Esame di Ricerca Operativa - 30 luglio 2019
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: 56, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (7 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	2
F	0	1	1	1	•	3	•	3	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	4	1	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in I–10 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	370	154	86	18	18	18	18	4	•	0
B	216	68	68	0	•	•	14	4	2	0
C	148	•	68	•	74	34	10	2	2	0
D	148	94	68	68	40	24	8	•	2	0
E	54	26	•	28	16	16	8	8	2	0
F	28	26	26	12	•	8	•	6	2	0
G	2	•	14	12	10	8	6	4	2	•
H	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
I	0	0	0	0	0	0	0	•	1	1

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•	0
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2	2
C	1	•	3	•	0	0	1	3	5	7
D	1	1	4	4	4	4	5	•	5	12
E	1	2	•	4	8	12	17	17	22	34
F	1	3	3	7	•	12	•	17	39	73
G	1	•	3	10	10	22	22	39	78	•
H	1	1	4	14	24	46	68	107	185	185
I	1	2	6	20	44	90	158	•	185	370

Ritrovare il valore 370 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0_1	2_1	5_1	6_1	7_1	8_1	8_1	8_1	$\bullet$	6_0
B	3_1	6_1	7_1	7_1	$\bullet$	$\bullet$	8_1	8_2	8_2	13_2
C	5_1	$\bullet$	7_1	$\bullet$	0_0	0_0	9_1	10_1	11_1	17_2
D	5_1	5_1	8_1	8_1	8_1	8_1	10_1	$\bullet$	11_1	20_2
E	5_1	5_2	$\bullet$	9_1	9_1	10_1	12_2	12_2	12_2	22_2
F	5_1	6_3	7_3	10_1	$\bullet$	13_1	$\bullet$	15_2	16_2	23_2
G	8_1	$\bullet$	7_3	11_1	13_1	13_2	13_2	19_2	20_2	$\bullet$
H	10_1	11_1	13_1	14_1	16_1	17_1	19_1	20_3	22_5	22_5
I	14_1	18_1	21_1	24_1	26_1	28_1	29_1	$\bullet$	22_5	22_{10}

Leggendo i valori riportati nella cella I–10 scopriamo che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 22, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → I–10	370
B–3 → I–10	68
A–1 → F–6	12
passaggio per D–5	40*4 = 160
massimo valore	22
numero di max-val paths	10

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

Problema 2 (7 punti):

$$\max\ 44x_1 - 6x_2 - 7x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & -2x_3 & \leq 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq -1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 3 \\ & & x_3 & \leq 7 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera}} \end{cases}$$

2.1(1pt) Portare in forma standard.

2.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

2.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.

2.4(1pt) Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi esplicitamente la prova del 9 della PL per verificare ogni altro dizionario e soluzione di base prodotta.

2.5(1pt) Ad ogni dizionario prodotto, impiegando la soluzione di base corrente, si conducano espliciamente i conteggi della prova del 9 della PL sul primissimo dizionario del problema ausilairio (quello la cui soluzione di base associata non è ammissibile).

2.6(1pt) Partendo da un dizionario ottimo del problema ausiliario con x_0 tra le variabili di colonna (fuori base) si ottenga il dizionario del problema originario che presenta la stessa partizione tra in base e fuori base delle variabili (eccetto per la x_0 che nel problema originario manca). Vogliamo vedere rappresentata anche la funzione obiettivo.

2.7(1pt) Dire se il problema originario è ammissibile o meno, spiegando il perchè e fornendo il certificato.

svolgimento.
(1pt) Portiamo dapprima il problema in forma standard tramite le seguenti accortezze:

1. esprimendo ogni vincolo di uguaglianza come due diseguaglianze contrapposte;
2. moltiplicando per -1 ogni vincolo di $\geq$, in modo da esprimerlo come un vincolo di $\leq$ come nella forma standard (per i problemi di massimizzazione);
3. rimpiazzando ogni variabile non-positiva x_i col suo opposto $x'_i = -x_i$, dove x'_i sarà quindi non-negativa;
4. esprimendo ogni variabile libera x_i per mezzo di due variabili non-negative x_i^+ e x_i^- tramite la sostituzione $x_i = x_i^+ - x_i^-$.

Per quanto riguarda la Trasformazione 1, in questo caso il vincolo $x_1 - x_2 + x_3 = 3$ viene rimpiazzato dai vincoli $x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$ e $x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$.

Per quanto riguarda la Trasformazione 2, in questo caso il vincolo $x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$ generato dalla Trasformazione 1 viene riscritto come $-x_1 + x_2 - x_3 \leq -3$, mentre il vincolo originario $-x_1 + x_2 + x_3 \geq -1$ diviene $x_1 - x_2 - x_3 \leq 1$. In pratica si invertono i segni su alcune righe.

In buona sostanza, la Trasformazione 3 inverte i segni su alcune colonne/variabili mentre la Trasformazione 4 comporta la dupilcazione di alcune colonne in coppie di colonne di segno opposto.

A valle di tale sequenza di trasformazioni, nel nostro caso dovremmo ottenere:

$$
\begin{array}{l}
\max\ 44x_1 + 6x'_2 - 7x_3^+ + 7x_3^- \\
\left\{
\begin{array}{rrrrl}
3x_1 & +x'_2 & -2x_3^+ & +2x_3^- & \leq 0 \\
x_1 & +x'_2 & -x_3^+ & +x_3^- & \leq 1 \\
x_1 & +x'_2 & +x_3^+ & -x_3^- & \leq 3 \\
-x_1 & -x'_2 & -x_3^+ & +x_3^- & \leq -3 \\
 & & x_3^+ & -x_3^- & \leq 7 \\
\multicolumn{5}{l}{x_1, x'_2, x_3^+, x_3^- \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

(1pt) A questo punto il problema è in forma standard $\max\{cx \,:\, Ax \leq b, x \geq 0\}$. Pertanto ha almeno una soluzione di base: l'origine. Ma questo problema non è ad origine ammissibile dato che uno dei 5 termini noti è negativo (-3). Rimaniamo quindi col problema di reperire una prima soluzione di base ammissibile dalla quale avviare il metodo del simplesso. Non è un problema scontato, di fatto tale soluzione potrebbe non esistere (se il problema non ammette soluzioni ammissibili).

