Esame di Ricerca Operativa - 18 giugno 2015
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Una casa editrice deve effettuare il trasporto di libri da 3 depositi (D_1, D_2, D_3) a 4 librerie (L_1, L_2, L_3, L_4). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto da ciascun deposito a ciascuna libreria, le quantità di libri disponibili nei depositi e quelle richieste dalle singole librerie:

	L_1	L_2	L_3	L_4	Disponibilità
D_1	$0,5$	$0,8$	1	$1,5$	50
D_2	$0,7$	2	$0,8$	$0,5$	100
D_3	1	$0,5$	$1,5$	$0,6$	40
Richieste	30	70	45	45	

Ad esempio, il deposito D_1 ha una disponibilità di 50 libri e la libreria L_3 ne richiede almeno 45; inoltre, trasportare un libro da D_1 a L_4 costa $1,5$ euro. Poichè i costi di trasporto sono a carico delle librerie, l'obiettivo è quello di minimizzare il massimo fra i costi di trasporto sostenuti da ciascuna libreria e nel contempo soddisfare i vincoli di domanda e di offerta. Formulare come un problema di PL.

svolgimento.

Per l'individuazione delle variabili decisionali, partiamo dalla funzione obiettivo richiesta dal problema. Poichè i costi sostenuti da ciascuna libreria dipendono dai costi unitari, che a loro volta dipendono dal deposito da cui ciascun libro proviene, le variabili decisionali sono le seguenti:

$x_{i,j}$ = numero di libri trasportati dal deposito D_i alla libreria L_j, con $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$.

Quindi, ad esempio, il costo complessivo di trasporto sostenuto dalla libreria L_1 è dato da:

$$0,5\,x_{1,1} + 0,7\,x_{2,1} + x_{3,1}.$$

Di conseguenza, la funzione obiettivo che intediamo minimizzare è data dal massimo di 4 quantità, ciascuna delle quali indica il costo di trasporto complessivo sostenuto da una singola libreria; essa è scrivibile nel seguente modo:

$$z = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5\,x_{1,1} + 0,7\,x_{2,1} + x_{3,1}; \\ 0,8\,x_{1,2} + 2\,x_{2,2} + 0,5\,x_{3,2}; \\ x_{1,3} + 0,8\,x_{2,3} + 1,5\,x_{3,3}; \\ 1,5\,x_{1,4} + 0,5\,x_{2,4} + 0,6\,x_{3,4} \end{array} \right\}.$$

I vincoli sono i seguenti:

vincoli sulle disponibilitá

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} &\leq 50 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} &\leq 100 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} &\leq 40 \end{aligned}$$

vincoli sulle richieste

$$\begin{aligned} x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} &\geq 30 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} &\geq 70 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} &\geq 45 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} &\geq 45 \end{aligned}$$

vincoli di non negativitá

$$x_{i,j} \geq 0 \qquad \text{i = 1,2,3} \qquad \text{j = 1,2,3.}$$

Di conseguenza, la formulazione cui siamo pervenuti a questo punto è:

$$\begin{cases} \min_x z = \max \begin{Bmatrix} 0,5\, x_{1,1} + 0,7\, x_{2,1} + x_{3,1}; \\ 0,8\, x_{1,2} + 2\, x_{2,2} + 0,5\, x_{3,2}; \\ x_{1,3} + 0,8\, x_{2,3} + 1,5\, x_{3,3}; \\ 1,5\, x_{1,4} + 0,5\, x_{2,4} + 0,6\, x_{3,4} \end{Bmatrix} \\ x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 50 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 100 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 40 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \geq 30 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \geq 70 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \geq 45 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} \geq 45 \\ x_{i,j} \geq 0 \qquad \text{i = 1,2,3} \qquad \text{j = 1,2,3.} \end{cases}$$

