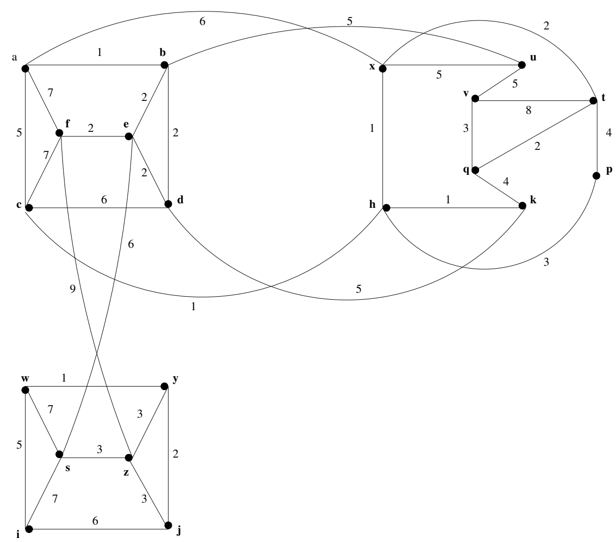
Scheda esercizi: Grafi
Esame del 28/09/2016

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

6.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco hx con un arco qx è planare oppure no.

6.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

6.4.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

6.5.**(4pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte/ a nessuna/ a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: *dk, ax, es*.

6.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

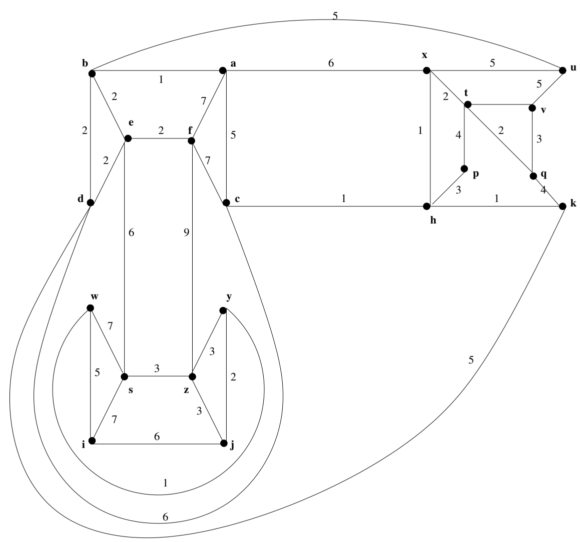
6.7.**(1pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.8.**(1pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

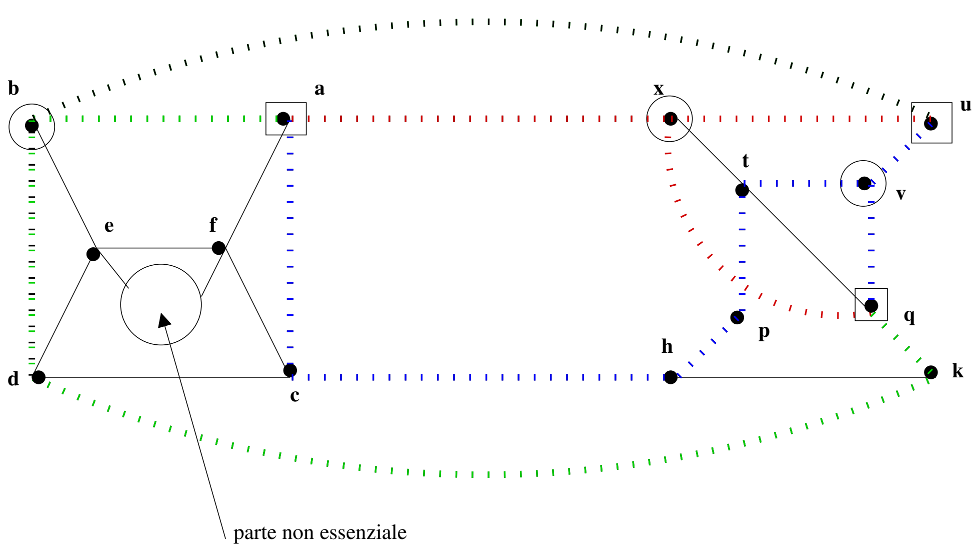
6.9.**(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q.

risposte.