Il secondo punto dell'esercizio chiede di superare la difficoltà del reperire una prima soluzione di base ammissibile con il metodo del problema ausiliario. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. In prima battuta del problema originario essenzialmente ci interessa investigare solo l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\max \; -x_0
$$
$$
\begin{cases}
\begin{array}{rrrrrl}
3x_1 & +x_2' & -2x_3^+ & +2x_3^- & -x_0 & \leq 0 \\
x_1 & +x_2' & -x_3^+ & +x_3^- & -x_0 & \leq 1 \\
x_1 & +x_2' & +x_3^+ & -x_3^- & -x_0 & \leq 3 \\
-x_1 & -x_2' & -x_3^+ & +x_3^- & -x_0 & \leq -3 \\
 & & x_3^+ & -x_3^- & -x_0 & \leq 7 \\
\multicolumn{6}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^- \geq 0}
\end{array}
\end{cases}
$$

Il problema ausiliario è sempre ammissibile (basta prendere un valore sufficientemente grande per x_0) e, ovviamente, il problema originario è ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$. Questa è la prima domanda che siamo chiamati ad affrontare, e lo faremo nella prima fase del metodo del simplesso, quella che identifica una soluzione di base ottima per il problema ausiliario.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\max \; -x_0
$$
$$
\begin{cases}
\begin{array}{rcrrrrrr}
w_1 & = & 0 & -3x_1 & -x_2' & +2x_3^+ & -2x_3^- & +x_0 \\
w_2 & = & 1 & -x_1 & -x_2' & +x_3^+ & -x_3^- & +x_0 \\
w_3 & = & 3 & -x_1 & -x_2' & -x_3^+ & +x_3^- & +x_0 \\
w_4 & = & -3 & +x_1 & +x_2' & +x_3^+ & -x_3^- & +x_0 \\
w_5 & = & 7 & & & -x_3^+ & +x_3^- & +x_0 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0}
\end{array}
\end{cases}
\quad \Longleftrightarrow
$$

TABLEAU INIZIALE

		x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	x_0
z	0	0	0	0	0	-1
w_1	0	-3	-1	2	-2	1
w_2	1	-1	-1	1	-1	1
w_3	3	-1	-1	-1	1	-1
w_4	-3	1	1	1	-1	$\boxed{1}$
w_5	7	0	0	-1	1	1

Le equazioni con cui abbiamo definito le variabili di slack definiscono il nostro primo dizionario dal quale prende avvio il metodo del simplesso. La soluzione di base associata al primissimo dizionario è l'origine $(x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^-) = (0, 0, 0, 0, 0)$ che tuttavia non è ammissibile benchè ovvimente il problema ausiliario sia ammissibile per costruzione. Fortunatamente, un primo pivot risulta sempre sufficiente a raggiungere una prima soluzione di base ammissibile nel caso del problema ausiliario: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a -3 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facendo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo (w_4). L'elemento di pivot è pertanto quello incorniciato e, con un passo di pivot, si perviene alla situazione seguente.

$$
\max \;\; -3 + x_1 + x_2' + x_3^+ - w_4
$$

$$
\left\{\begin{array}{rclrrrrr}
w_1 & = & 3 & -4x_1 & -2x_2' & +x_3^+ & .x_3^- & +w_4 \\
w_2 & = & 4 & -2x_3 & -2x_2' & & & +w_4 \\
w_3 & = & & & & & & -w_4 \\
x_0 & = & 3 & -x_1 & -x_2' & -x_3^+ & +x_3^- & +w_4 \\
w_5 & = & 10 & -x_1 & -x_2' & -2x_3^+ & +2x_3^- & +w_4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0}
\end{array}\right.
\iff
$$

Secondo Tableau

		x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	w_4
z	-3	1	1	1	-1	-1
w_1	3	-4	-2	1	-1	1
w_2	4	-2	-2	0	0	1
w_3	0	0	0	0	0	-1
x_0	3	-1	-1	$\boxed{-1}$	1	1
w_5	10	-1	-1	-2	2	1

Facciamo una doppia prova del 9: il primo dizionario con la soluzione di base $w_1 = 3, w_2 = 4, w_3 = 0, x_0 = 3, w_5 = 10$ di questo ultimo dizionario, e questo ultimo dizionario con la soluzione di base del primo.

Tableau Iniziale

			(0)	(0)	(0)	(0)	(3)
			x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	x_0
(-3)	z	0	0	0	0	0	-1
(3)	w_1	0	-3	-1	2	-2	1
(4)	w_2	1	-1	-1	1	-1	1
(0)	w_3	3	-1	-1	-1	1	-1
(0)	w_4	-3	1	1	1	-1	1
(10)	w_5	7	0	0	-1	1	1

Secondo Tableau

			(0)	(0)	(0)	(0)	(-3)
			x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	w_4
(0)	z	-3	1	1	1	-1	-1
(0)	w_1	3	-4	-2	1	-1	1
(1)	w_2	4	-2	-2	0	0	1
(3)	w_3	0	0	0	0	0	-1
(0)	x_0	3	-1	-1	-1	1	1
(7)	w_5	10	-1	-1	-2	2	1

Infatti

Tableau Iniziale

		(0)	(0)	(0)	(0)	(3)
		x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	x_0
$-3 =$	0	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(3)$
$3 =$	0	$-3(0)$	$-1(0)$	$+2(0)$	$-2(0)$	$+1(3)$
$4 =$	1	$-1(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$-1(0)$	$+1(3)$
$0 =$	3	$-1(0)$	$-1(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$-1(3)$
$0 =$	-3	$+1(0)$	$+1(0)$	$+1(0)$	$-1(0)$	$+1(3)$
$10 =$	7	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$+1(3)$

Secondo Tableau

		(0)	(0)	(0)	(0)	(-3)
		x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	w_4
$0 =$	-3	$+1(0)$	$+1(0)$	$+1(0)$	$-1(0)$	$-1(-3)$
$0 =$	3	$-4(0)$	$-2(0)$	$+1(0)$	$-1(0)$	$+1(-3)$
$1 =$	4	$-2(0)$	$-2(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+1(-3)$
$3 =$	$+0$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(-3)$
$0 =$	3	$-1(0)$	$-1(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$+1(-3)$
$7 =$	10	$-1(0)$	$-1(0)$	$-2(0)$	$+2(0)$	$+1(-3)$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima in quanto nella funzione obiettivo sono presenti dei coefficienti positivi (quello della x_1, della x_2' e della x_3^+). Tra le tre, come varibile di pivot, optiamo per la x_3^+, scelta che conduce ad un maggior incremento in termini di funzione obiettivo e che, con un pivot più agevole da gestire, conduce anche a numeri tutti interi. La prima variabile in base ad annullarsi al crescere della x_3 sarebbe proprio la x_0; questo significa che non serve utilizzare colla ed il problema originario era ammissibile.

