

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

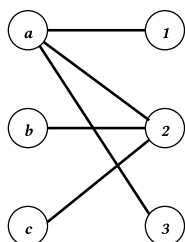
FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 19 febbraio 2025

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 63 punti in palio (voto \geq punti -6, 40 \rightarrow 30 e lode)

Esercizio 1 (con 10 richieste: 1+2+1+2+1+1+1+11+3+3 = 26 punti [modellazione/riduzioni]):



In un grafo $G = (V, E)$, chiamiamo:

1. *node cover* ogni $X \subseteq V$ che contenga almeno un estremo di ogni arco $uv \in E$,
2. *matching* ogni $M \subseteq E$ non contenente due archi con un estremo in comune.

Un grafo è detto *bipartito* tra A e B se $V = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ e ogni arco in E ha un estremo in A e l'altro in B .

Sei importanti problemi modello espressi nel linguaggio dei grafi sono:

1,2- MIN (BIPARTITE) NODE COVER: trova un node cover di minima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

3,4- MAX (BIPARTITE) MATCHING: trova un matching di massima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

5- DIRECTED S,T-CONNECTIVITY: trova un massimo numero di cammini tra due nodi s e t di un generico grafo diretto in input, col vincolo che i cammini siano disgiunti sugli archi (ogni arco compare in al più un cammino).

6- UNDIRECTED S,T-CONNECTIVITY: trova un massimo numero di cammini disgiunti sugli archi tra due nodi dati di un generico grafo non-diretto.

Richieste dell'Esercizio 1

1.1 (1 pt, problems basic comprehension) con riferimento all'istanza in figura, fornire: un matching ottimo e dire quanti sono, un matching massimale ma non di massima cardinalità e dire quanti sono, un node cover ottimo e dire quanti sono, un node cover minimale ma non ottimo e dire quanti sono.

1.2 (2 pt, model as ILP) Formula come problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI) i problemi MAX MATCHING e MIN NODE COVER per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).

1.3 (1 pt, model generality) Tra il MAX MATCHING e il MAX BIPARTITE MATCHING quale dei due modelli è più espressivo? Ossia, quale dei due problemi è più generale e quindi più ambizioso da risolvere?

1.4 (2 pt, classic model knowledge) Descrivere i modelli/problemi del massimo flusso e del minimo taglio in un grafo diretto con capacità intere sugli archi. Quale relazione vi è tra questi due modelli?

1.5 (1 pt, model Directed Connectivity) Modella DIRECTED S,T-CONNECTIVITY in termini di MAX FLOW.

1.6 (1 pt, model Undirected Connectivity 1) Riduci UNDIRECTED S,T-CONNECTIVITY a MAX FLOW.

1.7 (1 pt, model Undirected Connectivity 2) Riduci UNDIRECTED- a DIRECTED S,T-CONNECTIVITY.

1.8 (11 pt, model Bipartite Matching) Modella MAX BIPARTITE MATCHING in termini di MAX FLOW. (1pt se spieghi in modo chiaro come produrre un'istanza I_F di MAX FLOW a partire dalla generica istanza I_M di MAX BIPARTITE MATCHING), (1pt se è chiaro come da un matching M di I_M si possa produrre un flusso dello stesso valore per I_F), (1pt se è chiaro come da un s, t -flow per I_F si ottenga un

matching M di I_M dello stesso valore), (1pt se chiaro come da un node cover X di I_M si ottenga un s, t -cut per I_F dello stesso costo), (1pt se chiaro come da un s, t -cut per I_F si ottenga un node cover X di I_M dello stesso costo), (1pt se dimostri che la cardinalità di nessun node cover può essere inferiore a quella di un matching), (1pt se enunci correttamente il MaxFlow-MinCut Theorem), (1pt se indichi come possa essere dimostrato), (3pt se lo dimostri).

1.9 (3 pt, model flow as ILP) Offri la formulazione PLI del problema MAX FLOW. Dimostra l'integralità del rilassamento di tale formulazione (2pt).

1.10 (3 pt, explore the dual) Scrivi il duale di tale rilassamento. Scrivi una formulazione di PLI del modello MIN CUT che abbia tale duale come suo rilassamento (2pt).