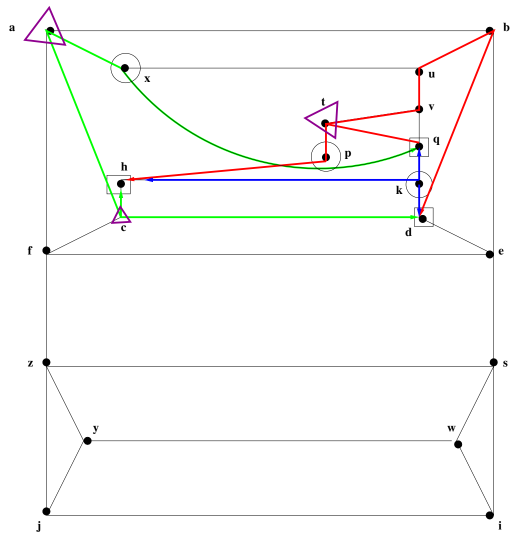
(1pt) Il fatto che G sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.



Per la ricerca di alberi ricoprenti di peso minimo e di flussi massimi converrà lavorare sul planar embedding. E forse anche per osservare che il grafo modificato non è planare. Il certificato è la suddivisione del $K_{3,3}$ esibita in figura. **(1pt)**

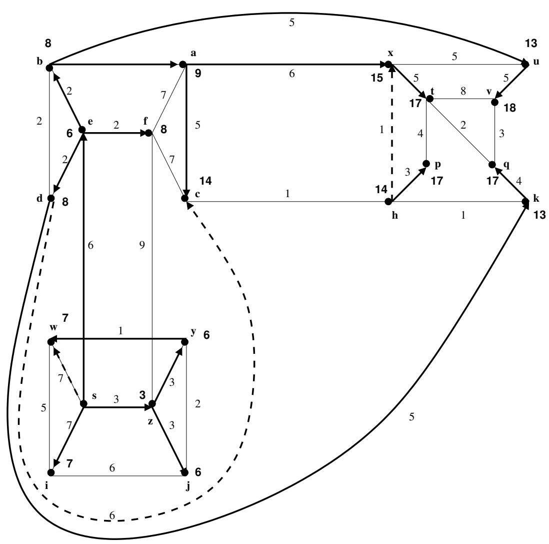


Nota dello studente 1 *Uno degli errori più comuni commessi dagli studenti è quello di sbagliare il certificato di planarità del grafo. Vi propongo un esempio di tale errore:*



In questo caso l'errore è stato quello di scegliere dei percorsi, che collegano i nodi 'cerchiati' *a quelli* 'quadrettati', *in modo tale da condividere alcuni nodi (che nella figura sono evidenziati con triangoli viola) tra loro, come per i percorsi che dal nodo* x *portano ai nodi* h *e* d *che condividono i nodi* 'triangolati' *in viola* a, c.

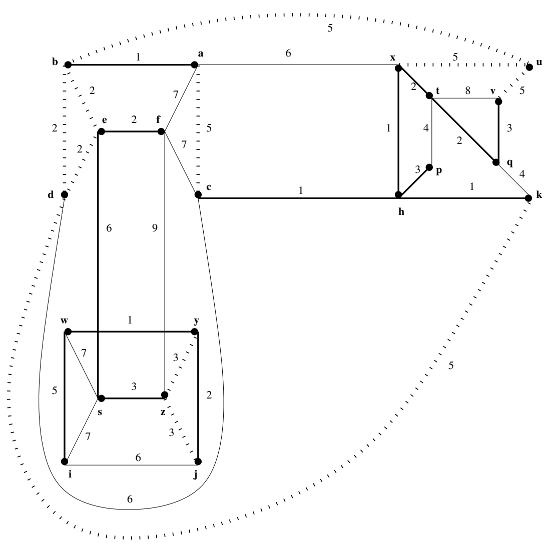
(1pt) Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è rappresentato in figura dagli archi in linea spessa (sia tratteggiata che continua).