A questo punto, anche ove fossero presenti ulteriori variabili che si annullano contemporaneamente alla x_0, resta comunque utile portare x_0 fuori dalla base, in modo da ottenere un dizionario ammissibile dove la x_0 è prevista essere nulla e la rimozione della sua colonna ci consegna un dizionario ammissibile per il problema originario (quindi non solo riusciamo a decidere in merito all'ammissibilità del problema originario, ma, se esso era in forma standard, allora il metodo si applica e ci consegna una soluzione di base ammissibile tutte le volte che il problema è ammissibile). Pertanto scegliamo la x_0 come variabile uscente e riga del pivot.

$$
\begin{array}{l}
\max \ -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rclllll}
w_1 & = & 6 & -5x_1 & -3x_2' & -x_0 & & +2w_4 \\
w_2 & = & 4 & +2x_1 & -2x_2' & & & +w_4 \\
w_3 & = & & & & & & -w_4 \\
x_3^+ & = & 3 & -x_1 & -x_2' & -x_0 & -x_3^- & +w_4 \\
w_5 & = & 4 & x_1 & x_2' & -2x_0 & & -w_4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\iff
$$

Terzo Tableau

		x_1	x_2'	x_0	x_3^-	w_4
z	0	0	0	-1	0	0
w_1	6	-5	-3	-1	0	2
w_2	4	-2	-2	0	0	1
w_3	0	0	0	0	0	-1
x_3^+	3	-1	-1	-1	1	1
w_5	4	1	1	-2	0	-1

Eseguiamo di nuovo le due prove del 9: il primo dizionario con la soluzione di base $w_1 = 3, w_2 = 4, w_3 = 0, x_0 = 3, w_5 = 10$ di questo ultimo dizionario, e questo ultimo dizionario con la soluzione di base del primo.

Tableau Iniziale

			(0)	(0)	(3)	(0)	(0)
			x_1	x_2'	x_3^+	x_3^-	x_0
(0)	z	0	0	0	0	0	-1
(6)	w_1	0	-3	-1	2	-2	1
(4)	w_2	1	-1	-1	1	-1	1
(0)	w_3	3	-1	-1	-1	1	-1
(0)	w_4	-3	1	1	1	-1	1
(4)	w_5	7	0	0	-1	1	1

Secondo Tableau

			(0)	(0)	(0)	(0)	(-3)
			x_1	x_2'	x_0	x_3^-	w_4
(0)	z	0	$+0$	$+0$	-1	$+0$	$+0$
(0)	w_1	6	-5	-3	-1	$+0$	$+2$
(1)	w_2	4	-2	-2	$+0$	$+0$	$+1$
(3)	w_3	0	$+0$	$+0$	$+0$	$+0$	-1
(0)	x_0	3	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
(7)	w_5	4	$+1$	$+1$	-2	$+0$	-1

Infatti

Tableau Iniziale

		(0)	(0)	(3)	(0)	(0)
		x_1	x_2'	$x_3^+ x_3^-$	x_0	
$0 =$	0	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(3)$	$+0(0)$	$-1(0)$
$6 =$	0	$-3(0)$	$-1(0)$	$+2(3)$	$-2(0)$	$+1(0)$
$4 =$	1	$-1(0)$	$-1(0)$	$+1(3)$	$-1(0)$	$+1(0)$
$0 =$	3	$-1(0)$	$-1(0)$	$-1(3)$	$+1(0)$	$-1(0)$
$0 =$	-3	$+1(0)$	$+1(0)$	$+1(3)$	$-1(0)$	$+1(0)$
$4 =$	7	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$+1(0)$

Secondo Tableau

		(0)	(0)	(0)	(0)	(-3)
		x_1	x_2'	x_0	x_3^-	w_4
$(0) =$	0	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(0)$	$+0(0)$	$+0(-3)$
$(0) =$	6	$-5(0)$	$-3(0)$	$-1(0)$	$+0(0)$	$+2(-3)$
$(1) =$	4	$-2(0)$	$-2(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+1(-3)$
$(3) =$	0	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$+0(0)$	$-1(-3)$
$(0) =$	3	$-1(0)$	$-1(0)$	$-1(0)$	$+1(0)$	$+1(-3)$
$(7) =$	4	$+1(0)$	$+1(0)$	$-2(0)$	$+0(0)$	$-1(-3)$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario posto in forma standard. La soluzione di base associata è $x_1 = 0$, $x_2' = 0$, $x_3^+ = 3$ e $x_3^- = 0$ e risulta agevole verificare che essa è appunto ammissibile per tale problema. Vale pertanto quale certificato di ammissibilità. Per la scrittura della funzione obiettivo in tale dizionario, si parte dalla funzione obiettivo originaria e si utilizzano le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. Si svolga cioé la riscrittura

$$44x_1 + 6x_2' - 7x_3^+ + 7x_3^- = 44x_1 + 6x_2' - 7(3 - x_1 - x_2' + x_3^- + w_4) + 7x_3^- = -21 + 51x_1 + 13x_2' - 7w_4$$

Ecco quindi un dizionario per la forma standard del problema originario la cui soluzione di base associata sia ammissibile:

$$\max \; -21 + 51x_1 + 13x_2' - 7w_4$$
$$\begin{cases} w_1 &= 6 & -5x_1 & -3x_2' & & +2w_4 \\ w_2 &= 4 & +2x_1 & -2x_2' & & +w_4 \\ w_3 &= & & & & -w_4 \\ x_3^+ &= 3 & -x_1 & -x_2' & -x_3^- & +w_4 \\ w_5 &= 4 & x_1 & x_2' & & -w_4 \\ \multicolumn{6}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3^+, x_3^-, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \geq 0} \end{cases} \iff$$

Tableau Ammissibile

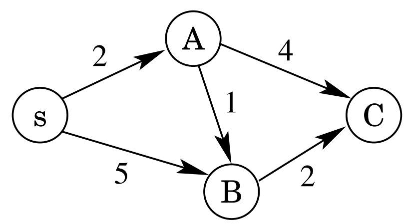
		x_1	x_2'	x_3^-	w_4
z	-21	$+51$	$+13$	0	-7
w_1	6	-5	-3	0	2
w_2	4	-2	-2	0	1
w_3	0	0	0	0	-1
x_3^+	3	-1	-1	1	1
w_5	4	1	1	0	-1

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ottima visto che i coefficienti delle prime due variabili fuori base sono positivi.

