

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

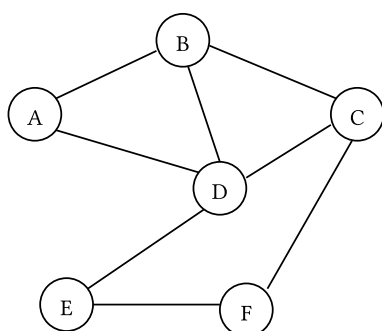
Esame di Ricerca Operativa - 06 luglio 2023

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

3 esercizi per 63 punti in palio (voto \geq punti -5 , $40 \rightarrow 30$ e lode)

Esercizio 1 (con 8 richieste: $2+3+2+1+1+3+2+2 = 16$ punti [modellazione/riduzioni]):

Una *clique* (cricca) in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di nodi $S \subseteq V$ tale che $uv \in E$ per ogni coppia $u, v \in S$. Se invece vale il contrario, ossia se $uv \notin E$ per ogni coppia $u, v \in S$, allora S è un *independent set* di G .



esempio. nel grafo G in figura, $\{B, D\}$, $\{B, D, A\}$ e $\{B, D, C\}$ sono tre cricche mentre $\{C, D, E, F\}$ non lo è perchè D e F non sono adiacenti. Invece $\{B, F\}$, $\{D, F\}$ e $\{A, E\}$ sono tre independent set mentre $\{A, C, F\}$ non lo è per via dell'arco CF .

MAX CLIQUE è il problema di trovare una cricca di massima cardinalità per un generico grafo G dato in input.

MAX INDEPENDENT SET è il problema di trovare un'independent set di massima cardinalità per un grafo G dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

- 1.1 (2 pt, model via graphs) Vuoi creare una coalizione di governo che includa il massimo numero di partiti. Ma alcune coppie di partiti sono proprio incompatibili (o lui o mè). Formula in termini di MAX CLIQUE il tuo problema di formare un nuovo governo.
- 1.2 (3 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MAX CLIQUE per la specifica istanza G in figura.
- 1.3 (2 pt, generalize model) Estendi la tua formulazione PLI a un generico grafo $G = (V, E)$.
- 1.4 (1 pt, forge graph model) In realtà ogni partito p ha un numero di deputati d_p . Prova a definire un problema MAX CLIQUE PESATO che ti consenta di formulare in modo naturale il problema di individuare una coalizione che ricomprenda il numero massimo di deputati, su istanza generica.
- 1.5 (1 pt, model as ILP) Offri una formulazione PLI di MAX CLIQUE PESATO per grafo generico.
- 1.6 (3 pt, NP-hardness proof) MAX INDEPENDENT SET è noto essere NP-hard. Sfrutta questo fatto per dimostrare che anche MAX CLIQUE è NP-hard.
- 1.7 (2 pt, NP-hardness proof) Deduci dal risultato sopra che anche MAX CLIQUE PESATO è NP-hard.
- 1.8 (2 pt, problemi equivalenti) Con un'ultima riduzione da MAX CLIQUE a MAX INDEPENDENT SET fai vedere che questi due problemi sono di fatto equivalenti nel senso che l'esistenza di un algoritmo polinomiale per l'uno implica l'esistenza di un algoritmo polinomiale per l'altro.

Esercizio 2 (con 19 richieste: $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+4 = 23$ punti [simplex a due fasi]):

Lasciati condurre passo passo nella soluzione del seguente problema di PL. In questo modo, anche

se otterrai brutti numeri frazionari, potrai verificare la correttezza dei tuoi conteggi lungo il percorso prima ancora di giungere ai certificati finali.