Tale formulazione è caratterizzata da una funzione obiettivo non lineare (è il massimo puntuale di 4 funzioni lineari). Introducendo una variabile ausiliaria v, è possibile ottenere la seguente formulazione lineare equivalente alla precedente:

$$\min_{x,v} v \begin{cases} v \geq 0,5\, x_{1,1} + 0,7\, x_{2,1} + x_{3,1}; \\ v \geq 0,8\, x_{1,2} + 2\, x_{2,2} + 0,5\, x_{3,2}; \\ v \geq x_{1,3} + 0,8\, x_{2,3} + 1,5\, x_{3,3}; \\ v \geq 1,5\, x_{1,4} + 0,5\, x_{2,4} + 0,6\, x_{3,4} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 50 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 100 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 40 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \geq 30 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \geq 70 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \geq 45 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} \geq 45 \\ x_{i,j} \geq 0 \qquad \text{i = 1,2,3} \qquad \text{j = 1,2,3.} \end{cases}$$

Problema 2 (3 punti):

Il Ministero della Sanità ha in progetto la costruzione di ospedali ortopedici specializzati, che nel raggio di 200 km siano in grado di servire le seguenti città: Latina, Lecce, Matera, Napoli, Potenza, Salerno e Roma. Nel seguito, per ogni città, sono elencate quelle situate a una distanza inferiore ai 200 km:

Latina: Latina, Napoli, Roma;

Lecce: Lecce, Matera;

Matera: Lecce, Matera, Potenza;

Napoli: Latina, Napoli, Potenza, Salerno;

Potenza: Matera, Napoli, Potenza, Salerno;

Salerno: Napoli, Potenza, Salerno;

Roma: Latina, Roma.

Ad esempio, se un ospedale venisse costruito a Napoli, esso sarebbe in grado di servire anche le città di Latina, Potenza e Salerno, che si trovano a una distanza da Napoli inferiore a 200 km. Si vuole decidere in quali delle 7 città costruire gli ospedali, in maniera tale che ogni città abbia almeno un ospedale ad una distanza non superiore a 200 km.

Si formuli come un modello di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema di minimizzare il numero di ospedali da costruire.

svolgimento.

In questo problema decisionale, bisogna decidere dove costruire gli ospedali, scegliendo fra 7 possibili città. Di conseguenza, ci poniamo la seguente domanda. Nella città i sarà costruito un ospedale? La risposta a questa domanda è di tipo binario: o sì o no!! In casi di questo tipo, quindi, le variabili decisionali sono di tipo binario (possono cioè assumere due soli valori: 0 e 1). Nel caso particolare di questo esercizio, esse sono definite nel modo seguente. Indichiamo con x_i (con $i = 1, \ldots, 7$) la variabile decisionale che nel nostro modello assumerà valore 1 se nella città i sarà costruito un ospedale e varrà 0 se nella città i non verrà costruito alcun ospedale. Per semplicità adottiamo la seguente convenzione: l'indice $i = 1$ corrisponde alla città di Latina, l'indice $i = 2$ corrisponde alla città di Lecce, l'indice $i = 3$ corrisponde alla città di Matera, l'indice $i = 4$ corrisponde alla città di Napoli, l'indice $i = 5$ corrisponde alla città di Potenza, l'indice $i = 6$ corrisponde alla città di Salerno e l'indice $i = 7$ corrisponde alla città di Roma. Poichè vogliamo minimizzare il numero di ospedali da costruire, la funzione obiettivo è:

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_7 \,.$$

Infatti, poichè le variabili sono binarie, la funzione obiettivo ad esempio varrà 7 se in ognuna delle 7 città sarà costruito un ospedale, o varrà ad esempio 4 se si costruisce un ospedale in 4 città.

Per quanto riguarda i vincoli, bisogna garantire che ognuna delle 7 città sia servita almeno da un ospedale situato a non più di 200 km di distanza. Ad esempio, perchè un ospedale sia collocato a una distanza inferiore a 200 km rispetto a Latina, esso deve essere collocato o a Latina, o a Napoli o a Roma. Tale vincolo può essere espresso nel seguente modo: $x1+x4+x7 \geq 1$. Il membro di sinistra del precedente vincolo indica il numero di ospedali che vengono costruiti nel raggio di 200 km da Latina. Analogamente, i vincoli che garantiscono almeno un ospedale nel raggio di 200 km da ciascuna delle altre 6 città sono:

$x_2 + x_3 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Lecce;

$x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Matera;

$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Napoli;

$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Potenza;

$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Salerno;

$x_1 + x_7 \geq 1$ almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Roma.

