Esame di Ricerca Operativa - 18 giugno 2018
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: 56, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (8 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GGAGATATGCAGAGAGT$ e $t = AGTGATCGATTAAGTGT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

1.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

1.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'T'?

1.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_{11} = CGATTAAGTGT$ di t?

1.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_9 = GCAGAGAGT$ di s?

1.5 (4pt) per ciascuna delle precedenti domande computare anche quante siano le sottosequenze di t o t_{11} che attengano l'ottimo in questione. Si adotti il seguente punto di vista: una sottosequenze di una stringa t di lunghezza $len(t)$ è il sottoinsiemie delle posizioni $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$ per cui il carattere viene mantenuto, mentre gli altri caratteri vengono rimossi.

tipo di sott. comune	lungh.	una sottosequenza ottima (stringa)	num. sott. di t ottime
qualsiasi			
parte con 'T'			
tra s e t_{11}			
tra s_9 e t			

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica. (Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui la tabella viene compilata potete vedere i codici che l'hanno prodotta, resi disponibili nella stessa cartella della presente correzione).

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sott. comune	lungh.	una sottosequenza ottima (stringa)	num. sott. di t ottime
qualsiasi	12	G G A G A T T A A G G T	1
parte con 'T'	9	T A T G A A G G T	24
tra s e t_{11}	9	G A T T A A G G T	1
tra s_9 e t	7	G C A A G G T	87

Problema 2 (9 punti):

$$\max\ 2x_1 - x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq 9 \\ \quad - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + 2x_3 = 6 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$s \mid t$	A	G	T	G	A	T	C	G	A	T	T	A	A	G	T	G	T	-
G	12^{0}_{1}	12^{1}_{1}	11^{0}_{1}	11^{1}_{1}	10^{1}_{1}	9^{0}_{1}	9^{0}_{1}	9^{1}_{1}	8^{1}_{1}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{3}_{4}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	11^{28}_{32}	11^{3}_{4}	11^{0}_{1}	11^{1}_{1}	10^{1}_{1}	9^{0}_{1}	9^{0}_{1}	9^{1}_{1}	8^{1}_{1}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{3}_{4}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	11^{28}_{28}	10^{26}_{29}	10^{0}_{3}	10^{2}_{3}	10^{1}_{1}	9^{0}_{1}	9^{0}_{1}	9^{1}_{1}	8^{1}_{1}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{3}_{4}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	10^{24}_{52}	10^{26}_{28}	10^{0}_{2}	10^{2}_{2}	9^{2}_{3}	9^{0}_{1}	9^{0}_{1}	9^{1}_{1}	8^{1}_{1}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{2}_{2}	4^{2}_{3}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	10^{24}_{24}	9^{0}_{26}	9^{24}_{26}	9^{0}_{2}	9^{2}_{2}	8^{2}_{3}	8^{0}_{1}	8^{0}_{1}	8^{1}_{1}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{2}_{2}	4^{2}_{2}	3^{1}_{2}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
T	9^{30}_{54}	9^{0}_{24}	9^{24}_{24}	8^{0}_{26}	8^{24}_{26}	8^{2}_{2}	7^{0}_{3}	7^{0}_{3}	7^{2}_{3}	7^{1}_{1}	6^{1}_{1}	5^{1}_{1}	4^{2}_{2}	3^{1}_{2}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	9^{30}_{30}	8^{0}_{54}	8^{30}_{54}	8^{0}_{24}	8^{24}_{24}	7^{24}_{26}	7^{0}_{2}	7^{0}_{2}	7^{2}_{2}	6^{1}_{2}	6^{1}_{1}	5^{1}_{1}	4^{2}_{2}	3^{1}_{2}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
T	8^{0}_{30}	8^{0}_{30}	8^{30}_{30}	7^{30}_{54}	7^{0}_{24}	7^{24}_{24}	6^{18}_{26}	6^{6}_{8}	6^{0}_{2}	6^{1}_{2}	6^{1}_{1}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{2}	3^{1}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	7^{18}_{87}	7^{39}_{69}	7^{0}_{30}	7^{30}_{30}	6^{12}_{36}	6^{0}_{24}	6^{18}_{24}	6^{6}_{6}	5^{5}_{6}	5^{0}_{1}	5^{0}_{1}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
C	7^{18}_{18}	6^{9}_{48}	6^{0}_{39}	6^{9}_{39}	6^{12}_{30}	6^{0}_{18}	6^{18}_{18}	5^{12}_{18}	5^{5}_{6}	5^{0}_{1}	5^{0}_{1}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	7^{18}_{18}	6^{9}_{30}	6^{0}_{21}	6^{9}_{21}	6^{12}_{12}	5^{0}_{18}	5^{0}_{18}	5^{12}_{18}	5^{5}_{6}	5^{0}_{1}	5^{0}_{1}	5^{1}_{1}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	6^{0}_{18}	6^{9}_{18}	6^{0}_{9}	6^{9}_{9}	5^{9}_{21}	5^{0}_{12}	5^{0}_{12}	5^{12}_{12}	4^{7}_{12}	4^{0}_{5}	4^{0}_{5}	4^{4}_{5}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	5^{41}_{50}	5^{0}_{9}	5^{0}_{9}	5^{0}_{9}	5^{9}_{9}	4^{0}_{21}	4^{0}_{21}	4^{9}_{21}	4^{7}_{12}	4^{0}_{5}	4^{0}_{5}	4^{4}_{5}	4^{1}_{1}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	4^{0}_{41}	4^{16}_{41}	4^{0}_{25}	4^{16}_{25}	4^{0}_{9}	4^{0}_{9}	4^{0}_{9}	4^{9}_{9}	3^{3}_{10}	3^{0}_{7}	3^{0}_{7}	3^{3}_{7}	3^{3}_{4}	3^{1}_{1}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
A	3^{18}_{34}	3^{0}_{16}	3^{0}_{16}	3^{0}_{16}	3^{7}_{16}	3^{0}_{9}	3^{0}_{9}	3^{0}_{9}	3^{3}_{9}	3^{0}_{6}	3^{0}_{6}	3^{3}_{6}	3^{3}_{3}	2^{2}_{3}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
G	2^{0}_{18}	2^{6}_{18}	2^{0}_{12}	2^{5}_{12}	2^{0}_{7}	2^{0}_{7}	2^{0}_{7}	2^{4}_{7}	2^{0}_{3}	2^{0}_{3}	2^{0}_{3}	2^{0}_{3}	2^{0}_{3}	2^{2}_{3}	2^{0}_{1}	2^{1}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
T	1^{0}_{6}	1^{0}_{6}	1^{1}_{6}	1^{0}_{5}	1^{0}_{5}	1^{1}_{5}	1^{0}_{4}	1^{0}_{4}	1^{0}_{4}	1^{1}_{4}	1^{1}_{3}	1^{0}_{2}	1^{0}_{2}	1^{0}_{2}	1^{1}_{2}	1^{0}_{1}	1^{1}_{1}	0^{0}_{1}
-	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}	0^{0}_{1}

