Esame di Ricerca Operativa - 21 febbraio 2017
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: ??, con voto $\geq$ punti

Problema 1 (5+5=10 punti):

Per fare un auto servono 4 ruote, un motore, ed un volante. Alla BasicCars abbiamo quattro operai (Dante, Carlo, Bruno ed Angela). Sebbene siano stati assunti con contratti diversi, con un numero diverso di ore previsto, ciascuno di loro sa produrre qualsiasi componente base, seppur con diverse produttività (espresse in unità di componente per ogni ora). I parametri in questione sono catturati nella seguente tabella:

Operaio	Ore a contratto	Produttività		
		ruote (R)	motori (M)	sterzi (S)
Angela (A)	200	10	15	20
Bruno (B)	80	20	5	10
Carlo (C)	150	15	10	5
Dante (D)	100	10	15	5

(5pt) Si vuole determinare il numero di ore che ciascun operaio debba essere assegnato su ciascuna linea di produzione (R, M o S) in modo da massimizzare la quantità di auto complessivamente prodotte.

(5pt) Si evidenzi come, volendo insistere sull'interezza della soluzione, il problema generale risulti sufficientemente espressivo da poter mappare in esso istanze generiche di KNAPSACK.

svolgimento. (5pt) Lo formuleremo come un problema di PL. La prima cosa da fare è individuare lo spazio delle scelte, ossia quanto in sostanza competa alla nostra responsabilità manageriale, mentre ogni altra cosa finisce con l'esserne in conclusione determinata. Er boss stabilisce quante ore $h_{i,j}$ l'operaio $i \in \{A, B, C, D\}$ debba dedicare a ciascuna linea $j \in \{R, M, S\}$, e questo determina ogni cosa a seguire. In linea di principio non serve introdurre ulteriori variabili, le 12 variabili introdotte sopra catturano tutto il non-determinismo insito in questo problema 'NPortante nelle applicazioni. Sappiamo tuttavia che a volte l'introduzione di qualche variabile ausiliaria può facilitarci nel meglio spezzettare alcune determinazioni derivate. Si noti che la quantità di automobili completate è condizionata dal componente resa disponibile in minor quantità. Se indichiamo con y_j la quantità di componente j ($j \in \{R, M, S\}$) prodotta complessivamente dai 4 operai, la quantità di auto ottenute, nostra funzione obiettivo che intendiamo massimizzare, risulta esprimibile nella forma $\min\{y_R, y_M, y_S\}$ che non è lineare, ma è facilmente linearizzabile inserendo una variabile y cui si richieda di soddisfare i vincoli $y \leq y_j$, $j \in \{R, M, S\}$. Se l'introduzione delle y_j è in linea di principio evitabile, non altrettanto può dirsi della y che risulta determinata non solo dalle scelte su come impiegare gli operai ma anche dal fatto che si spinge per massimizzare le auto prodotte.

L'obiettivo é quello di massimizzare il numero di automobili prodotte

$$\max y\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli sulle componenti necessarie alla realizzazione delle auto

$$y = 10x_{A,R} + 20x_{B,R} + 15x_{C,R} + 10x_{D,R} \qquad \text{(ruote prodotte)}$$
$$y = 15x_{A,M} + 5x_{B,M} + 10x_{C,M} + 15x_{D,M} \qquad \text{(motori prodotti)}$$
$$y = 20x_{A,S} + 10x_{B,S} + 5x_{C,S} + 5x_{D,S} \qquad \text{(sterzi prodotti)}$$

vincoli da contratto sulle ore

$$x_{A,R} + x_{A,M} + x_{A,S} \leq 200 \qquad \text{(ore a contratto per Angela)}$$
$$x_{B,R} + x_{B,M} + x_{B,S} \leq 80 \qquad \text{(ore a contratto per Bruno)}$$
$$x_{C,R} + x_{C,M} + x_{C,S} \leq 150 \qquad \text{(ore a contratto per Carlo)}$$
$$x_{D,R} + x_{D,M} + x_{D,S} \leq 100 \qquad \text{(ore a contratto per Dante)}$$

vincoli di non negativitá

$$x_{A,R}, x_{A,M}, x_{A,S}, x_{B,R}, x_{B,M}, x_{B,S}, x_{C,R}, x_{C,M}, x_{C,S}, x_{D,R}, x_{D,M}, x_{D,S} \geq 0.$$

