Esame di Ricerca Operativa - 19 settembre 2024

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 72 punti in palio   (voto $\geq$ punti -6, $40 \longrightarrow 30$ *e lode*)

- CORREZIONE -

Esercizio 1 (con 11 richieste: 1+2+2+2+1+1+1+1+2+2+1 = 16 punti [modellazione/riduzioni]):

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ con V un insieme finito di elementi chiamati *nodi*. Gli elementi dell'insieme E, chiamati *archi*, sono tutti coppie non ordinate di nodi distinti. Ciascun arco $\{u, v\} \in E$, scritto più brevemente uv, è detto *incidere* nei suoi *estremi* u e v. Il grafo è detto *bipartito tra* A *e* B se $V = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ e ogni arco in E ha un estremo in A e l'altro in B. Un *node cover* di G è un $X \subseteq V$ tale che ogni arco $uv \in E$ ha un estremo in X. Un *matching* di G è un $M \subseteq E$ non contenente due archi incidenti in uno stesso nodo. Due importanti problemi modello nel linguaggio dei grafi sono:

MIN (BIPARTITE) NODE COVER è il problema di trovare un node cover di minima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

MAX (BIPARTITE) MATCHING è il problema di trovare un matching di massima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

1 .1 (1 pt, model generality) Tra il MAX MATCHING e il MAX BIPARTITE MATCHING quale dei due modelli è più espressivo? Ossia, quale dei due problemi è più generale e quindi più ambizioso da risolvere?

1 .2 (2 pt, model as Min Bipartite Node Cover) Formula in termini di MIN BIPARTITE NODE COVER il problema di rimuovere il minor numero possibile di righe/colonne da una matrice di interi M data in input per ottenere una matrice tutta di zeri. (1pt se produci il grafo istanza di MIN BIPARTITE NODE COVER che cattura l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema in oggetto; 1pt se spieghi come costruire il grafo in funzione di M.)

1 .3 (2 pt, model as Max Bipartite Matching) Per ciascuno dei tuoi dipendenti in $D = \{a, b, c\}$ sai quale commessa in $C = \{1, 2, 3\}$ potrebbe evadere ($\mathrm{OK}(a) = [1, 2, 3]$, $\mathrm{OK}(b) = [2]$, $\mathrm{OK}(c) = [1, 2]$). Formula in termini di MAX BIPARTITE MATCHING il problema di assegnare al più una commessa a ciascuno dei tuoi dipendenti in modo da massimizzare il numero di commesse evase dalla tua ditta. (1pt se produci il grafo che, inteso come istanza di MAX BIPARTITE MATCHING, cattura fedelmente il problema della tua ditta; 1pt se spieghi come altre ditte potrebbero prodursi il grafo che rappresenta le loro istanze (partendo da D generico, C generico, OK generico).)

1 .4 (2 pt, forge graph model) In realtà a ciascuna commessa è associato un valore. Prova a definire un problema MAX BIPARTITE MATCHING PESATO che ti consenta di catturare/rappresentare il problema della tua ditta. (1pt per la definizione del problema modello nel linguaggio dei grafi; 1pt per illustrare come utilizzarlo su un'istanza generica della tua ditta.)

1 .5 (1 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MIN BIPARTITE NODE COVER per la specifica istanza (uno specifico grafo) che rappresenta l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema sulle matrici.

1 .6 (1 pt, generalize ILP model) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI)

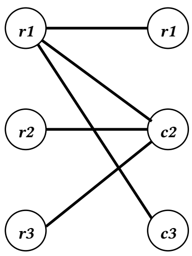
il problema Min Bipartite Node Cover per il generico grafo $G = (V, E)$ bipartito tra A e B.
1 .7 (1 pt, general ILP model for the matrix problem) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema di rimuovere il minor numero possibile di righe da una generica matrice M per rimanersene con una matrice di soli zeri.
1 .8 (1 pt, LP relaxations) Scrivi il rilassamento continuo dei due modelli PLI ai punti precedenti.
1 .9 (2 pt, LP duals) Scrivi i duali dei rilassamenti continui al punto precedente.
1 .10 (2 pt, combinatorial duals) Ispirato dagli LP al punto precedente, proponi un problema combinatorico su grafo bipartito ed un problema combinatorico su matrice M che possano offrire dei bounds sempre validi (e di fatto stretti e certificanti) per il problema Min Bipartite Node Cover e per il problema di minima rimozione di righe e colonne a svuotare una matrice M.
1 .11 (1 pt, instance-specific auto-certifying optimal pair) Quale è il minor numero di righe/colonne da rimuovere dalla matrice 3x3 sopra introdotta? Esibisci una soluzione corredata di certificato di sua ottimalità.

Svolgimento esercizio 1 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: model generality**).**

Il problema Max Bipartite Matching è la *restrizione* di Max Matching ai soli grafi bipartiti in quanto rifiuta di prendere in input grafi che non sono bipartiti, ma su grafi bipartiti i due problemi chiedono esattamente la stessa cosa. Per questa ragione Max Matching risulta essere un problema più generale e un modello più espressivo.

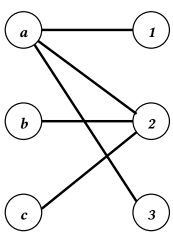
Richiesta 2 (2 pt) (goal: model as Min Bipartite Node Cover**).**
Dove R sia l'insieme degli indici delle righe di M, e C quello delle colonne, si consideri il grafo $G = (R \cup C, E)$ con $E = \{rc : r \in R, c \in C, M_{r,c} \neq 0\}$. Si noti che G è un grafo bipartito tra R e C e che un set $X \subseteq V := R \cup C$ è un node cover di G se e solo se la matrice ottenuta da M rimuovendo le righe in $X \cap R$ e le colonne in $X \cap C$ è tutta zeri.



Tramite questa riduzione generale l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema in oggetto viene mappata nell'istanza di Min Bipartite Node Cover rappresentata in figura, ossia nel grafo bipartito tra $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ di archi $E = \{r_1c_1, r_1c_2, r_1c_3, r_2c_2, r_3c_2\}$.

Richiesta 3 (2 pt) (goal: model as Max Bipartite Matching**).**

Si consideri il grafo $G = (D \cup C, E)$ con $E = \{(d, c) : d \in D, c \in C, c \in \text{OK}(d)\}$. Si noti che G è un grafo bipartito tra D e C e che un assegnamento parziale delle commesse in ingresso ai dipendenti, dove a nessun dipendente si chieda di ricoprire più di una mansione, può essere visto come un sottoinsieme M di E tale che in ogni nodo $v \in D \cup C$ incida al più un arco, ossia come un matching di G. La cardinalità del matching (ossia il numero di archi che esso ricomprende) eguaglia in numero di commesse assegnate ad un qualche dipendente, ed è quindi ciò che la ditta intende massimizzare.

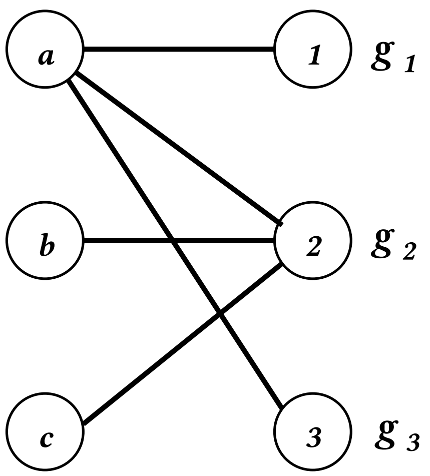


Tramite questa riduzione generale l'istanza $D = \{a, b, c\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $\text{OK}(a) = [1, 2, 3]$, $\text{OK}(b) = [2]$, $\text{OK}(c) = [1, 2]$ del problema in oggetto proposta nel testo viene mappata nell'istanza di Max Bipartite Matching rappresentata in figura, ossia nel grafo bipartito tra $D = \{a, b, c\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$ di archi $E = \{a1, a2, a3, b2, c2\}$.

