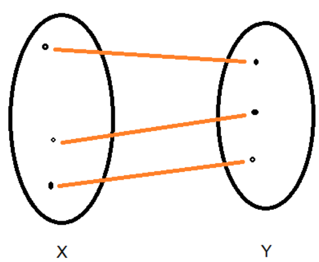
$$+(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = y.$$

Para $x_1 = y$ *e* $x_2 = 0$*, temos que*

$$+(y, 0) = y + 0 = y.$$

Ou seja, dado $y \in \mathbb{Z}$*, achamos o par* $(y, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*, tal que a equação acima vale. Logo, a soma de inteiros é sobrejetora.*

Definição 6.5 *Uma função é dita bijetora é quando ela é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*

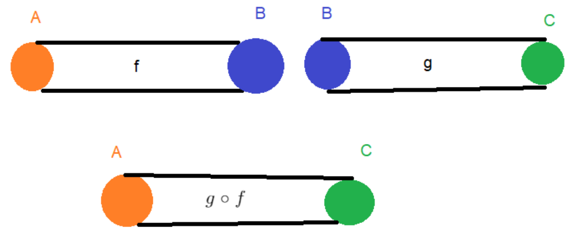


Quando sabemos que uma função é bijetora, pode-se achar a função inversa, que é uma função que vai desfazer tudo que f *fez.*

Definição 6.6 *Seja* $f : X \to Y$ *bijetora. Temos que existe* $f^{-1} : Y \to X$ *chamada de função inversa de* f*.*

Para analisar propriedades da função inversa devemos analisar uma operação entre funções.

Definição 6.7 *Dado* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$*, define-se a composta* $g \circ f : A \to C$ *seguindo o fluxo: a função* f *recebe um valor* $a \in A$*, sua saída* $f(a)$ *é a entrada da função* g*, a saída de* $g(f(a))$ *é um elemento de* C*.*



Na figura acima a função f é representada pelo cano com a entrada laranja e saída azul, a função g pelo cano com entrada azul e saída verde. A função composta $g \circ f$ é resultante ao se grudar os canos pelas extremidades de mesma cor. Note que $f \circ g$ não é válida, pois laranja e verde são cores distintas (matematicamente os conjuntos A e C são diferentes). Vale lembrar que $f \circ g$ estaria definida apenas se os conjuntos A e C forem os mesmos. Em Haskell a composta é dada pela seguinte função.

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(.) g f a = g(f(a))
```

A função (.) possui duas funções como parâmetro f, g e um valor a como resposta um valor em c de acordo com a definição acima.

Exemplo 6.4 *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dada por $f(n) = n + 1$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = n^2$.*

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1)^2$$

Como a saída de g também bate com a entrada de f, pode-se calcular $f \circ g$.

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

Vamos calcular as duas funções em 2.

$$(g \circ f)(2) = (2+1)^2 = 9$$

$$(f \circ g)(2) = 2^2 + 1 = 5$$

Em Haskell, as duas funções podem ser representadas pelo seguinte trecho abaixo.

```
f :: Int -> Int
f n = n+1

g :: Int -> Int
g n = n^2
```

Para calcular no ponto 2 usamos o ghci.

```
> (g . f) 2
> 9

> (f . g) 2
> 5
```

Há também uma função especial que age como elemento neutro da composição.

Definição 6.8 *A função identidade $id_A : A \to A$ dada por $id_A(a) = a$ é uma função que não faz nenhuma operação na entrada. Em Haskell, temos a função id.*