2.1(1pt) Portare in forma standard.

2.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

2.3(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

2.4(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

2.5(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

2.6(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

(1pt) Portiamo dapprima il problema in forma standard riesprimendolo in termini delle variabili x_1, x_3 e $x_2' = -x_2$, rappresentando il vincolo di uguaglianza come due diseguaglianze che si fronteggiano reciprocamente, e moltiplicando per -1 i vincoli di $\geq$:

$$
\max \; 2x_1 + x_2' + x_3
$$
$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2' - x_3 \leq 9 \\
\quad - 2x_2' - x_3 \leq -4 \\
x_1 + 2x_3 \leq 6 \\
-x_1 - 2x_3 \leq -6 \\
x_1, x_2', x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

(1pt) A questo punto il problema è in forma standard ma posso vedere che esso non è ad origine ammissibile dato che 2 dei 4 termini noti sono negativi (le due disponibilità di valore -4 e -6 rispettivamente).

L'esercizio chiede di superare la difficoltà del reperire una prima soluzione di base ammissibile con il metodo del problema ausiliario. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\begin{array}{l}
\max \quad -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rrrrrr}
2x_1 + & 3x_2' - & x_3 - & x_0 & \leq & 9 \\
 - & 2x_2' - & x_3 - & x_0 & \leq & -4 \\
x_1 & + & 2x_3 - & x_0 & \leq & 6 \\
-x_1 & - & 2x_3 - & x_0 & \leq & -6 \\
\multicolumn{6}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Il problema ausiliario è sempre ammissibile (basta prendere un valore sufficientemente grande per x_0) e, ovviamente, il problema originario è ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$. Questa è la prima domanda che siamo chiamati ad affrontare, e lo faremo nella prima fase del metodo del simplesso, quella che identifica una soluzione di base ottima per il problema ausiliario.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\begin{array}{l}
\max \quad -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rcrrrrr}
w_1 & = & 9 - & 2x_1 - & 3x_2' + & x_3 + & x_0 \\
w_2 & = & -4 & & + \; 2x_2' + & x_3 + & x_0 \\
w_3 & = & 6 - & x_1 & - & 2x_3 + & x_0 \\
w_4 & = & -6 + & x_1 & - & 2x_3 + & x_0 \\
\multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow
$$

TABLEAU INIZIALE

		x_1	x_2'	x_3	x_0
z	0	0	0	0	-1
w_1	9	-2	-3	1	1
w_2	-4	0	2	1	1
w_3	6	-1	0	-2	1
w_4	-6	1	0	2	$\boxed{1}$

Le equazioni con cui abbiamo definito le variabili di slack definiscono il nostro primo dizionario dal quale prende avvio il metodo del simplesso. La soluzione di base associata al primissimo dizionario è l'origine $(x_0, x_1, x_2', x_3) = (0, 0, 0, 0)$ che tuttavia non è ammissibile benchè ovvimente il problema ausiliario sia ammissibile per costruzione. Fortunatamente, un primo pivot risulta sempre sufficiente a raggiungere una prima soluzione di base ammissibile: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 6 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facendo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo (w_4). L'elemento di pivot è pertanto quello incorniciato e, con un passo di pivot, si perviene alla situazione seguente.