Richiesta 4 (2 pt) (goal: forge graph model**).**

Stiamo ora assumendo che la commessa c comporti un guadagno netto $g_c \in \mathbb{R}$. A questo punto la generica istanza del problema di interesse è rappresentata dalla quadrupla $\langle D, C, \mathrm{OK}, g\rangle$. Siccome non vi è modo di esprimere l'ulteriore informazione arrecata da g entro un'istanza del modello di Max Bipartite Matching, vorremmo quì estendere all'uopo tale modello. Un'istanza di Max Bipartite Matching Pesato dovrebbe essere ancora un grafo bipartito ma ora *pesato*, ossia corredato di un set di valori numerici. Come grafo vorremmo tenere lo stesso grafo $G = (D \cup C, E)$ bipartito tra D e C visto sopra, che già cattura lo spazio delle soluzioni ammissibili. Vedo due opzioni principali su come pesarlo per andare a codificare la funzione obiettivo:

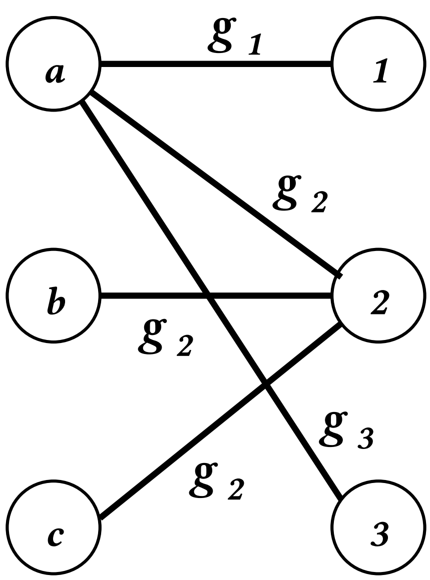
pesi sui nodi di una singola classe ad ogni nodo $c \in C$ associo il valore g_c della commessa c. In tale caso il valore di un matching M è la somma dei valori dei nodi in C cui è incidente un qualche arco di M.



Nel caso dell'istanza $\overline{D} = \{a, b, c\}$, $\overline{C} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{\mathrm{OK}}(a) = [1, 2, 3]$, $\overline{\mathrm{OK}}(b) = [2]$, $\overline{\mathrm{OK}}(c) = [1, 2]$, comunque corredata di valori g_1, g_2, g_3 sulle tre commesse, potremo mapparla nel problema esteso producendo il grafo bipartito tra $\overline{D}$ e $\overline{C}$ di archi $E = \{(d, c) : d \in D, c \in C, c \in \mathrm{OK}(d)\}$ e così corredato di valori numerici:

$$\begin{aligned}
\mathbf{val(1)} &= \text{ compenso netto per commessa } 1 = g_1 \\
\mathbf{val(2)} &= \text{ compenso netto per commessa } 2 = g_2 \\
\mathbf{val(3)} &= \text{ compenso netto per commessa } 3 = g_3
\end{aligned}$$

pesi sugli archi ad ogni arco $dc \in E$ associo il valore della commessa c. In tale caso il valore di un matching M è la somma dei valori degli archi in M. La generica istanza $\langle D, C, \mathrm{OK}, g\rangle$ del problema di interesse potrà essere mappata nell'istanza del modello esteso che compendia il grafo bipartito già introdotto associando il valore $\mathrm{val}(dc) := g_c$ ad ogni suo arco dc.



Nel caso dell'istanza specifica d'esempio, essa troverebbe rappresentazione nel grafo bipartito tra $\overline{D}$ e $\overline{C}$ di archi $E = \{(d, c) : d \in D, c \in C, c \in \mathrm{OK}(d)\}$ e così corredato di valori numerici:

$$\begin{aligned}
\mathbf{val}(\boldsymbol{a}\mathbf{1}) &= g_1 \\
\mathbf{val}(\boldsymbol{a}\mathbf{2}) &= g_2 \\
\mathbf{val}(\boldsymbol{a}\mathbf{3}) &= g_3 \\
\mathbf{val}(\boldsymbol{b}\mathbf{2}) &= g_2 \\
\mathbf{val}(\boldsymbol{c}\mathbf{2}) &= g_2
\end{aligned}$$

Richiesta 6 (1 pt) (goal: generalize ILP model**).**

Dal punto di vista metodologico lavorare nel concreto per specifiche istanze è spesso la via per ottenere comprensione. Ciò nonostante preferiamo quì optare per la sintesi, sovvertendo l'ordine delle Richieste 5 e 6 dando subito la forma generale. Dato un grafo bipartito $G = (A \cup B, E)$, introduciamo una variabile binaria x_v per ogni nodo $v \in A \cup B$, con l'idea che $x_v = 1$ se e solo se il nodo v è da includere nel node cover codificato.

La funzione obiettivo sarà:

$$\min \sum_{v \in A \cup B} x_v$$

Ecco una naturale famiglia di vincoli che da sola riesce a descrivere fedelmente il problema (ossia valida per ogni node cover e che basta ad escludere ogni set di nodi che invece un node cover non sia):

$$x_a + x_b \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad ab \in E$$

Richiesta 5 (1 pt) (goal: model as ILP**).**

Nel caso della specifica istanza di Min Bipartite Node Cover che abbiamo costruito per rappresentare l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema sulle matrici, specializzando/istanziando la formulazione generale sopra anticipata evadendo la Richiesta 6, otteniamo:

$$\begin{array}{llllllll}
\min x_{r_1} & + x_{r_2} & + x_{r_3} & + x_{c_1} & + x_{c_2} & + x_{c_3} & & \\
x_{r_1} & & & + x_{c_1} & & & \geq 1 & (\text{arco } r_1 c_1) \\
x_{r_1} & & & & + x_{c_2} & & \geq 1 & (\text{arco } r_1 c_2) \\
x_{r_1} & & & & & + x_{c_3} & \geq 1 & (\text{arco } r_1 c_3) \\
& x_{r_2} & & & + x_{c_2} & & \geq 1 & (\text{arco } r_2 c_2) \\
& & x_{r_3} & & + x_{c_2} & & \geq 1 & (\text{arco } r_3 c_2) \\
\multicolumn{8}{l}{x_{r_1}, x_{r_2}, x_{r_3}, x_{c_1}, x_{c_2}, x_{c_3} \in \{0,1\}}
\end{array}$$

Richiesta 7 (1 pt) (goal: general ILP model for the matrix problem**).**

Riscriviamo la formulazione PLI generale di Richiesta 6 facendo diretto riferimento alla matrice piuttosto che al grafo bipartito che la rappresenta. Con riferimento ad una generica matrice di numeri M, di m righe e n colonne, introduciamo una variabile binaria r_i per ogni $i = 1, ..., m$ e una variabile binaria c_i per ogni $i = 1, ..., n$. L'idea è che quando $r_i = 1$ (quando $c_i = 1$) è allora nostra intenzione rimuovere l'i-esima riga (colonna).

La funzione obiettivo potrà essere riespressa come:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

E l'espressione dei vincoli viene molto naturale:

$$r_i + c_j \geq 1 \quad \text{per ogni coppia} \quad i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \quad \text{tale che} \quad M_{i,j} \neq 0$$

Mettendo assieme il tutto:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

$$r_i + c_j \geq 1 \;\text{ per ogni coppia }\; i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \;\text{ tale che }\; M_{i,j} \neq 0$$

$$r_i \in \{0, 1\} \;\text{ per }\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \in \{0, 1\} \;\text{ per }\; j = 1, ..., n$$

Richiesta 8 (1 pt) (goal: LP relaxations**).**

Per il problema su generica matrice M il primo rilassamento continuo che può venire in mente è:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

$$r_i + c_j \geq 1 \;\text{ per ogni coppia }\; i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \;\text{ tale che }\; M_{i,j} \neq 0$$

$$r_i \geq 0 \;\text{ per }\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \geq 0 \;\text{ per }\; j = 1, ..., n$$

Ma se non ci piace che il problema diventi unbounded nel caso il costo di rimozione di una riga o colonna sia negativo (ossia tale rimozione è anzi sponsorizzata con premialità) allora, volendo rispettare il significato fisico che una riga/colonna può essere rimossa al più una volta, dovremmo allora preferire la seguente formulazione (ovviamente ai fini dell'esame era perfetta anche quella sopra):

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

$$r_i + c_j \geq 1 \;\text{ per ogni coppia }\; i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \;\text{ tale che }\; M_{i,j} \neq 0$$

$$r_i \leq 1 \;\text{ per }\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \leq 1 \;\text{ per }\; j = 1, ..., n$$

$$r_i \geq 0 \;\text{ per }\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \geq 0 \;\text{ per }\; j = 1, ..., n$$

Per il problema Min Bipartite Node Cover, il rilassamento classico che si trova sui libri è spesso proprio:

$$\min \sum_{v \in A \cup B} x_v$$

$$x_a + x_b \geq 1 \;\text{ per ogni }\; ab \in E$$

$$x_v \geq 0 \;\text{ per ogni }\; v \in A \cup B$$

anche se a rigore sarebbe più robusto:

$$\min \sum_{v \in A \cup B} x_v$$

$$x_a + x_b \geq 1 \;\text{ per ogni }\; ab \in E$$

$$x_v \leq 1 \;\text{ per ogni }\; v \in A \cup B$$

$$x_v \geq 0 \;\text{ per ogni }\; v \in A \cup B$$

La prima delle due formulazioni è anche quella che si ottiene (con coefficienti tutti ad 1 nella funzione obiettivo) quando si deriva il duale della formulazione di PL per il problema Max Bipartite Matching. E questa è una ragione per cui si conferma la scelta per tale formulazione più essenziale quando si generalizza il duale al caso pesato (limitandosi ad assumere che i costi per la rimozione di nodi non siano mai negativi).