```
id :: a -> a

> id 5
> 5

> id True
> True
```

Nota-se que a função id_A é um elemento neutro da composição de funções.

$$id_B \circ f = f$$

$$f \circ id_A = f$$

com $f : A \to B$

Voltando para a inversa temos que a função inversa possui a propriedade de desfazer o que a outra faz. Matematicamente se $f : A \to B$ bijetora e $f^{-1} : B \to A$, temos que acontece o seguinte.

$$f(f^{-1}(a)) = a$$

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

Ou seja, em termos da função identidade, obtém a seguinte propriedade.

$$f \circ f^{-1} = id_B$$

$$f^{-1} \circ f = id_A$$

Uma observação é que a composta é uma operação associativa de funções. A Teoria das Categorias estuda funções, composições, elementos neutros e associativos, ou seja, as propriedades algébricas das funções.

6.2 Gráficos de uma função

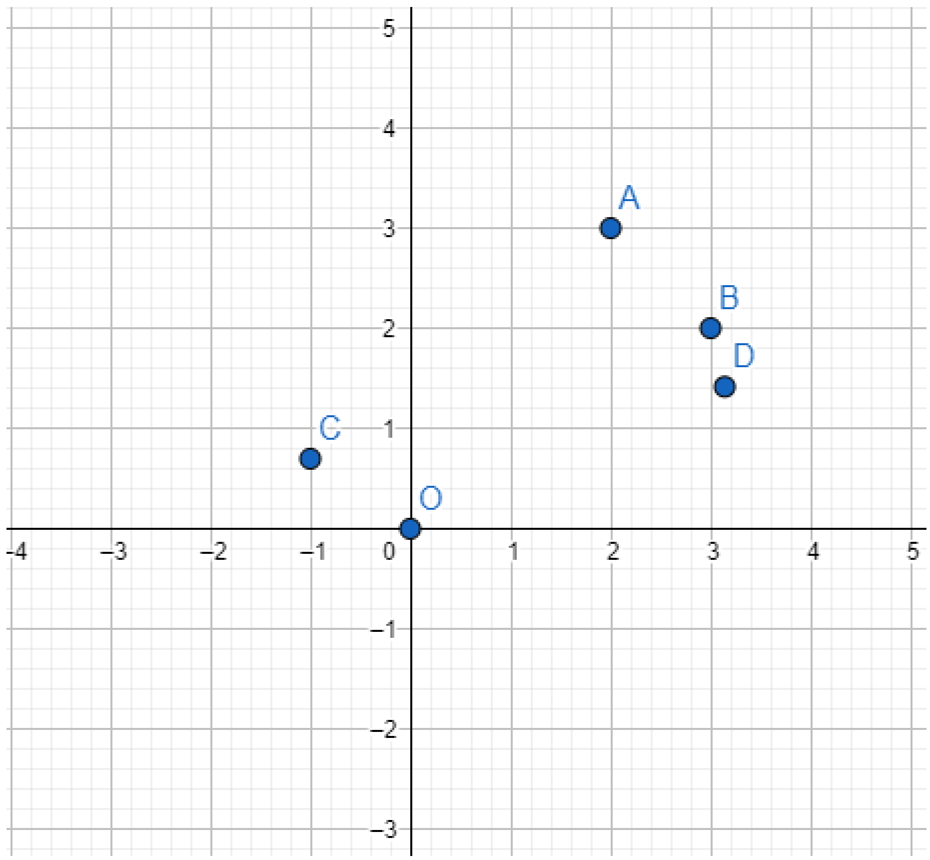
Quando uma função f possui um domínio e contradomínio $\mathbb{R}$ real, por definição sabemos que f é um subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mais conhecido como plano cartesiano. A definição de gráfico nesse caso a mesma que a definição de função vista.

Definição 6.9 *O gráfico de uma função f é dado por:*

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Como o plano cartesiano é oriundo de um produto cartesiano, temos que seus elementos são pares ordenados, logo temos duas coordenadas. A primeira coordenada do par vai ser chamar eixo x e a segunda eixo y. Podemos representar elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nesse sistema gráfico.

Exercício 6.1 *Seja* $A = (2,3)$, $B = (3,2)$, $C = (-1, \frac{7}{10})$, $D = (\pi, \sqrt{2})$ *e* $O = (0,0)$

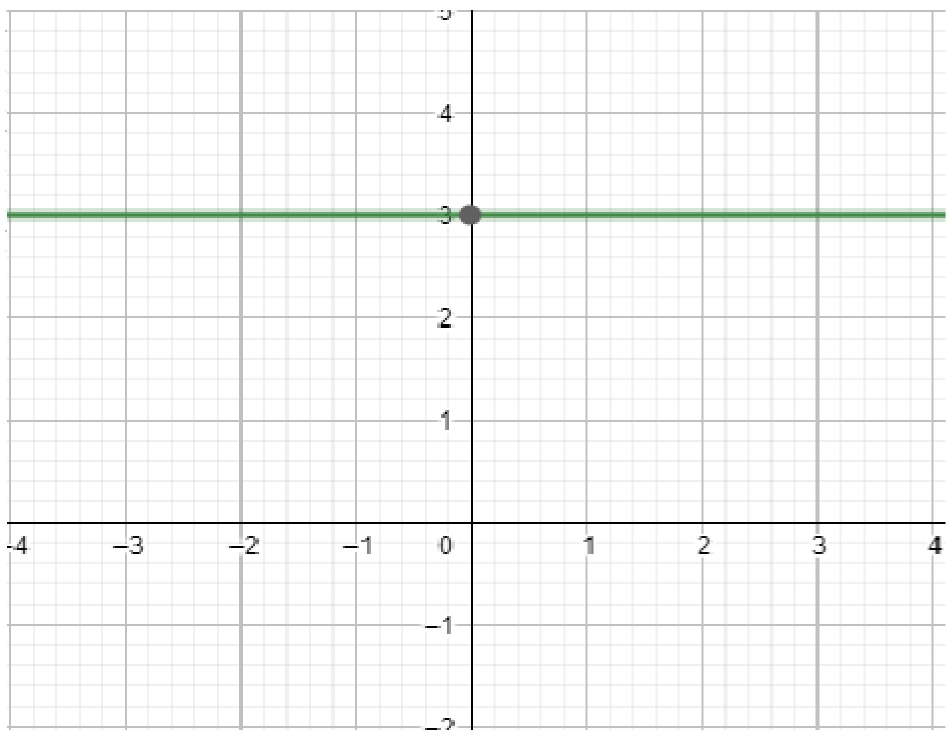


6.3 Função constante

Uma função constante é uma função que tem a mesma saída para qualquer entrada.

Definição 6.10 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = k$ *com* $k \in \mathbb{R}$ *é chamada de função constante (fica a pergunta, tal função é injetora? é sobrejtora?).*

Exercício 6.2 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 3$ *possui o seguinte gráfico.*

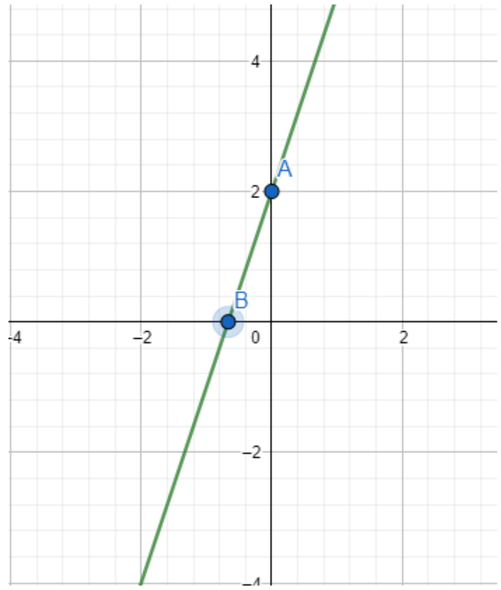


6.4 Funções lineares

As funções lineares possuem termos dependentes x de primeira ordem. Seus gráficos serão retas no plano cartesiano.

