# Esame di Ricerca Operativa - 6 febbraio 2014
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
# - CORREZIONE -

**Problema 1 (3+2=5 punti):**

L'azienda elettrica senese deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità di energia (in MW):

| Murlo | Monticiano | S.Rocco a Pilli |
|---|---|---|
| 150 | 80 | 210 |

I tre centri possono essere riforniti da due centrali $C_1$ e $C_2$, aventi capacità giornaliera di 130 e 310 MW rispettivamente. Trasportare corrente elettrica da una centrale a un centro costa come indicato nella seguente tabella (Euro/KW)

| | Murlo | Monticiano | S.Rocco a Pilli |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | 10 | 15 | 20 |
| $C_2$ | 8 | 14 | 7 |

Si consideri il problema di minimizzare il costo totale di trasporto dell'energia ai centri abitati, nel caso in cui ogni linea elettrica abbia una capacità massima di 100 MW.

((**3pt**)) Fornire un modello di PL per tale problema specifico.

((**2pt**)) Fornire un modello di PL che, piú in generale, si riferisca ad un numero $m$ arbitrario di centrali ed ad un numero $n$ arbitrario di centri urbani.

**svolgimento.**

((**3pt**)) Le variabili di decisione sono la quantità di energia da inviare, definite come da seguente tabella.

| | Murlo | Monticiano | S.Rocco a Pilli |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | $w_{1,1}$ | $w_{1,2}$ | $w_{1,3}$ |
| $C_2$ | $w_{2,1}$ | $w_{2,2}$ | $w_{2,3}$ |

Il problema è quindi quello di minimizzare il costo totale del trasporto.

$$\min C \quad = \quad 10000\, w_{1,1} + 15000\, w_{1,2} + 20000\, w_{1,3} + 8000\, w_{2,1} + 14000\, w_{2,2} + 7000\, w_{2,3}\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

**vincoli di non negativitá**

$$w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3} \geq 0.$$

**vincoli di capacitá delle linee**

$$w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3} \leq 100.$$

**vincoli sulla capacitá delle centrali**

$$w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} \leq 130.$$
$$w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} \leq 310.$$

**vincoli di fabbisogno energetico**

$$w_{1,1} + w_{2,1} \geq 150.$$
$$w_{1,2} + w_{2,2} \geq 80.$$
$$w_{1,3} + w_{2,3} \geq 210.$$

(**(2pt)**) Le variabili di decisione sono le $mn$ variabili $w_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ definite da

$w_{i,j}$ = la quantità di energia da inviare direttamente dalla centrale $i$ al centro urbano $j$.

Dove si assuma di avere prestabilito una matrice $m \times n$ di costi di trasporto $C$, con

$C_{i,j}$ = costo del trasportare direttamente un megawatt di energia dalla centrale $i$ al centro urbano $j$,

il problema è quello di minimizzare il costo totale del trasporto

$$\min c \quad = \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} w_{i,j} \,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

**vincoli di non negativitá**

$$w_{i,j} \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

**vincoli di capacitá delle linee**

$$w_{i,j} \leq UB_{i,j} \text{ per ogni } i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

dove $UB_{i,j}$ é un limite superiore alla potenza trasportabile sulla linea diretta della centrale $i$ al centro urbano $j$.

**vincoli sulla capacitá delle centrali**

$$\sum_{j=1}^{n} w_{i,j} \leq P_i \text{ per ogni } i = 1, \ldots, m,$$

dove $P_i$ é la potenza della centrale $i$.

**vincoli di fabbisogno energetico**

$$\sum_{i=1}^{m} w_{i,j} \geq F_j \text{ per ogni } j = 1, \ldots, n,$$

dove $F_j$ esprime il fabbisogno del centro urbano $j$.