Richiesta 9 (2 pt) (goal: LP duals**).**

Il duale di

$$\begin{gathered} \min \sum_{v \in A \cup B} x_v \\ x_a + x_b \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad ab \in E \\ x_v \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in A \cup B \end{gathered}$$

è

$$\begin{gathered} \max \sum_{uv \in E} y_{uv} \\ \sum_{uv \in E, u=a} y_{uv} \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad a \in A \\ \sum_{uv \in E, v=b} y_{uv} \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad b \in B \\ y_{uv} \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad uv \in E \end{gathered}$$

per

$$\begin{gathered} \min \sum_{v \in A \cup B} x_v \\ x_a + x_b \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad ab \in E \\ x_v \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad v \in A \cup B \\ x_v \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in A \cup B \end{gathered}$$

il duale sarebbe

$$\begin{gathered} \max \sum_{uv \in E} y_{uv} - \sum_{v \in A \cup B} z_v \\ \sum_{uv \in E, u=a} y_{uv} - z_a \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad a \in A \\ \sum_{uv \in E, v=b} y_{uv} - z_b \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad b \in B \\ y_{uv} \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad uv \in E \\ z_v \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in A \cup B \end{gathered}$$

quì vediamo un altro vantaggio della formulazione classica: mantiene semplicità (non si complica inutilmente) nel passare al duale, se non è necessario considerare costi negativi meglio evitare di considerare le perversioni che essi comportano.

Per il problema con la generica matrice M, il duale della formulazione:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

$$r_i + c_j \geq 1 \;\; \text{per ogni coppia} \;\; i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \;\; \text{tale che} \;\; M_{i,j} \neq 0$$

$$r_i \geq 0 \;\; \text{per} \;\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \geq 0 \;\; \text{per} \;\; j = 1, ..., n$$

è

$$\max \sum_{i,j\,:\,M_{i,j} \neq 0} w_{i,j}$$

$$\sum_{j=1,...,n} w_{i,j} \leq 1 \;\; \text{per ogni} \;\; i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1,...,m} w_{i,j} \leq 1 \;\; \text{per ogni} \;\; j = 1, ..., n$$

$$w_{i,j} \geq 0 \;\; \text{per ogni} \;\; i, j : M_{i,j} \neq 0$$

Il duale della formulazione:

$$\min \sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} x_i$$

$$r_i + c_j \geq 1 \;\; \text{per ogni coppia} \;\; i \in \{1, ..., m\}, j \in \{1, ..., n\} \;\; \text{tale che} \;\; M_{i,j} \neq 0$$

$$r_i \leq 1 \;\; \text{per} \;\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \leq 1 \;\; \text{per} \;\; j = 1, ..., n$$

$$r_i \geq 0 \;\; \text{per} \;\; i = 1, ..., m$$

$$r_j \geq 0 \;\; \text{per} \;\; j = 1, ..., n$$

è

$$\max \sum_{i,j\,:\,M_{i,j} \neq 0} w_{i,j} - \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$\sum_{j=1,...,n} w_{i,j} - x_i \leq 1 \;\; \text{per ogni} \;\; i = 1, ..., m$$

$$\sum_{j=1,...,m} w_{i,j} - y_j \leq 1 \;\; \text{per ogni} \;\; j = 1, ..., n$$

$$y_{i,j} \geq 0 \;\; \text{per ogni} \;\; i, j : M_{i,j} \neq 0$$

$$x_i \geq 0 \;\; \text{per} \;\; i = 1, ..., m$$

$$y_j \geq 0 \;\; \text{per} \;\; j = 1, ..., n$$

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A**−**1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I**−**10**.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0	1	1	1	1	1	0	0	●	6
B	2	●	1	0	●	0	●	0	0	5
C	0	●	0	●	●	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	●	0	3
E	0	0	●	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	●	3	1	●	0	1
G	3	●	2	1	2	●	●	3	1	●
H	2	1	2	●	●	1	1	1	●	0
I	4	4	3	3	2	1	1	●	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3) e il passo diagonale (che in pratica porta direttamente alla cella raggiunta concatenando quello orizzontale e quello verticale). Se il robot deve evitare le celle proibite (●), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un premio del valore riportato nella cella stessa, sapresti massimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 2

2 .1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A–1** a **I–10**
2 .2 (1 pt, num percorsi da B–3) Numero di percorsi ammissibili da **B–3** a **I–10**
2 .3 (1 pt, num percorsi a F–6) Numero di percorsi ammissibili da **A–1** a **F–6**
2 .4 (1 pt, num percorsi per D–5) Numero di percorsi da **A–1** a **I–10** passanti per **D–5**
2 .5 (1 pt, opt val) Massimo totale di premi su un cammino da **A–1** a **I–10**. (E soluzione di tale valore).
2 .6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A–1** a **I–10**
2 .7 (1 pt, opt val per D–5) Massimo totale di premi su un cammino da **A–1** a **I–10** passante per **D–5**
2 .8 (2 pt, num paths of opt val via D–5) Numero cammini ottimi da **A–1** a **I–10** passanti per **D–5**

Svolgimento esercizio 2 .

La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della tabella **num cammini da**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I–10.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	531	345	217	89	89	49	9	5	0	0
B	186	0	128	0	0	40	0	4	1	0
C	186	0	128	0	0	32	8	2	1	0
D	107	79	70	58	36	18	6	0	1	0
E	19	9	0	12	10	8	4	2	1	0
F	5	5	4	2	0	2	2	0	1	0
G	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0
H	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabella 2: **num cammini da**

Per rispondere alle domande successive serve anche la tabella **num cammini a**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, è riportato il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
B	1	0	2	4	0	2	0	2	3	3
C	1	0	2	0	0	2	4	6	11	17
D	1	2	4	6	6	8	14	0	17	45
E	1	4	0	10	22	36	58	72	89	151
F	1	6	10	20	0	58	152	0	161	401
G	1	0	16	46	66	0	0	152	313	0
H	1	2	18	0	0	66	66	218	0	313
I	1	4	24	42	42	108	240	0	218	531

Tabella 3: **num cammini a**

Ritrovare il valore 531 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle prossime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella C alla cella I–10. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	14^{16}	14^{10}	13^{10}	12^{6}	11^{6}	10^{6}	3^{2}	3^{1}	-1^{0}	-1^{0}
B	14^{6}	-1^{0}	12^{4}	-1^{0}	-1^{0}	9^{6}	-1^{0}	3^{1}	2^{1}	-1^{0}
C	12^{6}	-1^{0}	11^{4}	-1^{0}	-1^{0}	9^{4}	9^{2}	3^{1}	2^{1}	-1^{0}
D	12^{5}	12^{1}	11^{4}	10^{2}	9^{6}	9^{2}	8^{2}	-1^{0}	1^{1}	-1^{0}
E	12^{3}	12^{1}	-1^{0}	10^{2}	9^{2}	9^{2}	7^{2}	1^{2}	1^{1}	-1^{0}
F	12^{1}	12^{1}	11^{1}	7^{1}	-1^{0}	8^{2}	5^{2}	-1^{0}	1^{1}	-1^{0}
G	-1^{0}	-1^{0}	8^{1}	6^{1}	5^{1}	-1^{0}	-1^{0}	4^{2}	1^{1}	-1^{0}
H	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	3^{1}	2^{1}	1^{1}	-1^{0}	0^{1}
I	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	0^{1}	0^{1}

Tabella 4: **valore ottimo di un cammino da * a I-10 e numero di cammini ottimi da * a I-10**

Leggendo i valori riportati nella cella A–1 scopriamo che il massimo valore di una traversata é di 14, e che esistono 16 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore.

