Nome: .... Cognome: ....

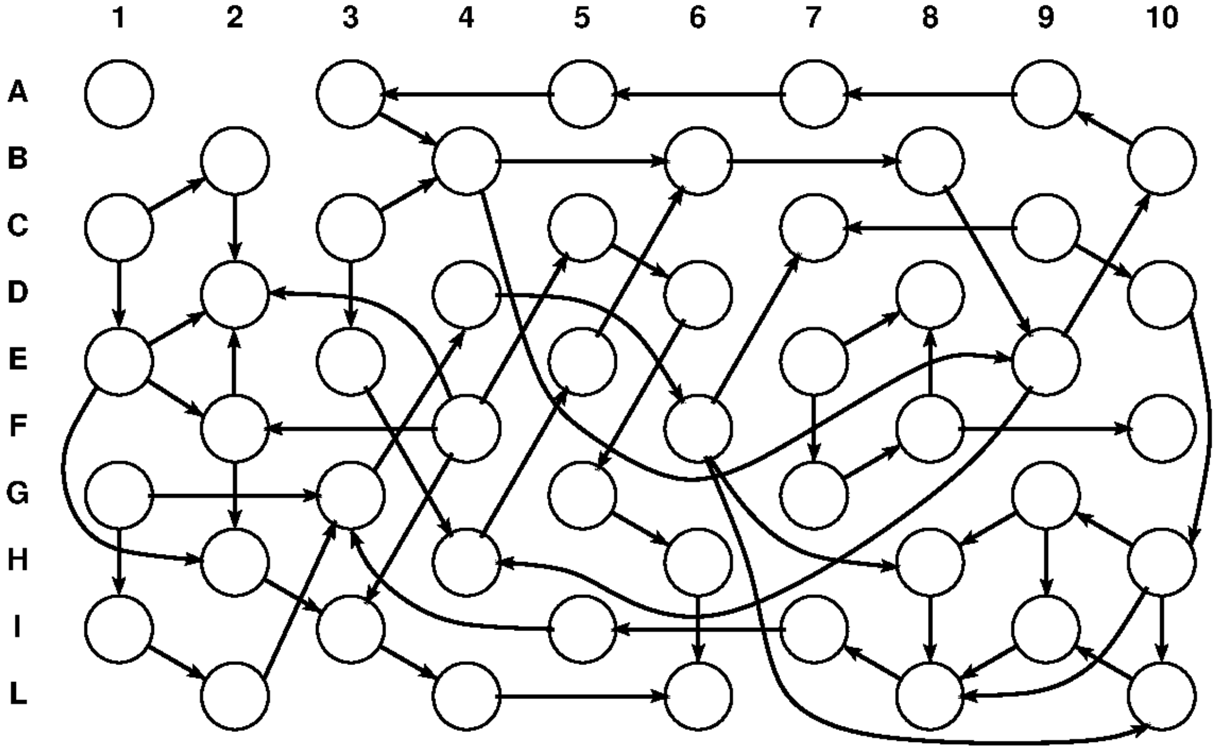
Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 24 luglio 2025

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 102 punti in palio   voto $\geq \frac{5}{6}$(punti $-$ 5), 45$\longrightarrow$ 30 *e lode*)

Esercizio 1 (con 7 richieste: 1+1+3+1+1+1+5 = 13 punti [grafi visual]):



Tranne che per l'ultima richiesta, si ignorino le direzioni degli archi in figura. Eventuali nozioni mancanti possono essere pubblicamente richieste al docente.

Richieste dell'Esercizio 1

1 .1 (1 pt, componenti_connesse) Colora i nodi in modo da evidenziare le diverse componenti connesse

1 .2 (1 pt, distingui nodi e archi speciali)

nodi isolati	**foglie**	**cutnodes**	**bridges**

1 .3 (3 pt, make bipartite) rendi il grafo bipartito rimuovendo il minor numero di archi (1pt se suggerisci quali archi rimuovere ed evidenzi la bipartizione del grafo risultante, 1pt se esibisci una famiglia di cicli dispari che richiedano la rimozione di quel numero di archi per essere tutti eliminati, 1pt per il numero di soluzioni ottime). Addobba sempre la figura sopra per l'esibizione dei certificati

1 .4 (1 pt, planarità) Dire se l'intero grafo è planare oppure no, argomentandolo via certificati

1 .5 (1 pt, Hamilton) Per ogni componente di più nodi, fornire un ciclo Hamiltoniano se presente, altrimenti un cammino Hamiltoniano se presente, altrimenti spiega perchè nisba

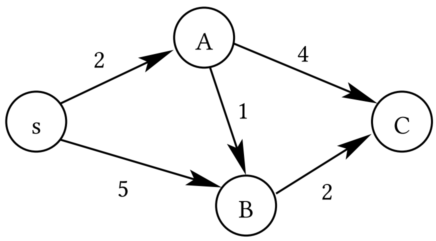
1 .6 (1 pt, Eulero) Per ogni componente di più nodi, fornire un ciclo Euleriano se presente, altrimenti un cammino Euleriano se presente, altrimenti spiega perchè nisba

