NOME:	COGNOME: ....
MATRICOLA:	FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 19 settembre 2024

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 72 punti in palio (voto $\geq$ punti -6, $40 \longrightarrow 30$ *e lode*)

Esercizio 1 (con 11 richieste: 1+2+2+2+1+1+1+1+2+2+1 = 16 punti [modellazione/riduzioni]):

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$ con V un insieme finito di elementi chiamati *nodi*. Gli elementi dell'insieme E, chiamati *archi*, sono tutti coppie non ordinate di nodi distinti. Ciascun arco $\{u, v\} \in E$, scritto più brevemente uv, è detto *incidere* nei suoi *estremi* u e v. Il grafo è detto *bipartito tra A e B* se $V = A \cup B$ con $A \cap B = \emptyset$ e ogni arco in E ha un estremo in A e l'altro in B. Un *node cover* di G è un $X \subseteq V$ tale che ogni arco $uv \in E$ ha un estremo in X. Un *matching* di G è un $M \subseteq E$ non contenente due archi incidenti in uno stesso nodo. Due importanti problemi modello nel linguaggio dei grafi sono:

MIN (BIPARTITE) NODE COVER è il problema di trovare un node cover di minima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

MAX (BIPARTITE) MATCHING è il problema di trovare un matching di massima cardinalità in un grafo (bipartito) dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

1.1 (1 pt, model generality) Tra il MAX MATCHING e il MAX BIPARTITE MATCHING quale dei due modelli è più espressivo? Ossia, quale dei due problemi è più generale e quindi più ambizioso da risolvere?

1 .2 (2 pt, model as Min Bipartite Node Cover) Formula in termini di MIN BIPARTITE NODE COVER il problema di rimuovere il minor numero possibile di righe/colonne da una matrice di interi M data in input per ottenere una matrice tutta di zeri. (1pt se produci il grafo istanza di MIN BIPARTITE NODE COVER che cattura l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema in oggetto; 1pt se spieghi come costruire il grafo in funzione di M.)

1 .3 (2 pt, model as Max Bipartite Matching) Per ciascuno dei tuoi dipendenti in $D = \{a, b, c\}$ sai quale commessa in $C = \{1, 2, 3\}$ potrebbe evadere (OK$(a) = [1, 2, 3]$, OK$(b) = [2]$, OK$(c) = [1, 2]$). Formula in termini di MAX BIPARTITE MATCHING il problema di assegnare al più una commessa a ciascuno dei tuoi dipendenti in modo da massimizzare il numero di commesse evase dalla tua ditta. (1pt se produci il grafo che, inteso come istanza di MAX BIPARTITE MATCHING, cattura fedelmente il problema della tua ditta; 1pt se spieghi come altre ditte potrebbero prodursi il grafo che rappresenta le loro istanze (partendo da D generico, C generico, OK generico).)

1 .4 (2 pt, forge graph model) In realtà a ciascuna commessa è associato un valore. Prova a definire un problema MAX BIPARTITE MATCHING PESATO che ti consenta di catturare/rappresentare il problema della tua ditta. (1pt per la definizione del problema modello nel linguaggio dei grafi; 1pt per illustrare come utilizzarlo su un'istanza generica della tua ditta.)

1 .5 (1 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MIN BIPARTITE NODE COVER per la specifica istanza (uno specifico grafo) che rappresenta l'istanza $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ del problema sulle matrici.

1 .6 (1 pt, generalize ILP model) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Bipartite Node Cover per il generico grafo $G = (V, E)$ bipartito tra A e B.
1 .7 (1 pt, general ILP model for the matrix problem) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema di rimuovere il minor numero possibile di righe da una generica matrice M per rimanersene con una matrice di soli zeri.
1 .8 (1 pt, LP relaxations) Scrivi il rilassamento continuo dei due modelli PLI ai punti precedenti.
1 .9 (2 pt, LP duals) Scrivi i duali dei rilassamenti continui al punto precedente.
1 .10 (2 pt, combinatorial duals) Ispirato dagli LP al punto precedente, proponi un problema combinatorico su grafo bipartito ed un problema combinatorico su matrice M che possano offrire dei bounds sempre validi (e di fatto stretti e certificanti) per il problema Min Bipartite Node Cover e per il problema di minima rimozione di righe e colonne a svuotare una matrice M.
1 .11 (1 pt, instance-specific auto-certifying optimal pair) Quale è il minor numero di righe/colonne da rimuovere dalla matrice 3x3 sopra introdotta? Esibisci una soluzione corredata di certificato di sua ottimalità.