$$\max \; -6 + x_1 + 2x_3 - w_4$$
$$\begin{cases} w_1 = 15 - 3x_1 - 3x_2' - x_3 + w_4 \\ w_2 = 2 - x_1 + 2x_2' - x_3 + w_4 \\ w_3 = 12 - 2x_1 - 4x_3 + w_4 \\ x_0 = 6 - x_1 - 2x_3 + w_4 \\ x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Secondo Tableau

		x_1	x_2'	x_3	w_4
z	-6	1	0	2	-1
w_1	15	-3	-3	-1	1
w_2	2	-1	2	$\boxed{-1}$	1
w_3	12	-2	0	-4	1
x_0	6	-1	0	-2	1

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: i coefficiente della x_1 e della x_3 nella funzione obiettivo sono positivi. Tra le due, come varibile di pivot, optiamo per la x_3, scelta che conduce ad un maggior incremento in termini di funzione obiettivo. La prima variabile in base ad annullarsi al crescere della x_3 sarebbe la w_2, pertanto scegliamo questa come variabile uscente e riga del pivot.

$$\max \; -2 - x_1 + 4x_2' - 2w_2 - w_4$$
$$\begin{cases} w_1 = 13 - 2x_1 - 5x_2' + w_2 \\ x_3 = 2 - x_1 + 2x_2' - w_2 + w_4 \\ w_3 = 4 \;\; 2x_1 - 8x_2' + 4w_2 - 3w_4 \\ x_0 = 2 \;\; x_1 - 4x_2' + 2w_2 - w_4 \\ x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Terzo Tableau

		x_1	x_2'	w_2	w_4
z	-2	-1	4	-2	1
w_1	13	-2	-5	1	0
x_3	2	-1	2	-1	1
w_3	4	2	-8	4	-3
x_0	2	1	$\boxed{-4}$	2	-1

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: i coefficiente della x_2' e della w_4 nella funzione obiettivo sono positivi. Tra le due, come variabile di pivot, scegliamo la x_2' (maggior incremento nella funzione obiettivo, e quindi unica chance che questo pivot possa essere l'ultimo). La scelta della riga di pivot è ora cruciale: si noti che ad arrestare la crescita della x_2' sono la x_0 (il problema originario era quindi ammissibile dacchè basta zero colla) e la w_3 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2' = 1/2$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2' conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla. Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\max \; -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = \frac{21}{2} - \frac{13}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_0 - \frac{3}{2}w_2 + \frac{5}{4}w_4 \\ x_3 = 3 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}w_4 \\ w_3 = 2x_0 - w_4 \\ x_2' = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}w_2 + -\frac{1}{4}w_4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Ultimo Tableau (prob. aux)

		x_1	x_0	w_2	w_4
z	0	0	-1	0	0
w_1	$21/2$	$-13/4$	$5/4$	$-3/2$	$5/4$
x_3	3	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
w_3	0	0	2	0	-1
x_2'	$1/2$	$1/4$	$-1/4$	$1/2$	$-1/4$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario posto in forma standard. La soluzione di base associata è $x_1 = 0$, $x_2' = 1/2$ e $x_3 = 3$ e risulta agevole verificare che essa è appunto ammissibile per tale problema (quando si pongano la variabili non-basiche x_1, w_2 e w_4 a 0 allora la x_2' ed x_3 sono forzate ad assumere quei valori, quindi trattasi in effetti di una soluzione di base). Per la scrittura della funzione obiettivo in tale dizionario, si parte dalla funzione obiettivo originaria e si utilizzano le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $2x_1 + x_2' + x_3 = 2x_1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{4}w_4) + (3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_4) = \frac{7}{2} + \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{4}w_4$.

$$
\begin{array}{l}
\max\ \frac{7}{2} + \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{4}w_4 \\
\left\{
\begin{array}{rcl}
w_1 & = & \frac{21}{2} - \frac{13}{4}x_1 - \frac{3}{2}w_2 + \frac{5}{4}w_4 \\
x_3 & = & 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_4 \\
w_3 & = & - w_4 \\
x_2' & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}w_2 + -\frac{1}{4}w_4 \\
\multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\iff
$$

Primo Tableau della 2^a Fase

		x_1	w_2	w_4
z	7/2	7/4	1/2	1/4
w_1	21/2	−13/4	$\boxed{-3/2}$	5/4
x_3	3	−1/2	0	1/2
w_3	0	0	0	−1
x_2'	1/2	1/4	1/2	−1/4

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che tutti i coefficienti delle variabili fuori base sono positivi. Portando in base la w_2 esce w_1 (scegliamo la w_2 in quanto porta al maggior incremento in termini di funzione obiettivo, quindi è la nostra unica chance di terminare in un solo pivot) ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max\ 7 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{2}{3}w_4 \\
\left\{
\begin{array}{rcl}
w_2 & = & 7 - \frac{13}{6}x_1 - \frac{2}{3}w_1 + \frac{5}{6}w_4 \\
x_3 & = & 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_4 \\
w_3 & = & - w_4 \\
x_2' & = & 4 - \frac{5}{6}x_1 - \frac{1}{3}w_1 + +\frac{1}{6}w_4 \\
\multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\iff
$$

Tableau 2 di Fase 2

		x_1	w_1	w_4
z	7	2/3	−1/3	2/3
w_2	7	$\boxed{-13/6}$	−2/3	5/6
x_3	3	−1/2	0	1/2
w_3	0	0	0	−1
x_2'	4	−5/6	−1/3	1/6