1 .7 (5 pt, strong-connectivity) Si riguardino ora gli archi come diretti, ciascuno orientato come in figura. Per ciascuna componente tranne il nodo isolato si fornisca un ordinamento topologico oppure un ciclo diretto in essa contenuto (1pt). Per ogni componente non-aciclica si evidenzino: le componenti fortemente connesse (1pt), il DAG delle componenti fortemente connesse (1pt) e il relativo ordine topologico (1pt) e si certifichi la forte connessione di ciascuna componente offrendone costruzione per aggiunta di orecchie partendo da un ciclo diretto (1pt)

Esercizio 2 (con 12 richieste: 1+1+6+1+1+4+5+3+8+3+4+8 = 45 punti [modellazione/riduzioni]):

Il seguente problema di PL trova un cammino di costo minimo dal nodo s al nodo C per il grafo in figura.

$$
\begin{array}{llr}
\max & x_C & \\
& x_A & \leq 2 \\
& x_B & \leq 5 \\
& -x_A + x_B & \leq 1 \\
& -x_A + x_C & \leq 4 \\
& + x_B + x_C & \leq 2 \\
& x_A, x_B, x_C \geq 0 &
\end{array}
$$



Richieste dell'Esercizio 2

2 .1 (1 pt, opt path) dare il cammino di costo minimo dal nodo s al nodo C

2 .2 (1 pt, see opt PL sol) fornire una soluzione ottima al problema di PL (per ora cerca di vederlo ispirandoti al grafo, ma avrai altrimenti modo di recuperare questo passaggio in richieste successive)

2 .3 (6 pt, complementary slackness) scrivi il problema duale (1pt). Imposta le condizioni degli scarti complementari relative alla soluzione primale ottima (1pt). Ottieni soluzione duale complementare (1pt). Dire se ammissibile e perchè, dire se ottima e perchè (1pt). Da quale di queste due proprietà e in virtù di quale teorema (nominalo ed enuncialo quantomeno per quanto ti serve) trovi conferma dell'ottimalità della soluzione primale da tè proposta (1pt)? Per quale ragione in questo caso la soluzione duale complementare è unica? Modificare il peso degli archi in modo che, senza che cambi la soluzione primale ottima, la soluzione duale non sia più unica (1pt)

2 .4 (1 pt, canonic) metti il problema di PL in forma canonica

2 .5 (1 pt, foresee pivots) se per ottenere la soluzione ottima al problema di PL tu avessi utilizzato il metodo del simplesso, quanti e quali avrebbero potuto essere i pivot (specificare variabile entrante e variabile uscente per ciascun pivot della sequenza)

2 .6 (4 pt, simplex) scrivi il primo tableau (1pt) ed esegui tali pivots per giungere al tableau che esprime la soluzione ottima (1pt). Esegui in esplicito almeno una prova del 9 (1pt). Interpreta la soluzione primale ottima con le tue parole (1pt)

2 .7 (5 pt, sensitivity) quanto sarebbe disposto a pagare (nella stessa unità di misura in cui è espressa la funzione obiettivo) il problema di PL assegnato (di massimizzazione) per allungare un arco? E tu che cerchi la strada più breve per giungere in C, quanto saresti disposto a pagare per accorciarlo? (1pt se specifichi questi due numeri per ciascun arco). Fornire esempio di un grafo dove i due numeri coincidano/differiscano su ogni arco (1+1pt). Specificare il range di validità del prezzo ombra di ciascun arco del grafo in figura (1pt). Ogni risposta a questa richiesta può essere fornita per sola ispezione del grafo piuttosto che via lettura del tableau all'ottimo e routines della PL (a scelta o come utile verifica per tè). Ma riporta ora esplicitamente i conteggi basati sulla prova del nove che ti consentono di determinare i range di validità (1pt)

2 .8 (3 pt, dual opt) scrivi il tableau per il problema duale all'ottimo (1pt) leggi da questo o da quel tableau la soluzione ottima duale estesa (1pt) offrine interpretazione combinatorica con le tue parole (1pt)

2 .9 (8 pt, general model) dato in input un generico grafo diretto $D = (V, A)$ con costi positivi sugli archi $c : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e due nodi speciali $s, t \in V$, offri il template per il problema di PL che generalizzi quello sopra (analogo ad esso) per calcolare la distanza del nodo t dal nodo s (1pt). Quali istruzioni daresti per costruire un cammino di costo minimo da s a t una volta ottenuta una soluzione ottima per tale problema di PL? (2pt). Scrivi il problema duale del tuo modello generale per il computo di un s,t-path di costo minimo (1pt). Per il grafo di esempio, la formulazione LP è bounded e presenta un'unica soluzione ottima. Caratterizzare per quali grafi essa non sarebbe bounded (1pt). Caratterizzare quando, benchè bounded, offrirebbe più soluzioni ottime (1pt). Caratterizzare quando la soluzione duale ottima esiste ed è unica (1pt)

2 .10 (3 pt, new model) come rivedresti la funzione obiettivo se, dato in input un generico grafo diretto $D = (V, A)$ con costi positivi sugli archi $c : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e il solo nodo speciale $s \in V$, il tuo obiettivo fosse quello di computare un intero albero dei cammini minimi dal nodo s? (1pt). E quali istruzioni daresti per costruire un albero dei cammini minimi una volta ottenuta una soluzione ottima per questa nuova funzione obiettivo? (2pt)

2 .11 (4 pt, negative-arcs) Nel caso di pesi tutti non-negativi, formula (1pt) e dimostra (1pt) un lemma relativo ai prefissi di cammini minimi da cui disegua l'esistenza di un albero dei cammini minimi. Dare un grafo (con pesi negativi) dove non esista un albero dei cammini minimi (1pt se per grafi diretti, 1pt per grafi non-diretti)

