Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 12 giugno 2017
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 55, con voto $\geq$ punti

Problema 1 (8 punti):

Si assuma che un politopo P venga rappresentato fornendo la lista $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ dei suoi vertici. Quindi $P = conv(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ è combinazione convessa dei p punti dati, e, inoltre, ciascuno di essi è garantito essere un vertice di P. Nelle seguenti domande, parte del punteggio si ottiene illustrando la risposta sull'esempio coi $p = 6$ vertici: $v_1 = (-1, 0, 0)$, $v_2 = (0, -1, -1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$, $v_4 = (0, 1, -1)$, $v_5 = (0, 1, 1)$, $v_6 = (1, 0, 0)$. Elaborando la risposta come metodo generale si ottengono gli altri punti.

(1+1 pt) descrivi un algoritmo efficiente che, data anche una funzione obiettivo $c \in \mathbb{R}^n$ (esempio $(1, 2, 3)$), determini la soluzione ottima del problema $\max\{c^T x : x \in P\}$.

(1 pt) dato anche un punto $x \in \mathbb{R}^n$, si formuli come un problema di PL la questione generale di stabilire se x appartenga o meno a P.

(1 pt) dedurre dal punto precedente l'esistenza di un algoritmo polinomiale per il seguente problema di riconoscimento: dati i punti $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$, stabilire se esista un politopo P del quale essi costituiscano precisamente l'insieme dei vertici.

(1+1 pt) specificato uno dei vertici, ad esempio $v_1 = (-1, 0, 0)$, si offra una descrizione dell'insieme $W = \{c \in \mathbb{R}^n : v_1 \in \arg\max_{x \in P} c^T x\}$ di quelle funzioni obiettivo c che vedano v_1 come soluzione ottima al problema di massimizzare $c^T x$ su P.

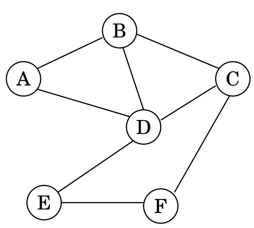
(1+1 pt) quali delle seguenti affermazioni sono sbagliate (quì lo **1 pt** aggiuntivo viene con l'elaborazione dei controesempi per le affermazioni false): W è un poliedro, W è un politopo, W è un cono poliedrale.

Problema 2 (2+2+5=9 punti):

Un Matching in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Siamo interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

(2pt) Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

(5pt) Dimostrare che la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico è un problema NP-hard riducendo ad esso il problema del minimo node cover.

Problema 3 (2+2=4 punti):

Sia $G = (V, E)$ un grafo che assumiamo corredato da una pesatura dei suoi archi $w : E \mapsto \mathbb{R}$.

(2pt) Sia C un ciclo di G e sia e un arco di C tale che $w(e) > w(f)$ per ogni arco $f \in C \setminus \{e\}$. Dimostrare che nessun albero ricoprente di peso minimo per (G, w) può utilizzare l'arco e.

(2pt) Un sottografo $H = (U, F)$, $F \subseteq E$, di G si dice ricoprente quando $U = V$. Si indichi come ridurre il problema di computare un sottografo ricoprente di G di peso minimo al problema dell'albero ricoprente di peso minimo.

Problema 4 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.

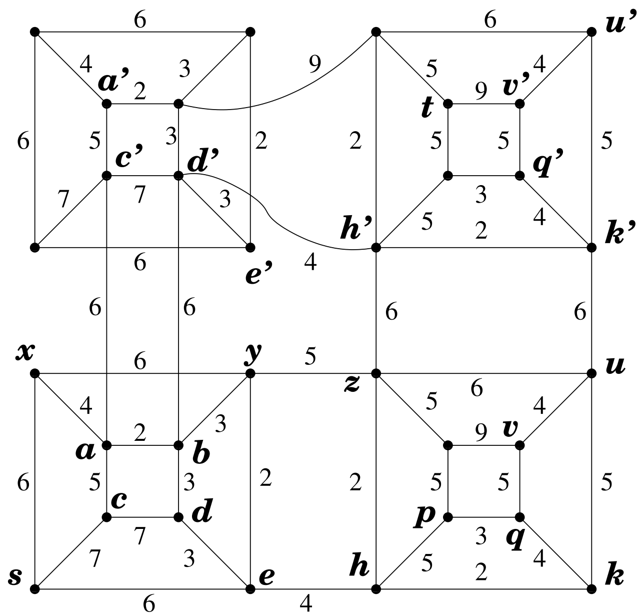
4.4(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.5(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
crescente		
N-sequenza		
crescente con 40		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Su G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Su G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Su G, trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Su G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

Problema 6 (12 punti):
Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 10$, $x_4 = 20$, $x_5 = 28$ del seguente problema.

$$\max\ 3x_1 + 18x_2 + 36x_3 + 60x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 24 \\ x_3 + x_4 & \leq 20 \\ x_5 + x_6 & \leq 28 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 & \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

6.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

6.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

6.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

6.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

6.5.**(2pt)** Dire per quali valori dei parametri C_5 e C_6 la soluzione assegnata è ottima indicando con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

6.6.**(3+3pt)** Costruire un piccolo problema dove le condizioni degli scarti complementari non bastino a ricostruire il certificato di ottimalità dell'unica soluzione ottima. Svolgere l'analogo esercizio evidenziando come il problema di ricostruire almeno un certificato altro non sia che un problema di programmazione lineare più piccolo.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi Nome, Cognome e Matricola per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.