Nota dello studente 2 *Vi rimando alle note teoriche sui Grafi o comunque a guardare con attenzione il funzionamento dell'algoritmo di Dijkstra.*

(1pt) Ovviamente ogni arco del grafo non contenuto nell?albero dei cammini minimi (ossia ogni arco in linea non spessa) può essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s. Inoltre, anche i tre archi in linea spessa ma tratteggiata possono essere rimossi poiché sostituibili con altri archi (sempre in linea tratteggiata). Ci sono quindi $2^3 = 8$[1] alberi di cammini minimi dal nodo s: sono ottenuti aggiungendo all'albero fornito sopra un qualsiasi sottoinsieme dell'insieme di archi in linea tratteggiata e rimuovendo quegli archi in linea spessa che si trovino ad entrare in nodi dove ora entra un arco in linea tratteggiata.

(2+1 pt) La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo.



Nota dello studente 3 *Non esiste un unico modo per ottenere tali alberi, quindi vi mostro in breve quello che ho usato io. Ricordandovi che il vostro scopo è quello di toccare tutti i nodi del grafo, il procedimento è il seguente:*

- *per prima cosa evidenziate tutti gli archi di peso inferiore tra tutti (solitamente hanno peso 1 o 2), nel nostro caso sono gli archi di peso 1.*

- *poi si procede con quelli immediatamente più grandi (in questo caso quelli di peso 2); facendo attenzione ai casi di scelta che bisogna tratteggiare, ad esempio un caso di scelta sono gli archi* eb, bd, ed. *Sono una scelta perché dal nodo* e *si può arrivare sia al nodo* b *che al nodo* d *con un arco di peso 2, e analogamente si può arrivare a* d *da* b *con un altro arco di peso 2.*

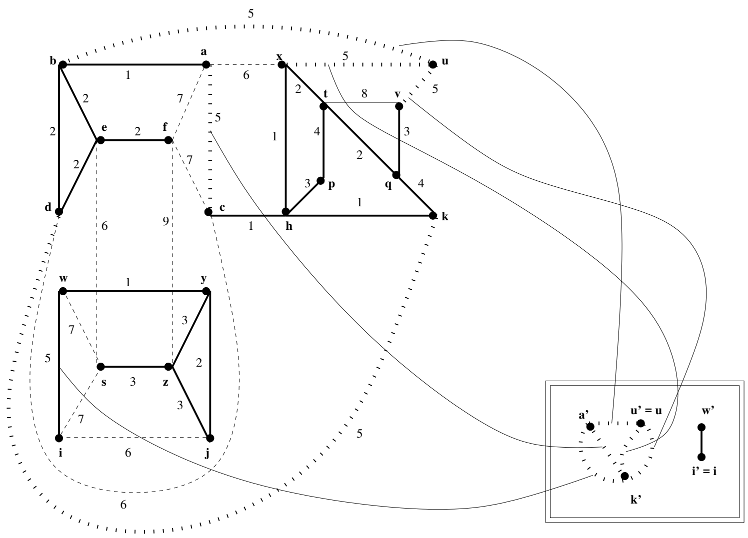
- *e si procede così fino ad esaurimento nodi.*

Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$[2] alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa e nera, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 in linea spessa e sfumata (3 scelte), più 1 qualsiasi dei 2 archi di peso 3 in linea spessa e sfumata (2

[1] tale numero si ottiene elevando 2 ad una potenza pari al numero di archi tratteggiati in figura, in questo particolare caso 3

[2] tale numero è dato dal prodotto delle scelte

scelte), più 2 dei 5 archi di peso 5 ed in linea sfumata spessa, come da 8 possibili scelte che possono essere meglio comprese cancellando tutti gli archi di peso maggiore di 5 e contraendo tutti gli archi di peso inferiore a 5 come illustrato nella seguente figura.