Quindi la formulazione finale del problema è:

$$\begin{cases} \min_x z = \sum_{i=1}^{7} x_i \\ x_1 + x_4 + x_7 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_1 + x_7 \geq 1 \\ x_i \in \{0,1\} \qquad \text{i = 1,2, \dots, 7.} \end{cases}$$

Problema 3 (1+1+2+1+2=7 punti): Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3)$:

$$P(t) \begin{cases} \begin{array}{lrrrrcr} \min_x z = & 4\,x_1 & -7\,x_2 & +4\,x_3 & +5\,x_4 & & \\ & 6\,x_1 & +4\,x_2 & +6\,x_3 & -3\,x_4 & \leq & 2+t_1 \\ & 7\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & +4\,x_4 & \geq & 3+t_2 \\ & 3\,x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & +6\,x_4 & = & 5+t_3 \\ & x_1, & & x_3 & & \geq & 0 \end{array} \end{cases}$$

3.1(1pt) costruire il duale $D(t)$ di $P(t)$;

3.2 (1pt) scrivere tutte le relazioni di scarto complementare che legano $P(t)$ e il suo duale;

3.3 (2pt) sapendo che la soluzione ottima di $P(0)$ è $\overline{x}^T = [0, 3/2, 0, 4/3]$, determinare una soluzione ottima del duale $D(0)$ applicando il teorema degli scarti complementari;

3.4 (1pt) esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare t_1, t_2 e t_3 nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

3.5 (2pt) per ogni $i = 1, 2, 3$, fornire i limiti a_i e b_i tali che il prezzo ombra di t_i sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0\ \forall j \neq i$).

svolgimento. Per prima cosa moltiplichiamo per -1 il primo vincolo di P; otteniamo:

$$P' \begin{cases} \min_x z = & 4\,x_1 & -7\,x_2 & +4\,x_3 & +5\,x_4 & & \\ & -6\,x_1 & -4\,x_2 & -6\,x_3 & +3\,x_4 & \geq & -2-t_1 \\ & 7\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & +4\,x_4 & \geq & 3+t_2 \\ & 3\,x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & +6\,x_4 & = & 5+t_3 \\ & x_1, & & x_3 & & \geq & 0 \end{cases}$$

Poichè P' è un problema di minimizzazione, il suo duale è un problema di massimizzazione. Poichè P' ha tre vincoli, il suo duale ha tre variabili (π_1, π_2, π_3). In particolare le variabili π_1 e π_2 sono vincolate a essere positive, dal momento che corrispondono a vincoli di disuguaglianza in P'; viceversa, la variabile π_3 è libera in segno poichè corrisponde a un vincolo primale di uguaglianza. Poichè P' ha quattro variabili, il suo duale D ha quattro vincoli. Il secondo e il quarto vincolo di D sono di uguaglianza in quanto corrispondono a variabili primali libere in segno; viceversa il primo e il terzo vincolo di D sono vincoli di disuguaglianza (in particolare sono vincoli di $\leq$, poichè D è un problema di massimizzazione e le variabili del primale sono non-negative). I coefficienti di costo della funzione obiettivo di P' diventano i termini noti del sistema di vincoli in D e viceversa. La matrice dei vincoli di D è ottenuta trasponendo la matrice dei vincoli di P'. Pertanto, il duale D di P' (e quindi di P) è

$$D \begin{cases} \max_\pi \psi = & -(2+t_1)\,\pi_1 & +(3+t_2)\,\pi_2 & +(5+t_3)\,\pi_3 & & \\ & -6\,\pi_1 & +7\,\pi_2 & +3\,\pi_3 & \leq & 4 \\ & -4\,\pi_1 & +5\,\pi_2 & -2\,\pi_3 & = & -7 \\ & -6\,\pi_1 & +5\,\pi_2 & -\pi_3 & \leq & 4 \\ & 3\,\pi_1 & +4\,\pi_2 & +6\,\pi_3 & = & 5 \\ & \pi_1, & \pi_2 & & \geq & 0 \end{cases}$$

