Esame di Ricerca Operativa - 04 settembre 2019
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: 72, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (10 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	1	1	1	1	1	0	0	•	6
B	2	1	1	0	•	0	•	0	0	5
C	0	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	•	3	•	3	0	1
G	3	•	2	1	2	0	0	3	1	•
H	2	1	2	1	2	1	1	1	2	0
I	4	4	3	3	2	1	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in I–10 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

1.7(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10 passante per D–5?

1.8(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	390	174	106	38	38	38	4	4	•	0
B	216	68	68	0	•	34	•	4	2	0
C	148	•	68	•	74	34	10	2	2	0
D	148	94	68	68	40	24	8	•	2	0
E	54	26	•	28	16	16	8	8	2	0
F	28	26	26	12	•	8	•	6	2	0
G	2	•	14	12	10	8	6	4	2	•
H	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
I	0	0	0	0	0	0	0	•	1	1

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•	0
B	1	2	3	4	•	1	•	1	1	1
C	1	•	3	•	0	1	1	2	3	4
D	1	1	4	4	4	5	6	•	3	7
E	1	2	•	4	8	13	19	19	22	29
F	1	3	3	7	•	13	•	19	41	70
G	1	•	3	10	10	23	23	42	83	•
H	1	1	4	14	24	47	70	112	195	195
I	1	2	6	20	44	91	161	•	195	390

Ritrovare il valore 390 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle prossime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella che va dalla cella C alla cella I–10. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	18_{22}	18_4	17_4	16_4	15_4	14_4	5_2	5_2	$\bullet$	–
B	18_{18}	16_4	15_4	–	$\bullet$	13_4	$\bullet$	5_2	4_2	–
C	16_{14}	$\bullet$	14_4	$\bullet$	13_4	13_4	13_4	5_2	4_2	–
D	16_{14}	16_4	14_4	13_4	12_{12}	12_8	12_4	$\bullet$	3_2	–
E	16_{10}	16_4	$\bullet$	13_4	12_4	12_4	11_4	9_4	3_2	–
F	16_6	16_4	15_4	11_2	$\bullet$	9_4	$\bullet$	9_4	3_2	–
G	16_2	$\bullet$	12_4	10_2	9_2	6_4	6_4	6_4	3_2	$\bullet$
H	13_2	11_2	10_2	8_2	7_2	5_2	4_2	3_2	2_2	0_1
I	–	–	–	–	–	–	–	$\bullet$	0_1	0_1

Leggendo i valori riportati nella cella A–1 scopriamo che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 18, e che esistono 22 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0_1	1_1	2_1	3_1	4_1	5_1	5_1	5_1	$\bullet$	–
B	2_1	3_1	4_1	4_1	$\bullet$	5_1	$\bullet$	5_1	5_1	10_1
C	2_1	$\bullet$	4_1	$\bullet$	–	5_1	6_1	7_1	8_1	14_1
D	2_1	2_1	5_1	5_1	5_1	5_2	7_1	$\bullet$	8_1	17_1
E	2_1	2_2	$\bullet$	6_1	6_1	7_1	9_2	9_2	9_2	18_1
F	2_1	3_3	6_3	7_4	$\bullet$	10_1	$\bullet$	12_2	12_2	19_1
G	5_1	$\bullet$	8_3	9_3	11_3	11_3	11_3	15_2	16_2	$\bullet$
H	7_1	8_1	10_4	11_4	13_7	14_7	15_7	16_9	18_{11}	18_{11}
I	11_1	15_1	18_1	21_1	23_1	24_1	25_1	$\bullet$	18_{11}	18_{22}

Avendo riempito l'intera tabella (non serviva per solo rispondere alle ultime due domande), nella cella I–10 troviamo conferma che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 18, e che esistono 22 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore. Le risposte alle ultime due domande sono ottenute come somma e prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A–1 → I–10	390		
B–3 → I–10	68		
A–1 → F–6	13		
passaggio per D–5	$160 = 4 \cdot 40$		
massimo valore		18	BBBBBBBDDDDDDDDBD
n. max-val paths	22		
max val D–5-path		$17 = 12 + 5 - 0$	BDDBBDDBDBBBDDDBD
n. max-val paths	$12 = 12 \cdot 1$		

Una compagna in una mail mi ha chiesto spiegazioni su quel arcano $12 = 12 \cdot 1$ e su come fare a ricostruire i cammini. Ho risposto:

```
Se guardi alle ultime due tabelle nella cella D5 trovi un 12 come massimo valore raccoglibile da

ed un 5 come massimo valore raccoglibile da D5 (valore raccolto in D5 incluso) a I10. Ora però i

Per ricostruire i cammini che attengono i valori ottimi calcolati devi procedere in ordine inver
```

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

Problema 2 (41 punti):

Su un bus di comunicazione si affacciano, nell'ordine, n dispositivi elettronici numerati da 1 ad n. Il bus risulta pertanto suddiviso in $n-1$ tratte, dove l'i-esima tratta collega i dispositivi i ed $i+1$ e consente di far fluire informazione dallo snodo i allo snodo $i+1$ del bus. Ogni bit che dovesse fluire dal dispositivo i al dispositivo j, con $j > i$, deve pertanto attraversare le tratte $i, i+1, \ldots, j-1$ in questo ordine. Nessuna comunicazione da j ad i è invece possibile. Per $i = 1, \ldots, n-1$, si indichi con C_i la capacità della tratta i, ossia il massimo numero di bits transitabili lungo essa. Oltre ai valori di n e delle capacità C_i, un'istanza del nostro problema specifica un insieme I di m coppie interessanti $c_p = (a_p, b_p)$, con $b_p > a_p$, per $p = 1, \ldots, m$. L'obiettivo è trasmettere il massimo numero di bit, dove ciascun bit trasmesso deve marciare dalla sorgente a_p alla destinazione b_p per una stessa coppia c_p, e dove nessuna tratta i, $i = 1, \ldots, n-1$, veda transitare più di C_i bits.