Per rispondere alle ulteriori domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0^1	1^1	2^1	3^1	4^1	5^1	5^1	5^1	-1^0	-1^0
B	2^1	-1^0	3^1	3^2	-1^0	5^1	-1^0	5^2	5^3	10^3
C	2^1	-1^0	3^1	-1^0	-1^0	5^1	6^2	7^2	8^2	14^3
D	2^1	2^2	4^1	4^1	4^1	5^1	7^2	-1^0	8^2	17^3
E	2^1	2^4	-1^0	5^2	5^2	6^3	9^2	9^2	9^2	18^3
F	2^1	3^6	6^6	7^6	-1^0	9^3	10^5	-1^0	9^4	19^3
G	5^1	-1^0	8^6	9^6	11^6	-1^0	-1^0	13^5	14^5	-1^0
H	7^1	8^1	10^7	-1^0	-1^0	12^6	13^6	14^{11}	-1^0	14^5
I	11^1	15^1	18^1	21^1	23^1	24^1	25^1	-1^0	14^{11}	14^{16}

Tabella 5: **valore ottimo di un cammino da A-1 a * e numero di cammini ottimi da A-1 a ***

Avendo riempito l'intera tabella (non serviva per solo rispondere alle ultime due domande), nella cella I–10 troviamo conferma che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 14, e che esistono 16 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore. Le risposte alle ulteriori domande sono ottenute consultando queste due tabelle, eventualmente entrambe: nel caso di celle di passaggio obbligato il valore ottimo andrà ottenuto tramite somma (avendo cura di non conteggiare due volte il valore della cella di passaggio) mentre il numero di soluzioni ottime sarà il prodotto dei due numeri riportati in piccolo nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.
Riportiamo quindi i risultati finali.

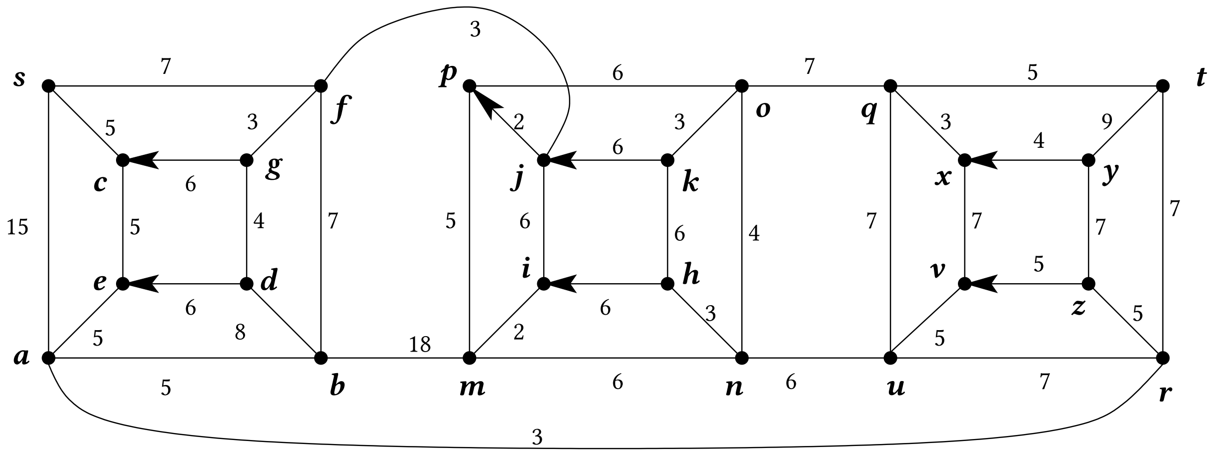
consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A–1 $\rightarrow$ I–10	531		
B–3 $\rightarrow$ I–10	128		
A–1 $\rightarrow$ F–6	58		
passaggio per D–5	$6 * 36 = 216$		
massimo valore		14	A1-A2-A3-A4-A5-A6-B6-C6-C7-D7-E7-F7-G8-G9-H10-I10
n. max-val paths	16		
max-val D–5-path		$13 = 4 + 9$	A1-B2-A3-B3-C3-D3-D4-D5-E6-F6-F7-G8-H8-I9-I10
n. max-val D–5-paths	$1 * 6 = 6$		

Anche quì il numero di cammini di interesse che passano per la cella D–5 è ottenuto come prodotto del numero della stessa tipologia che giungono in D–5 per quelli che da quì dipartono. Lo spazio dei cammini otimi passanti per D–5 è infatti prodotto cartesiano di quelli con arrivo in D–5 per quelli con partenza da D–5.

Per quanto riguarda il massimo valore di un cammino passante per D–5 esso è ottenuto sommando il massimo valore di un cammino che terminano in D–5 col massimo valore di un cammino che parte da D–5, avendo cura di sottrarre il valore in D–5 (ma in questo caso è 0) che altrimenti viene conteggiato doppio.

Per ricostruire i cammini che attengono i valori ottimi calcolati devi procedere in ordine inverso, e quindi dopo aver finito di calcolare tutti i numeri (risposte ai sottoprobelmi). Quando procedendo a ritroso non sai quale strada prendere, guarda a questi numeri per i sottoprolemi cui ti ridurresti a valle di ciascuna delle possibili scelte. Almeno una delle opzioni a tua disposizione ad ogni passo deve fulfillare la promessa ad Abramo.

Esercizio 3 (con 11 richieste: 4+4+2+2+2+2+1+3+4+5+2 = 31 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (4 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco oq con un arco kq.

3 .2 (4 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G e G' (1 punto per ogni soluzione certificata da bicolorazione e 1 per ogni certificato di ottimalità).

3 .3 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

3 .4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.

3 .5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

3 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).

3 .7 (1 pt, one MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo.

3 .8 (3 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)

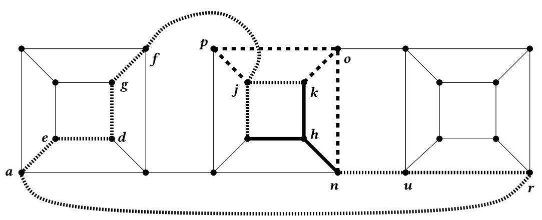
3 .9 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G?

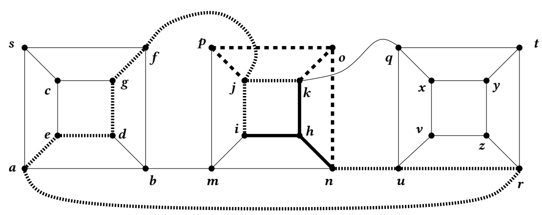
3 .10 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti in u certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.

3 .11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in G (1pt). Sapresti dire perche non possa esserci un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

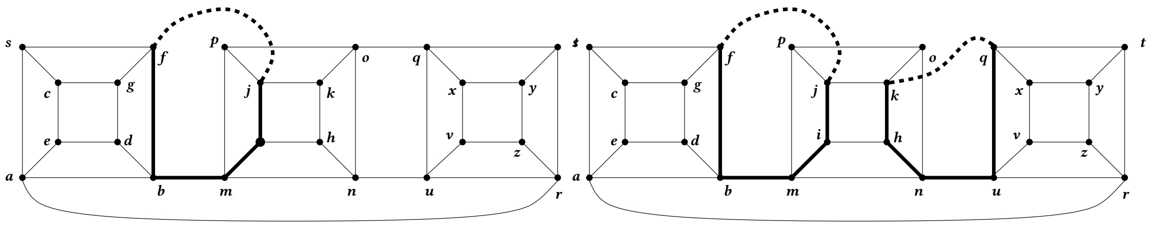
Svolgimento esercizio 3 .

La non-planarità di G è certificata dalla $K_{3,3}$ subdivision in figura, sulla sinistra. Sulla destra, si evidenzia che sostanzialmente la stessa suddivisione di $K_{3,3}$ è presente anche in G'. Pertanto nessuno dei due grafi è planare.





Il fatto che G non sia bipartito è certificato dal suo ciclo dispari in linea spessa. Esiste però una 2-colorazione di G che rispetta tutti i suoi archi tranne quello tratteggiato. Rimossi i due archi tratteggiati, G' è 2-colorabile come mostrato in figura. I due cicli dispari disgiunti sugli archi evidenziati in linea spessa certificano che G' non avrebbe potuto essere reso bipartito con la rimozione di un solo arco.

