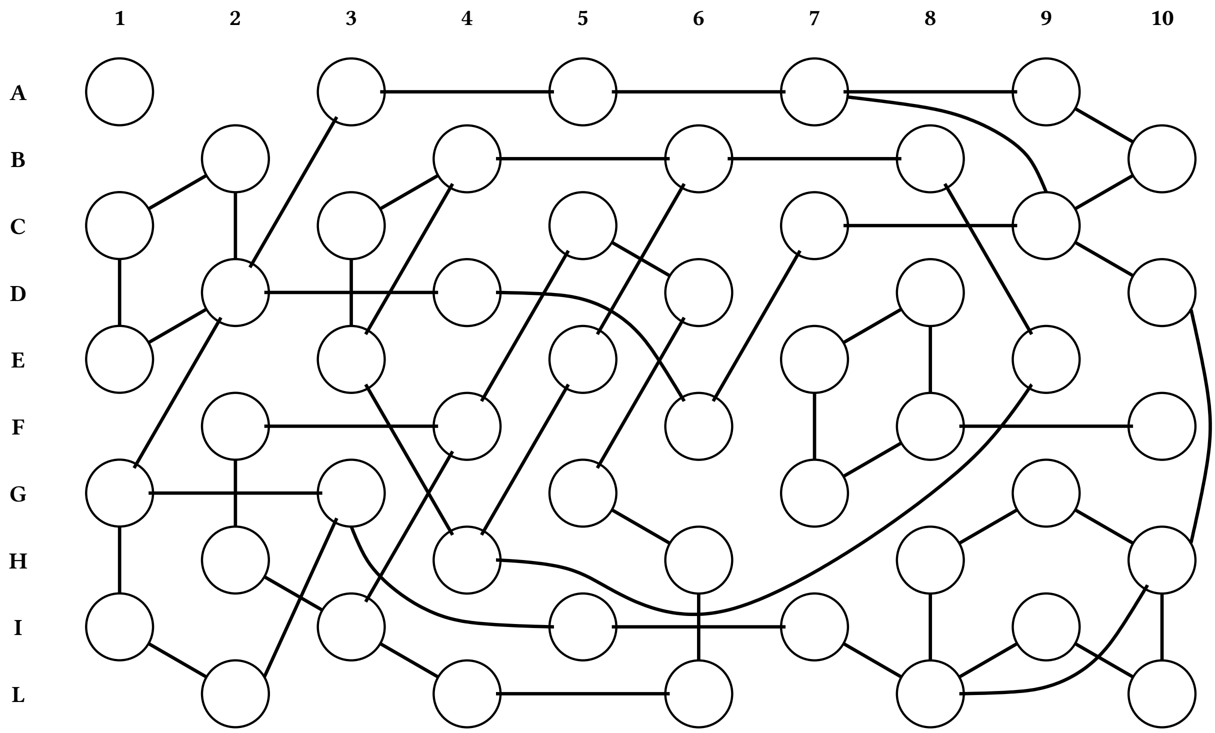
Esame di Ricerca Operativa - 03 luglio 2025

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

5 esercizi per 97 punti in palio voto $\geq$ punti — 5, 40⟶ 30 *e lode*)

- CORREZIONE -

Esercizio 1 (con 6 richieste: 1+1+3+1+1+1 = 8 punti [grafi visual]):



Richieste dell'Esercizio 1

1 .1 (1 pt, componenti_connesse) Colora i nodi in modo da evidenziare le diverse componenti connesse

1 .2 (1 pt, distingui nodi e archi speciali)

nodi isolati	**foglie**	**cutnodes**	**bridges**

1 .3 (3 pt, make bipartite) rendi il grafo bipartito rimuovendo il minor numero di archi (1pt se suggerisci quali archi rimuovere ed evidenzi la bipartizione del grafo risultante, 1pt se esibisci una famiglia di cicli dispari che richiedano la rimozione di quel numero di archi per essere tutti eliminati, 1pt per il numero di soluzioni ottime). Addobba sempre la figura sopra per l'esibizione dei certificati

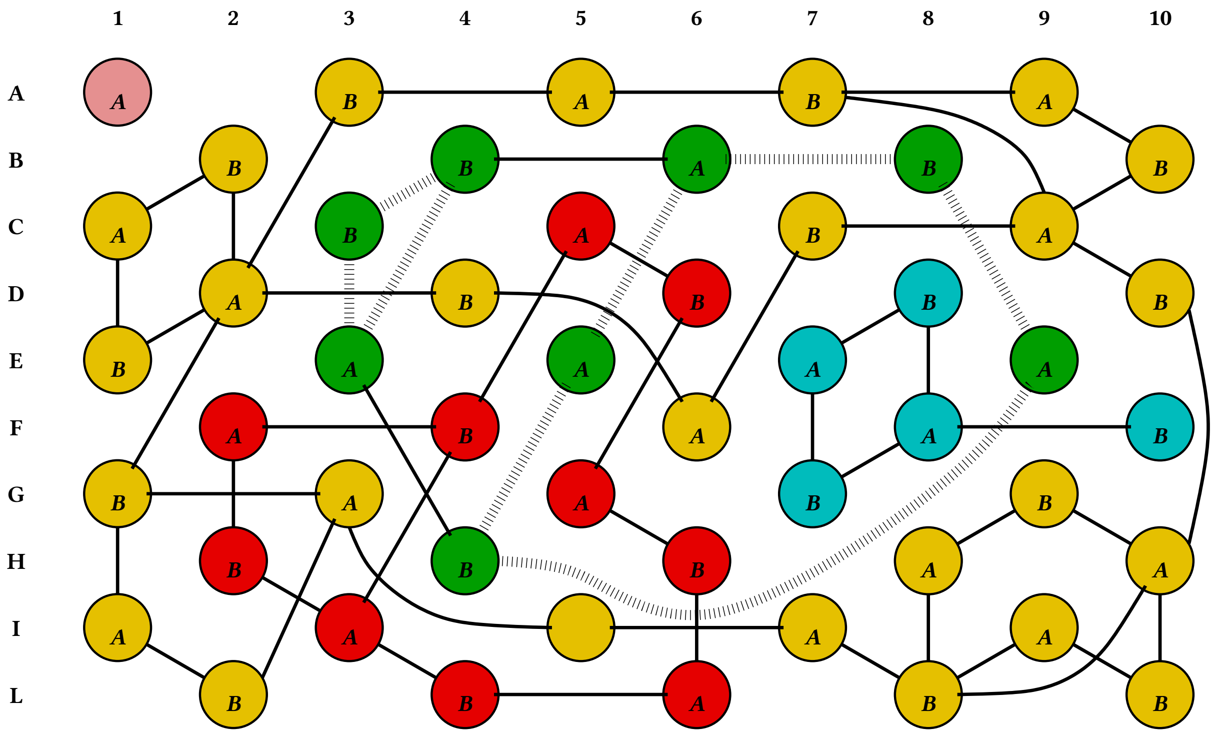
1 .4 (1 pt, planarità) Dire se planare oppure no, argomentandolo via certificati

1 .5 (1 pt, Hamilton) Per ogni componente di più nodi, fornire un ciclo Hamiltoniano se presente, altrimenti un cammino Hamiltoniano se presente, altrimenti spiega perchè nisba

1 .6 (1 pt, Eulero) Per ogni componente di più nodi, stabilire se ammetta un ciclo Euleriano, e, in caso contrario, stabilire se ammetta un cammino Euleriano (stabilire=certificato di SI oppure di NO)

Svolgimento esercizio 1 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: componenti_connesse**).**



Richiesta 2 (1 pt) (goal: distingui nodi e archi speciali**).**

nodi isolati	**foglie**	**cutnodes**	**bridges**
A1	F10	D2,F8	F8-F10

Richiesta 3 (3 pt) (goal: make bipartite**).**
Una soluzione ottima consiste nel rimuovere i 2 archi C3-B4, e E5-B6, cui corrisponde la bicolorazione offerta in figura. Sempre in figura sono evidenziati due cicli dispari tali che non basti rimuovere un solo arco per colpirli entrambi.