(1pt) fornire una formulazione di PLI per l'istanza I_5 : $(n = 7; C_1 = 4, C_2 = 2, C_3 = 6, C_4 = 3, C_5 = 4, C_6 = 8; m = 5; a_1 = 1, b_1 = 4, a_2 = 2, b_2 = 3, a_3 = 3, b_3 = 5, a_4 = 4, b_4 = 6, a_5 = 1, b_5 = 7)$.

(1pt) quale istanza (chiamiamola I_4) è catturata dalla seguente formulazione di PLI?

$$\max \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 & & & & \leq 4 \\ x_1 & +x_2 & & & \leq 2 \\ x_1 & & +x_3 & & \leq 6 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ & & & x_4 & \leq 4 \\ \multicolumn{5}{l}{x_p \geq 0 \text{ e intera per } p = 1, 2, \ldots, 4.} \end{cases}$$

(1pt) fornire una soluzione ottima per l'istanza I_4.

(1+1pt) in che senso I_4 è un sottoproblema di I_5? (Specificare quale scelta lo determini in seno a I_5 e le due semplificazioni che ne conseguono e conducono a I_4.) Dire quale sia la relazione tra le soluzioni ottime di I_4 e quelle di I_5, e darne dimostrazione. É in virtù di tale relazione che la scelta che riduce I_5 ad I_4 non può pregiudicare il raggiungimento dell'ottimo. In pratica se risolviamo I_4 abbiamo la soluzione per I_5.

(1+1pt) guardando alle due formulazioni di PLI, osservare quali due operazioni poliedrali corrispondano alle due semplificazioni legate alla scelta che riduce il problema I_5 ad I_4.

(1pt) verifica che la soluzione di I_4 risulta ammissibile per il problema di PLI assegnato, e quindi anche del suo rilassamento continuo (il problema di PL ottenuto ignorando i vincoli di interezza sulle variabili) che è solo meno vincolato. Vogliamo ora impiegare la teoria degli scarti complementari per verificare sull'istanza I_4 un fatto che vale in generale per questa famiglia di formulazioni PLI: i vincoli di interezza non lavorano e possono quindi essere ignorati. Quindi, se la tua soluzione è davvero ottima per il PLI assegnato, allora lo è anche per il suo rilassamento. Andremo a verificarlo. Il primo passo di questo percorso è condurre questa verifica di ammissibilità prendendo nota di quali vincoli sono soddisfatti ad uguagianza.

(1pt) secondo passo: scrivere il duale del rilassamento continuo.

(1pt) utilizzando la tua soluzione ottima per il problema primale, imposta il sistema basato sulle condizioni degli scarti complementari per la determinazione di una soluzione duale ottima.

(1+1+1+1pt) fornire una soluzione duale ottima. Argomentare l'ottimalità della soluzione primale che hai impiegato. Per quale ragione la soluzione duale è unica? É possibile fornire esempio di istanza dove la soluzione duale ottima non è unica?

(1+1pt) individuare lo spazio delle soluzioni primali ottime sia del rilassamento continuo che del problema combinatorio originale per l'istanza I_4.

(1+1pt) se anche la soluzione duale è intera (e magari 0/1) deve venire il sospetto che il problema ammetta una formula di min-max con interpretazione combinatoria naturale. Riesci a formulare una congettura che interpreti il significato combinatorico della soluzione duale (ad ora solo due numeri diversi da zero, che vorranno mai dire?) con una definizione e col lemma debole (che dica che la presenza di un tale oggetto duale pone di fatto un upper bound sul valore della soluzione primale ottima)? Basta la formulazione, non chiedo la dimostrazione (che dovrebbe essere ovvia).

(1+5pt) Valuto invece l'eventuale dimostrazione del lemma forte. Nell'ottenerla può aiutarti l'algoritmo greedy di cui nei punti più sotto. Di converso, tenere contemporaneamante presenti gli oggetti primale e duale di questa buona caratterizzazione combinatoria aiuta nell'ottenere tale algoritmo.

(1pt) quanto saresti disposto a pagare per aumentare di un'unità la capacità di ogni singola tratta? (Specificare per ciascuna tratta).

(1pt) fino a quale entità di incremento della capacità della tratta saresti disposto a pagare tale prezzo unitario?

(1+1pt) nell'eseguire il metodo del simplesso per ottenere una soluzione ottima di I_4 riusciresti a non cambiare lo stato di alcuna variabile (da in base a fuori base o viceversa) più di una volta? Specificare variabile entrante e variabile uscente per ogni pivot di una tale sequenza. Senza necessariamente effettuare davvero tali pivots, dettagliare il valore di tutte le variabili in base ad ogni passo.

(4pt) A rendere speciale c_2 c'è che j_2 è la più piccola (più a sinistra) destinazione. Quale argomento "locale" ti consente di concludere che per quella coppia non sbagli a mandare quanti più bits possibile e ridurre in tale modo l'istanza originale con una scelta definitiva? Riesci a proporre un algoritmo greedy per questo problema?

