

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

## Esame di Ricerca Operativa - 27 settembre 2017

### Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 66, con voto  $\geq$  punti +  $k$ ,  $k \geq 0$

#### Problema 1 (19 punti):

Sono il banco e metto un euro nel piatto davanti a me. Un giocatore è attratto, si siede, e mette anche lui un euro nel piatto per partecipare al gioco così organizzato: sulla fronte del giocatore viene posta una carta in modo che lui non possa vederla; la carta ha il 50% di probabilità di essere rossa ed il 50% di probabilità di essere blu. Vista la carta, il banco può scegliere di rivelarne il colore: se blu allora il giocatore si aggiudica il piatto, se rossa il piatto va al banco. In alternativa, il banco può scegliere di aggiungere altri  $k$  euro al piatto, dove  $k$  è un valore positivo fissato nelle regole del gioco. In questo secondo caso, il giocatore può scegliere tra due opzioni:

**lascio** uscire dal gioco lasciando il piatto al banco e rinunciando a vedere rivelato il colore della carta;

**vedo** aggiungere  $k$  euro al piatto e andare a vedere il colore della carta: se la carta è blu l'intero piatto va al giocatore, altrimenti esso va al banco.

(2pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Puoi dire da subito che il valore del gioco è nullo, oppure non-positivo o non-negativo per il banco? Individuare un argomento chiaro e conciso a sostegno della tua affermazione.

(1pt) Elencare, descrivendole compiutamente, le due strategie pure del giocatore.

(1pt) Elencare, descrivendole compiutamente, le quattro strategie pure del banco.

(1pt) Il gioco prevede due scenari (blu e rosso). Compilare le tabelle dei payoff (una cella per ogni coppia di strategie pure, di banco e di giocatore) per ciascuno di questi due scenari.

(1pt) Compilare la tabella dei valori attesi di payoff quando lo scenario sia inteso come variabile aleatoria ancora da determinarsi (una terza tabella immediatamente ricavabile dalle due precedenti, e della stessa dimensionalità).

(2pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Riesci a proporre qualche politica cui uno dei due attori possa attenersi senza danno e che consenta di semplificare l'analisi del gioco? (Con riduzione e potatura dell'albero dei possibili svolgimenti del gioco). Quali delle strategie pure sopra elencate potrebbero essere quindi ignorate?

(1pt) Determina il valore del gioco per  $k = 2$ .

(1pt) Fornire la strategia ottima del banco per  $k = 2$ .

(1pt) Fornire la strategia ottima del giocatore per  $k = 2$ .

(4pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Formula come un problema di PL la determinazione del valore del gioco e di una strategia mista ottima per il banco per  $k$  generico.

(1pt) Determina il valore del gioco per  $k$  generico.

(1pt) Fornire la strategia ottima del banco per  $k$  generico.

(2pt) Fornire la strategia ottima del giocatore per  $k$  generico.

#### Problema 2 (3+4+3+1+2=13 punti):

Un grafo  $G = (V, E)$  viene fornito in input. Un sottoinsieme di archi  $B \subseteq E$  è detto un bipartizer di  $G$  se il graf  $G = (V, E \setminus B)$  ottenuto da  $G$  per rimozione degli archi in  $B$  è bipartito. Sorge il problema di computare un bipartizer  $B$  di  $G$  di cardinalità  $|B|$  la più piccola possibile.

(3pt) Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) per questo problema. Ti è consentito impiegare un numero esponenziale di vincoli nella size di  $G$  (ad esempio un vincolo per ogni sottoinsieme di nodi di  $G$ , oppure per ogni ciclo o spanning tree di  $G$ ).

(4pt) Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) che impieghi un numero al più polinomiale di vincoli nella size di  $G$ .

**(3pt)** Dimostrare che il problema è NP-completo tramite una riduzione dal celebre problema NP-completo MAX-CUT. Nel problema MAX-CUT viene fornito in input un grafo  $G = (V, E)$  e si richiede di trovare un taglio di  $G$  che ricomprenda il massimo numero di archi. Dato un insieme di nodi  $X \subseteq V$ , il taglio  $\delta(X)$  è l'insieme di quegli archi con precisamente un estremo in  $X$ .

(1pt) Può esistere un modello di programmazione lineare (PL) che impieghi un numero al più polinomiale di variabili e di vincoli nella size di  $G$ ? Giustificare la risposta.

**(2pt)** Può esistere un modello di programmazione lineare (PL) che impieghi un numero al più polinomiale di variabili ma senza limiti sul numero di vincoli? Giustificare la risposta.