Definição 6.11 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada $f(x) = mx + n$ é uma função linear (ou de primeiro grau). O coeficiente m é chamado de coeficiente ângular e n de coeficiente linear.*

Exercício 6.3 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada $f(x) = 3x + 2$ possui o seguinte gráfico.*



Note que $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2 = y$, por isso a reta intercepta o eixo y no ponto 2. O ponto de intersecção com o eixo x é dado pela resolução da equação de primeiro grau

$$3x + 2 = 0$$

que nos dá $x = -\frac{2}{3}$. Os pontos marcados A e B marcam os interceptos de y e x respectivamente.

Dado dois pontos, temos que apenas uma reta vai passar entre eles, ou seja, apenas uma função de primeiro passará por esses dois pontos. Com apenas um ponto, temos que infinitas retas passarão por este ponto.

Exercício 6.4 *Dado $A = (1, -4)$ e o ponto $B = (2, 8)$, ache a reta que passa por esses dois pontos. Seja $f(x) = mx + n$, temos que $f(1) = -4$ e $f(2) = 8$.*

$$m(1) + n = m + n = -4 (x = 1)$$

$$m(2) + n = 2m + n = 8 (x = 2)$$

Temos um sistema linear 2×2. Multiplicando a primeira equação por -1 e somando com a segunda, temos.

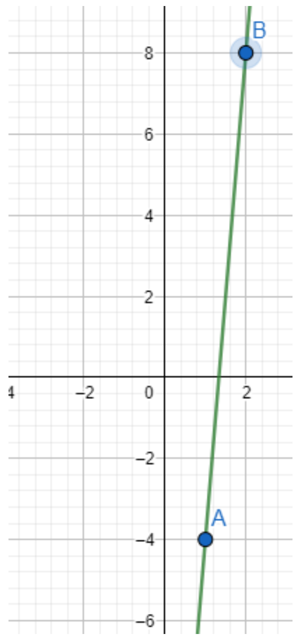
$$m = 12$$

Substituindo na primeira.

$$12 + n = -4$$

$$n = -4 - 12 = -16$$

Logo, a função é $f(x) = 12x - 16$. Como prova real, faça as contas para $f(1)$ e $f(2)$.



É possível mostrar que toda função de primeiro grau é bijetora (exercício para o leitor), logo temos que este tipo de função possui uma inversa.

Exercício 6.5 *Dado $f(x) = 2x - 4$, vamos achar $f^{-1}(x)$. Basta igualar a função a algum ponto $y \in \mathbb{R}$ variável.*

$$2x - 4 = y$$

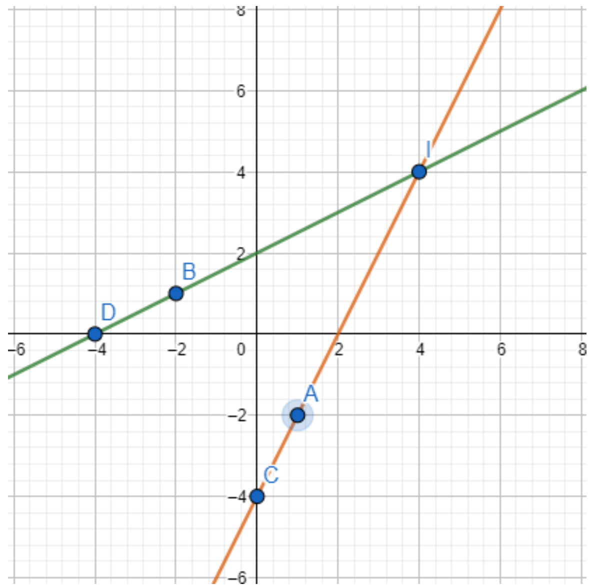
Somando 4 aos dois lados, temos a seguinte identidade.

$$2x = y + 4$$

Divindo por 2 ambos os lados, vamos ter x isolado.

$$x = \frac{y + 4}{2}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$.



O ponto $A = (1, -2)$ está na reta laranja $f(x)$, logo o ponto $B = (-2, 1)$ (que é o ponto A com as coordenadas invertidas) tem que estar na reta verde $f^{-1}(x)$. O ponto $C = (0, -4)$ está na reta laranja, logo o ponto $D = (-4, 0)$ está na reta verde. O ponto de intersecção é o ponto $I = (4, 4)$ que é obtido igualando as duas funções (verifique!).

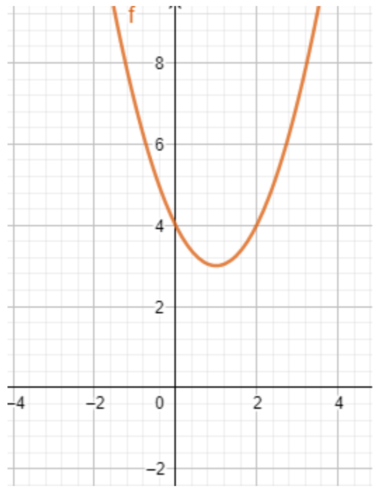
6.5 Parábolas