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che i coefficienti della x_1 e della w_4 sono positivi. La w_4 non può essere spinta a causa della degeneratività sulla w_3 (che in questo caso la cosa trova motivazione nel fatto che w_3 e w_4 sono i moltiplicatori di due vincoli contrapposti). Pertanto portiamo in base la x_1, e necessariamente esce la w_2. Otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max\ \frac{119}{13} - \frac{4}{13}x_1 - \frac{7}{13}w_1 + \frac{12}{13}w_4 \\
\left\{
\begin{array}{rcl}
w_2 & = & \frac{42}{13} - \frac{6}{13}x_1 - \frac{4}{13}w_1 + \frac{2}{3}w_4 \\
x_3 & = & \frac{18}{13} + \frac{3}{13}x_1 + \frac{2}{13}w_1 + \frac{1}{2}w_4 \\
w_3 & = & - w_4 \\
x_2' & = & \frac{17}{13} + \frac{5}{13}x_1 - \frac{1}{13}w_1 - \frac{2}{13}w_4 \\
\multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\iff
$$

Tableau 3 di Fase 2

		w_2	w_1	w_4
z	119/13	−4/13	−7/13	12/13
x_1	42/13	−6/13	−4/13	5/13
x_3	18/13	3/13	2/13	4/13
w_3	0	0	0	−1
x_2'	17/13	5/13	−1/13	−2/13

Succede ora di dover pivotare la w_3 e la w_4, per flippare la direzione in cui lavora l'associato vincolo di uguaglianza.

$$\max\ \tfrac{119}{13} - \tfrac{4}{13}x_1 - \tfrac{7}{13}w_1 - \tfrac{12}{13}w_3$$
$$\begin{cases} w_2 &= \frac{42}{13} - \frac{6}{13}x_1 - \frac{4}{13}w_1 - \frac{2}{3}w_4 \\ x_3 &= \frac{18}{13} + \frac{3}{13}x_1 + \frac{2}{13}w_1 - \frac{1}{2}w_4 \\ w_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad - w_4 \\ x'_2 &= \frac{17}{13} + \frac{5}{13}x_1 - \frac{1}{13}w_1 + \frac{2}{13}w_4 \\ x_0, x_1, x'_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Ultimo Tableau

		w_2	w_1	w_3
z	119/13	−4/13	−7/13	−12/13
x_1	42/13	−6/13	−4/13	−5/13
x_3	18/13	3/13	2/13	−4/13
w_4	0	0	0	−1
x'_2	17/13	5/13	−1/13	2/13

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{42}{13}$, $x_2 = -x'_2 = -\frac{17}{13}$, e $x_3 = \frac{18}{13}$ cui corrisponde un valore di $\frac{171}{13} = 13,15$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per $\frac{7}{13}$ (perché questo valore?), il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{4}{13}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{12}{13}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{171}{13}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{7}{13}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di decremento (si noti che era un vincolo di $\geq$, quindi se vogliamo rilassarlo il termine noto và decrementato) del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{4}{13}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento (sì, incremento, perchè la w_3 era associata all'aspetto di $\leq$ del vincolo originale di uguaglianza) del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{12}{13}$ (almeno per piccoli incrementi).

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che i termini noti dei tre vincoli siano $9+t_1$, $4+t_2$ e $6+t_3$ (invece di 9, 4 e 6). Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poichè solo i termini noti del problema originale sono cambiati, ed il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Di questi me ne interessano solamente tre: quelli relativi ai tre vincoli che lavorano all'ottimo. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori t_1, t_2 e t_3 della colonna dei termini noti che mi serve rideterminare. Questo viene lasciato come esercizio.

Problema 3 (4 punti):

(2pt) Dimostrare che $K_{3,3}$ è un grafo non planare.

(2pt) Dimostrare che ogni grafo che contenga $K_{3,3}$ come minore contiene anche una suddivisione di $K_{3,3}$ come suo sottografo.

dimostrazione 1. Il $K_{3,3}$ è un grafo (bipartito completo) con $n = 3 + 3 = 6$ nodi e $m = 3 \cdot 3 = 9\binom{5}{2} = 9$ archi. Qualora il $K_{3,3}$ ammettesse un planar embedding, esso dovrebbe avere $f = m - n + 2 = 5$ facce per la formula di Eulero. Ciascuna di queste facce dovrebbe essere contornata de almeno 4 archi, visto che:

1 ogni ciclo di $K_{3,3}$ ha un numero pari di archi dato che $K_{3,3}$ è bipartito;

2 nessun ciclo di $K_{3,3}$ consta di due soli archi dato che il $K_{3,3}$ non ha archi paralleli.

Vero che ogni arco può servire a contornare 2 facce (contorna le due facce che separa), ma resta il fatto che ne seguirebbe l'assurdo $20 = 2m \geq 3f = 21$.

dimostrazione 2. I nodi del $K_{3,3}$ sono partizionati in due gruppi: chiamiamo a,b,c i tre maschietti e u, v, z le tre femminucce. Disegnamo nel piano il quadrato $aubv$, esso è una curva chiusa e semplice, cioè una circonferenza. I due maschietti e le due femminucce si alternano lungo questa circonferenza. Tra i due maschietti dobbiamo aggiungere una corda (che deve anche passare per un punto dove si colloca la terza femminuccia z) mentre tra le due femminucce dobbiamo aggiungere una corda (che deve anche passare per un punto dove si colloca il terzo machietto c). Di queste corde una è riposta dentro e l'altra fuori della circonferenza, data l'alternanza evidenziata sopra. Eppure nel $K_{3,3}$ anche i nodi c e z sono direttamente collegati tra di loro tramite un arco che ancora non abbiamo saputo embeddare nel piano.

