Esame di Ricerca Operativa - 27 settembre 2017
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: 66, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (19 punti):
Sono il banco e metto un euro nel piatto davanti a me. Un giocatore è attratto, si siede, e mette anche lui un euro nel piatto per partecipare al gioco così organizzato: sulla fronte del giocatore viene posta una carta in modo che lui non possa vederla; la carta ha il 50% di probabilità di essere rossa ed il 50% di probabilità di essere blu. Vista la carta, il banco può scegliere di rivelarne il colore: se blu allora il giocatore si aggiudica il piatto, se rossa il piatto và al banco. In alternativa, il banco può scegliere di aggiungere altri k euro al piatto, dove k è un valore positivo fissato nelle regole del gioco. In questo secondo caso, il giocatore può scegliere tra due opzioni:

lascio uscire dal gioco lasciando il piatto al banco e rinunciando a vedere rivelato il colore della carta;

vedo aggiungere k euro al piatto e andare a vedere il colore della carta: se la carta è blu l'intero piatto và al giocatore, altrimenti esso và al banco.

(2pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Puoi dire da subito che il valore del gioco è nullo, oppure non-positivo o non-negativo per il banco? Individuare un argomento chiaro e coinciso a sostegno della tua affermazione.
(1pt) Elencare, descrivendole compiutamente, le due strategie pure del giocatore.
(1pt) Elencare, descrivendole compiutamente, le quattro strategie pure del banco.
(1pt) Il gioco prevede due scenari (blu e rosso). Compilare le tabelle dei payoff (una cella per ogni coppia di strategie pure, di banco e di giocatore) per ciascuno di questi due scenari.
(1pt) Compilare la tabella dei valori attesi di payoff quando lo scenario sia inteso come variabile aleatoria ancora da determinarsi (una terza tabella immediatamente ricavabile dalle due precedenti, e della stessa dimensionalità).
(2pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Riesci a proporre qualche politica cui uno dei due attori possa attenersi senza danno e che consenta di semplificare l'analisi del gioco? (Con riduzione e potatura dell'albero dei possibili svolgimenti del gioco). Quali delle strategie pure sopra elencate potrebbero essere quindi ignorate?
(1pt) Determina il valore del gioco per $k = 2$.
(1pt) Fornire la strategia ottima del banco per $k = 2$.
(1pt) Fornire la strategia ottima del giocatore per $k = 2$.
(4pt) (Opzionale, puoi procedere anche senza). Formula come un problema di PL la determinazione del valore del gioco e di una strategia mista ottima per il banco per k generico.
(1pt) Determina il valore del gioco per k generico.
(1pt) Fornire la strategia ottima del banco per k generico.
(2pt) Fornire la strategia ottima del giocatore per k generico.

svolgimento. Ho concepito questo esercizio come un'esempio minimale sul ruolo e valore del bluff nei giochi ad informazione incompleta e su come l'informazione asimmetrica possa costituire vantaggio competitivo. Lo percorriamo come da direttive nel testo fruendo dell'esercitazione guidata da esso proposta.

(2pt) Il valore del gioco è certamente non-negativo per il banco. Si consideri infatti il sottogioco nel quale al banco è preclusa la possibilità di rilanciare ponendo altri k euro nel piatto. In questo sotto-gioco il colore della carta viene sempre rivelato ed il giocatore non è chiamato a compiere alcuna scelta. Porrà sempre un singolo euro di buio nel piatto, e vincerà 2 euro il 50% delle volte. Il sottogioco è quindi di valore nullo (di fatto, a tutti gli effetti, il sottogioco è del tutto simmetrico). Nel gioco più ricco che siamo chiamati ad analizzare il banco ha solamente delle opzioni in più; pertanto il suo valore è non-negativo.

(1pt) Il giocatore ha a disposizione le seguenti strategie pure:

A. quando il banco rilancia, vedere sempre aggiungendo i k euro sul piatto;
B. quando il banco rilancia, abbandonare sempre.