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili $x_{i,j}$ non siano vincolate ad essere intere in modo da poter proporre una modellazione di PL (per la quale sono a disposizione algoritmi polinomiali). Introducendo il vincolo di interezza su queste variabili otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero). Facendo questo passiamo tuttavia da una ad una modellazione PLI (problema NP-completo).

(5pt) Vogliamo mostrare che vi sono ottime ragioni per accontentarsi dell'approssimazione introdotta rilassando i voncoli di integralità: senza tale semplificazione il problema risulta NP-completo in quanto possiamo mappare in esso istanze generiche di KNAPSACK. Siano $(val_i, peso_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ delle coppie peso valore atte a descrivere n oggetti tra cui scegliere quali infilare in uno zaino di capacità W. La domanda è se esista un sottoinsieme di indici di oggetti $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ che possano essere accomodati nello zaino in quanto $\sum_{i \in I} peso_i \leq W$ e che totalizzino un valore complessivo $\sum_{i \in I} val_i \geq Q$ tale da raggiungere un certo quorum Q dato anch'esso in input. Mostriamo di seguito come sia sempre possibile mappare tale istanza nel problema che ci è stato chiesto di analizzare anche nei suoi aspetti computazionali. Formuliamo la generica domanda di KNAPSACK appena descritta come segue. Ci chiediamo se sia possibile costruire un'automobile, dove ogni automobile abbia bisogno di Q marmitte, $\sum_{i=1}^{n} peso_i - W$ tubi di scarico, e di un fusibile di tipo i per $i = 1, \ldots, n$. Disponiamo di $2n$ operai, con l'operaio $(2i - 1)$ assunto con un contratto di val_i ore che potrebbe impiegare per produrre una marmitta all'ora oppure, impiegando tutte le sue val_i ore, sarebbe in grado di costruire un fusibile di tipo i, per $i = 1, \ldots, n$. Sempre per $i = 1, \ldots, n$, anche l'operaio $2i$, disponendo di tutte e $peso_i$ le sue ore a contratto, sarebbe in grado di costruire un fusibile di tipo i, ma potrebbe altresì impiegare quel tempo per costruire tubi di scappamento alla velocità di un tubo di scappamento all'ora. La descrizione della riduzione è ora completa in tutti i suoi parametri e struttura. In pratica vogliamo che tutte le ore degli operai di indice pari siano impiegate nella produzione di tubi di scappamento, tranne al più W di esse. Si noti però che per ciascuno di questi operai di indice pari che non realizzi tutti i suoi $peso_i$ tubi di scappamento, meglio lo faccia per una buona causa: realizzerà lui il fusibile di tipo i (e non produrrà quindi alcun tubo di scappamento); ciò consentirà all'operaio $(2i-1)$ di concentrasi esclusivamente sulle marmitte producendone val_i.

Lasciamo per esercizio la dimoastazione del “lemma facile”:

> Se con riferimento all'istanza originaria di Knapsack esiste un sottoinsieme di indici di oggetti $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $\sum_{i \in I} peso_i \leq W$ e $\sum_{i \in I} val_i \geq Q$, allora la nostra azienda sarà in grado di produrre un'automobile.

e del “lemma difficile”:

> Se l'azienda è in grado di produrre un'automobile allora esiste un sottoinsieme di indici di oggetti $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $\sum_{i \in I} peso_i \leq W$ e $\sum_{i \in I} val_i \geq Q$.

