# Esame di Ricerca Operativa - 13 giugno 2016
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
# - CORREZIONE -

**Problema 1 (2+1+2=5 punti):**

I laboratori della Willy Wonka stanno lavorando ad un burro di cacao il cui punto di fusione approssimi ancor più da vicino la temperatura del palato umano. Studi teorici ed analisi dimensionale hanno confermato un'intuizione di Willy secondo la quale la temperatura media del palato $t_p$ è legata alla temperatura dell'ambiente $t$ secondo la funzione $t_p = f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Cinque esperimenti hanno prodotto i seguenti valori.

| temperatura dell'ambiente esterno ($t$) | ($t_p$) temperatura del palato |
|---:|---|
| 10 | 36,54321 |
| 15 | 36,81111 |
| 20 | 36,91234 |
| 25 | 36,99999 |
| 30 | 37,12345 |

**(2pt)** Si vuole determinare la configurazione dei valori per i parametri che minimizzi il massimo scarto in valore assoluto dei punti che rappresentano i risultati degli esperimenti rispetto ai corrispondenti punti sulla curva $f(x)$. Formulare come un problema di PL.

**(1pt)** Nel prossimo futuro la Willy Wonka intende organizzare campagne sempre più massive di esperimenti per una più fedele approssimazione dei parametri, e prevede in particolare di realizzare termometri sempre più precisi per la lettura delle temperature. Esprimi la tua formulazione del problema in modo che non dipenda dai valori numerici per il particolare esperimento sopra riportato (ti chiediamo di astrarre dai dati). Quante variabili hai dovuto introdurre?

**(2pt)** Si vogliono determinare i parametri tali da minimizzare la somma degli scarti in valore assoluto. Ti è ancora possibile formulare questo come un problema di PL senza rinunciare alla data abstraction? Quante variabili servirebbero per rappresentare nel concreto una situazione con $n$ esperimenti?

**svolgimento.**

Indichiamo con $(t[i], t_p[i])$ la coppia di dati prodotti all'$i$-esimo esperimento, con $i = 1, \dots, n$, e dove $n$ indica il numero di esperimenti. I 4 parametri $a$, $b$, $c$ e $d$, di cui ci preme la miglior approssimazione, costituiscono le principali variabili decisionali del problema. Conviene introdurre inoltre una quinta variabile $\varepsilon$ che intende rappresentare il funzionale da minimizzare, ossia

$$\varepsilon = \max_{i=1,\dots,n} |\, a(t[i])^3 + b(t[i])^2 + c(t[i]) + d - t_p[i]\,|$$

e da qui risulta agevole dedurre che una formulazione in termini di PL potrebbe essere la seguente:

$$\begin{array}{l} \min_{a,b,c,d}\, \varepsilon \\ \begin{cases} \varepsilon \geq a(t[i])^3 + b(t[i])^2 + c(t[i]) + d - t_p[i] & i = 1, \dots, n \\ \varepsilon \geq t_p[i] - a(t[i])^3 - b(t[i])^2 - c(t[i]) - d & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{array}$$

**(1pt)** In questo caso abbiamo preferito ottenere in primis la versione che realizza la data abstraction richiesta, in quanto più pulita ed immediata. Osserviamo che la formulazione proposta prevede l'introduzione di 5 sole variabili decisionali, un numero che non dipende da

$n$. Dipende invece da $n$ il numero dei vincoli, che sono precisamente $2n$ (non abbiamo imposto alcun vincolo di non-negatività: 4 sarebbero errati e l'ultimo risulterebbe ridondante).

**(2pt)** Per assicuraci i primi due punti basterà sostituire i dati di quella particolare istanza entro il modello generale.

$$\min_{a,b,c,d} \varepsilon$$
$$\begin{cases} \varepsilon \geq 1\,000\,a + 100\,b + 10\,c + d - 36,54321 \\ \varepsilon \geq 36,54321 - 1\,000\,a - 100\,b - 10\,c - d \\ \varepsilon \geq 3\,375\,a + 225\,b + 15\,c + d - 36,81111 \\ \varepsilon \geq 36,81111 - 3\,375\,a - 225\,b - 15\,c - d \\ \varepsilon \geq 8\,000\,a + 400\,b + 20\,c + d - 36,91234 \\ \varepsilon \geq 36,91234 - 8\,000\,a - 400\,b - 20\,c - d \\ \varepsilon \geq 15\,625\,a + 625\,b + 25\,c + d - 36,99999 \\ \varepsilon \geq 36,99999 - 15\,625\,a - 625\,b - 25\,c - d \\ \varepsilon \geq 27\,000\,a + 900\,b + 30\,c + d - 37,12345 \\ \varepsilon \geq 37,12345 - 27\,000\,a - 500\,b - 30\,c - d. \end{cases}$$

**(2pt)** Per portare a casa gli ultimi due punti siamo chiamati a rivedere il modello generale, considerando gli scarti su ogni singolo esperimento effettuato. Questo ci porta ad introdurre una variabile $\varepsilon_i$ per ognuno degli $n$ scarti; nelle nostre intenzioni essa dovrebbe valere

$$\varepsilon_i = |\, a(t[i])^3 + b(t[i])^2 + c(t[i]) + d - t_p[i]\,| \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n.$$

Perveniamo così al seguente modello, in $n + 4$ variabili decisionali:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$
$$\begin{cases} \varepsilon_i \geq a(t[i])^3 + b(t[i])^2 + c(t[i]) + d - t_p[i] & i = 1, \ldots, n \\ \varepsilon_i \geq t_p[i] - a(t[i])^3 - b(t[i])^2 - c(t[i]) - d & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Osserviamo che la formulazione proposta prevede l'introduzione di $4 + n$ variabili decisionali e $2n$ vincoli. Ancora una volta non abbiamo imposto alcun vincolo di non-negatività: 4 sarebbero errati e tutti gli altri risulterebbe ridondanti.

