

Esame di Ricerca Operativa - 31 luglio 2017

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

- CORREZIONE -

punti in palio: ??, con voto \geq punti

Problema 1 (8 punti):

Carta batte sasso, sasso batte forbici, forbici battono carta. Se i due giocatori scelgono la stessa figura la mano è patta, altrimenti chi vince riceve un euro dall'avversario. Non sai con quale probabilità il tuo avversario sceglie la sua figura tra sasso, carta, forbici. Pertanto, nessuna delle 3 opzioni di gioco a te disponibili (carta/forbice/sasso) ti garantisce di non perdere un euro sulla mano che sei chiamato a giocare. Ossia, nessuna delle 3 strategie pure garantisce un guadagno minimo superiore a -1 . Vuoi allora affidarti al potere di una strategia randomizzata, e stabilire la distribuzione di probabilità su queste tre figure da adottare tu, con lo scopo di massimizzare il tuo guadagno atteso su una singola mano, tenendoti conservativo su quale possa essere il gioco dell'avversario. Assumendo che l'avversario non abbia modo di barare sbirciando l'esito della tua variabile aleatoria, quale guadagno atteso riesce a garantirti, comunque giochi l'avversario, la tua distribuzione ottima di probabilità?

(2pt) Formulare come un problema di PL la determinazione di una strategia mista (= distribuzione di probabilità sulle 3 opzioni carta/forbice/sasso) ottima.

(1pt) Fornire una strategia ottima. Quale guadagno atteso riesce a garantirti tale strategia?

(2pt) Formulare come un problema di PL la determinazione di una strategia ottima nel caso sia dato di sapere l'avversario non giocherà forbici.

(1pt) Fornire una strategia ottima per il caso in cui l'avversario non possa giocare forbici. Quale guadagno atteso riesce a garantirti tale strategia?

(1pt) Mostrarne l'ottimalità.

(1pt) Mostrarne l'unicità.

svolgimento.

Il problema può essere formulato descrivendo (codificando) la distribuzione di probabilità da adottarsi tramite le 3 seguenti variabili reali:

- p_C = la probabilità con cui giocare carta.
- p_F = la probabilità con cui giocare forbici.
- p_S = la probabilità con cui giocare sasso.

Per il fatto di definire una distribuzione di probabilità, tali variabili sono soggette ai seguenti vincoli:

non negatività

$$p_C, p_F, p_S \geq 0.$$

stocasticità

$$p_C + p_F + p_S = 1.$$

Ne consegue che $0 \leq p_C, p_F, p_S \leq 1$, ed evitiamo quindi di introdurre esplicitamente i 3 upper bounds ad 1. Il nostro obiettivo è quello di scegliere la distribuzione $p = (p_C, p_F, p_S)$

che massimizzi il nostro guadagno atteso nel caso peggiore su quale possa essere la strategia dell'avversario. Ovviamente, se l'avversario sbircia la nostra giocata, siamo condannati a perdere un euro e studiare il gioco perde ogni motivazione (non è interessante). Assumiamo pertanto che l'avversario giochi senza per nulla conoscere l'esito della variabile aleatoria da cui facciamo dipendere la nostra mossa. A questo punto, l'avversario potrebbe tranquillamente aver fatto la sua scelta e messala in una busta sigillata prima che noi si prenda la nostra decisione (si lanci il nostro dado a 3 facce). Vi sono quindi tre scenari possibili:

sasso in busta il nostro guadagno atteso è dato da $GA(p; S) = p_C - p_F$;

forbici in busta il nostro guadagno atteso è dato da $GA(p; F) = p_S - p_C$;

carta in busta il nostro guadagno atteso è dato da $GA(p; C) = p_F - p_S$.

Essere conservativi significa che lo scenario s (vai a sapere perchè si realizza sempre quello peggiore!) viene scelto dopo che noi abbiamo scelto la distribuzione $p = (p_C, p_F, p_S)$. Ma il dado, cui abbiamo affidato la nostra decisione, verrà giocato ancora dopo. In ogni caso, la funzione obiettivo ha la forma $\min_{s \in \{S, F, C\}} \max_p GA(p; s)$. Quindi una funzione obiettivo di tipo “min-max”, che può essere riformulata in modo lineare come segue: $\max z$ con i vincoli

z non può eccedere il guadagno atteso quando in busta ci sia sasso

$$z \leq GA(p; S)$$

z non può eccedere il guadagno atteso quando in busta ci sia forbice

$$z \leq GA(p; F)$$

z non può eccedere il guadagno atteso quando in busta ci sia carta

$$z \leq GA(p; C)$$

Si vuole quindi trovare il più alto valore di z che non ecceda alcuno dei tre valori di guadagno attesi sui tre possibili scenari.

(2pt) In conclusione, si perviene alla seguente formulazione di PL:

$$\begin{aligned} \max z \\ z \leq p_C - p_F \end{aligned} \tag{1}$$

$$z \leq p_S - p_C \tag{2}$$

$$z \leq p_F - p_S \tag{3}$$

$$p_C + p_F + p_S = 1. \tag{4}$$

$$p_C, p_F, p_S \geq 0.$$

(1pt) La simmetria del gioco e di ruolo dei giocatori implicano che la strategia mista $(p_C, p_F, p_S) = (1/3, 1/3, 1/3)$ debba essere ottima; essa ottiene valore 0 per il nostro modello di PL e garantisce quindi guadagno atteso non negativo nel caso peggiore su ogni strategia

pura dell'avversario (quindi anche su quelle miste che possono essere viste come combinazione convessa di quelle pure). Grazie alla simmetria del gioco, tale strategia può essere adottata anche dall'avversario, ed in un certo senso certifica la propria stessa ottimalità.

(2pt) Nel caso in cui sia dato di sapere che l'avversario non giocherà forbici, scompare lo scenario con le forbici in busta, e la formulazione diviene la seguente.

$$\begin{aligned} \max z \\ z \leq p_C - p_F \end{aligned} \tag{5}$$

$$z \leq p_F - p_S \tag{6}$$

$$p_C + p_F + p_S = 1. \tag{7}$$

$$p_C, p_F, p_S \geq 0.$$

(1pt) La strategia mista $(p_C, p_F, p_S) = (2/3, 1/3, 0)$ ottiene valore $1/3$ per il nostro modello di PL e garantisce quindi guadagno atteso $1/3$ nel caso peggiore su ogni strategia pura e mista dell'avversario (lo spazio delle strategie miste si è ormai confermato come un'astrazione matematica robusta e feconda). Quando seguiamo questa strategia, in verità il nostro guadagno atteso è sempre $1/3$ qualsiasi sia la strategia pura (o mista) adottata dall'avversario. In questi giochi un giocatore non riduce il proprio guadagno atteso nel caso peggiore se rivela la propria strategia mista (deve pur sempre attenersi a quella ottima che anche l'avversario è in grado di conoscere). Tuttavia, quando un giocatore si attiene ad una sua strategia ottima, lo spazio delle strategie ottime per l'avversario tende ad arricchirsi al punto che l'avversario spesso non ha più alcun margine di errore.

