Esame di Ricerca Operativa - 2 luglio 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (7+5+3+1+? punti):

Per il prossimo anno, il piano di produzione della Miraprimule prevede una produzione di d_t unitá di prodotto nel mese t, $t = 1, \ldots, 12$. Ciascun operaio é in grado di produrre k unitá di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio é pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, e che le variazioni in organico (assunzioni e licenziamenti) possano aver luogo solo a ciascun inizio mese, vorreste determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da minimizzare il costo complessivo (stipendi, assunzioni, licenziamenti) sull'intero anno pur essendo sempre in grado, su ciascun mese $t = 1, \ldots, 12$, di produrre la domanda d_t. Il prodotto non puó essere messo in magazzino.

(7 punti). Riusciresti a mettere a punto un algoritmo di programmazione dinamica che risolva all'ottimo questa tipologia di problema?

(4 punti). Formulare come problema di programmazione lineare o come problema di programmazione lineare intera.

(2 punti). Argomentare il perché sia tutto sommato possibile omettere i vincoli di interezza sulle variabili scelte nella formulazione di cui sopra, ad esempio spiegando (e dimostrando) nel dettaglio come una generica soluzione ammissibile frazionaria possa sempre essere "arrotondata" ad una soluzione intera di costo strettamente minore (purché $s, p, q > 0$).

(1 punto). Se avrai argomentato in modo pulito, saprai dirmi quali delle seguenti condizioni siano sufficienti al concludere che ogni soluzione ottima ritornata dal *linear solver engine* sará di suo intera. Ecco le tre possibilitá che ti chiedo di catalogare:

A. $s, p \geq 0$, $q > 0$;

B. $s \geq 0$, $p, q > 0$;

C. $s > 0$, $p, q \geq 0$.

(+? punti). Se alcune delle condizioni sopra (A, B, o C) non ti appaiono sufficienti, ricevi 1 punto per ogni condizione che fai fuori (dead) con un controesempio.

svolgimento.

Sia $G = \max \left\{ \left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil \right\}$. Per $\bar{t} = 1, \ldots, 12$, e per $\bar{g} = 0, 1, 2, \ldots, G$, sia $c(\bar{t}, \bar{g})$ il minimo costo che verrebbe speso dal manager che gestisse all'ottimo la situazione se chiamato a dirigere la Miraprimule a partire dal mese $\bar{t}$ ed assumendo che al suo arrivo al timone egli si trovi un parco di $\bar{g}$ operai. Abbiamo definito la famiglia di problemi, e da questo, come tipico della programmazione dinamica, disegue poi tutto. Quindi ripropongo come esercizio che proviate a sviluppare da qui, limitandomi a fornire traccia a quello che deve essere il modo di procedere. Si osservi che tale famiglia di problemi é chiusa rispetto ad induzione. (Si individuino anche i casi base e si specifichi come vanno gestiti). Il numero di problemi diversi ricompresi nella famiglia non sará in genere poi cosí elevato, il che rende efficiente un approccio di programmazione dinamica, lo si visualizzi e, se si vuole, lo si formalizzi. Un'ulteriore nota: A rigore non possiamo dire che il numero di problemi nella famiglia é al piú polinomiale poiché la magnitudo di G dipende dalla magnitudo dei numeri d_i, e non solo dal numero di mesi. Si potrebbe osservare ed argomentare tuttavia che i valori di $\bar{g}$ davvero pertinenti sono al piú quanti sono i d_i in input piú g_0, in questo caso 13. (I soli $\bar{g}$ da considerarsi davvero appartengono tutti all'insieme $G = \{g_0\} \cup \left\{ \left\lceil \frac{d_i}{k} \right\rceil \right\}$. Riesci a vederne il perché? Riesci a dimostrarlo formalmente?). Quindi la programmazione dinamica risulta il modo piú efficiente per gestire questo tipo di problema.

Vediamo ora come si comporta la programmazione lineare (e/o lineare intera).

Le variabili di decisione sono il numero di operai disponibili in ciascun mese, indichiamoli con g_t, $t = 1, \dots, 12$. Per esprimere la funzione obiettivo viene peró comodo introdurre anche altre variabili, benché ridondanti, che rappresentino il numero di unitá di personale assunte e licenziate all'inizio del mese t. Precisamente, A_t e L_t indicano rispettivamente il numero di persone che sono assunte e licenziate all'inizio del mese t. A questo punto, la funzione obiettivo é semplicemente

$$\min \sum_{t=1}^{12} (s\, g_t + p\, A_t + q\, L_t)$$

Veniamo ora ai vincoli. Se nel mese t abbiamo a disposizione g_t unitá di personale, sará possibile produrre fino a kg_t. Per soddisfare la domanda dovrá valere, per ogni t:

$$g_t \geq \frac{d_t}{k}$$

Ora manca solo precisare il legame che lega tra loro le varie variabili g_t, A_t e L_t (esternare quella ridondanza cui si era accennato sopra):

$$g_{t+1} = g_t + A_t - L_t$$

In definitiva, una formulazione completa di PLI sarebbe:

$$\begin{array}{lrll}
\min & \sum_{t=1}^{12} (s\, g_t + p\, A_t + q\, L_t) & & (1) \\
 & g_t \geq \frac{d_t}{k} & t = 1, \dots, 12 & (2) \\
 & g_{t+1} = g_t + A_t - L_t & t = 1, \dots, 12 & (3) \\
 & g_t \text{ é un numero naturale} & t = 1, \dots, 12 & (4)
\end{array}$$

Vogliamo ora commentare che il Vincolo (4) puó essere rilassato ad un vincolo meno restrittivo dove alle variabili g_t viene solo richiesto di essere non negative. Il manager dirá: ma io non posso assumere 1/3 di operaio! Niente paura: anche se si imporrá questo vincolo meno restrittivo, ció nonostante le soluzioni restituite dall'LP solver saranno di loro intere. Se cosí, questa riformulazione presenta il vantaggio che il problema si rivela come un problema di PL (e quindi in P, per il quale conosciamo algoritmi risolutivi efficienti) e non un problema di PLI (e quindi NP-completo, no hope).

La differenza é sostanziale; dimostriamolo quindi: mostreremo che nessuna soluzione frazionaria puó essere ottima. Si noti che, assumendo $p, q \geq 0$, allora ogni soluzione (g, A, L) puó essere trasformata in una soluzione di costo non-maggiore dove $A_t \cdot L_t = 0$ per ogni t. (Ossia non ha senso assumere mentre si licenzia). Sapresti come argomentarlo nel dettaglio? Se una soluzione frazionaria risponde a questa struttura (rispetta questa semplice regola) allora, in considerazione del Vincolo (3) dovrá necessariamente proporre un $g_{t'}$ frazionario. Inoltre, limitandoci a soluzioni con questa struttura, é chiaro che il vettore g basta a determinare univocamente l'intera tripla (g, A, L). Sia t' il minimo indice per il quale $g_{t'}$ si presenta frazionario. Si noti che non solo l'aumento, ma nemmeno la riduzione di $g_{t'}$ a $\lfloor g_{t'} \rfloor$, puó portare ad una violazione dei vincoli di tipo (2). Se $g_{t'-1} < g_{t'}$ allora sostituendo $g_{t'}$ con $\lfloor g_{t'} \rfloor$ otteniamo una nuova soluzione ammissibile che, se $s > 0$, presenta costo strettamente inferiore. Sia t'' l'ultimo indice successivo a t' per il quale $g_{t'} = g_{t'+1} = \dots = g_{t''}$. Si consideri la soluzione ammissibile ottenuta ridefinendo $g_t := \lfloor g_{t'} \rfloor$ per ogni $t = t', t'+1, \dots, t''$. Se questa soluzione non presenta costo strettamente inferiore a quella in esame allora la soluzione ammissibile ottenuta ridefinendo $g_t := \lfloor g_{t'} \rfloor + 1$ per ogni $t = t', t'+1, \ldots, t''$ presenta costo strettamente inferiore a quella in esame.

L'ipotesi che $s > 0$ gioca ovviamente un ruolo cruciale: un controesempio che esclude A. e B. é il seguente: $p = q = 1$, $s = 0$, $g_0 = 0$, due soli mesi con $d_1 = 0$ e $d_2 = 1$, la soluzione frazionaria $g_1 = \frac{1}{2}$, $g_2 = 1$ é ottima.

Problema 2 (5 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$
\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 20x_4 + 10x_5 + C_6x_6
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 & \leq 12 \\
x_3 + x_4 & \leq 10 \\
x_5 + x_6 & \leq 14 \\
x_1 + x_3 + x_5 & \leq 20 \\
x_2 + x_4 + x_6 & \leq 15 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

2.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

2.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

2.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

2.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$
\begin{cases}
(6) + (5) & = 11 \leq 12 \\
(0) + (10) & = \mathbf{10} \leq 10 \\
(14) + (0) & = \mathbf{14} \leq 14 \\
(6) + (0) + (14) & = \mathbf{20} \leq 20 \\
(5) + (10) + (0) & = \mathbf{15} \leq 15
\end{cases}
$$

Il problema duale è il seguente.

$$
\min\ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5
$$
$$
\begin{cases}
y_1 + y_4 & \geq 1 \\
y_1 + y_5 & \geq 6 \\
y_2 + y_4 & \geq C_3 \\
y_2 + y_5 & \geq 20 \\
y_3 + y_4 & \geq 10 \\
y_3 + y_5 & \geq C_6 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} \quad + y_4 = 1 \\ \quad + y_5 = 6 \\ y_2 + y_5 = 20 \\ y_3 + y_4 = 10 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 14, 9, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 15 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = 15 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 15$ e $C_6 \leq 15$.