(1pt) Il banco ha a disposizione le seguenti strategie pure:

1. rilancia qualsiasi sia il colore della carte;
2. rilancia solo se la carta è rossa, altrimenti rivela il colore;
3. rilancia solo se la carta è blu, altrimenti rivela il colore;
4. non rilanciare mai, rivela sempre il colore.

Individuare le strategie pure ha richiesto di sviluppare una visione dettagliata e completa su tutti i possibili svolgimenti del gioco (che esplodono ad albero). Questo primo passo è sulla strada per ottenere la formulazione di PL, e vi ha già meritato di fatto qualche punto.

(1pt) Il gioco prevede due possibili scenari, ciascuno ha il 50% di probabilità di presentarsi, e determina i valori di payoff sulle coppie di strategie pure (i, X), $i = 1, 2, 3, 4$, $X = A, B$ dettagliate sopra come da seguenti tabelle:

Scenario rosso		
p. strat.	A	B
1	$1+k$	1
2	$1+k$	1
3	1	1
4	1	1

Scenario blu		
p. strat.	A	B
1	$-1-k$	1
2	-1	-1
3	$-1-k$	1
4	-1	-1

Scenario aleatorio		
p. strat.	A	B
1	0	1
2	$k/2$	0
3	$-k/2$	1
4	0	0

Tabella 1: Tabelle dei payoff sui due scenari rosso e blu, e loro media quando lo scenario sia ancora ignoto.

Compilare con calma le tabelle di payoff sulle coppie di strategie fronteggiantesi nei possibili scenari potrà sembrare tedioso, ma è sulla strada per ottenere la formulazione di PL, e vi ha già meritato di fatto qualche punto.

(2pt) Al banco non comporta danno (e di fatto conviene) attenersi alla seguente politica:

rilanciare sempre quando la carta è rossa.

Risulterebbe pertanto computazionalmente conveniente analizzare il gioco in cui, per regola, il banco rilancia sempre in caso di carta rossa. Con questa modifica, cadono le strategie pure 3 e 4 del banco. In effetti, è facile verificare che in ciascuna delle 3 sottotabelle in Tabella 1, la riga 3 è dominata dalla riga 1 e la riga 4 è dominata dalla riga 2. In verità, per legittimare questa semplificazione, sarebbe stato sufficiente che la dominazione si presentasse sulla terza sottotabella, ma averla su tutte le tabelle potrà aver aiutato nell'intuire ed individuare questa politica e relativa semplificazione del gioco.

A valle di questa semplificazione, con due sole strategie anche per il banco, si perverrebbe alle seguenti tabelle:

Scenario rosso		
p. strat.	A	B
1	$1+k$	1
2	$1+k$	1

Scenario blu		
p. strat.	A	B
1	$-1-k$	1
2	-1	-1

Scenario aleatorio		
p. strat.	A	B
1	0	1
2	$k/2$	0

Tabella 2: Tabelle dei payoff sui due scenari rosso e blu, e loro media quando lo scenario sia ancora ignoto.

(1+1+1=3pt) Nel caso in cui $k = 2$, dopo aver eliminato le strategia dominate, siamo di fronte al gioco a somma zero con la seguente tabella di pay-off:

Scenario aleatorio		
p. strat.	A	B
1	0	1
2	1	0

Il valore di tale gioco è 1/2. Il banco si assicura di ricavare almeno 1/2 in valore atteso applicando la sua strategia mista ottima che consta nel lanciare una moneta nascosta ad ogni match, per adottare la strategia pura 1 nel caso esca testa (probabilità 1/2) e la strategia pura 2 altrimenti. L'esito del lancio della moneta è tenuto nascosto al giocatore sedutosi al tavolo finchè non abbia consumato le sue scelte. Per abbracciare un tono esemplificativo, su 4 match 2 saranno con carta rossa, ed il banco rilancia in entrambi. Il banco rilancia anche in un match con carta blu ma rinuncia a rilanciare nel quarto di questi 4 match, sempre con carta blu. Su questo ultimo match il giocatore non è chiamato a compiere nessuna scelta, semplicemente intasca 1 euro. Sugli altri 3 match è diviso tra il rassegnarsi a lasciare e perdere 1 euro di buio su ciascuno di questi match e l'arrischiare di perdere ulteriori $k = 2$ euro (rischio che si concretizzerebbe 2 volte su 3) per andare a guadagnare $k+1 = 3$ euro invece di perderne 1 (guadagno netto di 4 euro che si realizza 1 volta su 3). È chiaro che le due scelte si equivalgono dal punto di vista del valore atteso, comunque giochi il giocatore, in media, su 4 match vince 1 euro e ne perde 3. Questo non vuole dire che ogni strategia mista del giocatore sia ottima, ossia gli garantisca di non perdere più di 1/2 euro in media. L'unica strategia mista ottima del giocatore consiste nel lanciare una moneta ad ogni match, anche questa perfettamente bilanciata e nascosta, per adottare la strategia pura A nel caso esca testa (probabilità 1/2) e la strategia pura B nel caso esca croce. Si può parimenti verificare che questa strategia mista non lascia margini di ulteriori guadagni al banco oltre il valore del gioco. Per altro, il gioco a somma zero descritto dalla tabella di pay-off 2×3 cui siamo perventi è perfettamente simmetrico, quindi, tirata sull'astratto, inutile rifare le stesse cose due volte.

(4pt) Per pervenire ad una formulazione di PL del problema di determinare una strategia mista ottima per il banco (e relativo valore) basta introdurre le variabili $x \in [0,1]^{1,2,3,4}$ (con $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$) che codificano appunto la strategia mista del banco, ossia una distribuzione di probabilità sulle strategie pure. Tuttavia, nel condurre la correzione di questo punto, vogliamo esulare dal mero svolgimento dell'esercizio come funzionale al momento dell'esame per dare un accenno alla teoria dei giochi a somma zero e collocare in relazione ad essa lo svolgimanto stesso.

Per questa ragione, in via del tutto provvisoria, introduciamo anche le variabili $y \in [0,1]^{A,B}$ (con $y_A + y_B = 1$) per codificare analogamente la strategia mista scelta dal giocatore. Per richiamare od illustrare con l'occasione la teoria dei giochi a somma zero, vorrei qui prima dare e transitare per una più ovvia (ma in principio computazionalmente costosa) formulazione quadratica di tipo $\max - \min$:

$$\begin{aligned}
&\max_{x} \min_{y(x)} x_2 y_A - x_3 y_A + x_1 y_B + x_3 y_B \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
&y_A + y_B = 1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
&y_A, y_B \geq 0
\end{aligned}$$

Presa alla lettera, la formulazione chiede di trovare quella strategia mista per il banco che, anche ove fissata, lasci minor margine di guadagno possibile al giocatore sedutosi. In realtà è fatto noto che, qualora sostituissimo $\max_x \min_{y(x)}$ con $\min_y \max_{x(y)}$ (ossia invertissimo l'ordine in cui le due parti prendono delle decisioni definitive e le comunicano alla parte avversa) il valore ottimo di questa formulazione non aumenterebbe, e quindi questo valore comune può essere a buona ragione considerato il valore del gioco. In questi giochi a somma zero, se un attore si attiene rigidamente ad una strategia ottima l'avversario non potrà comunque approfittarne.

Tornando alla formulazione $\max_x \min_{y(x)}$, si noti che quando la strategia mista x fosse fissata, allora la determinazione della y ottima diviene un problema di PL, con soluzioni ottime nei vertici, ossia sulle stategie pure A e B per y. Ne consegue pertanto anche da questa cornice teorica che il problema della determinazione del valore ottimo del gioco può essere visto come un problema di PL sulle sole variabili x, e dove ci si premunisca secondo il criterio del caso peggiore contro ogni eventualità di gioco di y tra le strategie pure.

Indicato con $GA(x_1, x_2; A)$ il guadagno atteso per il banco di un match svolto seguendo la strategia mista (x_1, x_2) dato per stabilito che il giocatore seduto al tavolo segua la strategia pura A, dalla terza tabella otteniamo $GA(x_1, x_2; A) = \frac{k}{2} x_2$.