Numero di Soluzioni Ottime:

$\boxed{7}$

. Più precisamente, 2 soluzioni rimuovono l'arco C3-B4 e uno dei due archi E5-B6 ed E4-H4, oppure l'arco C3-E3 e l'altro dei due archi E5-B6 ed E4-H4 (per un totale di 4 soluzioni), e 3 soluzioni in cui si rimuova invece l'arco E3-B4. (L'unica componente che non è bipartita è quella verde, conviene quindi focalizzarsi su di essa.)

Richiesta 4 (1 pt) (goal: planarità**).**
per argomentare che il grafo è planare basta argomentare che ciascuna delle sue componenti connesse è planare. In realtà, l'unica delle componenti connesse di cui la figura fornita non offra già un certificato di planarità è quella che abbiamo colorato di giallo (che in figura vede incrociarsi gli archi I9-L10 e L8-H10). Tuttavia, per risolvere tale incrocio basta abbassate il nodo I9 per portarlo al di sotto dell'arco L8-H10.

Richiesta 5 (1 pt) (goal: Hamilton**).**
l'unico ciclo Hamiltoniano della componente rossa si ottiene eliminando da lei l'arco I3-F4. La componente blu non può avere cicli Hamiltoniani dato che ha un bridge. Presenta però due diversi cammini Hamiltoniani, che si ottengono rimuovendo da essa l'arco F8-D8 oppure l'arco F8-G7. Se dalla componente gialla rimuoviamo i nodi D2 e C9 il grafo si spezza in ben 4 componenti, mentre se da un ciclo (o da un cammino) Hamiltoniano rimuoviamo due nodi non otterremo mai più di 2 (o più di 3, rispettivamente) componenti. La componente verde non ha ciclo Hamiltoniano perchè rimuovendo i due nodi di grado 3 otteniamo ben 3 componenti, ma ha 4 cammini Hamiltoniani: essi hanno un estremo in E5 e l'altro estremo in uno dei 4 nodi B4,E3,B8,E9. Nessuno di essi contiene l'arco E3-B4 (pena tagliare fuori il nodo C3).

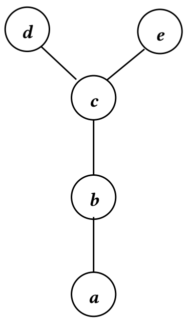
Richiesta 6 (1 pt) (goal: Eulero**).**
la componente gialla ha tutti i nodi di grado pari ed ammette quindi un ciclo Euleriano. La componente rossa ha precisamente due nodi di grado dispari (I3 e F4) e pertanto non ha un ciclo Euleriano ma ha un cammino Euleriano. La componente blu non può avere cicli Euleriani dato che il nodo F10 ha grado 1, ma i due cammini Hamiltoniani esibiti al punto precedente sono anche i due cammini Euleriani per questa componente. La componente verde ha precisamente due nodi (B6 e H4) di grado dispari; quindi non ha cicli Euleriani ma ha cammini Euleriani.

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+3+2+2+1+7+5+5 = 26 punti [modellazione/riduzioni]):

In un grafo $G = (V, E)$, chiamiamo:

1. *independent set* ogni $X \subseteq V$ tale che nessun arco in E abbia entrambi gli estremi in X,
2. *matching* ogni $M \subseteq E$ non contenente due archi con un estremo in comune.

Un independent set (o matching) è detto *massimale* se non è strettamente contenuto in un altro independent set (o matching, rispettivamente).



Due problemi modello espressi nel linguaggio dei grafi sono:

1. Min Maximal Independent Set: trova un independent set massimale di cardinalità la più piccola possibile.
2. Min Maximal Matching: trova un matching massimale di cardinalità la più piccola possibile.

Quì il matching $M = \{bc\}$ e l'independent set $X = \{a, c\}$ sono entrambi massimali ma non di cardinalità massima, anzi, sono proprio quelli di cardinalità minima come da ricercarsi nei due problemi sopra introdotti.

Richieste dell'Esercizio 2
2 .1 (1 pt, rimappatura) Esprimere l'istanza di Min Maximal Matching data in figura in termini di un'opportuna istanza di Min Maximal Independent Set. Assicurati che gli independent set del grafo da te prodotto siano in corrispondenza biunivoca coi matching del grafo in figura.
2 .2 (3 pt, riduzione tra problemi) Ridurre Min Maximal Matching a Min Maximal Independent Set (1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).
2 .3 (2 pt, model minMIS as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Maximal Independent Set per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).
2 .4 (2 pt, model minMM as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Maximal Matching per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).
2 .5 (1 pt, closed formula) Dare la formula chiusa per la minima cardinalità di un maximal independent

set e per quella di un maximal matching sul cammino di n nodi.

2 .6 (7 pt, dynamic programming) Nel problema Min Maximal Independent Set Pesato a ciascun nodo del grafo ricevuto in input è associato un costo e quello che vogliamo determinare è il minimo costo (definito come la somma dei costi sui nodi presi) di un independent set massimale. Assegnamo 1pt se determini correttamente il minimo costo per il cammino dove i nodi, come incontrati nell'ordine lungo il cammino, abbiano costo 1,7,2,3,9,1,2,5,2,4,6,3,4,2,2. Miriamo a progettare un algoritmo di programmazione dinamica per Min Maximal Independent Set Pesato ristretto a cammini: 3pt per la famiglia di sotto-problemi associate ai nodi, 2pt per la ricorrenza, 1pt per i casi base.

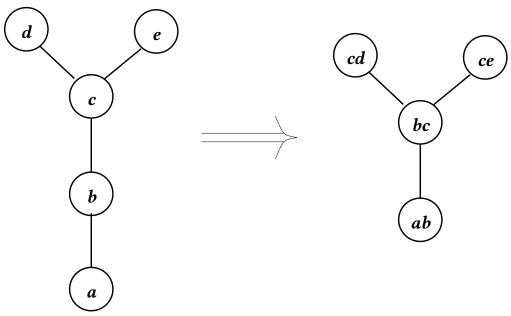
2 .7 (5 pt, classic model knowledge) Descrivi il problema/modello Min Node Cover (1pt) e dimostrane l'NP-competezza (ne abbiamo visto una dimostrazione in classe). 1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 2pt per il lemma hard).

2 .8 (5 pt, NPC-proof for minMIS) Ridurre Min Node Cover a Min Maximal Independent Set per dimostrare l'NP-completezza di quest'ultimo (3pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).

Svolgimento esercizio 2 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: rimappatura**).**

Nel problema source siamo chiamati a selezionare un opportuno sottoinsieme degli archi mentre nel problema target va selezionato un opportuno sottoinsieme dei nodi. Viene pertanto opportuno rappresentare ciascuno degli archi del problema source introducendo un corrispondente nodo del problema target. Dopodichè gli archi che ne derivano sono quelli del grafo sulla sinistra. Non è difficile verificare che effettivamente vi è una corrispondenza biunivica (e cardinality preserving) tra le soluzioni ammissibili (=sottoinsiemi di archi) del problema source e le soluzioni ammissibili (=sottoinsiemi di nodi) del problema target.



Speriamo che quanto emerso su quest'istanza particolare possa ora trovare conferma nel caso generale.

Richiesta 2 (3 pt) (goal: riduzione tra problemi**).**

Dato un generico grafo $G = (V, E)$, si consideri il grafo $G' = (V', E')$, dove $V' = E$ e dove due nodi $u, v \in V'$ sono adiacenti se e solo se, visti come archi di G, non hanno estremi in comune. Chiaramente, dato G, il grafo G' può essere prodotto in tempo polinomiale.