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A−1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I−10**.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0	1	1	1	1	1	0	0	•	6
B	2	•	1	0	•	0	•	0	0	5
C	0	•	0	•	•	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	•	3	1	•	0	1
G	3	•	2	1	2	•	•	3	1	•
H	2	1	2	•	•	1	1	1	•	0
I	4	4	3	3	2	1	1	•	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A−3 alla cella A−4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A−3 alla cella B−3) e il passo diagonale (che in pratica porta direttamente alla cella raggiunta concatenando quello orizzontale e quello verticale). Se il robot deve evitare le celle proibite (•), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un premio del valore riportato nella cella stessa, sapresti massimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 2

2 .1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **I−10**
2 .2 (1 pt, num percorsi da B−3) Numero di percorsi ammissibili da **B−3** a **I−10**
2 .3 (1 pt, num percorsi a F−6) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **F−6**
2 .4 (1 pt, num percorsi per D−5) Numero di percorsi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**
2 .5 (1 pt, opt val) Massimo totale di premi su un cammino da **A−1** a **I−10**. (E soluzione di tale valore).
2 .6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10**
2 .7 (1 pt, opt val per D−5) Massimo totale di premi su un cammino da **A−1** a **I−10** passante per **D−5**
2 .8 (2 pt, num paths of opt val via D−5) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**

Quadro delle risposte dell'Esercizio 2

consegna	num. paths	opt val	un path (percorso) ottimo
A–1 → I–10			
B–3 → I–10			
A–1 → F–6			
passaggio per D–5			
massimo valore			
n. max-val paths			
max-val D–5-path			
n. max-val D–5-paths			

,

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 3: **num cammini a**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 4: **num cammini da**

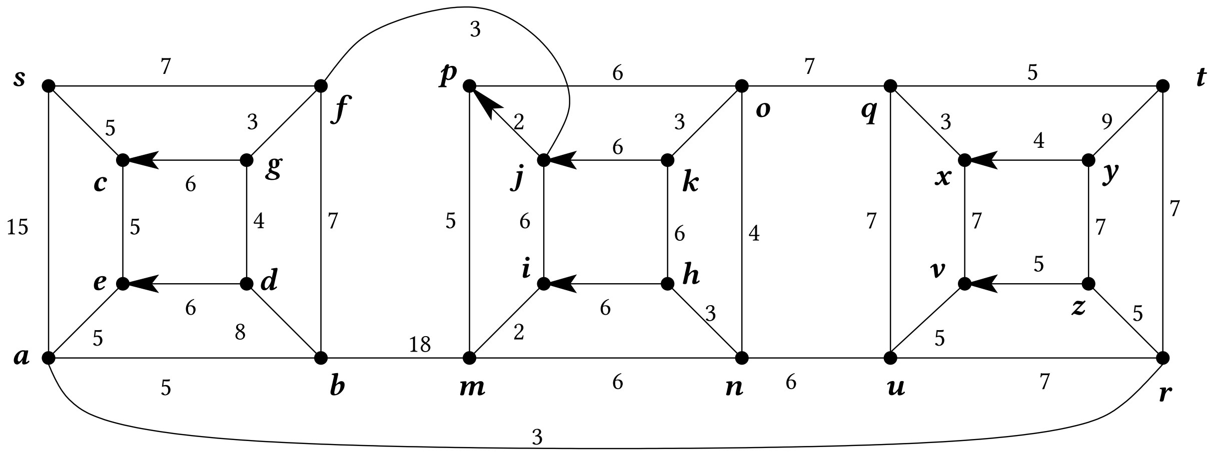
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 5: **opt val path to (e num opt paths)**

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 6: **opt val path from (e num opt paths)**

Esercizio 3 (con 11 richieste: 4+4+2+2+2+2+1+3+4+5+2 = 31 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (4 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco oq con un arco kq.

3 .2 (4 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G e G' (1 punto per ogni soluzione certificata da bicolorazione e 1 per ogni certificato di ottimalità).

3 .3 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

3 .4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.

3 .5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

3 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).

3 .7 (1 pt, one MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo.

3 .8 (3 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)

3 .9 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G?

3 .10 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti in u certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.