(1+1+5+1+1pt) dare la formulazione di PL per il problema generale (non specifica alla singola istanza). Arricchire la formulazione contemplando che per ogni $p = 1, \ldots, m$, in I venga anche specificato il numero n_p di bits disponibili a transire da a_p a b_p.

Dimostrare l'NP-hardness della variante di questo problema dove per ciascun p la comunicazione dove essere tutto o niente (vanno mandati tutti gli n_p bits oppure nessuno). É dato sapere che il problema di decidere se un insiememe di $2n$ numeri naturali possa essere partizionato in due insiemi di cardinalità n ed uguale somma è NP-completo. Dare allora una formulazione PLI di questa generalizzazione ed argomentare perchè una formulazione di PL naturale, con numero polinomiale di variabili e di vincoli, sarebbe a questo punto improbabile.

svolgimento.

(1pt) per $p = 1, 2, 3, 4, 5$, introduciamo una variabile x_p ad indicare il numero di bits che trasmettiamo da sorgente a_p a destinazione b_p, a servizio cioè della coppia c_p. Perveniamo così alla seguente formulazione PLI della problematica in questione.

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 & & & & +x_5 & \leq 4 \\ x_1 & x_2 & & & +x_5 & \leq 2 \\ x_1 & & x_3 & & +x_5 & \leq 6 \\ & & x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq 3 \\ & & & x_4 & +x_5 & \leq 4 \\ & & & & x_5 & \leq 8 \\ \multicolumn{6}{l}{x_p \geq 0 \text{ e intera per } p = 1, 2, 3, 4, 5.} \end{cases}$$

(1pt) L'istanza I_4 rappresentata dal problema di PLI proposto è $(n = 6; C_1 = 4, C_2 = 2, C_3 = 6, C_4 = 3, C_5 = 4; m = 4; a_1 = 1, b_1 = 4, a_2 = 2, b_2 = 3, a_3 = 3, b_3 = 5, a_4 = 4, b_4 = 6)$.

(1pt) In generale: per $p = 1, \ldots, m$, introduciamo una variabile x_p ad indicare il numero di bits che trasmettiamo da sorgente a_p a destinazione b_p, a servizio cioè della coppia c_p. Perveniamo così alla seguente formulazione PLI della problematica in questione.

$$\max\ \sum_{p=1}^{m} x_p$$
$$\begin{cases} \sum_{p:\, 1 \leq p \leq m,\, a_p \leq i < b_p} x_p \leq C_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ x_p \geq 0 \text{ e intera per } p = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Il rilassamento continuo di questa formulazione (ossia dove si lasci cadere il requisito di interezza) offre una formulazione di PL della stessa problematica. Questa importante proprietà (da sola porta in P il problema) viene dimostrata con lo svolgimento pieno dell'esercizio.

(1pt) se nel problema I_5 decidiamo (o consideriamo l'ipotesi) di non trasmettere nemmeno un bit per la coppia $c_5 = (a_5 = 1, b_5 = 7) = (1, 7)$ possiamo rappresentare il problema residuo tramite l'istanza $I'_5 : (n = 7; C_1 = 4, C_2 = 2, C_3 = 6, C_4 = 3, C_5 = 4, C_6 = 8; m = 4; a_1 = 1, b_1 = 4, a_2 = 2, b_2 = 3, a_3 = 3, b_3 = 5, a_4 = 4, b_4 = 6)$. A questo punto possiamo osservare che l'ultima tratta non è di interesse alcuno ed a quel punto verrebbe voglia di eliminarla, cosa che in effetti si riesce a fare pur continuando a rappresentare ancora il problema residuo con un'istanza più piccola: si perviene ad I_4, che in questo senso può essere visto come un sottoproblema di I_5.

(1pt) Il fatto evidente è che la quinta coppia $c_5 = (1, 7)$ è di certo la più sconveniente da servire dato che il suo tragitto (dal primo all'ultimo componente) include strettamente i tragitti di ogni alta coppia. La PL può talvolta fornire un linguaggio utile all'espressione di tali considerazioni. Esiste chiaramente almeno una soluzione ottima di I_5 con $x_5 = 0$ dato che se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ è una soluzione ammissibile di I_5 allora $(x_1, x_2, x_3, x_4 + x_5, 0)$ è una soluzione ammissibile del sottoproblema I_4 con pari valore in termini di funzione obiettivo. Inoltre ogni soluzione ammissibile di I_4 è soluzione ammissibile di I_5. Pertanto, ogni soluzione ottima di I_4 è soluzione ottima di I_5. In realtà è possibile dimostrare che i due spazi di soluzioni ottime coincidono proprio, ma non è così pertinente e richiede una osservazione in più (quì è anche semplice: se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ è una soluzione ammissibile di I_5 allora $(x_1, x_2 + x_5, x_3, x_4 + x_5, 0)$ è una soluzione ammissibile di I_5 con maggior valore in termini di funzione obiettivo ogniqualvolta $x_5 > 0$).

(1pt) Le formulazioni di PLI e di PL di I'_5 sono ottenute dalle rispettive formulazioni di PLI e di PL di I_5 per intersezione col piano $x_5 = 0$. Le formulazioni di PLI e di PL di I_4 sono ottenute dalle rispettive formulazioni di PLI e di PL di I'_5 per eliminazione dell'ultimo vincolo (quello relativo alla capacità C_6), cosa che è lecito fare in quanto, posto $x_5 = 0$, questo vincolo è inevitabilmente rispettato.

