# Esame di Ricerca Operativa - 12 giugno 2017
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
# - CORREZIONE - punti in palio: ??, con voto $\geq$ punti

**Problema 1 (8 punti):**

Si assuma che un politopo $P$ venga rappresentato fornendo la lista $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ dei suoi vertici. Quindi $P = conv(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ è combinazione convessa dei $p$ punti dati, e, inoltre, ciascuno di essi è garantito essere un vertice di $P$. Nelle seguenti domande, parte del punteggio si ottiene illustrando la risposta sull'esempio coi $p = 6$ vertici: $v_1 = (-1, 0, 0)$, $v_2 = (0, -1, -1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$, $v_4 = (0, 1, -1)$, $v_5 = (0, 1, 1)$, $v_6 = (1, 0, 0)$. Elaborando la risposta come metodo generale si ottengono gli altri punti.

**(1+1 pt)** descrivi un algoritmo efficiente che, data anche una funzione obiettivo $c \in \mathbb{R}^n$ (esempio $(1, 2, 3)$), determini la soluzione ottima del problema $\max\{c^T x : x \in P\}$.

**(1 pt)** dato anche un punto $x \in \mathbb{R}^n$, si formuli come un problema di PL la questione generale di stabilire se $x$ appartenga o meno a $P$.

**(1 pt)** dedurre dal punto precedente l'esistenza di un algoritmo polinomiale per il seguente problema di riconoscimento: dati i punti $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$, stabilire se esista un politopo $P$ del quale essi costituiscano precisamente l'insieme dei vertici.

**(1+1 pt)** specificato uno dei vertici, ad esempio $v_1 = (-1, 0, 0)$, si offra una descrizione dell'insieme $W = \{c \in \mathbb{R}^n : v_1 \in \arg\max_{x \in P} c^T x\}$ di quelle funzioni obiettivo $c$ che vedano $v_1$ come soluzione ottima al problema di massimizzare $c^T x$ su $P$.

**(1+1 pt)** quali delle seguenti affermazioni sono sbagliate (quì lo **1 pt** aggiuntivo viene con l'elaborazione dei controesempi per le affermazioni false): $W$ è un poliedro, $W$ è un politopo, $W$ è un cono poliedrale.

**svolgimento.**

**(1+1pt)** Nell'esempio il valore ottimo è 5 e la soluzione ottima è unica ed è costituita dal vertice $v_5$ che, solo vertice (e quindi unico punto), massimizza la valutazione della funzione obiettivo entro $P$. Le valutazioni sui vertici sono le seguenti: $c^T v_1 = (1, 2, 3)(-1, 0, 0)^T = -1$, $c^T v_2 = (1, 2, 3)(0, -1, -1)^T = -5$, $c^T v_3 = (1, 2, 3)(0, -1, 1)^T = 1$, $c^T v_4 = (1, 2, 3)(0, 1, -1)^T = -1$, $c^T v_5 = (1, 2, 3)(0, 1, 1)^T = 5$, $c^T v_6 = (1, 2, 3)(1, 0, 0)^T = 1$.

In generale, almeno un vertice del politopo dovrà comparire tra le soluzioni ottime, quindi $\max\{c^T x : x \in P\} = \max\{c^T x : x \in \{v_1, \ldots, v_p\}\}$ e la ricerca di una soluzione ottima corrisponde alla ricerca del massimo tra $p$ prodotti scalari.

**(1 pt)** La domanda è se un punto $x \in \mathbb{R}^n$ appartenga a $P = conv(v_1, v_2, \ldots, v_p) := \{\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda \geq \mathbf{0}\}$. Ossia se il problema di PL in forma canonica $\{\lambda \in \mathbb{R}^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = x : \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \lambda \geq \mathbf{0}\}$ ammetta soluzione.