Le relazioni di scarto complementare sono:

$$C_1 \begin{cases} (-6\,x_1 & -4\,x_2 & -6\,x_3 & +3\,x_4 & +2+t_1)\,\pi_1 & = & 0 \\ (7\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & +4\,x_4 & -3-t_2)\,\pi_2 & = & 0 \\ (3\,x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & +6\,x_4 & -5-t_3)\,\pi_3 & = & 0 \end{cases} \quad C_2 \begin{cases} (-6\,\pi_1 & +7\,\pi_2 & +3\,\pi_3 & -4)\,x_1 & = & 0 \\ (-4\,\pi_1 & +5\,\pi_2 & -2\,\pi_3 & +7)\,x_2 & = & 0 \\ (-6\,\pi_1 & +5\,\pi_2 & -\pi_3 & -4)\,x_3 & = & 0 \\ (3\,\pi_1 & +4\,\pi_2 & +6\,\pi_3 & -5)\,x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Calcoliamo ora la soluzione complementare di $\overline{x}$, sostituendo le componenti di $\overline{x}$ nei sistemi C_1 e C_2. In particolare, poichè la seconda e la quarta componente di $\overline{x}$ sono non nulle, allora una soluzione ottima $\overline{\pi}$ del duale deve soddisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} -4\,\pi_1 & +5\,\pi_2 & -2\,\pi_3 & +7 & = & 0 \\ 3\,\pi_1 & +4\,\pi_2 & +6\,\pi_3 & -5 & = & 0 \end{cases}$$

Inoltre, poichè il secondo vincolo di P, in corrispondenza di $\overline{x}$, è soddisfatto per disuguaglianza stretta, allora per la seconda uguaglianza del sistema C_2 deve essere $\overline{\pi}_2 = 0$. In definitiva, la soluzione ottima del duale si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} -4\,\pi_1 & -2\,\pi_3 & +7 & = & 0 \\ 3\,\pi_1 & +6\,\pi_3 & -5 & = & 0 \end{cases}$$

da cui $\overline{\pi}_1 = 16/9$ e $\overline{\pi}_3 = -1/18$. Quindi $\overline{\pi}^T = [16/9, 0, -1/18]$ è stata completamente ricostruita dalla soluzione primale cui intende essere complementare. (Questo significa che la soluzione primale non era degenere.)

I prezzi ombra sono dati proprio da $\overline{\pi}^T = [16/9, 0, -1/18]$ e possono essere messi in evidenza nella seguente scrittura per i valori della funzione obiettivo all'ottimo

$$z(t) = \psi(t) = -(2+t_1)\,\pi_1+(3+t_2)\,\pi_2+(5+t_3)\,\pi_3 = -32/9-16/9\,t_1-5/18-1/18\,t_3 = -23/6-16/9\,t_1-1/18\,t_3\,.$$

Calcoliamo ora la soluzione di base di $P(t)$, per t generico, corrispondente alla stessa partizione delle variabili (in base/fuori base) che per la soluzione di base assegnata $\overline{x}^T = [0, 3/2, 0, 4/3]$ per $P(0)$. Tengo cioè a 0 quelle stesse variabili su cui $\overline{x}$ è a 0 e lo stesso per le varibili di slack (ossia metto ad eguaglianza quegli stessi vincoli che $\overline{x}$ soddisfa ad eguaglianza).

$$P(t)\begin{cases} -7\,x_2 + 5\,x_4 & = \quad z = -23/6 - 16/9\,t_1 - 1/18\,t_3 \\ +4\,x_2 - 3\,x_4 & = \quad 2 + t_1 \\ -2\,x_2 + 6\,x_4 & = \quad 5 + t_3 \end{cases}$$

Da cui $x_2 = 3/2 + 1/3t_1 + 1/6t_3$, $x_4 = 4/3 + 1/9t_1 + 2/9t_3$, con $x_1 = x_3 = 0$ è la soluzione ottima di base per $P(t)$. La domanda è dove essa ritenga ammissibilità. Dulamente, la soluzione di base duale $\overline{\pi}^T = [16/9, 0, -1/18]$ non dipende da t e pertanto resta ammissibile per ogni t. Tuttavia, affinchè essa sia ottima (e la soluzione primale complementare ad essa sia ammissibile) dovremo avere che:

non negatività della x_1: $x_1 = 0 \geq 0$ ($\Rightarrow$ non impone alcun limite);

non negatività della x_3: $x_3 = 0 \geq 0$ ($\Rightarrow$ non impone alcun limite);

secondo vincolo primale: $5\,x_2 + 4\,x_4 \geq 3 + t_2 \Rightarrow t_2 \leq 59/6$.