Problema 2 (4+4=8 punti):

Si assuma assegnato un grafo diretto $D = (V, A)$. Per ogni nodo $v \in V$ indichiamo con $N^+(v)$ l'insieme di quei nodi che sono teste di archi in A con coda in v, e con $N^-(v)$ l'insieme di quei nodi che sono coda di archi in A con testa in v. Un sottoinsieme di nodi $K \subseteq V$ è un *kernel* di D se rispetta le due sequenti proprietà:

K **è stabile** per nessun arco $(u, v) \in A$ si ha che $\{u, v\} \subseteq K$;

K **è 1-raggiungibile** per ogni $u \in V \setminus K$ esiste un nodo in $N^+(u) \cap K$.

(4pt) Formulare come un problema di ILP la domanda se D abbia un kernel.

(4pt) Si dimostri che ogni DAG ha un unico kernel dettagliando come costruirlo.

svolgimento. (4pt) La prima cosa da fare è introdurre delle variabili che consentano di descrivere lo spazio delle scelte. La nozione di vettore caratteristico di un sottoinsieme (in questo caso dell'ipotetico kernel) si presta a fagiolo: per ogni $v \in V$ una variabile booleana x_v è intesa ad indicare l'inclusione $v \in K$ (se $x_v = 1$) oppure l'esclusione $v \notin K$ (se $x_v = 0$). Ed ecco una formulazione ILP della domada che ci preme trattare:

$$\begin{aligned} x_u + x_v &\leq 1 \quad \text{per ogni } (u, v) \in A \\ x_u + \sum_{v \in N^+(u)} x_v &\geq 1 \quad \text{per ogni } u \in V \\ x_v &\in \{0, 1\} \quad \text{per ogni } v \in V \end{aligned}$$

(4pt) Ogni DAG $D = (V, A)$ con $V \neq \emptyset$ ha almeno un pozzo, e questo fà da punto di partenza per un approccio ricorsivo a molti problemi su DAGs come questo. Ogni pozzo di D deve appartenere infatti ad ogni kernel di D se vogliamo ripettare la 1-raggiungibilità, e, al tempo stesso, ogni nodo adiacente ad un qualche pozzo deve rimanere fuori da ogni kernel per il rispetto della stabilità. Una volta rimossi tutti questi nodi a destino già determinato, rimaniamo con un nuovo DAG D', dove esistenza ed unicità del kernel ci vengono garantite dall'ipotesi induttiva. Basta solo verificare che aggiungendo al kernel di D' i pozzi di D

si ottiene effettivamente un kernel di D, ossia rimane solo da verificare la stabilità e la 1-raggiungibilità di quella che in fondo è l'unica proposta possibile per un kernel di D. La verifica vien docile come un agnello.

Problema 3 (3 punti):

Si dice che un grafo G contiene una suddivisione di un grafo H quando esista un sottografo di G che è isomorfo ad una suddivisione di H. Si dice che G ha un H minor se un grafo isomorfo ad H può essere ottenuto partendo da G tramite una sequenza di deletions e contractions. Dimostrare che se G contiene una suddivisione di H allora ha H come minor.

dimostrazione. Sia H' un sottografo di G isomorfo ad una suddivisione di H. Si applichi innanzitutto la seguente procedura, che mostra come ogni sottografo H' di G sia un minore di G:

let $G' := G$;
assert(H' è sottografo di G');
while $\exists e \in E(G') \setminus E(H')$
    if (e è un bridge di G') .and. ($e \not\subseteq H$)
        $G' := G' \setminus e$;
    else
        $G' := G'/e$;
    assert(H' è sottografo di G');

Possiamo quindi assumere che G sia una suddivisione di H. Si applichi quindi la seguente procedura, che mostra come sia sempre possibile ottenere da un grafo G, e tramite sole contractions, ogni grafo di cui G sia una suddivisione:

let $G' := G$;
assert(G' è suddivisione di H);
while $\exists e \in E(H)$ cui corrisponda una sequenza $e_0, e_1, \ldots$ di archi in serie in G
    $G' := G/e_0$;
    assert(G' è suddivisione di H);

Problema 4 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.5(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
crescente		
N-sequenza		
crescente con 40		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	8
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

