

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 30 settembre 2014 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (2+1+1+1+2+1=8 punti):

È noto che la media di n valori x_1, x_2, \dots, x_n , è quel valore $\bar{x} := \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$, definito quindi da un'unica equazione lineare, che minimizza lo scarto quadratico medio $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Assumiamo ora che n sia dispari e di essere interessati al valore mediano (noto anche come secondo quartile), ossia a quell'unico valore reale \tilde{x} per il quale $|\{i \mid x_i < \tilde{x}\}| < \frac{n}{2}$ e $|\{i \mid x_i > \tilde{x}\}| < \frac{n}{2}$.

((2pt)) Fornire un modello di PL per il computo di tale valore mediano.

((1pt)) Caratterizzare lo spazio delle soluzioni ottime del modello di cui al punto precedente nel caso in cui n sia pari.

((1pt)) Quante possono essere le soluzioni ottime di base nel caso in cui n è pari?

((1pt)) Quando accade che le soluzioni ottime di base siano degeneri?

((2pt)) Dove $\hat{x} := \max_{i=1, \dots, n} x_i$ e $\tilde{x} := \min_{i=1, \dots, n} x_i$, fornire un modello di PL per il computo di $\frac{\hat{x} + \tilde{x}}{2}$ a partire dai soli parametri x_1, x_2, \dots, x_n in input.

((1pt)) Quando accade che le soluzioni ottime di base di questo secondo modello siano degeneri?

Problema 2 (8 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G-9.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H	

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

2.3 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

2.5(2pt) Quale è il minimo costo di una traversata da A-1 a G-9?

2.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

consegna	numero percorsi
A-1 → G-9	
B-3 → G-9	
A-1 → F-6	
passaggio per D-5	
minimo costo	
numero di min-cost paths	

Problema 3 (3+2+1+3+2+1=12 punti):

Dobbiamo decidere dove tenere aperti dei centri di pronto soccorso su 3 possibili località L_1 , L_2 ed L_3 . I costi per il mantenimento sono come da seguente tabella:

Località 1	Località 2	Località 3
150	80	210

I centri mantenuti aperti dovranno comunque garantire il servizio a 5 borghi, B_1 , B_2 , B_3 , B_4 e B_5 , con costi di servizio approssimativamente espressi dalla seguente matrice di trasporto (costi per autoambulanze e guardie mediche + ribaltamento dei disservizi dovuti alla distanza tradotti in termini contabili come da studi di settore):

	Località 1	Località 2	Località 3
Borgo 1	1	70	60
Borgo 2	80	1	100
Borgo 3	90	110	1
Borgo 4	70	60	50
Borgo 5	30	40	60

Vogliamo stabilire quali centri lasciare aperti, ed i relativi bacini di utenza, in modo da minimizzare le spese. L'1% del risparmio verrà devoluto sul tuo fondo di premialità, gravato da IVA al 21%.

((3pt)) Si formuli questo problema di ottimizzazione come un problema di programmazione lineare intera (PLI).

((2pt)) Punti bonus se nella tua formulazione PLI riuscirai a tenere al minimo il numero di variabili soggette a vincoli di interezza.

((1pt)) Fornire un modello di PLI generale che si riferisca ad un numero n_L arbitrario di località candidate al collocamento delle facility ed ad un numero n_U di utenze da coprire.

((3pt)) Dimostrare che il problema generale di facility location che hai modellato al punto precedente è NP-hard. (Mi basta l'idea della riduzione, non chiedo dimostrazioni formali. Ma la proposta di riduzione deve essere chiara ed esplicita).

((2pt)) Secondo te, considerando il rilassamento ottenuto ignorando i vincoli di interezza, esisterà comunque sempre sempre una soluzione ottima che sia anche intera? Fornire argomentazione a supporto (dimostrazione) oppure controesempio.

((1pt)) Riguardo alla questione di cui al punto precedente, perché reputi non avrebbe potuto essere ragionevole attendersi il contrario?

Problema 4 (7 punti):

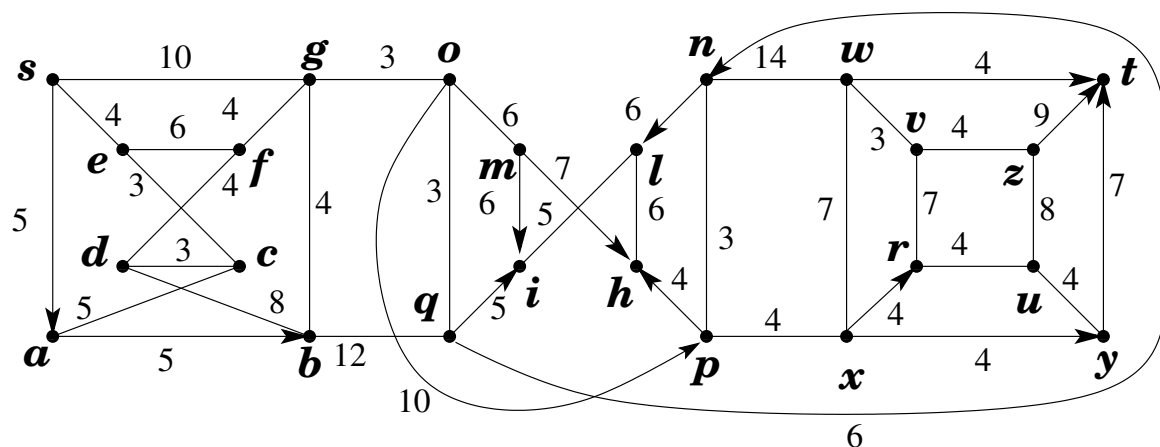
Progettare un problema di PL (od una famiglia di tali problemi), od argomentare che una tal cosa non possa esistere.

- 4.1 (2pt) progettare una famiglia P_n , $n \in \mathbf{N}$, di problemi di programmazione lineare in forma standard tale che P_n abbia esattamente n soluzioni di base ottime;

- 4.2 (2pt) progettare una famiglia Q_n , $n \in \mathbf{N}$, di problemi di programmazione lineare in forma standard tale che il duale di Q_n abbia almeno n soluzioni di base ottime;
- 4.3 (2pt) progettare un problema che abbia $(0, 3, 3)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$ tra le soluzioni ammissibili e $(2, 2, 2)$ come unica soluzione ottima.
- 4.4 (1pt) progettare un problema che abbia un'unica soluzione di base ottima, ma diverse soluzioni ottime non di base.

Problema 5 (10 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 5.2.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.
- 5.3.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 5.4.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.5.(1pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.6.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Problema 6 (6 punti):

Si ricerchino soluzioni algoritmiche per il seguente modello della Ricerca Operativa.

KNAPSACK' variante del KNAPSACK classico con vincolo sulla parità del numero di oggetti presi.

INPUT: Due numeri naturali n, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \dots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme S degli oggetti assegnati in input, di cardinalità $|S|$ pari, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B , e massimizzando il valore totale raccolto.

((1pt)) Si osservi come sia possibile ridurre il KNAPSACK classico alla versione KNAPSACK' di attuale interesse.

((1pt)) Se ne deduca che KNAPSACK' è NP-hard in senso debole.

((1pt)) Definire una famiglia di (al più un numero pseudo-polinomiale di) sottoproblemi chiusa rispetto ad induzione ed atta a risolvere KNAPSACK'.

((1pt)) Fornire una ricorrenza risolutiva per i sottoproblemi della famiglia proposta.

((1pt)) Trattare i casi base.

((1pt)) Specificare come vada letto dalla tabella il valore della soluzione ottima e come essa possa poi essere ricostruita.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo**

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.