(1pt) Come corollario del teorema della dualità forte, la teoria dei giochi a somma zero ci insegna che le strategie miste ottime dei due avversari hanno lo stesso valore, e vorremo quindi utilizzare la strategia ottima dell'avversario come certificato di ottimalità della nostra. La strategia ottima dell'avversario può essere reperita tornando alla prima formulazione di PL data ed ottimizzando tale modello sotto il vincolo $p_F = 0$. Otteniamo $(p_C, p_F, p_S) = (2/3, 0, 1/3)$ come strategia ottima per l'avversario, ed è facile verificare che essa è ammissibile e di valore pari a $-1/3$ facendo riferimento al primo modello di PL. Pertanto la strategia proposta è effettivamente ottima.

(1pt) Alternativamente, la combinazione conica a coefficienti $(1/3, 2/3, 1/3)$ dei vincoli (5), (6) e (7) della seconda formulazione (tutti tight per la nostra strategia presunta ottima) ci restituisce $z \leq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}p_S$ e quindi non è possibile garantire oltre $1/3$ dato che $p_S \geq 0$. Risulta pertanto riconfermato che la strategia proposta è effettivamente ottima. Inoltre, in ogni strategia ottima dobbiamo avere $p_S = 0$, quindi $p_F \geq 1/3$ e $p_C \geq p_F + 1/3 \geq 2/3$. Combinando con $p_C + p_F + p_S = 1$ si deduce che $p_F = 1/3$ e $p_C = 2/3$, da cui l'unicità. La combinazione conica a coefficienti $(1/3, 2/3, 1/3)$ salta fuori risolvendo il problema duale del secondo modello di PL, ma è anche deducibile partendo dalla strategia per l'avversario fornita sopra; i primi due coefficienti offrono una combinazione convessa di strategie pure che è appunto la strategia mista per l'avversario suggerita sopra. Anche essa è unica.

Il Pirellone è un noto grattacielo di Milano, in cui le finestre sono disposte ordinatamente per M righe (piani) e N colonne. Le righe sono numerate da 1 a M (dall'alto in basso) e le colonne da 1 a N (da sinistra a destra). Questa sera alcune delle finestre sono rimaste illuminate e tocca al custode provvedere a spegnerle. Egli può agire su $M + N$ interruttori speciali, col seguente funzionamento particolare. Ci sono M interruttori di riga e N interruttori di colonna. Quando il custode agisce sull' i -esimo interruttore di riga, tutte le luci accese dell' i -esima riga si spengono ma, allo stesso tempo, quelle spente si accendono! Analogamente alle righe, un interruttore di colonna spegne le luci accese di quella colonna e accende quelle spente.

(3pt) Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) che aiuti il custode a stabilire se esista un modo per spegnere tutto il palazzo indicando eventualmente su quali interruttori agire e come.

(3pt) Formulare come un problema di PLI il problema di agire sugli interruttori in modo da minimizzare il numero di luci rimaste accese specificando l'eventuale soluzione.

(1+5pt) Formulare come un problema di programmazione lineare (PL) il problema di stabilire se esista un modo per spegnere tutto il palazzo specificando l'eventuale soluzione **(1pt)**. Argomentare la correttezza della tua formulazione, ossia l'interrezza del politopo da essa individuato **(5pt)**.

svolgimento. (3pt) La prima cosa da fare è introdurre delle variabili che consentano di descrivere lo spazio delle scelte. Una prima importante osservazione è che le mosse del custode commutano, ossia “agire prima sull'interruttore A , quindi sull'interruttore B ” produce lo stesso effetto che “agire prima sull'interruttore B , quindi sull'interruttore A ” (il modo più semplice per convincersene è concentrarsi su una singola finestrella del Pirellone). Pertanto, ciò che conta non è tanto l'ordine con cui si agisce sui vari interruttori, ma solo quante volte si agisca in definitiva su ciascuno di essi. È inoltre evidente che ciascuna mossa è indempotente: se applicata due volte l'effetto è nullo. Pertanto, ciò che il custode è chiamato a scegliere è in buona sostanza un sottoinsieme degli interruttori a sua disposizione. Vogliamo quindi codificare la scelta di un sottoinsieme di interruttori tramite una famiglia di variabili numeriche. La nozione di vettore caratteristico di un sottoinsieme si presta a fagiolo: dove $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, per ogni $i \in \mathbf{N}_M$ introduciamo una variabile booleana x_i intesa ad indicare l'utilizzo o meno dell' i -esimo interruttore di riga ($x_i = 1$ se l'interruttore viene utilizzato, $x_i = 0$ altrimenti); per ogni $j \in \mathbf{N}_N$ introduciamo una variabile booleana y_j intesa ad indicare l'utilizzo o meno del j -esimo interruttore di colonna.

$$x_i - y_j = 0 \quad \text{per ogni finestra } (i, j) \text{ originariamente spenta} \quad (8)$$

$$x_i + y_j = 1 \quad \text{per ogni finestra } (i, j) \text{ originariamente accesa} \quad (9)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni } i \in \mathbf{N}_M$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \text{per ogni } j \in \mathbf{N}_N$$

(3pt) Non è detto che il modello sopra ammetta soluzioni ammissibili. In tale caso vorremmo lasciare il minimo numero possibile di luci accese. Compare pertanto la funzione obiettivo, e siamo chiamati ad integrare il set di variabili di azionamento interruttore viste

sopra con due set di variabili di aggiustamento $a_{i,j} \in \{0,1\}$ e $b_{i,j} \in \{0,1\}$ per ogni finestra (i,j) , $i \in \mathbf{N}_M, j \in \mathbf{N}_N$.