(1pt) una soluzione ottima per l'istanza I_4 può essere espressa dal vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$.

(1+1pt) vogliamo ora dimostrare che il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$ è soluzione ottima anche del rilassamento continuo della formulazione assegnata.

Il rilassamento continuo della formulazione di PLI assegnata è il seguente problema di PL:

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 & & & & \leq 4 \\ x_1 & x_2 & & & \leq 2 \\ x_1 & & x_3 & & \leq 6 \\ & & x_3 & +x_4 & \leq 3 \\ & & & x_4 & \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Il cui duale è:

$$\min\ 4\,y_1 + 2\,y_2 + 6\,y_3 + 3\,y_4 + 4\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 & +y_2 & +y_3 & & & \leq 1 \\ & +y_2 & & & & \leq 1 \\ & & y_3 & +y_4 & & \leq 1 \\ & & & +y_4 & +y_5 & \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

per impostare le condizioni degli scarti complementari relativamente alla soluzione primale $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$ verifichiamo innanzitutto l'ammissibilità di questa, prendendo nota di quali vincoli sono soddisfatti ad eguaglianza.

$$
\max \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4
$$

$$
\begin{cases}
\begin{array}{cccccc}
(0) & (2) & (3) & & (0) & \\
x_1 & & & & \leq 4 & (<) \\
x_1 & +x_2 & & & \leq 2 & (=) \\
x_1 & & +x_3 & & \leq 6 & (<) \\
 & & x_3 & +x_4 & \leq 3 & (=) \\
 & & & x_4 & \leq 4 & (<) \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0}
\end{array}
\end{cases}
$$

Le condizioni agli scarti complementari si traducono nelle seguenti due osservazioni:

- Poichè i vincoli 1,3,5 sono soddisfatti a diseguaglianza stretta, non concorrono alla determinazione dell'ottimo e saranno quindi nulli i rispettivi moltiplicaori: $y_1 = y_3 = y_5 = 0$.
- Poichè $x_2 > 0$ e $x_3 > 0$, allora i vincoli 2 e 3 del duale devono rimanere soddisfatti ad eguaglianza.

Si perviene al seguente sistema:

$$
\begin{cases}
\begin{array}{ccl}
y_2 & & \leq 1 \\
y_2 & & = 1 \\
 & y_4 & \leq 1 \\
 & y_4 & \leq 1 \\
\multicolumn{3}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}
\end{cases}
$$

da cui ricostruiamo univocamente la soluzione duale $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$. Poichè questa soluzione duale è ammissibile (facile verifica), non solo essa è soluzione otima del probema duale **(1pt)**, ma resta altresì confermato che la soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 3, 0)$ è ottima anche per il problema di PL ottenuto come rilassamento del problema assegnato . Un modo alternativo (sempre suggerito da questa soluzione duale) per avere tale conferma consiste nel sommare i vincoli 2 e 4 del problema primale, ottenendo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$, che funge da utile upper bound sul valore della funzione obiettivo. Esso certifica l'ottimalità della soluzione primale proposta che totalizza proprio 5 in termini di funzione obiettivo.

(1pt) il motivo per il quale la soluzione duale è stata univocamente ricostruita è che la soluzione primale scelta era non degenere. Poichè ogni soluzione duale ottima deve rispettare gli scarti complementari con ogni soluzione primale ottima, allora la suluzione duale ottima è unica. Possiamo inoltre dedurne che ogni soluzione primale ottima di base deve essere non degenere, e quindi ogni soluzione primale ottima estesa avrà al più quattro variabili nulle.

(1pt) se vogliamo costruire un problema dove la soluzione duale non è unica dobbiamo costruirlo in modo che il primale sia degenere, ossia due vincoli lavorino contemporaneamente. Si consideri l'istanza $(n = 3; C_1 = 7, C_2 = 7; m = 1; a_1 = 1, b_1 = 3)$.

(1pt) per individuare lo spazio delle soluzioni primali ottime possiamo di nuovo avvalerci del teorema degli scarti complementari. La soluzione duale individuata $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, 1, 0, 1, 0)$ soddisfa ad uguaglianza tutti e quattro i vincoli del duale (è quindi parecchio degenere), col chè non impone alcun vincolo sulle variabili primali. Però da $y_2 > 0$ e $y_4 > 0$ posso dedurre che i rispettivi vincoli primali devono essere soddisfatti ad equaglianza. Pertanto lo spazio delle soluzioni ottime del rilassamento continuo è dato da:

$$\begin{cases} x_1 & & & & \leq 4 \\ x_1 & x_2 & & & = 2 \\ x_1 & & x_3 & & \leq 6 \\ & & x_3 & +x_4 & = 3 \\ & & & x_4 & \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Questo sistema non è però espresso in forma irridondante, vediamo di pulirlo. Dato che $x_3 \geq 0$, l'ultimo vincolo è implicato dal penultimo e possiamo sbarazzarcene. Discorso analogo vale per il prmo vincolo che è dominato dal secondo, e per il terzo che è dominato in più modi. Otteniamo quindi il politopo:

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & & & = 2 \\ & & x_3 & +x_4 & = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

che in pratica ha per vertici le quattro soluzioni di base:

$(0, 2, 0, 3)$, $(0, 2, 3, 0)$, $(2, 0, 0, 3)$, $(2, 0, 3, 0)$. Nello spazio quadridimensionale, questo politopo vive nel sottospazio affine individuato dalle due equazioni $x_1 + x_2 = 2$ e $x_3 + x_4 = 4$, non ho aggiunto nulla ma purtroppo non saprei dire meglio.