Problema 4 (2+2+4+5=13 punti): Nella pagina a seguire riportiamo una problematica di gestione di mezzi. La pagina dopo ancora trovi la proposta di lavoro per ottenere i punti per il presente esercizio del tema d'esame odierno.

Festa di laurea (`laurea`)

È tempo di lauree, quindi è tempo di feste. Un vostro compagno di corsi si laurea e decide di fare la festa di laurea in una piccola isola del Mediterraneo. Tutto il vostro gruppo di amici è invitato.

Arrivati sull'isola con il traghetto, vi accorgete che il luogo dove si svolgerà la festa è distante dal porto. Dovete, quindi, organizzarvi per arrivarci. Fortunatamente si tratta di un luogo turistico, quindi ci sono molti mezzi per arrivare. Avete a disposizione: scooter a noleggio (massimo due persone) o auto a noleggio (4, 5 o 7 persone). È già tardi, quindi non potete fare più viaggi.

Sapendo il costo di ognuno dei mezzi e la disponibilità di questi ultimi, quanto è il costo minimo per arrivare tutti alla festa?

Dati di input

Il file `input.txt` è composto da 5 righe:

- La prima riga contiene un numero intero positivo che rappresenta il numero N di persone che devono arrivare alla festa
- Ogni riga successiva contiene due numeri interi per ogni tipologia i (in ordine: 2, 4, 5, 7 posti):
  - il numero D_i di mezzi disponibili per la tipologia i
  - il prezzo P_i del mezzo per la tipologia i

Dati di output

Sul file `output.txt` stampare una sola riga contenente un intero il costo minimo necessario per raggiungere la festa.

Assunzioni

- $1 \leq N \leq 100$
- $0 \leq D_i \leq 100$
- $1 \leq P_i \leq 100$

Esempi di input/output

input.txt	**output.txt**

`10`
`2 5`
`1 7`
`3 8`
`1 10`
	`16`

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la problematica di gestione dei mezzi di trasporto per la festa di laurea.
(2pt) Offrire una formulazione più generle dove il numero T di tipologie di mezzi possa variare, e in particolare possa aversi $T > 4$ (il parametro T potrebbe essere fornito come secondo numero della prima riga del file di input, che avrebbe quindi $T + 1$ righe invece di necessariamente 5). Per ogni mezzo, oltre al costo e alle disponibilità dovrebbe ora venir specificato anche il numero di posti.
(4pt) Fornire una dimostrazione di NP-completezza del problema generale riducendo ad esso il problema dello zaino,
(5pt) Fornire un algoritmo pseudo-polinomiale, di programmazione dinamica, per il problema generale. Non chiedo necessariamente né codice né pseudocodice, la cosa importante é definire la famiglia dei problemi (**(2pt)**), poi dare la ricorrenza (**(2pt)**), infine identificare e gestire i casi base (**(1pt)**).

svolgimento.
(2pt) Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ introduciamo una variabile $x_i \in \mathbf{N}$ a rappresentare il numero di mezzi di tipo i da impiegare. Volendo minimizzare i costi, la funzione obbiettivo sará:

$$\min P_1\, x_1 + P_2\, x_2 + P_3\, x_3 + P_4\, x_4$$

Abbiamo due insiemi di vincoli.

vincoli sulla disponibilitá dei veicoli delle varie tipologie. Dobbiamo limitarci ai veicoli effettivamente disponibili per ciascuna tipologia.

scooter: $x_1 \leq D_1$;

auto a 4 **posti:** $x_2 \leq D_2$;

auto a 5 **posti:** $x_3 \leq D_3$;

auto a 7 **posti:** $x_4 \leq D_4$.

vincolo di esaudimento completo della necessitá. vincolo di esaudimento completo della necessitá. Vogliamo che tutti i nostri amici giungano alla festa.

$$2\, x_1 + 4\, x_2 + 5\, x_3 + 7\, x_4 + \geq N.$$

vincolo di non negativitá.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

vincolo di interezza. Un veicolo viene impiegato oppure nò, Pertanto forniamo una formulazione di PLI piuttosto che non di PL.

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ tutte intere.}$$

Tutte le variabili introdotte sono intere e pertanto parliamo di formulazione di PLI in senso proprio, e non di formulazione di MPLI (**m**ixed **i**nteger **l**inear **p**rogramming). In ogni caso, ogni formulazione di PLI è anche una formulazione di MPLI, ed anche il problema di decisione naturalmente associato alla MPLI (esistenza di una soluzione di almeno un certo valore di funzione obiettivo) è chiaramente in NP. Quindi trattasi di una distinzione di lana caprina benchè costituisca terminologia e tassonomia affermatasi nella letteratura.

