NOME: .... COGNOME: ....
MATRICOLA: .... FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 28 settembre 2016
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 56, con voto $\geq$ punti

Problema 1 (5 punti):

La Skrinch-Skronch è un'azienda che produce snack. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Skrinch-Skronch produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non piú del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Skrinch-Skronch.**(4pt)** Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.**(1pt)**

Problema 2 (3+2+1+3+8=17 punti):

Il professor Mod ha esteso la PL consentendo il riferimento a valori assoluti delle variabili nei termini della funzione obiettivo. Ha chiamato PL-mod il suo nuovo linguaggio di Programmazione Matematica, e, nel suo libro, ha proposto l'esercizio di esprimere come un problema di PL il seguente problema di PL-mod.

$$
\min\ x_1 + 7|x_2| - 6x_3 + 9|x_4|
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\
x_4 \leq 5 \\
x_3 = 7 \\
x_1 + x_3 \geq 10 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \in [-1000, 1000]
\end{cases}
$$

(3pt) si risolva l'esercizio proposto dal professor Mod.

(2pt) il seguente problema di PL-Mod viene chiamato il modello generale di Mod.

$$
\min\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j
$$
$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i & i = 1, \ldots, r \\
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i & i = r+1, \ldots, r+s \\
\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i & i = r+s+1, \ldots, r+s+t \\
x_j \in [L_j, U_j] & j = 1, \ldots, n
\end{cases} l
$$

Si parla di modello semi-generale di Mod nel caso particolare in cui $d_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. Si esprima attraverso la PL il modello semi-generale di PL-mod.

(1pt) Si dia un esempio di un problema, entro il modello semi-generale di Mod, dove la soluzione ottima sia unica ma non sia un vertice, ossia possa essere scritta come combinazione convessa di altre soluzioni ammissibili.

(3pt) Si esprima attraverso la PLI il modello generale di PL-mod.

(8=4+1+1+1+1pt) Si osservi come il ricorso alla PLI, senza limitarsi alla PL, fosse una rinuncia necessaria nell'ultimo dei casi visti sopra. Dimostrare questo osservando che l'ultimo e più generale dei modelli considerati è talmente espressivo da risultare NP-hard. Per fare ciò, suggeriamo di ridurre ad esso il problema PRECISELY-ONE-IN-3-SAT. In questo problema, noto essere NP-completo, viene data in input una formula di 3-SAT, ossia una formula booleana in CNF dove ogni clausola contiene 3 letterali, tutti e 3 positivi (ossia il NOT non compare mai nella formula), e si richiede di determinare se esista un assegnamento di verità alle variabili tale che, in ciascuna delle clausole, precisamente uno dei 3 letterali (cioè una variabile) valuti a *true*.

La sola descrizione di una riduzione valida vale 4 punti, mentre gli eventuali enunciati del lemma facile e difficile, e le loro eventuali dimostrazioni in breve, valgono 1 punto a testa.

Problema 3 (7 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	1	1	1	0	0	•
B	2	2	1	0	•	•	0	0	0
C	2	•	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0
E	0	0	•	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

3.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a G–9?

3.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

Problema 4 (9 punti):

Una stringa è detta palindroma quando non fa differenza se viene letta da destra verso sinistra piuttosto che non da sinistra verso destra. Esempi: ANNA, AMA. Si consideri il problema di dover ricercare la più lunga sottosequenza palindoma entro una stringa. Esempio: ANONA in ANACONDA. Per trovare la più lunga sottosequenza palindroma in una stringa $s = s_1 s_2 \cdots s_n$, si è definita la seguente famiglia di sottoproblemi:

> per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \leq j$, sia $P[i, j]$ = la massima lunghezza di una sottosequenza palindroma di $s_{i,j} = s_i s_{i+1} \cdots s_j$.

4.1.**(3pt)** si dia la ricorrenza sulla famiglia dei sottoproblemi $P[i, j]$.

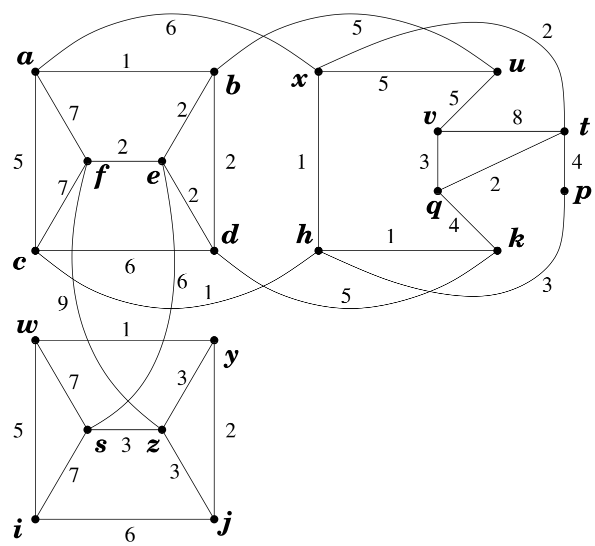
4.2.**(2pt)** si dia la base atta al calcolo di detta ricorrenza.

4.3.**(2pt)** ci si organizzi per trovare una sottosequenza palindroma di massima lunghezza in:
ACXCAXCAXAXXACXXACXCXAXCXAXCX

4.4.**(2pt)** ci si arrangi ed ingegni per trovare una sottosequenza palindroma di massima lunghezza in:
QY1CX6WCP7YXE2CY4RJAXDK9YSXVGXYC3XTM8BXY5CXACXNYFXCX

Problema 5 (3 punti):
Dimostrare che K_5 è un grafo non planare.

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

6.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco hx con un arco qx è planare oppure no.

6.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

6.4.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

6.5.**(4pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: dk, ax, es.

6.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.7.**(1pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.8.**(1pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

6.9.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi Nome, Cognome e Matricola per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.