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A-1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I-10**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	1	1	0	1	1	0	0	•	6
B	2	•	1	•	0	0	•	0	0	5
C	0	•	0	•	•	0	0	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	•	3	1	•	0	1
G	3	•	2	1	2	•	•	3	1	•
H	2	1	2	•	•	1	1	1	•	0
I	4	4	3	3	2	1	1	•	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3) e il passo diagonale (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-4). Se il robot deve evitare le celle proibite (•), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un pedaggio del valore riportato nella cella stessa, sapresti minimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 2

2.1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A-1** a **I-10**

2.2 (1 pt, num percorsi da B-3) Numero di percorsi ammissibili da **B-3** a **I-10**

2.3 (1 pt, num percorsi a F-6) Numero di percorsi ammissibili da **A-1** a **F-6**

2.4 (1 pt, num percorsi per D-5) Numero di percorsi da **A-1** a **I-10** passanti per **D-5**

2.5 (1 pt, opt val) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A-1** a **I-10**. (E soluzione di tale valore).

2.6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A-1** a **I-10**

2.7 (1 pt, opt val per D-5) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A-1** a **I-10** passante per **D-5**

2.8 (2 pt, num paths of opt val via D-5) Numero cammini ottimi da **A-1** a **I-10** passanti per **D-5**

Quadro delle risposte dell'Esercizio 2

consegna	num. paths	opt val	un path (percorso) ottimo
A-1 → I-10			
B-3 → I-10			
A-1 → F-6			
passaggio per D-5			
minimo costo			
n. min-cost paths			
min-cost D-5-path			
n. min-cost D-5-paths			

,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 3: **num cammini a**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 4: **num cammini da**

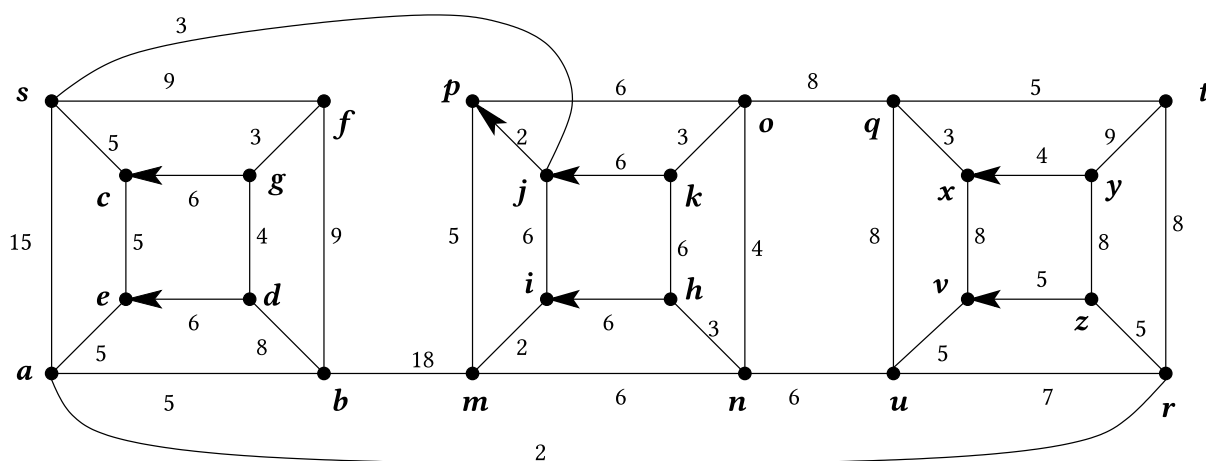
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 5: **opt val path to (e num opt paths)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 6: **opt val path from (e num opt paths)**

Esercizio 3 (con 11 richieste: $3+2+2+2+2+2+1+4+3+4+2 = 27$ punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 3

- 3.1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco ar con un arco ap .
- 3.2 (2 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G e G' (1 punto per ogni soluzione certificata da bicolorazione e 1 per ogni certificato di ottimalità, ove i grafi non siano bipartiti di loro).
- 3.3 (2 pt, max flow) In G , trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 3.4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.
- 3.5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.
- 3.6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).
- 3.7 (1 pt, one MST) In G , fornire un albero ricoprente di peso minimo.
- 3.8 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G ?
- 3.9 (3 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)
- 3.10 (4 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti in u certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.
- 3.11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in G (1pt). Sapresti dire perché non possa esserci un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