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 7 \\ & 10x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 8 \\ & -10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ & x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

Richieste dell'Esercizio 2

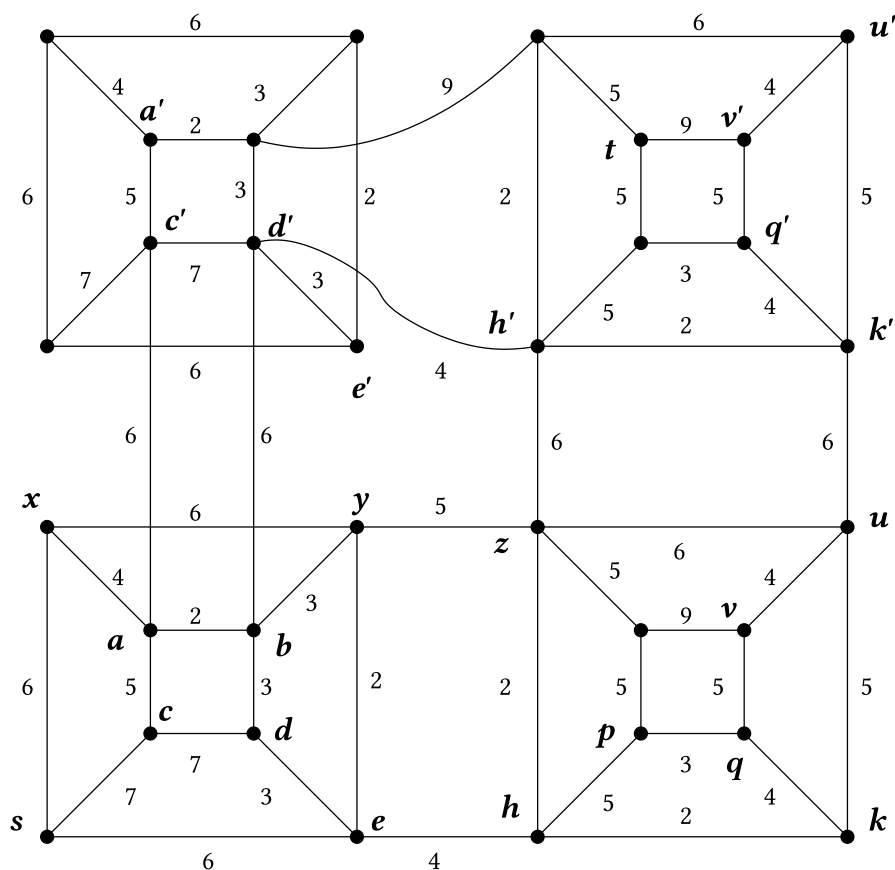
- 2.1 (1 pt, forma standard) Porta il problema in forma standard di massimizzazione.
- 2.2 (1 pt, forma canonica) Introduci le variabili di slack. La soluzione di base associata al primo dizionario (quello di definizione delle variabili di slack) è ammissibile? Perché?
- 2.3 (1 pt, problema ausiliario) Imposta il problema ausiliario in forma standard.
- 2.4 (1 pt, prima fase 1) Porta il problema ausiliario in forma canonica.
- 2.5 (1 pt, punti di controllo) Scrivi e metti da parte per future prove del nove la soluzione estesa di base associata a questo primo dizionario della forma canonica. Siccome essa presenta diversi zeri, calcolati (e messi da parte) anche la soluzione estesa che otterresti settando le 5 variabili fuori-base a 1 invece che a 0. Per ciascuna di queste due soluzioni dire se ammissibile e perchè.
- 2.6 (1 pt, primo tableau) Scrivi il tableau per questo primo dizionario. Spiega poi come in esso determini le variabili entrante ed uscente per il primo pivot.
- 2.7 (1 pt, primo pivot) Esegui il primo pivot. La soluzione di base associata al tableau ottenuto è ammissibile? Cosa devi constatare per assicurartene? Doveva necessariamente esserlo (dire solo SI o NO)?
- 2.8 (1 pt, verifica su punto~1) Verifica **esplicitamente** la correttezza del nuovo tableau tramite la prova del nove riferita alla prima soluzione di base trovata.
- 2.9 (1 pt, verifica su punto~2) Verifica **esplicitamente** la correttezza del nuovo tableau tramite la prova del nove riferita alla seconda soluzione non-di-base costruita ponendo ad 1 le variabili indipendenti nel primissimo dizionario o tableau.
- 2.10 (1 pt, first check opt) Dire perchè la soluzione di base attuale non è ottima e indicare quali scelte sono ora disponibili per il prossimo elemento di pivot.
- 2.11 (1 pt, pivot~2) Esegui il pivot. Commenta perchè la soluzione di base è ora ottima e perchè il problema originario deve essere ammissibile.
- 2.12 (1 pt, inter-fase) Dal tableau ottimo prodotto per il problema ausiliario si estraiga un primo tableau per il problema originale in forma standard. Esso esprimerà una soluzione ammissibile. Non dimenticarsi di ripristinare la soluzione obiettivo originaria.
- 2.13 (1 pt, verif pre-fase~2) Verifica questo primo tableau per il problema originale in forma standard con la prova del nove sulla soluzione estesa determinata da $x_1 = 1, x_2^- = x_3' = 2, x_2^+ = 3$.
- 2.14 (1 pt, verifica ottimalità) Dire perchè la soluzione di base attuale non è ottima e discutere come scegli il prossimo elemento di pivot.
- 2.15 (1 pt, ultimo pivot) Esegui il prossimo pivot. (Usciranno numeri brutti, i più orribili sono $-\frac{169}{20}$ e $-\frac{39}{40}$)
- 2.16 (1 pt, check opt + prova~9) Dire perchè sei all'ottimo. Verifica questo ultimo tableau per il problema originale in forma standard con la prova del nove sulla soluzione estesa determinata da $x_1 = 1, x_2^- = x_3' = 2, x_2^+ = 3$.
- 2.17 (1 pt, soluzioni ottime) Leggere le soluzioni ottime estese primale e duale.
- 2.18 (2 pt, prezzi ombra) Dire quali sono i prezzi ombra delle risorse (si faccia riferimento alla forma