2 .12 (8 pt, NPC-proof) Percorso per dimostrare l'NP-hardness di SHORTEST S,T-PATH, ovvero del computo di un cammino semplice (senza ripetizione di nodi) di peso minimo da s a t dati in input un grafo diretto con pesi anche negativi degli archi e i due nodi s e t. Per grafi diretti, ridurre HAMILTONIAN CYCLE a HAMILTONIAN S,T-PATH (1pt). Riduci poi HAMILTONIAN S,T-PATH a SHORTEST S,T-PATH (1pt) e formula (1pt) un easy ed un hard lemma, e dimostrali (1+2pt). Dimostrare l'NP-hardness di SHORTEST S,T-PATH anche per grafi non diretti (2pt)

Esercizio 3 (con 12 richieste: 1+1+1+1+1+1+1+1+2+1+1+2 = 14 punti [programmazione dinamica]):

La seguente tabella offre, nella sua terza riga, una sequenza S di numeri naturali (la prima riga, a caratteri in neretto, serve solo ad indicizzarla).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
36	15	24	55	65	22	33	44	50	21	41	64	26	47	35	60	62	25	27	19	42	61	29	52	62	45	28

Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (1 pt, DP: last_in_pos) Alla tabella si aggiunga una riga che in ogni posizione i, con $1 \leq i \leq n$, riporti la massima lunghezza di una sottosequenza strettamente decrescente di S che di S prenda l'elemento in posizione i come suo ultimo elemento.

3 .2 (1 pt, DP: first_in_pos) Si aggiunga una riga che in ogni posizione i, con $1 \leq i \leq n$, riporti la massima lunghezza di una sottosequenza strettamente decrescente di S che di S prenda l'elemento in posizione i come suo primo elemento.

3 .3 (1 pt, opt_sol: libera) Trovare una sottosequenza strettamente decrescente di S di massima lunghezza. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3 .4 (1 pt, certify opt) Fornire un minimo numero di sottosequenze mai decrescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

3 .5 (1 pt, opt_sol: last) Trovare una sottosequenza strettamente decrescente di S di massima lunghezza tra quelle che terminano con l'elemento in posizione 19. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3 .6 (1 pt, opt_sol: left) Trovare una sottosequenza strettamente decrescente di S di massima lunghezza tra quelle che di S non prendono alcun elemento di indice inferiore a 8. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3 .7 (1 pt, opt_sol: prende) Trovare una sottosequenza strettamente decrescente di S di massima lunghezza tra quelle che di S prendono l'elemento in posizione 13. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3 .8 (1 pt, Z-sequenza) Una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza strettamente decrescente con al più un ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l'i-esimo, è strettamente minore dell'elemento che lo precede. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

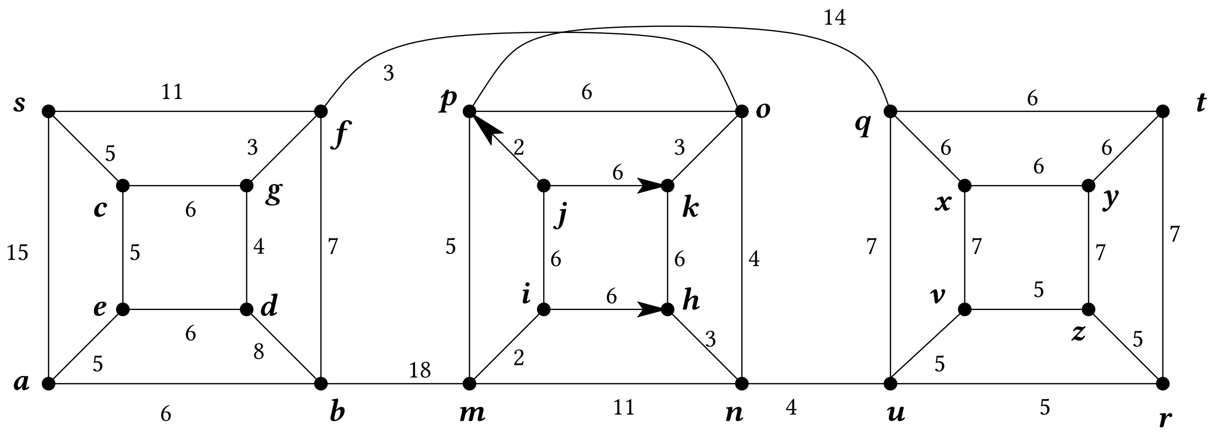
3 .9 (2 pt, quante opt sol: libere) Le sottosequenze di S sono 2^n, in corrispondenza biunivoca coi sottoinsiemi degli indici degli elementi di S che includono. Stabilire quante siano le sottosequenze strettamente decrescenti di S di massima lunghezza.

3 .10 (1 pt, opt_sol: last) Quante sono le sottosequenze strettamente decrescenti di S di massima lunghezza tra quelle che prendono l'elemento in posizione 19 come loro ultimo elemento?

3 .11 (1 pt, opt_sol: first) Quante sono le sottosequenze strettamente decrescenti di S di massima lunghezza tra quelle che prendono l'elemento in posizione 8 come loro primo elemento?

