

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

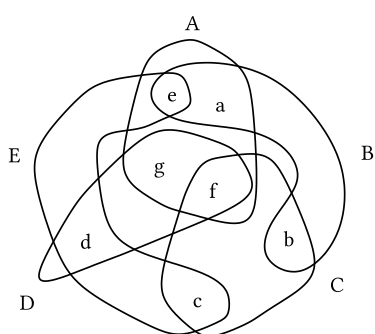
## Esame di Ricerca Operativa - 23 luglio 2024

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 55 punti in palio (voto  $\geq$  punti  $-6, 40 \rightarrow 30$  e lode)

### Esercizio 1 (con 7 richieste: $1+1+1+1+1+1+4 = 10$ punti [modellazione/riduzioni]):

Un ipergrafo è una coppia  $H = (U, \mathcal{E})$  con  $U$  un insieme finito di elementi chiamati *nodi* ed  $\mathcal{E}$  una famiglia di sottoinsiemi non-vuoti di  $U$  chiamati *iperarchi*. In pratica  $H$  è una qualsiasi famiglia di insiemi non-vuoti, e viene chiamato anche col nome di *set system*. Un *set cover* di  $H$  è un qualsiasi sottoinsieme  $\mathcal{E}'$  di  $\mathcal{E}$  tale che  $\bigcup_{e \in \mathcal{E}'} e = U$ .



**esempio.** i set covers dell'ipergrafo  $\overline{H}$  in figura sono  $\{A, B, E\}$ ,  $\{A, C, D\}$ ,  $\{A, C, E\}$ ,  $\{B, D, E\}$  e tutti i loro sovrainsiemi. Non è invece set cover di  $\overline{H}$  alcun sottoinsieme di  $\{A, B, C\}$  (il nodo  $d$  rimarrebbe scoperto), di  $\{A, B, D\}$  (manca  $c$ ), di  $\{A, D, E\}$  (manca  $b$ ), di  $\{B, C, D\}$  (manca  $e$ ), di  $\{B, C, E\}$  (manca  $g$ ), o di  $\{C, D, E\}$  (manca  $a$ ).

MIN SET COVER è il problema di trovare un set cover di minima cardinalità per un generico ipergrafo  $H$  dato in input.

### Richieste dell'Esercizio 1

**1.1 ( 1 pt, model via hypergraphs )** Vuoi inviare una mail pubblicitaria al maggior numero possibile di persone. Tali liste overlappano ma, escluse quelle non opportune, esse coprono complessivamente un sottoinsieme  $U$  della popolazione di tuo interesse. Rinunci ai destinatari al di fuori di  $U$ , ma stabilisci di dover raggiungere quantomeno chiunque ricada in  $U$ . Modella il problema di farlo minimizzando il numero di mailing list impiegate come un problema di MIN SET COVER.

**1.2 ( 1 pt, forge hypergraph model )** In realtà a ciascuna mailing list è associato un costo di utilizzo. Prova a definire un problema MIN SET COVER PESATO che ti consenta di meglio rappresentare il tuo problema.

**1.3 ( 1 pt, model your problem )** Assumi ora che il costo di impiego di ciascuna mailing list sia nullo, o trascurabile. Poniti piuttosto il problema di minimizzare il numero totale di mail che finirebbero nelle mailing box dei destinatari, pur assicurandoti che ogni persona in  $U$  sia raggiunta da almeno una mail. Mostra come anche in questa situazione potresti comunque avvalerti del problema/modello MIN SET COVER PESATO.

**1.4 ( 1 pt, model as ILP )** Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MIN SET COVER per la specifica istanza  $\overline{H}$  in figura.

**1.5 ( 1 pt, instance-specific dual LP )** Scrivi il problema duale del rilassamento continuo dello specifico problema di PLI di cui al punto precedente.

