NOME: .... COGNOME: ....
MATRICOLA: .... FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 25 luglio 2018
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 60, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (7 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	•	1	0	0	0	2
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	0	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in I–10 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

Problema 2 (2+2+1+1+5+11+1+1+4=28 punti):
Sulla retta reale si considerino i seguenti intervalli:

$$I_1 = [0, 3), I_2 = [1, 2], I_3 = [3, 10], I_4 = [4, 5], I_5 = [5, 7], I_6 = [6, 6], I_7 = [6, 11].$$

Il problema che consideriamo è quello di individuare un sottoinsieme di cardinalità massima della collezione di intervalli sopra assegnati, evitando però di includere coppie di intervalli che siano in conflitto tra di loro. Due intervalli I_a ed I_b sono in conflitto se condividono anche un solo punto, ossia quando $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. L'intervallo I_6 è pertanto in conflitto sia con I_5 che con I_7, mentre invece I_1 ed I_3 non sono in conflitto dato che I_1 è aperto a destra (non contiene il punto 3).
(2pt) Formulare tale problema con la Programmazione Lineare Intera (PLI). Si faccia riferimento all'istanza specifica, specificando ogni singolo vincolo.
(1+1=2pt) Ampliare la formulazione in due modi:

1. **(1pt)** per gestire il caso in cui siano assegnati n intervalli $I_1, \ldots, I_n$ con intervallo I_i, di estremi a_i e b_i, possibilmente aperto a destra e/o a sinistra. (Per gestire questa generalizzazione dovrai astrarre, in quanto non sarà più possibile elencare i singoli vincoli).

2. **(1pt)** ad ogni intervallo I_i è associato un valore v_i (per concretzza, e per rendere questo secondo punto indipendente dal precedente, nell'esempio specifico di 7 intervalli propongo il set di valori tutti ad 1 tranne $v_5 = 3$). Vogliamo ora trovare una sottocollezzione di intervalli mutualmente compatibili che massimizzi la somma dei valori degli intervalli presi.

(1pt) Chiedo più cose, in AND: Elencare le soluzioni ottime per l'istanza di esempio, sia ove la funzione obiettivo sia la cardinalità, sia ove essa sia il valore. In questo caso, i due spazi di soluzioni ottime sono del tutto disgiunti. Per mettere in relazione i due problemi e le relative complessità (ridurre il primo problema al secondo) si osservi in generale come, per n intervalli assegnati, sia sempre possibile assegnare n valori v_i in modo che i due spazi di soluzioni ottime coincidano.

(1pt) Data una collezione di intervalli chiusi, si consideri il problema di individuare una sottocollezione di intervalli disgiunti la cui unione ricopra il massimo numero di punti. (Nel caso dell'istanza esempio (dopo aver chiuso tutti gli intervalli) la soluzione ottima sarebbe $\{I_1, I_3\}$). Ridurre anche questo problema al caso generale pesato.

(2+2+1b=5pt) Suggerire (**(2pt)**) un semplice algoritmo greedy per il caso di cardinalità, argomentando in modo chiaro e lucido (= dimostrando **(2pt)**) che esso ritorna sempre una soluzione ottima. Per semplicità si consideri prima il caso in cui tutti gli intervalli assegnati siano chiusi. Il punto bonus viene assegnato se si specifica come comportarsi in caso vi siano anche intervalli non-chiusi.

(3+2+1+1+1b+1+2=11pt) Fornire un algoritmo polinomiale, di programmazione dinamica, per il problema generale (quello coi valori). Non chiedo necessariamente né codice né pseudocodice, la cosa importante é definire la famiglia dei problemi (**(3pt)**), poi dare la ricorrenza (**(2pt)**), infine identificare e gestire gli eventuali casi base (**(1pt)**) ed esplicitare come avvalersi della famiglia di problemi per rispondere (**(1pt)**). La logica del punto bonus è come da commessa precedente.

Ridefinire solo la famiglia di problemi per affrontare la variante del problema che richiede di ricoprire il massimo numero di punti, nel caso particolare di intervalli tutti chiusi (**(1pt)**) e nel caso generale (**(2pt)** aggiuntivi).

(1pt) Alla famiglia di intervalli dell'istanza può essere associato un grafo (grafo dei conflitti) che ha per nodi gli n intervalli, e dove due nodi sono adiacenti se e solo se, come intervalli, hanno punti in comune. Si disegni il grafo dei conflitti per l'istanza d'esempio.

(1pt) Si osservi come il problema pesato può essere visto come un caso particolare del problema della ricerca di un insieme indipendente di peso massimo entro un grafo. Di quale grafo stiamo parlando? Quali elementi (nodi od archi?) di questo grafo sono pesati, ed a cosa corrispondono questi numeri? Si definisca cosa sia un insieme indipendente nel grafo, ed in cosa consista il problema della ricerca di un insieme indipendente di peso massimo in un grafo pesato (per supportare la riduzione/rappresentazione suggerita).

(4pt) La famiglia di n intervalli si dice *standard* se tutti gli intervalli sono chiusi, tutti gli estremi sono interi e più precisamente

$$\{a_i, b_i \mid i = 1, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, 2n\}.$$

Si dimostri costruttivamente che data una qualsiasi famiglia di intervalli esiste una famiglia di intervalli standard che presenta lo stesso grafo dei conflitti. Esibire una procedura per standardizzare una famiglia di intervalli (uno pseudocodice potrebbe rappresentare il modo più efficace per esprimersi).

Problema 3 (10 punti):

$$\max\ 2 + 22x_1 - 10x_2 - 12x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ -10x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.1(2pt) Portare il problema in forma standard.

3.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

3.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario.

3.4(1pt) Scrivere il tableau per una soluzione ammissibile di base al problema originario.

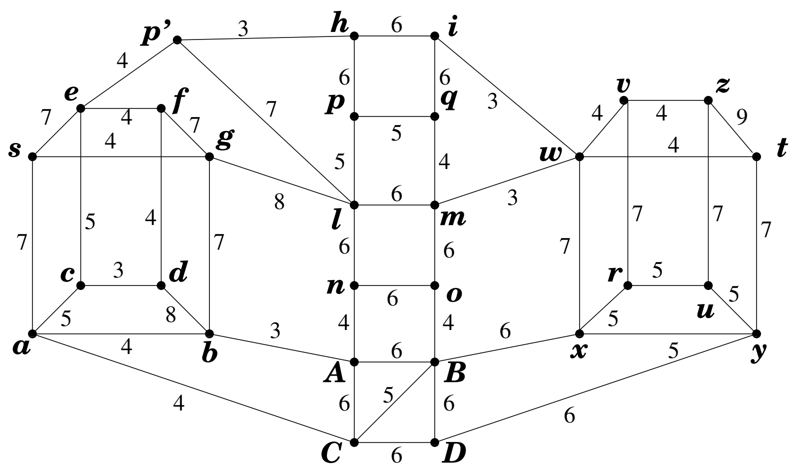
3.5(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

3.6(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

3.7(1pt) Fornire una soluzione primale, parametrizzata negli incrementi, che evidenzi la nostra disponibilitá a pagare tale prezzo.

3.8(1pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Problema 4 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo planare.

4.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito.

4.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

4.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: ln, no, ca.

4.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

4.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi Nome, Cognome e Matricola per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.