

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 28 luglio 2016 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (3+2+2+4+1+1+1+1=15 punti):

Per sostenere il lago con la cascata di cioccolato ai laboratori della Willy Wonka, gli Umpa Lumpa possono miscelare i seguenti tipi di cioccolato:

Valori nutrizionali (per 1 Kg)			
	Tipologia di cioccolato		
	fondente	al latte	bianco
Vitamina A (IU)	400	3000	2200
Vitamina B1 (mg)	0,6	1	1
Vitamina B2 (mg)	0,6	3	4
Vitamina C (mg)	11,4	30	30
Vitamina D (IU)	500	700	150
Vitamina E (mg)	24	12	-

Il lago può essere rimpinguato fino ad un massimo di 240 volte al giorno, ma inserendo al più 10 Kg di cioccolato nuovo ad ogni afflusso per non alterare i delicati equilibri del suo biotopo; la prassi è pertanto quella di limitare i deflussi e di fare affluire precisamente 10 Kg di cioccolato ad ogni immissione. L'apporto minimo di vitamine richiesto ad ogni singola immissione è conseguentemente il seguente:

Apporto minimo di vitamine ad ogni immissione					
Vitamina A 11000 (IU)	Vitamina B1 8 (mg)	Vitamina B2 16 (mg)	Vitamina C 134 (mg)	Vitamina D 3000 (IU)	Vitamina E 100 (mg)

(3pt) Si formuli come un problema di PL il problema di minimizzare il costo di ogni singolo afflusso assumendo che il costo per i rabbocchi di cioccolato delle varie tipologie sia espresso dalla sola prima riga della seguente tabella:

Costo (in euro)			
	Tipologia di cioccolato		
	fondente	al latte	bianco
Costo per ogni Kg rabboccato	70	80	60
Costo attivazione tipologia	120	130	101

(2pt) Si formuli come un problema di PLI il problema di minimizzare il costo di ogni singolo afflusso considerando che oltre ai costi lineari espressi dalla prima riga della tabella, come sopra, siano da considerarsi anche dei costi che scattano qualora si decida di avvalersi delle varie tipologie di cioccolato (cioccolato disperso nelle tubature da ripulire ogni volta). Questi costi di attivazione tipologia (costi di start-up per ogni singola tipologia) sono espressi nella seconda ed ultima riga della stessa tabella.

(2=1+1pt) Si effettui l'astrazione dai dati per entrambi i modelli, assumendo di dover miscelare i cioccolati C_1, \dots, C_n con costi lineari CL_j (e eventuali costi di attivazione CA_j) per ogni tipologia di cioccolato $j = 1, \dots, n$. Si assumano m tipologie di vitamine, e sia R_i la quantità di vitamina i richiesta sul singolo afflusso (che ora ammonterà ad una quantità Q , non necessariamente il valore di questo parametro Q sarà sempre di 10 Kg). Si indichi con $A_{i,j}$ l'apporto in termini di vitamina i (dove $i = 1, \dots, m$) per ogni chilo di cioccolato C_j (dove $j = 1, \dots, n$).

(8=4+1+1+1+1pt) Si osservi come il ricorso alla PLI, senza limitarsi alla PL, fosse una rinuncia necessaria dovendo rappresentare i costi di attivazione. Dimostrare questo osservando che il problema

coi costi di attivazione è NP-hard, riducendo ad esso 3SAT. La sola descrizione di una riduzione valida vale 4 punti, mentre gli eventuali enunciati del lemma facile e difficile, e le loro eventuali dimostrazioni in breve, valgono 1 punto a testa.

Problema 2 (5 punti):

Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni argomentando compiutamente le tue risposte (fare riferimento ad enunciati noti ove positive, proporre controesempi ove negative).

Se un problema di PL in forma standard ha una soluzione ottima non di base allora tale problema

- 2.1.(1pt) *È necessariamente degenera ossia ha almeno una soluzione di base degenera.*
- 2.2.(1pt) *Ha un duale che è necessariamente ammissibile.*
- 2.3.(1pt) *Ha un duale che è necessariamente limitato.*
- 2.4.(1pt) *Ha almeno una soluzione di base ottima.*
- 2.5.(1pt) *Ha almeno due soluzioni di base ottime.*

Problema 3 (7 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	1	1	1	0	0	•
B	2	2	1	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	•	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

- 3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?
- 3.2(1pt) e se la partenza è in B-3?
- 3.3(1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?
- 3.4(1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?
- 3.5(1pt) Quale è il minimo costo di una traversata da A-1 a G-9?
- 3.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

Problema 4 (1+6·1=7 punti):

Una tabella di programmazione dinamica è stata compilata per il problema di knapsack con zaino di capacità $B = 35$ e con riferimento al set di oggetti nella legenda in calce alla tabella stessa.