Lemma [easy]: se $M \subseteq E$ è un maximal matching di G allora M è un maximal independet set di G'.

proof: se $e, f \in M$ allora e e f non hanno estremi in comune e quindi $ef \notin E'$. Quindi M può essere considerato come un independent set di G'. Se V' contenesse poi un nodo g a distanza almeno 2 da ogni nodo in M allora, visto come arco di E, il nodo g non avrebbe alcun estremo in comune con alcun arco in M, contraddicendo la massimalità di M. QED

Lemma [hard]: un maximal independet set X' di G' è anche un maximal matching di G.

proof: se $e, f \in X'$ allora $ef \notin E'$ e quindi e e f non hanno estremi in comune quando riguardati come archi di G. Quindi X' può essere considerato come un matching di G. Se E contenesse poi un arco g tale che $X' \setminus \{g\}$ fosse ancora un matching di G allora, $X' \setminus \{g\}$ sarebbe ancora un independent set di G', contraddicendo la massimalità di X'. QED

Richiesta 3 (2 pt) (goal: model minMIS as ILP**).**

Si assuma dato un generico grafo $G = (V, E)$, non necessariamente bipartito.

Min Maximal Independent set:

introduciamo una variabile binaria x_v per ogni nodo $v \in V$, con l'idea che $x_v = 1$ se e solo se il nodo v è da includere nel independent set codificato. In pratica x intende essere il vettore caratteristico (o vettore di incidenza) dell'independent set incognito. Tramite esso possiamo esprimere la seguente formulazione di PLI, dove per ogni nodo v indichiamo con N_v l'insieme dei vicini di v (ossia $N_v = \{u \in V \mid uv \in E\}$):

$$\begin{aligned} &\min \sum_{v \in V} x_v \\ &\quad x_u + x_v \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad uv \in E \\ &\quad x_v + \sum_{u \in N_v} x_u \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad u \in V \\ &\quad x \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni} \quad v \in V \end{aligned}$$

Con riferimento al grafo in figura la formulazione che ne risulta è:

$$\begin{aligned} &\min x_a + x_b + x_c + x_d + x_e \\ &\quad x_a + x_b \leq 1 && (\text{arco } ab) \\ &\quad x_b + x_c \leq 1 && (\text{arco } bc) \\ &\quad x_c + x_d \leq 1 && (\text{arco } cd) \\ &\quad x_c + x_e \leq 1 && (\text{arco } ce) \\ &\quad x_a + x_b \geq 1 && (\text{nodo } a) \\ &\quad x_b + x_a + x_c \geq 1 && (\text{nodo } b) \\ &\quad x_c + x_b + x_d + x_e \geq 1 && (\text{nodo } c) \\ &\quad x_d + x_e \geq 1 && (\text{nodo } d) \\ &\quad x_d + x_e \geq 1 && (\text{nodo } e) \\ &\quad x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

che, eliminando le ridondanze e i vincoli dominati da altri vincoli, si semplifica a:

$$\begin{aligned} &\min x_a + x_b + x_c + x_d + x_e \\ &\quad x_a + x_b \leq 1 && (\text{arco } ab) \\ &\quad x_b + x_c \leq 1 && (\text{arco } bc) \\ &\quad x_c + x_d \leq 1 && (\text{arco } cd) \\ &\quad x_c + x_e \leq 1 && (\text{arco } ce) \\ &\quad x_b + x_a + x_c \geq 1 && (\text{nodo } b) \\ &\quad x_c + x_b + x_d + x_e \geq 1 && (\text{nodo } c) \\ &\quad x_a, x_b, x_c, x_d, x_e \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Richiesta 4 (2 pt) (goal: model minMM as ILP**).**

introduciamo una variabile binaria x_{uv} per ogni arco $uv \in E$, con l'idea che $x_{uv} = 1$ se e solo se l'arco uv è da includere nel matching codificato. In pratica x intende essere il vettore caratteristico del maximal matching incognito. Per impostare la famiglia di vincoli necessari, per ogni $v \in V$ denotiamo con $\delta(v)$ l'insieme degli archi incidenti nel nodo v e con $I(uv)$ l'insieme degli archi con precisamente un estremo in $\{u, v\}$.

$$
\begin{aligned}
\min & \sum_{uv \in E} x_{uv} \\
& \sum_{u \in \delta(v)} x_{uv} \leq 1 \quad \text{per ogni} \quad v \in V \\
& x_{uv} + \sum_{ab \in I(v)} x_{ab} \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad uv \in E \\
& x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni} \quad uv \in E
\end{aligned}
$$

Con riferimento al grafo in figura la formulazione che ne risulta è:

$$
\begin{aligned}
\max\, & x_{ab} + x_{bc} + x_{cd} + x_{ce} \\
& x_{ab} \leq 1 && \text{(nodo } a\text{)} \\
& x_{ab} + x_{bc} \leq 1 && \text{(nodo } b\text{)} \\
& x_{bc} + x_{cd} + x_{ce} \leq 1 && \text{(nodo } c\text{)} \\
& x_{cd} \leq 1 && \text{(nodo } d\text{)} \\
& x_{ce} \leq 1 && \text{(nodo } e\text{)} \\
& x_{ab} + x_{bc} \geq 1 && \text{(arco } ab\text{)} \\
& x_{bc} + x_{ab} + x_{cd} + x_{ce} \geq 1 && \text{(arco } bc\text{)} \\
& x_{cd} + x_{bc} + x_{ce} \geq 1 && \text{(arco } cd\text{)} \\
& x_{ce} + x_{bc} + x_{cd} \geq 1 && \text{(arco } ce\text{)} \\
& x_{ab}, x_{ac}, x_{cd}, x_{ce} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

che, eliminando le ridondanze e i vincoli dominati da altri vincoli, si semplifica a:

$$
\begin{aligned}
\max\, & x_a + x_b + x_c + x_1 + x_2 + x_3 \\
& x_{ab} + x_{bc} \leq 1 && \text{(nodo } b\text{)} \\
& x_{bc} + x_{cd} + x_{ce} \leq 1 && \text{(nodo } c\text{)} \\
& x_{ab} + x_{bc} \geq 1 && \text{(arco } ab\text{)} \\
& x_{cd} + x_{bc} + x_{ce} \geq 1 && \text{(arco } cd\text{)} \\
& x_{ab}, x_{ac}, x_{cd}, x_{ce} \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Richiesta 5 (1 pt) (goal: closed formula**).**

Se $f(n)$ è la minima cardinalità di un maximal independent set per il grafo P_n, ossia per il cammino di n nodi, e $f(n)$ è la minima cardinalità di un maximal matching per P_n, allora è facile verificare a mano che

	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(n)$	0	1	1	1	2	2	2	3
$g(n)$	0	0	1	1	1	2	2	2

e pervenire a: $f(n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ e $g(n) = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$.

Richiesta 6 (7 pt) (goal: dynamic programming**).**

Per ogni nodo $i = 1, ..., n$ della linea si considerino i valori:

- c_i: il costo del nodo i dato in input
- P_i: in minimo costo di un maximal independent set per il cammino dei soli primi i nodi e che includa il nodo i

La risposta al problema originario è data da $\min\{P_n, P_{n-1}\}$ dato che un maximal independent set non potrà includere sia il nodo n che il nodo $n-1$, ma nemmeno potrà ometterli entrambi. Inoltre, per ogni nodo $i = 4, 5, ..., n$ della linea, avremo:

- $P_i = c_i + \min\{P_{i-2}, P_{i-3}\}$
- $P_1 = c_1$
- $P_2 = c_2$
- $P_3 = c_1 + c_2$

Nel caso dell'istanza specifica che abbiamo proposto la tabella di programmazione dinamica andrebbe così riempita:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_n	1	7	2	3	9	1	2	5	2	4	6	3	4	2	2
P_n	1	7	3	4	12	5	6	10	7	10	13	10	14	12	12
sol	1	•	2	•	•	1	•	•	2	•	•	3	•	•	2

Quindi il minimo costo è 11 ed abbiamo almeno una soluzione ottima che include l'ultimo nodo e almeno una soluzione ottima che include invece il penultimo nodo.