Quindi, la condizione $b_2 = 59/6$ delimita gli ambiti di validità dei vari prezzi ombra.

Problema 4 (6 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
peso	14	13	15	6	13	3	11	16	4	14	2	46	41	44	34
valore	50	63	60	33	30	13	60	66	20	60	11	66	60	20	70

4.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

4.2 (1pt) e nel caso $B = 33$?

4.3 (1pt) e nel caso $B = 28$?

4.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

4.5 (2pt) e se l'oggetto G non fosse più disponibile, quale sarebbe allora la soluzione ottima per $B = 26, 28, 33, 36$?

svolgimento. Per lo svolgimento di questo esercizio di PD si segua la solita traccia: un eventuale preprocessing per eliminare oggetti che non possano far parte di una soluzione ottima in base as un semplice criterio euristico seguito da una programmazione dinamica. Come criterio euristico, possiamo incominciare buttando via tutti quegli oggetti di peso ecce-debte $B = 36$. L'oggetto O può essere accompagnato solo dall'oggetto K (visto che tutte le domande prevedono $B \leq 36$) per un valore totale di 81, battuto dal valore della sola coppia $G + H$. Un argomento di valenza più generale può essere impiegato per scartare l'oggetto C, che è dominato sia dall'oggetto B che dall'oggetto G (potremo definire tale dominanza al seguente modo: un oggetto x domina un oggetto y se $val(x) \geq val(y)$, $peso(x) \leq peso(y)$ e, qualora entrambe queste diseguaglianze siano soddisfatte ad eguaglianza, allora l'etichetta x precede l'etichetta y. Abbiamo introdotto questo controllo sui nomi degli oggetti (etichette), considerati a priori come un insieme totalmente ordinato, solo perchè la dominanza sia una relazione d'ordine, e quindi si presti meglio al trarre conclusioni definitive). Ora, siccome nessuna soluzione ammissibile può contenere sia C che B che G, allora possiamo scartare C. Per esercizio, si cerchi di avvalersi di questo concetto di dominanza per escludere, in modo definitivo, ulteriori oggetti, pur con la garanzia di non rinuciare all'ottimo.

La tabella di programmazione prende avvio con una riga tutta a 0, dove si assume che nessuno degli oggetti sia disponibile, e quindi, riga dopo riga, aggiunge un nuovo oggetto dell'istanza in input a quelli considerati disponibili. Ciascuna riga prevede $36 + 1$ colonne, labellate con le possibili capacità intere dello zaino, da 0 a 36. Per ognuna di queste capacità $B' \leq B$, la riga specifica il valore della soluzione ottima per uno zaino di capacità B' ed ove gli oggeti disponibili siano quelli previsti dalla riga. Se avremo l'accortezza che l'aggiunta dell'oggetto G all'insieme (monotonicamente crescente) di oggetti disponibili avvenga solo all'ultima riga, ci risparmieremo di ricalcolare tutta la tabella per rispondere all'ultima domanda. Riportiamo solamente i risultati finali.

Con oggetto G disponibile:

B	max val	peso	quali prendere
36	187 = 60+20+33+11+63	36 = 11+4+6+2+13	G,I,D,K,B
33	169 = 60+33+13+63	33 = 11+6+3+13	G,D,F,B
28	143 = 60+20+63	28 = 11+4+13	G,I,B
26	137 = 60+20+33+11+13	26 = 11+4+6+2+3	G,I,D,K,F

Senza oggetto G:

B	max val	peso	quali prendere
36	169 = 13+33+63+60	36 = 3+6+13+14	F,D,B,J
33	156 = 63+33+60	33 = 13+6+14	B,D,J
28	140 = 11+13+20+33+63	28 = 2+3+4+6+13	K,F,I,D,B
26	129 = 13+20+33+63	26 = 3+4+6+13	F,I,D,B

Problema 5 (7 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	*R*	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	*H*

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

5.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

5.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

5.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

5.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

5.5(1pt) Quale é il minimo costo di una traversata da A–1 a G–9?

