Esame di Ricerca Operativa - 26 febbraio 2019
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un traghetto ha tre compartimenti per il trasporto delle merci: prua, poppa, stiva. Vi sono dei limiti sul peso e volume di merce trasportabile nei tre compartimenti. La seguente tabella specifica tali limiti in megagrammi (tonnellate) ed in metri cubi, rispettivamente:

Compartimento	Peso (Mg)	Spazio (m^3)
Prua	10	6800
Poppa	16	8700
Stiva	8	5300

Inoltre, per garantire un galleggiamento bilanciato del traghetto, il peso del carico deve essere ripartito sui tre compartimenti secondo le stesse percentuali delle capacità totali dei singoli compartimenti.

Per il prossimo viaggio abbiamo a disposizione le seguenti 4 tipologie di merce da carico.

Cargo	Peso (Mg)	Volume (m^3/Mg)	Profitto (Euro/Mg)
C_1	18	480	310
C_2	15	650	380
C_3	23	580	350
C_4	12	390	285

Una qualsiasi porzione di queste merci disponibili può essere trasportata (la tabella specifica solo la quantità massima, ossia quella attualmente presente nei magazzini di terra). Formulare come problema di programmazione lineare il problema di determinare quanto trasportare di ciascuna merce e come ripartirla sui compartimenti col fine di massimizzare il profitto.

Problema 2 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = A\,T\,G\,T\,C\,A\,G\,A\,A\,G\,A\,G\,T\,C\,G\,T\,A$ e $t = G\,T\,A\,C\,T\,G\,A\,C\,T\,G\,A\,A\,G\,G\,T\,A\,T$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

2.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'C'?

2.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = T\,G\,A\,A\,G\,G\,T\,A\,T$ di t?

2.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s^{14} = A\,T\,G\,T\,C\,A\,G\,A\,A\,G\,A\,G\,T\,C$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'C'		
tra s e t_9		
tra s^{14} e t		

Problema 3 (3+3 punti):

Dato un grafo $G = (V, E)$, il problema Chromatic Number chiede quale sia il minor numero di colori diversi che consenta di colorare tutti i nodi in modo che nodi adiacenti ricevano colori diversi. Ad esempio, un grafo é bipartito se 2 colori sono suficienti.

(3 punti) Formulare come un problema di PLI senza funzione obiettivo il problema di stabilire se $G = (V, E)$ sia bipartito.

(3 punti) Formulare come un problema di PLI il problema di stabilire il minor numero di colori che consenta la colorazione di $G = (V, E)$.

svolgimento.

riconoscimento di grafi bipartiti. Abbiamo una variabile $x_{v,i} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2$ e $v \in V$, con l'idea che $x_{v,i} = 1$ significa "il nodo v del grafo viene colorato con il colore i" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra. I vincoli sono i seguenti:

ogni nodo viene colorato $x_{v,1} + x_{v,2} \geq 1$ per ogni $v \in V$;

nodi adiacenti non possono ricevere lo stesso colore
$x_{u,1} + x_{v,1} \leq 1$ per ogni $uv \in E$;
$x_{u,2} + x_{v,2} \leq 1$ per ogni $uv \in E$.

determinazione del chromatic number. Ovviamente esiste sempre una colorazione di al più n colori, dove $n = |V|$. Ma talvolta risulta possibile risparmiare dei colori. Introduciamo quindi una variabile di utilizzo colore $y_i \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, con l'idea che $y_i = 1$ significa "il colore i viene utilizzato per colorare almeno un nodo del grafo" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Abbiamo inoltre una variabile $x_{v,i} \in \{0, 1\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ e $v \in V$, con l'idea che $x_{v,i} = 1$ significa "il nodo v del grafo viene colorato con il colore i" mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

La funzione obiettivo è quindi:

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i \, .$$

E i vincoli sono i seguenti:

ogni nodo viene colorato $\sum_{i=1}^{n} x_{v,i} \geq 1$ per ogni $v \in V$;

nodi adiacenti non possono ricevere lo stesso colore $x_{u,i} + x_{v,i} \leq 1$ per ogni $uv \in E$ e per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$;

ogni colore impiegato viene dichiarato $y_i \geq \sum_{v \in V} x_{v,i}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema 4 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	*R*	·	·	·	·	·	·	·	•
B	·	·	•	·	•	•	·	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	•	·	·	·	•	·	·
E	·	·	·	·	•	·	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	·	•	·
G	·	·	·	·	•	·	·	·	*H*

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–4 alla cella A–5) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–4 alla cella B–4). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

4.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

4.2 (1pt) e se la partenza è in C–3?

4.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

4.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

svolgimento.