Per quanto riguarda le soluzioni intere ottime esse sono i $3 \cdot 4 = 12$ punti a coordinate intere dentro a questo politopo, non è un problema elencarle e dubito se ne possa avere una comprensione migliore.

(1+1pt) non solo la soluzione duale ottima è intera ma anche 0/1. In effetti possiamo aspettarci sia sempre così visto che il problema duale a tutti 1 come termini noti. La soluzione duale è quindi un sottoinsieme delle tratte ed il suo valore è la somma delle capacità delle tratte selezionate. Questo valore esprime, come in questo caso, un upper bound sul valore della soluzione primale ottima se ogni coppia (i_p, j_p) abbraccia almeno una delle tratte selezionate. Definiamo pertanto un insieme di tratte bloccante come un insieme di tratte tale che qualsiasi bit io intenda trasmettere deve necessariamente attraversare almen una di queste tratte. Il lemma debole (quello che vorrebbe essere l'osservazione ovvia) è che il numero di bit che riesco a trasmettere in una soluzione primale non potrà mai superare la capacità complessiva di un insieme di tratte bloccante. La buona caratterizzazione ricercata potrebbe essere che l'ottimalità della soluzione primale possa essere sempre dimostrata per via di un tale sistema bloccante. La formulazione di una qualche buona congettura, vera o falsa che sia, valeva **(1pt)** (è vero, sono stato tirchio). É molto naturale assumerla come strumento di lavoro in quanto se è vera abbiamo l'interezza. Se abbiamo l'interezza anche per il duale allora l'osservazione sopra sui termini noti del duale tutti ad uno ci dice che è vera.

(1pt) a conferma della buona congettura, il costo unitario che sono disposto a pagare per incrementare la capacità di una tratta sarà zero oppure uno. Nel caso di I_4 sono disposto a pagare per le tratte 2 e 4.

(1pt) per la tratta 2 (quella dallo snodo 2 allo snodo 3) sono disposto a pagare senza limite il prezzo di 1 per ogni incremento unitario della sua capacità, dato che in I_4 abbiamo l'opportunità di utilizzo di tale capacitò offerta dalla coppia $c_2 = (2, 3)$. Per la tratta 4 sono disposto a pagare per incrementi alla sua capacità finchè essa raggiunge il valore 10. Quando essa vale 10 riesco ad accomodare la soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 6, 4)$, valorizzando appieno l'incremento di 7 avendo portato il valore della funzione obiettivo da 5 a 12. Oltre questo punto sarei comunque bloccato dall'insieme di tratte bloccante $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (0, 1, 1, 0, 1)$ il cui valore resta 12 comunque io incementi la capacità della tratta 4.

(1+1pt) la sequenza di soluzioni primali di base estese $(x_1, x_2, x_3, x_4; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ da visitare potrebbe essere questa:

$$(0, 0, 0, 0; 4, 2, 6, 3, 4) \rightarrow (0, 2, 0, 0; 4, 0, 6, 3, 4) \rightarrow (0, 2, 3, 0; 4, 0, 3, 0, 4) \rightarrow$$

oppure questa:

$$(0, 0, 0, 0; 4, 2, 6, 3, 4) \rightarrow (0, 0, 0, 3; 4, 2, 6, 0, 1) \rightarrow (0, 2, 0, 3; 4, 0, 6, 0, 1) \rightarrow$$

in entrambi i casi nessuna delle soluzioni di base visitate è degenere e quindi la distinzione fuori-base/in-base coincie con nulle/non-nulle, che è rimasta evidenziata. In realtà esistono anche altre sequenze come richieste, ma in tutti i casi ci si ferma avendo esaurito il bloccante C_2, C_4, d'altra parte abbiamo già detto che la soluzione duale è qui unica.

(4pt) Il fatto che riesci a giocarti i pivot in modo da non dover mai ripensare il collocamento (in-out) di alcuna variabile è indizio possa esserci un'algoritmo greedy. Diventa pertinente chiedersi quali variabili possano essere portate in base per primissime. In realtà con questi numeri per le capacità ci sono troppe sequenze valide per distinguere quali coppie c_p vadano considerate per prime. Dei valori che davano maggiore indizio avrebbero potuto tessere $(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = (1, 2, 1, 2, 2)$. In questo caso solo c_2 e c_4 possono essere presi per primi, e la cosa forse è che comunque si scelgano i valori delle capacità c_2 e c_4 possono sempre essere presi per primi. Cosa li rende così speciali? A rendere speciale c_2 c'è che j_2 è la più piccola (più a sinistra) destinazione. A rendere speciale c_4 c'è che i_4 è il più grande (più a destra) mittente.

Il criterio greedy è il seguente: non sbaglio mai a spingere su una coppia $c_p = (i_p, j_p)$ per la quale j_p è minimo possibile. E spingo a manetta, fino a dove mi blocca una capacità che va ad esaurirsi (man mano che decido di trasmettere dei bit riduco le capacità di tutte le tratte percorse da quel bit), riduco comunque ad un'istanza dello stesso tipo. Per induzione, attorno a questa operazione posso costruire un algoritmo greedy autocertificante: la tratta la cui capacità va ad esaurirsi la metto nell'insieme bloccante in costruzione. Butto via le coppie per le quali la trasmissione non è più possibile, e ripeto sull'istanza ridotta. Fino a quando non ho più coppie rimaste.