---

**Problema 2 (1+3=4 punti):** Gli Umpa Lumpa alloggiano ciascuno in una graziosa casetta privata allocata su uno degli alti alberi di cacao. Il grafo $G = (V, E)$ che ha per nodi tali casette ed un arco tra ogni due casette direttamente collegate è cubico, ossia ogni nodo ha grado 3. Ci si chiede se sia possibile assegnare uno dei 3 sapori preferiti (cioccolato, panna, mirtillo) a ciascuno dei collegamenti in modo che ad ogni casetta siano incidenti collegamenti coi tre diversi sapori.

(**(1pt)**) cosa possiamo concludere sul numero degli Umpa Lumpa basandoci sul fatto che $G$ è cubico? Possono essi essere in 101? Enunciare un lemma che si esprima inequivocabilmente in merito a questa possibilità e dimostrarlo.

(**(3pt)**) formulare nel linguaggio della PLI la questione del se esista un modo di assegnare i sapori come richiesto.

**svolgimento.**

**(1pt)** Il lemma delle strette di mano asserisce che in ogni grafo è pari il numero di nodi di grado dispari. Poichè in un grafo cubico tutti i nodi hanno grado dispari, ne consegue come corollario che il numero di Umpa Lumpa deve essere pari. Il lemma delle strette di mano vale anche per multigrafi, e può essere dimostrato con un double counting argument:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

combinato con l'osservazione che una somma a valore pari di numeri naturali consta necessariamente di un numero pari di addendi dispari. A lezione abbiamo visto sia questa dimostrazione che una semplice dimostrazione induttiva sul numero degli archi: ad ogni aggiunta di arco vengono incrementati di uno precisamente due addendi, la cui parità viene quindi invertita.

**(3pt)** Per ogni nodo $v \in V$, si indichi con $\delta(v)$ l'insieme dei tre archi in $E$ incidenti in $v$. Ad ogni arco $e \in E$ associamo tre variabili binarie 0/1 come segue:

$c_e$ specifica se all'arco $e$ venga assegnato il sapore del cioccolato;

$p_e$ specifica se all'arco $e$ venga assegnato il sapore della panna;

$m_e$ specifica se all'arco $e$ venga assegnato il sapore del mirtillo.

La domanda è se il seguente problema di PLI abbia una soluzione:

$$\begin{cases} \sum_{e \in \delta(v)} c_e = 1 & \text{per ogni } v \in V \\ \sum_{e \in \delta(v)} p_e = 1 & \text{per ogni } v \in V \\ \sum_{e \in \delta(v)} m_e = 1 & \text{per ogni } v \in V \\ c_e + p_e + m_e = 1 & \text{per ogni } e \in E \\ c_e, p_e, m_e \in \{0,1\} & \text{per ogni } e \in E \end{cases}$$

Più in generale, le soluzioni di questo problema di PLI sono in corrispondenza 1-ad-1, con gli assegnamenti di nostro interesse. I primi 3 vincoli impongono che gli archi di ciascun sapore costituiscano un perfect matching (accoppiamento perfetto), ed il quarto vincolo chiede che questi perfect matchings siano disgiunti.

---

**Problema 3 (1+6·1=7 punti):**

Forse non tutti sanno che Willy Wonka aveva stampato sul foglio d'oro la soluzione per il seguente problema di knapsack con zaino di capacità $B$.

$$\max z = 52\,x_1 + 40\,x_2 + 17\,x_3 + 7\,x_4 + 8\,x_5$$
$$\begin{cases} 15\,x_1 + 13\,x_2 + 5\,x_3 + 3\,x_4 + x_5 & \leq B \\ x_2, x_3 & \leq 2 \\ x_4, x_5 & \leq 1 \\ x_i \in \{0,1,2,3\} & \end{cases}$$

# Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $@(0,0)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × | | × | × | | × | | × | × | × | |
| $A(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × | × | × | × | × | × | × |
| $B(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | 104 | × | × | × | × | × | |
| $C(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × | × | × | × | × | |
| $D(13,40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | 52 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | | | × | × | × | × | × |
| $E(13,40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | 92 | × | | × | × | × | × | × | |
| $F(5,17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | | × | 69 | × | × | × | × | × | 80 | × | 92 | × | 104 | | | | × | | |
| $G(5,17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | 34 | × | × | 40 | × | 52 | × | × | 57 | × | | × | × | 74 | × | 86 | 80 | × | 92 | × | | | | | × | | |
| $H(3,7)$ | 0 | × | × | 7 | × | 17 | × | × | 24 | × | 34 | × | × | 41 | × | 52 | 47 | × | 59 | × | 69 | 64 | × | 76 | × | 86 | 81 | × | 93 | 87 | | | | | | | |
| $I(1,8)$ | 0 | 8 | × | 7 | 15 | 17 | 25 | × | 24 | 32 | 34 | 42 | × | 41 | 49 | 52 | 60 | 55 | 59 | 67 | 69 | 77 | 72 | 76 | 84 | 86 | 94 | 89 | 93 | 101 | 104 | | | | | | |