3 .12 (2 pt, quante opt sol: con) Quante sono le sottosequenze strettamente decrescenti di S di massima lunghezza tra quelle che di S includono l'elemento in posizione 13?

Esercizio 4 (con 10 richieste: 4+2+3+4+3+2+2+3+5+2 = 30 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (4 pt, recognize planarity) Certificare la non planarità di G (1pt). Elencare quegli archi la cui rimozione renda il grafo planare (1pt) portando evidenze certificanti a sostegno della correttezza della classificazione (2pt).

4 .2 (2 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartito il grafo G (1pt per il certificato di bicolorazione, 1pt per quello di ottimalità).

4 .3 (3 pt, shortest paths) Rispettando i sensi unici, si riporti la distanza di ciascun nodo dal nodo s (1pt). Dare un albero dei cammini minimi (1pt) e si descriva lo spazio di tali alberi precisando quanti sono (1pt).

4 .4 (4 pt, max-flow/min-cut) In G, trovare un massimo s,t-flusso (2pt) e un minimo s,t-taglio (2pt).

4 .5 (3 pt, flow sensitivity) Indica per quali archi un incremento di capacità aumenterebbe il massimo valore di flusso (1pt). Specifica il prezzo ombra per ciascuno di questi archi (1pt) e l'incremento ottenuto rimuovendo il vincolo di capacità per detto arco (1pt).

4 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Per uno qualsiasi di questi archi prova che l'incremento è almeno quello (1pt) e non può essere maggiore (1pt).

4 .7 (2 pt, max match) Nel grafo $G_{f,q}$ ottenuto da G rimuovendo i nodi f ed q fornire un max matching (1pt) e un minimo node cover (1pt).

4 .8 (3 pt, MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo (1pt) ed etichetta/colora gli archi distinguendo quelli che appertengono a tutti/nessuno/solo alcuni gli MST (2pt).

4 .9 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti nel nodo p certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.

4 .10 (2 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G?