Questo algoritmo dimostra un pò tutte le cose che ambivamo, inclusa la buona congettura **(5pt)** che avevamo formulato già sopra.

(1pt) Estendiamo ora la formulazione al problema più generale, dove per ogni coppia c_p viene inoltre specificato un numero naturale n_p con l'idea che a nulla serva far trasmettere più di n_p bits dal dispositivo a_p al dispositivo b_p. Come sopra, per $p = 1, \ldots, m$, introduciamo una variabile x_p ad indicare il numero di bits che decidiamo di trasmettere dalla sorgente a_p a destinazione b_p. Perveniamo così alla seguente formulazione PLI della problematica in questione. Si può argomentare che il suo rilassamento continuo offre formulazione di PL della stessa impiegando gli stessi ragionamenti utilizzati prima di questa generalizzazione.

$$\max \ \sum_{p=1}^{m} x_p$$
$$\begin{cases} \sum_{p:\, 1 \leq p \leq m,\, a_p \leq i < b_p} x_p \leq C_i \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ x_p \leq n_p \text{ per } p = 1, 2, \ldots, m. \\ x_p \geq 0 \text{ e intera per } p = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

(5+1+1pt)

Sia $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{2n}\}$ l'insieme di $2n$ numeri naturali, e si indichi con $2M$ la loro somma (possiamo assumere sia pari poichè in caso contrario potremmo subito rispondere che una tale partizione non esiste). Prendiamo 3 dispositivi elettronici su un bus di due tratte, entrambe di capacità M. Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ si aggiungano due "coppie" di trasmissioni richieste: $c_{2i-1} = (i_{2i-1} = 1, j_{2i-1} = 2, n_{2i-1} = s_i)$ e $c_{2i} = (i_{2i} = 2, j_{2i} = 3, n_{2i} = s_i)$.

Se e solo se la partizione di S esiste sarà possibile accontentare n richieste.

Avendo dimostrato che il problema è NP-hard, ed assumendo P$\neq$NP, ci siamo convinti esso non ricada in P. Non possiamo pertanto ambire ad una formulazione di PL con un numero di variabili e di vincoli polinomiale dato che la PL è in P.

Una formulazione di PLI è la seguente:

$$\max \ \sum_{p=1}^{m} n_p x_p$$
$$\begin{cases} \sum_{p:\, 1 \le p \le m,\, a_p \le i < b_p} n_p x_p \le C_i \ \ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_p \in \{0, 1\} \text{ per } p = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Problema 3 (8 punti):

Voglio eseguire il prima possibile una certa attività target T. Prima di poter eseguire T deve però essere trascorsa almeno un'ora da quando ho eseguito l'attività D ed almeno 4 da quando ho eseguito l'attività A, e ci sono anche altri vincoli di precedenza analoghi con ulteriori attività. La seguente tabella riporta in forma compatta tutti i vincoli ed attività coinvolte.

T: (A,4), (D,1)	D: (A,2), (C,8)	H: (C,1), (I,3)
A: (B,6), (E,5), (G,1), (H,4)	E: (F,8), (H,2)	I: (T,3)
B: (C,2), (E,1)	F: (I,1)	
C: (F,2), (I,5)	G: (B,2), (H,8)	

L'esecuzione delle attività è istantanea, esse hanno durata nulla (se voglio modellare un'attività con una durata minima la rappresento con due attività ed un vincolo di precedenza).

3.1. **(1pt)** Fornire certificato che non è possibile schedulare l'attività T rispettando tutti i vincoli.

3.2. **(1pt)** Se tralasciamo il vincolo "I: (T,3)" la schedulazione è possibile. Darne certificato fornendo un'ordinamento delle attività tale che ogni attività abbia a prerequisito solo attività che la precedono nell'ordine.

3.3. **(1pt)** supponendo di eseguire subito l'attività I, dire quale è il minimo numero di ore che devono trascorrere prima che sia possibile eseguire T.

3.4. **(1pt)** specificare il tempo minimo di esecuzione di ciascuna attività, nell'ordine.

3.5. **(1pt)** specificare l'ultimo momento utile per eseguire le varie attività senza dover per questo posticipare T.

3.6. **(1pt)** si consegni un cammino critico, ossia una sequenza di attività nessuna delle quali possa essere anticipata per rispettare il vincolo di precedenza sulla precedente, e che dimostri che T non può essere anticipato.

3.7. **(2=1+1pt)** Quale è il minimo numero di vincoli che occorre violare se intendiamo rispettare il vincolo "I: (T,3)"?

risposte.

(1pt) Il seguente ciclo passante per T ci dimostra che non è possibile schedulare l'attività T rispettando tutti i vincoli: TIHAT.

Le colonne della seguente tabella sono ordinate secondo un ordinamento topologico del DAG delle precedenze (escluso il vincolo "I: (T,3)"). É infatti facile verificare che, per ogni attività, le attività che le sono a prerequisito sono in colonne precedenti. Tale ordinamento risponde quindi al secondo punto **(1pt)**, oltre che consentirci di computare agevolmente (procedendo da sinistra verso destra) il primo tempo di esecuzione di ogni attività. Una volta ottenuto il primo tempo di esecuzione di T, che ci impegnamo a mantenere, diviene il punto di partenza per una scansione in senso contrario (da destra verso sinistra) che ci consente di computare l'ultimo istante di esecuzione utile delle attività nell'ultima riga della tabella.