Uma parábola é a curva gerada pelos gráficos de funções polinomiais de segundo grau. Ou seja, funções da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Definição 6.12 *Uma parábola é o conjunto $\{(x, ax^2 + bx + c) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Note que uma parábola pode interceptar o eixo x, duas vezes, uma vez ou nenhuma vez. Isso depende de como ela é solucionada quando igualada a zero (Δ). È possível notar que as parábolas possuem pontos globais de máximos ou mínimos (extremos).

Exercício 6.6 *Seja $f(x) = x^2 - 2x + 4$ seu gráfico é dado pela figura abaixo.*

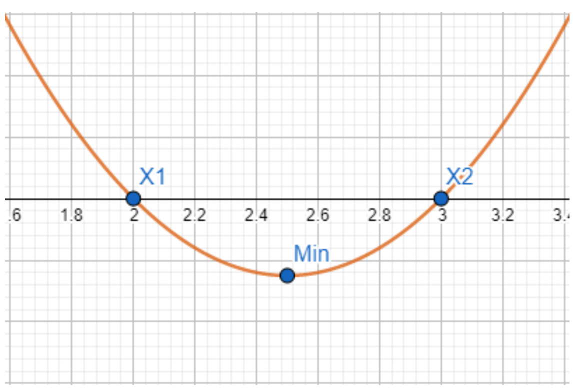


Notemos primeiro que $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 4$ *e* $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$*, o que indica que essa parábola não injetora (nenhuma é). Essa paràbola não possui intersecção com o eixo x, pois seu delta é negativo como uma equação de segundo grau. Pois, para achar o intercepto com o eixo x devemos igualar a função a 0, logo teremos a equação*

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

que possui $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$*. O ponto de mínimo dessa parábola é dado pela coordenada* $m = (x_m, y_m) = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a})$*, nesse caso temos o mínimo em* $x_m = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$*,* $y_m = f(1) = 1 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$*. Logo,* $m = (1, 3)$*.*

Exercício 6.7 *O gráfico de* $f(x) = x^2 - 5x + 6$ *é dado pela figura abaixo.*



O ponto $X1 = (2, 0)$ *é a primeira raiz da equação* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *e o ponto* $X2 = (3, 0)$ *é a segunda raiz da mesma equação (note que o delta é positivo nos dando dois interceptos ao eixo x). O ponto* $Min = (\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ *é o ponto de mínimo calculado pela fórmula* $m = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$*.*

Sabe-se que as parábolas não são injetoras nem sobrejetoras quando consideremos seu domínio com $\mathbb{R}$, e seu contradomínio sendo o mesmo. Mas considerando o ponto extremo (máximo ou mínimo) $M = (x_m, y_m)$, temos que a parábola dada por $f : [x_m, +\infty) \to [y_m, \infty)$, ou $f : [-\infty, x_M) \to [\infty, y_M)$ vamos obter uma parte simétrica da parábola como uma função bijetora.

