Esame di Ricerca Operativa - 3 luglio 2015
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Un'azienda produttrice di automobili ha a disposizione tre nuovi stabilimenti (S_1, S_2, S_3), il cui costo di attivazione è pari a 9.000, 7.000 e 8.000 euro, rispettivamente. Si deve decidere quali stabilimenti attivare, con l'obiettivo di soddisfare la domanda annuale di 4 punti vendita (P_1, P_2, P_3, P_4) pari a 150, 400, 200 e 300 automobili, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di trasporto (espressi in euro) dagli stabilimenti ai punti vendita:

	P_1	P_2	P_3	P_4
S_1	20	40	10	30
S_2	30	60	50	40
S_3	40	50	60	70

Si vuole minimizzare i costi complessivi di attivazione degli stabilimenti e di trasporto delle automobili nei punti vendita, tenendo conto che la capacità produttiva annuale dei tre stabilimenti è pari a 700, 900 e 800 automobili, rispettivamente. Formulare adeguatamente come un problema di Programmazione Lineare Mista utilizzando variabili frazionarie ove possibile.

svolgimento.

Tenendo conto della funzione obiettivo (minimizzazione dei costi complessivi di trasporto e di attivazione degli stabilimenti), per definire le variabili decisionali si impongono le seguenti considerazioni. I costi di trasporto unitari (cioè quanto costa trasportare un'autovettura) costituiscono una quantità che lega singolarmente ogni stabilimento con ciascun punto vendita. Quindi un certo numero di variabili decisionali coinvolge due indici (l'indice che indica lo stabilimento e l'indice che indica il punto vendita). Di conseguenza indichiamo con

$x_{i,j}$ = numero di automobili trasportate dallo stabilimento S_i al punto vendita P_j
(dove $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$).

Dovendo invece tener conto dei costi complessivi di attivazione degli stabilimenti, bisogna individuare quali saranno gli stabilimenti da attivare. Quindi il secondo gruppo di variabili decisionali è di tipo binario. Indichiamo con y_i (con $i = 1, 2, 3$) la variabile binaria che varrà 1 se lo stabilimento S_i sarà attivato, mentre varrà 0 in caso contrario. Possiamo quindi ora formulare la funzione obiettivo nel seguente modo:

$$z = 20\,x_{1,1} + 40\,x_{1,2} + 10\,x_{1,3} + \ldots + 60\,x_{3,3} + 70\,x_{3,4} + 9.000\,y_1 + 7.000\,y_2 + 8.000\,y_3.$$

Quanto ai vincoli, dobbiamo tener conto della capacità produttiva annuale di ogni singolo stabilimento. Ad esempio, lo stabilimento S_1 non può produrre più di 700 autovetture all'anno; tenendo conto che il numero di automobili, che dallo stabilimento S_1 (se attivato) vengono trasportate nei quattro punti vendita, è pari a

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4},$$

il vincolo sulla capacità produttiva annuale dello stabilimento S_1 è:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 700.$$

In realtà tale vincolo non è sufficientemente espressivo, perchè, nel caso in cui lo stabilimento S_1 non venisse attivato (cioè $y_1 = 0$), le variabili $x_{1,1}$, $x_{1,2}$, $x_{1,3}$ e $x_{1,4}$ dovrebbero assumere valore nullo (ai 4 punti vendita non può arrivare alcuna automobile dallo stabilimento S_1). Per tenere conto di questo, il precedente vincolo viene rafforzato nel seguente modo:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 700\, y_1.$$

Questo fa sì che, qualora lo stabilimento S_1 non venisse attivato (ossia per $y_1 = 0$), allora si avrebbe:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 0.$$

e quindi, tenendo conto che le variabili xi, j possono assumere (per il loro significato fisico) solo valori positivi o nulli , si avrebbe:

$$x_{1,1} = x_{1,2} = x_{1,3} = x_{1,4} = 0.$$

Analogamente, i vincoli sulle capacità produttive degli altri due stabilimenti (S_2 e S_3) sono rispettivamente:

$$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 900\, y_2.$$

$$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 800\, y_3.$$

Per quanto riguarda i vincoli di domanda dei singoli punti vendita, basta tener conto che la quantità di autovetture che arriva a ciascun punto vendita è dato dalla somma delle autovetture che, dagli stabilimenti attivati, arriva in quel punto vendita. Pertanto i vincoli sui quattro punti vendita (P_1, P_2, P_3, P_4) sono rispettivamente:

$$x_{1,1}+x_{2,1}+x_{3,1} \geq 150, x_{1,2}+x_{2,2}+x_{3,2} \geq 400, x_{1,3}+x_{2,3}+x_{3,3} \geq 200, x_{1,4}+x_{2,4}+x_{3,4} \geq 300.$$