**1.6 ( 1 pt, generalize ILP model )** Estendi la tua formulazione PLI a un generico ipergrafo  $H = (U, \mathcal{E})$ .

**1.7 ( 4 pt, NP-hardness proof )** 3-SAT è un problema di decisione noto essere NP-completo. Sfrutta questo fatto per dimostrare che il problema di ottimizzazione MIN SET COVER è NP-hard. Un modo conveniente per farlo è introdurre una versione decisionale del problema MIN SET COVER, osservare

che la forma di ottimizzazione di nostro interesse non può essere che più facile della forma decisionale da te introdotta, e dare una riduzione da 3-SAT alla tua forma decisionale.

**Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):**

Un robot, inizialmente situato nella cella **A-1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I-10**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	1	1	1	1	1	0	0	●	6
B	2	1	1	0	●	0	●	0	0	5
C	0	●	0	●	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	●	0	3
E	0	0	●	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	●	3	1	3	0	1
G	3	●	2	1	2	0	●	3	1	●
H	2	1	2	1	2	1	1	1	2	0
I	4	4	3	3	2	1	1	●	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Se il robot deve evitare le celle proibite (●), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un premio del valore riportato nella cella stessa, sapresti massimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

**Richieste dell'Esercizio 2**

- 2.1 ( 1 pt, numero percorsi ) Numero di percorsi ammissibili da **A-1** a **I-10**
- 2.2 ( 1 pt, num percorsi da B-3 ) Numero di percorsi ammissibili da **B-3** a **I-10**
- 2.3 ( 1 pt, num percorsi a F-6 ) Numero di percorsi ammissibili da **A-1** a **F-6**
- 2.4 ( 1 pt, num percorsi per D-5 ) Numero di percorsi da **A-1** a **I-10** passanti per **D-5**
- 2.5 ( 1 pt, opt val ) Massimo totale di premi su un cammino da **A-1** a **I-10**. (E soluzione di tale valore).
- 2.6 ( 2 pt, numero cammini ottimi ) Numero cammini ottimi da **A-1** a **I-10**
- 2.7 ( 1 pt, opt val per D-5 ) Massimo totale di premi su un cammino da **A-1** a **I-10** passante per **D-5**
- 2.8 ( 2 pt, num paths of opt val via D-5 ) Numero cammini ottimi da **A-1** a **I-10** passanti per **D-5**

**Quadro delle risposte dell'Esercizio 2**

consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A-1 → I-10			
B-3 → I-10			
A-1 → F-6			
passaggio per D-5			
massimo valore			
n. max-val paths			
max val D-5-path			
n. max-val D-5-paths			

,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 3: **num cammini a**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 4: **num cammini da**

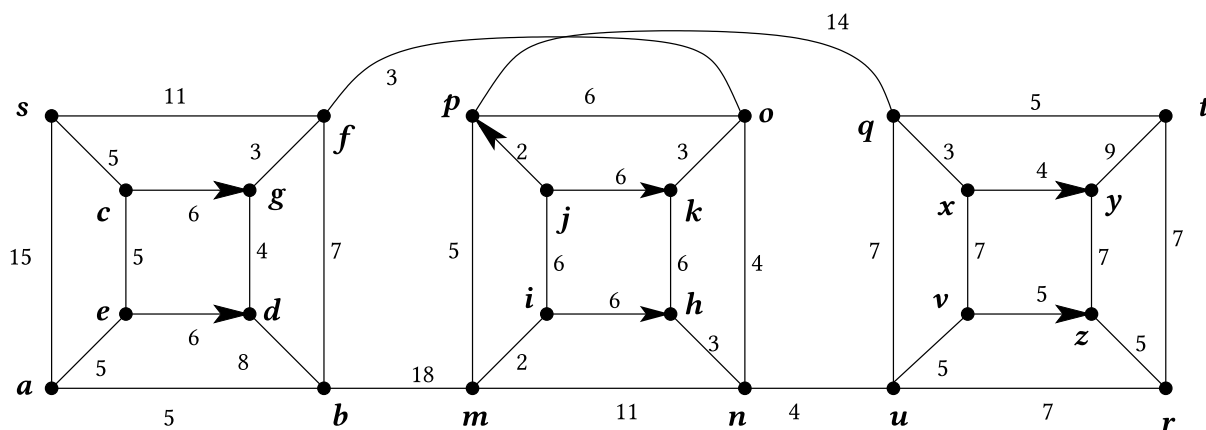
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 5: **max val cammino a (e num opt paths)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 6: **max val cammino da (e num opt sols)**

