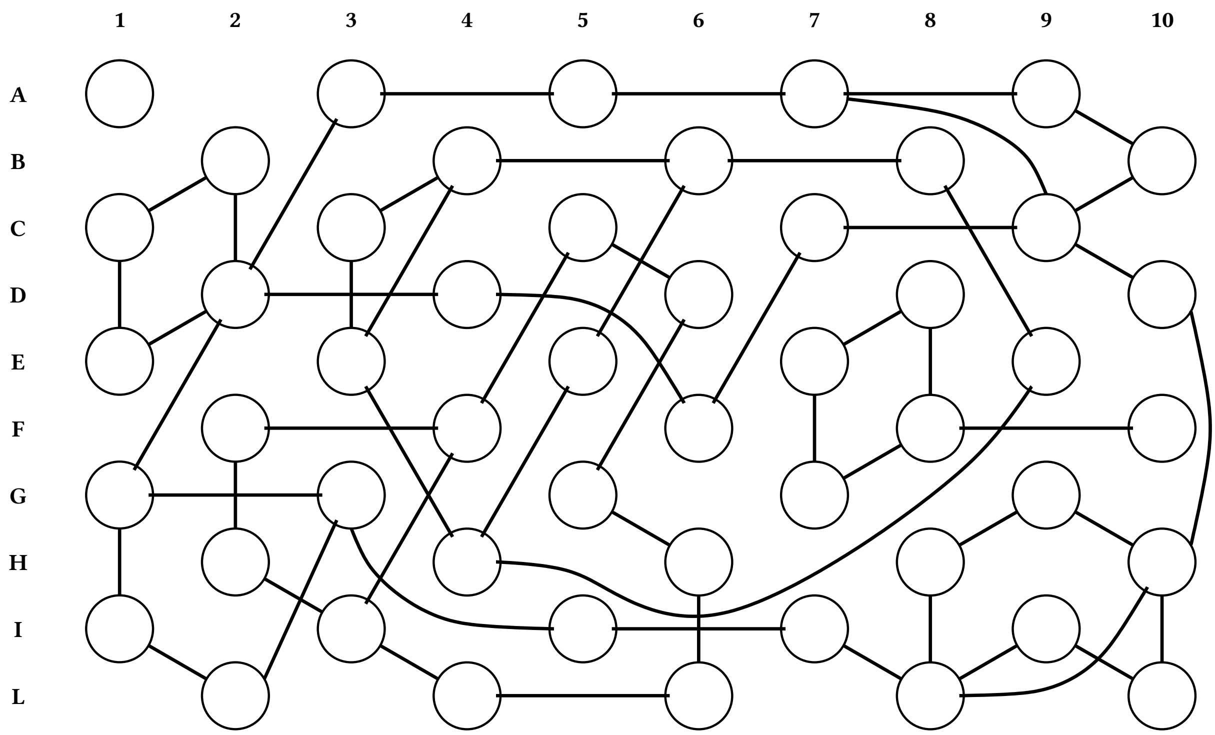
NOME:	COGNOME: ....
MATRICOLA:	FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 03 luglio 2025

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

5 esercizi per 89 punti in palio   voto $\geq$ punti — 5, 40⟶ 30 *e lode*)

Esercizio 1 (con 6 richieste: 1+1+3+1+1+1 = 8 punti [grafi visual]):



Richieste dell'Esercizio 1

1 .1 (1 pt, componenti_connesse) Colora i nodi in modo da evidenziare le diverse componenti connesse

1 .2 (1 pt, distingui nodi e archi speciali)

nodi isolati	foglie	cutnodes	bridges

1 .3 (3 pt, make bipartite) rendi il grafo bipartito rimuovendo il minor numero di archi (1pt se suggerisci quali archi rimuovere ed evidenzi la bipartizione del grafo risultante, 1pt se esibisci una famiglia di cicli dispari che richiedano la rimozione di quel numero di archi per essere tutti eliminati, 1pt per il numero di soluzioni ottime). Addobba sempre la figura sopra per l'esibizione dei certificati

1 .4 (1 pt, planarità) Dire se planare oppure no, argomentandolo via certificati

1 .5 (1 pt, Hamilton) Per ogni componente di più nodi, fornire un ciclo Hamiltoniano se presente, altrimenti un cammino Hamiltoniano se presente, altrimenti spiega perchè nisba

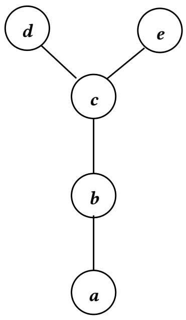
1 .6 (1 pt, Eulero) Per ogni componente di più nodi, stabilire se ammetta un ciclo Euleriano, e, in caso contrario, stabilire se ammetta un cammino Euleriano (stabilire=certificato di SI oppure di NO)

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+3+2+2+1+7+5+5 = 26 punti [modellazione/riduzioni]):

In un grafo $G = (V, E)$, chiamiamo:

1. *independent set* ogni $X \subseteq V$ tale che nessun arco in E abbia entrambi gli estremi in X,
2. *matching* ogni $M \subseteq E$ non contenente due archi con un estremo in comune.