Quindi, tenendo conto anche dell'interezza delle variabili $x_{i,j}$, la formulazione finale del problema è:

$$\min_{x,y} z \quad = 20\, x_{1,1} + 40\, x_{1,2} + 10\, x_{1,3} + \ldots + 60\, x_{3,3} + 70\, x_{3,4} + 9.000\, y_1 + 7.000\, y_2 + 8.000\, y_3$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} \leq 700\, y_1 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} \leq 900\, y_2 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} \leq 800\, y_3 \\ x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \geq 150 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \geq 400 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \geq 200 \\ x_{1,4} + x_{2,4} + x_{3,4} \geq 300 \\ x_{i,j} \geq 0 \qquad \text{i = 1,2,3} \qquad \text{j = 1,2,3.} \\ y_i \in \{0, 1\} \qquad \text{i = 1,2,3.} \end{cases}$$

Problema 2 (2+3=5 punti):
È dato un grafo non-orientato $G = (V, E)$.

2.1(2pt) Formulare come un problema di PLI il problema di capire se G non contenga alcun ciclo di lunghezza dispari. Suggerimenti: (1) sfruttare la buona caratterizzazione nota; (2) che si debba avere anche una funzione obiettivo non è stato prescritto dal medico.

2.2(3pt) Formulare come un problema di PLI il problema di capire se G sia 3 colorabile, ossia esista un mapping $x : V \mapsto \{0, 1, 2\}$ tale che $x_u \neq x_v$ per ogni arco $uv \in E$.

svolgimento.

(2pt) Un grafo non-orientato $G = (V, E)$ non contiene cicli dispari se e solo se è 2-colorabile (cioè bipartito), ossia esiste un mapping $x : V \mapsto \{0, 1\}$ tale che $x_u \neq x_v$ per ogni arco $uv \in E$. Introduciamo pertanto una variabile binaria x_v per ogni $v \in V$, ed impostiamo il seguente sistema di vincoli lineari:

$$x_u + x_v = 1 \text{ per ogni arco } uv \in E.$$

(3pt) 3-colorabilità:

Soluzione più sofisticata ma che introduce un armamentario riutilizzabile:

oltre alle variabili x_v (per ogni $v \in V$), introduciamo anche le due variabili binarie $y_{(u,v)}$ e $y_{(v,u)}$ per ogni arco $uv \in E$. Lo scopo di tale coppia di variabili è impegnarsi su a quale tra x_u ed x_v sia concesso di *non* eccedere strettamente l'altra in valore. A questo punto impostiamo il seguente sistema di vincoli lineari:

$$\begin{cases} x_u - x_v \geq 1 - 3\, y_{(u,v)} \text{ per ogni } (u, v) \in V^2 \text{ tale che } uv \in E. \\ y_{(u,v)} + y_{(v,u)} = 1 \text{ per ogni } uv \in E. \\ y_{(u,v)} \in \{0, 1\} \text{ per ogni } (u, v) \in V^2 \text{ tale che } uv \in E. \\ x_v \leq 2 \text{ per ogni } v \in V. \\ x_v \geq 0 \text{ per ogni } v \in V. \end{cases}$$

Si noti che non è necessario introdurre alcun vincolo di interezza sulle variabili x_v. Data una soluzione non intera (x, y) possiamo infatti ricavarne una soluzione intera $(\tilde{x}, y)$ semplicemente settando

$$\tilde{x}_v = \begin{cases} 0 \text{ se } x_v < 1. \\ 1 \text{ se } x_v = 1. \\ 2 \text{ se } x_v > 1. \end{cases}$$

Soluzione più immediata ed approccio standard:

si introducano tre variabili binarie $y_{v,0}$, $y_{v,1}$ e $y_{v,2}$ per ogni $v \in V$. Il significato inteso di $y_{v,i} = 1$ è che al nodo v vada assegnato il colore i.