3 .11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in G (1pt). Sapresti dire perche non possa esserci un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

Quadro delle risposte dell'Esercizio 3

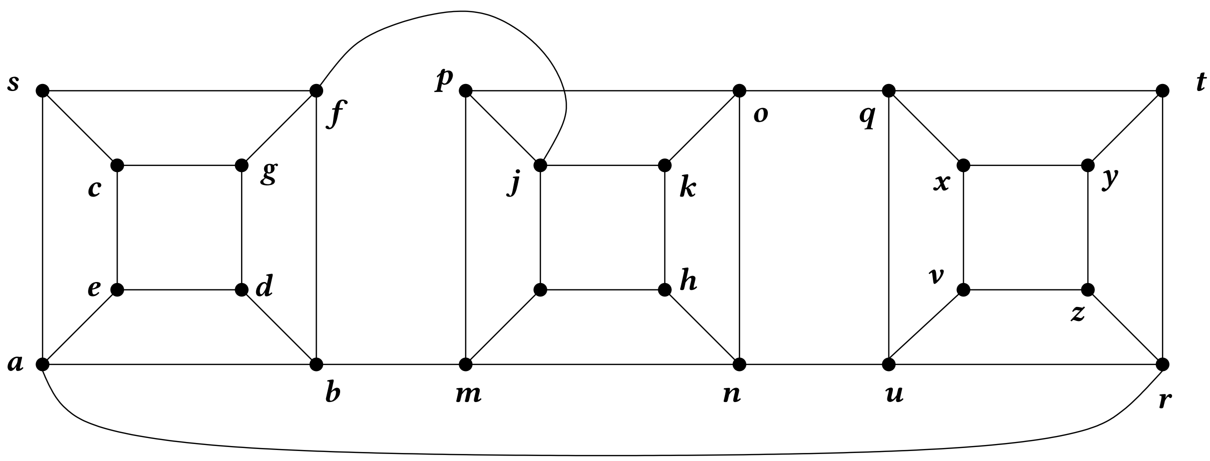