Proponiamo la seguente formulazione di PLI:

$$\min \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{i,j} + b_{i,j}$$

$$x_i + a_{i,j} = y_j + b_{i,j} \quad \text{per ogni finestra } (i,j) \text{ originariamente spenta} \quad (10)$$

$$x_i + y_j + a_{i,j} = 1 + b_{i,j} \quad \text{per ogni finestra } (i,j) \text{ originariamente accesa} \quad (11)$$

$$x_i, y_j, a_{i,j}, b_{i,j} \in \{0,1\} \quad \text{per ogni } i \in \mathbf{N}_M \text{ ed ogni } j \in \mathbf{N}_N.$$

(1pt) Come formulazione di PL proponiamo il rilassamento continuo della prima formulazione di PLI data sopra:

$$x_i - y_j = 0 \quad \text{per ogni finestra } (i,j) \text{ originariamente spenta} \quad (12)$$

$$x_i + y_j = 1 \quad \text{per ogni finestra } (i,j) \text{ originariamente accesa} \quad (13)$$

$$x_i \in [0,1] \quad \text{per ogni } i \in \mathbf{N}_M$$

$$y_j \in [0,1] \quad \text{per ogni } j \in \mathbf{N}_N$$

(5pt) Sia P il politopo costituito da quei punti $z = (x, y)$ di \mathbf{R}^{M+N} che soddisfano a tutti i vincoli della nostra formulazione di PL. Chiaramente, tutti i vettori caratteristici di sottoinsiemi di interruttori che corrispondono a soluzioni del problema assegnato ricadono in P . Di converso, $P \subseteq [0,1]^{M+N}$ ed ogni punto intero in P ricade pertanto in $\{0,1\}^{M+N}$ e può essere interpretato come il vettore caratteristico di un sottoinsieme di interruttori che, rispettando i vincoli, rappresenta effettivamente una soluzione. In generale, non esistono algoritmi efficienti per ritrovare punti interi entro un certo politopo (e non possono esistere a meno che $P=NP$); tuttavia esistono algoritmi sia efficienti che efficaci per ottenere un qualche vertice (od anche un vertice che massimizzi una funzione obiettivo assegnata). Un politopo si dice intero se tutti i suoi vertici sono interi, ossia punti aventi tutte le coordinate intere. Vogliamo dimostrare che P è un politopo intero. Si consideri un qualsiasi punto frazionario $z = (x, y) \in P$, il piano è quello di esibire come z possa sempre essere scritto come combinazione convessa di altri punti di P , ossia z non possa essere un vertice. Senza perdita di generalità (possiamo sempre scambiare di ruolo righe e colonne), sia $\bar{i} \in \mathbf{N}_M$ tale che $x_{\bar{i}} \in (0,1)$. Poichè per ogni coppia $(i,j) \in \mathbf{N}_M \times \mathbf{N}_N$ abbiamo un vincolo di tipo (??) o (??), allora per ogni $j \in \mathbf{N}_N$ abbiamo che $y_j \in \{x_{\bar{i}}, 1 - x_{\bar{i}}\}$. Inoltre, per ogni $i \in \mathbf{N}_M$ abbiamo che $x_i \in \{x_{\bar{i}}, 1 - x_{\bar{i}}\}$. Se $x_{\bar{i}} = 1/2$, allora $z \equiv \mathbf{1}/\mathbf{2}$ e, necessariamente, l'istanza era costituita da un Pirellone interamente spento in bella partenza. In questo caso hanno validità le due soluzioni intere $z_0 = \mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, che prescrive di non agire su alcun interruttore, e $z_1 = \mathbf{1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$, che prescrive di agire su tutti gli interruttori sia di riga che di colonna. Abbiamo pertanto che $z = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$ è effettivamente combinazione convessa di due punti estremi entro P (vertici). Altrimenti, se, senza perdita di generalità (P gode della simmetria $z \in P \Leftrightarrow (1-z) \in P$), $x_{\bar{i}} > 1/2$, allora $z = x_{\bar{i}}z' + (1 - x_{\bar{i}})z''$ dove z' e z'' sono due soluzioni con $z'' = 1 - z'$ e z' definito da:

$$z'_k = \begin{cases} 0 & \text{se } z_k < 1/2, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In effetti z' è soluzione perchè z è soluzione e per la geometria dei vincoli (due componenti uguali in z vengono mantenute uguali in z' e due componenti difformi in z vengono mappate

in componenti a somma 1 in z'). Stesso discorso per z'' , o anche: z'' è soluzione poichè se p è soluzione allora anche $1 - p$ lo è, e $z'' = 1 - z'$.

Problema 3 (3 punti):

Dato un planar embedding di un grafo $G = (V, E)$, indichiamo con

$n := |V(G)|$ il numero di nodi di G ; $m := |E(G)|$ il numero di archi di G ;

$k := |V(G)|$ il numero di componenti connesse di G ;

f il numero di "facce", ossia di regioni del piano separate dal planar embedding di G .

(3pt) Dimostrare che $f = m - n + k + 1$.

svolgimento.

Si noti che per definire f abbiamo dovuto fare riferimento ad un planar embedding di G . Pertanto, quando un grafo planare ammettesse più planar embeddings, questi potrebbero differire per numero di facce. La formula di Eulero che ci accingiamo a dimostrare implica invece che tutti i planar embedding di uno stesso grafo hanno lo stesso numero di facce.

(2pt) dimostrazione. Per induzione su m . Quando $m = 0$ allora $k = n$ ed abbiamo una sola faccia. Quando si aggiunga un arco n non cambia mentre m viene incrementato di uno: mostreremo che anche $f - k$ cresce esattamente di 1. Vanno considerati due casi che possono presentarsi con l'aggiunta dell'arco uv :

- se u e v erano in componenti connesse distinte prima dell'aggiunta dell'arco uv allora k cala di uno, mentre il numero di facce non cambia: il nuovo arco è un istmo che si bagna su entrambi i lati nello stesso mare;
- se u e v erano in componenti connesse distinte prima dell'aggiunta dell'arco uv allora k resta invariato ma f aumenta di 1 in quanto il nuovo arco separa in due quella che prima era una unica regione (chiudendo esso una curva chiusa col precedente cammino che garantiva la connessione da u a v).

Problema 4 (1+2+1+2=6 punti):

Un grafo planare è detto *rigido* se ammette essenzialmente un solo planar embedding. A questo proposito, due planar embeddings sono considerati equivalenti se, dopo averne eventualmente ribaltato uno (passando ad osservarlo da dietro la lavagna trasparente su cui disegnato) allora, per ogni nodo, l'ordinamento ciclico degli archi ad esso incidenti quando li si legga in senso orario è lo stesso nei due planar embeddings.

(1pt) Fornire un esempio di grafo rigido di 6 nodi.

(1+1=2pt) Abbiamo definito il grafo duale G^* di un grafo planare G facendo riferimento ad un dato planar embedding di G . Tuttavia, se G non è rigido, potrebbe anche succedere che partendo da due diversi planar embeddings G_1 e G_2 di G si ottengano due grafi duali G_1^* e G_2^* non isomorfi tra loro. Si fornisca un esempio dove questo succede producendo in esplicito i due grafi G_1^* e G_2^* **(1pt)** ed argomentando efficacemente il non-isomorfismo di G_1^* e G_2^* **(1pt)**.