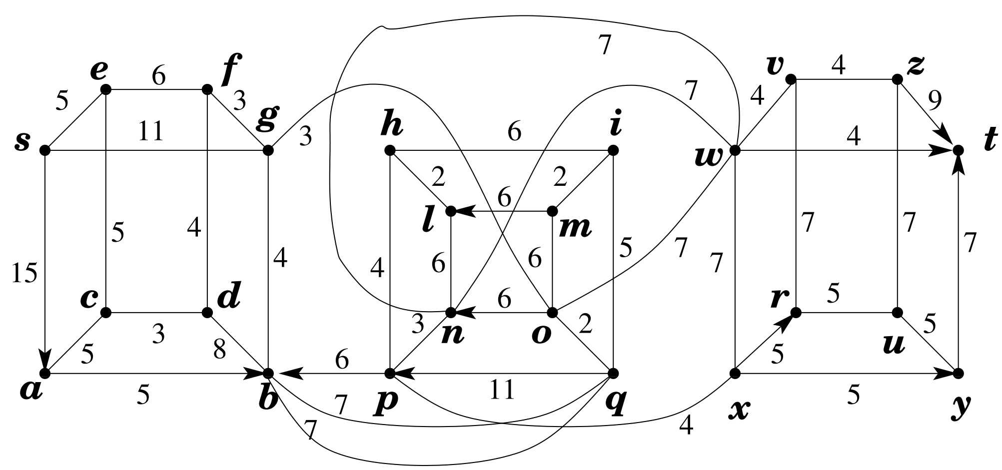
tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
crescente	9	34, 42, 44, 49, 52, 63, 69, 79, 81
N-sequenza	14	34, 42, 44, 49, 52, 63, 69, 79, 81, 43, 46, 61, 64, 73
crescente con 40	7	34, 40, 45, 54, 61, 64, 73
evita i primi 4	6	41, 52, 63, 69, 79, 81
evita da 13-mo a 16-mo	9	34, 42, 44, 49, 52, 60, 61, 64, 73
minima copertura	9	$\underbrace{34}_{1};\ \underbrace{42, 41, 40, 38}_{2};\ \underbrace{44, 43}_{3};\ \underbrace{49, 45}_{4};\ \underbrace{52, 46}_{5};\ \underbrace{63, 60, 54, 48}_{6};\ \underbrace{69, 66, 61}_{7};\ \underbrace{86, 79, 64, 47}_{8};\ \underbrace{81, 80, 73}_{9}$

Dove per il penultimo punto (4.5) si é osservato dalla tabella di DP (ultima riga) che:
per raccogliere 8 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 86,
per raccogliere 7 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 69,

per raccogliere 6 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 60,
per raccogliere 5 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 52,
per raccogliere 4 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 45,
per raccogliere 3 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 44,
per raccogliere 2 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere almeno 40,
per raccogliere 1 elementi sul solo lato sinistro, esso deve valere almeno 34,

e si sono poi ordinatamente combinate queste osservazioni con analoghe osservazioni concernenti le migliori (non-dominate) scelte relative al come giocarsi il lato destro, sempre come lette dalla tabella (prima riga).
Infine, per l'ultimo punto (4.6) ho costruito la sequenza decrescente i-esima collocando in essa tutti quei numeri della sequenza in input tali che la massima lunghezza di una sequenza crescente terminante in essi, come calcolata nell'ultima riga della tabella di PD, era precisamente i.

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G; (1) il grafo G'.

5.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ln.

5.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

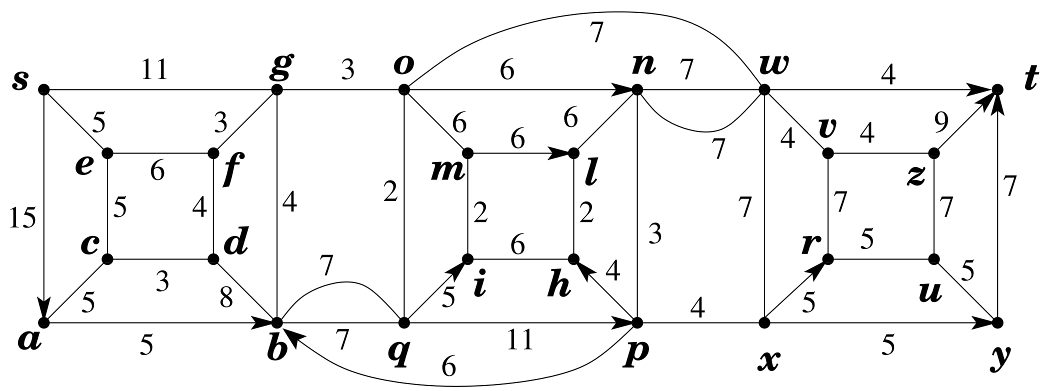
5.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