---

**Problema 2 (6 punti):**

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 19x_4 + 10x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 36 \\ x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

2.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

2.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

2.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5.**(2pt)** Per quali valori dei parametri $C_3$ e $C_6$ la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

**svolgimento.** Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) + (0) + (10) + (14) + (0) = 35 \leq 36 \\ (0) + (10) = \mathbf{10} \leq 10 \\ (14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (0) + (14) = \mathbf{20} \leq 19 \\ (5) + (10) + (0) = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 6 \\ y_1 + y_2 + y_4 \geq C_3 \\ y_1 + y_2 + y_5 \geq 19 \\ y_1 + y_3 + y_4 \geq 10 \\ y_1 + y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} \phantom{y_2} \quad \phantom{y_3} + y_4 \phantom{+ y_5} = 1 \\ \phantom{y_2 \quad y_3 + y_4} + y_5 = 6 \\ y_2 \phantom{\quad y_3 + y_4} + y_5 = 19 \\ \phantom{y_2} \quad y_3 + y_4 \phantom{+ y_5} = 10 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 13, 9, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 14 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = 15 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 14$ e $C_6 \leq 15$.

---

**Problema 3 (4 punti):**

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | -1 | 4 | -5 | 7 | -18 | 31 | -20 | 23 | -31 | 16 | -32 | 5 | -15 | 30 | -22 | 6 | -8 | 21 | -25 | 13 | -51 | 21 | -13 | 24 | -19 | 25 |

**3.1(1pt)** quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

**3.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

**3.3 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere il 18-esimo elemento?

**3.4 (1pt)** e nel caso sia richiesto di includere sia il 14-esimo che il 16-esimo elemento?

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ |
| 4 | 3 | 7 | 2 | 9 | 0 | 31 | 11 | 34 | 3 | 19 | 0 | 5 | 0 | 30 | 8 | 14 | 6 | 27 | 2 | 15 | 0 | 21 | 8 | 32 | 13 | 38 |
| 4 | -1 | 4 | -5 | 7 | -18 | 31 | -20 | 23 | -31 | 16 | -32 | 5 | -15 | 30 | -22 | 6 | -8 | 21 | -25 | 13 | -55 | 21 | -13 | 24 | -19 | 25 |
| 26 | 21 | 22 | 18 | 23 | 16 | 34 | 3 | 23 | 0 | 16 | 0 | 20 | 15 | 30 | 0 | 19 | 13 | 21 | 0 | 13 | 0 | 38 | 17 | 30 | 6 | 25 |
| $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ |

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo intervallo | max sum | parte da pos. | arriva a pos. | parte da val. | arriva a val. |
|---|---|---|---|---|---|
| qualsiasi | 38 | 23 | 27 | 21 | 25 |
| include primo | 26 | 1 | 9 | 5 | 23 |
| include 18-esimo | 27 | 15 | 19 | 30 | 21 |
| include 14-esimo e 16-esimo | 17 | 13 | 19 | 5 | 21 |

**Problema 4 (4 punti):**
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 12 | 14 | 19 | 11 | 22 | 33 | 39 | 10 | 30 | 56 | 15 | 36 | 24 | 49 | 51 | 13 | 16 | 8 | 31 | 50 | 18 | 34 | 43 | 17 |

**4.1(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.2(2pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice $i$ tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'$i$-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 10. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

| ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ | ⇒ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 6 | 4 | 1 | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 4 | 12 | 14 | 19 | 11 | 22 | 33 | 39 | 10 | 30 | 56 | 15 | 36 | 24 | 49 | 51 | 13 | 16 | 8 | 31 | 50 | 18 | 34 | 43 | 17 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 | 2 | 6 | 8 | 4 | 7 | 6 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 7 | 9 | 6 | 8 | 9 | 8 |
| ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ | ⇐ |

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo sottosequenza | max lung | sottosequenza ottima |
|---|---|---|
| crescente | 9 | 4, 12, 14, 19, 22, 33, 39, 49, 51 |
| N-sequenza | 14 | 4, 12, 14, 19, 22, 33, 39, 49, 51, 13, 16, 31, 34, 43 |
| crescente con 10 | 7 | 4, 10, 15, 24, 31, 34, 43 |

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga V-sequenza?