(1pt) Fornire un esempio di grafo rigido isomorfo al proprio duale. Si fornisca un disegno dove i planar embedding dei due grafi sono sovrapposti per metterne in evidenza la relazione di dualità.

(2pt) Si proponga una famiglia infinita di grafi rigidi, ciascuno isomorfo al proprio duale.

svolgimento.

(1pt) Per raccogliere 6 vertici si prendano due triangoli abc ed ABC , e si aggiungano poi gli archi aA , bB , cC . In ogni planar embedding il secondo triangolo deve necessariamente essere o dentro la macro-regione (dico “macro” perchè potrebbe comporsi di più facce) ritagliata dal primo od al suo esterno. I due casi sostanzialmente coincidono se posso guardare al disegno dal retro della lavagna.

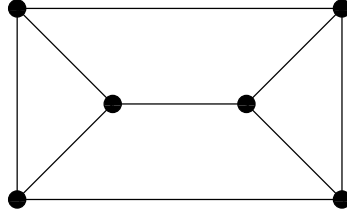


Figura 1: Il prisma è un esempio di grafo rigido. Tutti i grafi skeleton di poliedri semplici sono rigidi.

(1+1=2pt)

In figura, con archi in linea continua e nodi neri pieni, si forniscono due diversi planar embeddings (uno a sinistra ed uno a destra) di uno stesso grafo G . Vengono date inoltre (archi in linea tratteggiata e nodi vuoti) le rispettive costruzioni per il grafo duale: collocamento di un nodo (capitale di stato) nell'interno di ciascuna regione e tracciamento degli archi come percorsi degli ambasciatori attraversanti ciascuno dei confini). I due grafi duali G_1^* e G_2^* così ottenuti partendo dai due differenti planar embeddings non sono isomorfi come evidenziato dal fatto che uno di essi possiede un nodo di grado 4 mentre l'altro è cubico (tutti i nodi di grado 3). Pertanto non vi è dubbio che i due planar embeddings (certificati di planarità) siano effettivamente diversi.

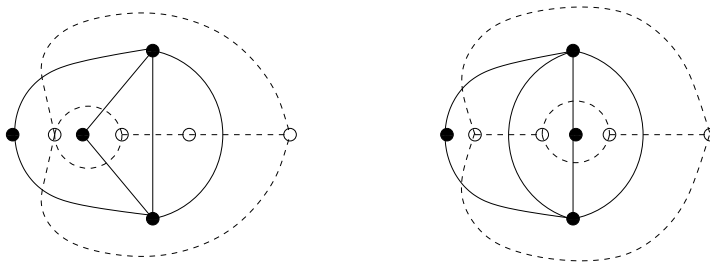


Figura 2: Un grafo con 2 planar embeddings essenzialmente diversi e 2 duali.

(1pt) In un certo senso il grafo K_1 , costituito da un solo nodo e senza archi, è il più piccolo esempio di grafo self-dual. Se stiamo parlando di multigrafi (consentiamo archi paralleli), allora l'esempio successivo è il grafo costituito da due nodi e due archi paralleli tra di essi. Questi esempi possono non soddisfarvi pienamente; ad esempio, questi due grafi non sono skeleton di poliedri semplici.

Il primo esempio serio, una vera colonna, scende in campo con il tetraedro. Il grafo planare K_4 è 3-connesso (la rimozione di al più 2 nodi lascia sempre sul tavolo un grafo connesso) e pertanto *rigido*. Questo implica che il suo planar embedding è quindi anche il suo grafo duale

$(K_4)^*$ è unico. Un semplice disegno è abbastanza per scorgere che $(K_4)^*$ è isomorfo a K_4 . In buona conclusione, il grafo K_4 è self-dual.

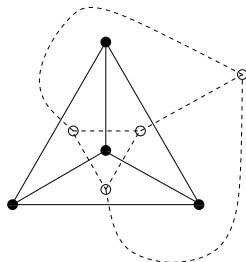


Figura 3: K_4 ed il suo duale (ad esso isomorfo).

(2pt) Prova ad ottenere la famiglia infinita generalizzando il K_4 . Sappi che seguendo questo approccio puoi ottenere un grafo self-dual per ogni ordine $n \geq 4$.

Se non hai alba di come provarci, offro prima un hint esoterico: osserva il disegno coi due planar embedding di K_4 e K_4^* e chiediti come si possa generalizzare.

Un ulteriore indicazione: Quanti archi dovrebbe avere un grafo planare di ordine 5 per poter essere self-dual? Sappi che qualcosa ti consente di calcolare questo numero per ogni ordine (= numero di nodi) possibile.

Un ultimo hint: osservando il disegno coi due planar embedding di K_4 e K_4^* , considera che essi possono essere visti come gli skeleton di politopi nello spazio. Il K_4 è una piramide, e devi chiederti come puoi generalizzarla. Puoi inoltre optare per adottare la nozione di dualità a livello dei politopi.

Se ci hai già provato (e magari riuscito!) ... Una wheel W_k è un grafo di $k + 1$ nodi dove (1) sia presente un nodo universale (ossia che vede tutti gli altri, cioè, è ad essi collegato direttamente), e (2) se da W_k rimuoviamo questo nodo universale (detto *hub* della wheel), ci resta un C_k , ossia un ciclo di k nodi (il *girotondo* della wheel). Quanto detto definisce W_k per $k \geq 4$. Nel caso di $k = 4$, otteniamo $W_4 = K_4$ dove tutti i nodi sono hub. Chiaramente tutte le wheels sono grafi planari, e, applicando la formula di Eulero, $f(W_k) = m(W_k) - n(W_k) + 2 = 2k - (k + 1) + 2 = k + 1 = n(W_k)$, quindi la self-dualità è in principio possibile.

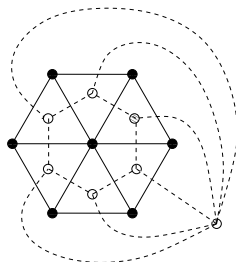


Figura 4: Una wheel più grande ed il suo duale.

Come politopi, hai individuato la famiglia delle piramidi a base poligonale.

Problema 5 (8 punti): Ho un vasetto con 8 pillole, e dovrò inghiottire mezza pillola ogni mattina per 16 giorni. Le mattine che dal vasetto pesco una mezza pillola, la ingerisco e sul calendario scrivo una 'M'. Quando dal vasetto pesco una pillola intera, la taglio in due

con un coltello, ne inghiotto una metà e reinfilo l'altra metà nel vasetto; su quel giorno, nel calendario, riporto una 'I'. Alla fine del vasetto, rileggendo di seguito le lettere da me riportate sul calendario, ottengo una stringa di 16 caratteri. Essa inizia sicuramente per I e termina con M, ma altrimenti presenta diverse possibilità. Quante sono le diverse possibilità per questa stringa?

