NOME: ............................ COGNOME: ........................
MATRICOLA: ................ FIRMA: ............................

# Esame di Ricerca Operativa - 31 luglio 2017
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 61, con voto $\geq$ punti

**Problema 1 (8 punti):**
Carta batte sasso, sasso batte forbici, forbici battono carta. Se i due giocatori scelgono la stessa figura la mano è patta, altrimenti chi vince riceve un euro dall'avversario. Non sai con quale probabilità il tuo avversario sceglie la sua figura tra sasso, carta, forbici. Pertanto, nessuna delle 3 opzioni di gioco a te disponibili (carta/forbice/sasso) ti garantisce di non perdere un euro sulla mano che sei chiamato a giocare. Ossia, nessuna delle 3 strategie pure garantisce un guadagno minimo superiore a $-1$. Vuoi allora affidarti al potere di una strategia randomizzata, e stabilire la distribuzione di probabilità su queste tre figure da adottare tu, con lo scopo di massimizzare il tuo guadagno atteso su una singola mano, tenendoti conservativo su quale possa essere il gioco dell'avversario. Assumendo che l'avversario non abbia modo di barare sbirciando l'esito della tua variabile aleatoria, quale guadagno atteso riesce a garantirti, comunque giochi l'avversario, la tua distribuzione ottima di probabilità?

**(2pt)** Formulare come un problema di PL la determinazione di una strategia mista (= distribuzione di probabilità sulle 3 opzioni carta/forbice/sasso) ottima.
**(1pt)** Fornire una strategia ottima. Quale guadagno atteso riesce a garantirti tale strategia?
**(2pt)** Formulare come un problema di PL la determinazione di una strategia ottima nel caso sia dato di sapere l'avversario non giocherà forbici.
**(1pt)** Fornire una strategia ottima per il caso in cui l'avversario non possa giocare forbici. Quale guadagno atteso riesce a garantirti tale strategia?
**(1pt)** Mostrarne l'ottimalità.
**(1pt)** Mostrarne l'unicità.

**Problema 2 (3+3+1+5=12 punti):**
Il Pirellone è un noto grattacielo di Milano, in cui le finestre sono disposte ordinatamente per $M$ righe (piani) e $N$ colonne. Le righe sono numerate da 1 a $M$ (dall'alto in basso) e le colonne da 1 a $N$ (da sinistra a destra). Questa sera alcune delle finestre sono rimaste illuminate e tocca al custode provvedere a spegnerle. Egli può agire su $M + N$ interruttori speciali, col seguente funzionamento particolare. Ci sono $M$ interruttori di riga e $N$ interruttori di colonna. Quando il custode agisce sull'$i$-esimo interruttore di riga, tutte le luci accese dell'$i$-esima riga si spengono ma, allo stesso tempo, quelle spente si accendono! Analogamente alle righe, un interruttore di colonna spegne le luci accese di quella colonna e accende quelle spente.

**(3pt)** Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) che aiuti il custode a stabilire se esista un modo per spegnere tutto il palazzo indicando eventualmente su quali interruttori agire e come.

**(3pt)** Formulare come un problema di PLI il problema di agire sugli interruttori in modo da minimizzare il numero di luci rimaste accese specificando l'eventuale soluzione.

**(1+5pt)** Formulare come un problema di programmazione lineare (PL) il problema di stabilire se esista un modo per spegnere tutto il palazzo specificando l'eventuale soluzione **(1pt)**. Argomentare la correttezza della tua formulazione, ossia l'interezza del politopo da essa individuato **(5pt)**.

**Problema 3 (3 punti):**
Dato un planar embedding di un grafo $G = (V, E)$, indichiamo con
$n := |V(G)|$ il numero di nodi di $G$; $m := |E(G)|$ il numero di archi di $G$;
$k := |V(G)|$ il numero di componenti connesse di $G$;
$f$ il numero di "facce", ossia di regioni del piano separate dal planar embedding di $G$.

**(3pt)** Dimostrare che $f = m - n + k + 1$.

**Problema 4 (1+2+1+2=6 punti):**

Un grafo planare è detto *rigido* se ammette essenzialmente un solo planar embedding. A questo proposito, due planar embeddings sono considerati equivalenti se, dopo averne eventualmente ribaltato uno (passando ad osservarlo da dietro la lavagna trasparente su cui disegnato) allora, per ogni nodo, l'ordinamento ciclico degli archi ad esso incidenti quando li si legga in senso orario è lo stesso nei due planar embeddings.