A questo punto impostiamo il seguente sistema di vincoli lineari:

$$\begin{cases} y_{v,0} + y_{v,1} + y_{v,2} = 1 \text{ per ogni } v \in V. \\ y_{v,i} \in \{0, 1\} \text{ per ogni } v \in V \text{ e } i = 0, 1, 2. \\ y_{u,i} + y_{v,i} \leq 1 \text{ per ogni } uv \in E \text{ e } i = 0, 1, 2. \\ x_v = y_{v,1} + 2\, y_{v,2} \text{ per ogni } v \in V. \end{cases}$$

Ovviamente le variabili x_v (e l'ultimo vincolo) non sono qui strettamente necessarie per rappresentare il problema della 3-colorabilità in sè, ma abbiamo solo immaginato più carino raccordare questa formulazione con la precedente e col testo dell'esercizio.

Problema 3 (8 punti):
Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

$$\max\ 2\,x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 20x_4 + 10x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 12 + t_1 \\ x_3 + x_4 & \leq 10 + t_2 \\ x_5 + x_6 & \leq 14 + t_3 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 20 + t_4 \\ x_2 + x_4 + x_6 & \leq 15 + t_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

3.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) = (6, 5, 0, 10, 14, 0)$ è soluzione ammissibile per $P(0)$.

3.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale $D(t)$ di $P(t)$.

3.3.**(1pt)** Impostare il sistema per la ricerca di una soluzione di base di $D(0)$ soggetta alle condizioni agli scarti complementari rispetto a $\overline{x}$.

3.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

3.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione $\overline{x}$ assegnata è ottima per $P(0)$? Indica con chiarezza tutte le verifiche

3.6 **(1pt)** esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

3.7 **(2pt)** per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$, fornire i limiti a_i e b_i tali che il prezzo ombra di t_i sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0\ \forall j \neq i$). che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) & = 11 \leq 12 \\ (0) + (10) & = \mathbf{10} \leq 10 \\ (14) + (0) & = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (0) + (14) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (5) + (10) + (0) & = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min \psi(t) = (12+t_1)\, y_1 + (10+t_2)\, y_2 + (14+t_3)\, y_3 + (20+t_4)\, y_4 + (15+t_5)\, y_5$$

$$\begin{cases} y_1 \quad\quad\quad + \; y_4 \quad\quad \geq \; 2 \\ y_1 \quad\quad\quad\quad\quad + \; y_5 \; \geq \; 6 \\ \quad y_2 \quad\quad + \; y_4 \quad\quad \geq \; C_3 \\ \quad y_2 \quad\quad\quad\quad + \; y_5 \; \geq \; 20 \\ \quad\quad y_3 + \; y_4 \quad\quad \geq \; 10 \\ \quad\quad y_3 \quad\quad + \; y_5 \; \geq \; C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1, 2, 4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} \quad\quad + \; y_4 \quad\quad = \; 2 \\ \quad\quad\quad\quad + \; y_5 \; = \; 6 \\ y_2 \quad\quad\quad\quad + \; y_5 \; = \; 20 \\ \quad y_3 + \; y_4 \quad\quad = \; 10 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $\overline{y} = (0, 14, 8, 2, 6)$. (Questo significa che la soluzione primale assegnata era di base non degenere.)

Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottima se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 16 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = 14 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 16$ e $C_6 \leq 14$.

I prezzi ombra sono dati proprio da $\overline{y} = (0, 14, 8, 2, 6)$ e possono essere messi in evidenza nella seguente scrittura per i valori della funzione obiettivo all'ottimo

$$z(t) = \psi(t) = (12+t_1)\, y_1 + (10+t_2)\, y_2 + (14+t_3)\, y_3 + (20+t_4)\, y_4 + (15+t_5)\, y_5 = 382 + 14\, t_2 + 8\, t_3 + 2\, t_4 + 6\, t_5\,.$$