5.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	*H*

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bullet$
B	1	2	3	4	$\bullet$	$\bullet$	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	$\bullet$	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	$\bullet$	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	$\bullet$	$\bullet$	194
G	1	7	18	44	$\bullet$	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

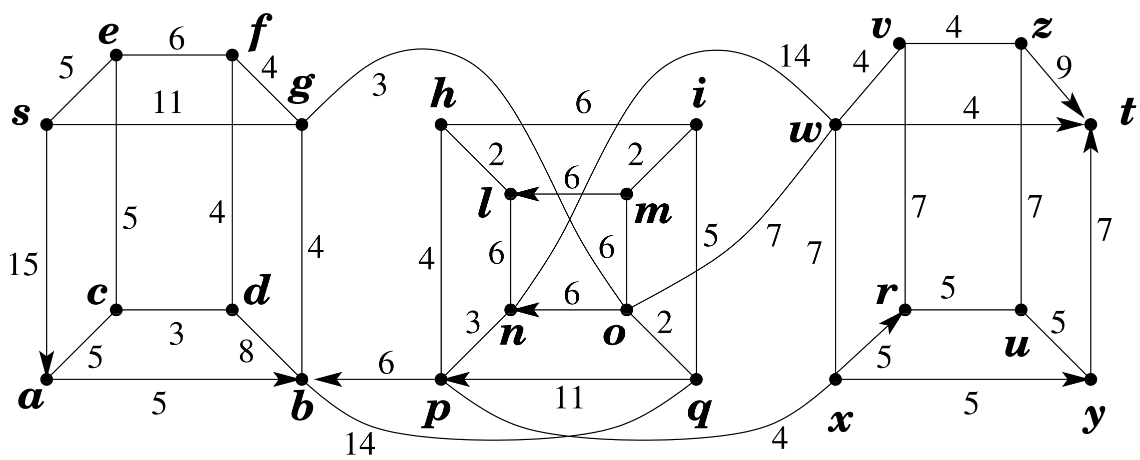
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	1_1	4_1	4_1	5_1	6_1	6_1	6_1	$\bullet$
B	2_1	3_1	3_1	3_1	$\bullet$	$\bullet$	6_1	6_2	6_2
C	4_1	5_1	3_1	4_2	4_2	4_2	5_2	6_2	7_4
D	4_1	4_1	$\bullet$	4_2	4_4	4_6	5_6	5_6	5_6
E	4_1	4_2	5_2	5_2	$\bullet$	5_6	5_{12}	5_{18}	5_{24}
F	4_1	5_3	6_5	6_2	6_2	6_6	$\bullet$	$\bullet$	6_{24}
G	7_1	8_3	6_5	7_7	$\bullet$	6_6	6_6	7_6	6_{24}

Leggendo i valori riportati nella cella G–9 scopriamo che il minimo costo di una traversata é di 6, e che esistono 24 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.
Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 $\to$ G–9	250
B–3 $\to$ G–9	44
A–1 $\to$ F–6	56
passaggio per D–5	100
minimo costo	6
numero di min-cost paths	24

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.



6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G; (1) il grafo G'.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ln.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

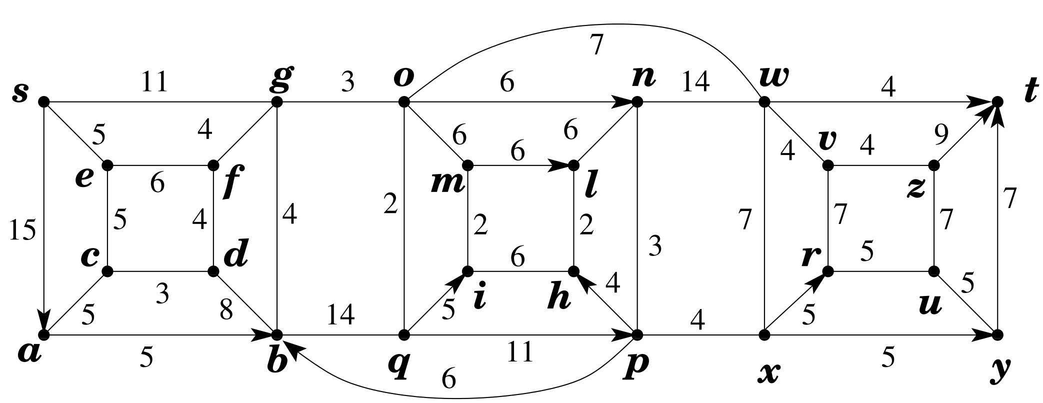
6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