(1pt) si ottenga una ricorrenza per il computo di tale numero.

(1pt) ci si organizzi per un computo efficiente.

(1pt) quante sono le diverse stringhe che potrei scrivere?

(1pt) e se il vasetto contenesse inizialmente 5 pillole?

(1pt) con vasetto da 8, quante sono le diverse possibili stringhe di prefisso "IIMI"?

(1pt) e se il vasetto contenesse inizialmente 6 pillole e mezza?

(1pt) due vasetti, uno rosso da 1 pillola ed uno blu da 7, quando estraggo dal vasetto rosso (o blu) scrivo con pennarello rosso (o blu). Dire il numero di stringhe colorate diverse potenzialmente generabili.

(1pt) rosso da 6 e blu da una e mezza.

svolgimento.

(1pt) Si indichi con $n(i, m)$ il numero di diverse stringhe generabili quando il vasetto appena acquistato contenga esattamente i pillole intere ed m mezze pillole.

Se $i > 0$, la stringa potrà iniziare con una I ed in tal caso il vasetto viene portato nello stato con $(i - 1)$ pillole intere ed m mezze.

Se $m > 0$, la stringa potrà iniziare con una M ed in tal caso il vasetto viene portato nello stato con i pillole intere ed $(m - 1)$ mezze.

Una possibile ricorrenza su $n(i, m)$ è quindi la seguente:

$$n(i, m) = \begin{cases} n(i - 1, m) + n(i, m - 1) & \text{se } i, m > 0 \\ n(i - 1, m) & \text{se } i > 0, m = 0 \\ n(i, m - 1) & \text{se } i = 0, m > 0 \\ 1 & \text{se } i, m = 0 \end{cases}$$

(0pt) Poichè la ricorrenza, nel primo caso, chiede di combinare due risposte per ottenere una sola risposta, risolvere il problema srotolando la ricorrenza fino alle foglie richiede un tempo esponenziale. Conviene pertanto utilizzare un approccio di tipo DP, memorizzando via via i valori computati in una tabella.

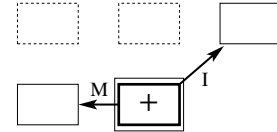
Come ulteriore (modesta) ottimizzazione, più che altro per meglio organizzare la tabella, allarghiamo i casi base alla seguente famiglia:

Se $i = 0$ allora $n(i, m) = 1$: l'unica stringa generabile è una sequenza di precisamente m caratteri 'M'.

Procediamo ora col compilare la seguente tabella.

		numero m di mezze pillole									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	
numero i di righe intere	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	X	
	2	2	5	9	14	20	27	35	X	X	
	3	5	14	28	48	75	110	X	X	X	
	4	14	42	90	165	275	X	X	X	X	
	5	42	132	297	572	X	X	X	X	X	
	6	132	429	1001	X	X	X	X	X	X	
	7	429	1430	X	X	X	X	X	X	X	
	8	1430	X	X	X	X	X	X	X	X	

fill up
rule:



Riportiamo quindi i risultati finali.

Spazio per le risposte

(1pt) Ricorrenza:

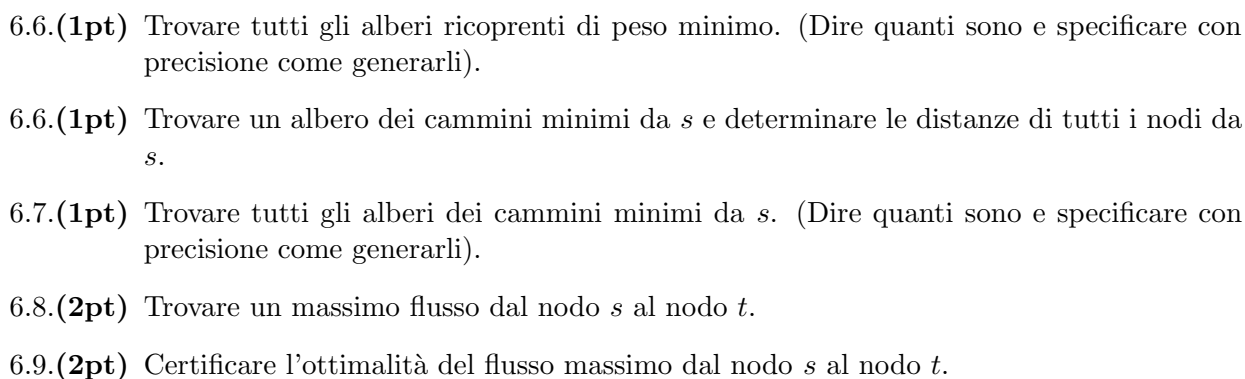
$$n(i, m) = \begin{cases} n(i-1, m) + n(i, m-1) & \text{se } i, m > 0 \\ n(i-1, m) & \text{se } i > 0, m = 0 \\ n(i, m-1) & \text{se } i = 0, m > 0 \\ 1 & \text{se } i, m = 0 \end{cases}$$

consegna	numero di stringhe generabili diverse	num caratteri
vasetto da 8	1430	16
vasetto da 5	42	10
da 8, con "IMI"	297	16
da 6 + 1/2v	429	13
rosso 1, blu 7	$1 \cdot 429 \cdot \binom{16}{2} = 429 \frac{16 \cdot 15}{2} = 51480$	16
rosso 6, blu 1 + 1/2	$132 \cdot 2 \cdot \binom{15}{3} = 264 \frac{15 \cdot 14}{6} = 9240$	15

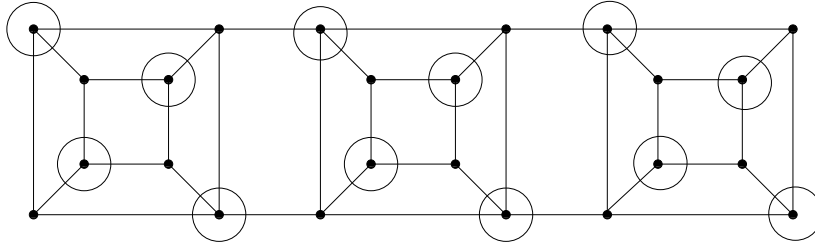
Problema 6 (16 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 6.1.(3pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no; (3) se il grafo G'' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gl è planare oppure no.
- 6.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G ; (2) il grafo G' .
- 6.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 6.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg , wx , ln .



Il fatto che G sia bipartito può essere messo in evidenza esibendo la 2-colorazione in figura.



Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 0.

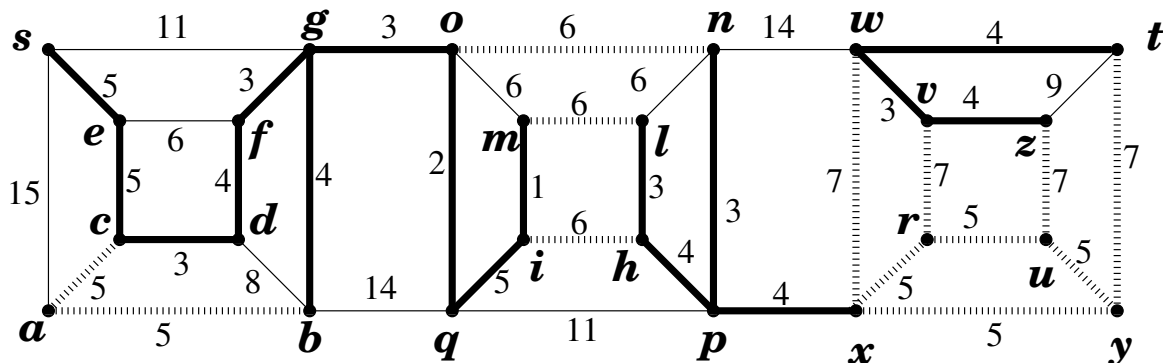
Il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh non è bipartito, come messo in evidenza dal circuito dispari $ghpqb$. Poiché $G' \setminus go$ è un sottografo di G , la rimozione di questo arco basta a rendere il grafo bipartito, ed ogni certificato (bipartizione) di G (come ad esempio quella fornita sopra) sarà anche un certificato (bipartizione) di $G' \setminus go$.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 96$ alberi ricoprenti di peso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on , ml , ih), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 7 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 7 ci ritroviamo con 2 soli nodi connessi da questi 4 archi disposti in parallelo), più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (infatti, se nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 5 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 5 ci ritroviamo con una componente connessa che è un quadrato di questi 4 archi). (La componente connessa di 2 nodi connessi da 2 archi paralleli evidenzia l'intercambiabilità dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a di cui si era detto più sopra).

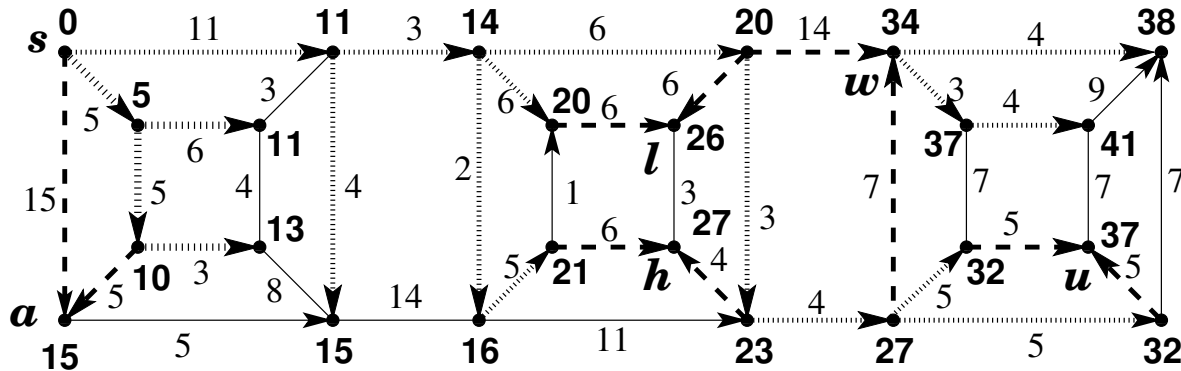
fg in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi s, e, a, c, f, d da tutti gli altri nodi;

wx in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi w, v, z, t da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$;

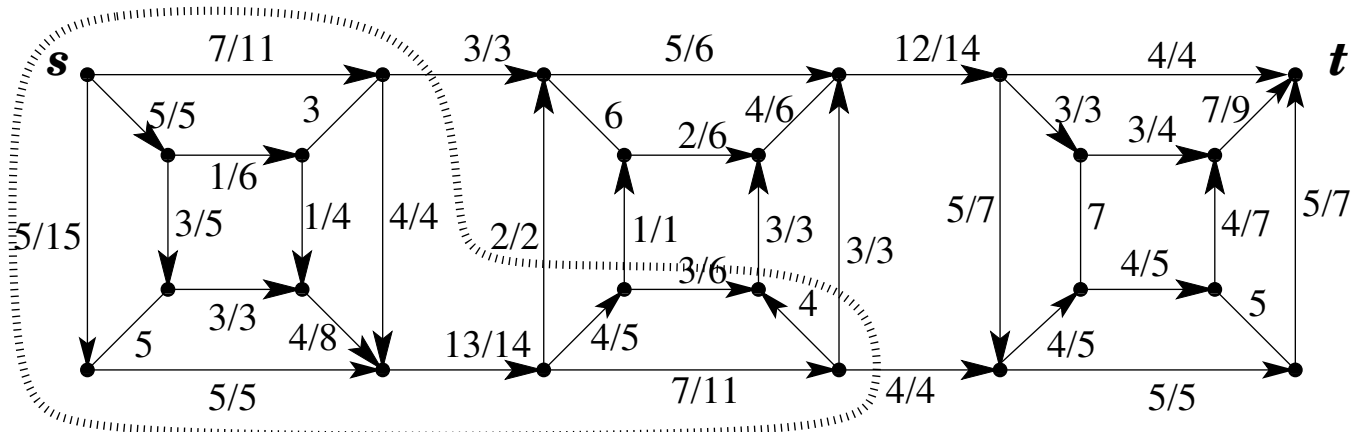
ln in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $lnph$.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s . Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo w , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo h , uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo l e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo u .



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t . Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s, t -taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (8 punti):

Si consideri il seguente problema di LP.