5.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

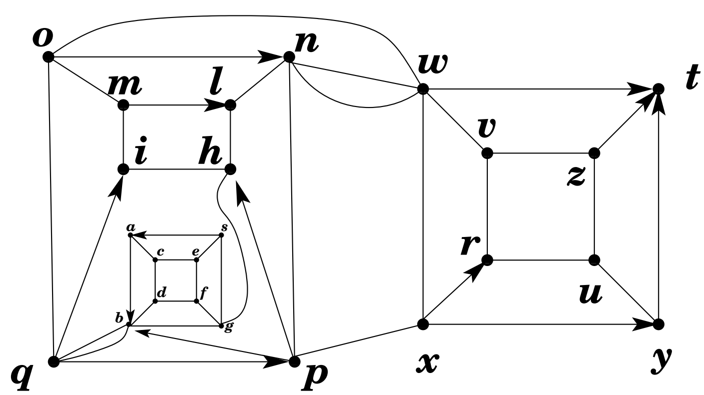
5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte. Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

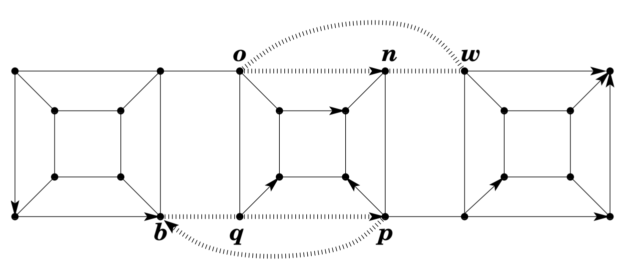


Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

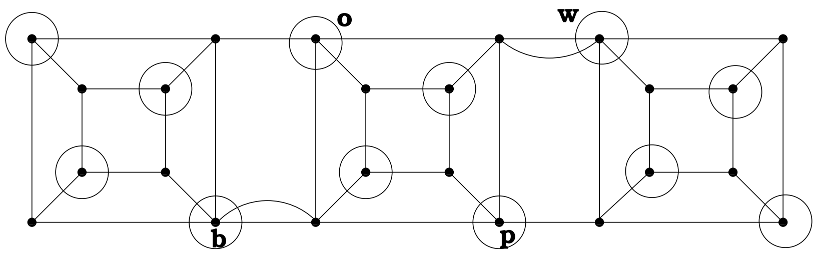
Per altro, anche G' è planare come messo in evidenza (=certificato) dalla seguente figura.



Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.

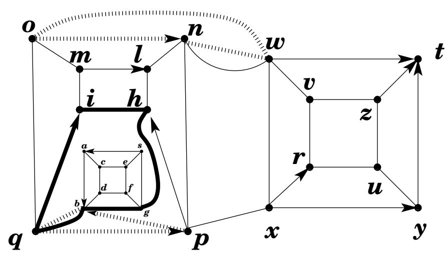


In effetti la rimozione di 2 soli archi (ow e pb) basta a rendere G bipartito come esibito in figura.

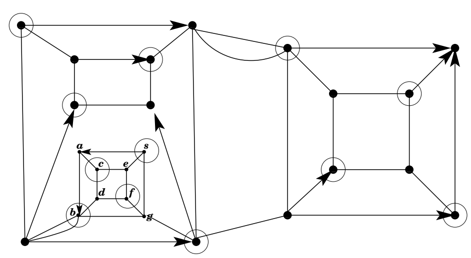


Il numero di archi la cui rimozione rende G bipartito è pertanto 2.