Possiamo facilmente ricostruire a ritroso una soluzione ottima quale quella segnalata nell'ultima riga della tabella.

Richiesta 7 (5 pt) (goal: classic model knowledge**).**

Un *node cover* di un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme C di V tale che ogni arco in E ha almeno un estremo in C. In pratica C è un node cover se e solo se $V \setminus C$ è un independent set. Il problema MIN NODE COVER chiede di stabilire la minima cardinalità di un node cover. In classe ne avevamo visto una riduzione da 3-SAT che è classica (si trova sia sul *Cormen* che sul *Gary & Johnson* che, tra altre, anche in internet).

Richiesta 8 (5 pt) (goal: NPC-proof for minMIS**).**
Si ottenga G' da $G = (V, E)$ introducendo, per ogni nodo $v \in V$, due ulteriori nodi v_1 e v_2 collegati a v coi due archi vv_1 e vv_2. In pratica G è un sottografo indotto di G' che ne è stato ottenuto attaccando

un paio di pendagli ad ogni nodo. Lasciamo al lettore di chiarirsi l'idea di questa riduzione scrivendo di suo pugno il lemma easy e il lemma hard.

Esercizio 3 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A−1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I−10**.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0	3	1	0	1	1	0	0	●	6
B	2	●	1	●	0	0	●	0	0	5
C	0	●	0	0	●	2	0	1	1	4
D	0	0	1	0	1	0	1	●	0	3
E	0	0	●	2	0	●	2	0	0	1
F	0	1	3	1	1	3	1	●	0	1
G	●	3	2	1	2	●	●	3	1	●
H	2	1	2	●	●	1	1	1	●	0
I	4	4	3	3	2	1	1	●	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A−3 alla cella A−4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A−3 alla cella B−3) e il passo diagonale (che in pratica porta direttamente alla cella raggiunta concatenando quello orizzontale e quello verticale). Se il robot deve evitare le celle proibite (●), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un pedaggio del valore riportato nella cella stessa, sapresti minimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **I−10**
3 .2 (1 pt, num percorsi da B−3) Numero di percorsi ammissibili da **B−3** a **I−10**
3 .3 (1 pt, num percorsi a F−6) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **F−6**
3 .4 (1 pt, num percorsi per D−5) Numero di percorsi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**
3 .5 (1 pt, opt val) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A−1** a **I−10**. (E soluzione di tale valore).
3 .6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10**
3 .7 (1 pt, opt val per D−5) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A−1** a **I−10** passante per **D−5**
3 .8 (2 pt, num paths of opt val via D−5) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**

Svolgimento esercizio 3 .

La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della tabella **num cammini da**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I−10.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	710	535	360	185	129	41	9	5	0	0
B	175	0	175	0	56	32	0	4	1	0
C	175	0	127	48	0	24	8	2	1	0
D	113	62	46	33	15	10	6	0	1	0
E	35	16	0	13	5	0	4	2	1	0
F	10	9	7	5	3	2	2	0	1	0
G	0	1	1	1	1	0	0	2	1	0
H	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabella 2: **num cammini da**

Per rispondere alle domande successive serve anche la tabella **num cammini a**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, è riportato il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
B	1	0	2	0	2	4	0	2	3	3
C	1	0	2	4	0	6	10	12	17	23
D	1	2	4	10	14	20	36	0	29	69
E	1	4	0	14	38	0	56	92	121	219
F	1	6	10	24	76	114	170	0	213	553
G	0	7	23	57	157	0	0	170	383	0
H	0	7	37	0	0	157	157	327	0	383
I	0	7	51	88	88	245	559	0	327	710

Tabella 3: **num cammini a**

Ritrovare il valore 710 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle prossime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella C alla cella I–10. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	6^{7}	6^{3}	3^{3}	2^{3}	3^{6}	3^{10}	2^{7}	2^{4}	-1^{0}	-1^{0}
B	6^{4}	-1^{0}	4^{10}	-1^{0}	2^{3}	2^{3}	-1^{0}	2^{3}	2^{1}	-1^{0}
C	4^{4}	-1^{0}	3^{6}	3^{4}	-1^{0}	4^{7}	2^{3}	2^{1}	2^{1}	-1^{0}
D	4^{2}	4^{2}	4^{2}	3^{2}	3^{2}	2^{2}	2^{2}	-1^{0}	1^{1}	-1^{0}
E	9^{5}	9^{3}	-1^{0}	8^{3}	6^{1}	-1^{0}	3^{2}	1^{2}	1^{1}	-1^{0}
F	9^{1}	9^{1}	9^{2}	6^{1}	6^{1}	8^{2}	5^{2}	-1^{0}	1^{1}	-1^{0}
G	-1^{0}	11^{1}	8^{1}	6^{1}	5^{1}	-1^{0}	-1^{0}	4^{2}	1^{1}	-1^{0}
H	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	3^{1}	2^{1}	1^{1}	-1^{0}	0^{1}
I	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	0^{1}	0^{1}

Tabella 4: **valore ottimo di un cammino da * a I-10 e numero di cammini ottimi da * a I-10**

Leggendo i valori riportati nella cella A–1 scopriamo che il minimo costo di una traversata é di 6, e che esistono 7 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore.

Per rispondere alle ulteriori domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0^{1}	3^{1}	4^{1}	4^{1}	5^{1}	6^{1}	6^{1}	6^{1}	-1^{0}	-1^{0}
B	2^{1}	-1^{0}	4^{1}	-1^{0}	4^{1}	4^{1}	-1^{0}	6^{2}	6^{3}	11^{3}
C	2^{1}	-1^{0}	4^{1}	4^{2}	-1^{0}	6^{2}	4^{1}	5^{1}	6^{1}	10^{4}
D	2^{1}	2^{2}	3^{2}	3^{2}	4^{2}	4^{2}	5^{3}	-1^{0}	5^{1}	8^{1}
E	2^{1}	2^{4}	-1^{0}	5^{4}	3^{2}	-1^{0}	6^{2}	5^{3}	5^{4}	6^{5}
F	2^{1}	3^{6}	5^{4}	6^{8}	4^{2}	6^{2}	7^{4}	-1^{0}	5^{7}	6^{11}
G	-1^{0}	5^{1}	5^{6}	6^{10}	6^{2}	-1^{0}	-1^{0}	10^{4}	6^{7}	-1^{0}
H	-1^{0}	6^{1}	7^{7}	-1^{0}	-1^{0}	7^{2}	8^{2}	9^{2}	-1^{0}	6^{7}
I	-1^{0}	10^{1}	9^{1}	10^{7}	12^{7}	8^{2}	8^{2}	-1^{0}	9^{2}	6^{7}

Tabella 5: **valore ottimo di un cammino da A-1 a * e numero di cammini ottimi da A-1 a ***

Avendo riempito l'intera tabella (non serviva per solo rispondere alle ultime due domande), nella cella I–10 troviamo conferma che il minimo costo raccoglibile lungo una traversata é di 6, e che esistono 7 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore. Le risposte alle ulteriori domande sono ottenute consultando queste due tabelle, eventualmente entrambe: nel caso di celle di passaggio obbligato il valore ottimo andrà ottenuto tramite somma (avendo cura di non conteggiare due volte il valore della cella di passaggio) mentre il numero di soluzioni ottime sarà il prodotto dei due numeri riportati in piccolo nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.
Riportiamo quindi i risultati finali.