Calcoliamo ora la soluzione di base di $P(t)$, per t generico, corrispondente alla stessa partizione delle variabili (in base/fuori base) che per la soluzione di base assegnata $\overline{x} = (6, 5, 0, 10, 14, 9)$ per $P(0)$. Tengo cioè a 0 quelle stesse variabili su cui $\overline{x}$ è a 0 (ossia $\overline{x}_3 = \overline{x}_6 = 0$) e lo stesso per le varibili di slack (ossia metto ad eguaglianza quegli stessi vincoli che $\overline{x}$ soddisfa ad eguaglianza).

$$P(t) \begin{cases} \quad\quad\quad (0) + \; (10+\delta_4) \quad\quad\quad\quad = \; 10 + t_2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (14+\delta_5) + \; (0) \; = \; 14 + t_3 \\ (6+\delta_1) \quad\quad + \; (0) \quad\quad + \; (14+\delta_5) \quad\quad = \; 20 + t_4 \\ \quad (5+\delta_2) \quad\quad + \; (10+\delta_4) \quad\quad + \; (0) \; = \; 15 + t_5 \end{cases}$$

Da cui $(6 + t_4 - t_3, 5 + t_5 - t_2, 0, 10 + t_2, 14 + t_3, 0)$ è la soluzione ottima di base per $P(t)$. La domanda è dove essa ritenga ammissibilità. Dualmente, la soluzione di base duale

$\overline{y} = (0, 14, 8, 2, 6)$ non dipende da t e pertanto resta ammissibile per ogni t. Tuttavia, affinchè essa sia ottima (e la soluzione primale complementare ad essa sia ammissibile) dovremo avere che:

non negatività della x_1: $x_1(t) = 6 + t_4 - t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \leq 6, t_4 \geq -6$;

non negatività della x_2: $x_2(t) = 5 + t_5 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \leq 5, t_5 \geq -5$

non negatività della x_4: $x_4(t) = 10 + t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq -10$

non negatività della x_5: $x_5(t) = 14 + t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \geq -14$

primo vincolo primale: $x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \Leftrightarrow (t_4 - t_3) + (t_5 - t_2) \leq 1 \Leftrightarrow t_4 + t_5 \leq 1 + t_2 + t_3$, quindi $t_4 \leq 1$, $t_5 \leq 1$, $t_2 \geq -1$, $t_3 \geq -1$.

Quindi, $a_2 = -1$, $b_2 = 5$, $a_3 = -1$, $b_3 = 6$, $a_4 = -6$, $b_4 = 1$, $a_5 = -5$, $b_5 = 1$ delimitano gli ambiti di validità dei vari prezzi ombra.

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = TTCTCACAATGCTTCTA$ e $t = CTATCAGTCAACCTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'A'?

4.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = TCAACCTAT$ di t?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = TGCTTCTA$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'A'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s\t	c	t	a	t	c	a	g	t	c	a	a	c	c	t	a	t	
t	11	11	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	1	0
t	11	11	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	1	0
c	11	10	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	4	3	2	1	0
t	10	10	10	10	9	8	8	8	7	6	5	4	3	3	2	1	0
c	9	9	9	9	9	8	7	7	7	6	5	4	3	3	2	1	0
a	8	8	8	8	8	8	7	7	7	6	5	4	3	3	2	1	0

c	8	7	7	7	7	7	7	7	7	6	5	4	3	2	2	1	0
a	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	5	4	3	2	2	1	0
a	7	7	7	6	6	6	5	5	5	5	5	4	3	2	2	1	0
t	6	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	3	2	1	1	0
g	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	2	1	1	0
c	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	2	1	1	0
t	5	5	5	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	2	1	1	0
t	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	1	1	0
c	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	1	0
t	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	0
a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	C T C A C A A C C T A
parte con 'A'	8	A C A A C C T A
tra s e t_9	8	T C A A C C T A
tra s_8 e t	6	T G C C T A

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
9	65	57	55	50	58	47	36	30	59	39	13	54	33	45	20	18	56	53	61	38	19	51	35	26	52	70

5.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta decrescere con un possibile ripensamento (Z-sequenza), se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l'i-esimo, è strettamente minore dell'immediatamente precedente nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 59. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.5(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 14-esimo a 17-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze crescenti tali che ogni elemento della sequenza data ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