(2pt) Nel caso di T tipologie di veicolo, dove P_i sia il prezzo, D_i sia la disponibiltá, e C_i sia la capacitá (ossia il numero di persone che può trasportare) di un veicolo di tipo i, $i \in \{1, 2, \dots, T\}$, otteniamo la seguente formulazione

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^{T} P_i x_i \,, \\ \sum_{i=1}^{T} C_i x_i \geq N, \\ x_i \leq D_i \text{ per ogni tipologia } i \in \{1, 2, \dots, T\}, \\ x_i \geq 0, \text{ e intero per ogni tipologia } i \in \{1, 2, \dots, T\}. \end{aligned}$$

(3pt) Come istanza del problema dello zaino siano dati n oggetti, con l'oggetto i-esimo avente peso p_i e valore v_i. Vorremmo comprendere se, dato uno zaino di capacitá k sia possibile portarsi a casa oggetti per un ammontare complessivo di valore almeno t, un dato target. In generale, per rappresentarci questo problema dello zaino, possiamo definire $T := n$ tipologie di veicoli, coi veicoli di tipologia i aventi prezzo $P_i := p_i$ e capacitá $C_i := v_i$. Di ciascuna tipologia di veicoli la disponibilitá è unitaria, ossia $D_i := 1$ per ogni tipologia $i \in \{1, 2, \dots, T\}$.

Chiaramente, esiste un sottoinsieme degli n oggetti a peso complessivo al più k e di valore complessivo almeno t se e solo se esiste un sottoinsieme dei $T = n$ veicoli disponibili (uno per ogni tipologia) che consenta di trasportare almeno t amici al costo complessivo al più k.

Pertanto la rappresentazione del problema di zaino come problema di gestione della flotta dei veicoli disponibili è fedele, e ne consegue l'espressivitá ed NP-completezza del problema di organizzarsi la festa di laurea.

In base alla riduzione sopra esibita, possiamo di fatto affermare che tale problema è NP-completo anche nel caso particolare in cui vi sia un veicolo per ogni tipologie, ossia la difficoltá del problema non sorge dall'astrazione introdotta con le tipologie.

(3pt) Solo un hint. Per ogni $i = 1, 2, \dots, T$, e per ogni $n = 0, 1, \dots, N$, si denoti con $X_{i,n}$ il minimo costo da sobbarcarsi per trasportare n persone assumendo di poter impiegare solamente veicoli di tipologia non superiore ad i. É questa famiglia di problemi chiusa rispetto ad induzione? Riesci a vedere la ricorrenza che li lega?

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
66	58	56	51	59	48	37	31	60	40	14	55	34	46	21	19	57	54	62	39	20	52	36	27	53

5.1(1pt) trovare una sottosequenza (strettamente) decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l'i-esimo, sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 60. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.5(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze (non-strettamente) crescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente		
Z-sequenza		
decrescente con 60		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1
66	58	56	51	59	48	37	31	60	40	14	55	34	46	21	19	57	54	62	39	20	52	36	27	53
1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	8
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente	9	66, 58, 56, 51, 48, 37, 31, 21, 19
Z-sequenza	14	66, 58, 56, 51, 48, 37, 31, 21, 19, 57, 54, 39, 36, 27
decrescente con 60	7	66, 60, 55, 46, 39, 36, 27
evita i primi 4	6	59, 48, 37, 31, 21, 19
evita da 13-mo a 16-mo	9	66, 58, 56, 51, 48, 40, 39, 36, 27
minima copertura	9	$\underbrace{66}_{1};\ \underbrace{58, 59, 60, 62}_{2};\ \underbrace{56, 57}_{3};\ \underbrace{51, 55}_{4};\ \underbrace{48, 54}_{5};\ \underbrace{37, 40, 46, 52}_{6};\ \underbrace{31, 34, 39}_{7};\ \underbrace{14, 21, 36, 53}_{8};\ \underbrace{19, 20, 27}_{9}$

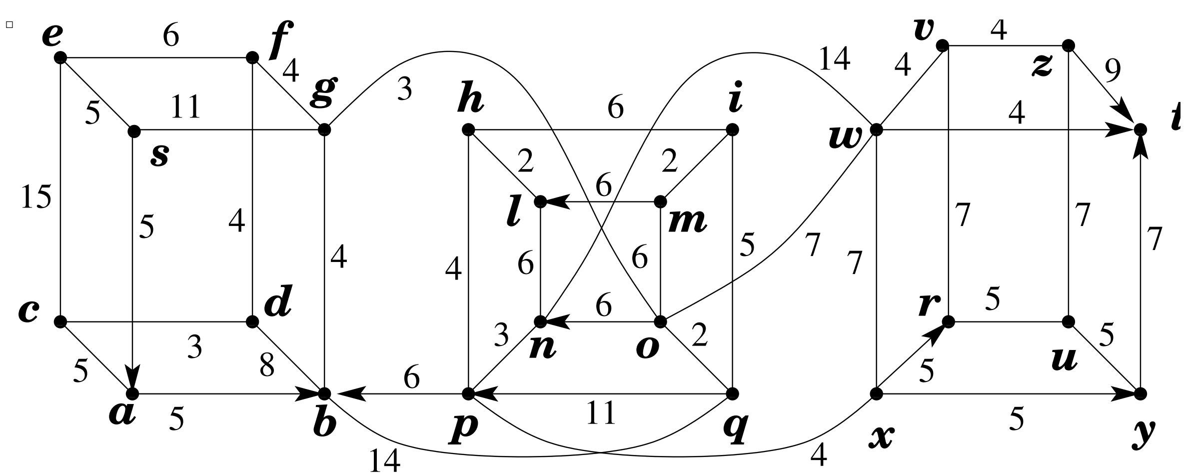
Dove per il penultimo punto (5.5) si é osservato dalla tabella di DP (ultima riga) che:

per raccogliere 8 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 14,

per raccogliere 7 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 31,
per raccogliere 6 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 40,
per raccogliere 5 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 48,
per raccogliere 4 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 55,
per raccogliere 3 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 56,
per raccogliere 2 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 60,
per raccogliere 1 elementi sul solo lato sinistro, esso deve valere massimo 66,

e si sono poi ordinatamente combinate queste osservazioni con analoghe osservazioni concernenti le migliori (non-dominate) scelte relative al come giocarsi il lato destro, sempre come lette dalla tabella (prima riga). La scelta migliore si è rilevata quella di prendere 6 elementi a sinistra (terminando in un 40) e 3 elementi a destra (cominciando con un 39); sono due scelte compatibili in quanto $40 > 39$.
Infine, per l'ultimo punto (5.6) ho costruito la sequenza crescente i-esima collocando in essa tutti quei numeri della sequenza in input tali che la massima lunghezza di una sequenza decrescente terminante in essi, come calcolata nell'ultima riga della tabella di PD, era precisamente i.

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G; (2) il grafo G'.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ln.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

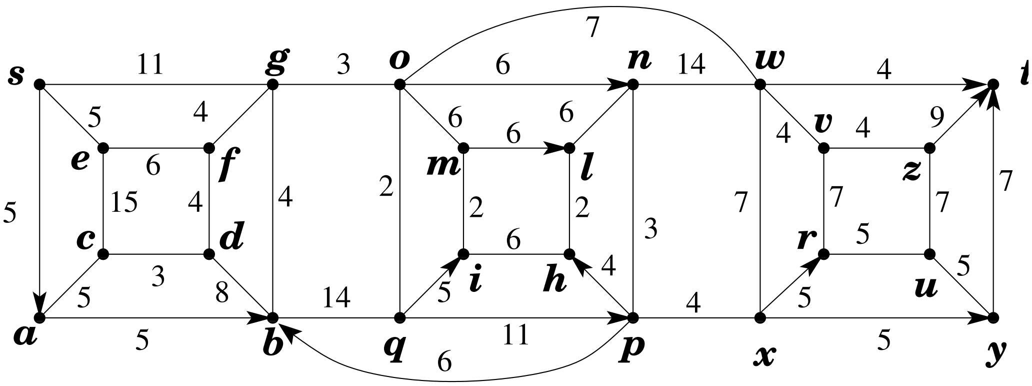
6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

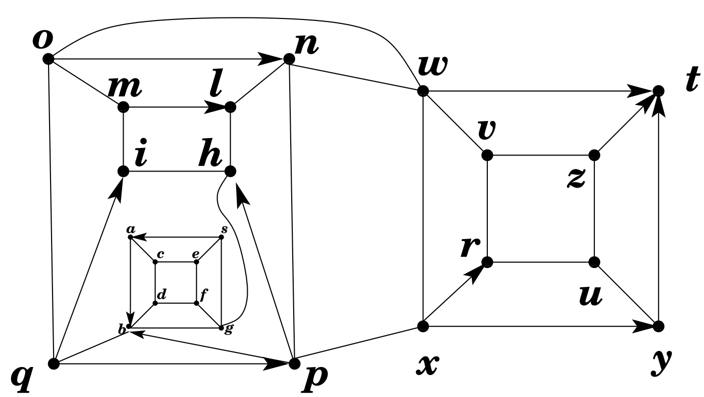
risposte.

Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

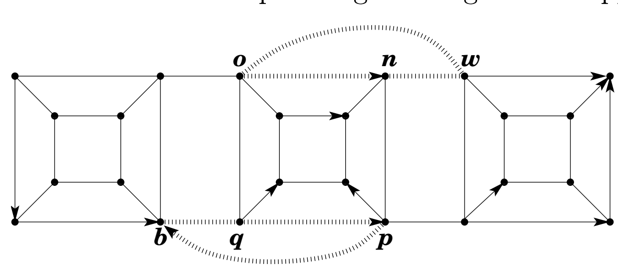


Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

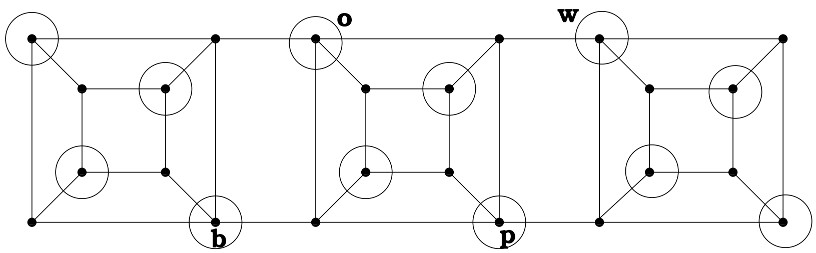
Per altro, anche G' è planare come messo in evidenza (=certificato) dalla seguente figura.



Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.

