Michele Zanolli 3QN

PROBLEMA NP–COMPLETO: DOMINATING SET

Corso di Complessità
Anno accademico 2002–2003

DOMINATING SET (DS) è il seguente problema combinatorico:

ISTANZA: Una coppia $\langle G, k \rangle$ dove $G = (V, E)$ è un grafo non orientato e k un intero positivo.

DOMANDA: esiste un sottoinsieme $X \subseteq V$ con $|X| \leq k$ tale che ogni nodo $v \in V - X$ è unito ad almeno un membro di X da un arco in E?

Vogliamo dimostrare che DS è un problema NP-Completo. Per mostrare questo ridurremo un problema già noto essere NP-Completo a DS. Il problema scelto, noto come VERTEX COVER (VC), è il seguente:

ISTANZA: Una coppia $\langle G, k \rangle$ dove $G = (V, E)$ è un grafo non orientato e k un intero positivo.

DOMANDA: esiste un sottoinsieme $X \subseteq V$ con $|X| \leq k$ tale che ogni arco $e \in E$ è incidente in almeno un nodo in X?

VC fu dimostrato essere NP-Completo in [1].

A titolo di esempio, in Figura 1 è rappresentata una semplice istanza di VC dove, come si può notare, ogni arco del grafo è incidente in almeno un nodo colorato in nero (b e d). I nodi colorati in nero formano pertanto un VERTEX COVER di G.

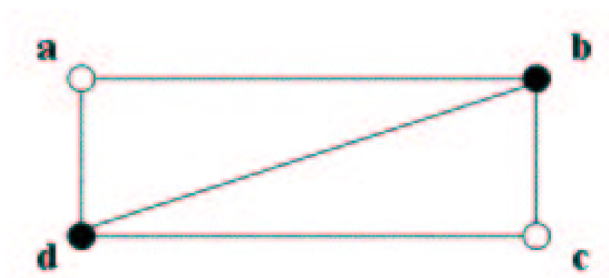

Figura 1: Grafo $G = (V, E)$: istanza di VC.

RIDUZIONE PROPOSTA: partiremo da una generica istanza $\langle G, k \rangle$ di VC e la trasformeremo in un'istanza $\langle G', k \rangle$ di DS, in modo che $\langle G, k \rangle$ ammetta una soluzione valida (certificato di appartenenza a VC) se e solo se anche $\langle G', k \rangle$ ammette una soluzione valida (certificato di appartenenza a DS).

Si noti che un VERTEX COVER minimale non contiene alcun nodo isolato di G. Pertanto, senza perdita di generalità, possiamo assumere che G non contenga nodi isolati. Il grafo $G' = (V', E')$ è ottenuto da $G = (V, E)$ in base alle seguenti regole:

$$V' = V \cup \{v_e : e \in E\}$$

$$E' = E \cup \{xv_{xy} : xy \in E\}.$$

Per esempio, se $\langle G, k\rangle$ è l'istanza di VC precedentemente considerata in Figura 1, otteniamo la rispettiva istanza $\langle G', k\rangle$ di DS incollando ad ogni arco xy in G un triangolo, ossia aggiungendo un nodo v_{xy} e due nuovi archi xv_{xy} e yv_{xy}. Il grafo così ottenuto è mostrato in Figura 2, ove i nodi colorati in nero sono rimasti esattamente gli stessi. Questa trasformazione può essere fatta chiaramente in tempo polinomiale.

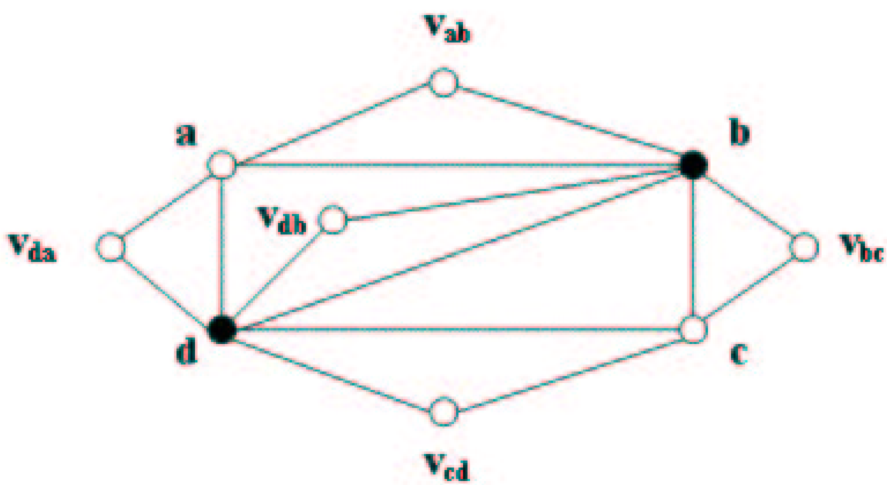

Figura 2: Grafo $G' = (V', E')$: istanza di DS.

Un DOMINATING SET X di G' è detto in *forma canonica* quando non contiene alcun nodo del tipo v_e. Si noti che dato un DOMINATING SET X' in G' si avrà sempre un DOMINATING SET X in forma canonica con $|X| \leq |X'|$. Infatti se $v_{xy} \in X'$ possiamo sostituirlo con x. (Se x è già in X', allora v_{xy} può essere semplicemente tolto.)

Lemma 1 *$\langle G, k\rangle \in VC$ se e solo se $\langle G', k\rangle \in DS$.*

Dimostrazione:

($\Rightarrow$): sia X un vertex cover di G con $|X| \leq k$. Allora X è un dominating set in G'. Sia v' un qualsiasi nodo in $V' - X$.
- Se $v' \in V$, si denoti con $e \in E$ un arco incidente in v' (esiste poichè abbiamo assunto che G non contiene nodi isolati) e con x l'altro estremo di e. $x \in X$ in quanto X deve coprire e, pertanto v' è dominato da x.
- Se $v' = v_e$, almeno uno dei due estremi di e appartiene a X, ne consegue che v' è dominato da tale estremo.

($\Leftarrow$): sia X un dominating set di G' con $|X| \leq k$. In base a quanto detto sopra possiamo assumere che X sia in forma canonica. Allora X è un vertex cover in G.
Sia e un generico arco in G. Poichè X è in forma canonica, il nodo v_e in G' non appartiene a X ma è dominato da almeno uno dei suoi estremi. Tale estremo apparterrà pertanto ad X. Ne consegue che X copre e in G.

In conclusione facciamo notare che per questa dimostrazione è stato utilizzato il metodo *local replacement*. Questo metodo consiste nella sostituzione di ogni componente dell'istanza di input con una nuova componente, detta unità base, in modo da ottenere l'istanza di output desiderata. Nel caso in questione abbiamo identificato il triangolo come unità base e abbiamo sostituito ogni singolo arco del grafo dell'istanza di VC di partenza con esso, in modo da ottenere una corrispondente istanza di DS.

Riferimenti bibliografici

[1] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972.