

Scarti complementari

Fabio Cassini, Romeo Rizzi

11 maggio 2023

A volte risulta utile o necessario recuperare una soluzione duale ottima quando si ha a disposizione soltanto una soluzione primale ottima: in queste circostanze possiamo avvalerci della teoria degli *scarti complementari*.

Supponiamo di avere a disposizione un problema di programmazione lineare in forma standard:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

e consideriamo il suo duale associato:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \\ y_i \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Introduciamo anche le variabili di slack (una per ogni vincolo) sia per il primale che per il duale, ovvero:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$y_{m+j} = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j, \quad y_{m+j} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

Osserviamo innanzitutto che vale il seguente risultato:

Lemma 0.1. Siano (x_1, \dots, x_n) una soluzione primale, (y_1, \dots, y_m) una soluzione duale e si considerino le variabili di slack come definite in (1) e (2). Allora vale

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i - \left(\sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i + \sum_{j=1}^n y_{m+j} x_j \right)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n c_j x_j &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - y_{m+j} \right) x_j \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j - \sum_{j=1}^n y_{m+j} x_j \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i - \sum_{j=1}^n y_{m+j} x_j \\
&= \sum_{i=1}^m b_i y_i - \left(\sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i + \sum_{j=1}^n y_{m+j} x_j \right)
\end{aligned}$$

□

Il problema duale viene introdotto proprio per produrre degli upper-bound sul valore della funzione obiettivo validi su tutte le soluzioni ammissibili del problema primale. In questo senso, il contenuto del seguente teorema non dovrebbe sorprendere, tuttavia esso viene tipicamente enunciato e dimostrato algebricamente in considerazione della sua importanza. Invece che ometterne la classica dimostrazione, evidenziamo come esso dipenda dal Lemma 0.1.

Teorema 0.1 (Teorema della dualità debole). *Se (x_1, \dots, x_n) è una soluzione ammissibile per il primale e (y_1, \dots, y_m) è una soluzione ammissibile per il duale, allora vale*

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Dimostrazione. Dai vincoli di non negatività delle variabili in gioco discende direttamente che

$$\sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i + \sum_{j=1}^n y_{m+j} x_j \geq 0$$

da cui, grazie al Lemma 0.1, l'enunciato. □

Ancor più che dal Teorema 0.1, un ruolo speciale è spesso giocato da una sua immediata conseguenza:

Corollario 0.1. Siano $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ una soluzione primale ammissibile e $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)$ una soluzione duale ammissibile tali per cui

$$\sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i.$$

Allora entrambe le soluzioni sono ottime per i rispettivi problemi.

Dimostrazione. Per quanto riguarda il problema primale, sia (x_1, \dots, x_n) una qualsiasi altra soluzione ammissibile. Per il Teorema 0.1 si ha che

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i \hat{y}_i = \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j.$$

Data l'arbitrarietà di (x_1, \dots, x_n) e l'ipotesi di ammissibilità di $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, quest'ultima risulta essere la soluzione ottima. In maniera analoga si procede per il problema duale. □

Il risultato principale della *teoria della dualità* è tuttavia il seguente.

Teorema 0.2 (Teorema della dualità forte). *Se il problema primale ha soluzione ottima \hat{x} allora anche il problema duale ha soluzione ottima \hat{y} e vale*

$$c^T \hat{x} = b^T \hat{y}$$

Avendo introdotto le variabili di slack, risulta agevole presentare un concetto più ampio di soluzione del problema primale/duale: la soluzione estesa.

Definizione 0.1 (Soluzione estesa). Siano (x_1, \dots, x_n) una soluzione primale, (y_1, \dots, y_m) una soluzione duale e si considerino le rispettive variabili di slack come definite in (1) e (2). Allora si dice *soluzione primale estesa* il vettore di $n + m$ componenti $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ e *soluzione duale estesa* il vettore di $m + n$ componenti $\tilde{y} = (y_{m+1}, \dots, y_{m+n}, y_1, \dots, y_m)$.

Si noti come la definizione di soluzione estesa differisca nei casi primale e duale, dove nel secondo caso le n variabili di slack vanno anteposte alle m variabili duali originali, quelle in corrispondenza biunivoca con gli m vincoli nella forma standard del problema primale. Si adotta questa asimmetria perchè ha un valore adottare un ordinamento che rispetti la naturale corrispondenza biunivoca tra le variabili: per $i = 1, \dots, n$, all' i -esimo vincolo del problema primale sono associate la i -esima variabile di slack e la i -esima variabile duale (introdotta come moltiplicatore di detto vincolo); per $j = 1, \dots, m$, al j -esimo vincolo del problema duale sono associate la j -esima variabile di slack del duale e la j -esima variabile del primale (il primale può sempre essere visto come il duale del duale).

L'idea alla base del prossimo teorema è che sussista una sorta di ortogonalità tra le soluzioni primali e duali estese: prima di procedere è però necessario fare alcune considerazioni preliminari. La verifica algebrica dell'ortogonalità di due vettori viene effettuata, in generale, attraverso il calcolo del loro prodotto scalare, il quale deve essere nullo: in questo caso, però, è necessario preliminarmente riordinare le componenti dei vettori. In particolare l'ordine corretto, esibendo esplicitamente anche la corrispondenza biunivoca, è il seguente:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \tilde{x} \rightarrow & (& x_1 & , \dots , & x_j & , \dots , & x_n & , & x_{n+1} & , \dots , & x_{n+i} & , \dots , & x_{n+m} &) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & , & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \tilde{y} \rightarrow & (& y_{m+1} & , \dots , & y_{m+j} & , \dots , & y_{m+n} & , & y_1 & , \dots , & y_i & , \dots , & y_m &) \end{array}$$

in modo che, quando si effettua il prodotto scalare, si moltiplichino le n variabili primali con le rispettive n variabili di slack duali e le m variabili di slack primali con le rispettivi m variabili duali. Dunque, quando si utilizzerà in seguito il simbolo di ortogonalità \perp , si supporrà di aver prima riordinato correttamente i vettori in gioco.