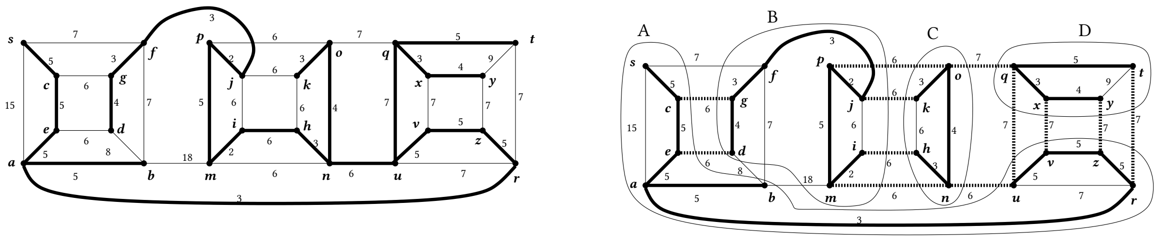


La figura quì sotto a sinistra visualizza un MST in linea spessa. Alla sua immediata destra classifichiamo gli archi di G in tre categorie:

linea spessa continua quelli che appartengono ad ogni MST

linea spessa tratteggiata quelli che appartengono a qualche MST ma non a tutti

linea sottile quelli che non appartengono ad alcun MST



Gli archi in linea spessa raccolgono i nodi in 4 isole A, B, C e D.

Ogni MST dovrà prendere precisamente un arco del taglio che separa la componente D (ogni taglio deve essere superato ma non si vuole prendere più di un arco di peso 7). Questa scelta potrà essere fatta in 5 modi diversi, dopo aver collegato tra loro le 3 componenti A, B e C con $3 - 1 = 2$ archi di peso 6. Ci sono 3 diversi modi di massima nel fare questo:

evitare archi tra A e B siccome tra B e C ci sono 4 archi di peso 6 mentre tra A e C c'è un sono arco di peso 6 ho $4 \times 1 = 4$ possibilità.

evitare archi tra B e C siccome tra A e B ci sono 2 archi di peso 6 (quelli di peso maggiore non ci interessano) mentre tra A e C c'è un sono arco di peso 6 ho $2 \times 1 = 2$ possibilità.

evitare archi tra A e C siccome tra A e B ci sono 2 archi di peso 6 (quelli di peso maggiore non ci interessano) mentre tra B e C ci sono 4 archi di peso 6 ho $2 \times 4 = 8$ possibilità.

Pertanto, per collegare tra loro le 3 componenti ho $4 + 2 + 8 = 14$ modi diversi e il numero degli MST è $14 \times 5 = 70$.

Forniamo ora dei certificati specifici per la classificazione dei 4 archi per cui richiesto:

arco nu in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo del taglio che separa la componente A dal resto del grafo. Non in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $nurasfbm$.

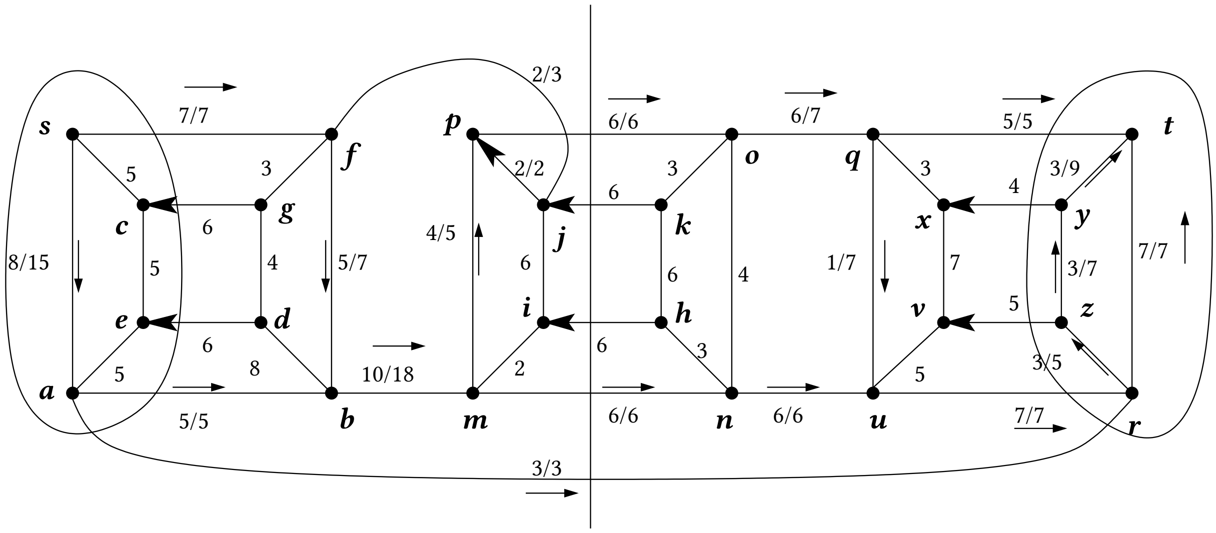
arco qu in qualche MST in quanto arco di peso minimo del taglio che separa la componente D dal resto del grafo. Non in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $quno$.

arco qu in qualche MST in quanto arco di peso minimo del taglio che separa la componente D dal resto del grafo. Non in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $quno$.

arco vu in tutti gli MST in quanto arco di peso strettamente minimo del taglio che separa il nodo u dal resto del grafo.

arco ru in nessun MST in quanto arco di peso massimo nel ciclo $ruvz$.

Un flusso ottimo (valore 15) è visualizzato in figura coi tre tagli minimi: il taglio di spiaggia $\{s, a, c, e\}$, quello di spiaggia $\{t, r, z, y\}$ e quello che separa nel mezzo il lato desto da quello sinistro. Ciascuno dei tre tagli certifica l'ottimalità del flusso, come di ogni altro possibile flusso di valore 15.



,

Si noti che i tre tagli hanno in comune il solo arco ar.

Siccome l'arco ar è l'unico ad appartenere a tutti i certificati di ottimalità allora ar è anche l'unico arco il cui aumento di capacità comporta un aumento nel valore del massimo flusso.

Possiamo instradare 2 ulteriori unità di flusso lungo il cammino $sart$ per produrre un flusso di valore 15 la cui ottimalità è certificata dal taglio di spiaggia $\{t, y, z\}$.

Esercizio 4 (con 10 richieste: 1+1+1+2+2+2+1+2+1+2 = 15 punti [simplesso]):

Il seguente problema P di PL modella uno dei problemi su specifica istanza incontrati nell'Esercizio 1, ma parzialmente generalizzato a versione pesata con l'introduzione di un parametro K ad uso ispettivo sperimentale. (Saperlo non è necessario ma può aiutarti nel gestirti offrendoti visione e riferimento.)

$$
\begin{array}{llr}
\min & x_A + x_B + x_C + x_1 + Kx_2 + x_3 & \\
& x_A \qquad + x_1 \geq 1 & \text{(kill M[1,1]=1 constraint)} \\
& x_A \qquad\qquad + x_2 \geq 1 & \text{(kill M[1,2]=1 constraint)} \\
& x_A \qquad\qquad\qquad + x_3 \geq 1 & \text{(kill M[1,3]=3 constraint)} \\
& x_B \qquad + x_2 \geq 1 & \text{(kill M[2,2]=2 constraint)} \\
& x_C \qquad + x_2 \geq 1 & \text{(kill M[3,2]=1 constraint)} \\
& x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (1 pt, recognize form) Cosa sai dire sulla forma particolare di questo problema di PL (non limitarti a spendere nomi ma esprimi anche le proprietà possedute che ti fanno spendere tale/tali etichette).

4 .2 (1 pt, verify feasibility) Si verifichi punto per punto che la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ con $\overline{x}_A = \overline{x}_2 = 1$ e $\overline{x}_B = \overline{x}_C = \overline{x}_1 = \overline{x}_3 = 0$ è ammissibile, avendo cura di evidenziare le diseguaglianze soddisfatte in senso stretto.

4 .3 (1 pt, get dual LP) Scrivi l'LP duale D di P.

4 .4 (2 pt, complementary slackness conditions) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari.

4 .5 (2 pt, complementary dual solutions) Ammissibile o meno, ottieni una soluzione $\overline{\boldsymbol{y}}$ di D complementare a $\overline{\boldsymbol{x}}$.