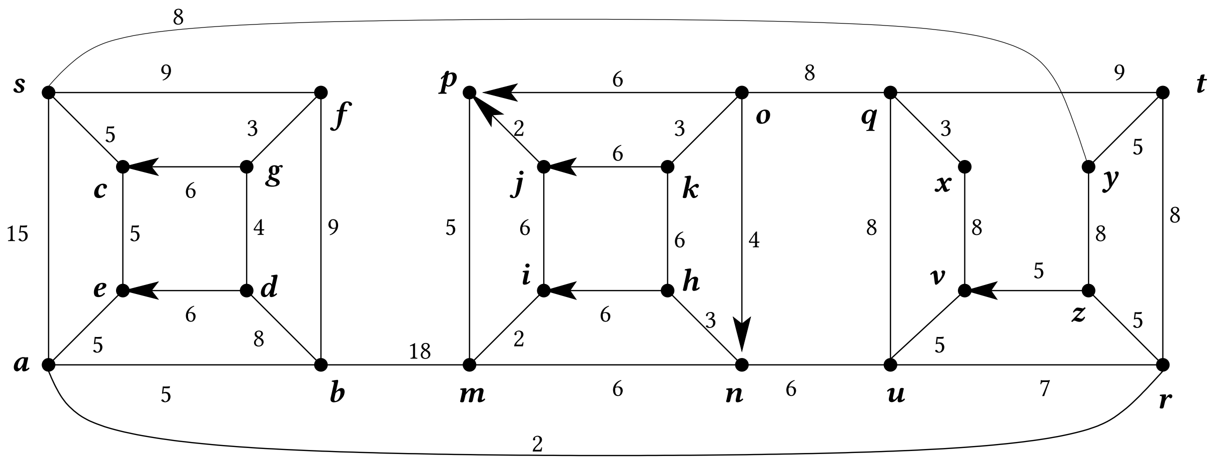
consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A−1 → I−10	710		
B−3 → I−10	175		
A−1 → F−6	114		
passaggio per D−5	$14 * 15 = 210$		
minimo costo		6	**A**1-**A**2-**A**3-**A**4-**B**5-**B**6-**C**7-**C**8-**D**9-**E**9-**F**9-**G**9-**H**10-**I**10
n. min-cost paths	7		
min-cost D−5-path		$6 = 3 + 4 - 1$	A1-B1-C1-(D1)-D2-D3-D4-D5-D6-D7-E8-(E9)-F9-G9-H10-I10
n. min-cost D−5-paths	$2 * 4 = 8$		

Anche quì il numero di cammini di interesse che passano per la cella D−5 è ottenuto come prodotto del numero della stessa tipologia che giungono in D−5 per quelli che da quì dipartono. Lo spazio dei cammini otimi passanti per D−5 è infatti prodotto cartesiano di quelli con arrivo in D−5 per quelli con partenza da D−5.

Per quanto riguarda il minimo costo di un cammino passante per D−5 esso è ottenuto sommando il minimo costo di un cammino che terminano in D−5 col minimo costo di un cammino che parte da D−5, avendo cura di sottrarre il valore in D−5 (che in questo caso è 1) che altrimenti viene conteggiato doppio.

Per ricostruire i cammini che attengono i valori ottimi calcolati devi procedere in ordine inverso, e quindi dopo aver finito di calcolare tutti i numeri (risposte ai sottoprobelmi). Quando procedendo a ritroso non sai quale strada prendere, guarda a questi numeri per i sottoprolemi cui ti ridurresti a valle di ciascuna delle possibili scelte. Almeno una delle opzioni a tua disposizione ad ogni passo deve fulfillare la promessa ad Abramo.

Esercizio 4 (con 11 richieste: 3+2+2+2+2+2+1+2+4+5+2 = 27 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G, il grafo G_u ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco su, e il grafo G_q ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco sq.

4 .2 (2 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G, G_u e G_q (1pt se corretti tutti i certificati di bicolorazione, 1 pt se ok ogni certificato di ottimalità).

4 .3 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4 .4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.

4 .5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

4 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).

4 .7 (1 pt, one MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo.

4 .8 (2 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)

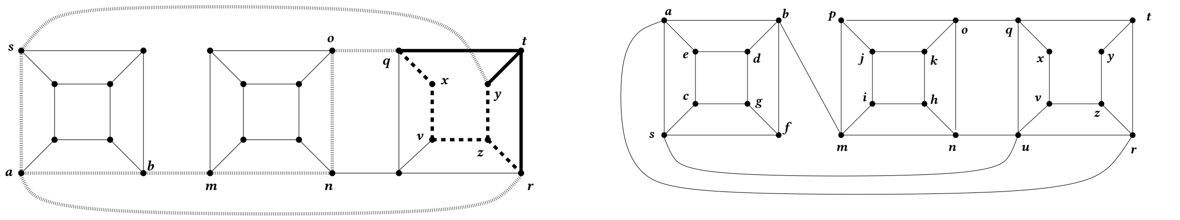
4 .9 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G?

4 .10 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti nel nodo m certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.

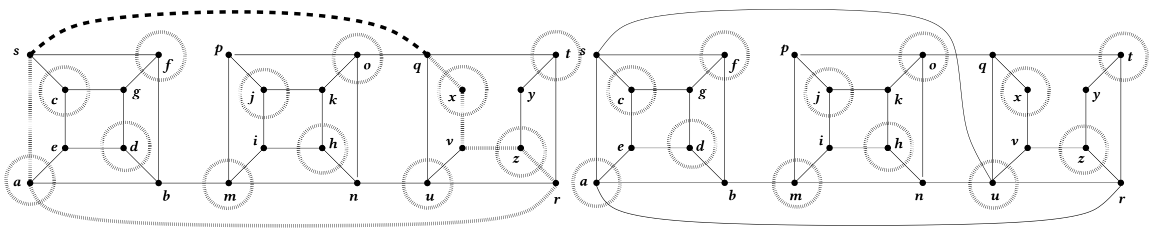
4 .11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in $G_{s,r}$, il grafo ottenuto da G rimuovendo i nodi s ed r (1pt). Certifica la non esistenza di un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

Svolgimento esercizio 4 .

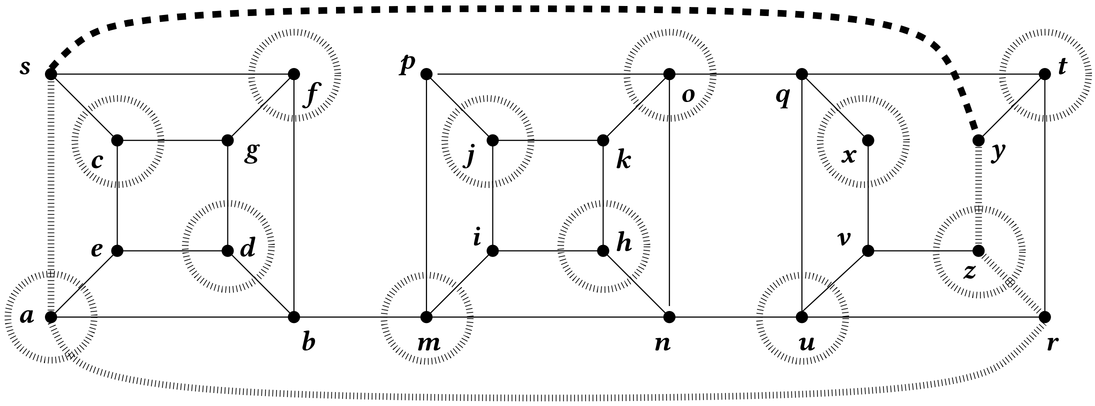
La non-planarità di G è certificata dalla $K_{3,3}$ subdivision in figura, sulla sinistra. Sulla destra, si offre un planar embedding di G_u, che ne certifica invece la planarità.



