NOME: .............................. COGNOME: ..........................

MATRICOLA: ................. FIRMA: ............................

# Esame di Ricerca Operativa - 21 febbraio 2017
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: ??, con voto $\geq$ punti

**Problema 1 (5+5=10 punti):**

Per fare un auto servono 4 ruote, un motore, ed un volante. Alla BasicCars abbiamo quattro operai (Dante, Carlo, Bruno ed Angela). Sebbene siano stati assunti con contratti diversi, con un numero diverso di ore previsto, ciascuno di loro sa produrre qualsiasi componente base, seppur con diverse produttività (espresse in unità di componente per ogni ora). I parametri in questione sono catturati nella seguente tabella:

| Operaio | Ore a contratto | Produttività | | |
|---|---|---|---|---|
| | | ruote (R) | motori (M) | sterzi (S) |
| Angela (A) | 200 | 10 | 15 | 20 |
| Bruno (B) | 80 | 20 | 5 | 10 |
| Carlo (C) | 150 | 15 | 10 | 5 |
| Dante (D) | 100 | 10 | 15 | 5 |

**(5pt)** Si vuole determinare il numero di ore che ciascun operaio debba essere assegnato su ciascuna linea di produzione (R, M o S) in modo da massimizzare la quantità di auto complessivamente prodotte.

**(5pt)** Si evidenzi come, volendo insistere sull'interezza della soluzione, il problema generale risulti sufficientemente espressivo da poter mappare in esso istanze generiche di KNAPSACK.

**Problema 2 (4+4=8 punti):**

Si assuma assegnato un grafo diretto $D = (V, A)$. Per ogni nodo $v \in V$ indichiamo con $N^+(v)$ l'insieme di quei nodi che sono teste di archi in $A$ con coda in $v$, e con $N^-(v)$ l'insieme di quei nodi che sono coda di archi in $A$ con testa in $v$. Un sottoinsieme di nodi $K \subseteq V$ è un *kernel* di $D$ se rispetta le due sequenti proprietà:

$K$ **è stabile** per nessun arco $(u, v) \in A$ si ha che $\{u, v\} \subseteq K$;

$K$ **è 1-raggiungibile** per ogni $u \in V \setminus K$ esiste un nodo in $N^+(u) \cap K$.

**(4pt)** Formulare come un problema di ILP la domanda se $D$ abbia un kernel.

**(4pt)** Si dimostri che ogni DAG ha un unico kernel dettagliando come costruirlo.

**Problema 3 (3 punti):**

Si dice che un grafo $G$ contiene una suddivisione di un grafo $H$ quando esista un sottografo di $G$ che è isomorfo ad una suddivisione di $H$. Si dice che $G$ ha un $H$ minor se un grafo isomorfo ad $H$ può essere ottenuto partendo da $G$ tramite una sequenza di deletions e contractions. Dimostrare che se $G$ contiene una suddivisione di $H$ allora ha $H$ come minor.

**Problema 4  (7 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 42 | 44 | 49 | 41 | 52 | 63 | 69 | 40 | 60 | 86 | 45 | 66 | 54 | 79 | 81 | 43 | 46 | 38 | 61 | 80 | 48 | 64 | 73 | 47 |

**4.1(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.2(1pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice $i$ tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'$i$-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.

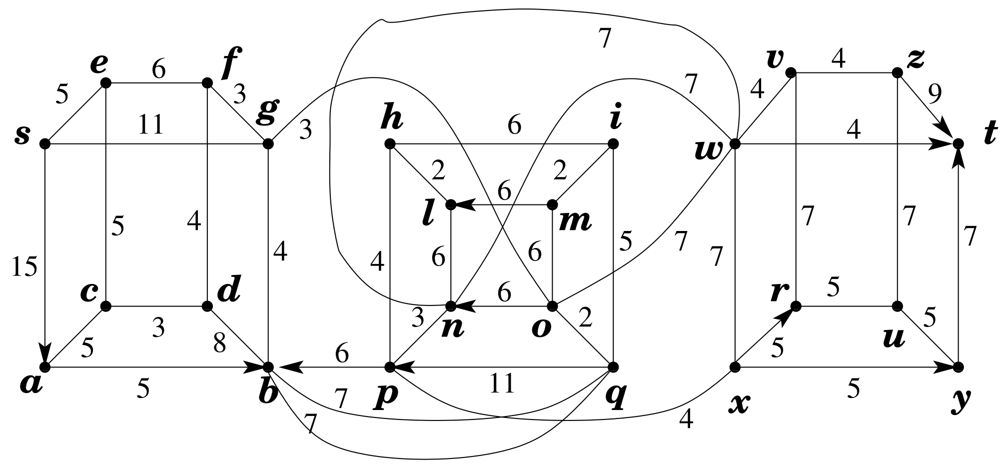
**4.4(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.5(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| crescente | | |
| N-sequenza | | |
| crescente con 40 | | |
| evita i primi 4 | | |
| evita da 13-mo a 16-mo | | |
| minima copertura | | |

**Problema 5 (15 punti):**
Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.




5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo $G$; (1) il grafo $G'$.

5.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $fg$, $wx$, $ln$.

5.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

5.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

**Problema 6  (8 punti):**

$$\max \; 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 5x_4 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

**6.1(1pt)** Impostare il problema ausiliario.

**6.2(2pt)** Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

**6.3(2pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo.

**6.4(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

**6.5(2pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

**LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI **-completamento esame**

I voti verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.