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

| nome | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| peso | 15 | 15 | 15 | 13 | 13 | 5 | 5 | 3 | 1 |
| valore | 52 | 52 | 52 | 40 | 40 | 17 | 17 | 7 | 8 |

Purtroppo, prima di rendersi conto del fortunato ritrovamento, le dentiere dei nonni di Charlie Bucket hanno rosicchiato alcune delle caselle della tabella di programmazione dinamica e tutte le caselle della tabella con le risposte. Si colmino TUTTE (**1pt**) le lacune nella tabella di programmazione dinamica e si identifichino correttamente le risposte (**6pt**) riportandole in tabella.

| B | vincolo agg. | max val | peso | quali prendere |
|---|---|---|---|---|
| 36 | - | | | |
| 36 | escludere I | | | |
| 35 | prendere I | | | |
| 33 | - | | | |
| 33 | prendi I e H | | | |
| 28 | - | | | |

**svolgimento.**

Qui basta che compiliate diligentemente le tabelle. (Ovviamente, se vi aiuta, potete farvi vostri conteggi o prove nella brutta, o lavorare in matita, prima di sporcare il foglio con le tabelle messovi a disposizione).

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui vada compilata la tabella di programmazione dinamica, i codici che l'hanno prodotta sono disponibili nella stessa cartella della presente correzione.

# Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $@(0,0)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| $A(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × |
| $B(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × |
| $C(15,52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × |
| $D(13,40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | × |
| $E(13,40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | × |
| $F(5,17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | 57 |
| $G(5,17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | 34 | × | × | 40 | × | 52 | × | × | 57 |
| $H(3,7)$ | 0 | × | × | 7 | × | 17 | × | × | 24 | × | 34 | × | × | 41 | × | 52 | 47 | × | 59 |
| $I(1,8)$ | 0 | 8 | × | 7 | 15 | 17 | 25 | × | 24 | 32 | 34 | 42 | × | 41 | 49 | 52 | 60 | 55 | 59 |

| | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $@(0,0)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| $A(15,52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| $B(15,52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 104 | × | × | × | × | × | × |
| $C(15,52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 104 | × | × | × | × | × | × |
| $D(13,40)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 92 | × | 104 | × | × | × | × | × | × |
| $E(13,40)$ | × | × | × | × | × | × | × | 80 | × | 92 | × | 104 | × | × | × | × | × | × |
| $F(5,17)$ | × | 69 | × | × | × | × | × | 80 | × | 92 | × | 104 | 97 | × | 109 | × | 121 | × |
| $G(5,17)$ | × | 69 | × | × | 74 | × | 86 | 80 | × | 92 | × | 104 | 97 | × | 109 | × | 121 | 114 |
| $H(3,7)$ | × | 69 | 64 | × | 76 | × | 86 | 81 | × | 93 | 87 | 104 | 99 | × | 111 | 104 | 121 | 116 |
| $I(1,8)$ | 67 | 69 | 77 | 72 | 76 | 84 | 86 | 94 | 89 | 93 | 101 | 104 | 112 | 107 | 111 | 119 | 121 | 129 |

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

| nome | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| peso | 15 | 15 | 15 | 13 | 13 | 5 | 5 | 3 | 1 |
| valore | 52 | 52 | 52 | 40 | 40 | 17 | 17 | 7 | 8 |

# Tabella delle Risposte

| B | vincolo agg. | max val | peso | quali prendere |
|---|---|---|---|---|
| 36 | - | 129 = 52+52+17+8 | 36 = 15+15+5+1 | A,B,F,I |
| 36 | escludere I | 121 = 52+52+17 | 35 = 15+15+5 | A,B,F |
| 35 | prendere I | 119 = 52+52+7+8 | 34= 15+15+3+1 | A,B,H,I |
| 33 | - | 112 = 52+52+8 | 31 = 15+15+1 | A,B,I |
| 33 | prendi I e H | 107 = 52+40+7+8 | 32 = 15+13+3+1 | A,D,H,I |
| 28 | - | 94 = 52+17+17+8 | 26 = 15+5+5+1 | A,F,G,I |

**Problema 4 (8 punti):**

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = A\,A\,C\,A\,C\,T\,C\,T\,T\,A\,G\,C\,A\,A\,C\,A\,T$ e $t = C\,A\,T\,A\,C\,T\,G\,A\,C\,T\,T\,C\,C\,A\,T\,A$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di $s$ e $t$.

**4.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e $t$?

**4.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'T'?

**4.3 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e il suffisso $t_{11} = T\,G\,A\,C\,T\,T\,C\,C\,A\,T\,A$ di $t$?