Riempio prima le seguenti due tabelle di programmazione dinamica. Nella prima tabella, per ogni cella C riporto il numero di cammini dalla cella A–1 alla cella C. Dove presente il robot assumiamo il valore sia zero.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	•	1	•	•	1	2	2
C	1	3	3	4	4	4	5	7	9
D	1	4	•	4	8	12	•	7	16
E	1	5	5	9	•	12	12	19	35
F	1	6	11	20	20	32	44	•	35
G	1	7	18	38	•	32	76	76	111

Nella seconda tabella, per ogni cella C riporto il numero di cammini dalla cella C alla cella G–9. Dove presente il robot assumiamo il valore sia zero.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	111	51	28	28	11	11	11	4	•
B	60	23	•	17	•	•	7	4	1
C	37	23	17	17	11	7	3	3	1
D	14	6	•	6	4	4	•	2	1
E	8	6	4	2	•	4	2	1	1
F	2	2	2	2	2	2	1	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	1

Posso ora ricavare facilmente le risposte e riportarle nel quadro delle risposte. Alcune delle risposte sono anche verificate dal doppio conteggio, come il 111.

consegna	numero percorsi
A–1 $\to$ G–9	111
C–3 $\to$ G–9	17
A–1 $\to$ F–6	32
passaggio per D–5	$8 \cdot 4 = 32$

Problema 5 (4+2 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

63	18	55	81	7	9	25	13	31	47	70	83	4	32	16	61	43	20	15	54	63	99	43	14	27

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) trovare quante sono le sottosequenze crescenti di lunghezza massima.

5.3(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 47. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
2	1	4	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	8	4	3	9	8	7	7	6	4	3	2	6	5	5	3	4	4	4	3	2	1	1	2	1
63	18	55	81	7	9	25	13	31	47	70	83	4	32	16	61	43	20	15	54	63	99	44	14	27
1	1	2	3	1	2	3	3	4	5	6	7	1	5	4	6	6	5	4	7	8	9	7	4	6
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$

Crescente

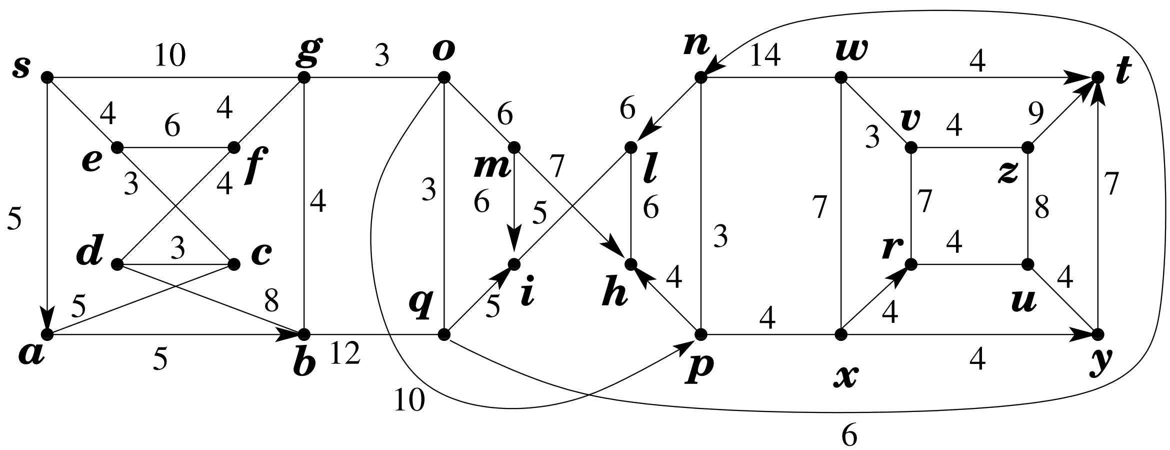
Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	9	7, 9, 25, 31, 32, 43, 54, 63, 99
quante	2	7, 9, (13-25), 31, 32, 43, 54, 63, 99
Z-sequenza	13	7, 9, 13, 31, 47, 70, 83, 4, 32, 43, 54, 63, 99
crescente con 47	8	7, 9, 13, 31, 47, 54, 63, 99

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

6.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.



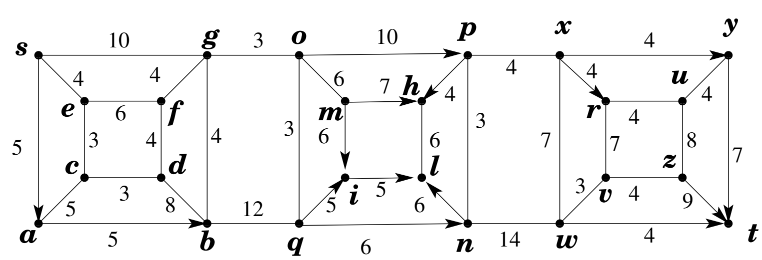
6.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