Problema 3 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	·	●
B	·	·	·	·	●	●	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	●	·	·	·	●	·
E	·	·	·	·	●	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	●	·
G	·	·	·	·	●	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili?

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	98	53	26	10	2	2	2	$\bullet$
B	45	27	16	8	$\bullet$	$\bullet$	2	1
C	18	11	8	8	5	3	1	1
D	7	3	$\bullet$	3	2	2	$\bullet$	1
E	4	3	2	1	$\bullet$	2	1	1
F	1	1	1	1	1	1	$\bullet$	1
G	0	0	0	0	$\bullet$	1	1	H

Per rispondere alle altre due domande compilo un'ulteriore tabella.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1	1	1	1	1	1	1	$\bullet$
B	1	2	3	4	$\bullet$	$\bullet$	1	1
C	1	3	6	10	10	10	11	12
D	1	4	$\bullet$	10	20	30	$\bullet$	12
E	1	5	5	15	$\bullet$	30	30	42
F	1	6	11	26	26	56	$\bullet$	42
G	1	7	18	44	$\bullet$	56	56	98

Ritrovare il valore 98 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
L'ultima domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 $\rightarrow$ G–8	98
B–3 $\rightarrow$ G–8	16
A–1 $\rightarrow$ F–6	56
passaggio per D–5	40

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GTCTCACAATGCGTCTA$ e $t = CTAGCAGTCAACGTAT$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