Exercício 6.8 *Considere o exemplo anterior e $f : [\frac{5}{2}, +\infty) \to [-\frac{1}{4}, +\infty)$, com $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Temos que essa semiparábola possui um comportamento bijetor e com isso conseguimos achar sua inversa.*

$$x^2 - 5x + 6 = y$$

Subtrai-se 6 de ambos os lados.

$$x^2 - 5x = y - 6$$

Somamos ambos os lados a coordenada x ponto de mínimo.

$$x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = y - 6 + (\frac{5}{2})^2$$

$$(x - \frac{5}{2})^2 = y - 6 + \frac{25}{4} = y + \frac{1}{4}$$

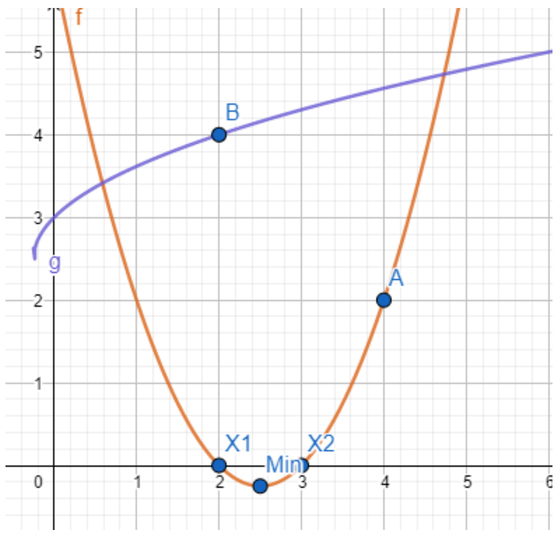
$$(x - \frac{5}{2})^2 = y + \frac{1}{4}$$

Como estamos apenas na restrição do domínio, pode-se extrair as raízes sem pensar em casos positivos ou negativos (no nosso teremos apenas o primeiro caso).

$$x - \frac{5}{2} = \sqrt{y + \frac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}$$

Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}$.



O ponto $A = (4, 2) \in [\frac{5}{2}, +\infty) \times [-\frac{1}{4}, +\infty)$*, portanto no lado certo da parábola laranja, logo* $B = (2, 4)$ *estará na parábola invertida roxa que é descrita como o gráfico de* f^{-1} *(inversa da parábola).*

6.6 Exercícios

Exercício 6.9 *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = n - 7$ *é bijetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.10 *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = n^2$ *é injetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.11 *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = n + 5$ *é sobrejetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.12 *A função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $f(n) = 15n - 3$ *é bijetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.13 *A função* $(\cdot) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $\cdot(x, y) = x \cdot y$ *(multiplicação de números inteiros) é sobrejetora? é injetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.14 *A função* $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dada por* $p(x, y) = y$ *é sobrejetora? é injetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.15 *A função* $s : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *dada por* $s(x, y) = (y, x)$ *é sobrejetora? é injetora? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.16 *Considere a função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(n) = n + 7$*, e seja* $g(n) = n - 7$*, a função* g *é a inversa de* f*? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.17 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 3x - 6$*, e seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = \frac{x+6}{3}$*, a função* g *é a inversa de* f*? Argumente matematicamente.*