Quadro delle risposte dell'Esercizio 3

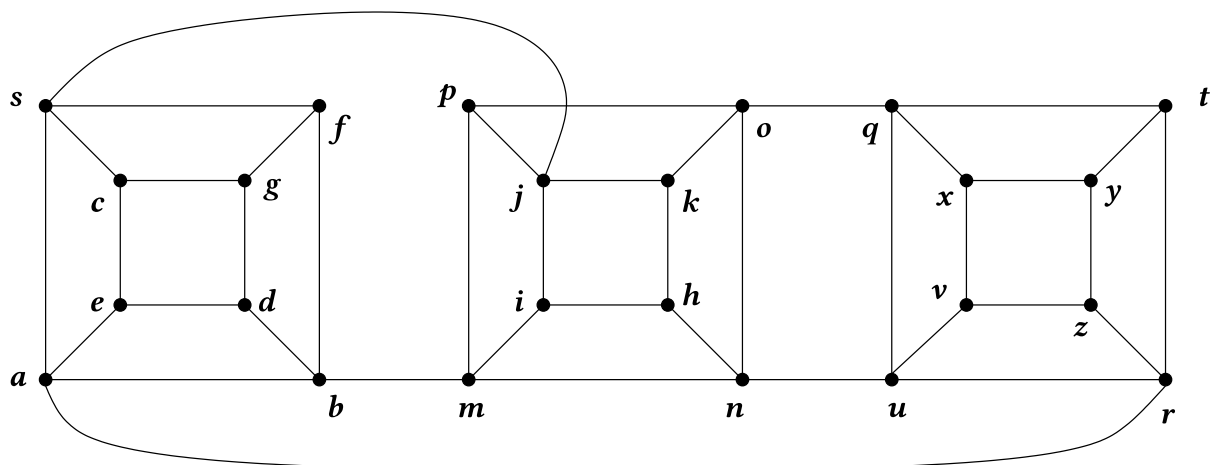


Figura 1: eventuale certificato di non planarità di G .

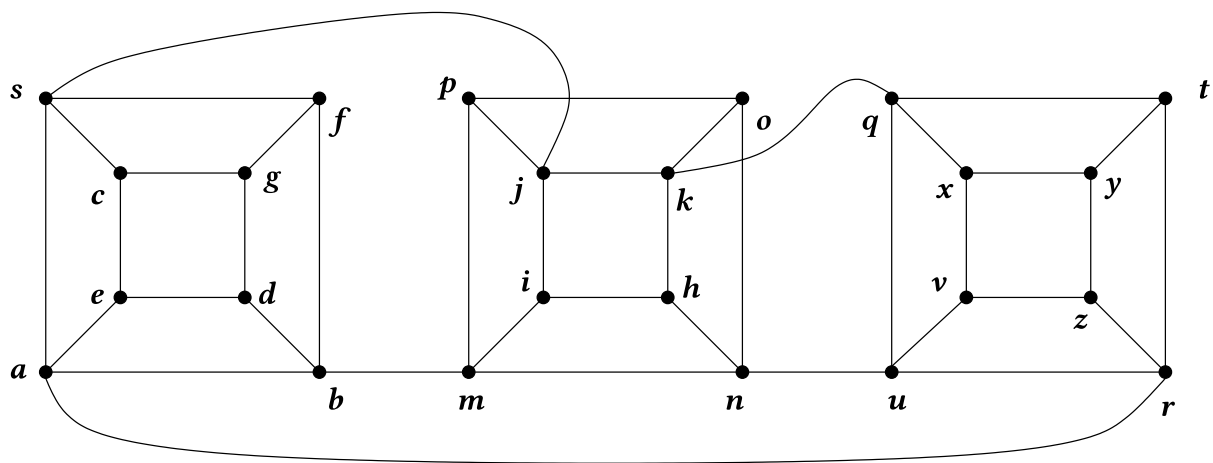


Figura 2: eventuale certificato di non planarità di G' .