Un independent set (o matching) è detto *massimale* se non è strettamente contenuto in un altro independent set (o matching, rispettivamente).



Due problemi modello espressi nel linguaggio dei grafi sono:

1. Min Maximal Independent Set: trova un independent set massimale di cardinalità la più piccola possibile.
2. Min Maximal Matching: trova un matching massimale di cardinalità la più piccola possibile.

Quì il matching $M = \{bc\}$ e l'independent set $X = \{a, c\}$ sono entrambi massimali ma non di cardinalità massima, anzi, sono proprio quelli di cardinalità minima come da ricercarsi nei due problemi sopra introdotti.

Richieste dell'Esercizio 2

2 .1 (1 pt, rimappatura) Esprimere l'istanza di Min Maximal Matching data in figura in termini di un'opportuna istanza di Min Maximal Independent Set. Assicurati che gli independent set del grafo da te prodotto siano in corrispondenza biunivoca coi matching del grafo in figura.

2 .2 (3 pt, riduzione tra problemi) Ridurre Min Maximal Matching a Min Maximal Independent Set (1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).

2 .3 (2 pt, model minMIS as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Maximal Independent Set per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).

2 .4 (2 pt, model minMM as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Maximal Matching per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).

2 .5 (1 pt, closed formula) Dare la formula chiusa per la minima cardinalità di un maximal independent set e per quella di un maximal matching sul cammino di n nodi.

2 .6 (7 pt, dynamic programming) Nel problema Min Maximal Independent Set Pesato a ciscun nodo del grafo ricevuto in input è associato un costo e quello che vogliamo determinare è il minimo costo (definito come la somma dei costi sui nodi presi) di un independent set massimale. Assegnamo 1pt se determini correttamente il minimo costo per il cammino dove i nodi, come incontrati nell'ordine lungo il cammino, abbiano costo 1,7,2,3,9,1,2,5,2,4,6,3,4,2,2. Miriamo a progettare un algoritmo di programmazione dinamica per Min Maximal Independent Set Pesato ristretto a cammini: 3pt per la famiglia di sotto-problemi associate ai nodi, 2pt per la ricorrenza, 1pt per i casi base.

2 .7 (5 pt, classic model knowledge) Descrivi il problema/modello Min Node Cover (1pt) e dimostrane l'NP-competezza (ne abbiamo visto una dimostrazione in classe). 1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 2pt per il lemma hard).

2 .8 (5 pt, NPC-proof for minMIS) Ridurre Min Node Cover a Min Maximal Independent Set per dimostrare l'NP-completezza di quest'ultimo (3pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).

Esercizio 3 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A**−**1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I**−**10**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	3	1	0	1	1	0	0	•	6
B	2	•	1	•	0	0	•	0	0	5
C	0	•	0	0	•	2	0	1	1	4
D	0	0	1	0	1	0	1	•	0	3
E	0	0	•	2	0	•	2	0	0	1
F	0	1	3	1	1	3	1	•	0	1
G	•	3	2	1	2	•	•	3	1	•
H	2	1	2	•	•	1	1	1	•	0
I	4	4	3	3	2	1	1	•	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3) e il passo diagonale (che in pratica porta direttamente alla cella raggiunta concatenando quello orizzontale e quello verticale). Se il robot deve evitare le celle proibite (•), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un pedaggio del valore riportato nella cella stessa, sapresti minimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A–1** a **I–10**
3 .2 (1 pt, num percorsi da B–3) Numero di percorsi ammissibili da **B–3** a **I–10**
3 .3 (1 pt, num percorsi a F–6) Numero di percorsi ammissibili da **A–1** a **F–6**
3 .4 (1 pt, num percorsi per D–5) Numero di percorsi da **A–1** a **I–10** passanti per **D–5**
3 .5 (1 pt, opt val) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A–1** a **I–10**. (E soluzione di tale valore).
3 .6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A–1** a **I–10**
3 .7 (1 pt, opt val per D–5) Minimo totale di pedaggi su un cammino da **A–1** a **I–10** passante per **D–5**
3 .8 (2 pt, num paths of opt val via D–5) Numero cammini ottimi da **A–1** a **I–10** passanti per **D–5**

Quadro delle risposte dell'Esercizio 3

consegna	num. paths	opt val	un path (percorso) ottimo
A–1 → I–10			
B–3 → I–10			
A–1 → F–6			
passaggio per D–5			
minimo costo			
n. min-cost paths			
min-cost D–5-path			
n. min-cost D–5-paths			

,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 3: **num cammini a**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 4: **num cammini da**

