

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 30 luglio 2019**Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona**punti in palio: 56, con voto \geq punti + k , $k \geq 0$ **Problema 1 (7 punti):**

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I-10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	2
F	0	1	1	1	•	3	•	3	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	4	1	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

1.2(1pt) e se la partenza è in B-3?

1.3(1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

1.4(1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in I-10 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

1.5(1pt) Quale è il massimo valore in premi raccogliibili lungo una traversata da A-1 a I-10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

Problema 2 (7 punti):

$$\begin{cases} \max & 44x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ & x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ libera} \end{cases}$$

2.1(1pt) Portare in forma standard.

2.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

2.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.

2.4(1pt) Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi esplicitamente la prova del 9 della PL per verificare ogni altro dizionario e soluzione di base prodotta.

2.5(1pt) Ad ogni dizionario prodotto, impiegando la soluzione di base corrente, si conducano esplicitamente i conteggi della prova del 9 della PL sul primissimo dizionario del problema ausiliario (quello la cui soluzione di base associata non è ammissibile).

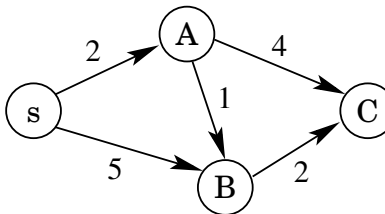
2.6(1pt) Partendo da un dizionario ottimo del problema ausiliario con x_0 tra le variabili di colonna (fuori base) si ottenga il dizionario del problema originario che presenta la stessa partizione tra in base e fuori base delle variabili (eccetto per la x_0 che nel problema originario manca). Vogliamo vedere rappresentata anche la funzione obiettivo.

2.7(1pt) Dire se il problema originario è ammissibile o meno, spiegando il perchè e fornendo il certificato.

Problema 3 (26 punti):

Il seguente problema di PL trova un cammino minimo dal nodo s al nodo C per il grafo in figura.

$$\begin{cases} \max & x_C \\ & x_A & & \leq 2 \\ & & x_B & \leq 5 \\ & -x_A & +x_B & \leq 1 \\ & -x_A & & +x_C & \leq 4 \\ & & -x_B & +x_C & \leq 2 \\ & x_A, x_B, x_C \geq 0 \end{cases}$$



(1pt) fornire una soluzione ottima al problema di PL.

(1pt) dare il cammino minimo dal nodo s al nodo C .

(1pt) se per ottenere la soluzione ottima al problema di PL tu avessi utilizzato il metodo del semplice, quanti e quali avrebbero potuto essere i pivot (specificare variabile entrante e variabile uscente per ogni pivot della sequenza).

(1pt) scrivere il problema duale.

(1pt) utilizzando la tua soluzione ottima per il problema primale, imposta il sistema basato sulle condizioni degli scarti complementari per la determinazione di una soluzione duale ottima.

(1+1+1pt) fornire una soluzione duale ottima. Per quale ragione in questo caso essa è unica? Fornire esempio di un grafo dove essa non è unica.

(1+1+1pt) quanto sarebbe disposto a pagare il problema di PL assegnato (di massimizzazione) per allungare un arco? E tu che cerchi la strada più breve per giungere in C , quanto saresti disposto a pagare per accorciarlo? (Specificare per ciascun arco). Perché in questo caso i due numeri coincidono sempre? Fornire esempio di un grafo dove i due numeri non coincidono.

(2pt) fino a dove il problema di PL sarebbe disposto a pagare tali prezzi?