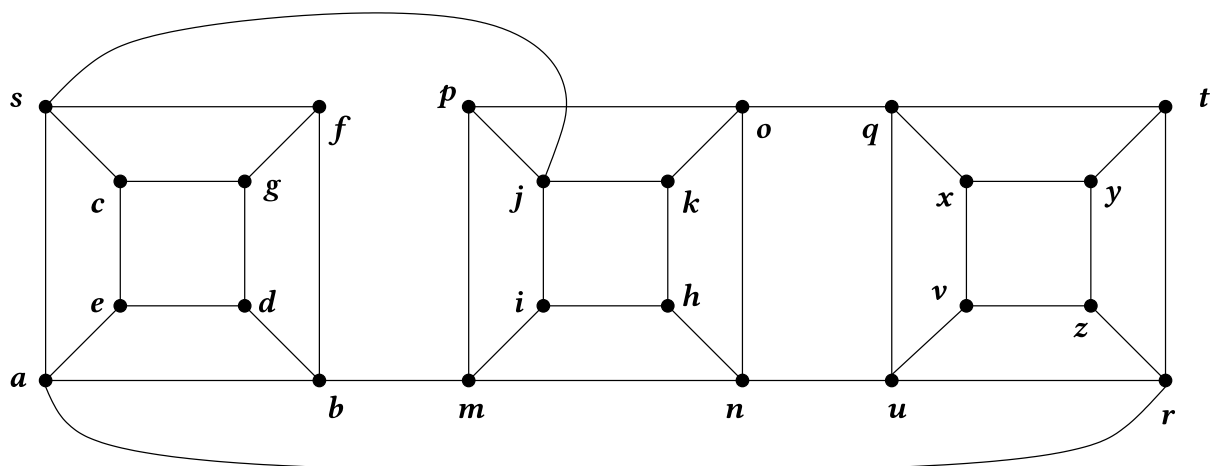
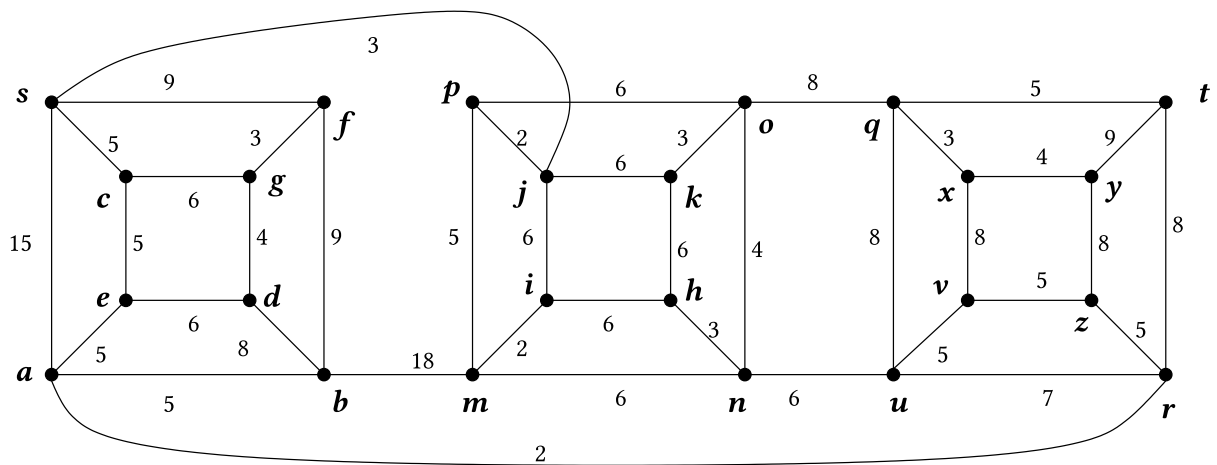
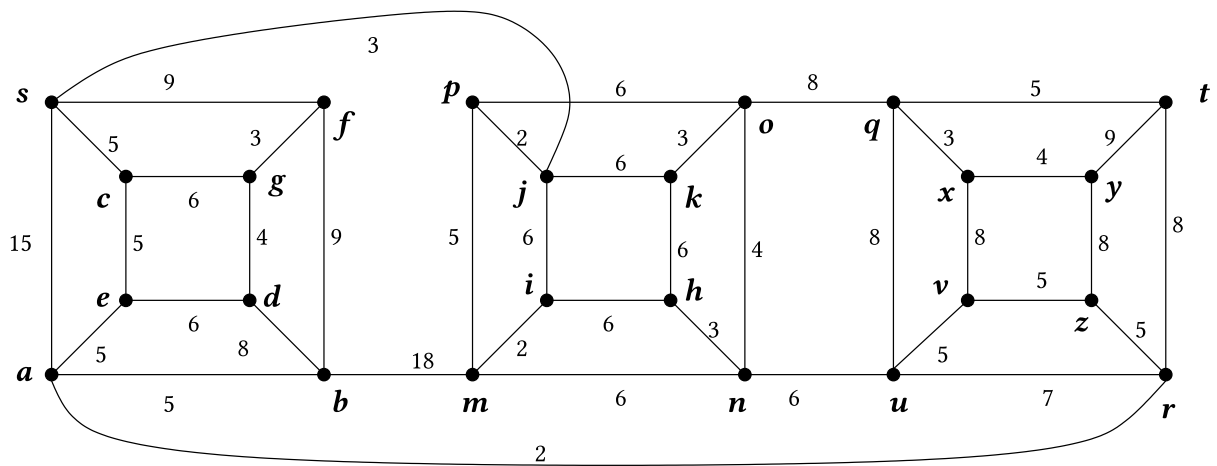
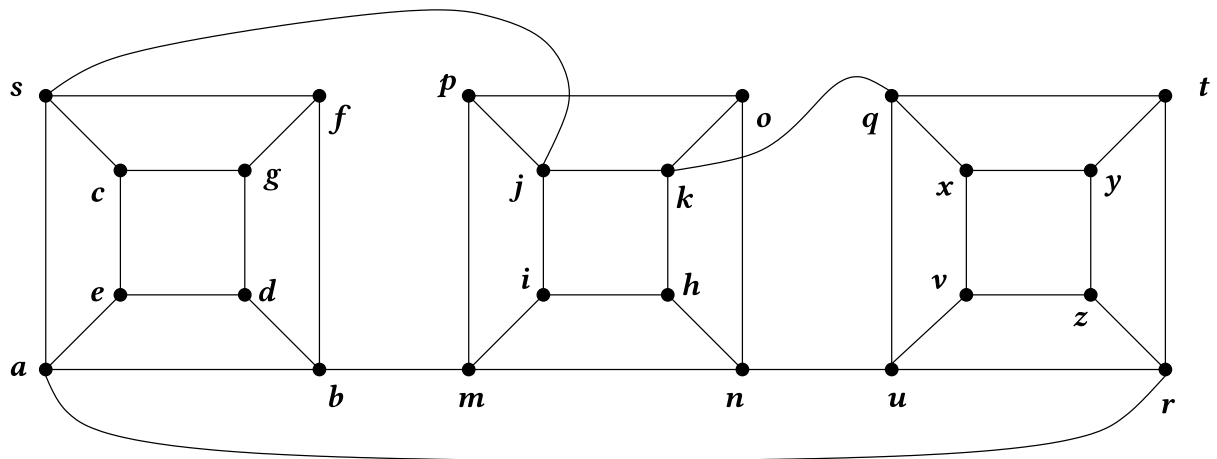
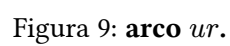
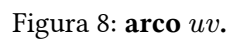
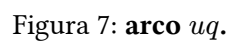