4.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = CTAGCAGTC$ di t?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = GTCTCACA$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con ’C’		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  -  c  t  a  g  c  a  g  t  c  a  a  c  g  t  a  t
------------------------------------------------------
-    0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
g    0  0  0  0  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
t    0  0  1  1  1  1  1  1  2  2  2  2  2  2  2  2  2
c    0  1  1  1  1  2  2  2  2  3  3  3  3  3  3  3  3
t    0  1  2  2  2  2  2  2  3  3  3  3  3  3  4  4  4
c    0  1  2  2  2  3  3  3  3  4  4  4  4  4  4  4  4
a    0  1  2  3  3  3  4  4  4  4  5  5  5  5  5  5  5
c    0  1  2  3  3  4  4  4  4  5  5  5  6  6  6  6  6
a    0  1  2  3  3  4  5  5  5  5  6  6  6  6  6  7  7
a    0  1  2  3  3  4  5  5  5  5  6  7  7  7  7  7  7
t    0  1  2  3  3  4  5  5  6  6  6  7  7  7  8  8  8
g    0  1  2  3  4  4  5  6  6  6  6  7  7  8  8  8  8
c    0  1  2  3  4  5  5  6  6  7  7  7  8  8  8  8  8
g    0  1  2  3  4  5  5  6  6  7  7  7  8  9  9  9  9
t    0  1  2  3  4  5  5  6  7  7  7  7  8  9 10 10 10
c    0  1  2  3  4  5  5  6  7  8  8  8  8  9 10 10 10
t    0  1  2  3  4  5  5  6  7  8  8  8  8  9 10 10 11
a    0  1  2  3  4  5  6  6  7  8  9  9  9  9 10 11 11
```

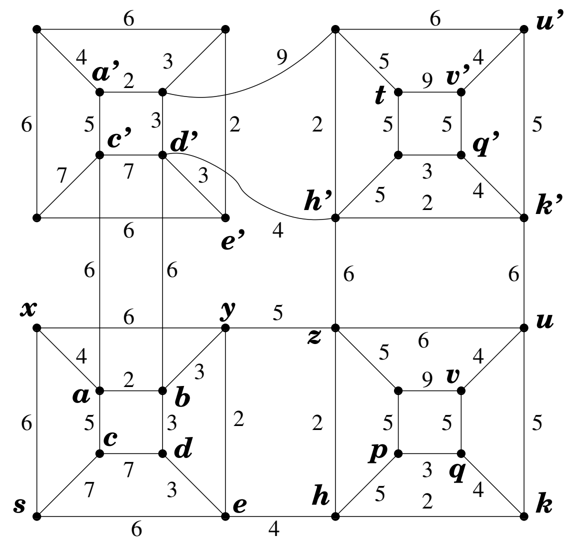
Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	C T C A C A A C G T A
termina con ’C’	8	C T C A C A A C
tra s e t_9	8	C T A C A G T C
tra s_8 e t	7	T C T C A C A

Problema 5 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l’arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l’arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.



5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Su G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Su G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Su G, trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Su G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte. Ormai lo storico di correzioni accumulate su questa tipologia di problemi é ampio, e preferisco pertanto non fornire le soluzioni di questo esercizio.

Problema 6 (6 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max \; 3\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 + 17\,x_4$$
$$\begin{cases} 3\,x_1 \leq 19 \\ 11\,x_2 \leq 23 \\ 13\,x_3 \leq 27 \\ x_4 \leq 51 \\ x_4 \leq 49 \\ 11\,x_2 \leq 25 \\ 22\,x_2 \leq 46 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

6.1**(1pt)** Fornire la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$.

6.2(1pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto di ciascuno dei 7 vincoli presi separatamente? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a $+\infty$? (Se vi è un limite, specificare quale).

6.3(1pt) Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima? Di quanto il secondo?

6.4(1pt) Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.

6.5(1pt) È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.

6.6(1pt) Rimuovere un vincolo in modo che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ individuata al primo punto resti ottima, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari individuino univocamente l'unica soluzione duale gemella.

SOLUZIONE OTTIMA: Questo esercizio è un rafforzamento di un analogo esercizio proposto allo scritto precedente (6 settembre 2007). Suggerisco di provare prima l'esercizio del 6 (eventualmente leggendone la correzione) e poi provare a risolvere questo esercizio, anche autonomamente.

SOLUZIONE OTTIMA: La soluzione ottima è ovviamente $\overline{x}_1 = \frac{19}{3}$, $\overline{x}_2 = \frac{23}{11}$, $\overline{x}_3 = 0$ (poichè il coefficiente della x_3 nella funzione obiettivo e negativo), $\overline{x}_4 = 49$.

PREZZI OMBRA: I prezzi ombra sono ovviamente $\lambda_1 = \frac{3}{3} = 1$, $\lambda_2 = \lambda_7 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = \frac{17}{1} = 17$, e $\lambda_6 = 0$. Si noti tuttavia che non sarebbe di alcuna utilità portare il termine noto del quinto vincolo oltre il valore 51, dacchè a quel punto subentrerebbe il quarto vincolo a vanificare il senso dei miei acquisti. Per tutte le altre variabili, i prezzi ombra risultano equi per un qualsiasi incremento dei termini noti dei vincoli. (Si assume che i termini noti dei vincoli siano comunque matenuti non negativi poiché in caso contrario si ha la perdita dell'ammissibilitá in quanto si entra in contraddizione con i vincoli di non negativitá).

ROBUSTEZZA SOLUZIONE OTTIMA: Al variare dei coefficienti della funzione obiettivo, la soluzione $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ resta ottima fintantochè per nessuno dei coefficienti della funzione obiettivo il segno (positivo/segativo) risulta invertito.

CONSIDERAZIONI SUL DUALE: Si noti che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{11}, 0, 49\right)$ è degenere in quanto soddisfa ad uguaglianza due vincoli ridondanti (linearmente dipendenti): $11\,x_2 \leq 23$ e $22\,x_2 \leq 46$. Ne consegue che i prezzi ombra non costituiscono una soluzione duale ammissibile. Resta comunque agevole reperire una soluzione duale ammissibile e gemella della soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ semplicemente ignorando il vincolo $22\,x_2 \leq 46$, e valutando che in assenza di tale vincolo allora il prezzo ombra che sarei disposto a pagare sul vincolo $11\,x_2 \leq 23$ sarebbe $\hat{\lambda}_2 = \frac{5}{11}$. A questo punto, $\left(\lambda_1, \hat{\lambda}_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7,\right)$ è la soluzione duale gemella ricercata, la cui esistenza era per altro garantita dal teorema della dualità forte. La soluzione duale gemella prodotta sopra è di base, ed un'altra soluzione duale gemella di base poteva essere ottenuta ignorando invece il vincolo $11\,x_2 \leq 46$, e pervenendo al valore $\hat{\lambda}_7 = \frac{5}{22}$. A questo punto, $\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \hat{\lambda}_7,\right)$ è l'ulteriore soluzione duale gemella di base sopra promessa. Di fatto, le soluzioni duali gemelle sono tutti e soli i punti del segmento che congiunge le due soluzioni duali gemelle di base sopra esibite.

Rimozione Vincolo: Non appena si rimuova effettivamente uno dei due vincoli ridondanti (il secondo e il settimo), la soluzione primale ottima non sarà più degenere pur conservando l'ottimalità (il problema non cambia con la rimozione di uno solo dei vincoli ridondanti). A questo punto la soluzione duale che dimostra l'ottimalità della soluzione primale diventa unica.

Come esercizio, si verifichi con mano in questo caso specifico quanto qui detto in astratto ed a valenza generale.