Exercício 6.18 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2 + x + 1$*, e seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = \frac{x}{3} + 1$*. Calcule:*

- $(f \circ g)(2)$
- $(g \circ f)(2)$
- $(f \circ g)(1)$
- $(f \circ g)(0)$
- $(g \circ f)(-1)$
- $(f \circ f)(2)$
- $(g \circ g)(1)$

Exercício 6.19 *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 5$*, e seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x + 2$*. Calcule:*

- $(f \circ g)(0)$
- $(g \circ f)(-1)$
- $(f \circ g)(1)$
- $(f \circ g)(-3)$
- $(g \circ f)(-5)$
- $(f \circ f)(\pi)$
- $(g \circ g)(x)$

Exercício 6.20 *Em aula definimos o que seria uma função não ser injetora. Como seria a definição para uma função não ser sobrejetora?*

Exercício 6.21 *Dê exemplo de função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *que não seja sobrejetora.*

Exercício 6.22 *Dado os pontos* $(1, 3)$ *e* $(2, 9)$*, exiba a função de primeiro grau (reta) que passa por esses dois pontos.*

Exercício 6.23 *Dado os pontos* $(0, -1)$ *e* $(1, 10)$*, exiba a função de primeiro grau (reta) que passa por esses dois pontos.*

Exercício 6.24 *Ache os pontos de intersecção dos eixos* x *e* y *da função* $f(x) = 4x + 2$

Exercício 6.25 *Ache o ponto de mínimo da função* $f(x) = x^2 - 2x + 4$ *e os pontos de intersecção com o eixo* x.

Exercício 6.26 *Ache o ponto de máximo da função* $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ *e os pontos de intersecção com o eixo* x.

Exercício 6.27 *Esboce o gráfico das duas parábolas acima*

Exercício 6.28 *Esboce o gráfico da reta dada pela função real* $f(x) = 7x - 5$

Exercício 6.29 *Esboce o gráfico da reta dada pela função real* $f(x) = \frac{x}{2} + 10$

Exercício 6.30 *Ache a função inversa de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 5x + 10$. *Esboce o gráfico de ambas.*

Exercício 6.31 *Ache a função inversa de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 10x - 8$. *Esboce o gráfico de ambas.*

Exercício 6.32 *Ache a função inversa de* $f(x) = x^2 - 10x + 16$. *Esboce o gráfico de ambas. E dê o domínio e contradomínio para que a inversa exista.*