Figura 3: bipartiteness di G .





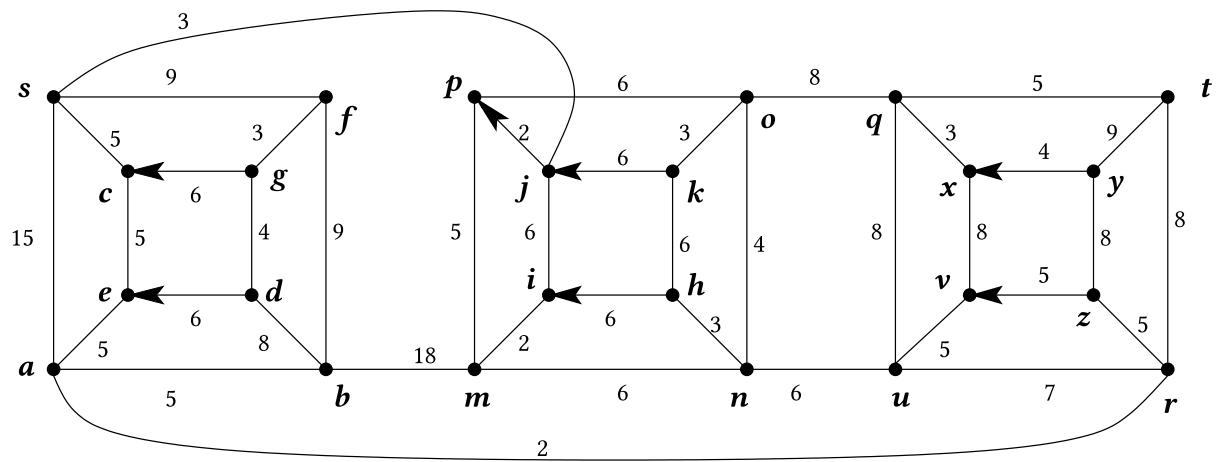


Figura 10: max-flow min-cut.

