Esame di Ricerca Operativa - 17 febbraio 2016
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (6 punti):

A seconda se all'inizio della prossima stagione invernale nevicherà o meno, la domanda di scarponi potrà essere alta (A) oppure bassa (B) con probabilità rispettivamente p ed $1-p$. Se la domanda dovesse essere alta, dovremmo aumentare i livelli di produzione attuale da subito per potere poi farle fronte, in caso contrario, la produzione potrebbe risultare eccessiva, e tutta concentrata, con delle perdite sicure. Siano D_A e D_B le due previsioni di domanda per i due possibili scenari (espresse in numero di paia). Sia M_1 il massimo numero di paia producibile nel primo periodo, prima di sapere quale dei due scenari andrà a realizzarsi, e sia M_2 il massimo numero di paia producibile nel secondo periodo, a carte scoperte. Siano C_1 e C_2 i costi di produzione di un paio nel primo e nel secondo periodo. Siano R_A e R_B i prezzi di vendita di un paio negli scenari A e B rispettivamente.

(4pt) Formulare come un problema di PL l'aspirazione a massimizzare il guadagno atteso $G = pG_A + (1-p)G_B$.

(2pt) Secondo te, perchè potrebbe essere una buona pratica l'introdurre due ulteriori vincoli del tipo: $G_A \geq T_A$ e $G_B \geq T_B$, dove T_A e T_B siano due parametri sulla cui scelta l'imprenditore dovrà riflettere sperimentandoli nel modello e con un solutore?

svolgimento.

Le variabili di decisione sono:

- p_1 = numero di paia da produrre nel primo periodo;
- p_{2A} = numero di paia da produrre nel secondo periodo, qualora ci si ritrovi nello scenario A;
- p_{2B} = numero di paia da produrre nel secondo periodo, qualora ci si ritrovi nello scenario B.

Ma converrà anche esplicitare le seguenti grandezze derivate:

venduto v_a, v_B = quantità infine venduta qualora si realizzi lo scenario A oppure B;

costi $C_A = C_1\, p_1 + C_2 p_{2A}$ nello scenario A.
$C_B = C_1\, p_1 + C_2 p_{2B}$ nello scenario B;

ricavi $RIC_A = R_A\, v_A$ nello scenario A.
$RIC_B = R_B\, v_B$ nello scenario B;

profitti $G_A = RIC_A - C_A$ nello scenario A.
$G_B = RIC_B - C_B$ nello scenario B.

L'obiettivo é quello di massimizzare il guadagno atteso $G = pG_A + (1-p)G_B$:

$$\max G \quad = \quad p\, G_A + (1-p)\, G_B\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$p_1, p_{2A}, p_{2B} \geq 0.$$

vincoli di capacitá produttiva

$$\begin{aligned} p_1 &\leq M_1 \\ p_{2A}, p_{2B} &\leq M_2 \end{aligned}$$

vincoli sulla vendita

$$\begin{aligned} v_A &\leq D_A \\ v_B &\leq D_B \\ v_A &\leq p_1 + p_{2A} \\ v_B &\leq p_1 + p_{2B} \end{aligned}$$

Quando il modello sopra viene risolto all'ottimo, si ottengono i livelli di produzione non solo per il primo periodo, ma anche quelli per il secondo periodo nei due possibili scenari. È tuttavia possibile che per certi valori dei parametri, i valori di G_A e di G_B riscontrati nella soluzione ottima siano radicalmente distanti, magari uno di essi potrebbe risultare persino negativo. L'imprenditore deve essere ben consapevole di questa possibilità, di fatto non potrà essere estromesso dalla valutazione del rischio. Una corretta valutazione del rischio passa infatti dalla "funzione di utilità" che esprime le preferenze dell'imprenditore. Nella realtà pratica, il rischio va tipicamente contenuto. I due vincoli aggiuntivi ottengono l'effetto di contenere il rischio ed al tempo stesso mettono l'imprenditore nelle condizioni di meglio comprendere il significato delle possibili opzioni sperimentando diverse configurazioni dei parametri di controllo T_A e T_B.