DECRESCENTE

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
1	9	8	7	6	6	5	4	3	6	4	1	5	3	4	2	1	5	4	4	3	1	3	2	1	1	1
9	65	57	55	50	58	47	36	30	59	39	13	54	33	45	20	18	56	53	61	38	19	51	35	26	52	70
1	1	2	3	4	2	5	6	7	2	6	8	4	7	6	8	9	3	5	2	7	9	6	8	9	8	1
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente	9	65, 57, 55, 50, 47, 36, 30, 20, 18
Z-sequenza	14	65, 57, 55, 50, 47, 36, 30, 20, 18, 56, 53, 38, 35, 26
decrescente con 59	7	65, 59, 54, 45, 38, 35, 26
evita i primi 4	6	58, 47, 36, 30, 20, 18
evita da 14-mo a 17-mo	9	65, 57, 55, 50, 47, 39, 38, 35, 26
minima copertura	9	$\underbrace{65}_{1};\ \underbrace{57, 58, 59, 61}_{2};\ \underbrace{55, 56}_{3};\ \underbrace{50, 54}_{4};\ \underbrace{47, 53}_{5};\ \underbrace{36, 39, 45, 51}_{6};\ \underbrace{30, 33, 38}_{7};\ \underbrace{9, 13, 20, 35, 52, 70}_{8};\ \underbrace{18, 19, 26}_{9}$

Dove per il penultimo punto (5) si é osservato dalla tabella di DP (ultima riga) che:
per raccogliere 8 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 13,
per raccogliere 7 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 30,
per raccogliere 6 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 39,
per raccogliere 5 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 47,
per raccogliere 4 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 54,
per raccogliere 3 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 55,
per raccogliere 2 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo vale massimo 59,
per raccogliere 1 elementi sul solo lato sinistro, esso vale massimo 65,
e si sono poi ordinatamente combinate queste osservazioni con analoghe osservazioni concernenti le migliori (non-dominate) scelte relative al come giocarsi il lato destro, sempre come lette dalla tabella (prima riga).
Infine, per l'ultimo punto (6) ho costruito la sequenza crescente i-esima collocando in essa tutti quei numeri della sequenza in input tali che la massima lunghezza di una sequenza decrescente terminante in essi, come calcolata nell'ultima riga della tabella di PD, era precisamente i.

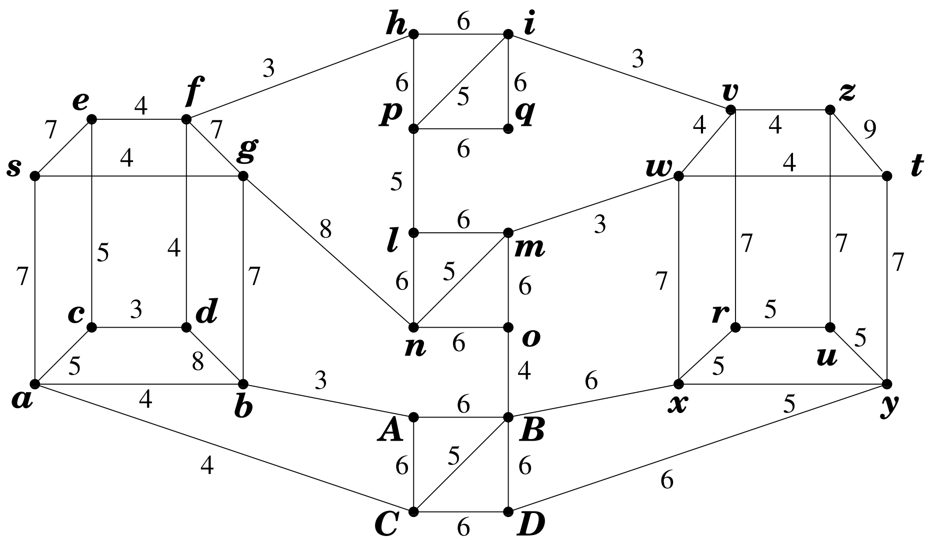
Problema 6 (16 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(1+2pt)** Dire, certificandolo, (1pt) se il grafo G è planare oppure no; (2pt) quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo planare.

6.2.**(2pt)** Dire, certificandolo, quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ca.