standard ottenuta come primo passo per esaudire la richiesta 1) ed evidenziare perchè per acquisire unità aggiuntive di ciascuna risorsa non saresti mai disposto a pagare più del suo prezzo ombra.

2.19 (4 pt, scadenze prezzi ombra) Fino a dove saresti disposto a pagare quel prezzo per le risorse 1 e 2?

Esercizio 3 (con 10 richieste: 3+2+3+1+1+3+5+2+2+2 = 24 punti [grafi]):

Si consideri il grafo G in figura.



Richieste dell'Esercizio 3

3.1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$. (2 punti sono per il certificato di non-planarità, 1 per quello di planarità)

3.2 (2 pt, make planar) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda planare quello dei due grafi che non lo è.

3.3 (3 pt, 2-colorability $G+G'$ (2+1=3)) Individuare un minimo numero di archi la cui rimozione renda G e G' bipartiti (3 certificati).

3.4 (1 pt, one MST) Su G , trovare un albero ricoprente di peso minimo.

3.5 (1 pt, MST: classify edges) Colorare (o marcare) gli archi di G in tre categorie: quelli contenuti in tutti/nessuno/alcuni ma non tutti gli MST.

3.6 (3 pt, MST: certify edges) Fornire i 4 certificati che comprovano la corretta catalogazione dei 3 archi ax , bd e yz .

3.7 (5 pt, MST: family structure) Si descriva la struttura della famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo per il grafo G , e si dica quanti essi siano.

3.8 (2 pt, max flow) In G , trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .

3.9 (2 pt, min cut) In G , trovare un s, t -taglio minimo.

3.10 (2 pt, cammini minimi) Si evidenzino, in un disegno del grafo G , gli archi di un albero dei cammini minimi dal nodo s (si scriva la distanza da s in coppa ad ogni nodo, in modo che sia facile verificare l'ottimalità dell'albero fornito). Si descriva la struttura della famiglia degli alberi dei cammini minimi da s e si dica quanti sono.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame -collaborare al controllo

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccogliarli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -assegnazione punti

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -completamento esame

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito va richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.