A questo punto siamo pronti per enunciare e dimostrare il seguente fondamentale teorema.

Teorema 0.3 (Teorema degli scarti complementari). *Siano \tilde{x} e \tilde{y} rispettivamente una soluzione primale estesa ammissibile e una soluzione duale estesa ammissibile. Allora \tilde{x} ed \tilde{y} sono ottime per i rispettivi problemi se e solo se*

$$\begin{aligned} x_j y_{m+j} &= 0 \quad j = 1, \dots, n \\ x_{n+i} y_i &= 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

o in termini vettoriali

$$\tilde{x} \perp \tilde{y}$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema, mostriamo prima che vale " \Leftarrow " e poi che vale " \Rightarrow ".

- Se $\tilde{x} \perp \tilde{y}$ allora $\sum_{j=1}^n x_j y_{m+j} + \sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i = 0$ e pertanto dal Lemma 0.1 otteniamo $\sum_{i=1}^m b_i y_i = \sum_{j=1}^n c_j x_j$. Dunque, per il Corollario 0.1, \tilde{x} ed \tilde{y} sono ottime per i rispettivi problemi;
- Se \tilde{x} ed \tilde{y} sono ottime per i rispettivi problemi allora per il Teorema 0.2 i loro valori coincidono, ossia $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$. Dunque, per il Lemma 0.1, si ha che $\sum_{j=1}^n x_j y_{m+j} + \sum_{i=1}^m x_{n+i} y_i = 0$, ovvero $\tilde{x} \perp \tilde{y}$.

□

1 Scarti complementari e analisi di sensitività

Supponiamo ora di voler massimizzare una funzione obiettivo che rappresenti un profitto o qualche altra forma di beneficio. I vincoli descriveranno limitazioni in materie prime o disponibilità.

Grazie agli scarti complementari è possibile dimostrare anche il seguente

Lemma 1.1. Sia \mathcal{P} il problema primale e \hat{x} una sua soluzione ottima di base non degenera. Sia \hat{y} la soluzione ottima del suo problema duale. Sia $\mathcal{P}(t)$ il problema primale modificato per le availability, ovvero:

$$\begin{cases} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + t_i \\ & x_j \geq 0 \end{cases}$$

e sia x^* una sua soluzione ottima. Allora $\exists \epsilon > 0$ tale che

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j + \sum_{i=1}^m \hat{y}_i t_i \quad \forall t \in \mathbb{R}^m, \|t\| \leq \epsilon \quad (3)$$

Dimostrazione. Per mostrare che vale l'uguaglianza (3), vediamo che valgono le due disuguaglianze \leq e \geq .

Dimostriamo \leq : La disuguaglianza \leq disegua dal teorema della dualità debole, considerato che la soluzione \hat{y} del duale di $\mathcal{P}(0)$ resta ammissibile per il duale di $\mathcal{P}(t) \forall t$, ed il suo valore in termini di funzione obiettivo è dato proprio dal termine destro dell'Equazione (3) in quanto ottenuto componendo le nuove availabilities tramite i moltiplicatori \hat{y} . Volendo esplicitare in lungo questo argomento osserveremo che, per la generica soluzione ammissibile x di $\mathcal{P}(t)$, deve valere:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + t_i \quad \forall i$$

D'altra parte, moltiplicando ambo i membri per \hat{y}_i e sommando su i si ottiene:

$$\sum_{i=1}^m \hat{y}_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^m \hat{y}_i (b_i + t_i)$$

Sviluppando si ha:

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \hat{y}_i a_{ij} \right) x_j \leq \sum_{i=1}^m \hat{y}_i b_i + \sum_{i=1}^m \hat{y}_i t_i = \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j + \sum_{i=1}^m \hat{y}_i t_i$$

dove l'ultima uguaglianza si ha grazie al Teorema 0.2. Sappiamo però anche che

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \hat{y}_i a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

poichè ogni x_j è non negativo e $\sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{y}_i \geq c_j$ per ogni j . Per catena di disuguaglianze si ottiene

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j \hat{x}_j + \sum_{i=1}^m \hat{y}_i t_i$$

Dimostriamo \geq : si consideri \hat{x} ; essa, in particolare, avrà una determinata partizione di variabili in base/fuori base. Si consideri ora x^* , soluzione ottima di $\mathcal{P}(t)$: per $\|t\| \leq \epsilon$, x^* preserva la stessa partizione di variabili in base/fuori base di \hat{x} (solo la partizione, non il valore).

□

Si noti che il discorso sull'analisi di sensitività vale solo localmente: globalmente infatti c'è la soluzione duale che frena dal continuo acquisto delle risorse e si rischia di perdere l'ammissibilità.

Rimane soltanto il problema di come computare questo ϵ : per fare ciò, basta utilizzare la prova del nove della PL.