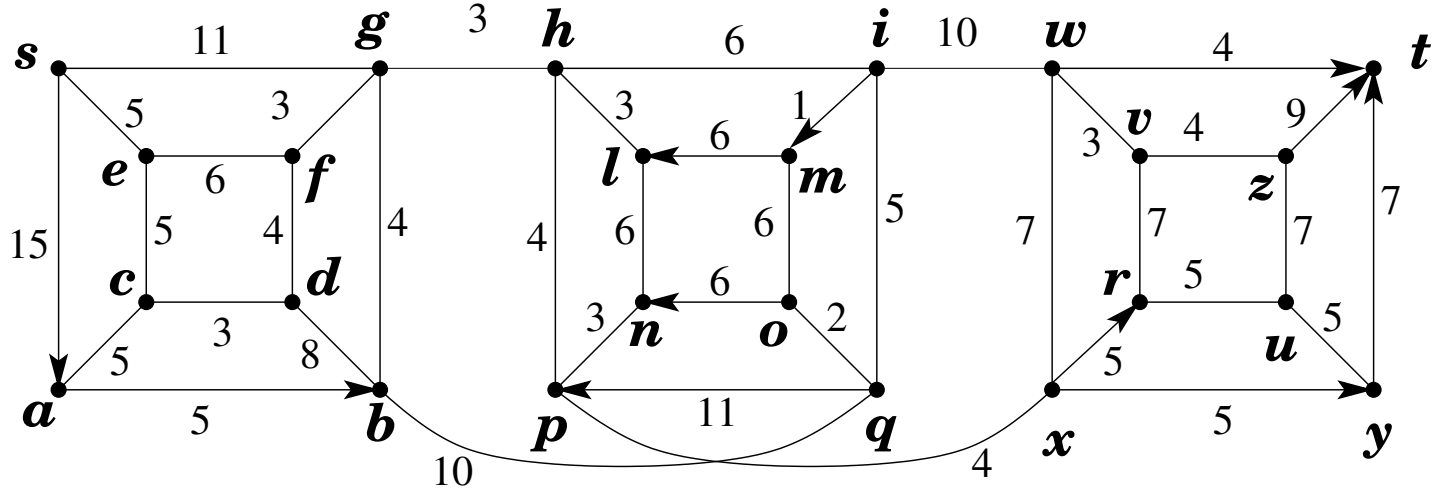
(1+2pt) Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare (PL) in forma standard ed ad origine ammissibile la ricerca di un cammino minimo da un nodo s ad un nodo t entro un grafo diretto $D = (V, A)$ con lunghezze sugli archi $\ell : A \mapsto \mathbf{R}_+$ strettamente positive. Si assuma che s e t appartengano entrambi all'insieme V dei nodi del grafo. Ogni arco $a \in A$ è una coppia (u, v) con $u, v \in V$, ed indichiamo con $t(a) = u$ la coda (tail) di a e con $h(a) = v$ la testa (head) di a . In realtà abbiamo già fatto riferimento a tale formulazione generale dove nei punti precedenti ti abbiamo chiesto esempi di grafi dove non valevano certe proprietà, ti chiediamo di formalizzarla. Come faresti a ricostruire il cammino una volta in possesso di una soluzione di base ottima del problema di PL? Descrivere con sufficiente precisione tale procedura.

(1+1+1+5pt) Quale formulazione proporresti per riuscire ad individuare un albero dei cammini minimi su grafo generico?. Come faresti a ricostruire un albero dei cammini minimi partendo da una soluzione di base ottima del problema di PL da te proposto? Come potresti computare od esprimere il numero degli alberi dei cammini minimi (assumiamo le lunghezze siano strettamente positive)? Sapresti argomentare perchè ora la soluzione ottima sarebbe necessariamente unica?

(1+1pt) Quale sarebbe la tua formulazione di PL per individuare un albero dei cammini minimi nel caso del grafo in figura? Quale ne sarebbe la soluzione ottima?

Problema 4 (16 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 4.1.(3pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco px con l'arco ox è planare oppure no; (3) se il grafo G'' ottenuto da G rimpiazzando l'arco px con l'arco nx è planare oppure no.
- 4.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G ; (2) il grafo G' .
- 4.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 4.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg , wx , ln .
- 4.4.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 4.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 4.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 4.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 4.9.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.