**4.4 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $t$ e il suffisso $s_9 = T\,A\,G\,C\,A\,A\,C\,A\,T$ di $s$?

**4.5 (4pt)** rispondere alle precedenti domande computando inoltre quante siano le sottosequenze di $t$ che attengano l'ottimalità specificata. Si adotti il seguente punto di vista: le sottosequenze di una stringa $t$ di lunghezza $len(t)$ sono in corrispondenza biunivoca coi sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$. Dato un tale sottoinsieme $S$, la sottosequenza che corrisponde ad $S$ si ottiene rimuovendo tutti i caratteri di $t$ tranne quelli la cui posizione originaria appaia in $S$. Chiediamo quanti sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$ corrispondano a sottosequenze che trovano un corrispondente in $s$ come da specifiche.

| tipo di sott. comune | lungh. | una sottosequenza ottima (stringa) | num. sott. di $t$ ottime |
|---|---|---|---|
| qualsiasi | | | |
| parte con 'T' | | | |
| tra $s$ e $t_{11}$ | | | |
| tra $s_9$ e $t$ | | | |

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica. (Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui la tabella viene compilata potete vedere i codici che l'hanno prodotta, resi disponibili nella stessa cartella della presente correzione).

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo di sott. comune | lungh. | una sottosequenza ottima (stringa) | num. sott. di $t$ ottime |
|---|---|---|---|
| qualsiasi | 11 | C A C T C T T C C A T | 4 |
| parte con 'T' | 8 | T C T T C C A T | 14 |
| tra $s$ e $t_{11}$ | 8 | A C T T C C A T | 2 |
| tra $s_9$ e $t$ | 7 | T A C G C A T | 9 |

**Problema 5 (8 punti):**

Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

| $s$—$t$ | C | A | T | A | C | T | G | A | C | T | T | C | C | A | T | A | - |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $11_4^2$ | $11_2^2$ | $10_2^0$ | $10_2^2$ | $9_2^2$ | $8_2^1$ | $8_1^0$ | $8_1^1$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_5^4$ | $4_1^1$ | $3_1^1$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $11_3^2$ | $11_1^1$ | $10_2^0$ | $10_2^2$ | $9_2^2$ | $8_2^1$ | $8_1^0$ | $8_1^1$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_5^4$ | $4_1^1$ | $3_1^1$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| C | $11_2^2$ | $10_2^1$ | $10_1^0$ | $10_1^1$ | $9_2^2$ | $8_2^1$ | $8_1^0$ | $8_1^1$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_5^4$ | $4_1^1$ | $3_1^1$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $10_2^0$ | $10_2^1$ | $10_1^0$ | $10_1^1$ | $9_1^1$ | $8_2^1$ | $8_1^0$ | $8_1^1$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_3^3$ | $3_4^3$ | $3_1^1$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| C | $9_{15}^{14}$ | $9_1^0$ | $9_1^0$ | $9_1^0$ | $9_1^1$ | $8_1^1$ | $7_1^0$ | $7_1^0$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_3^3$ | $3_3^3$ | $2_3^2$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| T | $8_{32}^{18}$ | $8_{14}^0$ | $8_{14}^{13}$ | $8_1^0$ | $8_1^0$ | $8_1^1$ | $7_1^0$ | $7_1^0$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_2^2$ | $4_2^2$ | $3_3^3$ | $2_3^2$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| C | $8_{18}^{18}$ | $7_{31}^0$ | $7_{31}^{18}$ | $7_{13}^0$ | $7_{13}^{12}$ | $7_1^0$ | $7_1^0$ | $7_1^0$ | $7_1^1$ | $6_1^1$ | $5_1^1$ | $4_2^2$ | $3_3^3$ | $2_3^2$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| T | $7_{18}^0$ | $7_{18}^0$ | $7_{18}^{18}$ | $6_{21}^9$ | $6_{12}^0$ | $6_{12}^{11}$ | $6_1^0$ | $6_1^0$ | $6_1^0$ | $6_1^1$ | $5_1^1$ | $4_1^1$ | $3_2^2$ | $2_3^2$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| T | $7_9^0$ | $7_9^0$ | $7_9^9$ | $6_{18}^9$ | $6_9^0$ | $6_9^9$ | $5_{11}^6$ | $5_5^3$ | $5_2^0$ | $5_2^1$ | $5_1^1$ | $4_1^1$ | $3_2^2$ | $2_3^2$ | $2_1^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $6_{34}^{13}$ | $6_{21}^{12}$ | $6_9^0$ | $6_9^9$ | $5_{12}^3$ | $5_9^0$ | $5_9^6$ | $5_3^3$ | $4_3^2$ | $4_1^0$ | $4_1^0$ | $4_1^1$ | $3_2^2$ | $2_2^2$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| G | $6_{13}^{13}$ | $5_{22}^{10}$ | $5_{12}^0$ | $5_{12}^3$ | $5_9^3$ | $5_6^0$ | $5_6^6$ | $4_6^3$ | $4_3^2$ | $4_1^0$ | $4_1^0$ | $4_1^1$ | $3_2^2$ | $2_2^2$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| C | $6_{13}^{13}$ | $5_{16}^{10}$ | $5_6^0$ | $5_6^3$ | $5_3^3$ | $4_6^0$ | $4_6^0$ | $4_6^3$ | $4_3^2$ | $4_1^0$ | $4_1^0$ | $4_1^1$ | $3_2^2$ | $2_2^2$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $5_{13}^0$ | $5_{13}^{10}$ | $5_3^0$ | $5_3^3$ | $4_3^0$ | $4_3^0$ | $4_3^0$ | $4_3^3$ | $3_3^1$ | $3_2^0$ | $3_2^0$ | $3_2^1$ | $3_1^1$ | $2_2^2$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $4_{17}^0$ | $4_{17}^7$ | $4_{10}^0$ | $4_{10}^7$ | $4_3^0$ | $4_3^0$ | $4_3^0$ | $4_3^3$ | $3_3^1$ | $3_2^0$ | $3_2^0$ | $3_2^1$ | $3_1^1$ | $2_2^2$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| C | $3_{20}^{13}$ | $3_7^0$ | $3_7^0$ | $3_7^0$ | $3_7^4$ | $3_3^0$ | $3_3^0$ | $3_3^0$ | $3_3^1$ | $3_2^0$ | $3_2^0$ | $3_2^1$ | $3_1^1$ | $2_1^1$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| A | $2_{13}^0$ | $2_{13}^5$ | $2_8^0$ | $2_8^4$ | $2_4^0$ | $2_4^0$ | $2_4^0$ | $2_4^3$ | $2_1^0$ | $2_1^0$ | $2_1^0$ | $2_1^0$ | $2_1^0$ | $2_1^1$ | $1_2^1$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ |
| T | $1_5^0$ | $1_5^0$ | $1_5^1$ | $1_4^0$ | $1_4^0$ | $1_4^1$ | $1_3^0$ | $1_3^0$ | $1_3^0$ | $1_3^1$ | $1_2^1$ | $1_1^0$ | $1_1^0$ | $1_1^0$ | $1_1^1$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ |
| - | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ | $0_1^0$ |

