Incontro 2024-05-29 Ricerca Operativa

Gli incontri avvengono sia in presenza che nella stanza Zoom:

`https://univr.zoom.us/j/87547655553`

E, quando disponibile, la loro registrazione è nel folder:

`https://univr.cloud.panopto.eu/Panopto/Pages/Sessions/List.aspx?folderID=58ba7ced-73bd-4fd0-b01f-b12d0106957d`

Massimo Flusso Minimo Taglio

E' un problema combinatorico di nascita in quanto, dove $\varphi : E \to \mathbb{R}$ fosse la soluzione desiderata, ossia quello che chiamiamo un flusso ammissibile, allora esisterebbe sembre una soluzione ottima intera.

Fact: data una qualsiasi istanza (G,s,t,c) con le capacità c intere ($c : E \to \mathbb{N}$) esiste sempre una soluzione ottima intera.

proof: Di fatto esiste sempre una soluzione se e solo se $c \geq 0$ (basti considerare $\varphi = 0$). La formulazione come problema di PL data la volta scorsa evidenzia che lo spazio delle soluzioni è un poliedro (compatto). Poichè tale poliedro è contenuto nella box $0 \leq x \leq c$ allora è un politopo (compatto), quindi esiste almeno una soluzione ottima (la regione ammissibile non è illimitata ed è compatta). Sia φ una qualsiasi soluzione ottima. Se è intera abbiamo vinto. Si prenda pertanto contezza dell'insieme degli archi $E' \subseteq E$ dove φ è frazionaria (= non intera). Si noti che in nessun nodo v può essere incidente un solo arco di E'. Quindi E' contiene un ciclo C. Gli archi di C possono essere partizionati come C^+ oppure C^- a seconda del verso di percorrenza. Sia $\varepsilon^+ = \min_{e \in C^+} c_e - \varphi_e$ e $\varepsilon^- = \min_{e \in C^+} \varphi_e$. Avremo che $\varepsilon := \min(\varepsilon^-, \varepsilon^+) > 0$ poichè φ_e è frazionario per ogni $e \in C \subset E'$. Sia $\varphi' : E \to \mathbb{R}$ definito da:

1. $\varphi'_e := \varphi_e$ se $e \notin C$
2. $\varphi'_e := \varphi_e + \varepsilon$ se $e \in C^+$
3. $\varphi'_e := \varphi_e - \varepsilon$ se $e \in C^-$

è ancora un flusso, dello stesso valore di φ, e con meno archi su cui è frazionario che non φ. QED

Dimostrazione esistenziale che massimo flusso = minimo taglio

Se c è un intero, allora il minimo valore di taglio è intero. Se $c_e = 0$ per un qualche arco e, allora si applichi induzione su $G \setminus e$. Se esiste un arco e che non appartiene ad alsun taglio minimo, si usi induzione su (G,s,t,c') dove $c' = c$ eccetto che $c'_e = c_e - 1$. Se esiste un arco $e = (s, t)$, si usi induzione su $G \setminus e$ (sia il max-flow val che la min-cut capacity shiftano precisamente di c_e). Se esiste un arco $e = (v, s)$ oppure $e = (t, v)$, si usi induzione su $G \setminus e$ (quì sia il max-flow val che la min-cut capacity nemmeno cambiano). Se esiste un arco u, v con $u \neq s$ e $v \neq t$ che appartiene ad un min capacity s, t-cut $\delta^+(S)$, allora $s, u \in S$ e $v, t \notin S$. By induction on the graph G_S obtained by conceptually collapsing all nodes in S into a single node s', there exists a flow φ^S saturating the minimum capacity s', t-cut $\delta^+(s')$. Similarly, in the graph $G_{\bar{S}}$ obtained by conceptually collapsing all nodes in $\bar{S} := V \setminus S$ into a single node t', there exists a flow $\varphi^{\bar{S}}$ saturating the minimum capacity s, t'-cut $\delta^-(t')$. Consider the flow φ definito da:

1. $\varphi_e := \varphi_e^{\bar{S}}$ se e è un arco di $G_{\bar{S}}$ non contenuto nel taglio $\delta^+(S) = \delta^-(t')$
2. $\varphi_e := \varphi_e^S$ se e è un arco di G_S non contenuto nel taglio $\delta^+(S) = \delta^+(s')$
3. $\varphi'_e := \varphi_e^{\bar{S}} = \varphi_e^S$ se $e \in \delta^+(S)$ ossia se e è un arco sia di $G_{\bar{S}}$ che di G_S.

Si noti che φ è un flusso di valore pari alla capacità del taglio $\delta^+(S)$ che esso satura.

Si assuma pertanto che ogni arco sia contenuto in un s, t-taglio di capacità minima, ma non esistano archi (u, v) appartenenti ad s, t-tagli di capacità minima aventi sia $u \neq s$ che $v \neq t$. Questo implica che per ogni arco (u, v) deve valere $u = s$ oppure $v = t$. A questo punto è facilissimo concludere.
QED