Un planar embedding di G_q è invece fornito nella figura a seguire, sulla sinistra, dove si mostra come rimuovendo un solo arco il grafo G_q possa essere reso bipartito (oltre alla biaprtizione è evidenziato un ciclo dispari che certifica che almeno un arco deve essere rimosso). Sulla destra possiamo verificare che G_u era invece bipartito già di suo.



Su G serve rimuovere almeno un arco, e un solo arco di nuovo basta.

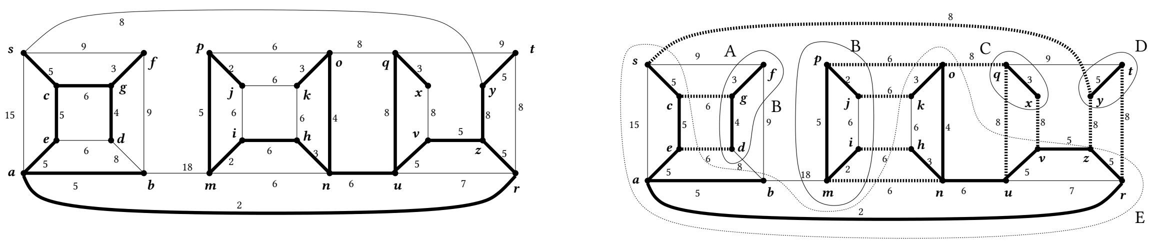


La figura quì sotto a sinistra visualizza un MST in linea spessa. Alla sua immediata destra classifichiamo gli archi di G in tre categorie:

linea spessa continua quelli che appartengono ad ogni MST

linea spessa tratteggiata quelli che appartengono a qualche MST ma non a tutti

linea sottile quelli che non appartengono ad alcun MST



Gli archi in linea spessa raccolgono i nodi in 5 isole A, B, C, D ed E.

Ogni MST dovrà prendere almeno un arco del taglio che separa la componente A dal resto del grafo. Ogni tale arco ha un estremo in A e l'altro in E, pertanto la questione si riduce a scegliere esattamente uno di questi archi sapendo che sono intercambiabili. Converrà prendere un arco di peso minimo (6).

Abbiamo due opzioni: arco cg oppure arco ed. In modo del tutto analogo, per collegare la componente B al resto del grafo andrà preso uno ed un solo arco di peso minimo con un estremo nella componente B e l'altro fuori, prendere più di un arco con un estremo in B non serve a nulla. Quindi questa scelta è tra 4 opzioni, e del tutto indipendente dalla scelta precedente. In modo del tutto analogo, per saldare la componente C al blocco $E + A + B$ dobbiamo scegliere un arco di peso 8 (ci sono 3 opzioni). Infine, per saldare la componente D al blocco $E + A + B + C$ dobbiamo scegliere un arco di peso 8 (di nuovo 3 opzioni).

Il numero totale di alberi ricoprenti di peso minimo è pertanto $2 \times 4 \times 3 \times 3 = 72$.

Forniamo ora dei certificati specifici per la classificazione dei 4 archi per cui richiesto:

arco mb in nessun MST in quanto arco di peso massimo nel ciclo $mnurab$.

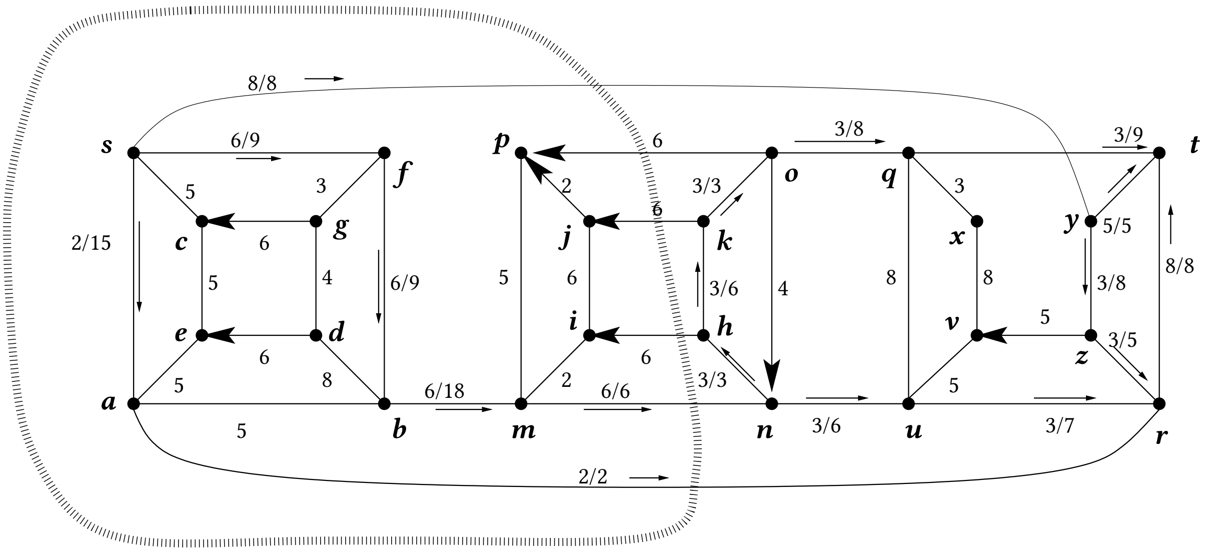
arco mp in tutti gli MST in quanto arco di peso strettamente minimo del taglio di spiaggia $\{m, i\}$ (ossia del taglio che separa i nodi m ed i dal resto del grafo).

arco mi in tutti gli MST in quanto arco di peso strettamente minimo del taglio di spiaggia m (ossia del taglio che separa m dal resto del grafo).

arco mn in qualche MST in quanto arco di peso minimo del taglio che separa la componente D dal resto del grafo. Non in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $mnop$.

arco qu in qualche MST in quanto arco di peso minimo del taglio che separa la componente B dal resto del grafo. Non in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $quno$.

Un flusso ottimo (valore 16) è visualizzato in figura, con l'unico s,t-taglio minimo e dello stesso valore: quello che separa i nodi sul lato sinistro da guelli sul lato destro della figura (precisamente a metà, tagliando nel mezzo anche il cubo centrale). Questo taglio da solo certifica l'ottimalità del flusso in figura, come di ogni altro possibile flusso di valore 16 (ce ne sono diversi).



,

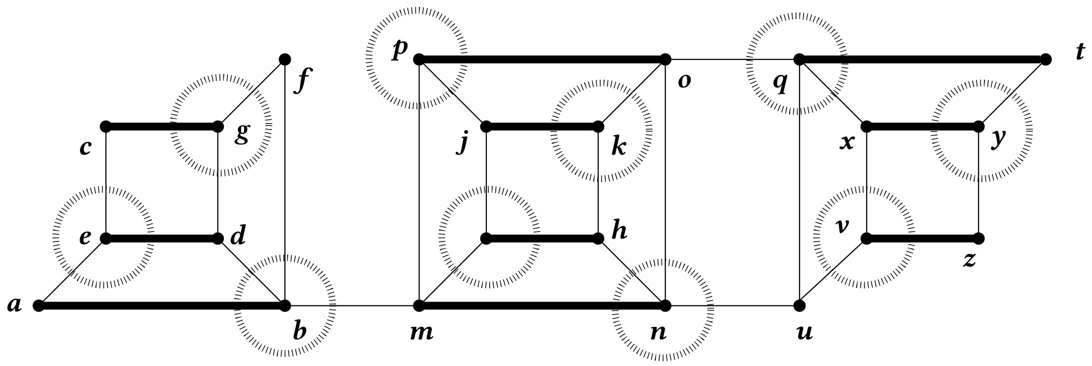
Gli unici archi per i quali un aumento della capacità dell'arco potrebbe tradursi in un aumento del valore del flusso massimo sono gli archi che fuoriescono da questo s,t-taglio, ossia questi tre: ar, sy e mn. Per ogni unità di aumento della capacità su uno di questi archi ci si può attendere un'unità di aumento del flusso massimo, ma solo fino ad un valore soglia oltre il quale subentra un nuovo collo di bottiglia.