Figura 1: **eventuale certificato di non planarità di G.**

,

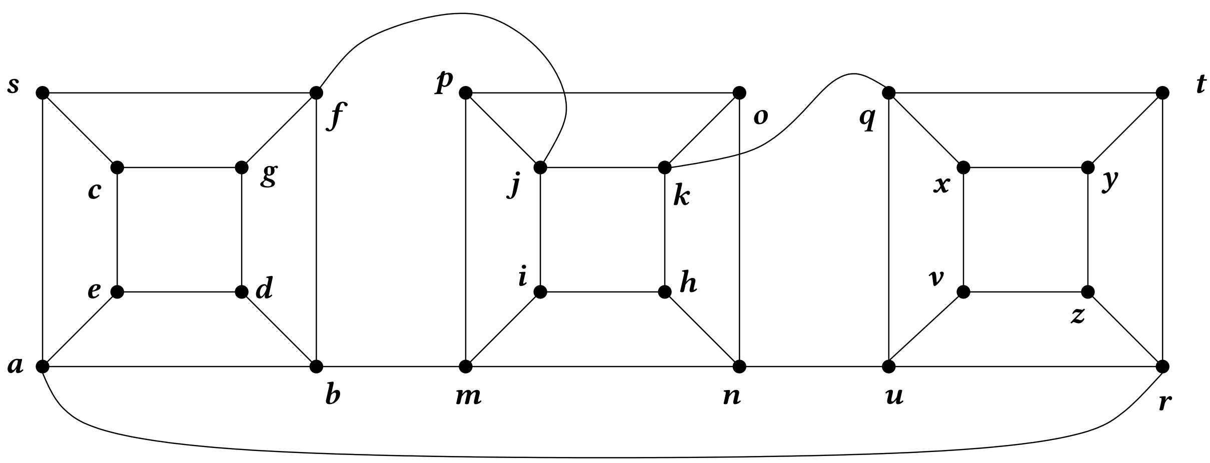


Figura 2: **eventuale certificato di non planarità di G'.**

,

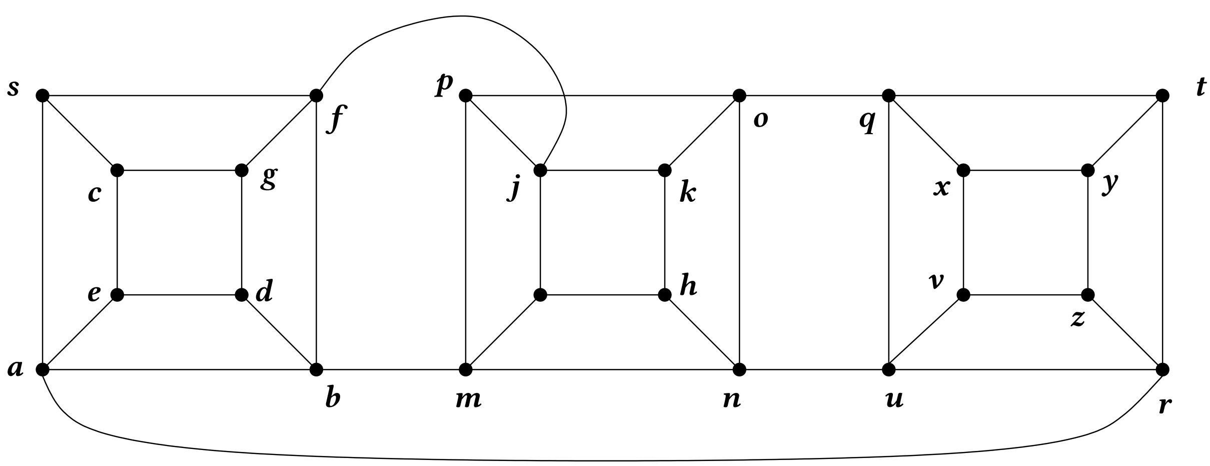