**(1 pt)** Esplicitiamo prima le premesse ovvie: comunque siano stati scelti i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p$, i vertici di $P = conv(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ ricadono tutti nell'insieme $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ — potrebbe però succedere che alcuni dei punti $v_i$ non risultino dei vertici in quanto si ritrovano nel mezzo di $conv(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ — in sostanza si chiede proprio di verificare che questo non succeda. Assumiamo che i punti $v_1, v_2, \ldots, v_p$ siano tutti distinti. Si noti che $v_i$ è vertice del politopo $conv(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ se e solo se $v_i \notin conv(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_p)$. Il problema si riduce pertanto a $p$ domande del tipo di cui al punto precedente, tutte formulabili come problemi di PL, e pertanto in P.

**(1+1pt)** $W = \{c \in \mathbb{R}^n : v_1 \in \arg\max_{x \in P} c^T x\} = \{c \in \mathbb{R}^n : c^T(v_1 - v_i) \geq 0\ \forall i \in \{2, 3, \ldots, p\}\}$. Nel caso di esempio, $W = \{c \in \mathbb{R}^n : c^T(-2, 0, 0) \geq 0, c^T(-1, 1, 1) \geq 0, c^T(-1, 1, -1) \geq 0, c^T(-1, -1, 1) \geq 0, c^T(-1, -1, -1) \geq 0\}$.

**(1+1pt)** $W$ è un cono poliedrale con vertice nell'origine, quindi un poliedro, ma non un politopo in quanto non bounded. Nel caso di esempio abbiamo infatti che $(-t, 0, 0)$ è in $W$ per ogni $t \geq 0$.

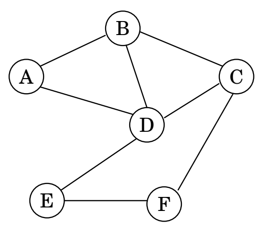
---

**Problema 2 (2+2+5=9 punti):**

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in $V$ è estremo di al più un arco in $M$. Un matching di $G$ è detto massimale se non esiste un altro matching di $G$ che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo $G$ in figura.

Quando ad ogni arco $e$ è associato un costo $w_e$, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.




| | $AB$ | $AD$ | $BC$ | $BD$ | $CD$ | $CF$ | $DE$ | $EF$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 12 | 13 | 15 | 14 | 11 | 16 | 17 | 18 |

Siamo interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

**(2pt)** Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo $G$ in figura.

**(2pt)** Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

**(5pt)** Dimostrare che la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico è un problema NP-hard riducendo ad esso il problema del minimo node cover.

**svolgimento.**

**(2pt)** Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = AB, AD, BC, BD, CD, CF, DE, EF$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Volendo minimizzare il costo del matching massimale, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min 12\, x_{AB} + 13\, x_{AD} + 15\, x_{BC} + 14\, x_{BD} + 11\, x_{CD} + 16\, x_{CF} + 17\, x_{DE} + 18\, x_{EF}$$

Abbiamo due insiemi di vincoli.

**matching.** Dobbiamo imporre che la soluzione sia un matching. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono ai nodi.

**nodo $A$:** $x_{AB} + x_{AD} \leq 1$;

**nodo $B$:** $x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} \leq 1$;

**nodo** $C$**:** $x_{BC} + x_{CD} + x_{CF} \leq 1$;

**nodo** $D$**:** $x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \leq 1$;

**nodo** $E$**:** $x_{DE} + x_{EF} \leq 1$;

**nodo** $F$**:** $x_{EF} + x_{CF} \leq 1$.

**massimalità.** Dobbiamo imporre che il matching sia massimale. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono agli archi.

**arco** $AB$**:** $x_{AB} + x_{AD} + x_{BC} + x_{BD} \geq 1$;

**arco** $AD$**:** $x_{AD} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

**arco** $BD$**:** $x_{BD} + x_{AB} + x_{BC} + x_{AD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

**arco** $BC$**:** $x_{BC} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{CF} \geq 1$;

**arco** $CD$**:** $x_{CD} + x_{BC} + x_{CF} + x_{AD} + x_{BD} + x_{DE} \geq 1$;

**arco** $CF$**:** $x_{CF} + x_{BC} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

**arco** $DE$**:** $x_{DE} + x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

**arco** $EF$**:** $x_{EF} + x_{DE} + x_{CF} \geq 1$.

**(2pt)** Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_{uv} \in \{0, 1\}$ per ogni arco $uv \in E$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del MAXIMAL-MATCHING di costo minimo.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{uv \in E} C_{uv} x_{uv}\,, \\
\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \text{ per ogni nodo } v \in V, \\
x_{uv} + \sum_{e \in \delta(u) \setminus \{uv\}} + \sum_{e \in \delta(v) \setminus \{uv\}} \geq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E, \\
x_{uv} \in \{0, 1\} \text{ per ogni arco } uv \in E.
\end{aligned}$$