Indicato con $GA(x_1, x_2; B)$ il guadagno atteso per il banco di un match svolto seguendo la strategia mista (x_1, x_2) dato per stabilito che il giocatore seduto al tavolo segua la strategia pura B, dalla terza tabella otteniamo $GA(x_1, x_2; B) = x_1$.

$$\begin{aligned}
&\max z \\
&z \leq GA(x_1, x_2; A) \\
&z \leq GA(x_1, x_2; B) \\
&x_1 + x_2 = 1. \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

ossia

$$\max z$$
$$z \leq \frac{k}{2} x_2$$
$$z \leq x_1$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

e questa è la formulazione di PL che modella il gioco.

(1+1+1=3pt) Nel caso di $k \geq 0$ generico, il valore del gioco è $\frac{k}{k+2}$. Il banco si assicura di ricavare almeno $\frac{k}{k+2}$ in valore atteso applicando la sua strategia mista ottima $(x_1, x_2) = (\frac{k}{k+2}, \frac{2}{k+2})$. Le descrizione più vivida di questa strategia data più sopra nel caso particolare di $k = 2$ estende bene al caso di k generico. In essa trova evidenza che il giocatore è condannato a perdere almeno $\frac{k}{k+2}$ euro in valore atteso. E di fatto questa sarà la sua perdita media di long run comunque egli giochi. Ma la strategia mista ottima del giocatore è comunque unica per ogni k, e se il banco realizza che egli ne segue un'altra, potrebbe approfittarne per incrementare il proprio guadagno atteso. La strategia ottima del giocatore può essere ottenuta o partendo dalla formulazione quadratica di tipo $\min_y \max_{x(y)}$ oppure andando direttamente a risolvere il problema duale del problema di PL visto sopra. Per seguire questa seconda e più diretta strada, riscriviamo prim ail primale:

$$\max z$$
$$z - \frac{k}{2} x_2 \leq 0$$
$$z - x_1 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 = 1.$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Quindi componiamo il duale, introducendo y_A, y_B, $y_=$ come moltiplicatori dei 3 vincoli.

$$\min y_=$$
$$y_A + y_B \geq 1.$$
$$y_= \geq y_B$$
$$y_= \geq \frac{k}{2} y_A$$
$$y_A, y_B \geq 0.$$

All'ottimo avremo $y_B = \frac{k}{2} y_A$ ed anche $1 = y_A + y_B = y_A + \frac{k}{2} y_A$, ossia $y_A = \frac{1}{1+k/2}$ e $y_B = \frac{k}{2+k}$. Il valore del gioco resta confermato a $y_= = y_B = \frac{k}{2+k}$, come ottenuto con la soluzione del problema primale, e questo vale a titolo di verifica. Per altro torna anche la verifica puntuale sul valore $k = 2$, e sono sensati e coerenti gli andamenti asintotici. In particolare, suona bene che $\lim_{k \mapsto \infty} \frac{k}{2+k} = 1^-$. In pratica, al crescere dell'entità del rilancio, crescono anche la tracotanza ($\lim_{k\mapsto\infty} x_1 = 1^-$) ed impunità ($\lim_{k\mapsto\infty} y_A = 0^+$) del banco, che piegano il giocatore a rinunciare sempre più al piatto senza andare a vedere il reale colore della carta poggiata in fronte. Eppure il giocatore fa bene a lasciarsi derubare delle sue carte poichè non si ha ciò che si è. È inoltre interessante osservare che se il banco rilanciasse proprio sempre, piuttosto che quasi sempre, allora il valore del gioco tornerebbe nullo. Con cinismo, potremmo chiamarlo il valore della magnanimità dei potenti. Caratteristica irrinunciabile di essa resta l'imprevedibilità.