Problema 3 (26 punti):

Il seguente problema di PL trova un cammino minimo dal nodo s al nodo C per il grafo in figura.

$$\max \; x_C$$
$$\begin{cases} x_A & & & \leq 2 \\ & x_B & & \leq 5 \\ -x_A & +x_B & & \leq 1 \\ -x_A & & +x_C & \leq 4 \\ & -x_B & +x_C & \leq 2 \\ \multicolumn{4}{l}{x_A, x_B, x_C \geq 0} \end{cases}$$



(1pt) fornire una soluzione ottima al problema di PL.

(1pt) dare il cammino minimo dal nodo s al nodo C.

(1pt) se per ottenere la soluzione ottima al problema di PL tu avessi utilizzato il metodo del simplesso, quanti e quali avrebbero potuto essere i pivot (specificare variabile entrante e variabile uscente per ogni pivot della sequenza).

(1pt) scrivere il problema duale.

(1pt) utilizzando la tua soluzione ottima per il problema primale, imposta il sistema basato sulle condizioni degli scarti complementari per la determinazione di una soluzione duale ottima.

(1+1+1pt) fornire una soluzione duale ottima. Per quale ragione in questo caso essa è unica? Fornire esempio di un grafo dove essa non è unica.

(1+1+1pt) quanto sarebbe disposto a pagare il problema di PL assegnato (di massimizzazione) per allungare un arco? E tu che cerchi la strada più breve per giungere in C, quanto saresti disposto a pagare per accorciarlo? (Specificare per ciascun arco). Perchè in questo caso i due numeri coincidono sempre? Fornire esempio di un grafo dove i due numeri non coincidono.

(2pt) fino a dove il problema di PL sarebbe disposto a pagare tali prezzi?

(1+2pt) Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare (PL) in forma standard ed ad origine ammissibile la ricerca di un cammino minimo da un nodo s ad un nodo t entro un grafo diretto $D = (V, A)$ con lunghezze sugli archi $\ell : A \mapsto \mathbf{R}_+$ strettamente positive. Si assuma che s e t appartengano entrambi all'insieme V dei nodi del grafo. Ogni arco $a \in A$ è una coppia (u, v) con $u, v \in V$, ed indichiamo con $t(a) = u$ la coda (tail) di a e con $h(a) = v$ la testa (head) di a. In realtà abbiamo già fatto riferimento a tale formulazione generale dove nei punti precedenti ti abbiamo chiesto esempi di grafi dove non valevano certe proprietà, ti chiediamo di formalizzarla. Come faresti a ricostruire il cammino una volta in possesso di una soluzione di base ottima del problema di PL? Descrivere con sufficiente precisione tale procedura.

(1+1+1+5pt) Quale formulazione proporresti per riuscire ad individuare un albero dei cammini minimi su grafo generico?. Come faresti a ricostruire un albero dei cammini minimi partendo da una soluzione di base ottima del problema di PL da te proposto? Come potresti computare od esprimere il numero degli alberi dei cammini minimi (assumiamo le lunghezze siano strettamente positive)? Sapresti argomentare perchè ora la soluzione ottima sarebbe necessariamente unica?

(1+1pt) Quale sarebbe la tua formulazione di PL per individuare un albero dei cammini minimi nel caso del grafo in figura? Quale ne sarebbe la soluzione ottima?

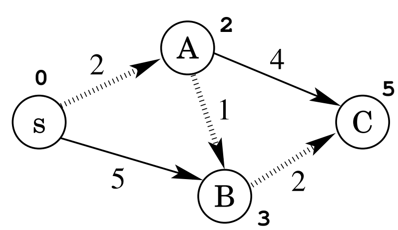
svolgimento.

(1pt) fornire una soluzione ottima al problema di PL.

La soluzione $x_A = 2$, $x_B = 3$, $x_C = 5$ ha valore 5. Sommando i vincoli 1, 3, e 5 ne risulta verificata l'ottimalità. Poteva essere reperita immediatamente individuando un cammino minimo nel grafo ed utilizzandolo come canovaccio per la costruzione della soluzione. Di fatto quelli che giocano sono gli scarti complementari.

(1pt) dare il cammino minimo dal nodo s al nodo C.

$$\max \; x_C$$
$$\left\{\begin{array}{rrrll}
(2) & (3) & (5) & & \\
x_A & & & \leq 2 & (=) \\
 & x_B & & \leq 5 & (<) \\
-x_A & +x_B & & \leq 1 & (=) \\
-x_A & & +x_C & \leq 4 & (<) \\
 & -x_B & +x_C & \leq 2 & (=) \\
\multicolumn{5}{l}{x_A, x_B, x_C \geq 0}
\end{array}\right.$$



(1pt) se per ottenere la soluzione ottima al problema di PL tu avessi utilizzato il metodo del simplesso, quanti e quali avrebbero potuto essere i pivot (specificare variabile entrante e variabile uscente per ogni pivot della sequenza).

La prima variabile a sporcarsi (entrare in base) sarebbe stata la x_C, dove la funzione obiettivo tira, ed il vincolo che l'avrebbe trattenuto sarebbe stato il quinto, quindi nel primo pivot sarebbe uscita la w_5.

Poi si sarebbe sporcata la x_B (stiamo percorrendo un cammino minimo a ritroso) e si sarebbe pulita la w_3, che in fondo corrisonde all'arco che andiamo a tendere.