$$\max\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \\ x_3 + 5x_4 \leq 10 + t_2 \\ 2x_5 + x_6 \leq 14 + t_3 \\ x_1 + x_3 + 2x_5 \leq 20 + t_4 \\ x_2 + 5x_4 + x_6 \leq 15 + t_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

5.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) = (6, 5, 0, 2, 7, 0)$ è soluzione ammissibile per $P(0)$.

5.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale $D(t)$ di $P(t)$.

5.3.**(1pt)** Impostare il sistema per la ricerca di una soluzione di base di $D(0)$ soggetta alle condizioni agli scarti complementari rispetto a $\overline{x}$.

5.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

5.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri $C_1, \ldots, C_6$ la soluzione $\overline{x}$ assegnata è ottima per $P(0)$?

5.6 **(1pt)** esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ e $t_5$ nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

5.7 **(2pt)** per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$, fornire i limiti $a_i$ e $b_i$ tali che il prezzo ombra di $t_i$ sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0\ \forall j \neq i$). che sei stato chiamato a compiere.

**svolgimento.** Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) & = 11 \leq 12 \\ (0) + 5(2) & = \mathbf{10} \leq 10 \\ 2(7) + (0) & = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (0) + 2(7) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (5) + 5(2) + (0) & = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min \psi(t) = (12+t_1)\, y_1 + (10+t_2)\, y_2 + (14+t_3)\, y_3 + (20+t_4)\, y_4 + (15+t_5)\, y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq C_1 \\ y_1 + y_5 \geq C_2 \\ y_2 + y_4 \geq C_3 \\ 5y_2 + 5y_5 \geq C_4 \\ 2y_3 + 2y_4 \geq C_5 \\ y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1, 2, 4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} + y_4 = C_1 \\ + y_5 = C_2 \\ 5y_2 + 5y_5 = C_4 \\ 2y_3 + 2y_4 = C_5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$. (Questo significa che la soluzione primale assegnata era di base non degenere.)

Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. La prima condizione da imporre in tale senso è che ogni componente della soluzione sia non-negativa, da cui:

$$\begin{cases} C_1 \geq 0 \\ C_2 \geq 0 \\ C_4 \geq 5C_2 \\ C_5 \geq 2C_1 \end{cases}$$

Ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6). La soluzione primale assegnata sarà ottima se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = \frac{C_4-5C_2}{5} + C_1 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = \frac{C_5-2C_1}{2} + C_2 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se**

$$\begin{cases} C_1 & \geq & 0 \\ C_2 & \geq & 0 \\ C_4 & \geq & 5C_2 \\ C_5 & \geq & 2C_1 \\ C_3 & \leq & C_1 + \frac{C_4 - 5C_2}{5} \\ C_6 & \leq & C_2 + \frac{C_5 - 2C_1}{2} \end{cases}$$

I prezzi ombra sono dati proprio da $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$ e possono essere messi in evidenza nella seguente scrittura per i valori della funzione obiettivo all'ottimo

$$\begin{aligned} z(t) &= \psi(t) \\ &= (12+t_1)\,y_1 + (10+t_2)\,y_2 + (14+t_3)\,y_3 + (20+t_4)\,y_4 + (15+t_5)\,y_5 \\ &= (10+t_2)\,\frac{C_4-5C_2}{5} + (14+t_3)\,\frac{C_5-2C_1}{2} + (20+t_4)\,C_1 + (15+t_5)\,C_2 \\ &= 6\,C_1 + 5\,C_2 + 2\,C_4 + 7\,C_5 + \frac{C_4-5C_2}{5}\,t_2 + \frac{C_5-2C_1}{2}\,t_3 + C_1\,t_4 + C_2\,t_5. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la soluzione di base di $P(t)$, per $t$ generico, corrispondente alla stessa partizione delle variabili (in base/fuori base) che per la soluzione di base assegnata $\overline{x} = (6, 5, 0, 2, 7, 9)$ per $P(0)$. Tengo cioè a 0 quelle stesse variabili su cui $\overline{x}$ è a 0 (ossia $\overline{x}_3 = \overline{x}_6 = 0$) e lo stesso per le varibili di slack (ossia metto ad eguaglianza quegli stessi vincoli che $\overline{x}$ soddisfa ad eguaglianza).