Figura 3: **bipartiteness di G.**

,

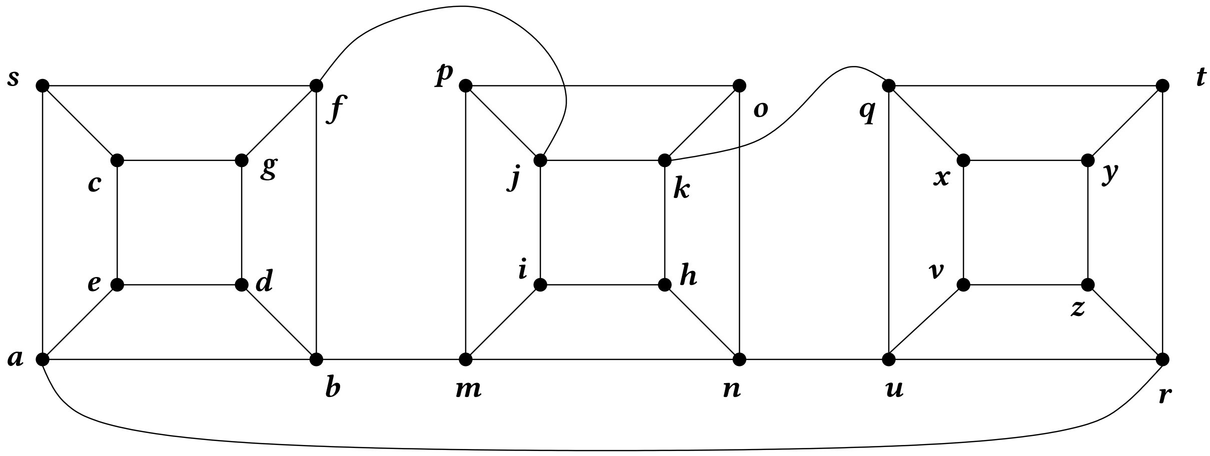


Figura 4: **bipartiteness di G'«.**

,

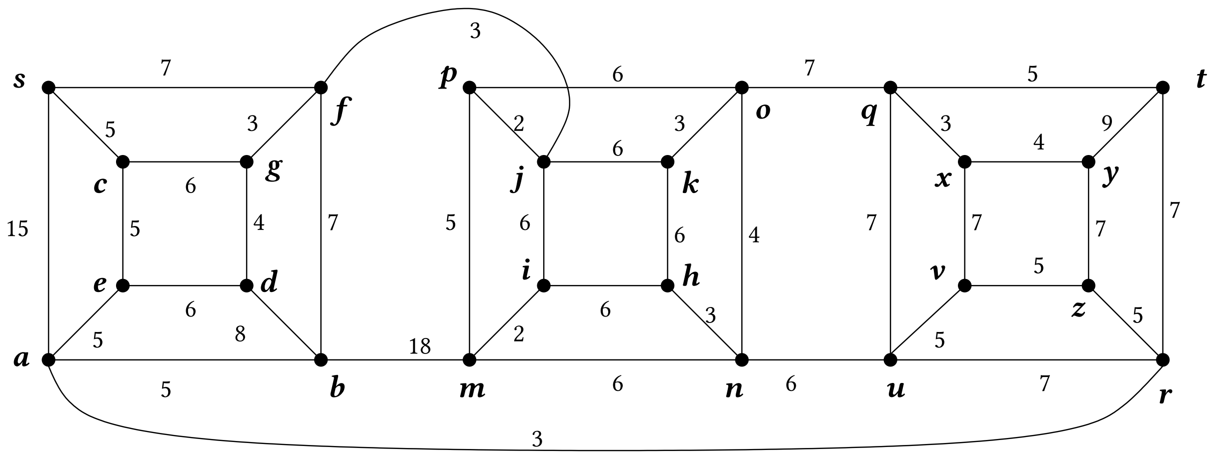


Figura 5: **MST.**

,

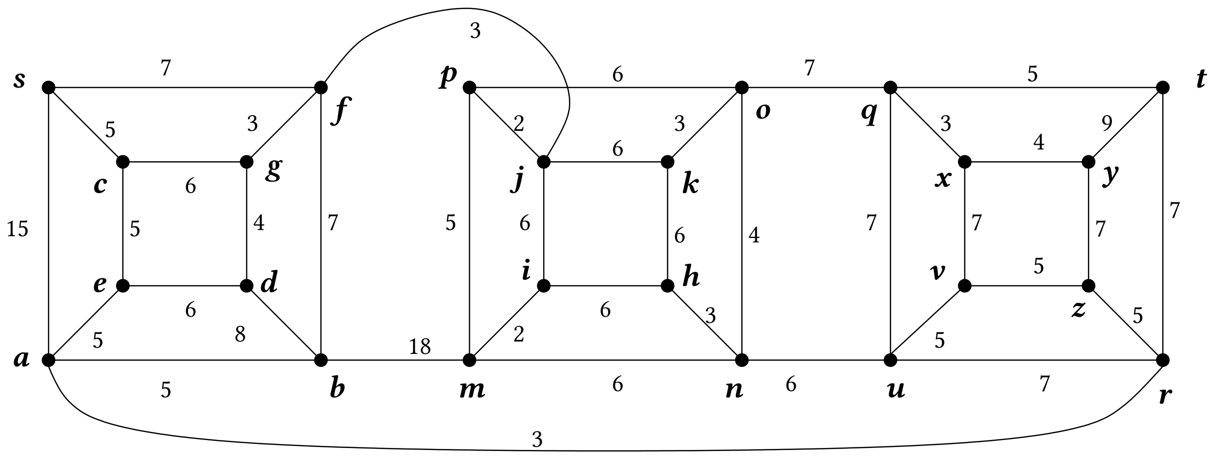


