Esercizi sulla Dualità

4.4 **Duale di un problema di PL**. Scrivere il duale del problema di PL:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
\min & & & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & & \\
& x_1 & - & x_2 & & & + & 2x_4 & \geq & 2 \\
& & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\
& 2x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 1
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

$$x_3, x_4 \quad \text{libere}$$

4.5 **Duale del problema di trasporto**. Supponiamo di avere n impianti di produzione, ciascuno con una capacità produttiva pari a p_i, $i \leq n$, ed m depositi, aventi fabbisogno pari a d_j, $j \leq m$. Si denota con c_{ij} il costo di trasporto da un impianto i ad un deposito j. Indicando con x_{ij} la quantità di merce da trasportare dall'impianto i al deposito j, il problema di trasporto può essere formulato come segue:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{P1}) & \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\
& & -\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq -p_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m \\
& & x_{ij} \geq 0
\end{array}
$$

Supponendo il problema ammissibile (il che equivale alla condizione $\sum_{j=1}^{m} d_j \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$, cioè che la totalità del fabbisogno non ecceda la totalità di produzione), determinare il duale del problema di trasporto e darne un'interpretazione economica.

4.6 **Scarti complementari**. Sia

$$
\begin{array}{llrcrl}
(\mathbf{P2}) & \max & 2x_1 & + & x_2 & \\
& & x_1 & + & 2x_2 & \leq 14 \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \leq 10 \\
& & x_1 & - & x_2 & \leq 3
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

a) scrivere il problema duale;
b) verificare che $\bar{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ è soluzione ammissibile;
c) dimostrare che $\bar{x}$ è anche una soluzione ottima (teorema degli scarti complementari);
d) determinare la soluzione ottima del duale.

SOLUZIONI

4.4 **Duale di un problema di PL**. Il duale del problema dato è il seguente:

$$
\begin{array}{rrcrcrcr}
\max & 2y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & & \\
 & y_1 & & & + & 2y_3 & \leq & 0 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & & & \leq & 2 \\
 & & & y_2 & - & y_3 & = & 1 \\
 & 2y_1 & & & + & y_3 & = & -3
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \quad \text{libera}$$

$$y_3 \leq 0$$

4.5 **Duale del problema di trasporto**. Assegnando le variabili duali u_i e v_j alle due rispettive classi di vincoli, e notando che ogni colonna della matrice dei vincoli del primale ha solo due elementi non zero, uno che vale -1 (corrispondente alla prima classe di vincoli) e l'altro che vale 1 (corrispondente alla seconda classe di vincoli), il duale è:

$$
\begin{array}{lll}
(\mathbf{D1}) \quad \max & -\sum_{i=1}^{n} p_i u_i + \sum_{j=1}^{m} d_j v_j & \\
 & v_j - u_i \leq c_{ij} & \forall i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\
 & u_i \geq 0, v_j \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Interpretazione economica: supponiamo che un'azienda fornitrice di servizi logistici si rivolga all'impresa di produzione cui si riferisce il modello (P1), proponendo di acquistare il prodotto disponibile presso l'impianto di produzione i al prezzo unitario di u_i euro e di vendere il prodotto richiesto al deposito j al prezzo unitario di v_j euro. Supponendo che tutte le unità disponibili debbano essere prelevate dagli impianti di produzione, e che tutte le unità richieste debbano essere consegnate ai depositi, l'obiettivo dell'azienda logistica può essere espresso come:

$$\max -\sum_{i=1}^{n} p_i u_i + \sum_{j=1}^{m} d_j v_j$$

Per convincere il produttore ad avvalersi dei servizi offerti, l'azienda logistica deve imporre che i prezzi di acquisto u_i e di vendita v_j soddisfino la seguente condizione: il costo derivante al produttore dalla vendita di un'unità di prodotto presso l'impianto di produzione i e dall'acquisto di un'unità presso il deposito j deve essere non superiore al costo unitario di trasferimento diretto da i a j, ovvero $v_j - u_i \leq c_{ij}$ $\forall i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$.

4.6 **Scarti complementari**.

a) Il duale del problema dato è:

$$(\mathbf{D2}) \qquad \begin{array}{lrcrcrl} \min & 14y_1 & + & 10y_2 & + & 3y_3 & \\ & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq 2 \\ & 2y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \geq 1 \end{array}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

b) $\bar{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ soddisfa i vincoli di $(\mathbf{P2})$, quindi è una soluzione ammissibile.

c) Il teorema degli scarti complementari implica che se $\bar{x} = (x_1, x_2)$ è ammissibile nel primale e $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ è ammissibile nel duale, ed entrambe soddisfano

$$y_i(a_i^T x - b_i) = 0 \qquad \forall i$$
$$(c_j - y^T A_j)x_j = 0 \qquad \forall j$$

allora $\bar{x}$ è l'ottimo del primale e $\bar{y}$ del duale.
Quindi

$$y_1(x_1 + 2x_2 - 14) = 0$$
$$y_2(2x_1 - x_2 - 10) = 0$$
$$y_3(x_1 - x_2 - 3) = 0$$

$$x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 - 2) = 0$$
$$x_2(2y_1 - y_2 - y_3 - 1) = 0$$

$\bar{x} = (\frac{20}{3}, \frac{11}{3})$ soddisfa all'uguaglianza il primo ed il terzo vincolo di (P2), ma non il secondo; di conseguenza, $y_2 = 0$. Dato che $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, inoltre, abbiamo:

$$y_1 + 2y_2 + y_3 - 2 = 0$$

$$2y_1 - y_2 - y_3 - 1 = 0$$

E quindi, dato che $y_2 = 0$, otteniamo $y_1 = 1$ e $y_3 = 1$. Poiché $\bar{y} = (1, 0, 1)$ è una soluzione duale ammissibile (soddisfa ai vincoli del duale di **P2**), e la coppia di soluzioni primale/duale $(\bar{x}, \bar{y})$ soddisfa le condizioni degli scarti complementari, $\bar{x}$ è la soluzione ottima del problema primale.

d) Per il teorema degli scarti complementari, si ha anche che $\bar{y} = (1, 0, 1)$ è la soluzione ottima del duale.