Nel caso dell'arco ar possiamo sfruttare il cammino $saruqt$ che nella rete ausiliaria a capacità minima 6 in corrispondenza dell'arco qt per produrre un nuovo flusso di valore $16 + 6 = 24$. Non ha senso aumentare la capacità dell'arco ar di oltre 6 unità perchè a quel punto viene a saturarsi l'arco qt, ultimo degli archi con testa in t, e la stella di t è un s,t-taglio (collo di bottiglia) di valore 24, di più non passa se non cominciamo ad aumentare anche la capacità di uno di questi 3 archi.

Nel caso dell'arco mn possiamo sfruttare il cammino $sabmnuqt$ che nella rete ausiliaria a capacità residua minima 3 in corrispondenza dell'arco nu per produrre un nuovo flusso di valore $16 + 3 = 19$. Non ha senso aumentare la capacità dell'arco mn di oltre 3 unità, che il valore di soglia per l'arco mn sia 3 è certificato dall's,t-taglio ottenuto da quello in figura trasportando il solo nodo u dalla parte di t alla parte di s. Il fuoco che ora arriva sempre verde in n non riesce più a raggiungere u dacchè dopo 3 unità di aumento del flusso l'arco nu è finito col saturarsi.

Se invece volessimo spingere più flusso lungo l'arco sy il prossimo arco a saturarsi sarebbe necessariamente l'arco yz su cui andrebbe a scaricarsi tutta questa dovizia. Il valore di soglia sarebbe pertanto 5. Riesci ad intercettare l's,t-taglio che subentra come collo di bottiglia?

Nel grafo G_{rs} evidenziamo un matching M ad un node cover X con $|X| = |M|$, che mutualmente certificano la propria ottimalità dato che in nessun grafo possono aversi un matching M ed un node cover X con $|X| < |M|$ (di ogni arco di un matching ogni node cover deve prendere almeno uno dei due estremi).



Esercizio 5 (**con 10 richieste: 1+5+2+2+1+4+2+3+2+4 = 26 punti** **[simplesso]**):

Nel seguente problema di PL, K è un parametro a valori reali (in $\mathbb{R}$).

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & 5x_A + 2x_B + 2x_C + Kx_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & & \\
& x_A + x_1 & \geq & 1 \\
& -x_A - x_2 & \leq & -1 \\
& x_A + x_3 & \geq & 1 \\
& x_A + x_3 - x_4 & \geq & 1 \\
& x_B + x_2 & \geq & 1 \\
& x_C + x_2 & \geq & 1 \\
& \multicolumn{3}{l}{x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0}
\end{array}
$$

Richieste dell'Esercizio 5

5 .1 (1 pt, standard form) Portare il problema nella forma di minimizzazione standard ($\min\{c'x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$). Nota: per evitare di introdurre confusione sugli effettivi valori delle variabili, nelle domande a seguire ci riferiremo sempre al problema già portato in forma standard. Lo chiameremo problema P, mentre chiameremo problema P' il problema originale fornito sopra.

5 .2 (5 pt, recognize structure) Cosa sai dire sulla forma della matrice dei coefficienti? (1pt) Di quale importante proprità gode quindi tale marice in virtù della sua struttura? (1pt) Sapresti dimostrare che se A è una matrice che gode di tale proprietà allora anche la matrice $(A \mid I)$ ottenuta affiancando ad essa la matrice identità dello stesso numero di righe gode della proprietà? (2pt) Che conseguenze ne derivano per il poliedro delle soluzioni ammissibili? (1pt)

5 .3 (2 pt, foresee the form of optimal basic solutions) Si assuma $K \geq 0$ e sia x una qualsiasi soluzione di base per il problema P. Quanto al punto precedente già esclude che le sue coordinate possano assumere molti valori reali. Argomenta il necessario per dedurre da quanto al punto precedente, e riconsiderando la struttura del problema P nel suo complesso, che i valori possibili per ciascuna coordinata di x sono al massimo due. (1pt) Quali sono questi due valori per P e per P'? (1pt)

5 .4 (2 pt, combinatorial problem view)) In virtù di quanto sopra, riesci a rappresentarti il problema P come un qualche problema combinatorico, magari dandone rappresentazione su un qualche grafo pesato? Cosa sono le soluzioni ammissibili di questo problema combinatorico? (1pt) Riesci a scorgere quali possano essere le soluzioni ottime per questo problema al variare di K? Cosa sono le soluzioni ammissibili del problema combinatorico duale? (1pt) Riesci a scorgere quali possano essere le soluzioni ottime del duale al variare di K? (1pt)

5 .5 (1 pt, canonic form) Scrivere la forma canonica di P (il primo dizionario) e il primo tableau. Leggerne la prima soluzione di base associata. Interpreta il significato combinatorico di tale soluzione di base (se hai espresso la visione combinatorica nel punto precedente).

5 .6 (4 pt, simplex method) Risolvi all'ottimo col metodo del simplesso dopo aver scelto un qualsiasi valore per K, la visione combinatorica può aiutarti a sceglierlo in modo da fare 2 soli pivot. In compenso, se hai espresso la visione combinatorica, vedi di commentare ad ogni pivot dove ti trovi sul problema combinatorico. (3pt) Spendi esplicitamente (in chiarezza) almeno una prova del nove, al passaggio che preferisci. (1pt)

5 .7 (2 pt, get dual LP) Scrivi l'LP duale D di P (1pt). Fornire soluzione ottima di D per lo stesso valore scelto per K (1pt).

5 .8 (3 pt, complementary slackness conditions) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari (2pt). Verificale una per una sulla coppia di soluzioni prodotte (1pt).

5 .9 (2 pt, eval optimality) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione primale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione duale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt)

5 .10 (4 pt, eval optimality) Fornire soluzione primale e duale ottime per il range complementare di K (1pt). Stabilire per quali valori di K la tua soluzione primale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione duale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari per tale coppia di soluzioni e verificale (1pt).

Svolgimento esercizio 5 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: standard form**).**

$$
\begin{array}{llllllllll}
\min 5x_A + 2x_B + 2x_C + Kx_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\
\quad x_A & & & + x_1 & & & & \geq 1 \\
\quad x_A & & & & + x_2 & & & \geq 1 \\
\quad x_A & & & & & + x_3 & & \geq 1 \\
\quad x_A & & & & & + x_3 & + x_4 & \geq 1 \\
& x_B & & & + x_2 & & & \geq 1 \\
& & x_C & & + x_2 & & & \geq 1 \\
\multicolumn{8}{l}{x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0}
\end{array}
$$

Richiesta 2 (5 pt) (goal: recognize structure**).**

E' un problema di PL di minimizzazione. Benchè il problema non sia in forma standard, esso è a origine ammissibile, dove l'origine è comunque una soluzione di base poggiando su n vincoli linearmente indipendenti (volendo si potrebbe avviare già da qui un metodo del simplesso che però inverta la logica della colonna della x_4 per la scelta della variabile entrante e il concetto di ammissibilità del secondo vincolo (e, corrispondentemente, la logica per la variabile uscente su quella riga di tableau).

La matrice dei coefficienti è una matrice 0/1 con precisamente due uni per riga. Può pertanto essere vista come la matrice delle incidenze arco/nodo di un grafo semplice (senza loops nè archi paralleli). Di fatto tale grafo sarà bipartito in quanto le colonne possono essere partizionate in due gruppi ($\{A, B, C\}$ versus $\{1, 2, 3, 4\}$ in modo che ciascuna riga abbia al più un solo uno in ciascun gruppo. E' noto che matrici con questa struttura siano totalmente unimodulari, ossia godano della sequente proprietà:

«il determinante di ogni sottomatrice quadrata ricade nel set $\{-1, 0, 1\}$»

Chiaramente, se una matrice M è totalmente unimodulare allora lo è anche ogni sua sottomatrice. In particolare, lo è anche ogni suo minore (ricordiamo che il minore M_{ij} di M è ottenuto da M rimuovendone la riga i e la colonna j). Inoltre, ogni entry di M è nel set $\{-1, 0, 1\}$.