TABELLA DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
$\mathbb{G}(0,0)$	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$A(16,52)$	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	52	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
$B(15,51)$	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	51	52	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	103	X	X	X		
$C(13,40)$	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	40	X	51	52	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
$D(11,31)$	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	31	X	40	X	X	51	52	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	103	X	X	X	X		
$E(8,20)$	0	X	X	X	X	X	X	X	20	X	X	31	X	40	X	51	52	X	X	X	X	X	X	X	71	72	X	82	83	91	92	X	103	X	102	103	
$F(7,21)$	0	X	X	X	X	X	X	21	20	X	X	31	X	40	X	51	52	X	52	51	61	60	72	73	72	X	X	X	X	92	103	91	103	104	112		
$G(5,16)$	0	X	X	X	X	16	X	21	20	X	31	37	40	X	51	52	X	56	51	67	68	72	73	72	77	82	88	91	X	92	103	X	X	X	X		
$H(3,5)$	0	X	X	5	X	16	X	21	21	X	26	31	37	40	36	51	52	X	56	57	67	73	73	77	82	88	91	92	93	X	X	X	X	X	X		
$I(2,15)$	0	X	15	2	X	20	31	36	36	31	41	46	52	48	55	52	66	67	73	74	71	72	82	83	87	88	92	97	103	106	107	X	X	X	X		
$J(1,7)$	0	7	15	22	12	20	27	31	38	36	43	41	46	53	59	62	66	73	74	71	78	82	89	90	94	95	99	104	X	X	X	X	X	X	X		

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
peso	16	15	13	11	8	7	5	3	2	1
valore	52	51	40	31	20	21	16	5	15	7

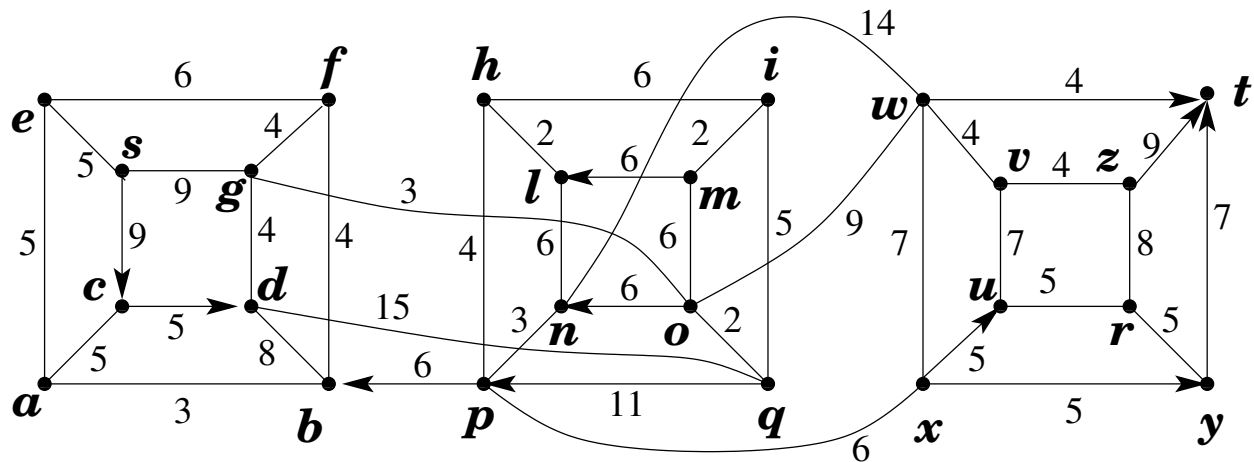
TABELLA DELLE RISPOSTE

B	vincolo agg.	max val	peso	quali prendere
35	-			
35	evita J			
35	prendi J, evita I			
35	evita I e J			
33	prendi J			
32	evita I e J			

Purtroppo, alcune entry della tabella si sono sbiadite. Si colmino TUTTE (1pt) le lacune nella tabella di programmazione dinamica e si identifichino correttamente le risposte (6pt) riportandole nella tabella delle risposte.

Problema 5 (23 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(2pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no (1pt); (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gm è planare oppure no (1pt).
- 5.2.(4pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: il grafo G (1pt); il grafo G' (1pt). Argomentare l'unicità del minimo insieme di archi da rimuovere nel caso di G (1pt) e di G' (1pt).
- 5.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 5.4.(4pt) ((1pt)) Di quanto è necessario diminuire il peso dell'arco wo affinché esso appartenga a qualche soluzione ottima (ma non tutte, fornire quindi ambo i certificati ((1pt)))? ((1pt)) Di quanto è necessario aumentare il peso dell'arco wv affinché esso smetta di appartenere a tutte le soluzioni ottime (a quel punto apparirà ad alcune ma non tutte, puoi esibire due certificati per sigillare la tua risposta ((1pt)))?
- 5.5.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 5.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.9.(1pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .
- 5.10.(1pt) Quanti sono i possibili tagli minimi?
- 5.11.(1pt) Quale è il minimo numero di archi su cui violare il vincolo di capacità per riuscire ad incrementare il flusso massimo? Quali sono questi archi?
- 5.12.(1+1pt) Argomentare che la scelta al punto precedente è ottima. Argomentare che è unica.
- 5.13.(1+1pt) Flusso massimo quando si sia rimosso il vincolo di capacità su questi archi e suo certificato di ottimalità.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.