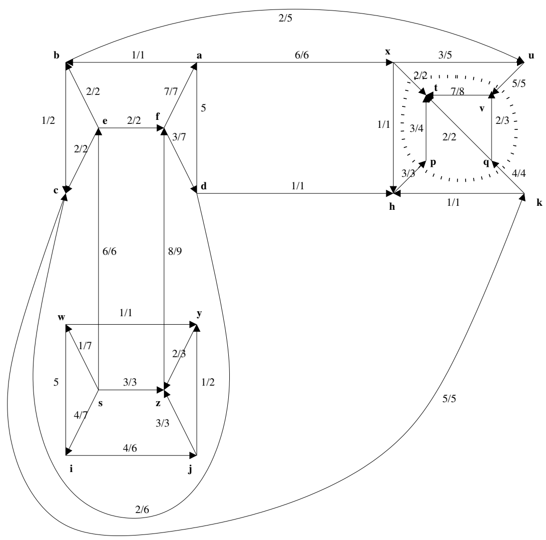


(1pt) Un albero di peso minimo è il seguente: contiene tutti gli archi in linea nera grossa, più gli archi *be* e *de*, l'arco *zy*, e gli archi *bu* e *vu*.

(4pt) L'arco *dk*, appartiene a qualche soluzione ottima poiché di peso minimo (5) nel taglio costituito dagli archi: *ax, ac, fc, dc* e *dk* **(1pt)**; non appartiene tuttavia a tutte le soluzioni ottime poiché è arco di peso massimo (5) nel ciclo costituito dagli archi: *db, bu, uv, vq, qk, kd* **(1pt)**. L'arco *ax*, non appartiene ad alcuna soluzione ottima poiché unico arco di peso massimo (6) nel ciclo costituito dagli archi: *ax, xh, hc, ca* **(1pt)**. L'arco *es*, appartiene a tutte le soluzioni ottime poiché unico arco di peso minimo (5) nel taglio costituito dagli archi: *es, fz* **(1pt)**.

Nota dello studente 4 *Per maggiori spiegazioni su quest'ultimo punto vi rimando alle note teoriche sui Grafi.*

(1pt) La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Nota dello studente 5 *Fate attenzione che il valore del taglio deve avere lo stesso valore del flusso, cioè la somma del peso degli archi che tagliate deve essere uguale al flusso.*

Il flusso ha valore 14 e satura l'insieme degli archi (due soli archi) che attraversano la curva sfumata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 2 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 14 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. **(1pt)** (Sia il flusso che il taglio sarebbero stati più immediati a vedersi e verificarsi nel planar embedding. Puoi provare a rappresentarteli lì). **(1pt)** Il massimo flusso da s a q a valore 9 e la stella di q è un taglio che ne certifica l'ottimalità. **(1pt)** A parte questa strozzatura, vi è altrimenti ampio margine nell'inviare flusso da s a q ed evitiamo quindi di fornire descrizione di una tale soluzione ammissibile di valore 9 (cosa che ovviamente voi non potete mai fare: se volete totalizzare i rispettivi punti dovete innanzitutto fornirmi le soluzioni/certificati!). Essa può comunque essere facilmente prodotta con ovvie modifiche partendo dal flusso di valore 14 dato in figura.

Nota dello studente 6 *L'ultimo consiglio che mi sento di darvi è quello di fare quanti più esercizi potete perché alcuni di questi punti vi verranno meglio con la pratica.*