Problema 2 (8 punti):

$$\max \; 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

2.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

2.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

2.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

2.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - x_0 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 5 + 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_0 \\ w_2 = -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_0 \\ w_3 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max \; -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 10 + 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 + w_2 \\ x_0 = 5 + 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + w_2 \\ w_3 = 9 - 4x_2 - x_3 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 2x_1 + 2x_3 - w_2 + 2x_0 \\ x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\ w_3 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 + \frac{4}{5}x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 6x_1 - 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2\right) - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2$).

$$
\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 - w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = 2x_1 + 2x_3 - w_2 \\
x_2 = 1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 \\
w_3 = 5 - \frac{8}{5}x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\max\ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_3 - \frac{17}{2}x_3 + 9x_4 - \frac{1}{2}w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = \frac{25}{4} - \frac{5}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 - \frac{3}{4}w_2 \\
x_2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}w_3 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\
x_1 = \frac{25}{8} - \frac{5}{8}w_3 - \frac{9}{8}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{8}w_2 \\
x_1, x_2, x_3, w_2, w_3 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_4 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base la variabile x_4, non troviamo alcun candidato disposto ad uscire di base, dato che nessun coefficiente nella colonna dell' x_4 è negativo. Ne concludiamo che il problema assegnato era unbounded. Una soluzione ammissibile parametrica che consente di realizzare qualunque valore della funzione obiettivo è:

$$
\begin{cases}
x_4 \geq 0 \\
x_3 = 0 \\
\max z = \frac{15}{2} + 9x_4 \\
x_2 = \frac{9}{4} \\
x_1 = \frac{25}{8} + \frac{1}{2}x_4
\end{cases}
$$

Tale soluzione era leggibile nell'ultimo tableau sopra prodotto, e, facile da verificare, dava un riscontro di avere svolto correttamente l'esercizio, nonostante le domande successive perdessero di significato.

Problema 3 (6 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
peso	2	13	14	6	13	3	16	11	4	46	41	44
valore	11	63	60	33	30	13	66	60	20	66	60	20

3.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso $B = 33$?

3.3 (1pt) e nel caso $B = 28$?

3.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

3.5 (2pt) e se l'oggetto H non fosse più disponibile, quale sarebbe allora la soluzione ottima per $B = 26, 28, 33, 36$?

svolgimento. Per lo svolgimento di questo esercizio di PD si segua la solita traccia: un eventuale preprocessing per eliminare oggetti che non possano far parte di una soluzione ottima in base as un semplice criterio euristico (in questo caso gli ultimi 3 oggetti hanno un peso eccessivo, quindi di fatto non possono far parte di alcuna soluzione) seguito da una programmazione dinamica. La tabella di programmazione prende avvio con una riga tutta a 0, dove si assume che nessuno degli oggetti sia disponibile, e quindi, riga dopo riga, aggiunge un nuovo oggetto dell'istanza in input a quelli considerati disponibili. Ciascuna riga prevede $36 + 1$ colonne, labellate con le possibili capacità intere dello zaino, da 0 a 36. Per ognuna di queste capacità $B' \leq B$, la riga specifica il valore della soluzione ottima per uno zaino di capacità B' ed ove gli oggeti disponibili siano quelli previsti dalla riga. Se avremo l'accortezza che l'aggiunta dell'oggetto G all'insieme (monotonicamente crescente) di oggetti disponibili avvenga solo all'ultima riga, ci risparmieremo di ricalcolare tutta la tabella per rispondere all'ultima domanda. Riportiamo solamente i risultati finali.

Con oggetto H disponibile:

B	max val	peso	quali prendere
36	187 = 60+20+33+11+63	36 = 11+4+6+2+13	H,I,D,A,B
33	169 = 60+33+13+63	33 = 11+6+3+13	H,D,F,B
28	143 = 60+20+63	28 = 11+4+13	H,I,B
26	137 = 60+20+33+11+13	26 = 11+4+6+2+3	H,I,D,A,F

Senza oggetto H:

B	max val	peso	quali prendere
36	169 = 13+33+63+60	36 = 3+6+13+14	F,D,B,C
33	156 = 33+63+60	33 = 6+13+14	D,B,C
28	140 = 11+13+20+33+63	28 = 2+3+4+6+13	A,F,I,D,B
26	129 = 13+20+33+63	26 = 3+4+6+13	F,I,D,B

Problema 4 (6 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = ATTCTCACAATGCTTCTA$ e $t = ACTATCAGTCAACCTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'C'?

4.3 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'G'?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = T\,C\,A\,A\,C\,C\,T\,A\,T$ di t?

4.5 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = T\,G\,C\,T\,T\,C\,T\,A$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'C'		
parte con 'G'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		
contiene una 'G'		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  a  c  t  a  t  c  a  g  t  c  a  a  c  c  t  a  t
-------------------------------------------------------
a   12 11 11 11 10  9  9  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   11 11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   11 11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
c   11 11 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   10 10 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  3  3  2  1  0
c    9  9  9  9  9  9  8  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
a    9  8  8  8  8  8  8  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
c    8  8  7  7  7  7  7  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
a    8  7  7  7  6  6  6  6  6  6  6  5  4  3  2  2  1  0
a    7  7  7  7  6  6  6  5  5  5  5  5  4  3  2  2  1  0
t    6  6  6  6  6  5  5  5  5  4  4  4  4  3  2  1  1  0
g    6  6  6  5  5  5  5  5  4  4  4  4  4  3  2  1  1  0
c    6  6  6  5  5  5  4  4  4  4  4  4  4  3  2  1  1  0
t    5  5  5  5  5  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  1  0
t    4  4  4  4  4  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  1  0
c    3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  2  1  1  0
t    2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  1  1  0
a    1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  0  0
     0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	12	A C T C A C A A C C T A
parte con 'C'	11	C T C A C A A C C T A
parte con 'G'	5	G T C T A oppure G C C T A
tra s e t_9	8	T C A A C C T A
tra s_8 e t	6	T G C C T A
contiene una 'G'	11	A C T A C A G T C T A