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \tag{7.2}$$

$$x_1 - x_2 \leq 1 \tag{7.3}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

- 7.1.(1pt) Risolvere col metodo grafico, specificando i valori di funzione obiettivo e variabili all'ottimo.
- 7.2.(1pt) Determinare le basi associate a ciascuno dei vertici della regione ammissibile.
- 7.3.(1pt) Specificare la sequenza delle basi visitate dal metodo del simplesso nel raggiungere la soluzione ottima (si scelga x_1 come prima variabile entrante).
- 7.4.(1pt) Determinare il valore dei costi ridotti relativi alle soluzioni di base associate ai seguenti vertici, espressi come intersezioni di linee in \mathbf{R}^2 : (a) $(\text{Eq. 7.1}) \cap (\text{Eq. 7.2})$; (b) $((\text{Eq. 7.1}) \cap (\text{Eq. 7.3}))$, dove (Eq. i) è l'equazione ottenuta convertendo la disuguaglianza (i) in eguaglianza (sostituendo \leq con $=$).
- 7.5.(1pt) Si verifichi che l'opposto del vettore gradiente della funzione obiettivo può essere espresso come combinazione lineare non-negativa dei gradienti per i vincoli attivi solo nel vertice ottimo (tenere presente che, dacché il problema è di massimizzazione, i vincoli debbono essere tutti espressi in forma \leq , ad esempio, $x_1 \geq 0$ dovrebbe essere riscritto come $-x_1 \leq 0$).
- 7.6.(1pt) Specificare per quali valori del termine noto nel vincolo (7.1) la base ottima non cambia.
- 7.7.(1pt) Dire per quali valori dei coefficienti della funzione obiettivo il vertice ottimo è $((x_1 = 0) \cap (\text{Eq. 7.2}))$.
- 7.8.(1pt) Per quali valori del coefficiente di x_1 nella funzione obiettivo si presenta più di una soluzione ottima?

svolgimento.

Questo esercizio è stato riadattato da un esercizio proposto dal Prof. Marco Trubian del Politecnico di Milano, che ringraziamo prima di partire con la correzione.

- 7.1.(1pt) The equations associated to the constraints (7.1), (7.2), (7.3), are:

$$2x_1 + x_2 = 4, i.e., x_2 = 4 - 2x_1 \quad (\text{Eq. 7.1})$$

$$-2x_1 + x_2 = 2, i.e., x_2 = 2 + 2x_1 \quad (\text{Eq. 7.2})$$

$$x_1 - x_2 = 1, i.e., x_2 = -1 + x_1 \quad (\text{Eq. 7.3})$$

which we draw as lines in the Cartesian plane x_1, x_2 . The objective function may be represented by the parametric line family $x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + q$. The feasible polyhedron is $PQROS$ is drawn. The optimal solution is in vertex $P = (12, 3)$, on Eq. (7.1) \cap Eq. (7.2), and the value of the objective in that point is 15.

- 7.2.(1pt) The problem is written in standard form by introducing the 3 slack variables s_1, s_2, s_3 for the 3 corresponding constraints. Let $x = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)^T$, $c = (3, 2, 0, 0, 0)$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T = (4, 2, 1)^T$ and

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) = (A|I).$$

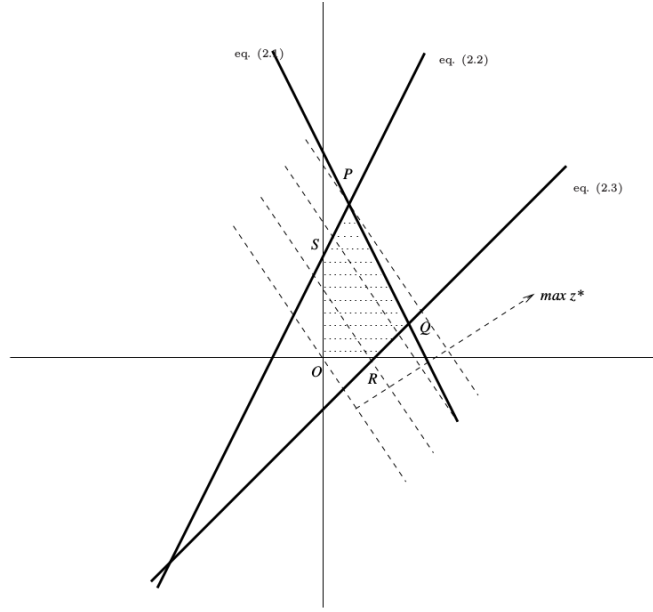


Figura 5: The feasible polyhedron.

The problem in standard form is:

$$\begin{aligned} \max_{x'} \quad & c'x' \\ \text{s.t.} \quad & A'x' = b \\ & x' \geq 0 \end{aligned}$$

Its basic solutions are all non-degenerate and 1,1-correspond to the following vertices

Vertex P: $x_N = (s_1, s_2) = (0, 0)$, hence $x_B = (x_1, x_2, s_3)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vertex Q: $x_N = (s_1, s_3) = (0, 0)$, hence $x_B = (x_1, x_2, s_2)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertex R: $x_N = (x_2, s_3) = (0, 0)$, hence $x_B = (x_1, s_1, s_2)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vertex O: $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$, hence $x_B = (s_1, s_2, s_3)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vertex S: $x_N = (x_1, s_2) = (0, 0)$, hence $x_B = (x_2, s_1, s_3)$ and

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.3.(1pt) Since $b \geq 0$, i.e., the problem had admissible origin, we can take the set of slack variables as our initial basic variables. Correspondingly, the nonbasic variables x_1, x_2 are set to 0, and the vertex corresponding to this initial feasible basis is vertex O). Let x_h be the variables which enters the basis. In order to find the exiting variable, we compute $\theta = \min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i,h}} : i \in \{1, 2, 3\}, \bar{a}_{i,h} > 0 \right\}$, where $\bar{a}_{i,h}$ is the i -th element of the h -th column in the matrix $B^{-1}N$, and \bar{b}_i is the i -th element of $B^{-1}b$. The text of the problem tells us to use $h = 1$. Since $-2 < 0$ the element $\frac{\bar{b}_2}{\bar{a}_{2,1}}$ is not taken into account, whence $\theta = \min\{4/2, 1/1\} = 1 = \frac{\bar{b}_3}{\bar{a}_{3,1}}$. As a result, the index of the variable exiting the basis is 3, i.e., the third variable of the current basis, which is s_3 , pivots out of the basis. In this way, the first visited vertex is R , corresponding to the basis (x_1, s_1, s_2) . The subsequent vertices visited by the simplex algorithm are Q and then P , as encountered moving along the border of the polygon comprising the feasible region. In P the simplex method stops since P offers an optimal solution.

7.4.(1pt) The vertex in $(\text{Eq. (7.1)} \cap \text{Eq. (7.2)})$ is P and the vertex in $(\text{Eq. (7.1)} \cap \text{Eq. (7.3)})$ is Q . The reduced costs are given by the equation $\bar{c}^T = c' - c'B^{-1}A'$, where the reduced costs for the basic variables are equal to 0 and those for the nonbasic variables may be nonzero: we want to determine $\bar{c}_N^T = c'_N - c'B^{-1}N$. In vertex P , where matrices B and N are as listed in the previous point of the exercise, we get

$$B^{-1}N = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Since $c'_B = (3, 2, 0)$ and $c'_N = (0, 0)$, we have $\bar{c}_N = (-7/4, -1/4)$. Since both values are smaller than 0, the basis in P is optimal. In vertex Q , using the corresponding matrices B and N listed in the previous point of the exercise, we get

$$B^{-1}N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Since $c'_B = (3, 2, 0)$, we have $\bar{c}_N = (-5/3, 1/3)$. This tells us that Q is not an optimal solution.