Il teorema dello sviluppo di Laplace (Laplace expansion) afferma che il determinante di una matrice quadrata M di ordine n è pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga qualsiasi (o una colonna qualsiasi) per i rispettivi complementi algebrici. In formula

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{ij})$$

Pertanto, una matrice ogni cui entry è nel set $\{-1, 0, 1\}$ è totalmente modulare se rimuovendone una colonna o riga con al più una sola entry non nulla si ottiene una matrice totalmente modulare. Quindi la tolare unimodularità di A implica la tolare unimodularità di $(A \mid I)$.

Se A è totalmente unimodulare allora, per la regola di Kramer che esprime a forma chiusa le soluzioni di un sistema lineare (problema di Gauss), ne consegue che tutti i vertici del poliedro $\min\{x \in \mathbb{R} \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ hanno tutte le coordinate intere (si usa dire che il poliedro stesso è intero), ovvero che tutte le soluzioni di base di $\min\{c'x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ sono intere qualsiasi sia la direzione presa dal vettore c gradiente della funzione obiettivo. (Stiamo ovviamente assumendo che anche il vettore b sia intero, come per altro in questo caso.)

Richiesta 3 (2 pt) (goal: foresee the form of optimal basic solutions)**.**

Come detto sopra, se x è una qualsiasi soluzione di base, allora x è un vettore/punto intero (cioè dove è intera ogni sua coordinata) a prescindere dal valore $K \in \mathbb{R}$. Ma, vista la forma del problema P, e assumendo $K \geq 0$, la funzione obiettivo tende a spingere ciascuna variabile verso valori piccoli. Nessuna variabile può scendere sotto lo zero per via dei vincoli di non-negatività tutti presenti. Pertanto, visto che ogni altro vincolo ha la forma:

«somma di variabili maggiore o eguale ad uno»

nessuna variabile ha ragione per avere valore strettamente maggiore di 1 (e se lo fa, allora quella soluzione non è vertice in quanto esprimibile come combinazione convessa di due soluzioni)

Combinando quando sappiamo (ogni variabile intera, ogni variabile nell'intervallo $[0, 1]$) ne deduciamo che ogni variabile assume valore in $\{0, 1\}$. Possiamo pertanto tentare de dare un'espressione combinatorica al problema P, cosa che faremo nella richiesta seguente.

Richiesta 4 (2 pt) (goal: combinatorial problem view))**.**

Richiesta 2 (5 pt) (goal: recognize structure)**.**
La non-negatività di $\overline{\boldsymbol{x}}$ è evidente, quindi i seguenti 5 controlli verificano l'ammissibilità di $\overline{\boldsymbol{x}}$ per P:

$$\begin{array}{cccccccr}
x_A & & & +x_1 & & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{A,1} \geq 0 \\
x_A & & & & +x_2 & & = 2 > 1 & \text{strict} \Longrightarrow y_{A,2} = 0 \\
x_A & & & & & +x_3 & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{A,3} \geq 0 \\
& x_B & & & +x_2 & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{B,2} \geq 0 \\
& & x_C & & +x_2 & & = 1 \geq 1 & \text{with equality} \Longrightarrow y_{C,2} \geq 0
\end{array}$$

Come richiesto, ad ogni controllo abbiamo preso atto se il vincolo era soddisfatto ad uguaglianza oppure la diseguaglianza era stretta.

Abbiamo anche anticipato su una richiesta successiva di andare a raccogliere le condizione agli scarti complementari. Più precisamente, abbiamo anticipato l'uso delle regole del tipo:

«se una diseguaglianza è soddisfatta in senso stretto allora la variabile duale che ne è moltiplicatore deve essere nulla.»

tali regole stanno a dire che una parete su cui non appoggio non può esercitare su di mè alcuna reazione vincolare

Richiesta 3 (2 pt) (goal: foresee the form of optimal basic solutions)**.**

Il problema duale D avrà una variabile di decisione per ogni vincolo di P tranne quelli di non-negatività. Come nomi per queste variabili ci pare ragionevole scegliere $y_{A,1}, y_{A,2}, y_{A,3}, y_{B,2}, y_{C,2}$ in quanto D ha in pratica una variabile per ogni entry non nulla della matrice M.

Utilizzando la regola per la derivazione del duale otteniamo il seguente problema D in forma standard di massimizzazione:

$$
\begin{aligned}
\max\ & y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} + y_{B,2} + y_{C,2} \\
& y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} \leq 1 \\
& y_{B,2} \leq 1 \\
& y_{C,2} \leq 1 \\
& y_{A,1} \leq 1 \\
& y_{A,2} + y_{B,2} + y_{C,2} \leq K \\
& y_{A,3} \leq 1 \\
& y_{A,1} \geq 0,\ y_{A,2} \geq 0,\ y_{A,3} \geq 0,\ y_{B,2} \geq 0,\ y_{C,2} \geq 0
\end{aligned}
$$

Richiesta 4 (2 pt) (goal: combinatorial problem view))**.**

Abbiamo già discusso e rilevato la prima famiglia di condizioni agli scarti complementari, concludendo che $y_{A,2} = 0$. La seconda ed ultima famiglia è giustificata quanto la prima se si considera che P è il duale di D (un primo fatto della teoria della PL è che se D è il duale di P allora P è il duale di D). Pertanto:

«se una variabile di P assume valore strettamente positivo allora il corrispondente vincolo in D deve essere soddisfatto ad uguaglianza.»

Ogni soluzione duale $\overline{\boldsymbol{y}}$ che soddisfi gli scarti complementari con $\overline{\boldsymbol{x}}$ dovra pertanto avere $\overline{y}_{A,2} = 0$ e soddisfare le seguenti condizioni:

$$
\begin{aligned}
y_{A,1} + y_{A,2} + y_{A,3} &= 1 \quad \text{poichè } \overline{x}_A > 0 \\
y_{A,2} + y_{B,2} + y_{C,2} &= K \quad \text{poichè } \overline{x}_2 > 0
\end{aligned}
$$

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. Per gli appelli estivi in aula delta, non abbiamo controllo dell'aria condizionata e l'ambiente potrà risultarvi troppo freddo. Data la durata dell'appello consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. Potete portarvi materiali cartacei ma non è consentita alcuna strumentazione elettronica. Dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco «una prova di cromatografia su carta». Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto la più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo: cercate e concretizzate quelli che più vi convengono, non impegolatevi a dimostrare quello che non sapete o dove incontrate incertezze. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati (in questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso). Tutto il resto (incluse le castronerie colossali ma anche le doppie risposte discordanti) non verrà conteggiato.

Ricordate che in buona sostanza il voto corrisponderà al punteggio positivamente raccolto. I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non ci interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare.

L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti che trovi al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, sfruttalo al meglio senza sprecarlo. Una prima utilità è quella di testare la tua preparazione all'esame. Dopo aver letto il testo, consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente. Ma, in sufficiente numero di esemplari, poi anche materialmente, prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti. Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura del documento di correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E se invece ti sembra di saper risolvere del tutto l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: controlla che quanto hai in mente come soluzione corrisponda a quanto considerato e proposto come svolgimento opportuno. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente ordine'", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo saper rispondere in chiarezza alla consegna"" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l"esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il mancato conseguimento dei punti ad esse associati. Aggiungo che per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (perchè non collaborare a raccogliere una ricca collezione di link a tali sorgenti?).