dove la risposta alla ultima domanda è stata ottenuta sommando al 5 nell'unica casella G-G della tabella sopra il 7 nell'ultima casella della seguente tabella, e sottraendo poi uno (per non conteggiare due volte il carattere 'G'). Si noti che raramente le soluzioni ottime sono uniche, ad esempio, alla terza domanda potevamo rispondere con la soluzione ottima G T C T A oppure con la soluzione ottima G C C T A.

```
s\t      a  c  t  a  t  c  a  g
-------------------------------
      0  0  0  0  0  0  0  0  0
a     0  1  1  1  1  1  1  1  1
t     0  1  1  2  2  2  2  2  2
t     0  1  1  2  2  3  3  3  3
c     0  1  2  2  2  3  4  4  4
t     0  1  2  3  3  3  4  4  4
c     0  1  2  3  3  3  4  4  4
a     0  1  2  3  4  4  4  5  5
c     0  1  2  3  4  4  5  5  5
a     0  1  2  3  4  4  5  6  6
a     0  1  2  3  4  4  5  6  6
t     0  1  2  3  4  5  5  6  6
g     0  1  2  3  4  5  5  6  7
```

Problema 5 (14 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

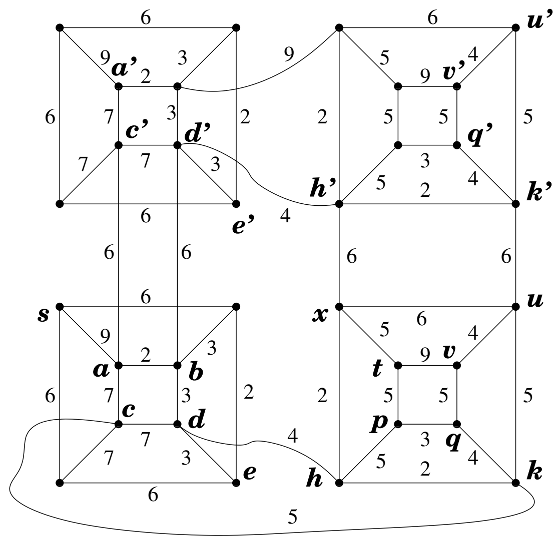
5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco $h'x$ con un arco $q'x$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.4.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.5.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

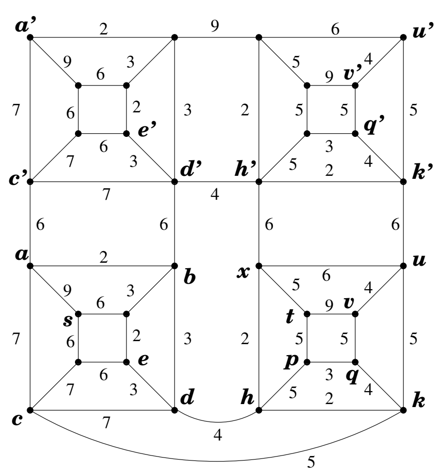
5.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.



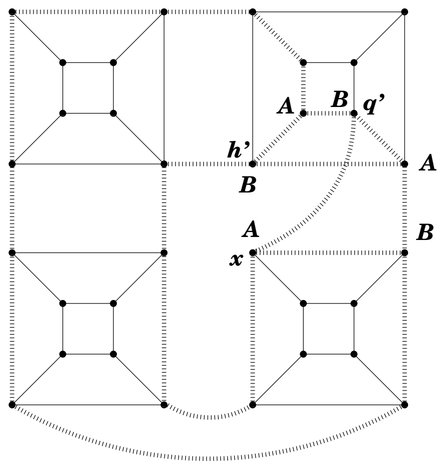
5.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.8.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.