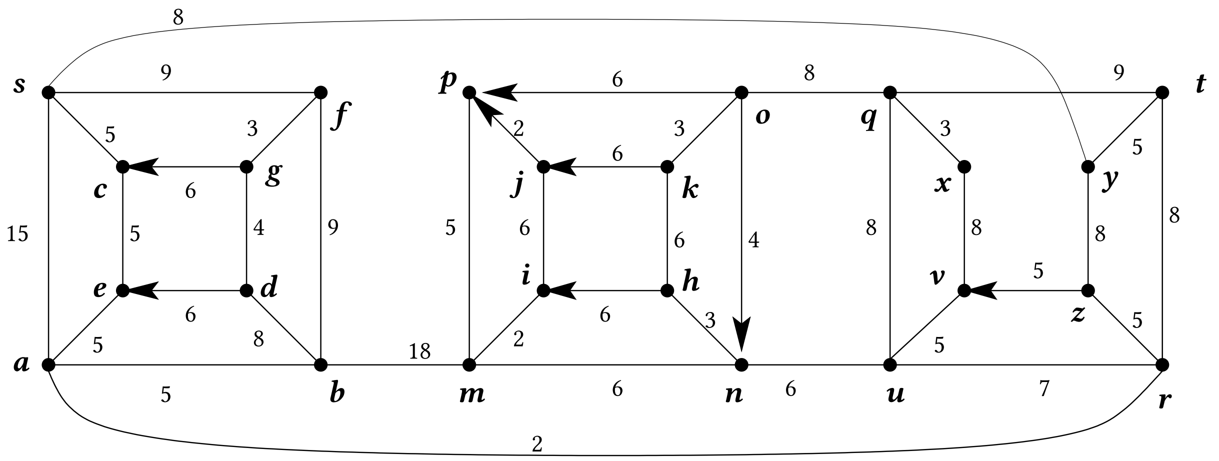
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 5: **opt val path to (e num opt paths)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 6: **opt val path from (e num opt paths)**

Esercizio 4 (con 11 richieste: 3+2+2+2+2+2+1+2+4+5+2 = 27 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G, il grafo G_u ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco su, e il grafo G_q ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco sq.

4 .2 (2 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G, G_u e G_q (1pt se corretti tutti i certificati di bicolorazione, 1 pt se ok ogni certificato di ottimalità).

4 .3 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4 .4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.

4 .5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

4 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).

4 .7 (1 pt, one MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo.

4 .8 (2 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)

4 .9 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G?

4 .10 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti nel nodo m certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.

4 .11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in $G_{s,r}$, il grafo ottenuto da G rimuovendo i nodi s ed r (1pt). Certifica la non esistenza di un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