Figura 6: **arco un.**

,

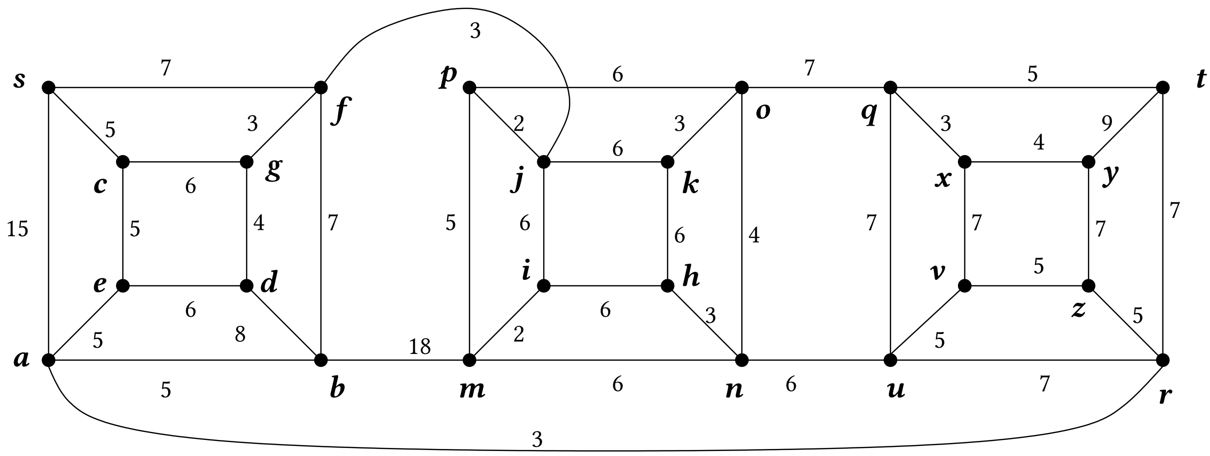


Figura 7: **arco** ***uq*****.**

,

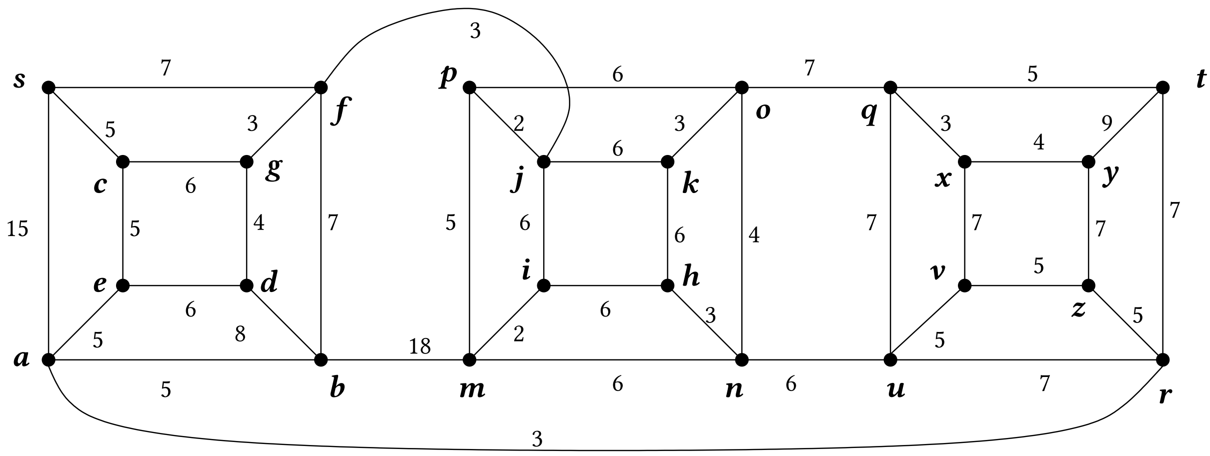


Figura 8: **arco** ***uv*****.**

,

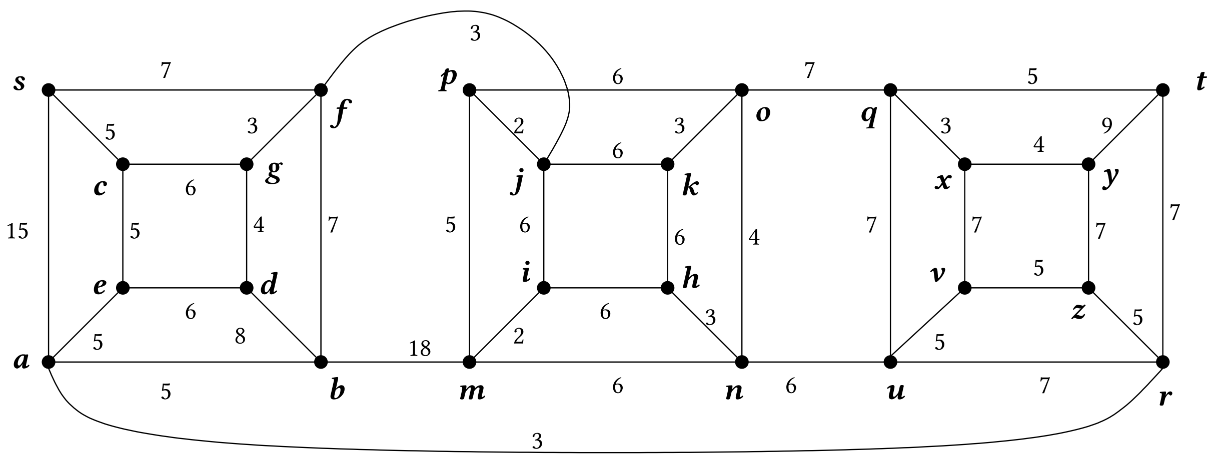


