Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 28 febbraio 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (7+5+3+1+? punti):

Per il prossimo anno, il piano di produzione della Miraprimule prevede una produzione di d_t unitá di prodotto nel mese t, $t = 1, \dots, 12$. Ciascun operaio é in grado di produrre k unitá di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio é pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, ed assumendo che le assunzioni ed i licenziamenti abbiano luogo solo a inizio mese, vorreste determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire sempre a produrre la domanda richiesta e da minimizzare il costo complessivo (stipendi, assunzioni, licenziamenti).

(7 punti). Riusciresti a mettere a punto un algoritmo di programmazione dinamica che risolva all'ottimo questa tipologia di problema?

(4 punti). Formulare come problema di programmazione lineare o come problema di programmazione lineare intera.

(2 punti). Argomentare il perché sia tutto sommato possibile omettere i vincoli di interezza sulle variabili scelte nella formulazione di cui sopra, ad esempio spiegando (e dimostrando) nel dettaglio come una generica soluzione ammissibile frazionaria possa sempre essere "arrotondata" ad una soluzione intera di costo strettamente minore (purché $s, p, q > 0$).

(1 punto). Se avrai argomentato in modo pulito, saprai dirmi quali delle seguenti condizioni siano sufficienti al concludere che ogni soluzione ottima ritornata dal *linear solver engine* sará di suo intera. Ecco le tre possibilitá che ti chiedo di catalogare:

A. $s, p \geq 0$, $q > 0$;
B. $s \geq 0$, $p, q > 0$;
C. $s > 0$, $p, q \geq 0$.

(+? punti). Se alcune delle condizioni sopra (A, B, o C) non ti appaiono sufficienti, ricevi 1 punto per ogni condizione che fai fuori (dead) con un controesempio.

Problema 2 (5 punti):

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\min\ 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

2.1(2pt) Senza determinare esplicitamente la soluzione ottima, ma comunque certificando la risposta, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima sia minore, maggiore, o eguale a 1.

2.2(2pt) Scrivere il problema duale.

2.3(1pt) Fornire certificato immediato (che non richieda riferimento esplicito al duale) per la tua risposta di cui al punto 1.

Problema 3 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	·	•
B	·	·	·	·	•	•	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	•	·	·	·	•	·
E	·	·	·	·	•	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	•	·
G	·	·	·	·	•	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili?

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	
B–3 → G–8	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = G\,T\,C\,T\,C\,A\,C\,A\,A\,T\,G\,C\,G\,T\,C\,T\,A$ e $t = C\,T\,A\,G\,C\,A\,G\,T\,C\,A\,A\,C\,G\,T\,A\,T$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

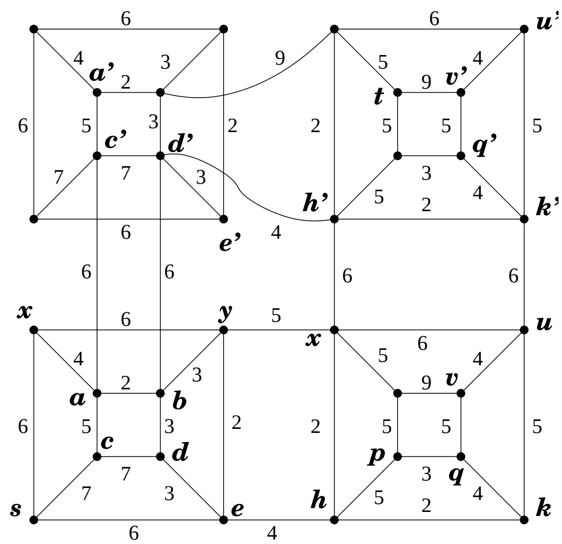
4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

4.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = C\,T\,A\,G\,C\,A\,G\,T\,C$ di t?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = G\,T\,C\,T\,C\,A\,C\,A$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

Problema 5 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.