**(1pt)** Fornire un esempio di grafo rigido di 6 nodi.

**(1+1=2pt)** Abbiamo definito il grafo duale $G^*$ di un grafo planare $G$ facendo riferimento ad un dato planar embedding di $G$. Tuttavia, se $G$ non è rigido, potrebbe anche succedere che partendo da due diversi planar embeddings $G_1$ e $G_2$ di $G$ si ottengano due grafi duali $G_1^*$ e $G_2^*$ non isomorfi tra loro. Si fornisca un esempio dove questo succede producendo in esplicito i due grafi $G_1^*$ e $G_2^*$ **(1pt)** ed argomentando efficacemente il non-isomorfismo di $G_1^*$ e $G_2^*$ **(1pt)**.

**(1pt)** Fornire un esempio di grafo rigido isomorfo al proprio duale. Si fornisca un disegno dove i planar embedding dei due grafi sono sovrapposti per metterne in evidenza la relazione di dualità.

**(2pt)** Si proponga una famiglia infinita di grafi rigidi, ciascuno isomorfo al proprio duale.

**Problema 5 (8 punti):** Ho un vasetto con 8 pillole, e dovrò inghiottire mezza pillola ogni mattina per 16 giorni. Le mattine che dal vasetto pesco una mezza pillola, la ingerisco e sul calendario scrivo una 'M'. Quando dal vasetto pesco una pillola intera, la taglio in due con un coltello, ne inghiotto una metà e reinfilo l'altra metà nel vasetto; su quel giorno, nel calendario, riporto una 'I'. Alla fine del vasetto, rileggendo di seguito le lettere da me riportate sul calendario, ottengo una stringa di 16 caratteri. Essa inizia sicuramente per I e termina con M, ma altrimenti presenta diverse possibilità. Quante sono le diverse possibilità per questa stringa?

**(1pt)** si ottenga una ricorrenza per il computo di tale numero.

**(1pt)** ci si organizzi per un computo efficiente.

**(1pt)** quante sono le diverse stringhe che potrei scrivere?

**(1pt)** e se il vasetto contenesse inizialmente 5 pillole?

**(1pt)** con vasetto da 8, quante sono le diverse possibili stringhe di prefisso "IIMI"?

**(1pt)** e se il vasetto contenesse inizialmente 6 pillole e mezza?

**(1pt)** due vasetti, uno rosso da 1 pillola ed uno blu da 7, quando estraggo dal vasetto rosso (o blu) scrivo con pennarello rosso (o blu). Dire il numero di stringhe colorate diverse potenzialmente generabili.

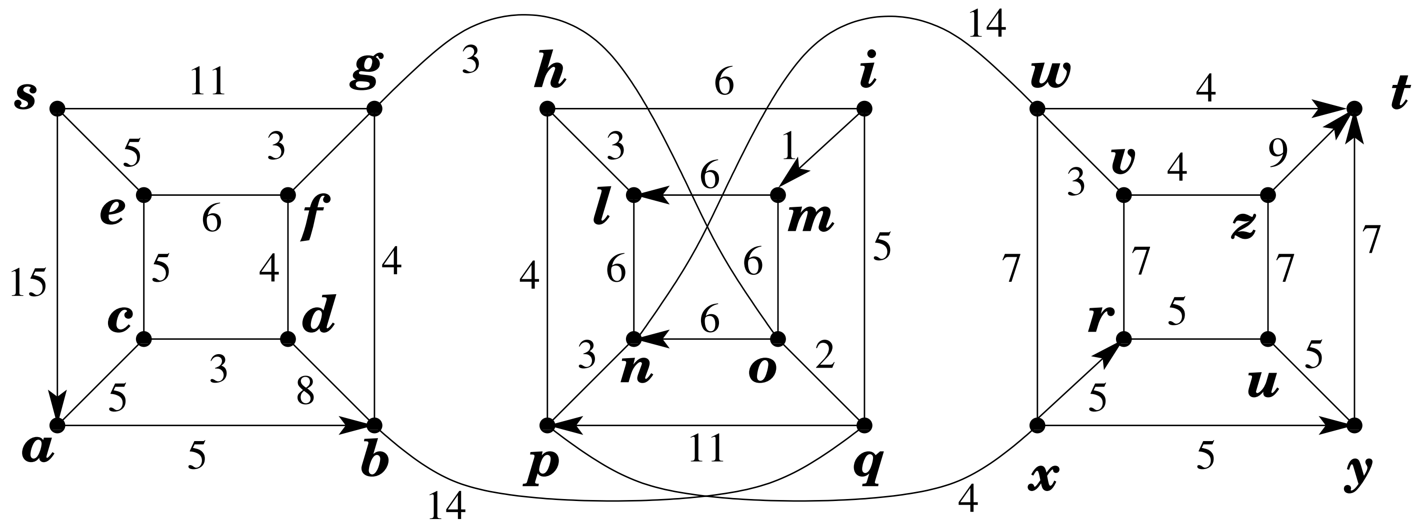
**(1pt)** rosso da 6 e blu da una e mezza.