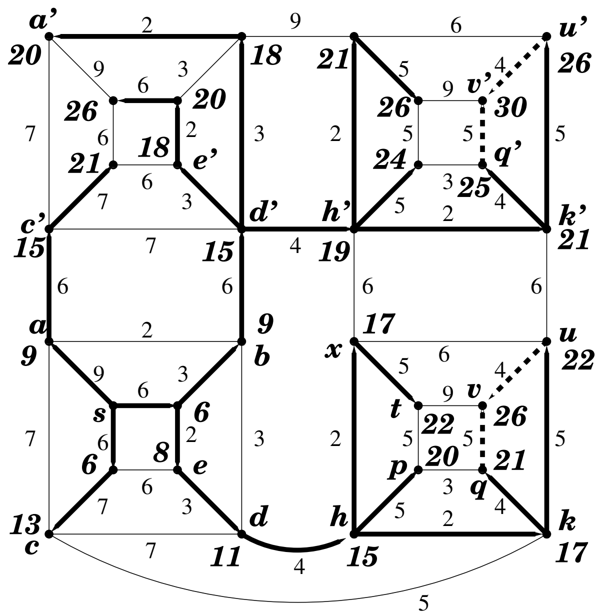
risposte.
Il fatto che G sia planare è messo in evidenza dal planar embedding fornito in figura.



Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding. E forse anche per osservare che il grafo modificato non è planare. Il certificato è la suddivisione del $K_{3,3}$ esibita in figura.

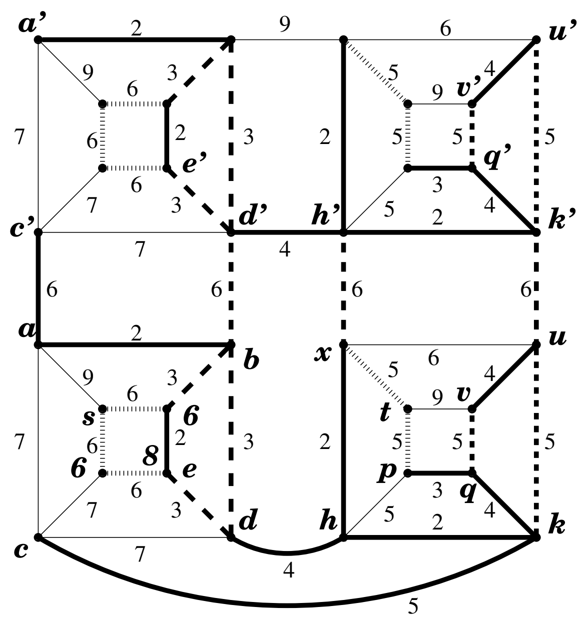


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).

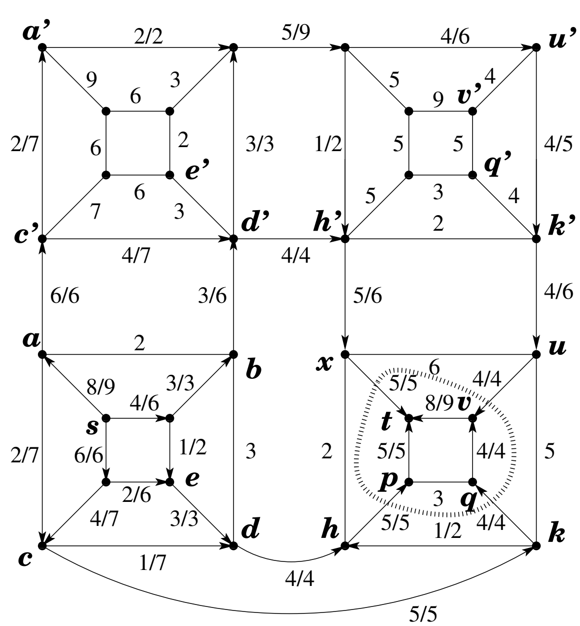


Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell'albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i due archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poichè sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata). Ci sono quindi $2^2 = 4$ alberi di cammini minimi dal nodo s.

La seguente figura, con due quadrati affiancati nella parte alta e due nella parte passa, esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2^4 3^5$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 ed in linea tratteggiata nella parte bassa (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte alta (3 scelte), più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 6 ed in linea sfumata spessa nella parte bassa (3 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa (più sfumata) nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata nella parte alta (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 5 ed in linea tratteggiata nella parte bassa (2 scelte), più 1 qualsiasi dei 3 archi verticali di peso 6 e che collegamo parte bassa e parte alta (3 scelte).



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l’ottimalità.



Il flusso ha valore 18 e satura l’insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch’esso di valore 18 e che certifica pertanto l’ottimalità del flusso proposto. (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì).

Il massimo flusso da s a q a valore 12 e la stella di q è un taglio che ne certifica l'ottimalitá. A parte questa strozzatura, vi è altrimenti ampio margine nell'inviare flusso da s a q ed evitiamo quindi di fornire descrizione di una tale soluzione ammissibile di valore 12 (cosa che ovviamente voi non potete mai fare: se volete totalizzare i rispettivi punti dovete innanzitutto fronirmi le soluzioni/certificati!).