Quadro delle risposte dell'Esercizio 4

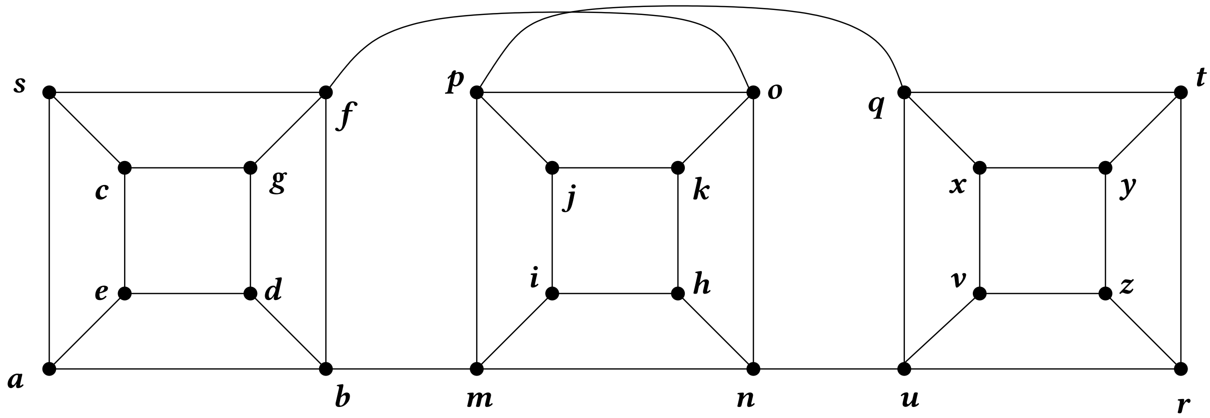


Figura 1: $G \setminus e$ **is non planare per** $e =$ **............**

,

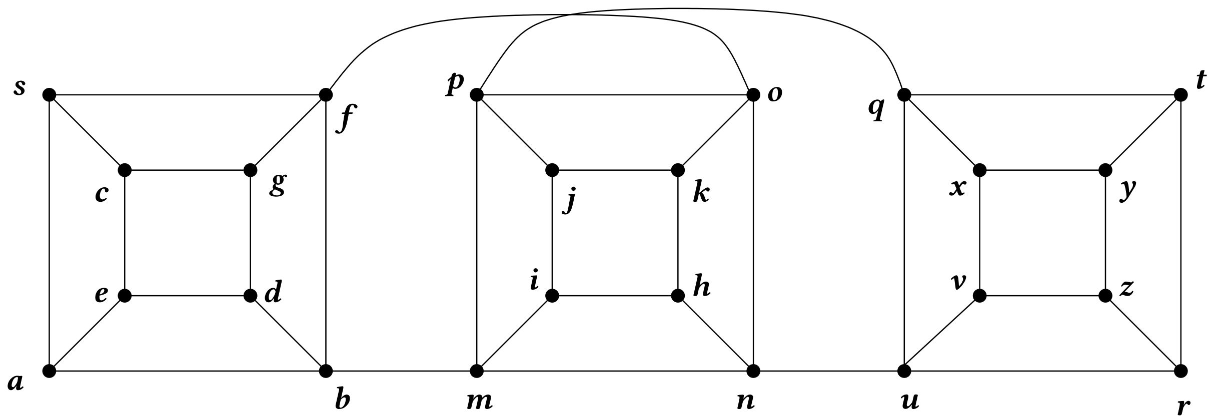


Figura 2: $G \setminus e$ **is non planare per** $e =$ **............**

,

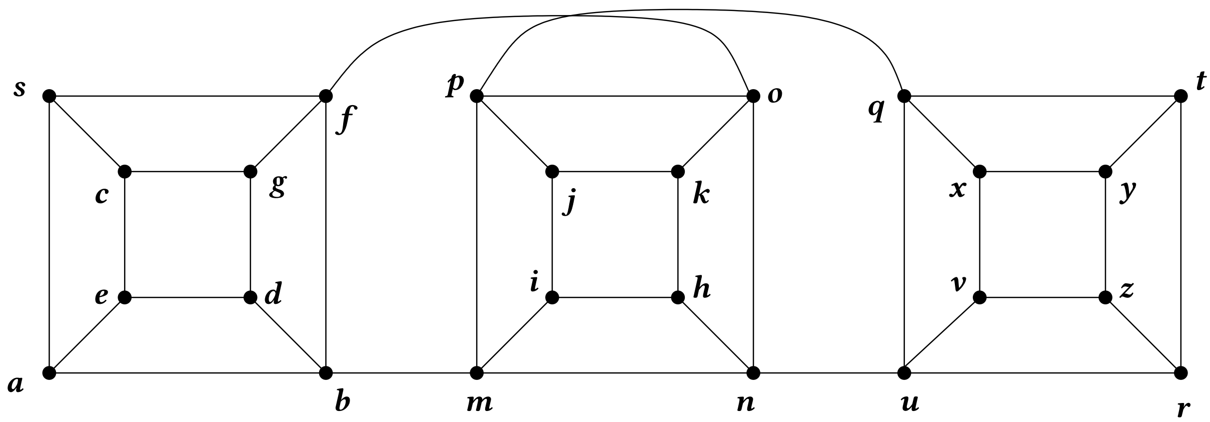


Figura 3: $G \setminus e$ **is non planare per** $e =$ **............**

,

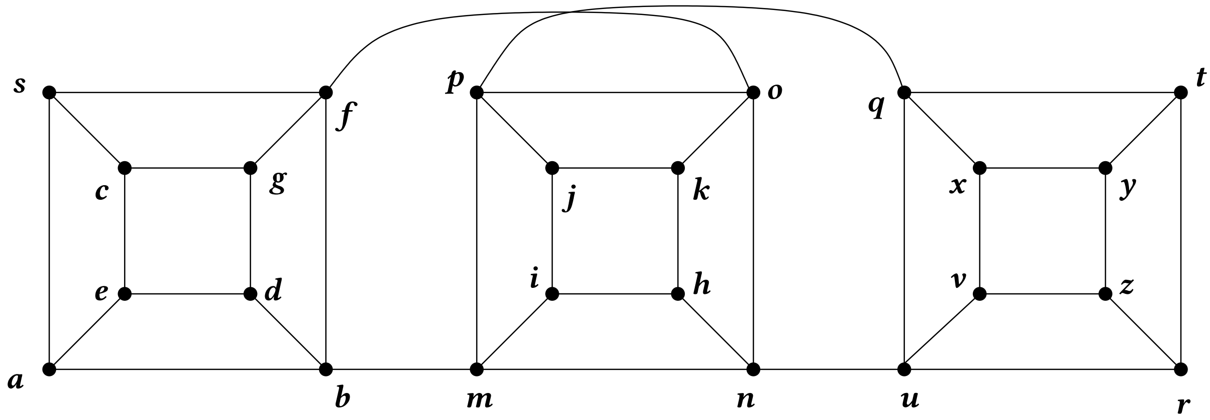