Quadro delle risposte dell'Esercizio 4

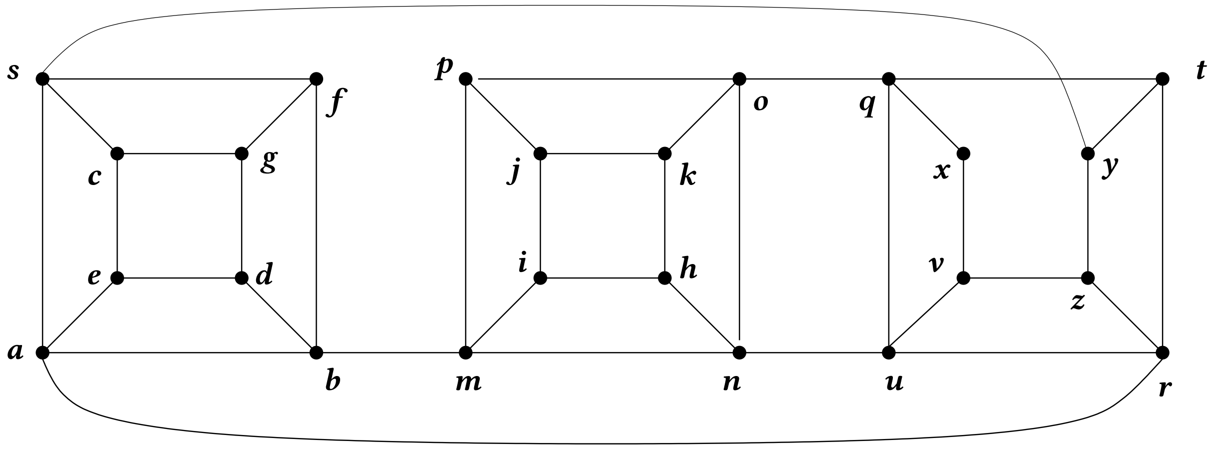


Figura 1: **planarità o meno di G.**

,

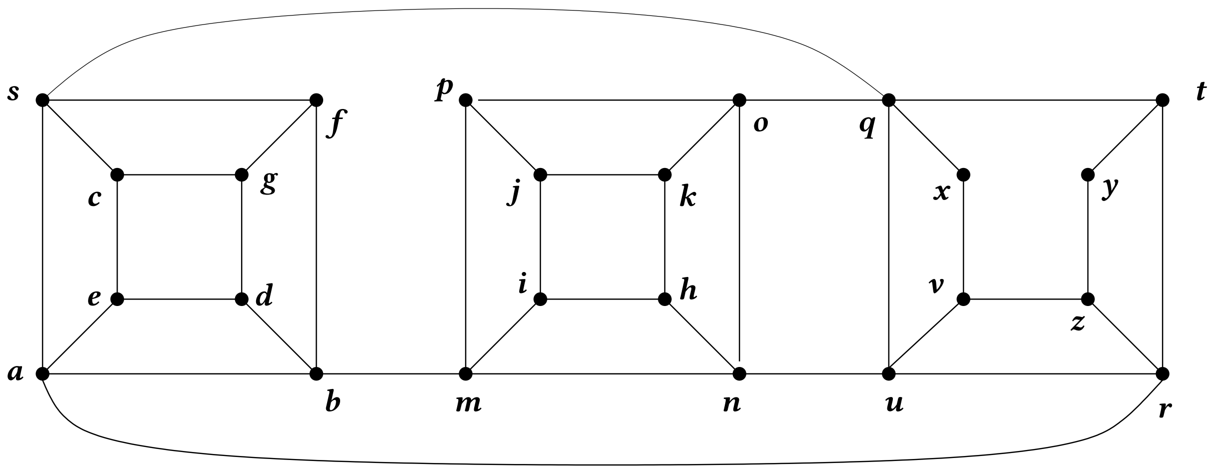


Figura 2: **planarità o meno di G_q.**

,

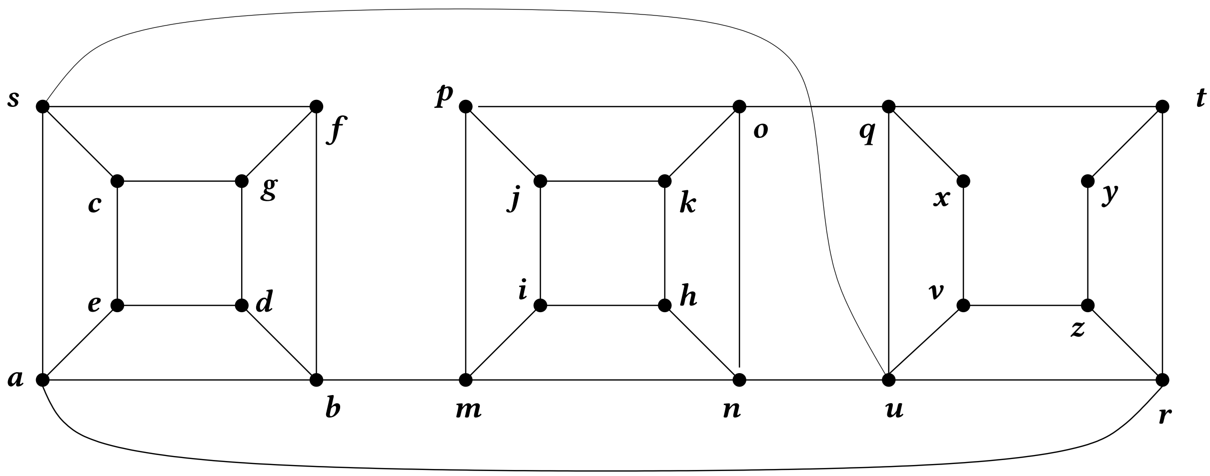


Figura 3: **planarità o meno di G_u.**

,

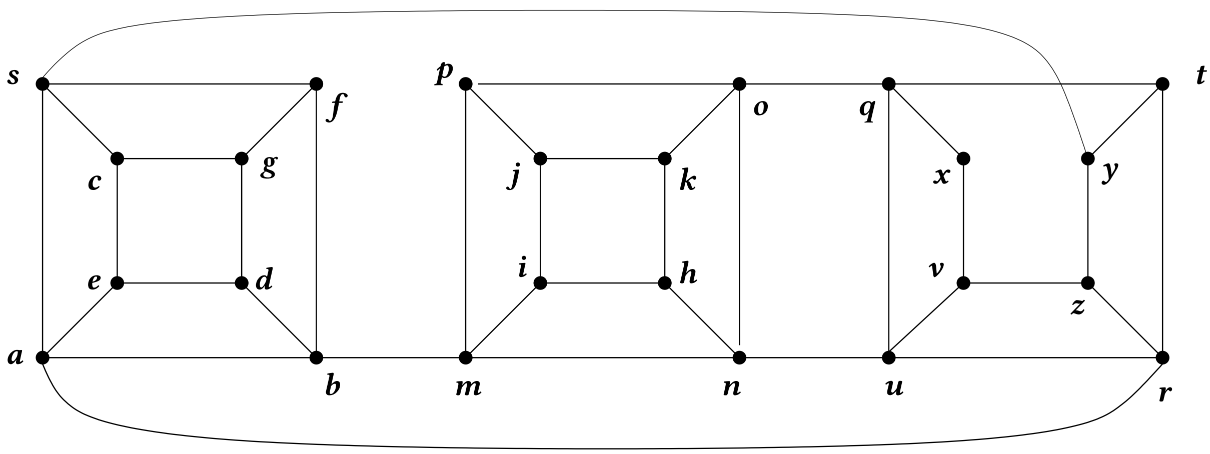


Figura 4: **bipartiteness di G.**

,

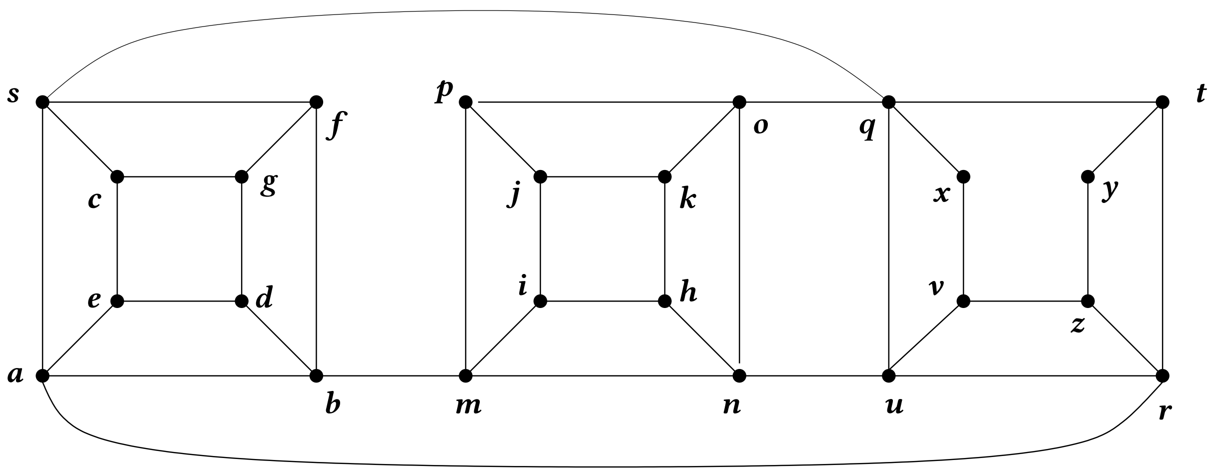


Figura 5: **bipartiteness di G_q«.**

,

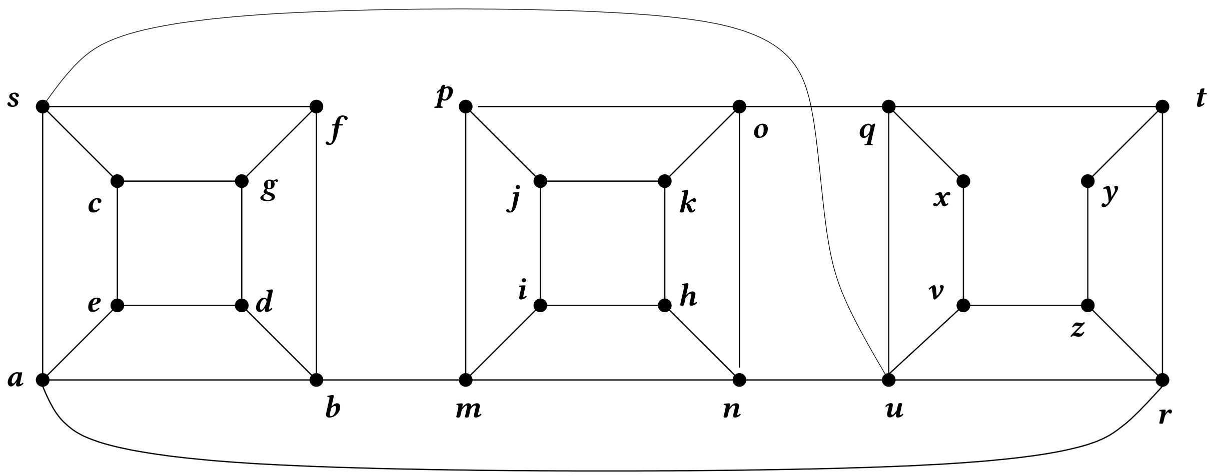


Figura 6: **bipartiteness di G_u«.**

,

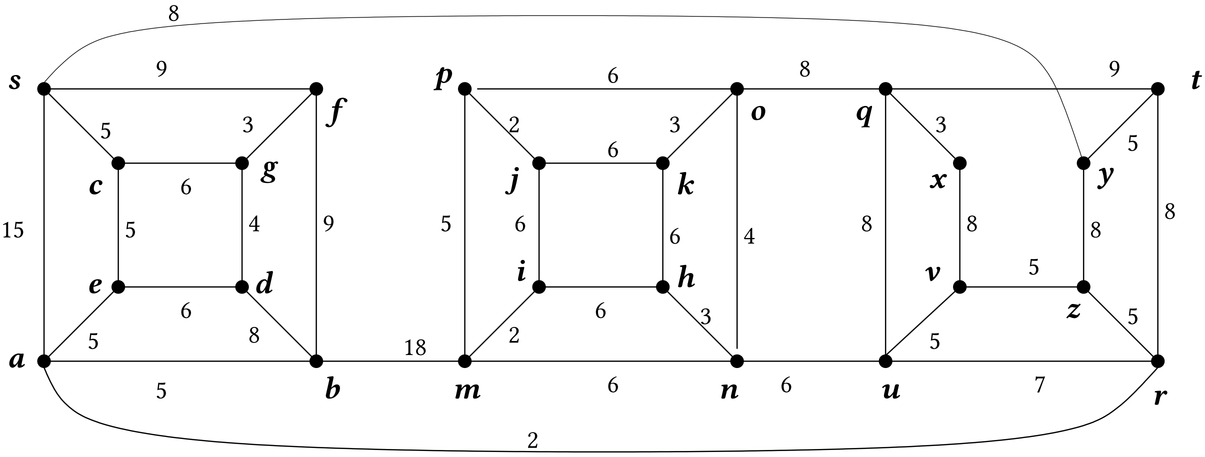


Figura 7: **MST.**

,

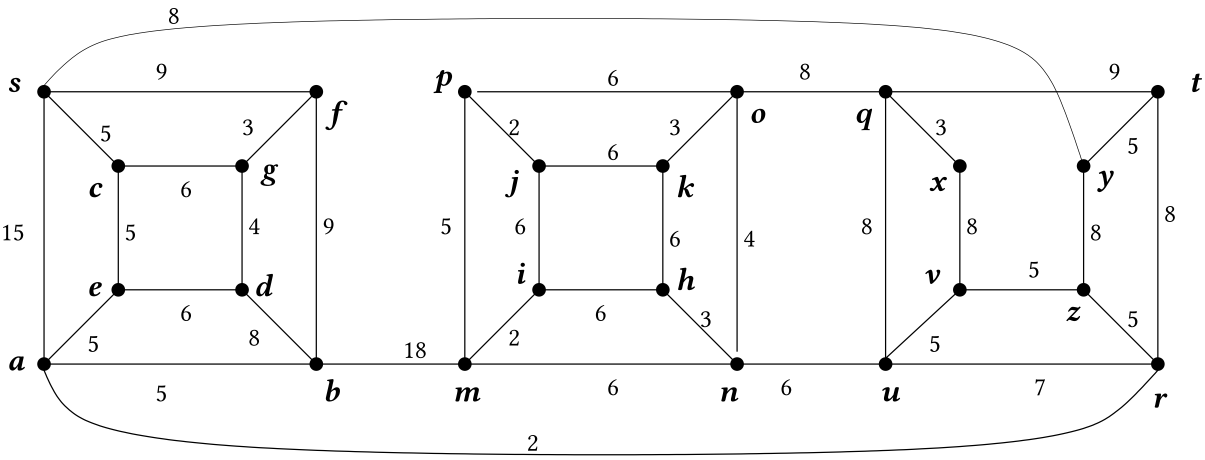


Figura 8: **arco** mb**.**

,

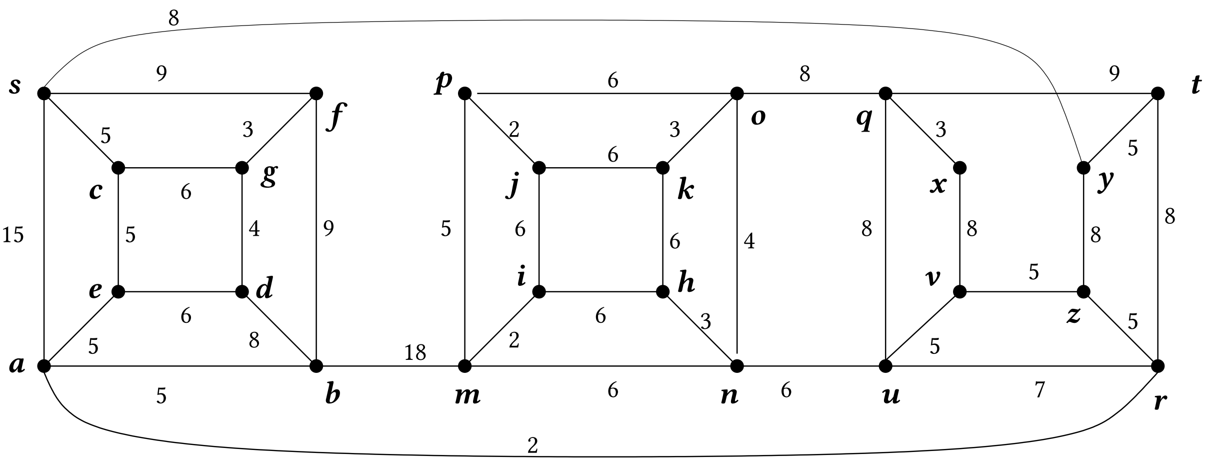


Figura 9: **arco** mp**.**

,

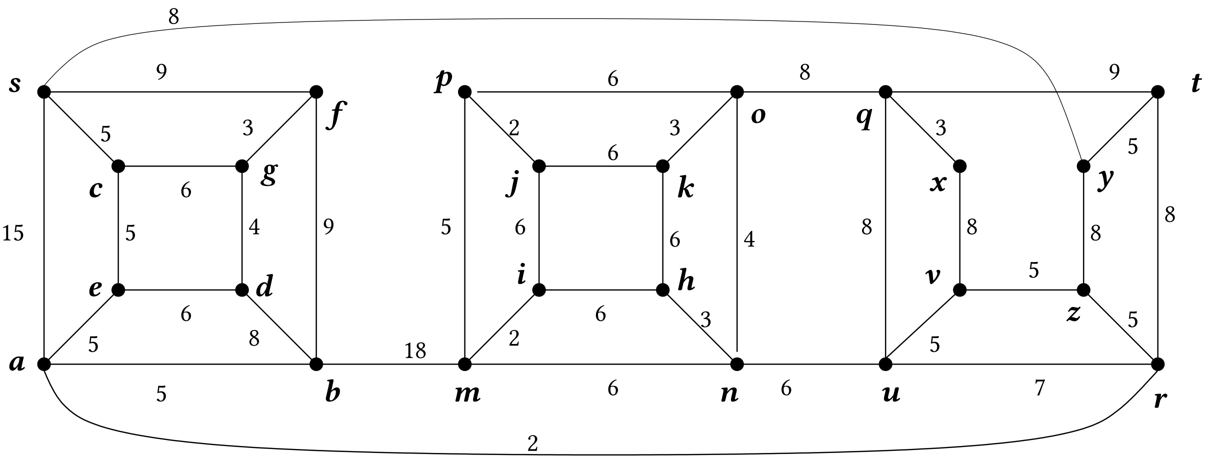