6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

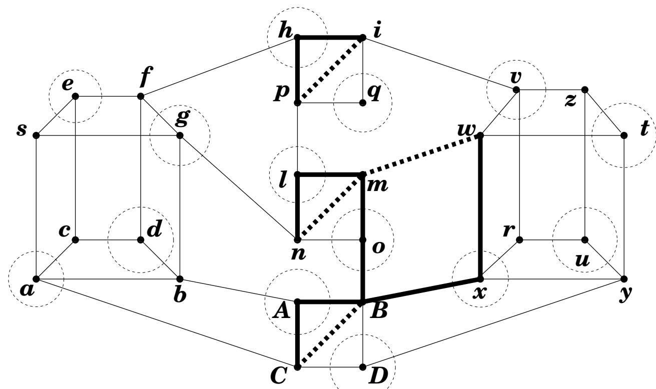
6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

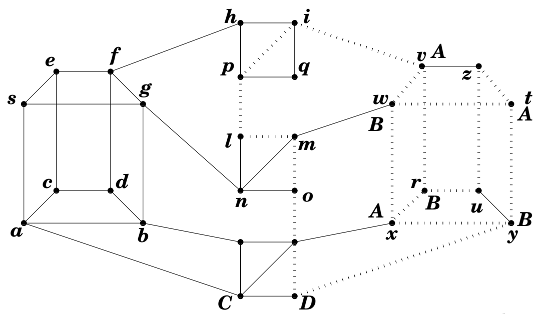
6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

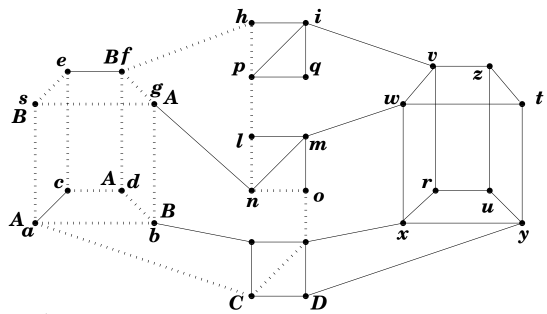
risposte.

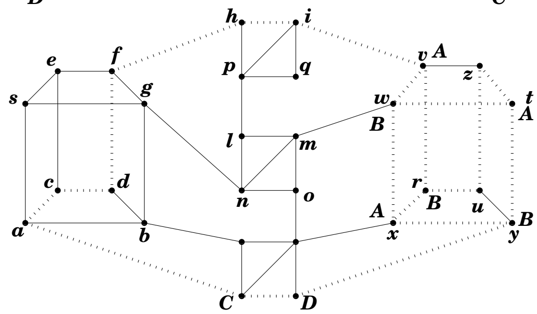
Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno 4 archi per renderlo tale, è certificato dai 4 cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura con archi a tratto spesso. Di questi, i 4 archi in linea tratteggiata sono quelli che si suggerisce di rimuovere e la figura esibisce inoltre la bipartizione dei nodi che mette in evidenza che il grafo ottenuto con la rimozione dei 4 detti archi è bipartito.



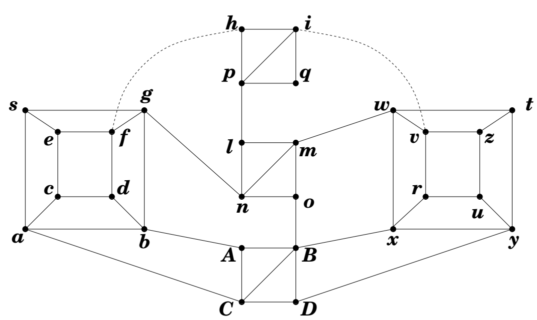
Il fatto che G non sia planare è comprovato da ciascuna delle 3 suddivisioni di $K_{3,3}$ presenti in G ed esibite nelle 3 seguenti figure.