(1pt) scrivere il problema duale.

$$\min \; 2\,y_{(s,A)} + 5\,y_{(s,B)} + y_{(A,B)} + 4\,y_{(A,C)} + 2\,y_{(B,C)}$$
$$\left\{\begin{array}{rrrrrl}
y_{(s,A)} & & -y_{(A,B)} & -y_{(A,C)} & & \geq 0 \\
 & y_{(s,B)} & +y_{(A,B)} & & -y_{(B,C)} & \geq 0 \\
 & & & y_{(A,C)} & +y_{(B,C)} & \geq 1 \\
\multicolumn{6}{l}{y_{(s,A)} + y_{(s,B)} + y_{(A,B)} + y_{(A,C)} + y_{(B,C)} \geq 0}
\end{array}\right.$$

(1pt) utilizzando la tua soluzione ottima per il problema primale, imposta il sistema basato sulle condizioni degli scarti complementari per la determinazione di una soluzione duale ottima.

Poichè in una soluzione primale ottima il secondo e quarto vincolo sono soddisfatti con diseguaglianza stretta, allora $y_{(s,B)} = y_{(A,C)} = 0$. Inoltre, poichè $x_A, x_B, x_C > 0$ allora tutti e tre i vincoli del duale debbono essere soddisfatti ad eguaglianza.

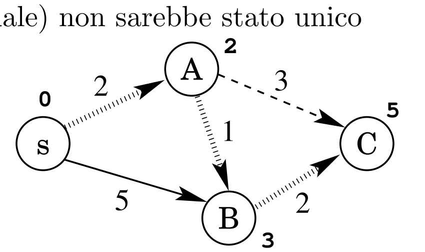
Otteniamo il seguente sistema, che risulta determinato (conduce ad una ed una sola soluzione, dato che la soluzione primale ottima presa a riferimento è non-degenere).

$$\begin{cases} y_{(s,A)} \quad -y_{(A,B)} = 0 \\ \qquad y_{(A,B)} \quad -y_{(B,C)} = 0 \\ \qquad\qquad y_{(B,C)} = 1 \\ y_{(s,A)} + y_{(s,B)} + y_{(A,B)} + y_{(A,C)} + y_{(B,C)} \geq 0 \end{cases}$$

(1+1+1pt) fornire una soluzione duale ottima. Per quale ragione in questo caso essa è unica? Fornire esempio di un grafo dove essa non è unica.

Il sistema sopra è di banale soluzione, i valori delle variabili sono determinati uno ad uno (è in forma triangolare), consegnando $y_{(s,A)} := y_{(A,B)} := y_{(B,C)} := 1$, da corredare con quando già detto: $y_{(s,B)} = y_{(A,C)} = 0$, ossia archi lasci del grafo non possono far parte di un cammino minimo da s a C. La soluzione duale (il cammino minimo) è unico, dato che la soluzione primale non era degenere.

Se l'istanza fosse stata il seguente grafo allora, la stessa soluzione primale sarebbe ancora ottima (ed unica), ma sarebbe stata degenere. A questo punto il cammino minimo (soluzione duale) non sarebbe stato unico



(1+1+1pt) quanto sarebbe disposto a pagare il problema di PL assegnato (di massimizzazione) per allungare un arco? E tu che cerchi la strada più breve per giungere in C, quanto saresti disposto a pagare per accorciarlo? (Specificare per ciascun arco). Perchè in questo caso i due numeri coincidono sempre? Fornire esempio di un grafo dove i due numeri non coincidono.

Il problema di PL sarebbe disposto a pagare 0 oppure 1:

0 se allungo un arco tale che esiste un cammino minimo che non lo contiene (il problema primale mantiene lo stesso valore di funzione obiettivo dato che quel cammino, visto come soluzione duale ossia come certificato di ottimalità, mantiene validità non essendo interessato dalla modifica).

1 se allungo un arco che appartiene ad ogni cammino minimo (e quindi l'allungamento dell'arco ci consente di modificare la soluzione ottima del problema primale incrementando i valori delle variabili a valle di quell'arco).

Anche chi cerca un cammino breve da s a C sarebbe disposto a pagare 0 oppure 1:

0 se accorcio un arco che non appartiene a nessun cammino minimo, dato che, almeno per piccole modifiche ($\varepsilon > 0$), tale arco non riesce ancora ad entrare in gioco.

1 se allungo un arco che appartiene ad un qualche cammino minimo (dato che da subito vado a migliorare una soluzione già ottima).

In questo caso la partizione tra archi sensibili e non sensibili è la stessa da entrambi i punti di vista dato che la soluzione primale ottima è unica e quindi il gioco dei quantificatori esistenziale ed universale non entra.

(2pt) fino a dove il problema di PL sarebbe disposto a pagare tali prezzi?

Paga 1 fino ad un incremento di 1 per l'arco (B, C) dato che oltre l'arco (B, C) verrebbe dominato dalla scorciatoia (disuguaglianza triangolare) (A, C) rispetto agli archi (A, B) e (B, C).

Paga 1 fino ad un incremento di 1 per l'arco (A, B) dato che oltre l'arco (A, B) verrebbe dominato dalla scorciatoia (disuguaglianza triangolare) (A, C) rispetto agli archi (A, B) e (B, C). Se non ci fosse l'arco (B, C) sarebbe invece l'arco (s, B) ad arrestami in un momento successivo, ma in questa istanza è l'arco (B, C) il collo di bottiglia, il primo uomo morto (tacca di salvaguardia) che mi ferma.

Paga 1 fino ad un incremento di 2 per l'arco (s, A). Oltre questo incremento entra in base l'arco (s, B) come scorciatoia rispetto al cammino $(a, A), (A, B)$.

(1+2pt) Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare (PL) in forma standard ed ad origine ammissibile la ricerca di un cammino minimo da un nodo s ad un nodo t entro un grafo diretto $D = (V, A)$ con lunghezze sugli archi $\ell : A \mapsto \mathbf{R}_+$ strettamente positive. Si assuma che s e t appartengano entrambi all'insieme V dei nodi del grafo. Ogni arco $a \in A$ è una coppia (u, v) con $u, v \in V$, ed indichiamo con $t(a) = u$ la coda (tail) di a e con $h(a) = v$ la testa (head) di a. In realtà abbiamo già fatto riferimento a tale formulazione generale dove nei punti precedenti ti abbiamo chiesto esempi di grafi dove non valevano certe proprietà, ti chiediamo di formalizzarla. Come faresti a ricostruire il cammino una volta in possesso di una soluzione di base ottima del problema di PL? Descrivere con sufficiente precisione tale procedura.

Nel caso di un grafo $G = (V, A)$ generico introduciamo una variabile x_v reale per ogni nodo $v \in V \setminus \{s\}$.