4 .6 (2 pt, eval optimality) Stabilire per quali valori di K la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità? (1pt)

4 .7 (1 pt, first dual sol) Fissato $K = 5$, quale è il pivot suggerito dal malfunzionamento di $\overline{\boldsymbol{y}}$ in quanto certificato di ottimalità per $\overline{\boldsymbol{x}}$?

4 .8 (2 pt, get tableau) Si scriva un tableau che esprima la soluzione di base $\overline{\boldsymbol{x}}$.

4 .9 (1 pt, pivot) Si effettui il pivot suggerito dalla violazione di $\overline{\boldsymbol{y}}$ e si fornisca la soluzione ottima $\overline{\boldsymbol{x}}'$ per $K = 5$.

4 .10 (2 pt, optimality range) Per quali valori di K la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}'$ è ottima? Si fornisca una soluzione duale che ne certifichi l'ottimalità su tutto il range.

Svolgimento esercizio 4 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: recognize form**).**

E' un problema di PL di minimizzazione. E' in forma standard in quanto tutte le variabili sono non negative ed ogni vincolo è della forma $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} \geq b$.

Richiesta 2 (1 pt) (goal: verify feasibility**).**

La non-negatività di $\overline{\boldsymbol{x}}$ è evidente, quindi i seguenti 5 controlli verificano l'ammissibilità di $\overline{\boldsymbol{x}}$ per P:

$$
\begin{array}{llllll}
x_A & + x_1 & & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{A,1} \geq 0 \\
x_A & & + x_2 & & = 2 > 1 & \text{strict} \Longrightarrow y_{A,2} = 0 \\
x_A & & & + x_3 & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{A,3} \geq 0 \\
\quad x_B & & + x_2 & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{B,2} \geq 0 \\
\qquad x_C & & + x_2 & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{C,2} \geq 0
\end{array}
$$

Come richiesto, ad ogni controllo abbiamo preso atto se il vincolo era soddisfatto ad uguaglianza oppure la diseguaglianza era stretta.

Abbiamo anche anticipato su una richiesta successiva di andare a raccogliere le condizione agli scarti complementari. Più precisamente, abbiamo anticipato l'uso delle regole del tipo:

«se una diseguaglianza è soddisfatta in senso stretto allora la variabile duale che ne è moltiplicatore deve essere nulla.»

tali regole stanno a dire che una parete su cui non appoggio non può esercitare su di mè alcuna reazione vincolare

Richiesta 3 (1 pt) (goal: get dual LP**).**

Il problema duale D avrà una variabile di decisione per ogni vincolo di P tranne quelli di non-negatività. Come nomi per queste variabili ci pare ragionevole scegliere $y_{A,1}$, $y_{A,2}$, $y_{A,3}$, $y_{B,2}$, $y_{C,2}$ in quanto D ha in pratica una variabile per ogni entry non nulla della matrice M.

Utilizzando la regola per la derivazione del duale otteniamo il seguente problema D in forma standard di massimizzazione:

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} + y_{B,2} + y_{C,2} \\
& y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} & & & \leq & 1 \\
& & & y_{B,2} & & \leq & 1 \\
& & & & y_{C,2} & \leq & 1 \\
& y_{A,1} & & & & \leq & 1 \\
& \quad y_{A,2} & & + y_{B,2} & + y_{C,2} & \leq & K \\
& \qquad y_{A,3} & & & & \leq & 1 \\
& y_{A,1} \geq 0,\ y_{A,2} \geq 0,\ y_{A,3} \geq 0,\ y_{B,2} \geq 0,\ y_{C,2} \geq 0
\end{array}
$$

Richiesta 4 (2 pt) (goal: complementary slackness conditions**).**

Abbiamo già discusso e rilevato la prima famiglia di condizioni agli scarti complementari, concludendo che $y_{A,2} = 0$. La seconda ed ultima famiglia è giustificata quanto la prima se si considera che P è il duale di D (un primo fatto della teoria della PL è che se D è il duale di P allora P è il duale di D). Pertanto:

«se una variabile di P assume valore strettamente positivo allora il corrispondente vincolo in D deve essere soddisfatto ad uguaglianza.»

Ogni soluzione duale $\overline{\boldsymbol{y}}$ che soddisfi gli scarti complementari con $\overline{\boldsymbol{x}}$ dovra pertanto avere $\overline{y}_{A,2} = 0$ e soddisfare le seguenti condizioni:

$$
\begin{array}{llllll}
y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} & & & = & 1 & \text{poichè } \overline{x}_A > 0 \\
\quad y_{A,2} & + y_{B,2} & + y_{C,2} & = & K & \text{poichè } \overline{x}_2 > 0
\end{array}
$$

Richiesta 5 (2 pt) (goal: complementary dual solutions**).**

Abbiamo più opzioni su quale strada seguire per costruiamo una soluzione duale $\overline{\boldsymbol{y}}$ che soddisfi gli scarti complementari con $\overline{\boldsymbol{x}}$. Precisiamo subito che ve ne può essere più di una e quindi qualsiasi processo per ottenerne una non può invero essere univoco. Un possibile approccio è di costruirsi un tableau che esprima la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$. Anche quì ve ne può essere più di uno ma una volta che se ne sia prodotto uno (come ad esempio facciamo più sotto per adempiere alla Richiesta 8), allora otteniamo una tale $\overline{\boldsymbol{y}}$ semplicemente leggendo la soluzione duale da esso espressa.

Qualunque approccio si scelga di seguire, visto che i possibili output sono più di uno, si dovranno affrontare delle scelte e potrà quindi accadere che l'ammissibilità o meno della soluzione duale prodotta possa dipendere da tali scelte. Per questa ragione, dopo questo cappello introduttivo, preferiamo esporre il nostro primo approccio ad evadere questa richiesta in seno al prossimo punto.

Richiesta 6 (2 pt) (goal: eval optimality**).**

Dall'ultima condizione scritta, considerato anche che $y_{A,2} = 0$, seque che $y_{B,2} + y_{C,2} = K$. Questo già restringe i possibili valori di K per i quali qualsiasi $\overline{\boldsymbol{y}}$ noi si possa costruire possa essere ammissibile.

Ad esempio, se $K < 0$ allora di necessità o $\overline{y}_{B,2} < 0$ o $\overline{y}_{C,2} < 0$ e quindi $\overline{\boldsymbol{y}}$ non potrà mai essere ammissibile. Pertanto la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ non è ottima, per nessun $K < 0$. Il significato di questa condizione su K è stato discusso in più punti di questo documento di correzione, anche in seno all'Esercizio 1 del compito dove abbiamo osservato che la nostra formulazione P è stata pensata avando in mente costi non-negativi per la rimozione di righe e colonne e sono stati quindi omessi i vincoli di upper bound sulle variabili di decisione, in particolare il vincolo $x_2 \leq 1$. Il nudo e semplice fatto è questo: per $K < 0$ il problema P è unbonded e nessuna soluzione può essere ottima in quanto la funzione obiettivo spinge ad incrementare la variabile x_2 e nessuno dei vincoli si oppone a questa spinta.

Sempre la condizione $y_{B,2} + y_{C,2} = K$ ottenuta dagli scarti complementari implica che affinchè $\overline{\boldsymbol{y}}$ sia ammissibile deve valere che $K \leq 2$ per poter soddisfare sia il vincolo $y_{B,2} \leq 1$ che il vincolo $y_{C,2} \leq 1$, entrambi presenti nella formulazione del duale D. Anche il significato di questa scoperta può essere ben compreso pensando al problema originale con la matrice M da cui siamo partiti (se $K > 2$ non conviene più eliminare la seconda colonna di M). Se $K = 2$ allora giocoforza, per avere l'ammissibilità, dovremo avere $y_{B,2} = y_{C,2} = 1$ e lo spazio delle soluzioni duali ammissibili che soddisfano gli scarti complementari con $\boldsymbol{x}$ è il segmento monodimensionale in $\mathbb{R}^5$ descrito da:

$y_{A,2} = 0, y_{B,2} = y_{C,2} = 1, y_{A,1} + y_{A,3} = 1$ con $0 \leq y_{A,1} \leq 1$.

Tutti i punti in questo segmento soddisfano ogni requisito per il ruolo da $\overline{\boldsymbol{y}}$ e in più sono ammissibili. I due vertici del segmento sono di nostro massimo gradimento in quanto soluzioni duali di base. Per $K = 2$ lo spazio delle soluzioni duali ottime è quindi sufficientemente basso-dimensionale che abbiamo potutp descrivercelo a fondo, di converso per $K = 2$ il punto $\overline{\boldsymbol{x}}$ non è l'unica soluzione ottima di P.