**(5pt)** Partendo da un generico grafo non-pesato $H = (V, E)$ assegnatoci come istanza di NODECOVER, costruiamo un grafo pesato $G$ assegnando costo $M$ sufficientemente grande (si pensi $M = n + 1$, ma in realtà già $M = 2$ basterebbe) ad ogni arco di $H$, e aggiungendo poi, per ogni nodo $v$ di $H$, i due nodi $v'$ e $v''$ ed i due archi $vv'$ e $v'v''$ di peso 1 e 0 rispettivamente.

Lasciamo come esercizio di dimostrare i seguenti due lemmi.

**Lemma easy:** Se $H$ ammette un node cover $X$ con $|X| \leq k$, allora $G$ ammette un matching massimale $M$ di costo al più $k$.

**Lemma hard:** Se $G$ ammette un matching massimale $M$ di costo al più $k$ allora $H$ ammette un node cover $X$ con $|X| \leq k$.

**Problema 3 (2+2=4 punti):**

Sia $G = (V, E)$ un grafo che assumiamo corredato da una pesatura dei suoi archi $w : E \mapsto \mathbb{R}$.

**(2pt)** Sia $C$ un ciclo di $G$ e sia $e$ un arco di $C$ tale che $w(e) > w(f)$ per ogni arco $f \in C \setminus \{e\}$. Dimostrare che nessun albero ricoprente di peso minimo per $(G, w)$ può utilizzare l'arco $e$.

**(2pt)** Un sottografo $H = (U, F)$, $F \subseteq E$, di $G$ si dice ricoprente quando $U = V$. Si indichi come ridurre il problema di computare un sottografo ricoprente di $G$ di peso minimo al problema dell'albero ricoprente di peso minimo.

**dimostrazione (2pt).** Per assurdo: sia $T$ un albero ricoprente di peso minimo per $(G, w)$ ed assumiamo che $e \in T$. Il grafo $(V, T \setminus \{e\})$ conta pertanto due componenti connesse che chiamiamo $A$ e $B$. Sia $F \subseteq E$ il taglio costituito da quegli archi di $G$ con un estremo in $A$ e l'altro in $B$. Si noti che $e \in C \cap F$. Poichè ogni taglio ed ogni ciclo avranno sempre un numero pari di archi in comune (dopo aver contratto gli archi in $C \setminus F$ rimarremo con un ciclo pari, $(A, B)$ ne offre certificato di bipartizione) allora esiste un arco $f \in (F \cap C) \setminus \{e\}$. Ora $T \setminus \{e\} \cup \{f\}$ è un albero ricoprente di $G$ in quanto la connessione è stata ristabilita appartenendo $F$ al taglio tra $A$ e $B$. Inoltre, $w(T \setminus \{e\} \cup \{f\}) = w(T) - w(e) + w(f) < w(T)$ per ipotesi. Questo contraddice che $T$ sia un albero ricoprente di peso minimo per $(G, w)$.

**riduzione (2pt).**

1. Sia $E_{\leq 0}$ l'insieme di quegli archi di $G$ a peso non-positivo;
2. Sia $G'$ il grafo ottenuto da $G$ contraendo tutti gli archi in $E_{\leq 0}$;
3. Si ritorni $E_{\leq 0} \cup MST(G')$.