Esercizio 3 (con 8 richieste: 3+4+2+2+2+2+1+3 = 19 punti [grafi]):



### Richieste dell'Esercizio 3

- 3.1 ( 3 pt, recognize planarity ) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo  $G$  e il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  sostituendo l'arco  $bm$  con un arco  $bt$ . (2 punti per il certificato di non-planarità, 1 per quello di planarità)
- 3.2 ( 4 pt, recognize 2-colorability ) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi  $G$  e  $G'$  (1 punto per ogni soluzione certificata da bicolorazione e 1 per ogni certificato di ottimalità).
- 3.3 ( 2 pt, max flow ) In  $G$ , trovare un massimo flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .
- 3.4 ( 2 pt, min cut ) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.
- 3.5 ( 2 pt, flow sensitivity ) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.
- 3.6 ( 2 pt, certify flow sensitivity ) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).
- 3.7 ( 1 pt, MST ) In  $G$ , fornire un albero ricoprente di peso minimo.
- 3.8 ( 3 pt, MST certificates ) Per ciascuno dei tre archi incidenti in  $t$  dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutti / a nessuno / a qualcuno ma non a tutti) gli alberi ricoprenti di peso minimo.

### Quadro delle risposte dell'Esercizio 3

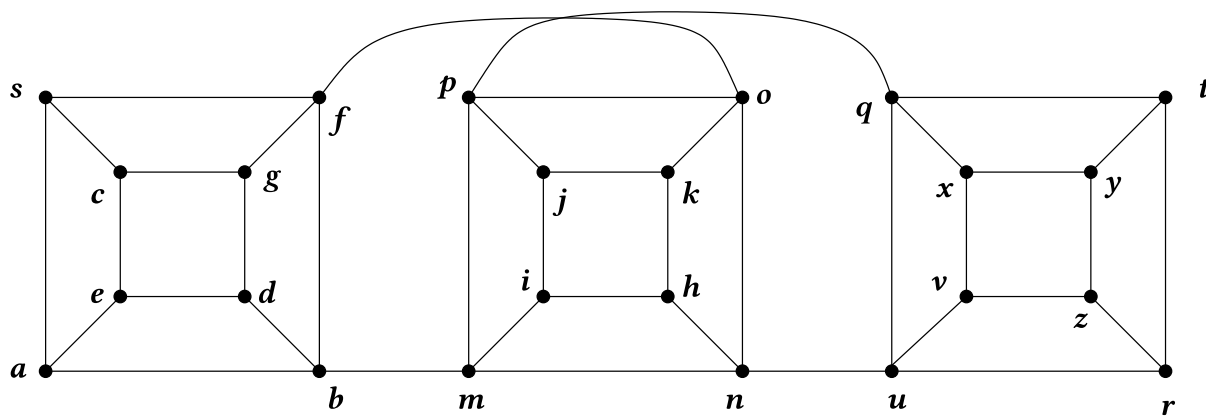


Figura 1: eventuale certificato di non planarità di  $G$ .