Otteniamo quindi la seguente formulazione primale per il calcolo delle altezze su cui vanno a collocarsi i vari nodi quando il nodo s viene trattenuto al livello del terreno (piano terra) mentre il signor primale cercha di sollevare al massimo il nodo t, ma senza strappare alcun arco.

$$\max \; x_t$$
$$\begin{cases} x_v - x_u \leq \ell((u, v)) \text{ per ogni arco } (u, v) \in A, \\ x_v \geq 0 \text{ per ogni nodo } v \in V \setminus \{s\}. \end{cases}$$

(1+1+1+5pt) Quale formulazione proporresti per riuscire ad individuare un albero dei cammini minimi su grafo generico?. Come faresti a ricostruire un albero dei cammini minimi partendo da una soluzione di base ottima del problema di PL da te proposto? Come potresti computare od esprimere il numero degli alberi dei cammini minimi (assumiamo le lunghezze siano strettamente positive)? Sapresti argomentare perchè ora la soluzione ottima sarebbe necessariamente unica?

Modifichiamo la funzione obiettivo per far galleggiare verso l'alto tutti i nodi.

$$\max \; \sum_{v \in V \setminus \{s\}} x_v$$
$$\begin{cases} x_v - x_u \leq \ell((u, v)) \text{ per ogni arco } (u, v) \in A, \\ x_v \geq 0 \text{ per ogni nodo } v \in V \setminus \{s\}. \end{cases}$$

In una soluzione ottima, ogni nodo eccetto s sarà trattenuto in basso da un qualche arco il cui vincolo associato è soddisfatto ad eguaglianza. Ogni nodo sceglie un tale arco come arco al padre. Poichè $\ell > 0$, il grafo di tali archi scelti risulta aciclico, e deve necessariamente formare un albero radicato in s. Questo è un albero di cammini minimi da s.

Si noti che se i vettori x^1 ed x^2 sono entrambi soluzioni ammissibili di questo problema di PL, allora anche $\max(x-1, x_2)$, il vettore ottenuto prendendo il massimo a livello di ciascuna componente, è anche esso una soluzione ammissibile. La soluzione ottima é unica in virtù di questa proprietà strutturale dello spazio delle soluzioni, e considerato che funzione obiettivo chiede di massimizzare $\sum_{v \in V \setminus \{s\}} x_v$.

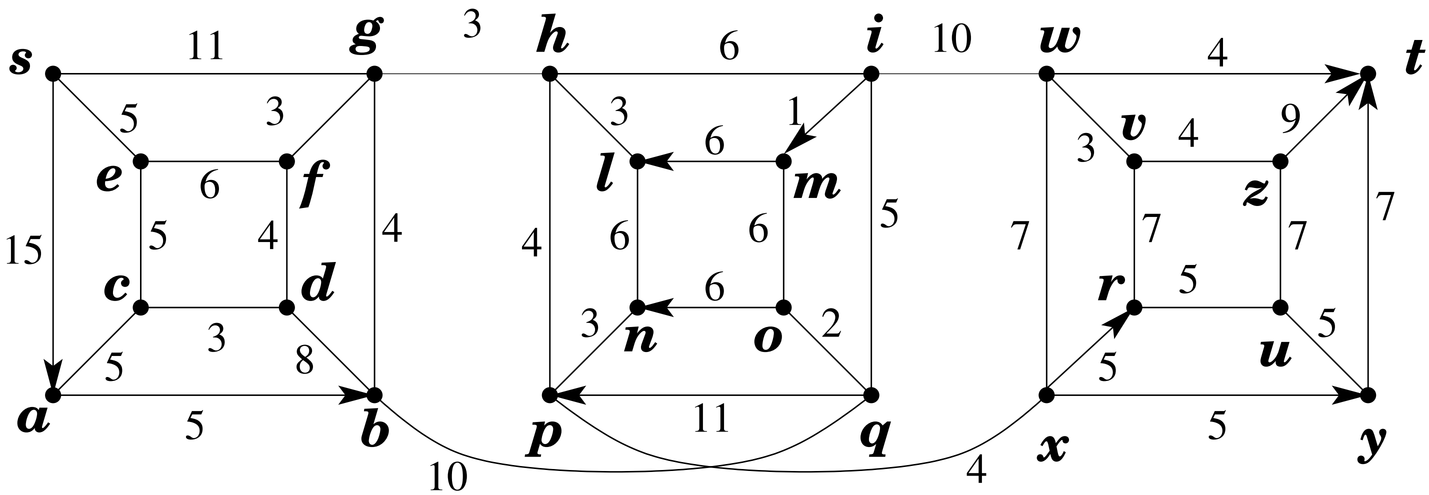
(1+1pt) Quale sarebbe la tua formulazione di PL per individuare un albero dei cammini minimi nel caso del grafo in figura? Quale ne sarebbe la soluzione ottima?

$$
\begin{array}{l}
\max \; a_A + x_B + x_C \\
\left\{
\begin{array}{rrrl}
x_A & & & \leq 2 \\
 & x_B & & \leq 5 \\
-x_A & +x_B & & \leq 1 \\
-x_A & & +x_C & \leq 4 \\
 & -x_B & +x_C & \leq 2 \\
\multicolumn{4}{l}{x_A, x_B, x_C \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

In questo caso la soluzione primale ottima sarebbe esattamente la stessa dato che il cammino minimo era Hamiltoniano e pertanto già prima tutti i nodi finivano con l'essere trascinati verso l'alto. Il cammino minimo, essendo Hamiltoniano, era anche un albero. Il valore della funzione obiettivo però cambia.

Interessante quindi andare a vedere la nuova soulzione duale, questa cambia.

Problema 4 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(3pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco px con l'arco ox è planare oppure no; (3) se il grafo G'' ottenuto da G rimpiazzando l'arco px con l'arco nx è planare oppure no.

4.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G; (2) il grafo G'.

4.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

4.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ln.