**Problema 4 (7 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 42 | 44 | 49 | 41 | 52 | 63 | 69 | 40 | 60 | 86 | 45 | 66 | 54 | 79 | 81 | 43 | 46 | 38 | 61 | 80 | 48 | 64 | 73 | 47 |

**4.1(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.2(1pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice $i$ tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'$i$-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.4(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.5(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| crescente | | |
| N-sequenza | | |
| crescente con 40 | | |
| evita i primi 4 | | |
| evita da 13-mo a 16-mo | | |
| minima copertura | | |

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 6 | 4 | 1 | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 34 | 42 | 44 | 49 | 41 | 52 | 63 | 69 | 40 | 60 | 86 | 45 | 66 | 54 | 79 | 81 | 43 | 46 | 38 | 61 | 80 | 48 | 64 | 73 | 47 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 | 2 | 6 | 8 | 4 | 7 | 6 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 7 | 9 | 6 | 8 | 9 | 8 |
| ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ |

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| crescente | 9 | 34, 42, 44, 49, 52, 63, 69, 79, 81 |
| N-sequenza | 14 | 34, 42, 44, 49, 52, 63, 69, 79, 81, 43, 46, 61, 64, 73 |
| crescente con 40 | 7 | 34, 40, 45, 54, 61, 64, 73 |
| evita i primi 4 | 6 | 41, 52, 63, 69, 79, 81 |
| evita da 13-mo a 16-mo | 9 | 34, 42, 44, 49, 52, 60, 61, 64, 73 |
| minima copertura | 9 | $\underbrace{34}_{1};\ \underbrace{42, 41, 40, 38}_{2};\ \underbrace{44, 43}_{3};\ \underbrace{49, 45}_{4};\ \underbrace{52, 46}_{5};\ \underbrace{63, 60, 54, 48}_{6};\ \underbrace{69, 66, 61}_{7};\ \underbrace{86, 79, 64, 47}_{8};\ \underbrace{81, 80, 73}_{9}$ |

Dove per il penultimo punto (4.5) si é osservato dalla tabella di DP (ultima riga) che:

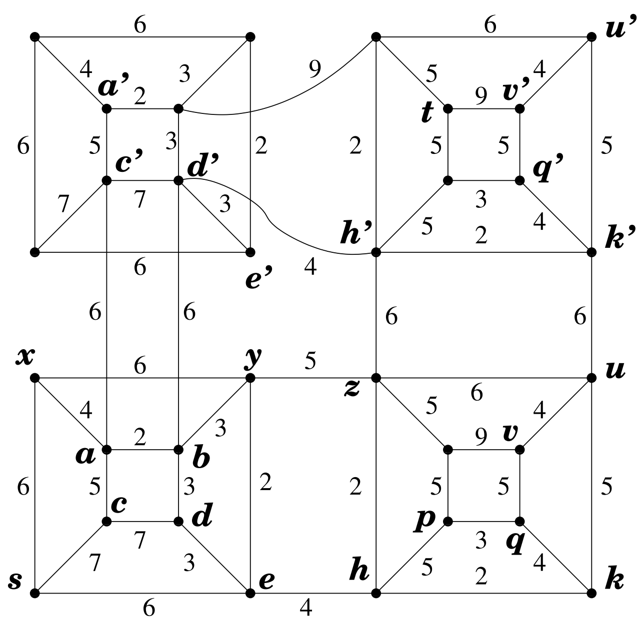
per raccogliere 8 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 86,
per raccogliere 7 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 69,
per raccogliere 6 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 60,
per raccogliere 5 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 52,
per raccogliere 4 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 45,
per raccogliere 3 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 44,
per raccogliere 2 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 40,
per raccogliere 1 elementi sul solo lato sinistro, esso deve valere almeno 34,

e si sono poi ordinatamente combinate queste osservazioni con analoghe osservazioni concernenti le migliori (non-dominate) scelte relative al come giocarsi il lato destro, sempre come lette dalla tabella (prima riga).

Infine, per l'ultimo punto (4.6) ho costruito la sequenza decrescente $i$-esima collocando in essa tutti quei numeri della sequenza in input tali che la massima lunghezza di una sequenza crescente terminante in essi, come calcolata nell'ultima riga della tabella di PD, era precisamente $i$.