Figura 9: **arco** ***ur*****.**

,

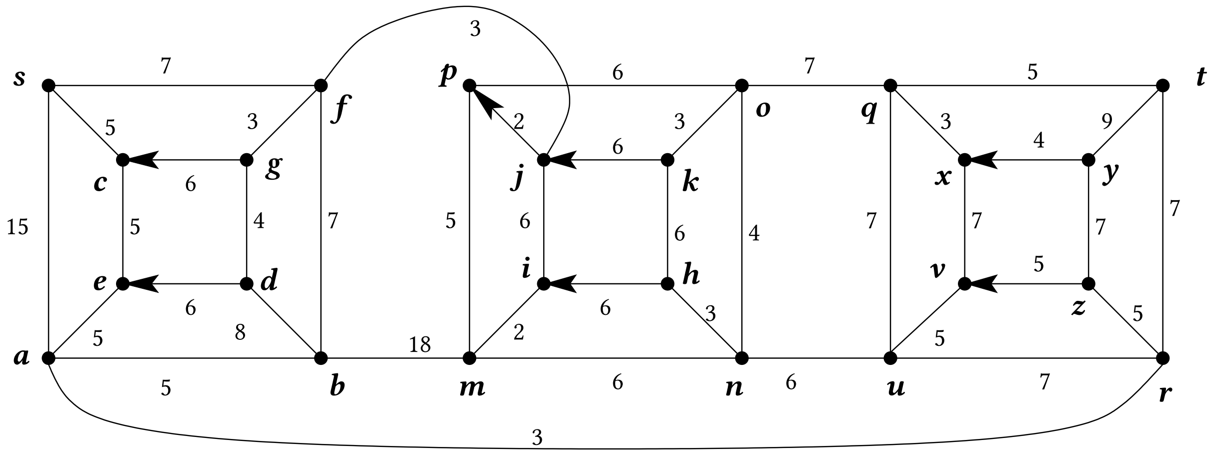


Figura 10: **max-flow min-cut.**

,

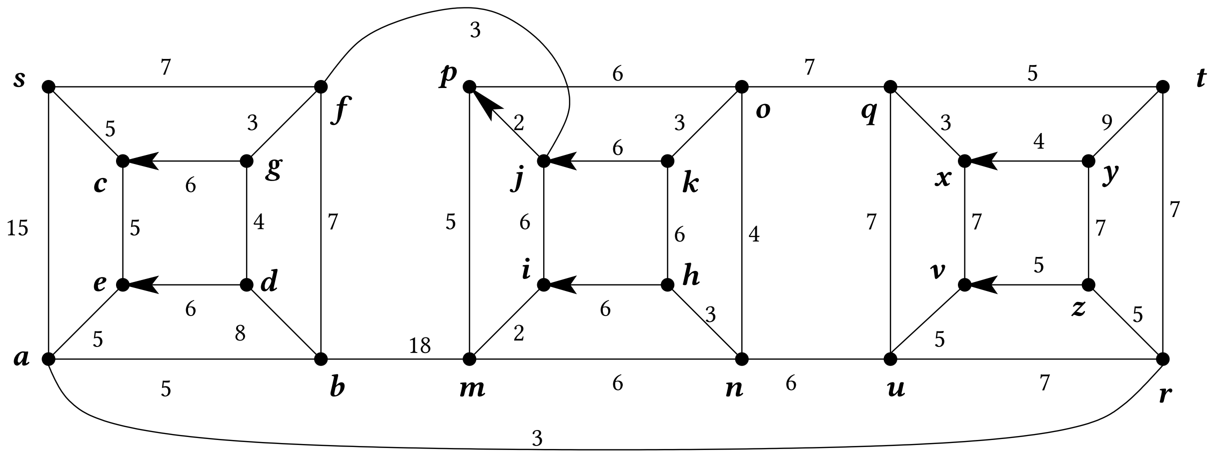


Figura 11: **certificati di corretta valutazione della sensitività per l'arco scelto.**