I	F	C	H	E	B	G	A	D	T
0	1_I	5_I	6_C	9_F	10_E	14_H	16_B	18_A	20_A
0	1_E	6_H	7_E	9_B	10_A	15_A	16_T	19_T	20

Un cammino critico è I-F-E-B-A-T.

Violando i due vincoli "T: (A,4)" e "T: (D,1)"

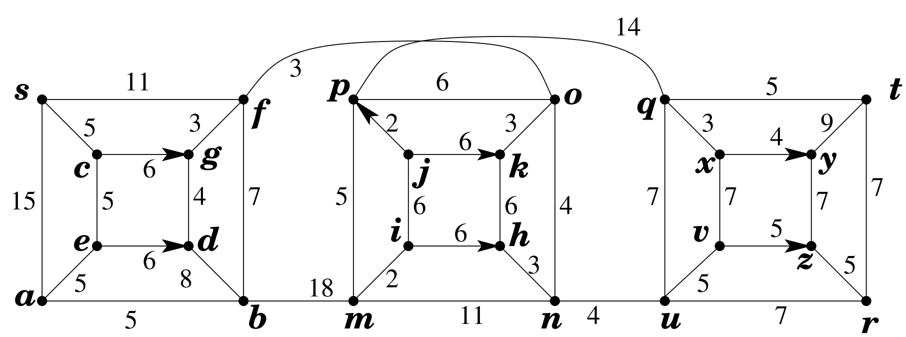
è possibile rispettare tutti gli altri (incluso "I: (T,3)"), come dimostrato dall'ordinamento:

T	I	F	C	H	E	B	G	A	D

Che non esista una soluzione che rispetti "I: (T,3)" e violi un solo vincolo è dimostrato dal cammino IFEADT che non ha alcun arco in comune col ciclo TIHAT.In pratica due cammini disgiunti sugli archi (IFEADT e IHAT) ci dicono che per schedulare T prima di I dobbiamo violare almeno due vincoli (almeno uno per cammino).

Problema 4 (13 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4.2.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

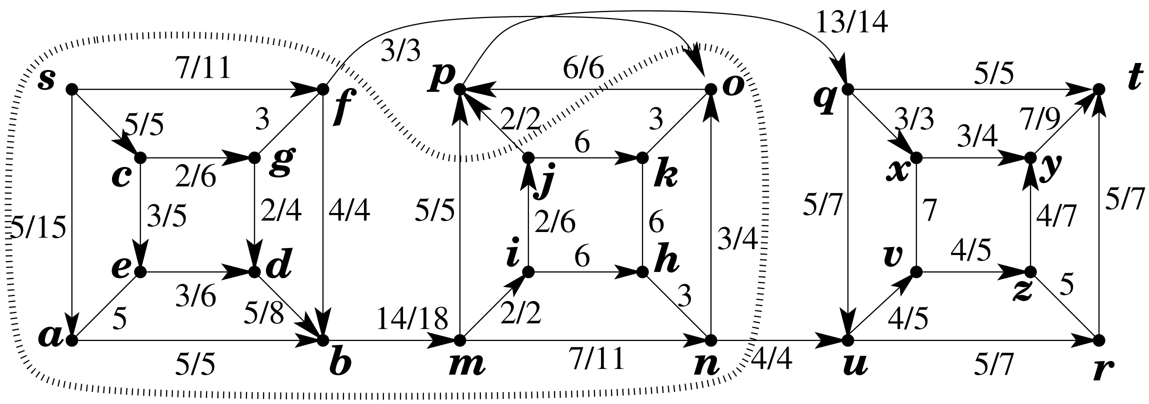
4.3.**(3pt)** Per quali archi un incremento della capacità dell'arco porta ad un incremento del massimo flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

4.4.**(3=1+1+1pt)** Dire se in grafo è planare e quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per renderlo bipartito.

4.5.**(3pt)** Per ciascuno dei tre archi incidenti in t dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutti / a ne ssuno / a qualcuno ma non a tutti) gli alberi ricoprenti di peso minimo.

risposte.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo, non riguardano al verificatore) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



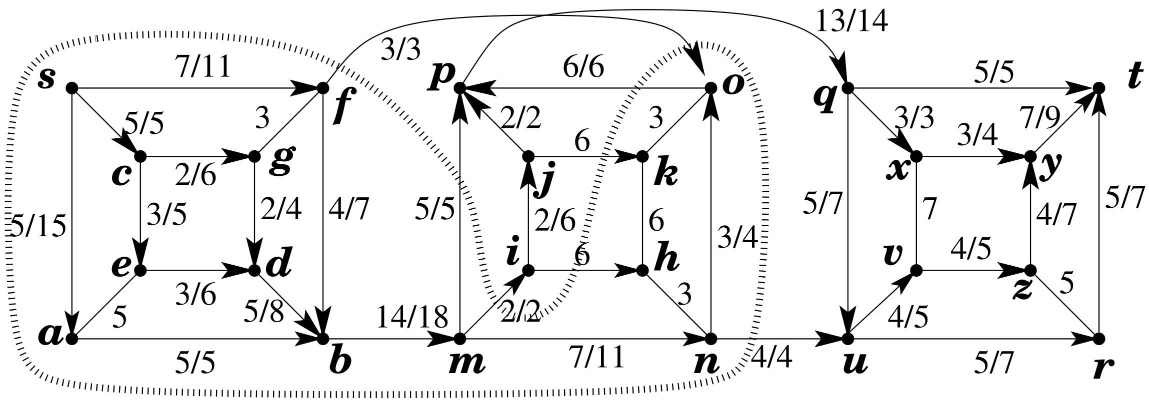
Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Ovviamente anche aumentando senza limite la capacità di tutti gli archi non inclusi nel taglio minimo il valore del flusso massimo non aumenta. Analizziamo pertanto i soli archi del taglio minimo fornito sopra, che per altro scopriremo essere unico.