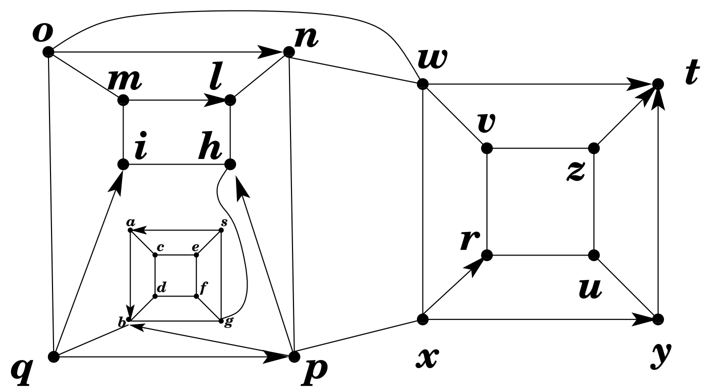
risposte.

Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

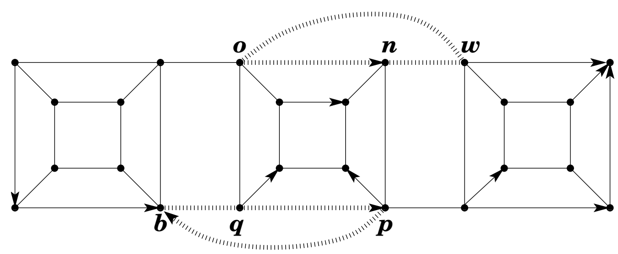


Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

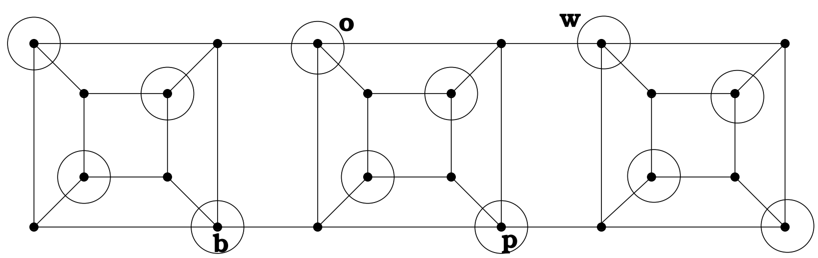
Per altro, anche G' è planare come messo in evidenza (=certificato) dalla seguente figura.



Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.

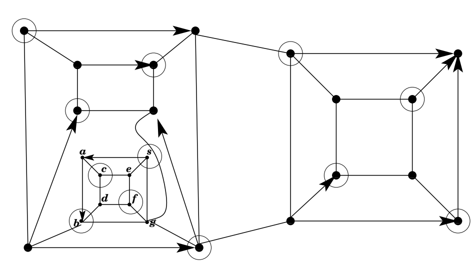


In effetti la rimozione di 2 soli archi (ow e pb) basta a rendere G bipartito come esibito in figura.



Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 2.

Il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh non é bipartito, ed almeno 2 archi devono essere rimossi per renderlo tale come messo in evidenza sempre dai 2 circuiti dispari e disgiunti sugli archi *onw* e *bqp*. In effetti la rimozione di 2 soli archi (ow e pb) basta a rendere G bipartito come esibito in figura.