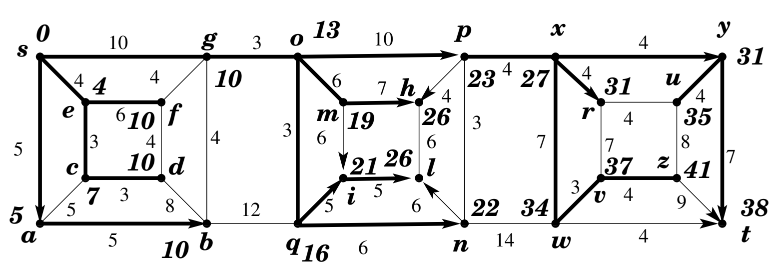
6.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

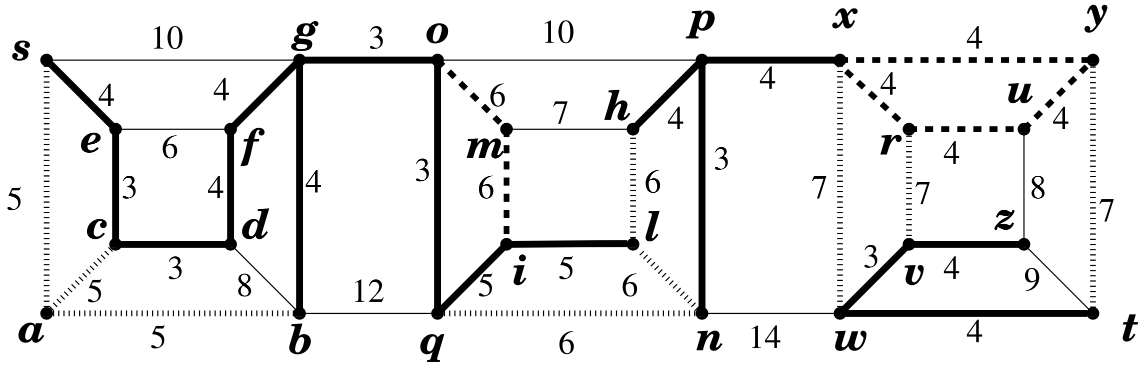
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



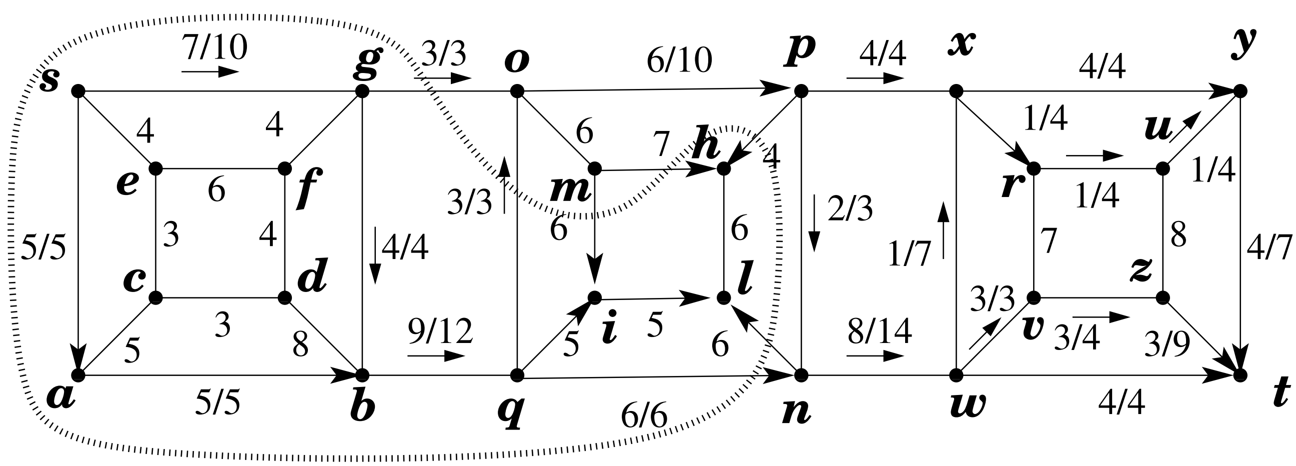
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (6 punti):

7.1**(1pt)** É possibile costruire un problema di PL che sia illimitato ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Certificare la risposta.

7.2**(1pt)** É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale sia anch'esso non ammissibile? Certificare la risposta.

7.3(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Certificare la risposta.

7.4(1pt) Costruire un problema di PL in forma standard il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 2 soluzioni ottime di base.

7.5(1pt) Costruire un problema di PL in forma standard con due variabili e precisamente 5 soluzioni ottime di base.

7.6(1pt) Costruire un problema di PL in forma standard la cui unica soluzione ottima sia degenere.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.