,

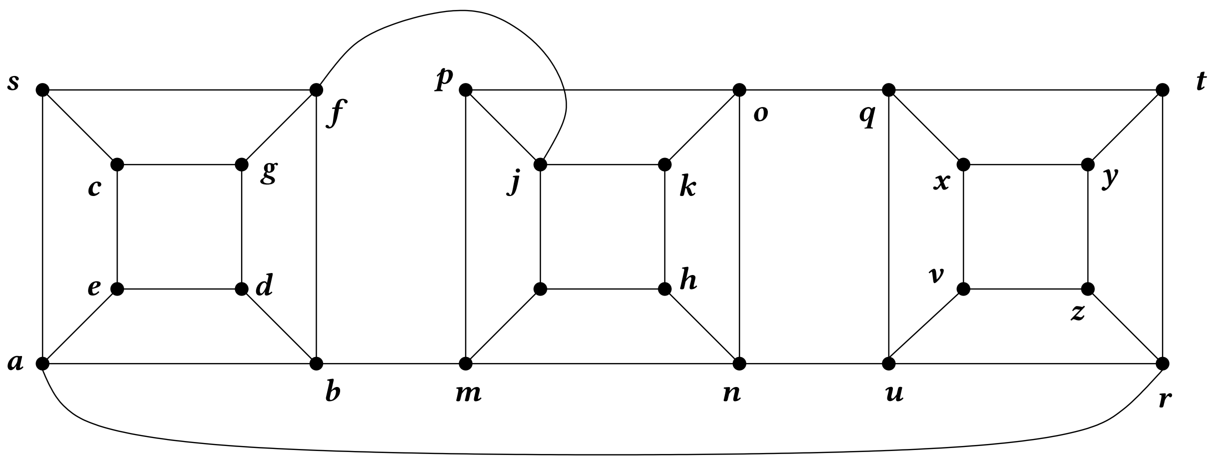


Figura 12: **max matching.**

Esercizio 4 (con 10 richieste: 1+1+1+2+2+2+1+2+1+2 = 15 punti [simplesso]):

Il seguente problema P di PL modella uno dei problemi su specifica istanza incontrati nell'Esercizio 1, ma parzialmente generalizzato a versione pesata con l'introduzione di un parametro K ad uso ispettivo sperimentale. (Saperlo non è necessario ma può aiutarti nel gestirti offrendoti visione e riferimento.)

$$
\begin{array}{llr}
\min\ x_A + x_B + x_C + x_1 + K x_2 + x_3 & & \\
x_A \qquad + x_1 & \geq 1 & \text{(kill M[1,1]=1 constraint)} \\
x_A \qquad\qquad + x_2 & \geq 1 & \text{(kill M[1,2]=1 constraint)} \\
x_A \qquad\qquad\qquad + x_3 & \geq 1 & \text{(kill M[1,3]=3 constraint)} \\
x_B \qquad\quad + x_2 & \geq 1 & \text{(kill M[2,2]=2 constraint)} \\
x_C \qquad + x_2 & \geq 1 & \text{(kill M[3,2]=1 constraint)} \\
x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (1 pt, recognize form) Cosa sai dire sulla forma particolare di questo problema di PL (non limitarti a spendere nomi ma esprimi anche le proprietà possedute che ti fanno spendere tale/tali etichette).

4 .2 (1 pt, verify feasibility) Si verifichi punto per punto che la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ con $\overline{x}_A = \overline{x}_2 = 1$ e $\overline{x}_B = \overline{x}_C = \overline{x}_1 = \overline{x}_3 = 0$ è ammissibile, avendo cura di evidenziare le diseguaglianze soddisfatte in senso stretto.

4 .3 (1 pt, get dual LP) Scrivi l'LP duale D di P.

4 .4 (2 pt, complementary slackness conditions) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari.

4 .5 (2 pt, complementary dual solutions) Ammissibile o meno, ottieni una soluzione $\overline{\boldsymbol{y}}$ di D complementare a $\overline{\boldsymbol{x}}$.

4 .6 (2 pt, eval optimality) Stabilire per quali valori di K la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}$ è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità? (1pt)

4 .7 (1 pt, first dual sol) Fissato $K = 5$, quale è il pivot suggerito dal malfunzionamento di $\overline{\boldsymbol{y}}$ in quanto certificato di ottimalità per $\overline{\boldsymbol{x}}$?

4 .8 (2 pt, get tableau) Si scriva un tableau che esprima la soluzione di base $\overline{\boldsymbol{x}}$.

4 .9 (1 pt, pivot) Si effettui il pivot suggerito dalla violazione di $\overline{\boldsymbol{y}}$ e si fornisca la soluzione ottima $\overline{\boldsymbol{x}}'$ per $K = 5$.

4 .10 (2 pt, optimality range) Per quali valori di K la soluzione $\overline{\boldsymbol{x}}'$ è ottima? Si fornisca una soluzione duale che ne certifichi l'ottimalità su tutto il range.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-collaborare al controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccoglierli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

<u>Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**</u>

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

<u>Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**</u>

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito và richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.