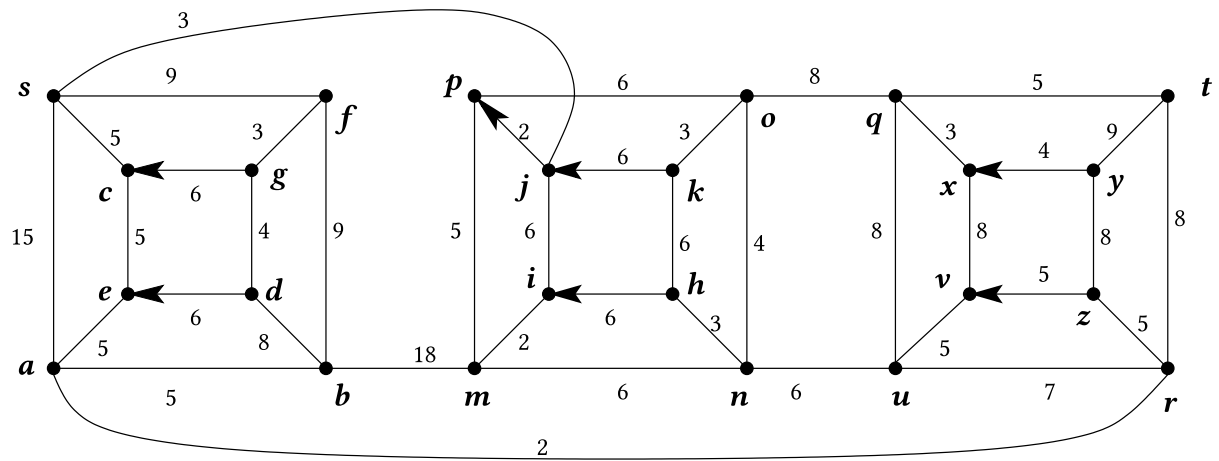


Figura 11: certificati di corretta valutazione della sensitività per l'arco scelto.

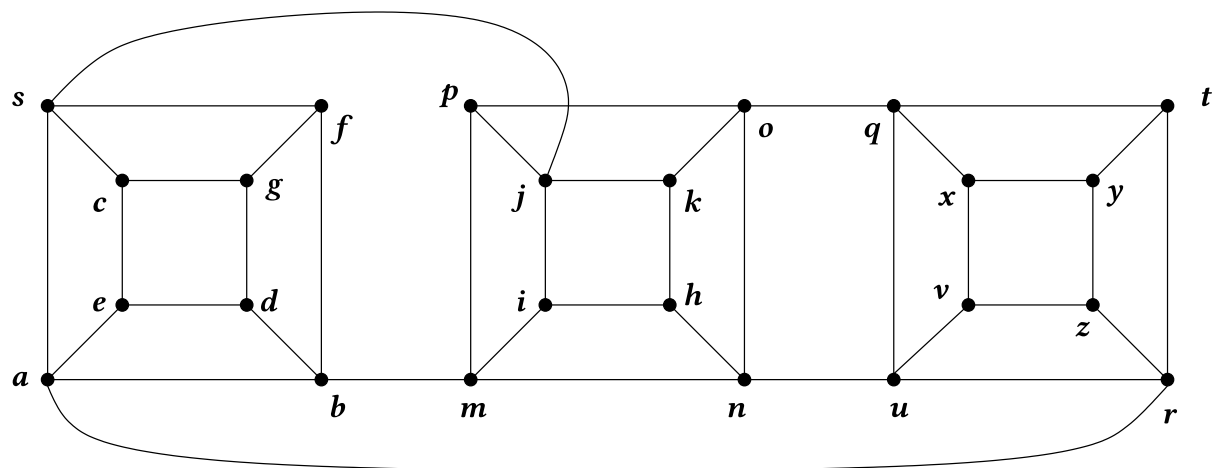


Figura 12: max matching.

Esercizio 4 (con 1 richieste: 0 = 0 punti [simplesso]):

Nelle intenzioni era presente anche un esercizio da 12 punti sul simplesso ed analisi di sensitività. Ma all'esame abbiamo omesso di distribuire i fogli relativi a tale esercizio.

Richieste dell'Esercizio 4

4.1 (0 pt,)

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame -collaborare al controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccogliarli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/ Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).
- 3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.
- 4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -assegnazione punti

- 1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.
- 2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -completamento esame

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito verrà richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.