---

**Problema 5 (15 punti):**
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.




5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se $G$ e $G'$ è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Su $G$, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo $s$. Esprimere la famiglia di tali alberi.

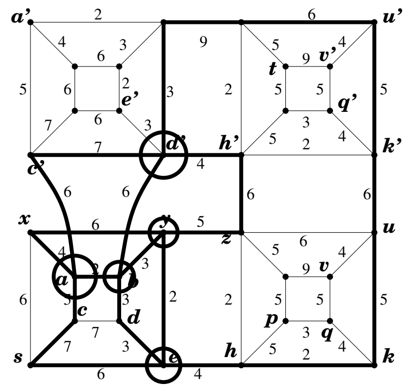
5.5.**(2pt)** Su $G$, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Su $G$, trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

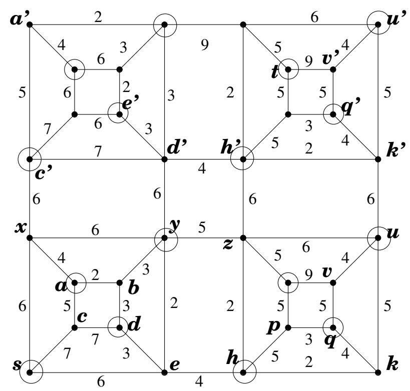
5.7.**(2pt)** Su $G$, trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

5.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

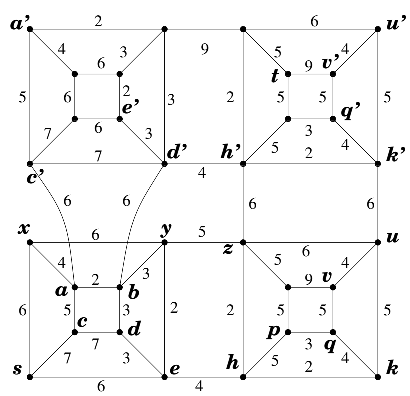
**risposte.** Il fatto che $G$ non sia planare (e che quindi sia necessaria la rimozione di almeno un arco per renderlo tale) può essere messo in evidenza esibendo la $K_5$ subdivision in figura.



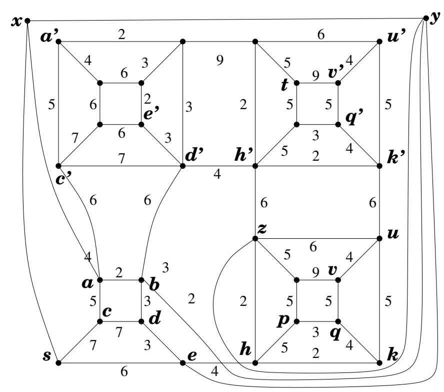

Il fatto che $G'$ è planare è messo in evidenza (=certificato) dal seguente planar embedding. Nella stessa figura è inoltre esibito un certificato di bipartizione di $G'$.



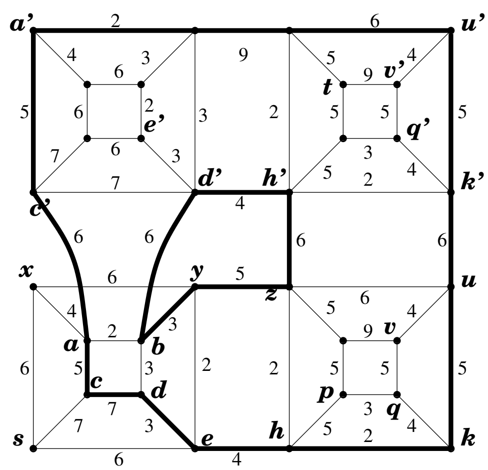

L'embedding di $G'$ dato sopra suggerisce la seguente rappresentazione di $G$ volta a minimizzare il numero di incroci tra archi.




Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al drawing fornito sopra. In esso è per altro possibile scorgere come la rimozione di un solo arco (arco $xy$) basti a rendere il grafo planare. Come visto sopra, meno di così non è possibile. La seguente figura mostra come anche la sola riduzione dell'arco $eh$ basti ad ottenere un grafo planare, inoltre quì i due archi che incrociano $eh$ sono incidenti in uno stesso nodo. Basterebbe pertanto concedere ad $eh$ di scavalcare un nodo (il nodo $y$) senza fare tappa in esso per ottenere un planar embedding di $G$, altrimenti impossibile.