Il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh non é bipartito, ed almeno 3 archi devono essere rimossi per renderlo tale come messo in evidenza dai 3 cicli dispari disgiunti sugli archi esibiti nella seguente figura (sempre i 2 triangoli onw e bqp ma anche il ciclo $ihgbq$).



In effetti la rimozione di 3 soli archi dovrà bastare a rendere G' bipartito, in quanto, una volta rimosso l'arco gh, il grafo G' risulta essere un sottografo del grafo G, e quindi possiamo a quel punto riutilizzare la soluzione a 2 archi di G (ow e pb). Tale soluzione ottima (per altro non unica, riesci a scorgerne altre?) viene esibita nella seguente figura (aderendo ora al planar embedding adottato per G').



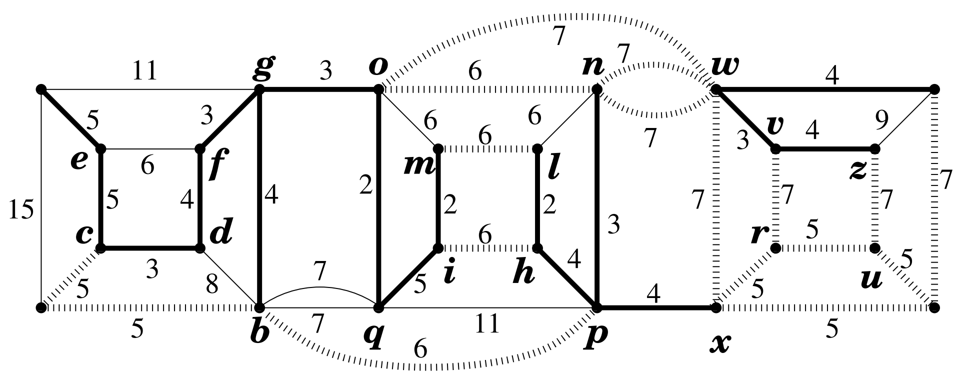
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 7 = 224$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on, ml, ih, pb), più uno qualsiasi dei 7 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 6 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G

contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a di cui si era detto più sopra).

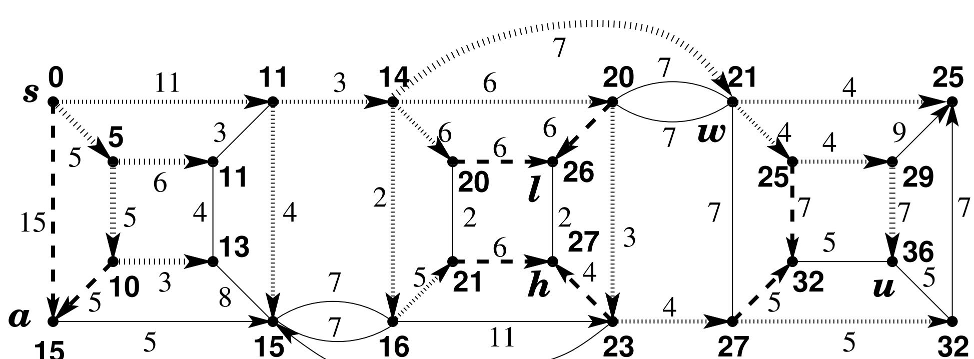
fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;

wx in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi w, v, z, t da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$;