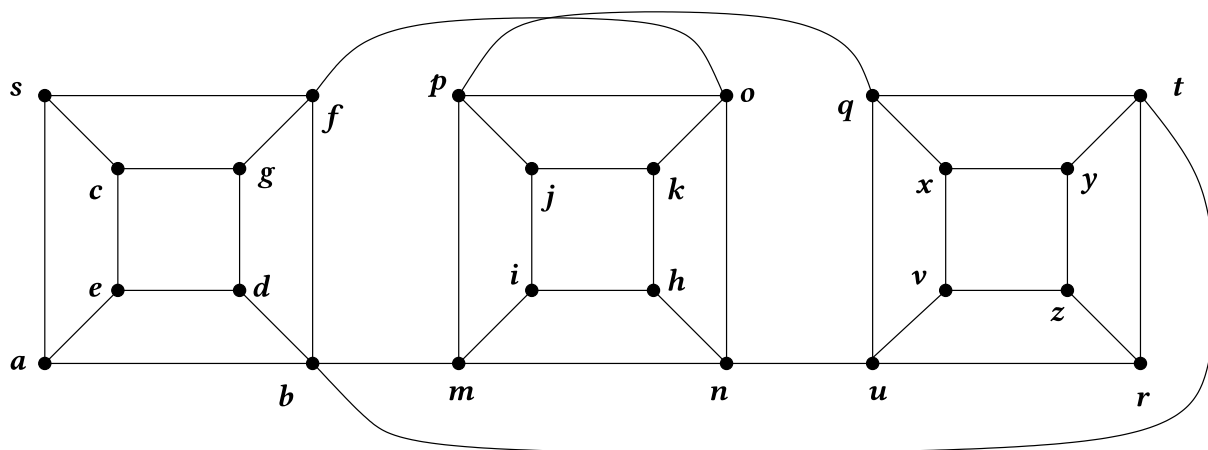


Figura 2: eventuale certificato di non planarità di  $G'$ .

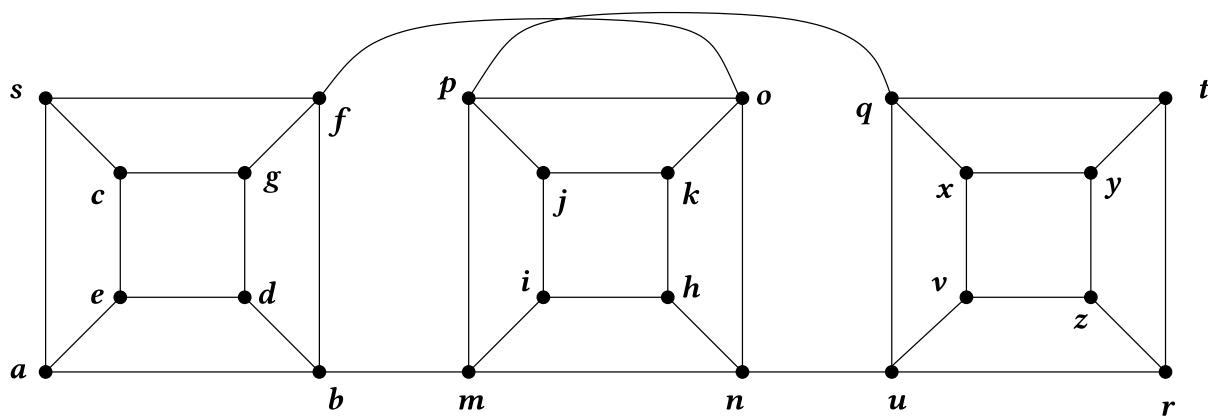


Figura 3: bipartiteness di  $G$ .