7.5.(1pt) The opposite of objective function gradient is a conic combination of the active constraint gradients only in an optimal point. In other words, if all the improving directions are infeasible, then the vertex is optimum. In this instance, the optimal vertex is $P = (12, 3)$. The objective gradient is $\nabla f = (3, 2)$ (constant for each x_1, x_2). The constraints which are active in P are (Eq. 7.1) and (Eq. 7.2), with gradients $(2, 1)$ and $(-2, 1)$. We solve the system

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

and verify that $\lambda_1 \geq 0$ and $\lambda_2 \geq 0$. The solution of the system is $\lambda_1 = 7/4$ and $\lambda_2 = 1/4$. Since both are strictly positive, the condition is verified for the optimal vertex P (see the figure).

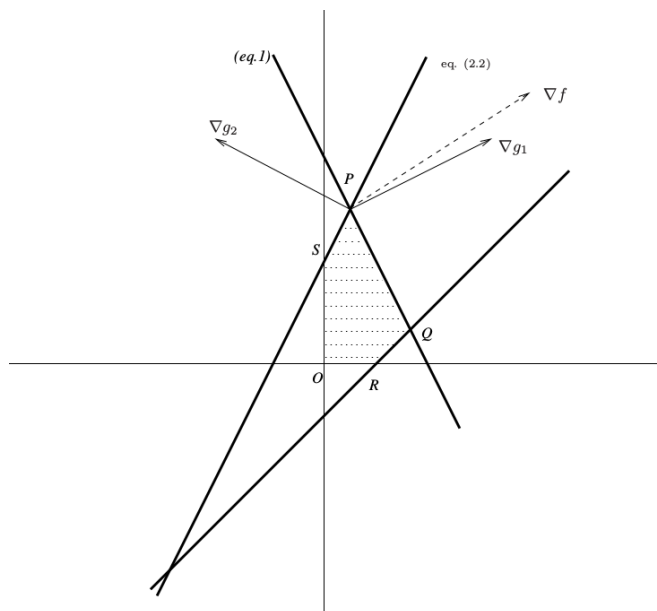


Figure 6: Optimality at P : the vector ∇f is in the cone generated by ∇g_1 and ∇g_2 , where $g_1(x) \leq 4$ is (7.1) and $g_2(x) \leq 2$ is (7.2).

We now check that the objective function gradient is not a conic combination of the active constraint gradients in the non-optimal vertices Q, R, O, S .

Vertex Q Active constraints (7.1), (7.3) with gradients $(2, 1)$ and $(1, -1)$. We get $\lambda_1 = 5/3$ and $\lambda_2 = -1/3 < 0$.

Vertex R Active constraints (7.3), $-x_2 \leq 0$ with gradients $(1, -1)$ and $(0, -1)$. We get $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -5 < 0$.

Vertex O Active constraints $-x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$ with gradients $(-1, 0)$ and $(0, -1)$. We get $\lambda_1 = -3 < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$.

Vertex S Active constraints $-x_1 \leq 0$, (7.2) with gradients $(-1, 0)$ and $(-2, 1)$. We get $\lambda_1 = -7 < 0$, $\lambda_2 = 2$.

7.6.(1pt) By inspection, for $b_1 \mapsto \infty$ and $b_1 \mapsto S_y = 2$ the optimal basis does not change (it remains feasible, optimal, and non-degenerate). When $b_1 = 2$ the optimal basis computed above remains feasible and optimal, but becomes degenerate. For $0 < b_1 < 2$ we get $x_1 = 0$, which therefore exits the basis (s_2 enters it, since (7.2) ceases to be active). For $b_1 = 0$ there is only one feasible point $(0, 0)$ and for $b_1 < 0$ the feasible region is empty.

7.7.(1pt) Consider the family of lines $x_2 = mx_1 + q$ where $m > 2$, shown in Fig. 9.5. By inspection, every objective function of the form $\max -mx_1 + x_2$ where $m > 2$ has optimum S on the polyhedron $PQROS$.

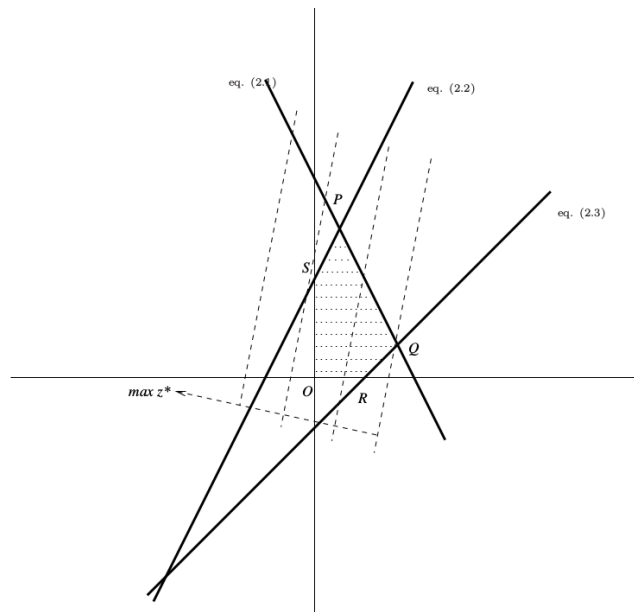


Figura 7: Objective function such that S is optimum.

7.8.(1pt) If the family of lines given by the objective, namely $c_1x_1 + 2x_2 = q$, is parallel to one of the sides of the polyhedron, and its optimization direction is towards the outside of the polyhedron (relative to the side to which it is parallel) then there are multiple optimal solutions. For $c_1 = 4$ we get $x_2 = -2x_1 + 2q$, which is parallel to Eq. (7.1). For $c_1 = -4$ we get $x_2 = 2x_1 + 2q$, which is parallel to (7.2). For $c_1 = 0$ we get $x_2 = 2q$, which is parallel to the $x_1 = 0$ edge: this choice is not acceptable, however, because for increasing q , x_2 decreases, so the maximization direction is towards the semispace $x_1 \geq 0$ which contains the polyhedron. For $c_1 = -2$ we have $x_2 = x_1 + 2q$, which is parallel to the QR side (but again has maximization direction towards the polyhedron).

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo. L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

<http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html>

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi

impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavorare per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquo dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello

successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.