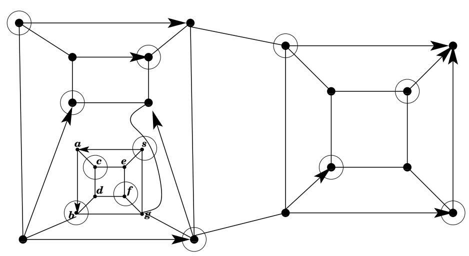


In effetti la rimozione di 2 soli archi (ow e pb) basta a rendere G bipartito come esibito in figura.



Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 2.

Il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh non é bipartito, ed almeno 2 archi devono essere rimossi per renderlo tale come messo in evidenza sempre dai 2 circuiti dispari e disgiunti sugli archi onw e bqp. In effetti la rimozione di 2 soli archi (ow e pb) basta a rendere G bipartito come esibito in figura.

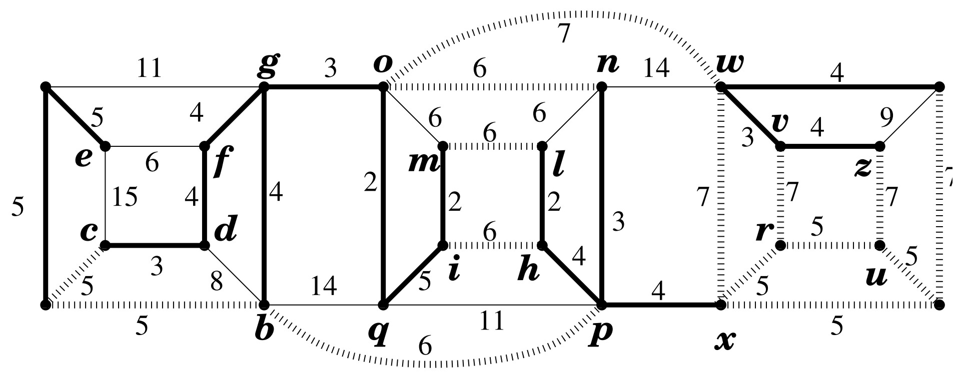


La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 160$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on, ml, ih, pb), più uno qualsiasi dei 5 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 4 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a di cui si era detto più sopra).

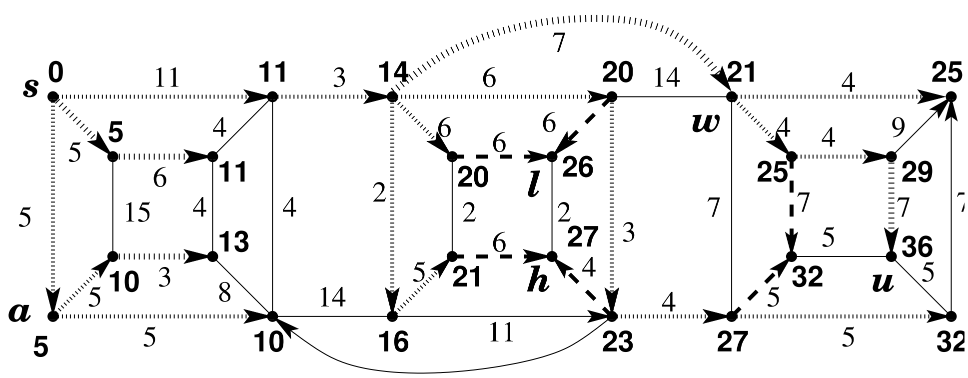
fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;

wx in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi w, v, z, t da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$;

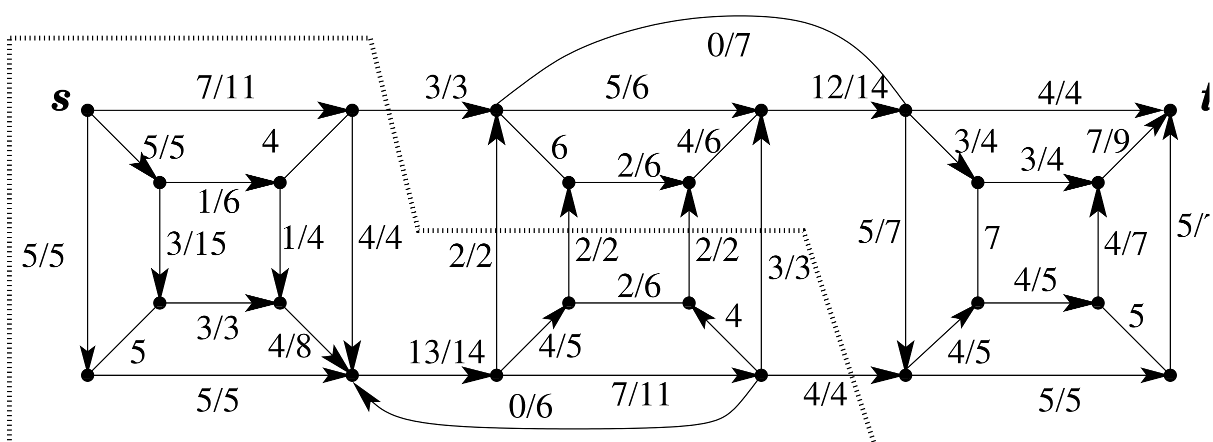
ln in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $lnph$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^3 = 8$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 18 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l, e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo r.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;

2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad

esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);

3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.