Invece in tutto l'intervallo $K \in [0, 2]$ restano complementari a $\overline{\boldsymbol{x}}$ ed ammissibili tutte le soluzioni che sono punti del politopo $\overline{Y}$:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
\boldsymbol{y} \geq & & \mathbf{0} & & & & \\
y_{A,2} = & & 0 & & & & \\
y_{A,1} + y_{A,3} & & & & & = & 1 \\
& & y_{B,2} & & & \leq & 1 \\
& & & & y_{C,2} & \leq & 1 \\
y_{A,1} & & & & & \leq & 1 \\
& & y_{B,2} & + & y_{C,2} & = & K \\
& y_{A,3} & & & & \leq & 1
\end{array}
$$

e ogni $\overline{\boldsymbol{y}}$ che è soluzione di tale sistema adempie al ruolo di certificato di ottimalità di $\overline{\boldsymbol{x}}$. Certo, ci piacerebbe cogliere o attribuire un'interpretazione semantica a tali $\overline{\boldsymbol{y}}$, la qual cosa ha più probabilità di riuscire se fissiamo la nostra attenzione su un $\overline{\boldsymbol{y}}$ che è vertice del politopo $\overline{Y}$ (soluzione di base del sistema quì sopra), e potrebbe avere un sugo ancora più saporito se $\overline{\boldsymbol{y}}$ è intero se non addirittura 0/1.

Il caso $K = 2$ resta probabilmente il più interessante, la colonna di M che la nostra soluzione $\boldsymbol{x}$ ha deciso di rimuovere costa assai, se costasse oltre 2 rimuoverla non sarebbe scelta ottima e già per $K = 2$ compaiono altre soluzioni ottime (tipo rimuovere le tre righe della matrice M).

Per comprendere cosa possa voler dire una generica soluzione duale nel segmento $y_{A,2} = 0, y_{B,2} = y_{C,2} = 1$, $y_{A,1} + y_{A,3} = 1$ con $0 \leq y_{A,1} \leq 1$ si consideri uno qualsiasi dei due vertici (che di fatto sono equivalenti per le ovvie simmetrie). Consideriamo quindi il punto $y_{A,1} = y_{B,2} = y_{C,2} = 1 = 1$, $y_{A,2} = y_{A,3} = 0$. Il punto dice di ignorare le celle $M_{A,2}$ ed $M_{A,3}$ perchè dovremmo comunque pagare almeno 3 (ossia quanto paga $\overline{\boldsymbol{x}}$) anche se queste non dovessero essere eliminate. Si noti infatti che la riga (la colonna) che contiene $M_{A,1}$ costa 1 (uno di questi due costi và pagato) e non risolve nè $M_{B,2}$ nè $M_{C,2}$, E per risolvere questi due o rimuovo due righe di costo 1 ciascuna o rimuovo la colonna comune che costa $K = 2$.

Più in generale il punto duale distribuisce una massa di attenzione su delle celle non nulle di M avendo cura che su nessuna riga o colonna la massa totale di attenzione distribuita superi il costo di quella riga o colonna. A questo punto la massa totale distribuita su tutta la matrice deve essere un lower bound sul costo di qualsiasi soluzione al problema di rimuovere righe/colonne da M.

Richiesta 7 (1 pt) (goal: first dual sol**).**

Quando $K > 2$ ogni soluzione duale fallisce nel rispettare il vincolo $y_{B,2} \leq 1$ oppure il vincolo $y_{C,2} \leq 1$. Nel duale il malfunzionamento è quindi che non è rispettato il vincolo di non-negatività per la variabile di slack di uno di questi due vincoli. A queste variabili di slack duali nel primale corrisponde una variabile di decisione e se assumiamo di lavorare con soluzioni di base allora questa variabile di decisione è fuori base, una variabile colonna su cui fare pivot. Ossia una riga/colonna di M che non eliminavo ed ora decido di eliminare. Ad esempio il vincolo duale $y_{C,2} \leq 1$ è il vincolo che dice di non mettere troppa massa sulla seconda riga di M, quindi nel primale il suggerimento è di portare in base la seconda riga di M, ossia di rimuoverla mentre prima non lo facevo. Col pivot, rimuovendo lei, si smetterà di rimuovere delle colonne. In realtà la cosa non è così diretta per via delle degeneratività che può richiedere più pivot per ottenere davvero un effetto. Il fatto che nel duale lavoriamo con masse di attenzione ci offre una metrica più fine per seguire vie di miglioramento.

Richiesta 8 (2 pt) (goal: get tableau**).**

Le variabili di decisione del problema P sono 6 e 5 sono le sue variabili di slack. Di tableau che esprimano il punto $\boldsymbol{x}$ ce ne saranno più di uno per via della notevole degeneratività del poliedro che è regione ammissibile per il problema P. Ogni tableau è invece in corrispondenza biunivoca con un partizionamento delle variabili estese (ossia incluse quelle di slack) in variabili in base e fuori-base dove le 6 variabili in fuori base possano essere messe tutte a zero ed il valore delle 5 variabili in base ne sia determinato in corrispondenza (la condizione è quindi che le colonne delle variabili in base formino una marice quadrata di rango pieno). Ovviamente le variabili x_A e x_2, essendo $\overline{x}_A = \overline{x}_2 = 1 \neq 0$, devono essere necessariamente in base. Sulle altre variabili di decisione è presto per sbilanciarci, ma valutiamo i valori delle variabili di slack nell'estensione di $\boldsymbol{x}$ per vedere se lo stesso criterio possa disambiguarne altre.

L'unica variabile di slack che non è nulla è $w_{A,2}$, che è poi quanto osservato nell'esaudire richieste precedenti quando l'analisi delle condizioni agli scarti complementari ci ha condotti a concludere che $\overline{y}_{A,2} = 0$.

Quindi $w_{A,2}$, x_A e x_2 sono tra le 5 variabili in base. Si tratta di sceglere altre 2 colonne qualsiasi assicurandosi di mantenere l'indipendenza lineare. Anche senza scrivere esplicitamente la forma canonica per introdurre le variabili di slack possiamo convincerci che non si perde l'indipendenza nell'aggiungere al set delle variabili di slack essendo le relative colonne unitarie. Ogni scelta va bene ma scegliamo di aggiungere $w_{B,2}$ e $w_{C,2}$, potrebbe essere la scelta più conveniente: tutte e tre le variabili di slack poste in base sono relative ad entry delle seconda colonna della matrice M, quella cui è associato il parametro K.

Dobbiamo ora produrre una riscrittura delle equazioni della forma canonica dove le variabili dipendenti sono $w_{A,2}$, x_A, x_2, $w_{B,2}$ e $w_{C,2}$. Possiamo produrla esercitando due pivot sulla forma canonica (uno che porta in base la x_A e l'altro che porta in base la x_2), anche per questa ragione (minimizzare il numero di pivot) è stata una buona idea quella di prendere due variabili di slack per completare il set delle colonne indipendenti.

La forma canonica e primo dizionario sono:

Dizionario di Forma Canonica

$$\begin{cases} z = 0 + 1x_A + 1x_B + 1x_C + 1x_1 + Kx_2 + 1x_3 \\ w_{A,1} = -1 + 1x_A + 0x_B + 0x_C + 1x_1 + 0\ x_2 + 0x_3 \\ w_{A,2} = -1 + 1x_A + 0x_B + 0x_C + 0x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \\ w_{A,3} = -1 + 1x_A + 0x_B + 0x_C + 0x_1 + 0\ x_2 + 1x_3 \\ w_{B,2} = -1 + 0x_A + 1x_B + 0x_C + 0x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \\ w_{C,2} = -1 + 0x_A + 0x_B + 1x_C + 0x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \end{cases}$$

$\max z :$

$x_A, x_B, x_C, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$w_{A,1}, w_{A,2}, w_{A,3}, w_{B,2}, w_{C,2} \geq 0$

Tableau di Forma Canonica

	–	x_A	x_B	x_C	x_1	x_2	x_3
z	0	1	1	1	1	K	1
$w_{A,1}$	-1	(1)	0	0	1	0	0
$w_{A,2}$	-1	1	0	0	0	1	0
$w_{A,3}$	-1	1	0	0	0	0	1
$w_{B,2}$	-1	0	1	0	0	1	0
$w_{C,2}$	-1	0	0	1	0	1	0