4.4.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

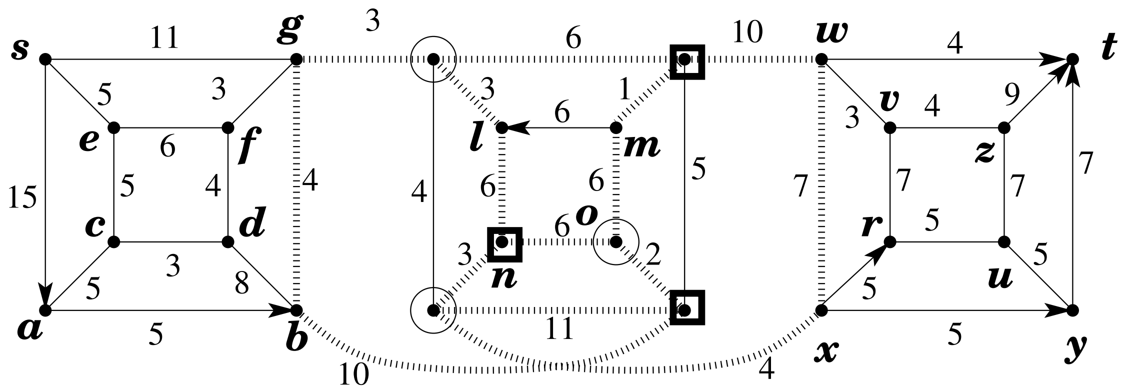
4.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

4.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

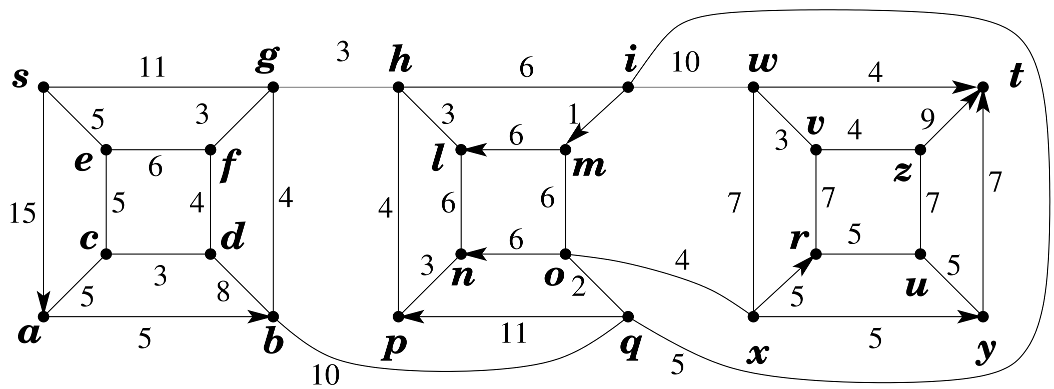
4.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

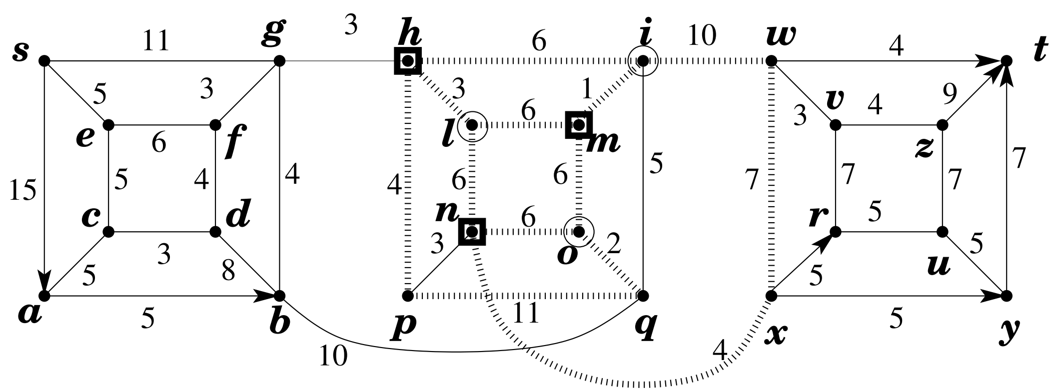
risposte. Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il $K_{3,3}$ in figura.



Il fatto che G' sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

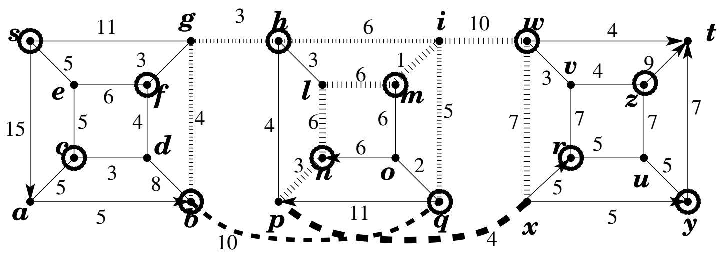


Il fatto che G'' non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il $K_{3,3}$ in figura.

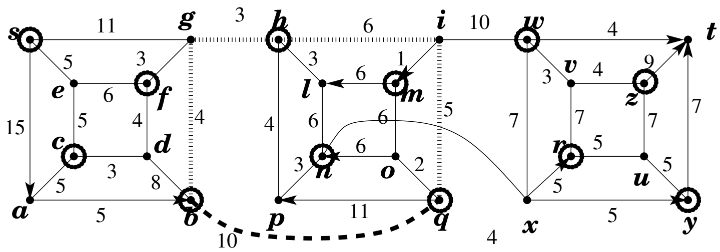


grafi bipartiti

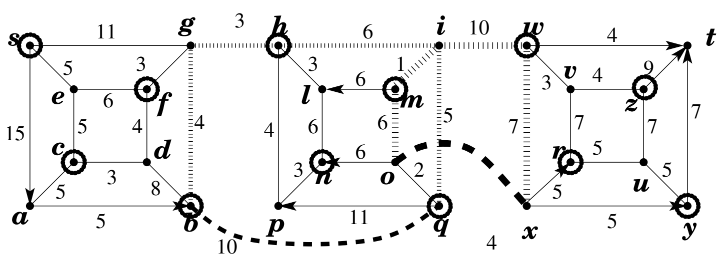
G: I due cicli dispari e disgiunti sugli archi esibiti in figura dimostrano che almeno due archi debbano essere rimossi in G al fine di ottenere un grafo bipartito. La proposta è di rimuovere gli archi bq e px e la 2-colorazione dei nodi proposta, sempre in figura, certifica la correttezza di questa proposta. Grazie a questo doppio certificato possiamo concludere che il numero minimo di archi da rimuovere per rendere G bipartito è precisamente 2.