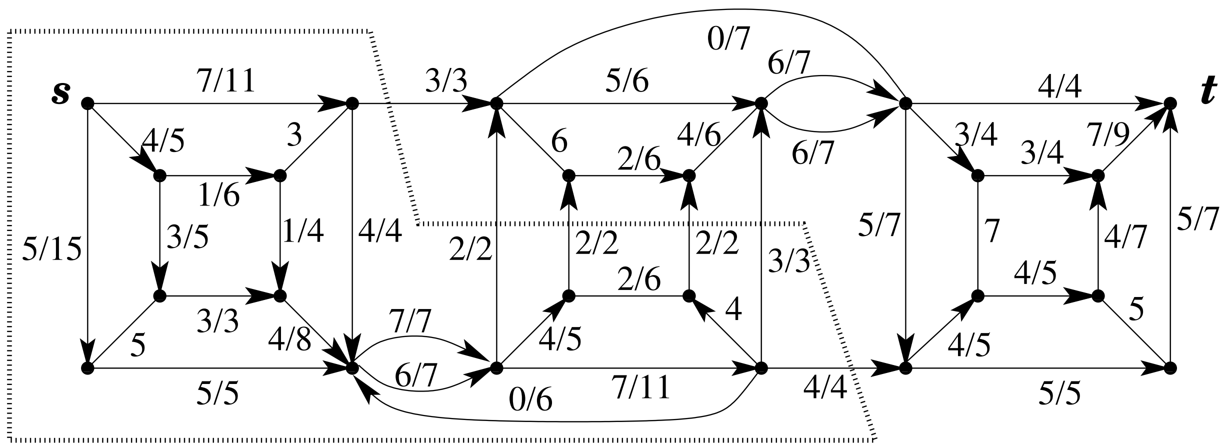
ln in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $lnph$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo r.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 6 (8 punti):

$$\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

6.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

6.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

6.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

6.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

6.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - x_0 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 5 + 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_0 \\ w_2 = -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 + x_0 \\ w_3 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 5 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max \; -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 10 + 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 6x_4 + w_2 \\ x_0 = 5 + 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 + w_2 \\ w_3 = 9 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 - w_2 + 2x_0 \\ x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - x_4 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\ w_3 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 + \frac{4}{5}x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 6x_1 - 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2\right) - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2$).

$$\max \; 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 - w_2 \\ x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - x_4 + \frac{1}{5}w_2 \\ w_3 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\max \ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_3 - \frac{17}{2}x_3 + 7x_4 - \frac{1}{2}w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = \frac{25}{4} - \frac{5}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 + 4x_4 - \frac{3}{4}w_2 \\
x_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 - x_4 + \frac{1}{4}w_2 \\
x_1 = \frac{25}{8} - \frac{5}{8}w_3 - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{8}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_4 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_4 esce x_2 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\max \ \frac{93}{4} - \frac{17}{4}w_3 - \frac{41}{4}x_3 - 7x_2 + \frac{5}{4}w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = \frac{61}{4} - \frac{9}{4}w_3 - \frac{5}{4}x_3 - 4x_2 + \frac{1}{4}w_2 \\
x_4 = \frac{45}{16} - \frac{5}{16}w_3 - \frac{5}{16}x_3 - \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{16}w_2 \\
x_1 = \frac{25}{8} - \frac{5}{8}w_3 - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{8}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della w_2 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base w_2 esce w_1 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\max \ \frac{25135}{112} - \frac{95}{7}w_3 - \frac{100}{7}x_3 - \frac{125}{7}x_2 - \frac{37}{7}w_1
$$
$$
\begin{cases}
w_2 = \frac{580}{7} - \frac{25}{7}w_3 - \frac{9}{7}x_3 - \frac{20}{7}x_2 - \frac{16}{7}w_1 \\
x_4 = \frac{3215}{112} - \frac{10}{7}w_3 - \frac{5}{7}x_3 - \frac{15}{7}x_2 - \frac{5}{7}w_1 \\
x_1 = \frac{6235}{224} - \frac{25}{14}w_3 - \frac{449}{224}x_3 - \frac{10}{7}x_2 - \frac{9}{14}w_1 \\
x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{6235}{224}$, $x_2 = x_3 = 0$, e $x_4 = \frac{3215}{112}$ cui corrisponde un valore di $\frac{25135}{112} = 224.4$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per $\frac{16}{7}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{25}{7}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{25135}{112}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{16}{7}$ (almeno per piccoli incrementi).Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{25}{7}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del secondo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $4 + t_3$ (invece di 4) e che la quantitá di risorsa disponibile sul primo vincolo sia $5 + t_1$ (invece di 5). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_1, k_2 e k_3 della colonna dei termini noti. Questo viene lasciato come esercizio.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.