Figura 4: $G \setminus e$ **is non planare per** $e =$ **............**

,

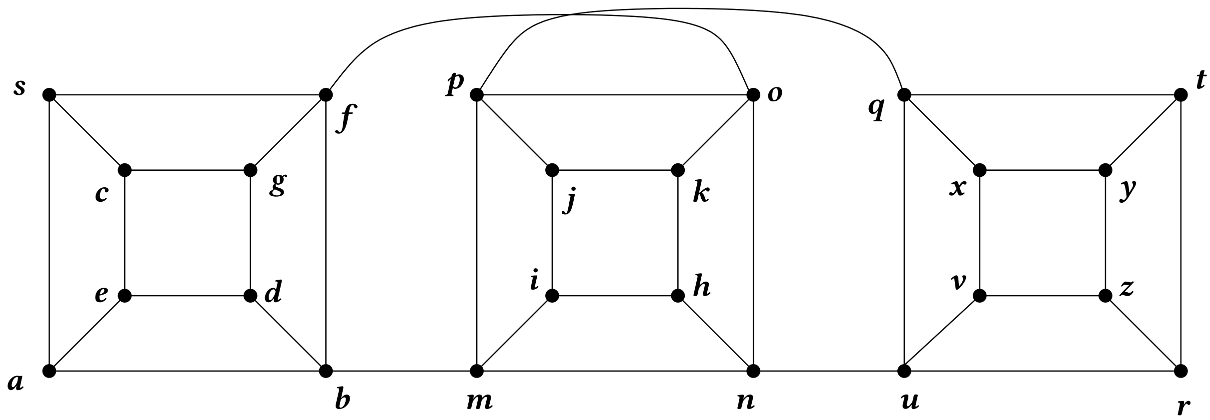


Figura 5: **make** G **bipartite.**

,

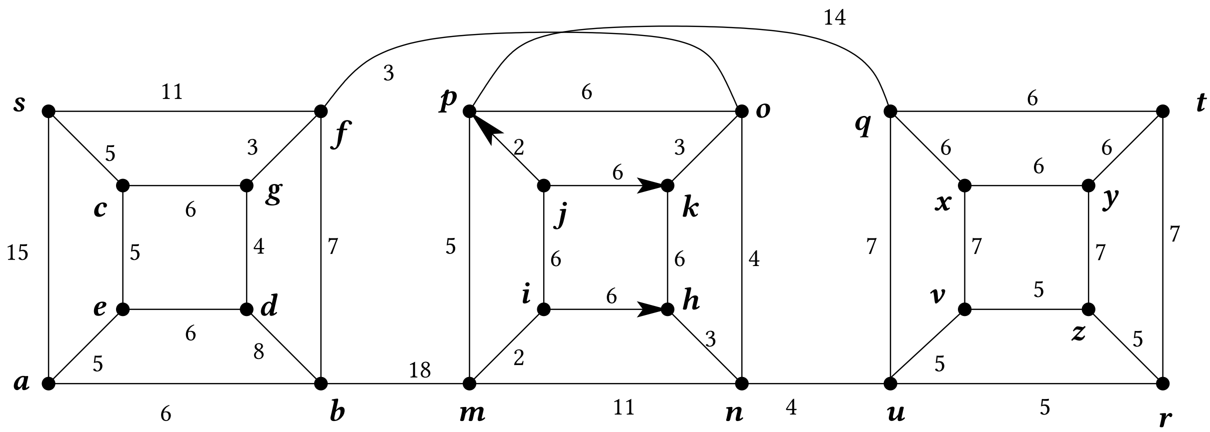


Figura 6: **shortest paths tree.**

,

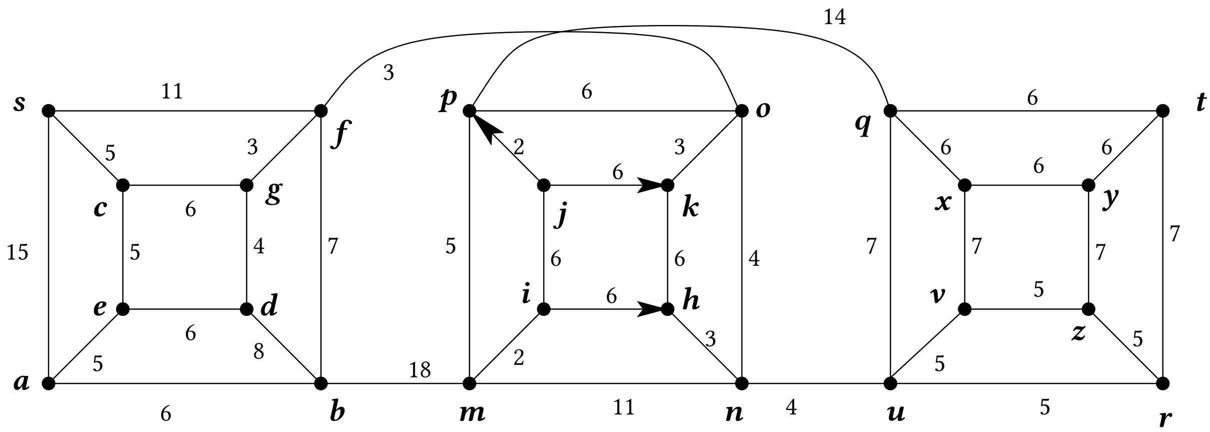


Figura 7: **max-flow e min-cut.**

,

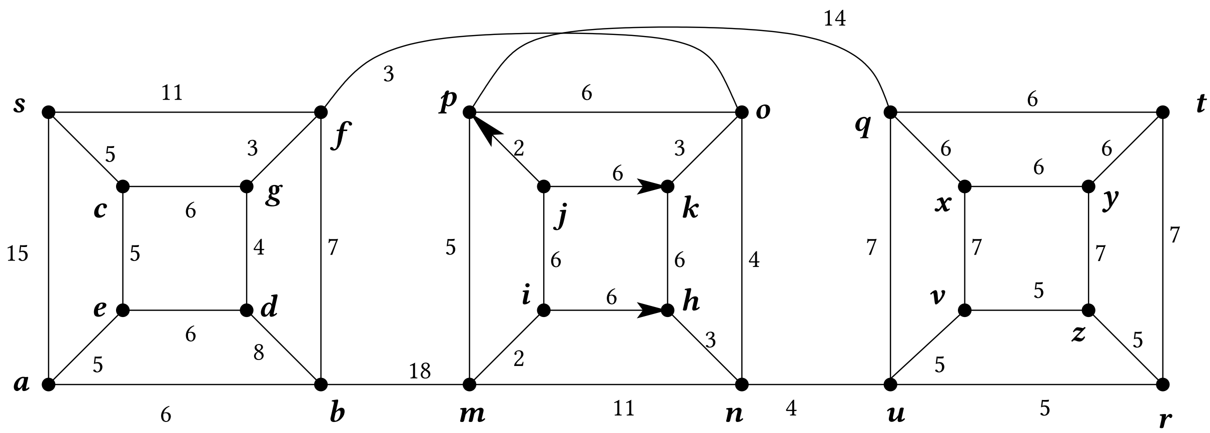


Figura 8: **certificati di corretta valutazione della sensitività per l'arco scelto.**