G'': Il ciclo dispari esibito in figura dimostra che G'' non è bipartito (un tale ciclo esiste sempre quando il grafo non è bipartito, è una buona caratterizzazione). Se potessimo renderlo bipartito rimuovendo un solo arco saremmo pertanto convinti che 1 è il minimo numero di archi da rimuovere. La proposta è di rimuovere l'arco bq e la 2-colorazione dei nodi proposta, sempre in figura, certifica la correttezza di questa proposta. Grazie a questo doppio certificato possiamo concludere che il numero minimo di archi da rimuovere per rendere G'' bipartito è precisamente 1. Pertanto sia la classe dei grafi bipartiti che la classe dei grafi che possone essere resi bipartiti con la rimozione di un solo arco risulta ben caratterizzata.

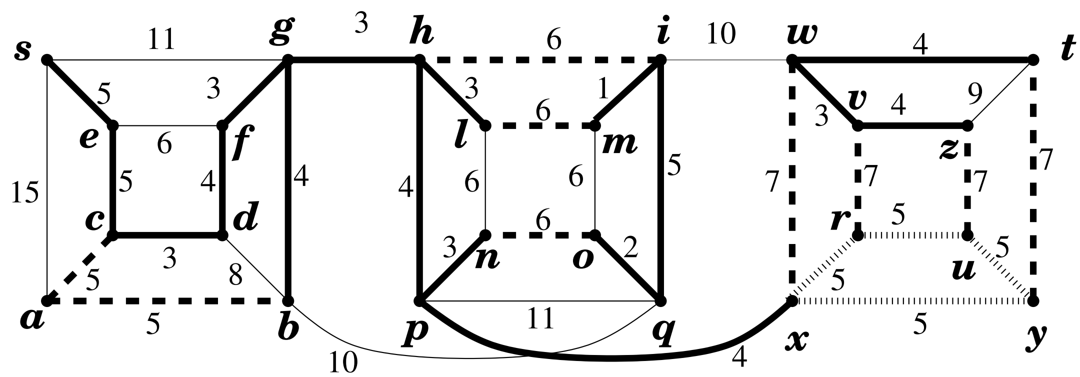


G': I due cicli dispari e disgiunti sugli archi esibiti in figura dimostrano che almeno due archi debbano essere rimossi in G' al fine di ottenere un grafo bipartito. La proposta è di rimuovere gli archi bq e nx e la 2-colorazione dei nodi proposta, sempre in figura, certifica la correttezza di questa proposta. Grazie a questo doppio certificato possiamo concludere che il numero minimo di archi da rimuovere per rendere G' bipartito è precisamente 2. Purtroppo non in tutti i grafi che richiedono la rimozione di almeno due archi riusciamo a trovare due cicli dispari disgiunti sugli archi.

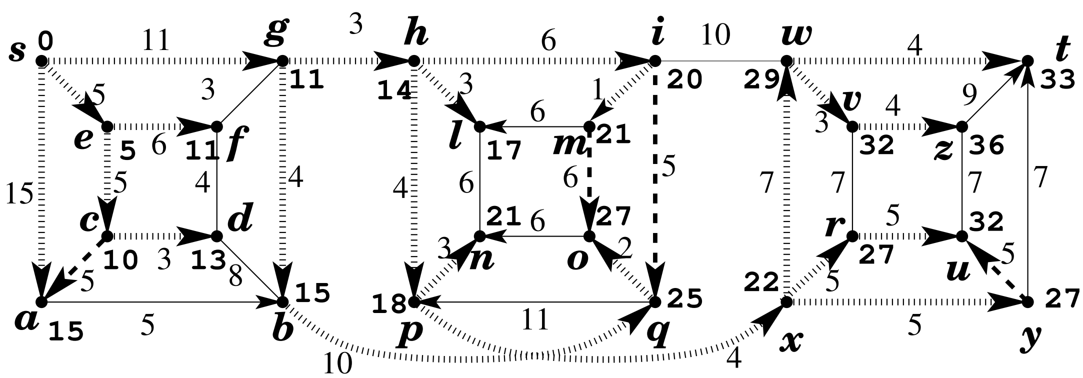


La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea tratteggiata presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea tratteggata presenti nella zona centrale (gli archi on, ml, ih), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea tratteggiata presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 4 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a di cui si era detto più sopra).

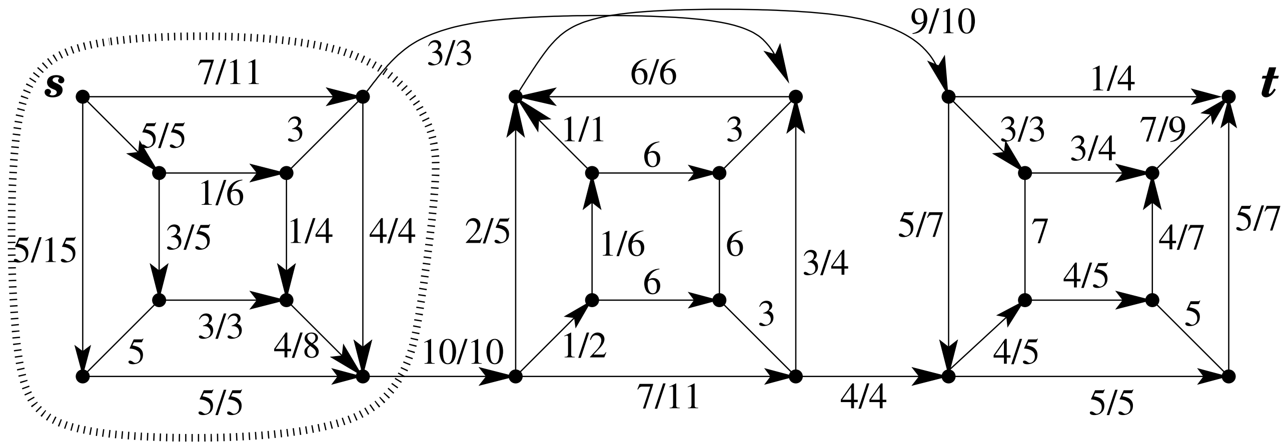
- fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;
- wx in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi w, v, z, t da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$;
- ln in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $lnph$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi è ottenuto scegliendo, per ciascuno nodo tranne s, un arco entrante tra quelli marcati in linea spessa. In pratica, gli unici quattro nodi dove si presenta una scelta (tutte e tre binarie) sono i nodi a, o, u e q.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;

2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);

3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.