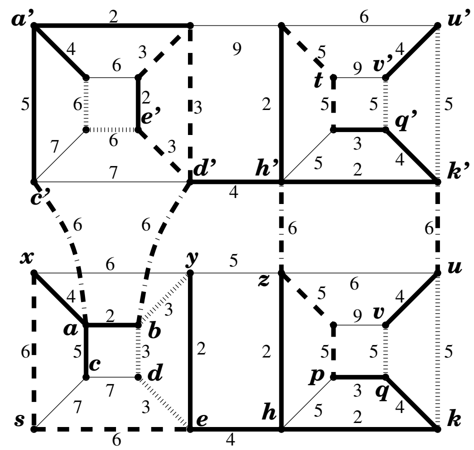


Il fatto che $G$ non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.

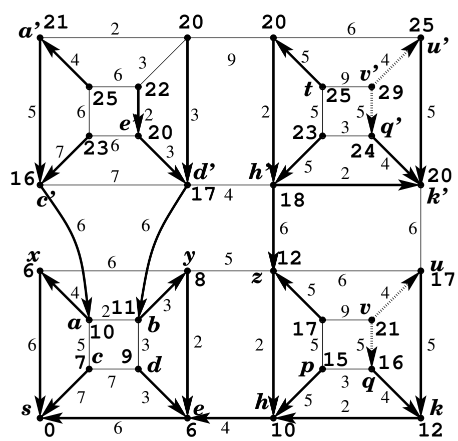


In effetti la rimozione dei 2 soli archi presenti in $G$ ma non in $G'$ basterà a rendere $G$ bipartito come $G'$. E potrà essere riutilizzato il certificato di bipartizione di $G'$. Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 2.

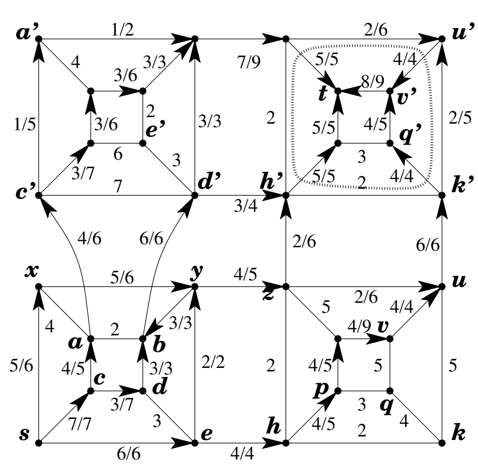
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $3^2 \cdot 2^6 \cdot 4 = 2304$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 nel cubo in alto a sinistra (linea tratteggiata) e 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 nel cubo in basso a sinistra (linea sfumata), uno dei 2 archi di peso 6 incidenti in $s$, uno dei 2 archi di peso 6 nel quadrato in alto a sinistra (linea sfumata), uno dei 2 archi di peso 5 incidenti in $t$, uno dei 2 archi di peso 5 analogamente tratteggiati nel cubo in basso a destra, uno dei 2 archi di peso 5 in linea sfumata nel cubo in alto a destra e uno dei 2 archi di peso 5 in linea sfumata nel cubo in basso a destra. Infine, 1 dei 4 archi di peso 6 che uniscono la parte alta a quella bassa della figura ed in linea tratto-puntinata.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo $s$. Ci sono $2^2 = 4$ alberi dei cammini minimi dal nodo $s$ e ciascuno di essi include i 29 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $v$, e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $v'$.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di $s$ al lato di $t$. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo $s,t$-taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

---

**Problema 6 (12 punti):**

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 10$, $x_4 = 20$, $x_5 = 28$ del seguente problema.

$$\max\ 3x_1 + 18x_2 + 36x_3 + 60x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 24 \\ x_3 + x_4 & \leq 20 \\ x_5 + x_6 & \leq 28 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 & \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

6.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

6.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

6.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

6.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

6.5.**(2pt)** Dire per quali valori dei parametri $C_5$ e $C_6$ la soluzione assegnata è ottima indicando con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

6.6.**(3+3pt)** Costruire un piccolo problema dove le condizioni degli scarti complementari non bastino a ricostruire il certificato di ottimalità dell'unica soluzione ottima. Svolgere l'analogo esercizio evidenziando come il problema di ricostruire almeno un certificato altro non sia che un problema di programmazione lineare più piccolo.