Figura 10: **arco mi.**

,

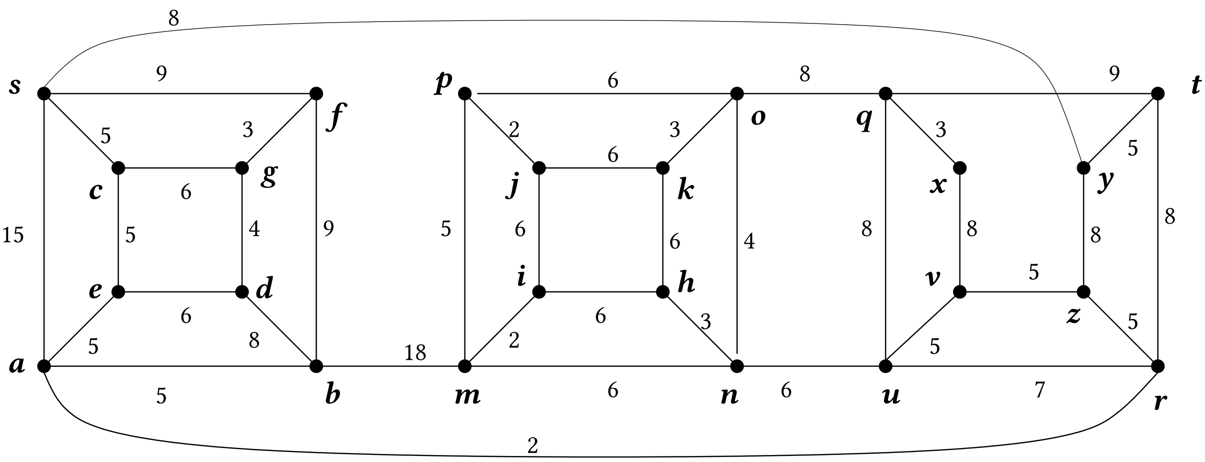


Figura 11: **arco mn.**

,

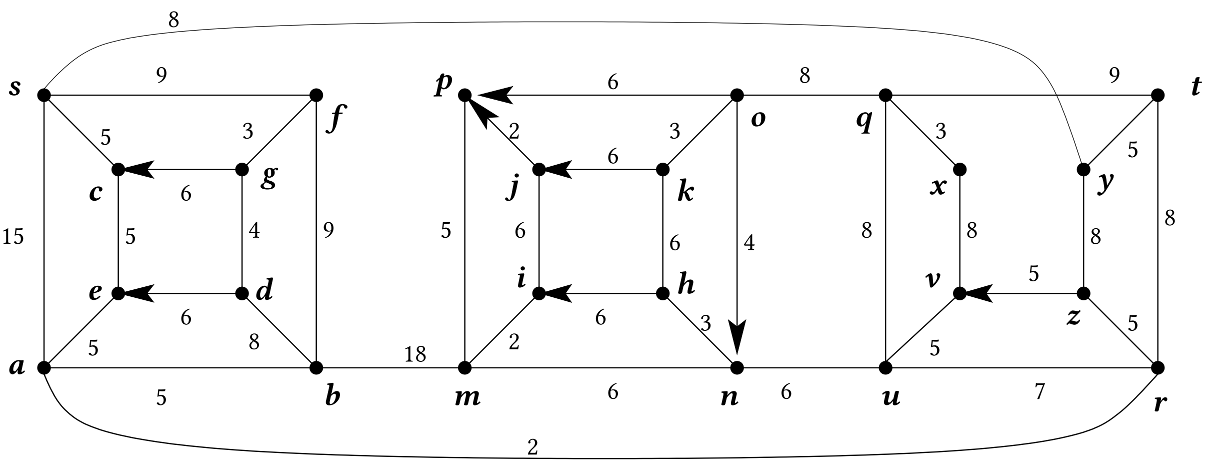


Figura 12: **max-flow min-cut.**

,

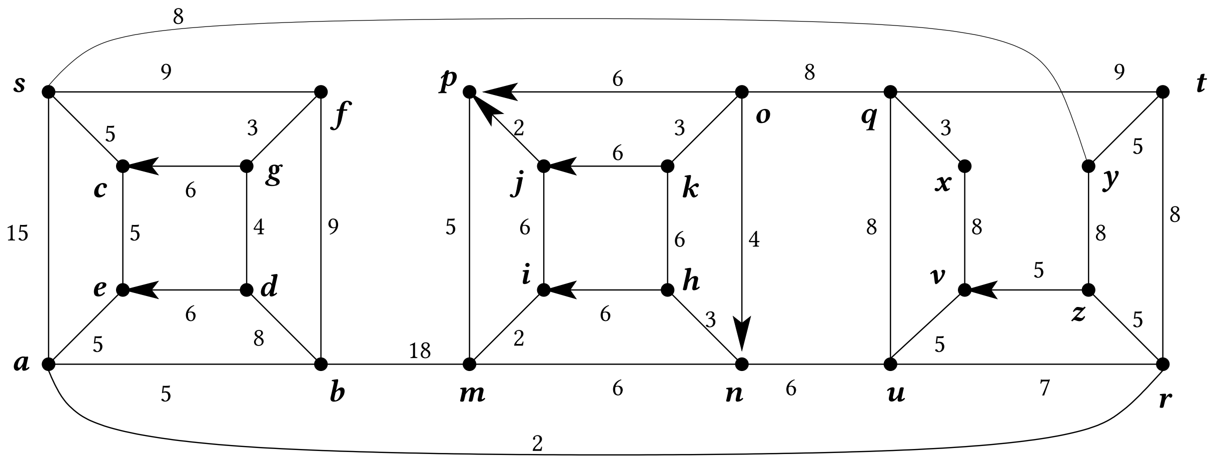


Figura 13: **certificati di corretta valutazione della sensitività per l'arco scelto.**

,

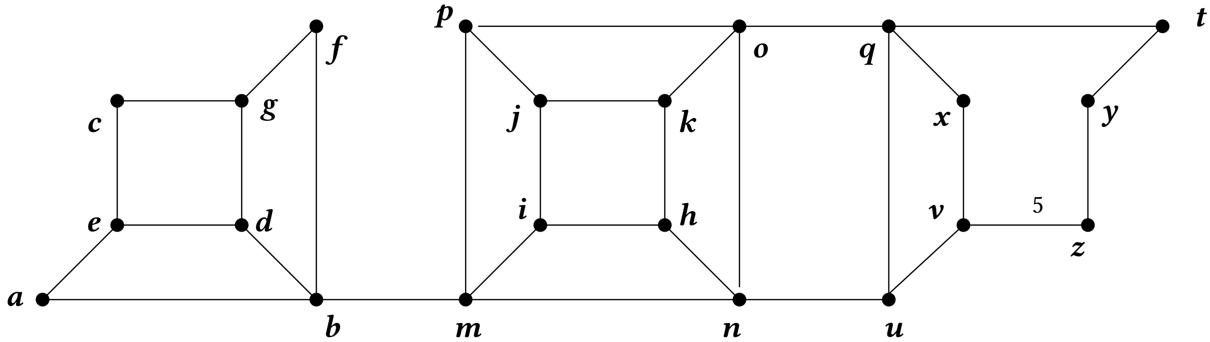


Figura 14: **max matching.**

Esercizio 5 (con 8 richieste: 1+1+1+4+2+3+4+2 = 18 punti [simplesso]):

Nel seguente problema di PL, K è un parametro a valori reali (in $\mathbb{R}$).

$$\begin{array}{rl}
\min & 5x_A + 2x_B + 2x_C + Kx_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \\
& x_A + x_1 \geq 1 \\
& -x_A - x_2 \leq -1 \\
& x_A + x_3 \geq 1 \\
& x_A + x_3 - x_4 \geq 1 \\
& x_B + x_2 \geq 1 \\
& x_C + x_2 \geq 1 \\