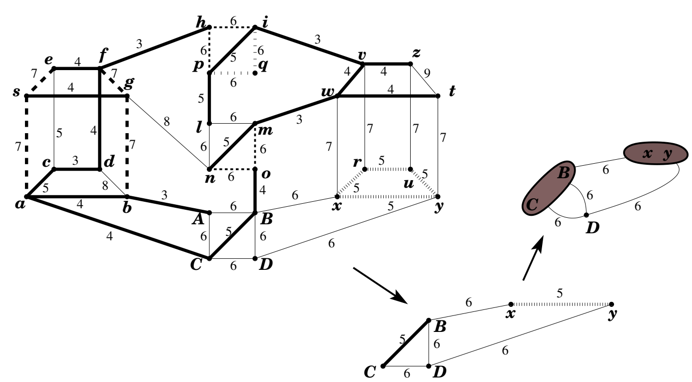


Si noti che gli unici 2 archi in comune alle prime due suddivisioni di $K_{3,3}$ sono solamente pl e oo'. Per altro, nessuno di questi 2 archi appartiene alla terza suddivisione di $K_{3,3}$. Ne consegue che la rimozione di un solo arco non può bastare a rendere G planare: per ogni arco di G esiste infatti una ragione di non planarità che lo evita. Nel contempo, con la rimozione di due archi opportuni (iv e fh) riusciamo ad ottenere un grafo planare: la planarità di $G \setminus \{iv, fh\}$ è certificata dal planar embedding in figura.

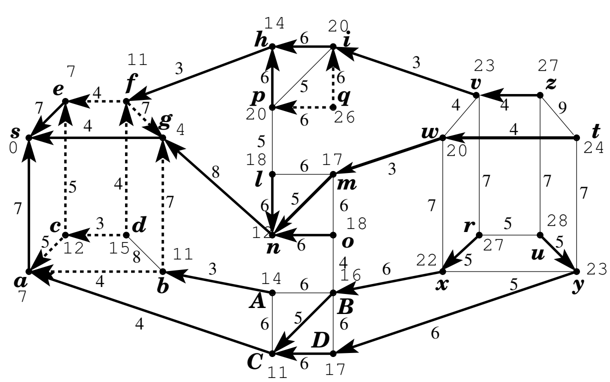


La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 640$ alberi ricoprenti di peso minimo e ciascuno di essi include i 19 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo q, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 incidenti in h oppure in o, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 incidenti in s oppure in g, più tre qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (ru, uy, yx, xr), più 2 archi scelti opportunamente tra CD, DB, Bx, Dy. Per meglio rappresentarci quali siano le scelte possibili di 2 archi tra CD, DB, Bx, Dy, nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 6 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 6, e concentriamoci sulla zona in questione. Ci ritroviamo con 3 soli macronodi connessi da questi 4 archi, due disposti in parallelo, ma altrimenti in disposizione a triangolo. Dei due archi in parallelo ne va preso massimo uno ed in totale ne vanno presi 2. In pratica abbiamo una possibile configurazione per ogni spanning tree del grafetto piccolino che abbiamo isolato in figura. Esso cattura fedelmente le possibilità sul tavolo. Ci è ora facile contare i possibili spanning tree del grafetto isolato e vedere che le configurazioni sono 5.

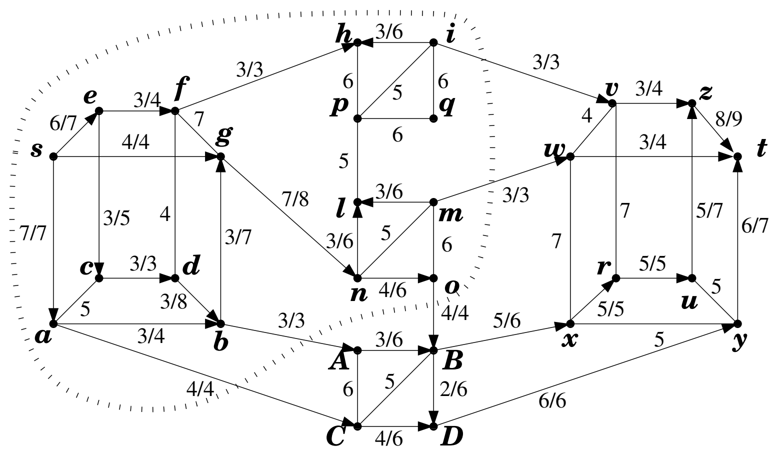
- fg in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio $\delta(\{s,g\})$ che separa i nodi s e g dal resto del grafo (primo certificato/argomento) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $fgse$ (secondo certificato/argomento);
- wx in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $wxBomw$;
- ca in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio $\delta(\{c,d,e,f,h\})$ che separa i nodi c, d, e, f, h da tutti gli altri nodi.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo c (nel nodo f, nel nodo b, nel nodo d, nel nodo q).



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.