NOME: ............................ COGNOME: ........................
MATRICOLA: ................ FIRMA: ............................

# Esame di Ricerca Operativa - 18 giugno 2018
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 56, con voto $\geq$ punti $+ k$, $k \geq 0$

**Problema 1 (8 punti):**
Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GGAGATATGCAGAGAGT$ e $t = AGTGATCGATTAAGTGT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di $s$ e $t$.

**1.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e $t$?

**1.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'T'?

**1.3 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e il suffisso $t_{11} = CGATTAAGTGT$ di $t$?

**1.4 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $t$ e il suffisso $s_9 = GCAGAGAGT$ di $s$?

**1.5 (4pt)** per ciascuna delle precedenti domande computare anche quante siano le sottosequenze di $t$ o $t_{11}$ che attengano l'ottimo in questione. Si adotti il seguente punto di vista: una sottosequenze di una stringa $t$ di lunghezza $len(t)$ è il sottoinsiemie delle posizioni $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$ per cui il carattere viene mantenuto, mentre gli altri caratteri vengono rimossi.

| tipo di sott. comune | lungh. | una sottosequenza ottima (stringa) | num. sott. di $t$ ottime |
|---|---|---|---|
| qualsiasi | | | |
| parte con 'T' | | | |
| tra $s$ e $t_{11}$ | | | |
| tra $s_9$ e $t$ | | | |

**Problema 2 (9 punti):**

$$\max\ 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 9 \\ -2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + 2x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

**2.1(1pt)** Portare in forma standard.

**2.2(1pt)** Impostare il problema ausiliario.

**2.3(2pt)** Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

**2.4(2pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo.

**2.5(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

**2.6(2pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

**Problema 3 (4 punti):**
**(2pt)** Dimostrare che $K_{3,3}$ è un grafo non planare.
**(2pt)** Dimostrare che ogni grafo che contenga $K_{3,3}$ come minore contiene anche una suddivisione di $K_{3,3}$ come suo sottografo.

**Problema 4 (2+2+4+5=13 punti):** Nella pagina a seguire riportiamo una problematica di gestione di mezzi. La pagina dopo ancora trovi la proposta di lavoro per ottenere i punti per il presente esercizio del tema d'esame odierno.

# Festa di laurea (`laurea`)

È tempo di lauree, quindi è tempo di feste. Un vostro compagno di corsi si laurea e decide di fare la festa di laurea in una piccola isola del Mediterraneo. Tutto il vostro gruppo di amici è invitato.

Arrivati sull'isola con il traghetto, vi accorgete che il luogo dove si svolgerà la festa è distante dal porto. Dovete, quindi, organizzarvi per arrivarci. Fortunatamente si tratta di un luogo turistico, quindi ci sono molti mezzi per arrivare. Avete a disposizione: scooter a noleggio (massimo due persone) o auto a noleggio (4, 5 o 7 persone). È già tardi, quindi non potete fare più viaggi.

Sapendo il costo di ognuno dei mezzi e la disponibilità di questi ultimi, quanto è il costo minimo per arrivare tutti alla festa?

## Dati di input

Il file `input.txt` è composto da 5 righe:

- La prima riga contiene un numero intero positivo che rappresenta il numero $N$ di persone che devono arrivare alla festa
- Ogni riga successiva contiene due numeri interi per ogni tipologia $i$ (in ordine: 2, 4, 5, 7 posti):
  - il numero $D_i$ di mezzi disponibili per la tipologia $i$
  - il prezzo $P_i$ del mezzo per la tipologia $i$

## Dati di output

Sul file `output.txt` stampare una sola riga contenente un intero il costo minimo necessario per raggiungere la festa.

## Assunzioni

- $1 \leq N \leq 100$
- $0 \leq D_i \leq 100$
- $1 \leq P_i \leq 100$

## Esempi di input/output

| input.txt | output.txt |
|---|---|
| 10<br>2 5<br>1 7<br>3 8<br>1 10 | 16 |

**(2pt)** Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la problematica di gestione dei mezzi di trasporto per la festa di laurea.

**(2pt)** Offrire una formulazione più generle dove il numero $T$ di tipologie di mezzi possa variare, e in particolare possa aversi $T > 4$ (il parametro $T$ potrebbe essere fornito come secondo numero della prima riga del file di input, che avrebbe quindi $T + 1$ righe invece di necessariamente 5). Per ogni mezzo, oltre al costo e alle disponibilità dovrebbe ora venir specificato anche il numero di posti.

**(4pt)** Fornire una dimostrazione di NP-completezza del problema generale riducendo ad esso il problema dello zaino,

**(5pt)** Fornire un algoritmo pseudo-polinomiale, di programmazione dinamica, per il problema generale. Non chiedo necessariamente né codice né pseudocodice, la cosa importante é definire la famiglia dei problemi (**(2pt)**), poi dare la ricorrenza (**(2pt)**), infine identificare e gestire i casi base (**(1pt)**).

**Problema 5 (7 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 58 | 56 | 51 | 59 | 48 | 37 | 31 | 60 | 40 | 14 | 55 | 34 | 46 | 21 | 19 | 57 | 54 | 62 | 39 | 20 | 52 | 36 | 27 | 53 |

**5.1(1pt)** trovare una sottosequenza (strettamente) decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.2(1pt)** una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice $i$ tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l'$i$-esimo, sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 60. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.4(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.5(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

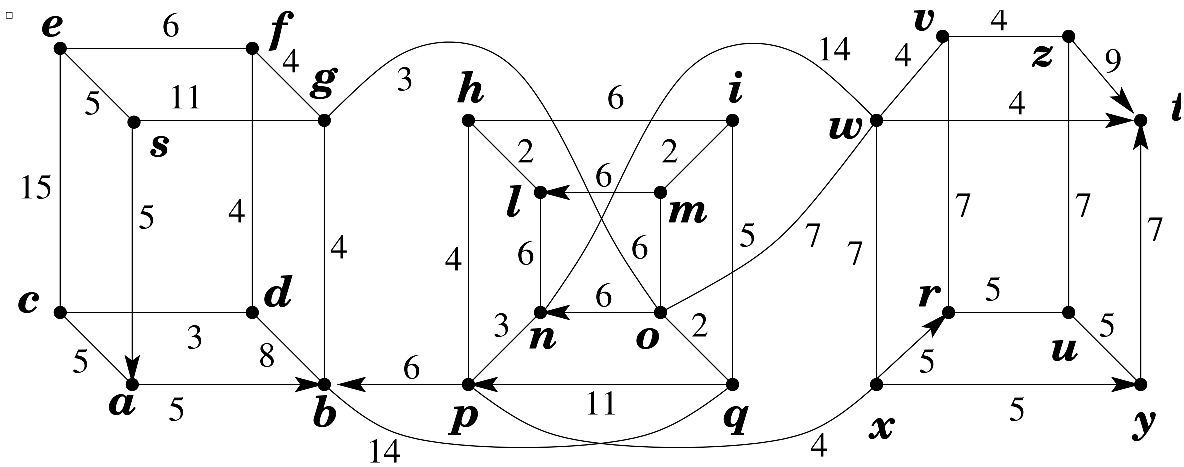
**5.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze (non-strettamente) crescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| decrescente | | |
| Z-sequenza | | |
| decrescente con 60 | | |
| evita i primi 4 | | |
| evita da 13-mo a 16-mo | | |
| minima copertura | | |

**Problema 6 (15 punti):**

Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ è planare oppure no.




6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo $G$; (2) il grafo $G'$.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $fg$, $wx$, $ln$.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.