**svolgimento.** Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (12) + (10) & = 22 \leq 24 \\ (0) + (20) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (28) + (0) & = \mathbf{28} \leq 28 \\ (0) + (28) + (12) & = \mathbf{40} \leq 40 \\ (20) + (0) + (10) & = \mathbf{30} \leq 30 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$
\min \; 24\,y_1 + 20\,y_2 + 28\,y_3 + 40\,y_4 + 30\,y_5
$$
$$
\begin{cases}
y_1 + y_4 \geq 3 \\
y_1 + y_5 \geq 18 \\
y_2 + y_4 \geq 36 \\
y_2 + y_5 \geq 60 \\
y_3 + y_4 \geq C_5 \\
y_3 + y_5 \geq C_6 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$
\begin{cases}
\quad + y_4 = 3 \\
\quad + y_5 = 18 \\
y_2 + y_5 = 60 \\
y_3 + y_4 = C_5
\end{cases}
$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 42, C_5 - 3, 3, 18)$. Dobbiamo ora verificare per quali valori di $C_5$ e $C_6$ questa soluzione duale di base è ammissibile. Le variabili duali sono tutte non negative per $C_5 \geq 3$, mentre per $C_5 < 3$ una variabile duale é negativa e la soluzione primale assegnata non é ottima. Ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6), almeno nel caso ancora da determinare di $C_5 \geq 3$.

Analisi del terzo vincolo:

$$
y_2 + y_4 \geq 36
$$

dove $y_2 = 42$ e $y_4 \geq 0$ é di necessità soddisfatto.

Resta da vedere il sesto vincolo

$$
y_3 + y_5 \geq C_6
$$

in corrispondenza della soluzione duale reperita $(0, 42, C_5 - 3, 3, 18)$, unica soluzione duale alla primale assegnata.

$$
C_5 - 3 + 18 \geq C_6
$$

possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima** se e solo se $C_5 \geq 3$ e $C_5 \geq C_6 - 15$ sono entrambe soddisfatte.

**(3+3pt)** Per i primi 3 punti dobbiamo comporre un problema in cui sa soluzione ottima sia unica e degenere. Ad esempio, il problema

$$
\max \; x_1 + x_2
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 \leq 1 \\
x_2 \leq 1 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

la cui soluzione ottima $x_1 = x_2 = 1$ è unica e degenere per il simultaneo annullarsi di tutte e tre le variabili di slack associabili ai 3 vincoli. I due vincoli di non negatività non erano necessari ad ottenere un esempio, ma li abiamo messi per una preferenza verso la forma standard cui siamo più abituati.

Per gli ulteriori 3 punti, lasciamo a voi l'esercizio di vedere cosa succede imponendo le condizioni degli scarti complementari. Questa volta la soluzione del problema del duale non verrà univocamente ricostruita. Riscontrerete un grado di libertà. Ma dovrebbe esservi possibile giocarvelo in modo da ottenere una soluzione duale ammissibile, dato che la soluzione primale era effettivamente ottima.

Si osservi come, in generale, il problema di ricostruire un certificato di ottimalità per una soluzione primale assegnata altro non sia che un problema di programmazione lineare più piccolo (nel senso che cala la monovariante $m + n$ data dalla somma del numero di variabili e di vincoli). Se il problema assegnato era in forma standard ci ritroviamo con un problema in forma standard e senza funzione obiettivo. Una sua eventuale soluzione ammissibile si autocertifica.

---

**CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME**

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

**gestione dei voti conseguiti.**

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.