Come primo pivot scegliamo di portare in base la x_A e fuori base la $w_{A,1}$. L'elemento di pivot è evidenziato tra parentesi ed effettuando tale pivot si perviene al seguente tableau intermedio dove eserciteremo il secondo pivot necessario (di nuovo indicato includendo in parentesi l'elemento di pivot):

Dizionario Intermedio

$$\begin{cases} z = 1 + 1w_{A,1} + 1x_B + 1x_C + 0x_1 + Kx_2 + 1x_3 \\ x_A = 1 + 1w_{A,1} + 0x_B + 0x_C - 1x_1 + 0\ x_2 + 0x_3 \\ w_{A,2} = 0 + 1w_{A,1} + 0x_B + 0x_C - 1x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \\ w_{A,3} = 0 + 1w_{A,1} + 0x_B + 0x_C - 1x_1 + 0\ x_2 + 1x_3 \\ w_{B,2} = -1 + 0w_{A,1} + 1x_B + 0x_C + 0x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \\ w_{C,2} = -1 + 0w_{A,1} + 0x_B + 1x_C + 0x_1 + 1\ x_2 + 0x_3 \end{cases}$$

$\max z$:

$w_{A,1}, x_B, x_C, x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_A, w_{A,2}, w_{A,3}, w_{B,2}, w_{C,2} \geq 0$

Tableau Intermedio

	–	$w_{A,1}$	x_B	x_C	x_1	x_2	x_3
z	1	1	1	1	0	K	1
x_A	1	1	0	0	-1	0	0
$w_{A,2}$	0	1	0	0	-1	1	0
$w_{A,3}$	0	1	0	0	-1	0	1
$w_{B,2}$	-1	0	1	0	0	1	0
$w_{C,2}$	-1	0	0	1	0	(1)	0

Perveniamo così a un tableau e dizionario che esprimono la soluzione di base $\boldsymbol{x}$:

Dizionario Soluzione Partenza

$$\begin{cases} z = 1 + K + 1w_{A,1} + 1x_B + (1-K)x_C + 0x_1 + Kw_{C,2} + 1x_3 \\ x_A = 1 + 1w_{A,1} + 0x_B + 0\ x_C - 1x_1 + 0\ w_{C,2} + 0x_3 \\ w_{A,2} = 1 + 1w_{A,1} + 0x_B - 1\ x_C - 1x_1 + 1\ w_{C,2} + 0x_3 \\ w_{A,3} = 0 + 1w_{A,1} + 0x_B + 0\ x_C - 1x_1 + 0\ w_{C,2} + 1x_3 \\ w_{B,2} = 0 + 0w_{A,1} + 1x_B - 1\ x_C + 0x_1 + 1\ w_{C,2} + 0x_3 \\ x_2 = 1 + 0w_{A,1} + 0x_B - 1\ x_C + 0x_1 + 1\ w_{C,2} + 0x_3 \end{cases}$$

$\max z$:

$w_{A,1}, x_B, x_C, x_1, w_{C,2}, x_3 \geq 0$

$x_A, w_{A,2}, w_{A,3}, w_{B,2}, x_2 \geq 0$

Tableau Soluzione Partenza

	–	$w_{A,1}$	x_B	x_C	x_1	$w_{C,2}$	x_3
z	1+K	1	1	1-K	0	K	1
x_A	1	1	0	0	-1	0	0
$w_{A,2}$	1	1	0	-1	-1	1	0
$w_{A,3}$	0	1	0	0	-1	0	1
$w_{B,2}$	0	0	1	-1	0	1	0
x_2	1	0	0	-1	0	1	0

Richiesta 9 (1 pt) (goal: pivot**).**

Da questo tablau si conferma che per $K < 0$ la soluzione proposta non apparirebbe come ottima. Questo succede perchè la formulazione data non vieta di rimuovere una stessa colonna più volte. Questo significa che se ci accingiamo a portare in base la variabile $w_{C,2}$ non troviamo alcuna riga di pivot a fermarci. Pertanto non esiste in prossimo tableau ed invece il problema è unbounded. Infatti, invece che sostenere una spesa, possiamo totalizzare un profitto arbitrariamente alto con la soluzione prescritta dalla equazioni del dizionario per i seguenti valori delle variabili fuori base:

$w_{A,1} = x_B = x_C = x_1 = x_3 = 0$ ma $w_{C,2} = t + 2$

cui corrispondono i seguenti valori per le variabili in base:

spesa $z = 2 + Kt \longrightarrow -\infty$ per $K \longrightarrow -\infty$

$x_A = 2$

$w_{A,2} = 2 + t$

$w_{A,3} = 2$

$w_{B,2} = 2 + t$

$x_2 = 2 + t$

Non è invece ancora trasparente l'upperbound che debba vigere su K affinchè $\overline{\boldsymbol{x}}$ sia ottima. Dal costo ridotto associato alla colonna x_C del dizionario sembrerebbe che $\overline{\boldsymbol{x}}$ possa perdere ottimalità già per $K > 1$, ma abbiamo già anticipato che non è così. Per indagare più a fondo siamo quindi chiamati a fare un pivot che porti in base la colonna x_C visto che nell'ultimo dizionario raggiunto sopra (e primo dizionario prodotto che riesca a rappresentare la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ proposta dal testo) è questo pivot ad essere incriminato di poter produrre una soluzione migliore per $K > 1$. Quando la x_C viene portata in base deve giocoforza uscire la $w_{B,2}$. Si noti che il valore della $w_{B,2}$ era nullo nonostante tale variabile fosse in base, la soluzione era quindi degenere e stiamo indugiando sulle stranezze che ciò può comportare. Il dizionario che si ottiene con questo pivot è il seguente:

Secondo Tableau Soluzione Partenza

	$-$	$w_{A,1}$	x_B	$w_{B,2}$	x_1	$w_{C,2}$	x_3
z	1+K	1	2-K	K-1	0	1	1
x_A	1	1	0	0	-1	0	0
$w_{A,2}$	1	1	-1	1	-1	0	0
$w_{A,3}$	0	1	0	0	-1	0	1
x_C	0	0	1	-1	0	1	0
x_2	1	0	-1	1	0	0	0

Si noti che anche questo dizionario esprime la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ proposta dal testo, non ci siamo davvero spostati nello spazio delle soluzioni, abbiamo solo cambiato la nostra prospettiva di indagine attorno alla $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Questo nuovo dizionario ci offre (nella soluzione duale ad esso associata) un certificato di ottimalità per $\overline{\boldsymbol{x}}$ valido per $K \leq 2$ (il certificato di ottimalità espresso da precedente dizionario era valido solo per $K \leq 1$). Tuttavia questo secondo certificato di ottimalità non è valido per $K < 1$, dove resta invece valido il certificato precedente. I due certificati presi congiuntamente coprono l'intero intervallo $[0, 2]$ dei valori di K per i quali $\overline{|(x)}$ è effettivamente ottima.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. Per gli appelli estivi in aula delta, non abbiamo controllo dell'aria condizionata e l'ambiente potrà risultarvi troppo freddo. Data la durata dell'appello consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. Potete portarvi materiali cartacei ma non è consentita alcuna strumentazione elettronica. Dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco «una prova di cromatografia su carta». Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto la più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo: cercate e concretizzate quelli che più vi convengono, non impegolatevi a dimostrare quello che non sapete o dove incontrate incertezze. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati (in questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso). Tutto il resto (incluse le castronerie colossali ma anche le doppie risposte discordanti) non verrà conteggiato. Ricordate che in buona sostanza il voto corrisponderà al punteggio positivamente raccolto. I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non ci interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare.

L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti che trovi al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, sfruttalo al meglio senza sprecarlo. Una prima utilità è quella di testare la tua preparazione all'esame. Dopo aver letto il testo, consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente. Ma, in sufficiente numero di esemplari, poi anche materialmente, prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti. Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura del documento di correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E se invece ti sembra di saper risolvere del tutto l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: controlla che quanto hai in mente come soluzione corrisponda a quanto considerato e proposto come svolgimento opportuno. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente ordine'", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo saper rispondere in chiarezza alla consegna"" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'"esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il mancato conseguimento dei punti ad esse associati. Aggiungo che per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (perchè non collaborare a raccogliere una ricca collezione di link a tali sorgenti?).