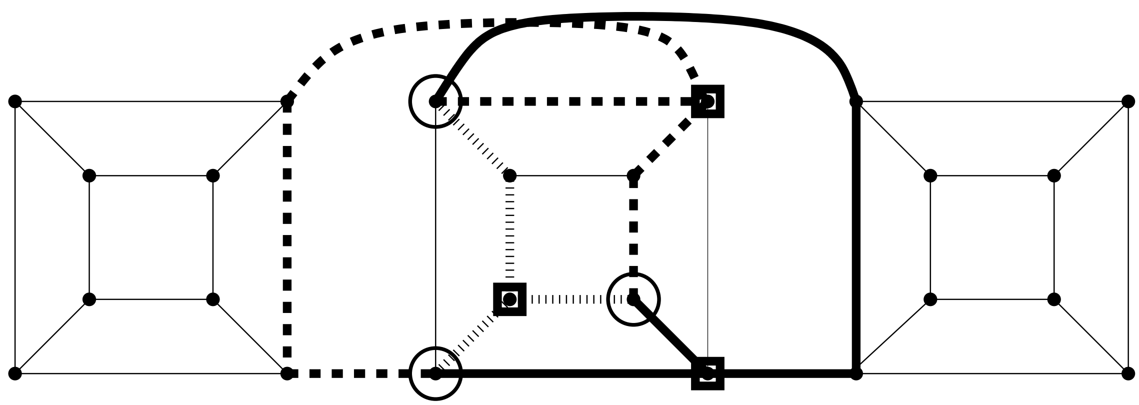
- arco nu: paga la spesa aumentarne la capacità fino a 3 unità, infatti posso portare in n 3 unità di flusso aggiuntivo lungo il cammino s, f, b, m, n, impiegare quindi l'arco nu, e da u possono procedere lungo il cammino u, r, t. Non paga aumentare di oltre 3 la capacità dell'arco nu dato che il taglio di archi qt, qx, uv, ur continuerebbe a porre un limite superiore di 20 sul valore del flusso.

- archi mp ed op: risulta possibile inviare un'unità di flusso aggiuntivo lungo il cammino p, q, t. Per portare tale unità di flusso aggiuntivo sulla coda m di mp utilizzo il cammino s, f, b, m, per portarla sulla coda o di op utilizzo il cammino s, f, o. Il taglio costituito dagli archi pq ed nu spiega perchè non ha utilità incrementare di oltre un'unità queste due capacità.

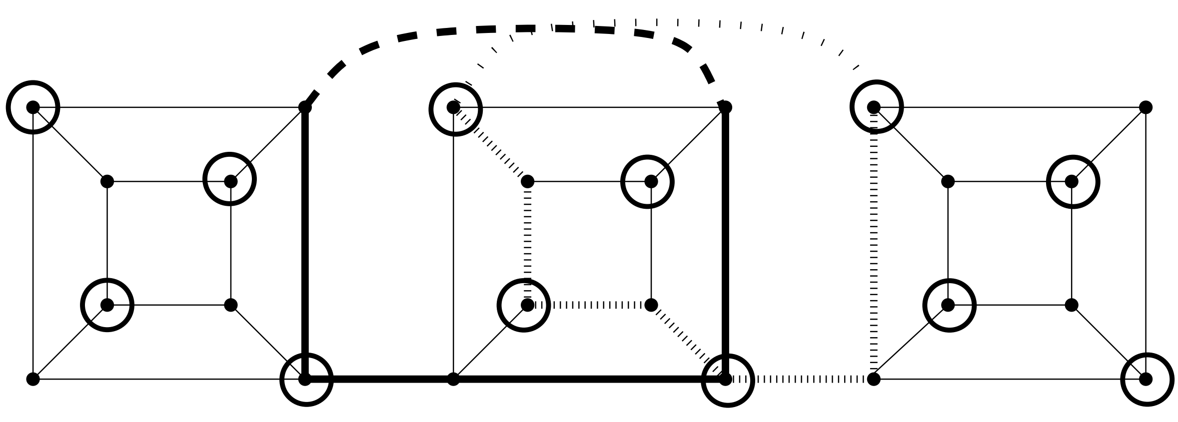
- arco nu: il taglio nella figura sotto è un secondo taglio di valore 17, e non contiene l'arco nu. Quindi non vi è alcun interesse ad aumentare la capacità dell'arco nu dal suo valore originale.



Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il $K_{3,3}$ in figura.



La rimozione dei due archi che si incrociano rende il grafo bipartito, come certificato dalla bipartizione fornita in figura.



I due circuiti dispari disgiunti sugli archi esibiti in figura dimostrano che il grafo non può essere reso bipartito rimuovendo meno di due archi.

L'arco tq è quello di peso minimo stretto nella stella di t (il taglio che separa t dagli altri nodi del grafo) e pertanto ogni albero ricoprente di peso minimo lo contiene. L'arco ty è di peso massimo nel ciclo $qxyt$ e pertanto non appartiene a nessun albero ricoprente di peso minimo. L'arco tr appartiene a qualche albero ricoprente di peso minimo ma non a tutti e quindi, per portarti a casa questo ultimo punto, sono due i certificati che devi fornire.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;

2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);

3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.