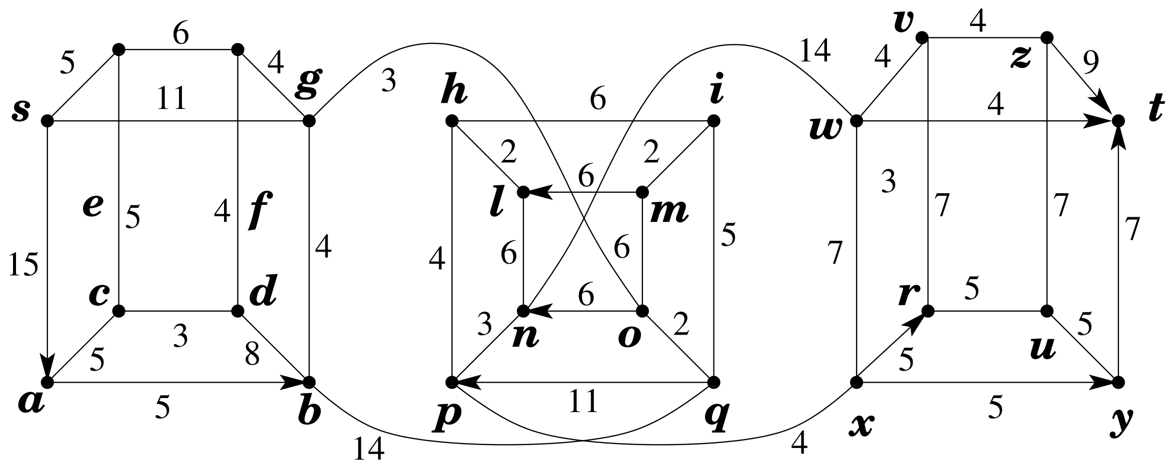
**Problema 5 (15 punti):**
Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo $G$; (1) il grafo $G'$.

5.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $fg$, $wx$, $ln$.




5.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

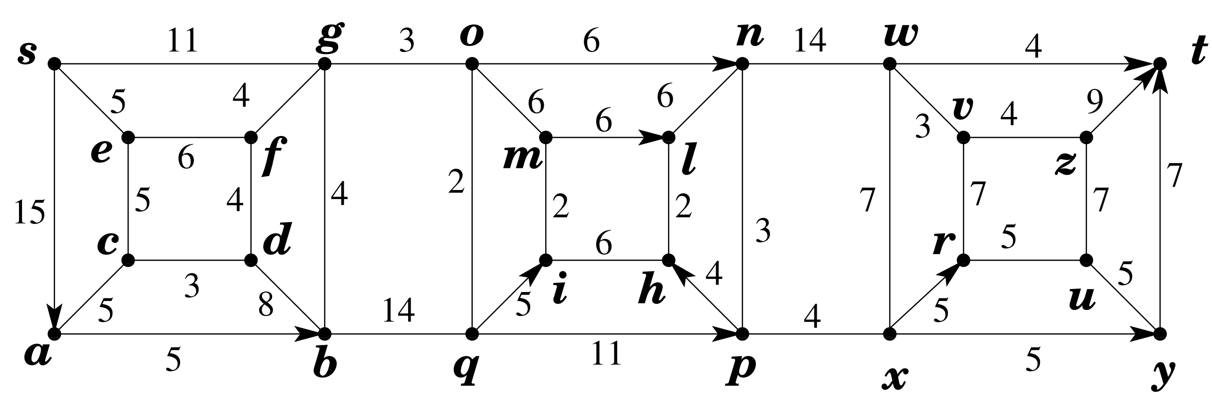
5.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

5.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

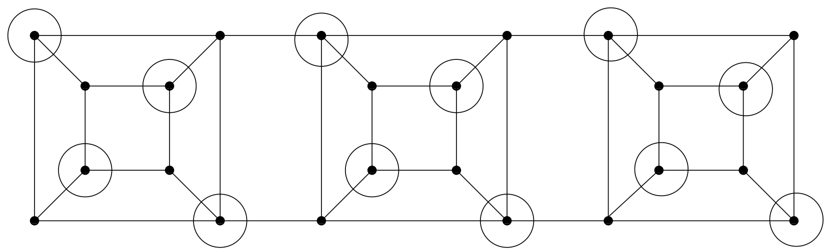
**risposte.**

Il fatto che $G$ sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.




Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

Il fatto che $G$ sia bipartito può essere messo in evidenza esibendo la 2-colorazione in figura.

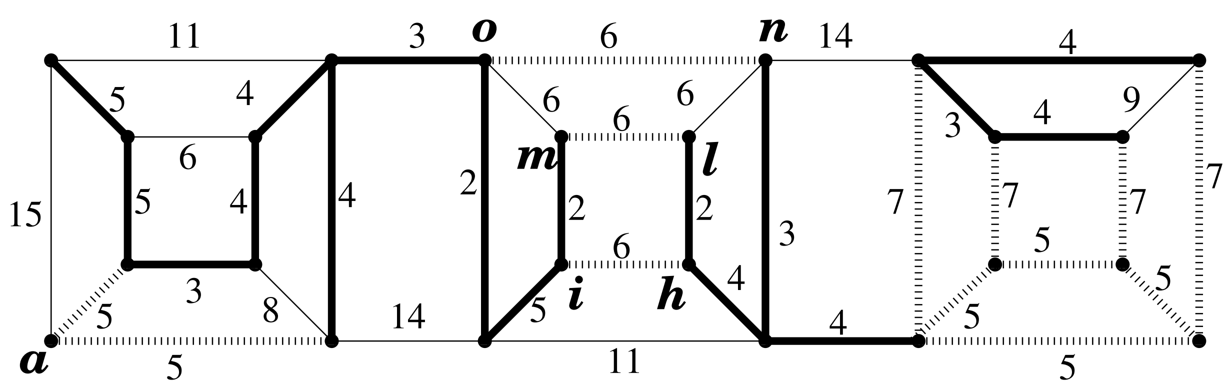


Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 0.

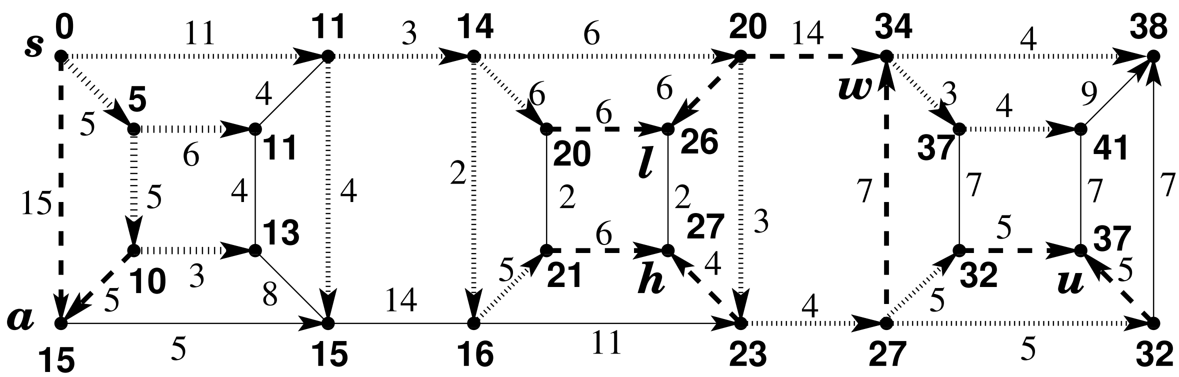
Il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ non é bipartito, come messo in evidenza dal circuito dispari $ghpqb$. Poiché $G' \setminus go$ è un sottografo di $G$, la rimozione di questo arco basta a rendere il grafo bipartito, ed ogni certificato (bipartizione) di $G$ (come ad esempio quella fornita sopra) sarà anche un certificato (bipartizione) di $G' \setminus go$.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo $a$ (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi $on$, $ml$, $ih$), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo $G$ contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 4 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo $G$ contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi. (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo $a$ di cui si era detto più sopra).