$$P(t)\begin{cases} & & (0) + & 5(2+\delta_4) & & & = & 10+t_2 \\ & & & & 2(7+\delta_5) + & (0) & = & 14+t_3 \\ (6+\delta_1) & & + \quad (0) & & + \quad 2(7+\delta_5) & & = & 20+t_4 \\ & (5+\delta_2) & & + \quad 5(2+\delta_4) & & + \quad (0) & = & 15+t_5 \end{cases}$$

Da cui $\left(6+t_4-t_3, 5+t_5-t_2, 0, 2+\frac{1}{5}t_2, 7+\frac{1}{2}t_3, 0\right)$ è la soluzione ottima di base per $P(t)$. La domanda è dove essa ritenga ammissibilità. Dualmente, la soluzione di base duale $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$ non dipende da $t$ e pertanto resta ammissibile per ogni $t$. Tuttavia, affinchè essa sia ottima (e la soluzione primale complementare ad essa sia ammissibile) dovremo avere che:

**non negatività della $x_1$:** $x_1(t) = 6 + t_4 - t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \leq 6, t_4 \geq -6$;

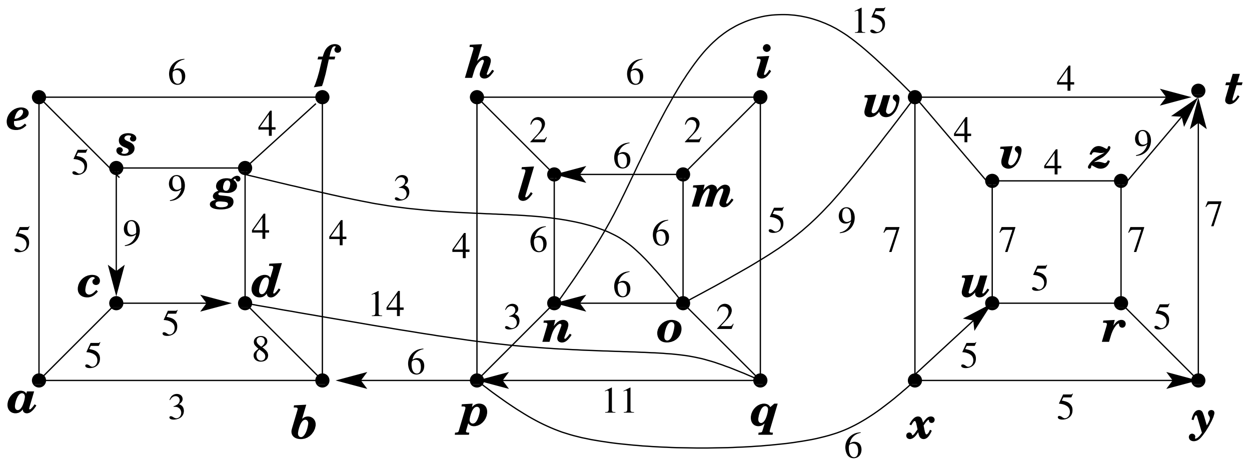
**non negatività della $x_2$:** $x_2(t) = 5 + t_5 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \leq 5, t_5 \geq -5$

**non negatività della $x_4$:** $x_4(t) = 2 + \frac{1}{5}t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq -10$

**non negatività della $x_5$:** $x_5(t) = 7 + \frac{1}{2}t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \geq -14$

**primo vincolo primale:** $x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \Leftrightarrow (t_4 - t_3) + (t_5 - t_2) \leq 1 \Leftrightarrow t_4 + t_5 \leq 1 + t_2 + t_3$, quindi $t_4 \leq 1$, $t_5 \leq 1$, $t_2 \geq -1$, $t_3 \geq -1$.

Quindi, $a_2 = -1$, $b_2 = 5$, $a_3 = -1$, $b_3 = 6$, $a_4 = -6$, $b_4 = 1$, $a_5 = -5$, $b_5 = 1$ delimitano gli ambiti di validità dei vari prezzi ombra.




**Problema 6 (20 punti):**
Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no **(1pt)**; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $ox$ è planare oppure no **(1pt)**.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: il grafo $G$ **(1pt)**; il grafo $G'$ **(1pt)**.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $wo$, $wv$, $wx$.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.9.**(1pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.10.**(1pt)** Quanti sono i possibili tagli minimi?