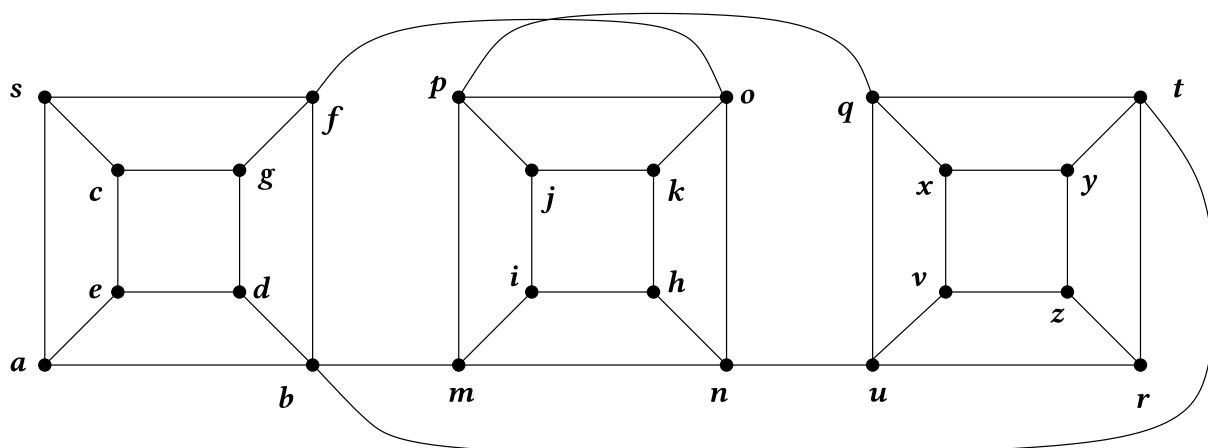
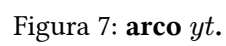
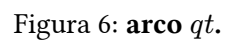
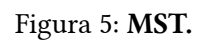
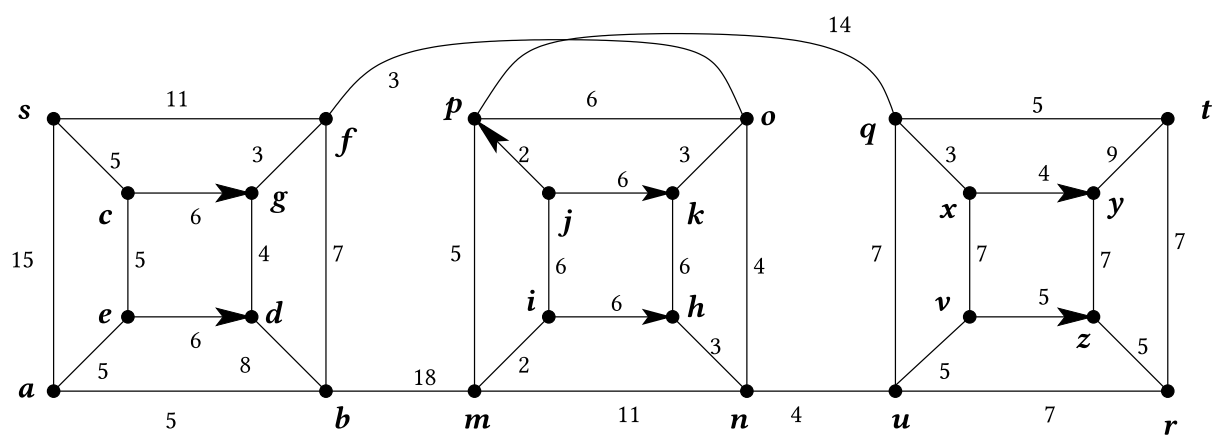
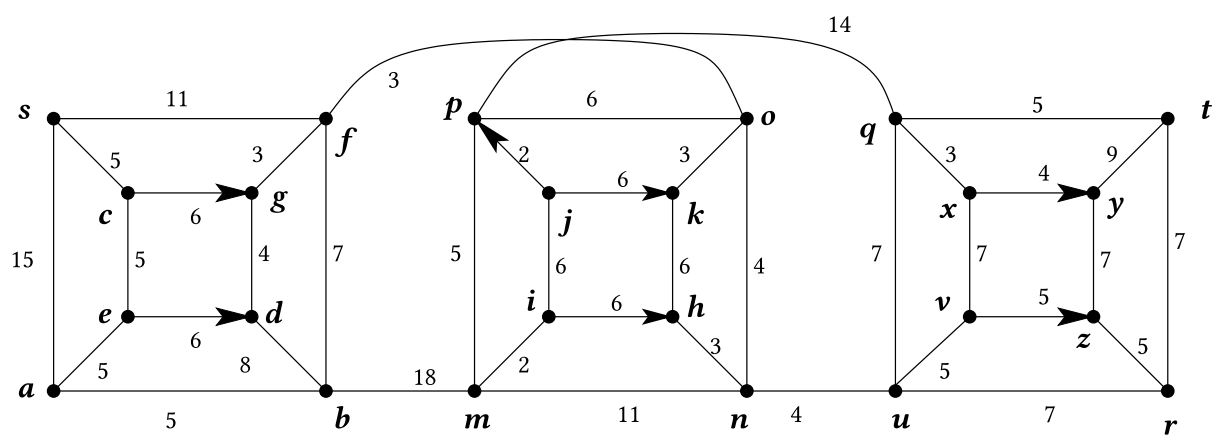
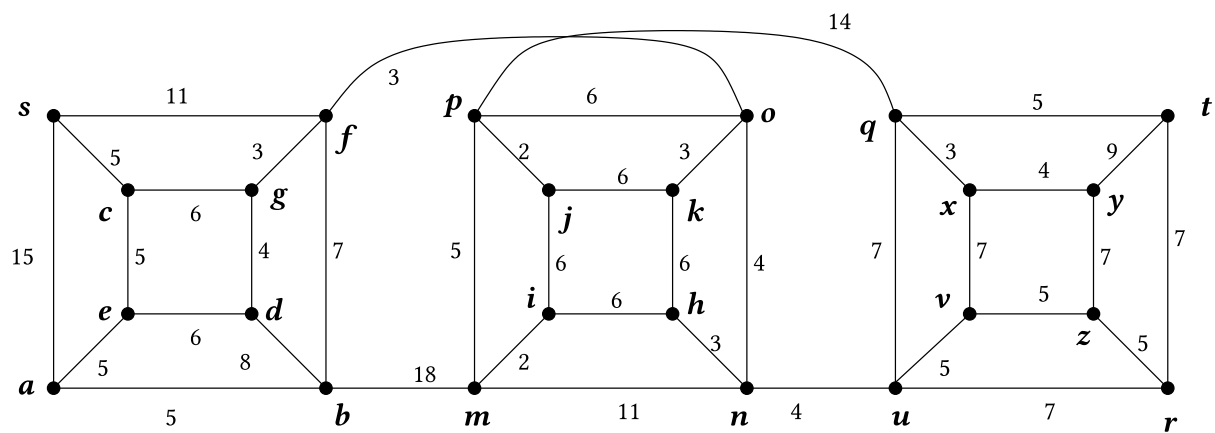