*Spazio per le risposte*

**(1pt)** Ricorrenza:

| | consegna | numero di stringhe generabili diverse | num caratteri |
|---|---|---|---|
| **1pt** | vasetto da 8 | | 16 |
| **1pt** | vasetto da 5 | | 10 |
| **1pt** | da 8, con "IIMI" | | 16 |
| **1pt** | da $6 + 1/2$v | | 13 |
| **1pt** | rosso 1, blu 7 | | 16 |
| **1pt** | rosso 6, blu $1 + 1/2$ | | 15 |

**Problema 6 (16 punti):**
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.




6.1.**(3pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ è planare oppure no; (3) se il grafo $G''$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gl$ è planare oppure no.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo $G$; (2) il grafo $G'$.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $fg$, $wx$, $ln$.

6.6.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

**Problema 7 (8 punti):**
Si consideri il seguente problema di LP.

$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 + 2x_2 & & \\
& 2x_1 + x_2 & \leq 4 & \qquad (7.1)\\
& -2x_1 + x_2 & \leq 2 & \qquad (7.2)\\
& x_1 - x_2 & \leq 1 & \qquad (7.3)\\
& x_1, x_2 \geq 0. & &
\end{aligned}
$$

7.1.**(1pt)** Risolvere col metodo grafico, specificando i valori di funzione obiettivo e variabili all'ottimo.

7.2.**(1pt)** Determinare le basi associate a ciascuno dei vertici della regione ammissibile.

7.3.**(1pt)** Specificare la sequenza delle basi visitate dal metodo del simplesso nel raggiungere la soluzione ottima (si scelga $x_1$ come prima variabile entrante).

7.4.**(1pt)** Determinare il valore dei costi ridotti relativi alle soluzioni di base associate ai seguenti vertici, espressi come intersezioni di linee in $\mathbf{R}^2$: (a) (Eq. 7.1) $\cap$ (Eq. 7.2); (b) ((Eq. 7.1) $\cap$ (Eq. 7.3), dove (Eq. $i$) è l'equazione ottenuta convertendo la diseguaglianza (i) in eguaglianza (sostituendo $\leq$ con $=$).

7.5.**(1pt)** Si verifichi che l'opposto del vettore gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come combinazione lineare non-negativa dei gradienti per i vincoli attivi solo nel vertice ottimo (tenere presente che, dacchè il problema è di massimizzazione, i vincoli debbono essere tutti espressi in forma $\leq$, ad esempio, $x_1 \geq 0$ dovrebbe essere riscritto come $-x_1 \leq 0$).

7.6.**(1pt)** Specificare per quali valori del termine noto nel vincolo (7.1) la base ottima non cambia.

7.7.**(1pt)** Dire per quali valori dei coefficienti della funzione obiettivo il vertice ottimo è $((x_1 = 0) \cap$ (Eq. 7.2)).

7.8.**(1pt)** Per quali valori del coefficiente di $x_1$ nella funzione obiettivo si presenta più di una soluzione ottima?

**LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**

Procedura da seguire per l'esame **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi Nome, Cognome e Matricola per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.