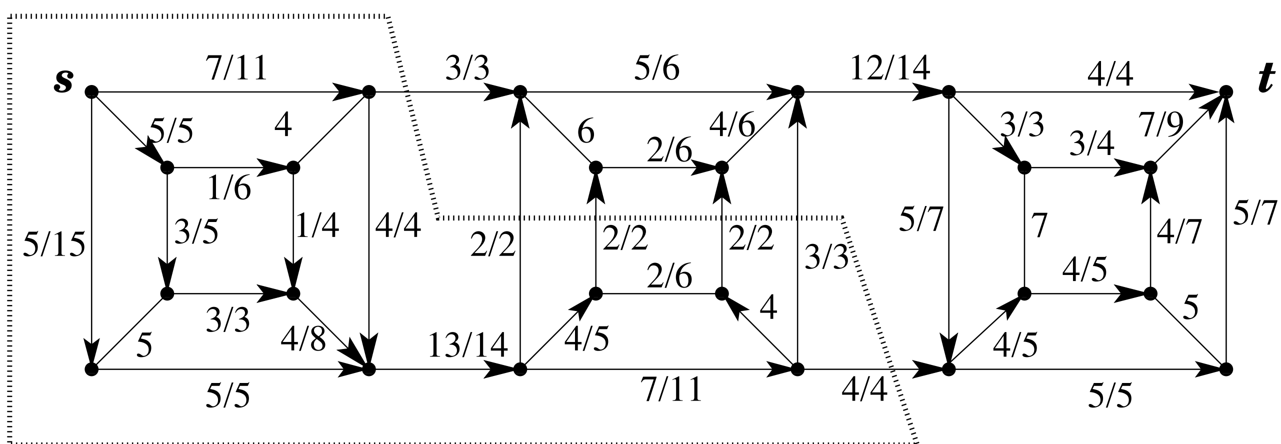
- $fg$ in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $s$, $e$, $a$, $c$, $f$, $d$ da tutti gli altri nodi;
- $wx$ in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $w$, $v$, $z$, $t$ da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $lnph$;
- $ln$ in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo $s$. Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo $s$ e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $a$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $w$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $h$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $l$ e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $u$.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di $s$ al lato di $t$. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo $s,t$-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

---

**Problema 6 (8 punti):**

$$\max\ 22x_1 - 10x_2 - 6x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ -10x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**6.1(1pt)** Portare il problema in forma standard.

**6.2(1pt)** Impostare il problema ausiliario.

**6.3(2pt)** Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

**6.4(1pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo.

**6.5(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei due vincoli? (Per piccole variazioni.)

**6.6(1pt)** Fornire una soluzione primale, parametrizzata negli incrementi, che evidenzi la nostra disponibilitá a pagare tale prezzo.

**6.7(1pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tale prezzo?

**svolgimento.**
Portando il problema in forma standard otteniamo:

$$\max\ 22x_1 - 10x_2 - 6x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - \phantom{5}x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + \phantom{2}x_3 \leq -10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" $x_0$. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} 10x_1 - \phantom{5}x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 8 \\ 10x_1 - 5x_2 + \phantom{2}x_3 - x_0 \leq -10 \\ x_0, x_1, x_3, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 8 - 10x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare $x_0$ in base settandone il valore a 10 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\max\ -10 - 10x_1 + 5x_2 - x_3 - w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 18 - 4x_2 - x_3 + w_2 \\ x_0 = 10 + 10x_1 - 5x_2 + x_3 + w_2 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della $x_2$ nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la $x_2$ in base. A farle posto è la $x_0$ che si annulla, quindi il problema originario era ammissibile (basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la $x_0$ fuori base non appena essa si annulla (in caso di dizionario degenere potrei anche decidere di portare fuori base un'altra variabile, ma non sarebbe una buona idea ...).