**Problema 3 (15 punti):**

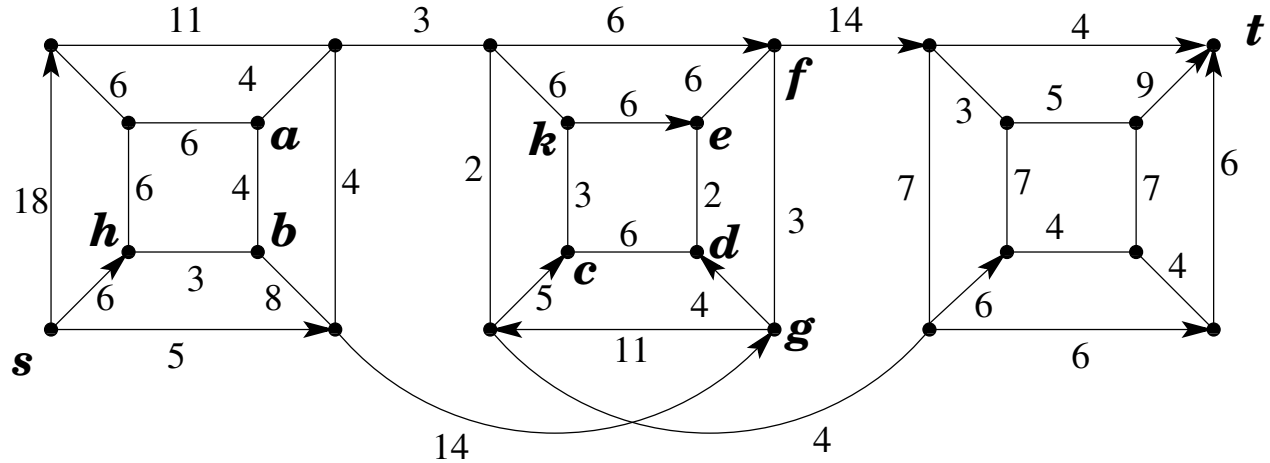
Si consideri la soluzione  $x_1 = x_4 = 0$ ,  $x_2 = 10$ ,  $x_3 = 14$ ,  $x_5 = 6$ ,  $x_6 = 5$  del seguente problema.

[illegible]

- 3.1.(1pt) Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.
- 3.2.(1pt) Scrivere il problema duale.
- 3.3.(1pt) Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.
- 3.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.
- 3.5.(2pt) La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.
- 3.6.(2pt) Costruire un piccolo problema della stessa tipologia e tale che: (1) la soluzione primale  $x$  fornita sia ammissibile; (2) le condizioni agli scarti complementari risultino contraddittorie, ossia non esista alcuna soluzione duale  $y$  che le soddisfi in riferimento alla soluzione primale  $x$  fornita.
- 3.7.(2pt) Costruire un piccolo problema della stessa tipologia e tale che: (1) la soluzione primale fornita sia ammissibile; (2) le condizioni agli scarti complementari portino a ricostruire univocamente la soluzione duale  $y$  ad essa associata; (3) le verifiche finali prese su  $y$  portino a concludere che la soluzione primale fornita **non** è ottima.
- 3.8.(2pt) Con riferimento all'esempio da te proposto al punto 3.7 immediatamente precedente, andare a vedere ed intuire **come** la soluzione duale  $y$  indichi quale variabile del primale portare in base per ottenere una nuova soluzione primale di valore strettamente migliore di quella fornita.
- 3.9.(3pt) Congetturare la forma di una regola generale (nel caso di soluzione duale  $y$  univocamente ricostruita dalle condizioni degli scarti complementari) per ottenere precisa indicazione su una variabile del primale da portare in base per ottenere miglioramento in un solo pivot, ove la soluzione non sia già ottima.

**Problema 4 (15 punti):**

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 4.1.(2pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 4.2.(1pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 4.3.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 4.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime:  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$ .
- 4.5.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da  $s$  e determinare le distanze di tutti i nodi da  $s$ .
- 4.6.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da  $s$ . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 4.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .
- 4.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .
- 4.9.(2pt) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato (1pt) del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

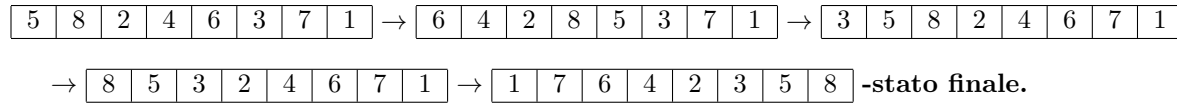
**Problema 5 (2+2=4 punti):**

I numeri naturali da 1 ad  $n$  sono collocati nelle  $n$  celle di un vettore  $v$ , di indici da 1 ad  $n$ . Si parte con i numeri collocati secondo una permutazione arbitraria, e, fintantochè  $v[1] \neq 1$ , si effettua la seguente mossa:

sia  $p = v[1]$ . Si rovesci il prefisso  $v[1 \dots p]$  del vettore  $v$ .

Esempio: se partiamo dalla permutazione 5, 8, 2, 4, 6, 3, 7, 1, il processo attraversa i seguenti stati:

**stato iniziale:**



**(2pt)** Dimostrare che il processo deve necessariamente terminare qualsiasi sia la permutazione di partenza.

**(1pt)** Fornire un upper-bound (come funzione di  $n$ ) sul numero di mosse che possano avvenire in tutto.

**(1pt)** Questo ulteriore punto se il tuo upper-bound è del tipo  $c^n$  per un qualche  $c$ .

### LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

#### PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

#### COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in su i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.