Figura 4: bipartiteness di  $G''$ .





**Esercizio 4 (con 10 richieste: 1+1+1+1+1+1+5+2+1+2 = 16 punti [simplesso]):**

$$\begin{aligned}\max \quad & 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0\end{aligned}$$

#### **Richieste dell'Esercizio 4**

- 4.1 ( 1 pt, STD form ) Porta in forma standard.
- 4.2 ( 1 pt, auxiliary problem ) Imposta il problema ausiliario.
- 4.3 ( 1 pt, fase 1 ) Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.
- 4.4 ( 1 pt, inter-fases ) Ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario in forma standard dalla soluzione ottima di base del problema ausiliario.
- 4.5 ( 1 pt, prova del 9 su prima soluzione ammissibile ) Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi la prova del 9 della PL per verificare la correttezza della soluzione ammissibile di base ottenuta.
- 4.6 ( 1 pt, first dual sol ) Si espliciti la soluzione duale di base associata a questo primo dizionario per la seconda fase. Si commenti se essa sia ammissibile o meno.
- 4.7 ( 5 pt, reach optimality ) Risolvere il problema originario all'ottimo. I punti aggiuntivi vengono attribuiti se ad ognuno dei diversi pivot che dovrai compiere effettuerai esplicitamente una prova del 9: un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base primale ammissibile, un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base duale ammissibile, un punto se verifichi con almeno una soluzione tutti i dizionari visitati. Come ogni altra evidenza che date per ottenere punti, queste prove devono essere offerte in modo chiaro ed esplicito, e consiglio di incorniciare ogni vostra risposta che miri a diventare punti. (2+1pt+1pt+1pt)
- 4.8 ( 2 pt, dual opt sol ) rendere esplicita la soluzione duale ottima (1pt). Utilizzarla per dimostrare l'ottimalità della soluzione primale (1pt).
- 4.9 ( 1 pt, shadow prices ) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di variazione in ciascuno dei termini noti dei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)
- 4.10 ( 2 pt, sensitivity analisys ) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

#### **LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**

##### Procedura da seguire per l'esame -collaborare al controllo

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccoglierti. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.



4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -assegnazione punti

- 1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.
- 2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -completamento esame

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito va richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.