$$
\begin{array}{l}
\max \ -x_0 \\
\left\{\begin{array}{rcl}
w_1 &=& 10 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 + \frac{4}{5}x_0 \\
x_2 &=& 2 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\
\multicolumn{3}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Ora che $x_0$ è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla $x_0$ per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$
\begin{array}{l}
\max \ 22x_1 - 10x_2 - 6x_3 = -20 + 2x_1 - 8x_3 - 2w_2 \\
\left\{\begin{array}{rcl}
w_1 &=& 10 - 8x_1 - \frac{9}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\
x_2 &=& 2 + 2x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della $x_1$ nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base $x_1$ esce $w_1$ ed otteniamo il seguente dizionario.

$$
\begin{array}{l}
\max \ -\frac{35}{2} - \frac{1}{4}w_1 - \frac{169}{20}x_3 - \frac{39}{20}w_2 \\
\left\{\begin{array}{rcl}
x_1 &=& \frac{5}{4} - \frac{1}{8}w_1 - \frac{9}{40}x_3 + \frac{1}{40}w_2 \\
x_2 &=& \frac{9}{2} - \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di $-\frac{35}{2}$ per la funzione obiettivo.

Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{4}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{39}{20}$ (almeno per piccoli incrementi).

Lo studio di cosa succede a seguito di variazioni nei termini noti dei vincoli porta a considerare la seguente generalizzazione del problema originale:

$$
\begin{array}{l}
\max \ 22x_1 - 10x_2 - 6x_3 \\
\left\{\begin{array}{rcl}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq& 8 + t_1 \\
10x_1 - 5x_2 + x_3 &\leq& -10 + t_2 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Il tableau per la soluzione di base di questo problema caratterizzata dalla medesima partizione (in base/fuori base) delle variabili che nella soluzione ottima riscontrata per il problema originario differirà dal tableau di detta soluzione del problema originario solo per la colonna dei termini noti, la quale può essere facilmente ricostruita avvalendosi della prova del nove per il tableau. Poichè $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, z) = (0, 0, 0, 8 + t_1, -10 + t_2, 0)$ soddisfaceva al primissimo tableau (dizionario) essa dovrá soddisfare anche all'ultimo, e queste 3 condizioni ci consentono di ricostruire le 3 entries nella colonna dei termini noti. Con i conseguenti conteggi otteniamo il seguente tableau:

$$
\begin{array}{l}
\max \; -\frac{35}{2} + \frac{1}{4}t_1 + \frac{39}{20}t_2 - \frac{1}{4}w_1 - \frac{169}{20}x_3 - \frac{39}{20}w_2 \\
\left\{
\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \frac{5}{4} + \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{40}t_2 - \frac{1}{8}w_1 - \frac{9}{40}x_3 + \frac{1}{40}w_2 \\
x_2 & = & \frac{9}{2} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2 - \frac{1}{4}w_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\
\multicolumn{3}{l}{x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

Si noti come questo dizionario generalizzi effettivamente il dizionario da cui è stato ottenuto (riscontrabile per $t_1 = t_2 = 0$). Verificando inoltre che il nuovo dizionario supera la prova del nove (ossia è soddisfatto dalla soluzione $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, z) = (0, 0, 0, 8+t_1, -10+t_2, 0)$), ne deriva definitivamente la sua correttezza. La soluzione di base associata a questo dizionario, ossia $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, z) = (\frac{5}{4} + \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{40}t_2, \frac{9}{2} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2, 0, 0, 0, -\frac{35}{4} + \frac{1}{8}t_1 + \frac{39}{20}t_2)$ evidenzia la nostra disponibilità a pagare i prezzi ombra, come appaiono nell'espressione della coordinata $z$ (valore di funzione obiettivo). Tale soluzione rimane indefinitivamente ammissibile al crescere di $t_1$, e pertanto non vi è limite alla nostra propensione a pagare quel prezzo sul primo vincolo. La non-negatività della $x_2$ suggerisce però che il prezzo ombra per la $x_2$ perda il suo significato per $t_2 > 18$. Quando $t_2 = 18$ la soluzione ottima è degenere e per $t_2 > 18$ dobbiamo rivedere le nostre strategie.