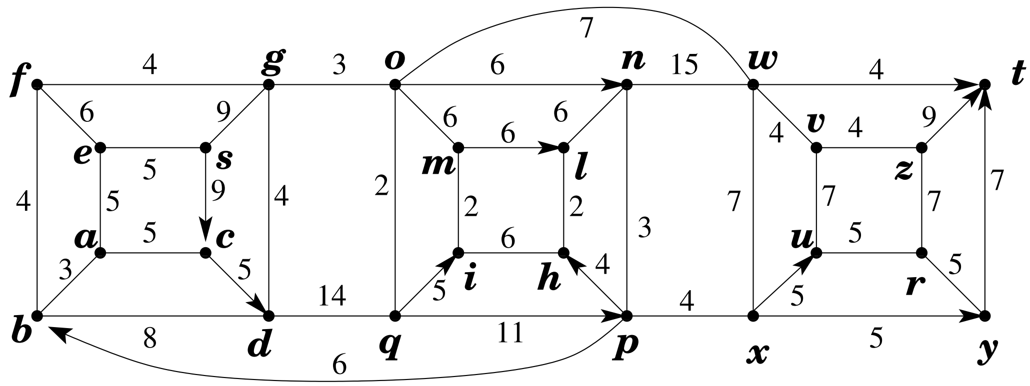
6.11.**(1pt)** Quale è il minimo numero di archi su cui violare il vincolo di capacità per riuscire ad incrementare il flusso massimo? Quali sono questi archi?

6.12.**(1+1pt)** Argomentare che la scelta al punto precedente è ottima. Argomentare che è unica.

6.13.**(1+1pt)** Flusso massimo quando si sia rimosso il vincolo di capacità su questi archi e suo certificato di ottimalità.

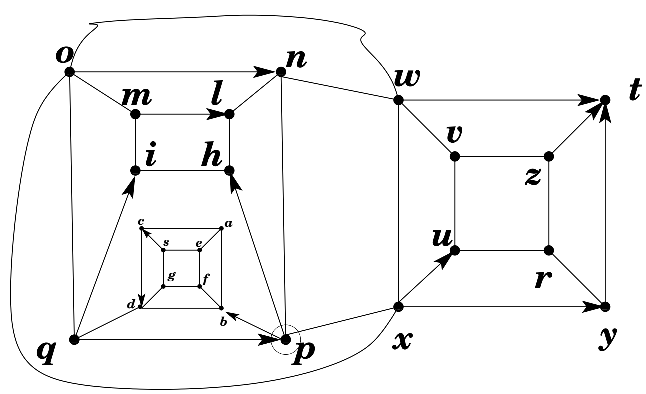
**risposte.**

Il fatto che $G$ sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

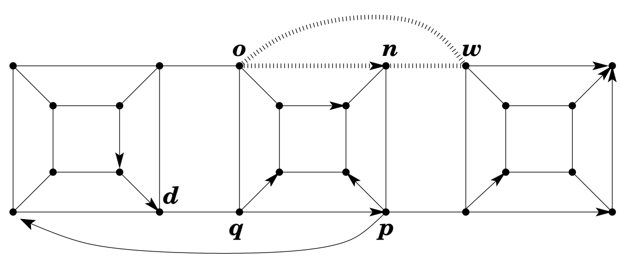



Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

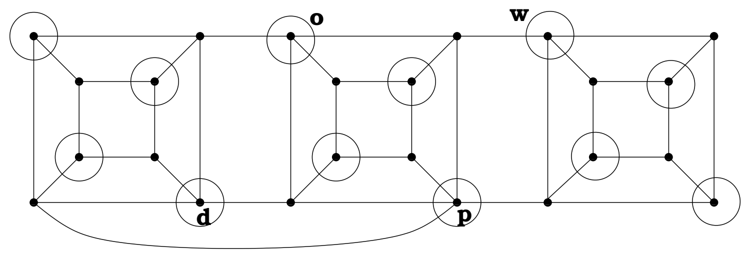
Per altro, anche $G'$ è planare come messo in evidenza (=certificato) dalla seguente figura.



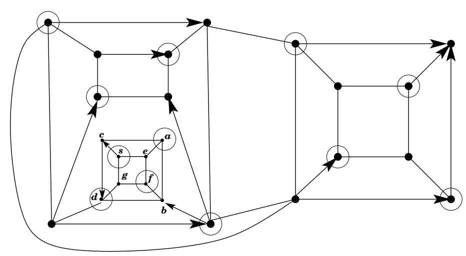

Il fatto che $G$ non sia bipartito, e che sia quindi richiesta la rimozione di almeno un arco per renderlo tale, è certificato dal ciclo dispari (triangolo $onw$) rappresentato in figura.




In effetti la rimozione del solo arco ($wo$) basta a rendere $G$ bipartito come esibito nella seguente figura. Si noti che $ow$ è l'unico arco la cui rimozione rende il grafo bipartito; come avresti potuto argomentarlo?




Il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $ox$ non é bipartito, e quindi almeno un arco deve essere rimosso per renderlo tale.