& x_A \geq 0,\ x_B \geq 0,\ x_C \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \leq 0
\end{array}$$

Richieste dell'Esercizio 5

5 .1 (1 pt, standard form) Portare il problema nella forma di minimizzazione standard ($\min\{c'x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$). Nota: per evitare di introdurre confusione sui nomi ed effettivi valori delle variabili, nelle domande a seguire ci riferiremo sempre al problema già portato in forma standard.
5 .2 (1 pt, canonic form) Scrivere la forma canonica di P (il primo dizionario) e il primo tableau. Leggerne la prima soluzione di base associata. Interpreta il significato combinatorico di tale soluzione di base (se hai espresso la visione combinatorica nel punto precedente).
5 .3 (1 pt, basic feasible solution) Individua a occhio una qualche soluzione di base ammissibile.
5 .4 (4 pt, simplex method) Risolvi all'ottimo col metodo del simplesso per un qualche valore di K come a tua preferenza/scelta. (3pt) Spendi esplicitamente (in chiarezza) almeno una prova del nove, al passaggio che preferisci. (1pt)
5 .5 (2 pt, get dual LP) Scrivi l'LP duale D di P (1pt). Fornire soluzione ottima di D per lo stesso valore scelto per K (1pt).
5 .6 (3 pt, complementary slackness conditions) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari con riferimento alla soluzione ottenuta per il primale (2pt). Verificale una per una sulla soluzione duale prodotta (1pt).
5 .7 (4 pt, eval optimality) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione primale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? (1pt) Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione duale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K? (1pt) Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K. (1pt)
5 .8 (2 pt, eval optimality) Fornire soluzione primale e duale ottime per il range complementare di K (1pt).

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame -**collaborare al controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccoglierli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino

Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -**assegnazione punti**

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -**completamento esame**

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito và richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.