

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 19 giugno 2014 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (3+2=5 punti):

Tre raffinerie producono GPL partendo da oli provenienti da Taranto e Brindisi. Giornalmente, i tre impianti sono in grado di processare le seguenti quantità di materia grezza (in ettolitri):

Raffineria 1	Raffineria 2	Raffineria 3
150	80	210

A Taranto e Brindisi vi é una disponibilità giornaliera di 130 e di 310 ettolitri rispettivamente. I costi di trasporto sono come indicati nella seguente tabella (Euro/ettolitro)

	Raffineria 1	Raffineria 2	Raffineria 3
Taranto	10	15	20
Brindisi	8	14	7

Vincoli logistici ed ambientali impongono che non si possa trasportare più di 50 ettolitri di grezzo da Taranto alla Raffineria 1. In modo similare, non risulta possibile trasportare più di 50 ettolitri di grezzo da Brindisi alla Raffineria 2. Inoltre, un accordo di cartello impedisce di processare oltre i 400 ettolitri di grezzo nelle 3 raffinerie, complessivamente. Nel rispetto di tale limite, intendiamo spingere al massimo sulla produzione. Si consideri il problema di minimizzare il costo totale di trasporto degli oli grezzi alle raffinerie.

((3pt)) Fornire un modello di PL per tale problema specifico.

((2pt)) Fornire un modello di PL che, più in generale, si riferisca ad un numero m arbitrario di porti ed ad un numero n arbitrario di impianti di raffinamento.

Problema 2 (2+2+2=6 punti):

Ad ogni casella (i, j) , $i, j = 1, \dots, n$ di una scacchiera $n \times n$ é associato un valore $v_{i,j}$. Quando sulla casella (i, j) viene collocata una torre, si acquisisce il valore $v_{i,j}$ ad essa associato. Vogliamo collocare un set di al più k torri in modo da massimizzare la somma dei valori acquisiti. Non é però consentito di collocare due o più torri su una stessa riga o colonna.

((2pt)) Si formuli questo problema di ottimizzazione come un problema di programmazione lineare intera (PLI).

((2pt)) Si mostri come il vincolo sul numero delle torri sia inessenziale, riducendo ogni istanza del problema ad una nuova istanza in cui $k = n$.

((2pt)) Questo problema é in P oppure NP-hard? Perché?

Problema 3 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = x_7 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 19x_4 + 10x_5 + C_6x_6 + C_7x_7 \\ \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 + & x_6 + & x_7 & \leq & 36 \\ & & x_3 + & x_4 & & & + & x_7 & \leq & 10 \\ & & & & x_5 + & x_6 + & x_7 & \leq & 14 \\ x_1 & & + & x_3 & & + & x_5 & & \leq & 20 \\ & x_2 & & + & x_4 & & + & x_6 & & \leq & 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- 3.1.(1pt) Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.
- 3.2.(1pt) Scrivere il problema duale.
- 3.3.(1pt) Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.
- 3.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.
- 3.5.(1pt) Per quali valori dei parametri C_3 , C_6 e C_7 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.
- 3.6.(1pt) Per $C_3 = C_6 = C_7 = 10$, quanto saresti disposto a pagare per incrementare di un'unità il termine noto di ciascuno dei 5 vincoli?

Problema 4 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

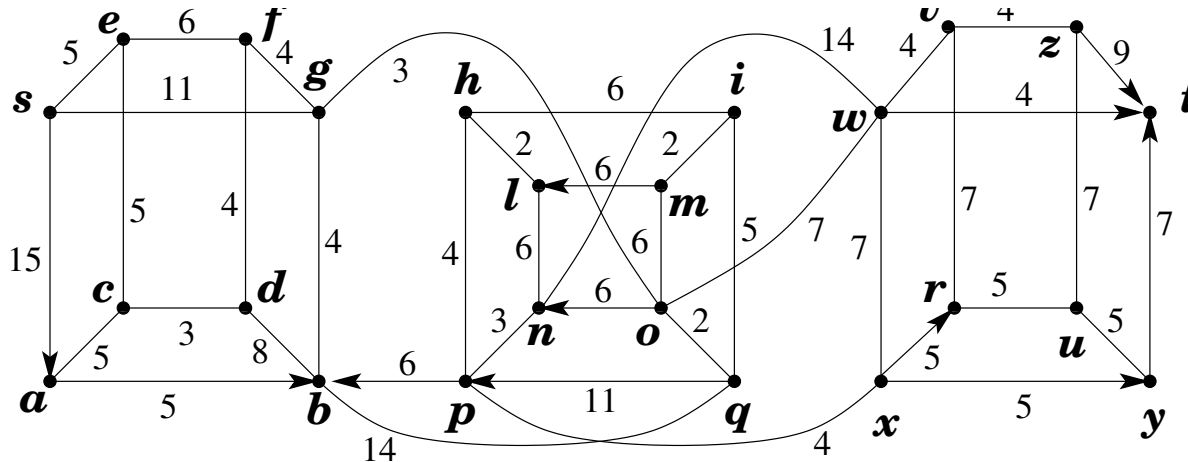
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47

- 4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.2(1pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.4(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.5(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
crescente		
N-sequenza		
crescente con 40		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Problema 5 (15 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(2pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.
- 5.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G ; (1) il grafo G' .
- 5.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 5.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg , wx , ln .
- 5.5.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 5.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.9.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Problema 6 (5 punti):

Si ricerchino soluzioni algoritmiche per il seguente modello della Ricerca Operativa.

KNAPSACK* variante del KNAPSACK classico con vincolo sul numero di oggetti presi.

INPUT: Tre numeri naturali n, k, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \dots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme di precisamente k degli oggetti assegnati in input, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B , e massimizzando il valore totale raccolto.

((1pt)) Argomentare che anche questa variante del modello dello zaino, come già il KNAPSACK classico, è NP-hard.

((1+2+1=4pt)) Progetto di un algoritmo pseudo-polinomiale (tramite la tecnica della programmazione dinamica):

((1pt)) Definire una famiglia di (al più un numero pseudo-polinomiale di) sottoproblemi chiusa rispetto ad induzione.

((2pt)) Fornire una ricorrenza risolutiva per i sottoproblemi della famiglia proposta.

((1pt)) Trattare i casi base.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo**

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.