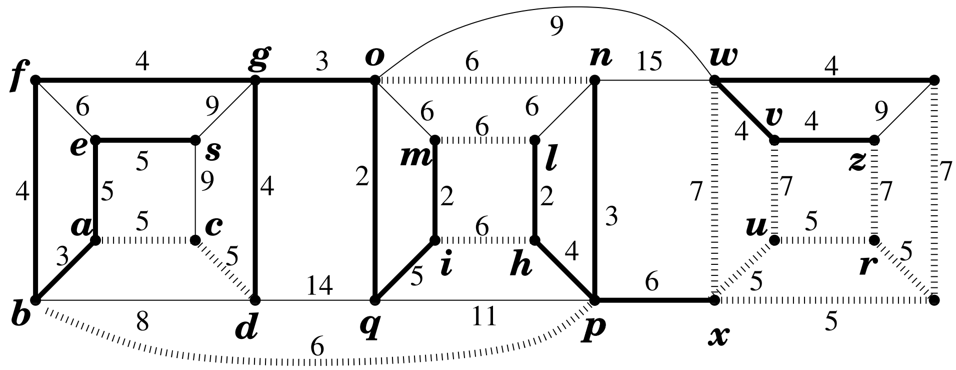
Viene comprovato in figura che la rimozione del solo arco ($wo$) basta a rendere il grafo bipartito. Vale come sopra che la rimozione di $ow$ è l'unica possibilità? E ritengono validità gli stessi argomenti?

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 128$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo $c$ (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi $on$, $ml$, $ih$, $pd$), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo $G$ contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 4 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo $G$ contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo $c$ di cui si era detto più sopra).

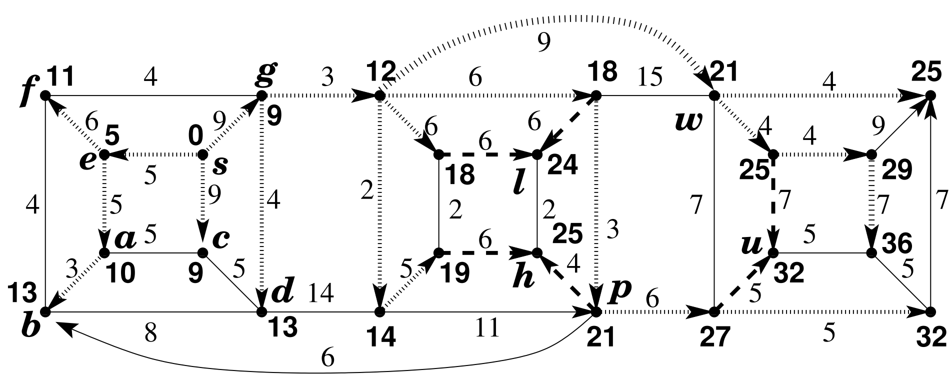
$wo$ in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $wxpno$.

$wv$ in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $w$ e $z$ da tutti gli altri nodi del grafo;

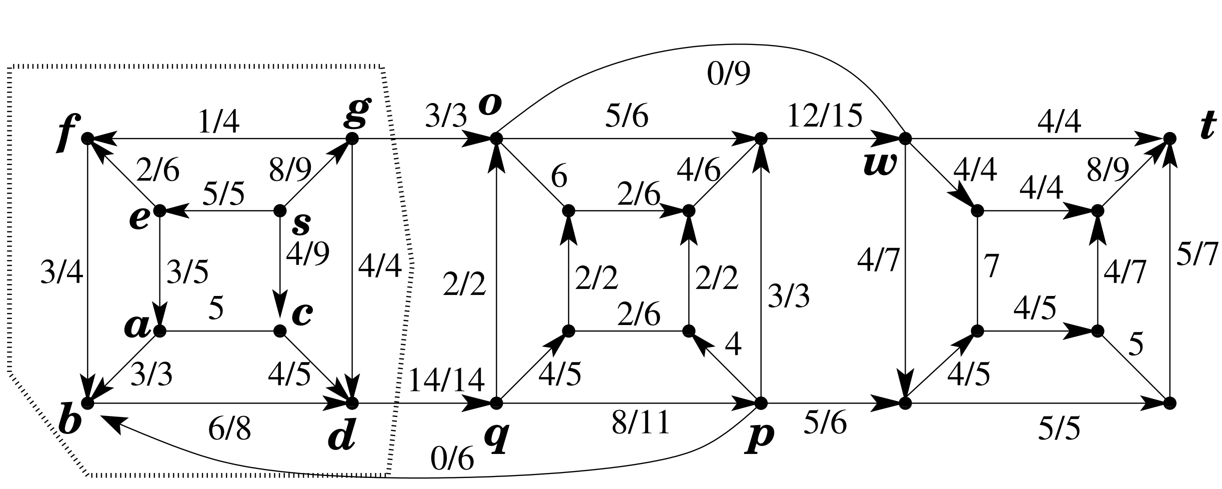
$wx$ in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $w$, $v$, $z$, $t$ da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $lnph$;




La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo $s$. Ci sono $2^3 = 8$ alberi dei cammini minimi dal nodo $s$ e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $h$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $l$, e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $u$.




La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.




Il flusso ha valore 17 e satura diversi archi del grafo. Tuttavia, esiste un unico taglio minimo: nella rete ausiliaria ogni nodo è raggiungibile da $s$ oppure può raggiungere $t$. Se vogliamo aumentare il valore del flusso, dobbiamo necessariamente violare il vincolo di capacità su uno degli archi di questo taglio minimo e, per quanto detto sopra (unicità del taglio minimo, ma disegue anche dal discorso sulla raggiungibilità che certifica questa unicità), basta violare il vincolo di cacacità su uno solo di questi archi.

Decidendo di violare ad esempio il vincolo di capacità sull'arco $dq$, il flusso massimo diviene a questo punto quello illustrato nella seguente figura, insieme al nuovo certificato di ottimalità (che ora non è più unico).