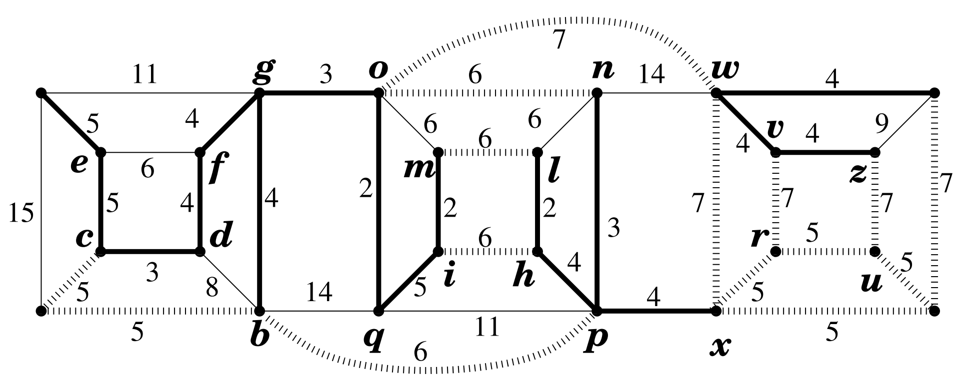


La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 160$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on, ml, ih, pb), più uno qualsiasi dei 5 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 5 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a di cui si era detto più sopra).

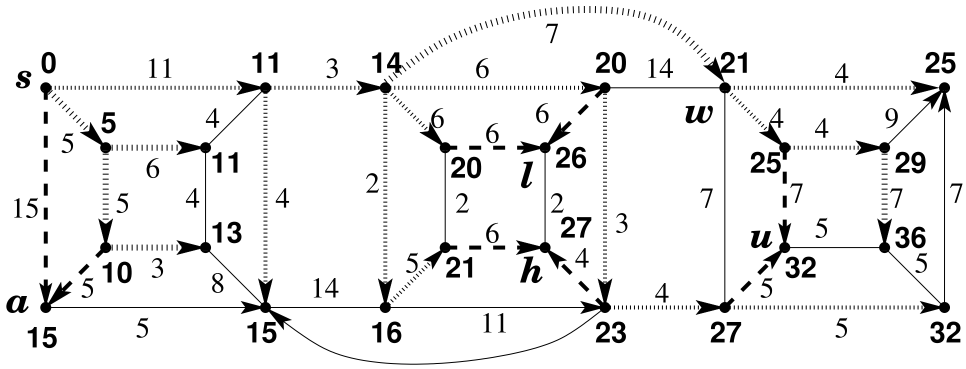
fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;

wx in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi w, v, z, t da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $lnph$;

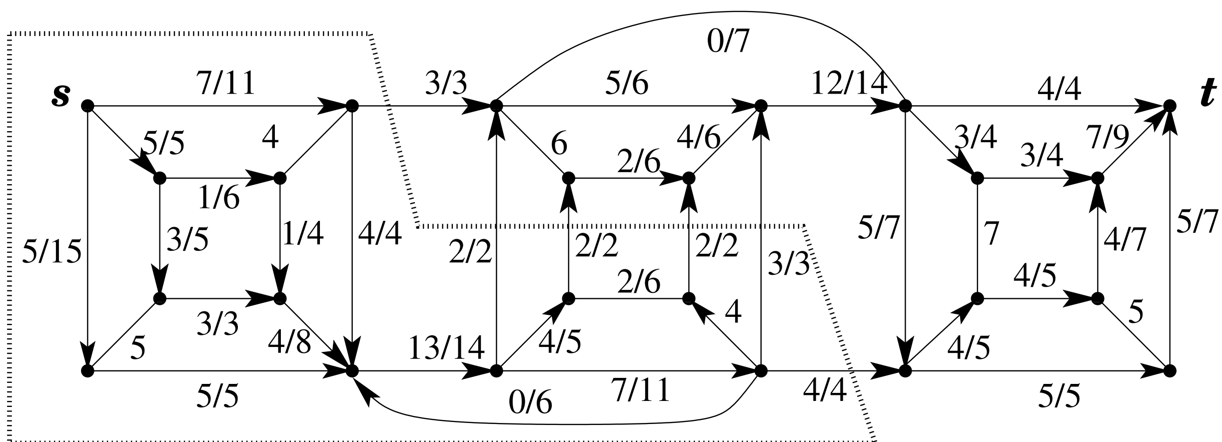
ln in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l, e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo r.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.