,

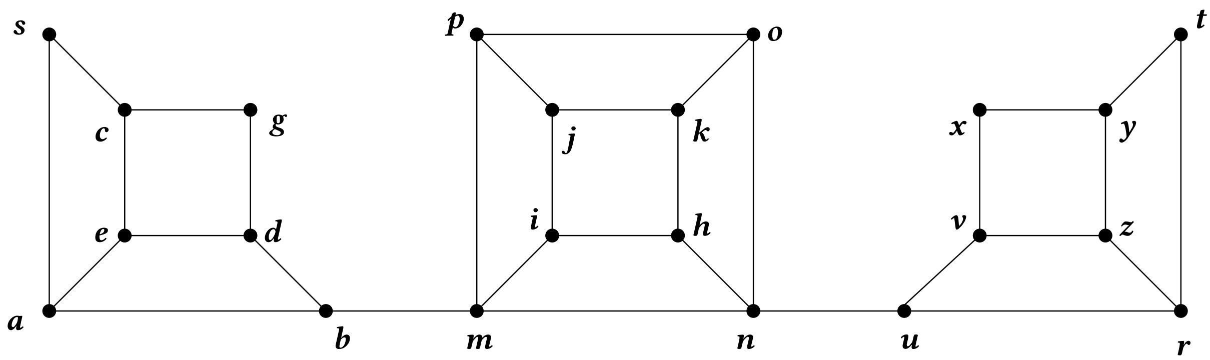


Figura 9: **max matching e min node cover.**

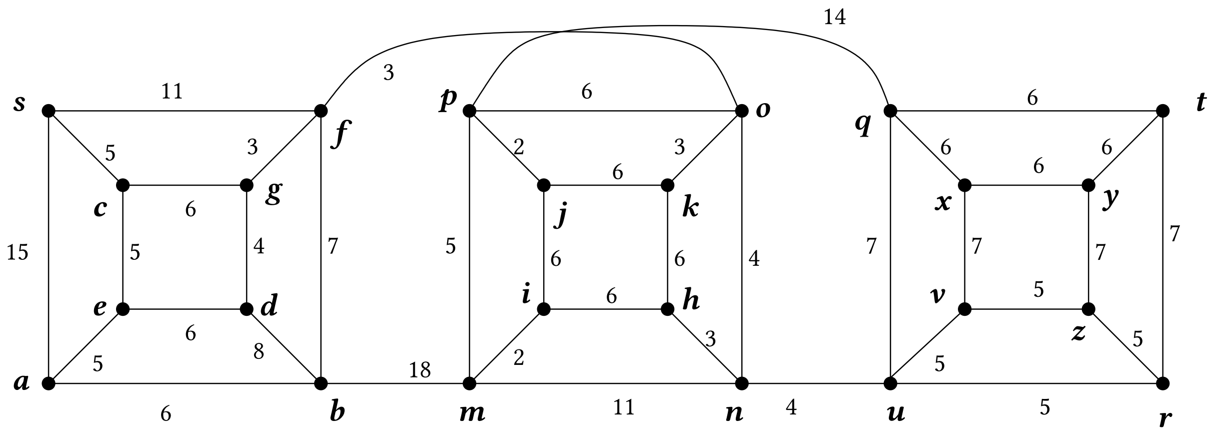


Figura 10: **MST.**

,

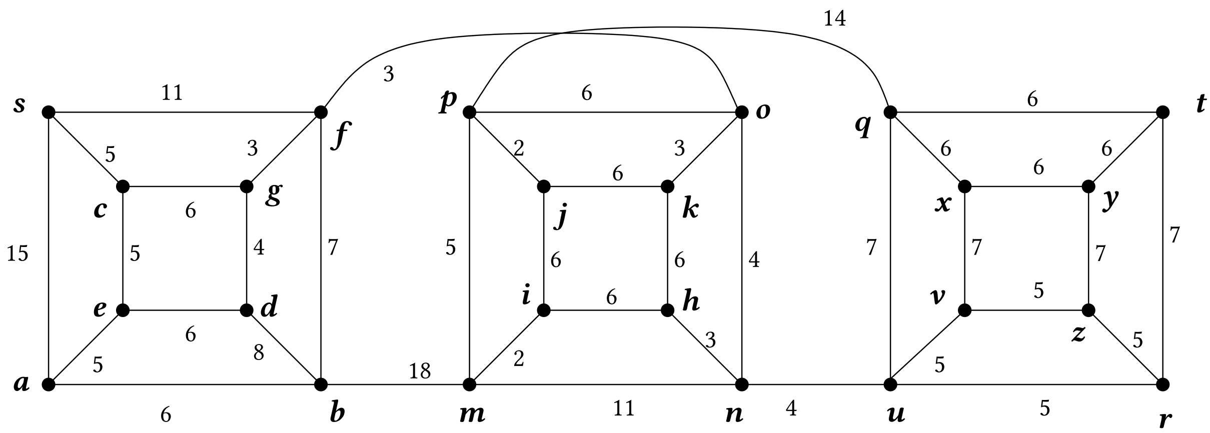


Figura 11: **arco *po*.**

,

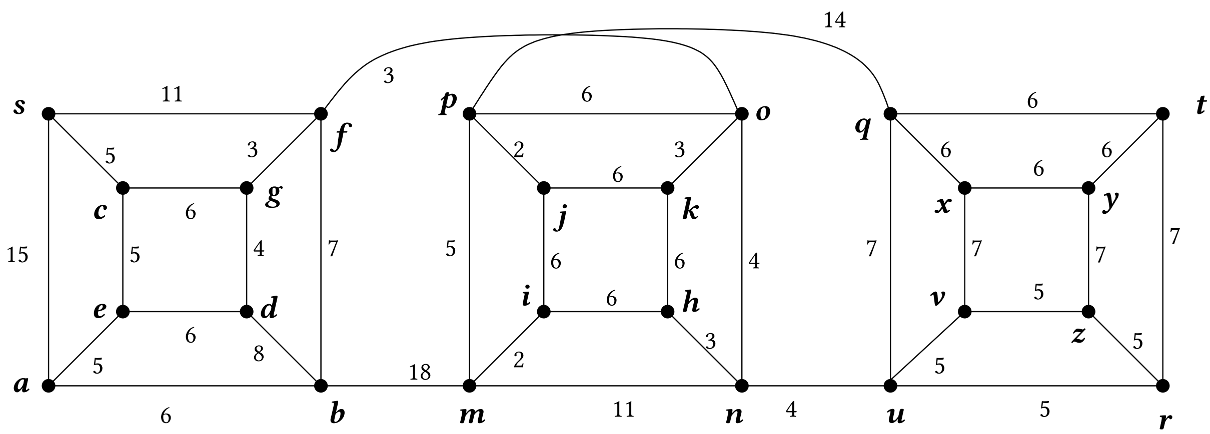


Figura 12: **arco *pq*.**

,

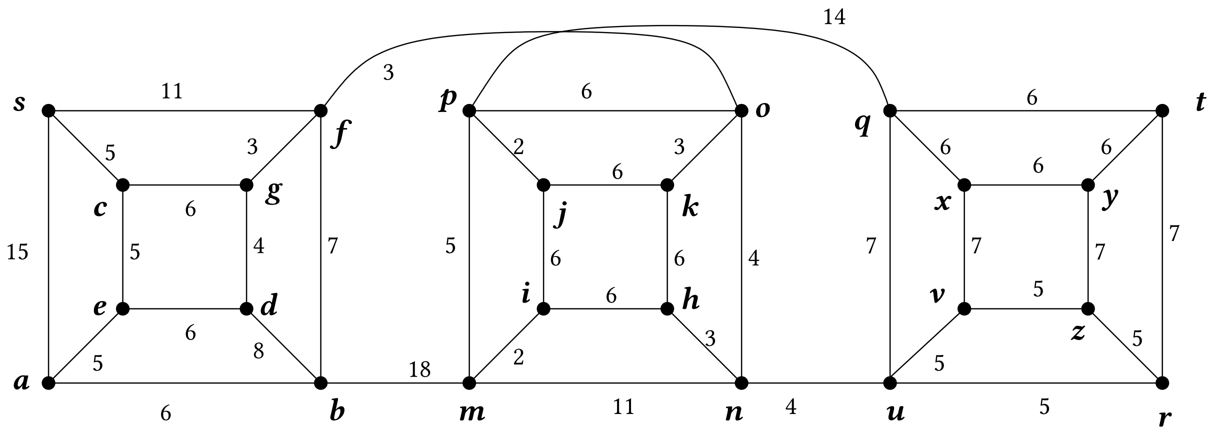


Figura 13: **arco** pj.

,

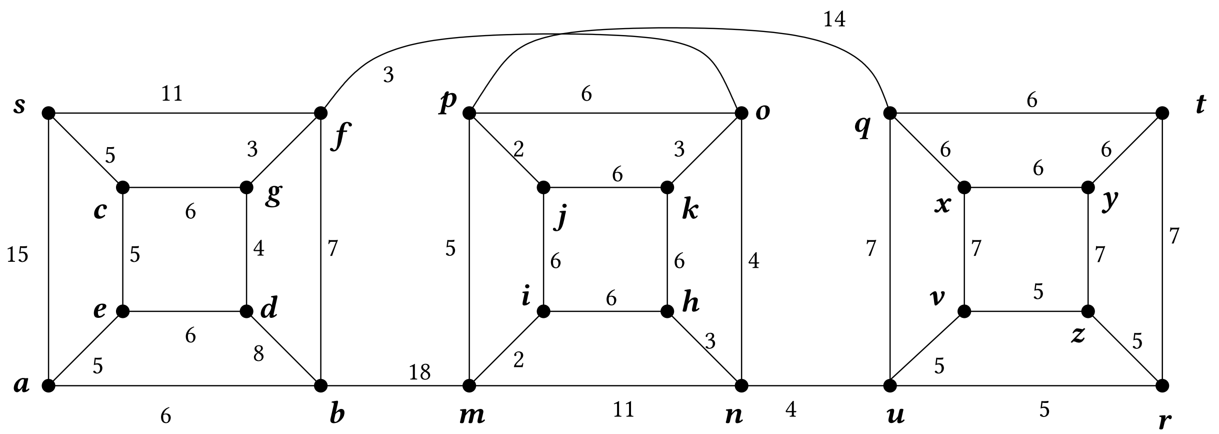


Figura 14: **arco** pm.

,

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-collaborare al controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccoglierli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -**assegnazione punti**

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.
2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -**completamento esame**

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito và richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.