Problema 2 (3+4+3+1+2=13 punti):

Un grafo $G = (V, E)$ viene fornito in input. Un sottoinsieme di archi $B \subseteq E$ è detto un bipartizer di G se il graf $G = (V, E \setminus B)$ ottenuto da G per rimozione degli archi in B è bipartito. Sorge il problema di computare un bipartizer B di G di cardinalità $|B|$ la più piccola possibile.

(3pt) Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) per questo problema. Ti è consentito impiegare un numero esponenziale di vincoli nella size di G (ad esempio un vincolo per ogni sottoinsieme di nodi di G, oppure per ogni ciclo o spanning tree di G).

(4pt) Proponi un modello di programmazione lineare intera (PLI) che impieghi un numero al più polinomiale di vincoli nella size di G.

(3pt) Dimostrare che il problema è NP-completo tramite una riduzione dal celebre problema NP-completo MAX-CUT. Nel problema MAX-CUT viene fornito in input un grafo $G = (V, E)$ e si richiede di trovare un taglio di G che ricomprenda il massimo numero di archi. Dato un insieme di nodi $X \subseteq V$, il taglio $\delta(X)$ è l'insieme di quegli archi con precisamente un estremo in X.

(1pt) Può esistere un modello di programmazione lineare (PL) che impieghi un numero al più polinomiale di variabili e di vincoli nella size di G? Giustificare la risposta.

(2pt) Può esistere un modello di programmazione lineare (PL) che impieghi un numero al più polinomiale di variabili ma senza limiti sul numero di vincoli? Giustificare la risposta.

svolgimento. (3pt) La prima cosa da fare è introdurre delle variabili che consentano di descrivere lo spazio delle scelte. Viene molto naturale pensare ad un set di variabili booleane $x \in \{0,1\}^E$ che costituiscano il vettore caratteristico del sottoinsieme B di E.

Dobbiamo però vincolare B ad essere un bipartizer di G.

Un primo modo di ottenere questo è richiedere che B abbia intersezione non nulla con ogni ciclo dispari di G. Si perviene al seguente modello:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e\in E} x_e \\
&\sum_{e\in C} x_e \geq 1 \qquad \text{per ogni ciclo dispari } C \subseteq E \text{ di } G \\
&x_e \in \{0,1\} \qquad \text{per ogni } e \in E.
\end{aligned}$$

Si noti che non esiste alcun upper bound polinomiale sul numero di vincoli di questa formulazione. È facile costruire una famiglia infinita di grafi G_n, $n \in \mathbb{N}$, dove G_n ha n nodi e $\Omega(2^n)$ cicli dispari.

(4pt) Forzare B ad essere un bipartizer significa chiedere che $(V, E \setminus B)$ sia bipartito. Nell'approccio precedente abbiamo utilizzato la buona caratterizzazione che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli dispari. Tuttavia è forse più diretto ragionare in positivo, dato che essere bipartiti è una NP-property per definizione, ossia vi è un certificato compatto dell'essere bipartito: la bicolorazione. Vogliamo risparmiare sui vincoli ma possiamo aggiungere variabili (ne impiegheremo comunque un numero al più polinomiale). Al set di variabili booleane $x \in \{0,1\}^E$ del vettore caratteristico di B potremmo affiancare un altro set di variabili booleane $y \in \{0,1\}^V$ atte a definire la bicolorazione. Dobbiamo quindi imporre dei vincoli che dicano che la bicolorazione funziona. In principio vorremmo imporre che $y_u + y_v = 1$ per ogni arco $uv \notin B$ (ossia con $x_{uv} = 0$). Introducendo i vincoli $y_u + y_v \geq 1 - x_{uv}$ già facciamo qualcosa senza rischire alcun danno. Ovviamente, in una bicolorazione valida gli estremi di un arco non possono nemmeno essere entrambi 1. Quindi dobbiamo prevedere anche $y_u + y_v \leq 1 + x_{uv}$, anche questo vincolo non lavora (e non può quindi fare danni) quando $x_{uv} = 1$. E quando $x_{uv} = 0$ la coppia di questi due vincoli implica proprio $y_u + y_v = 1$ come volevamo.

Si perviene al seguente modello:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in E} x_e \\
&y_u + y_v \geq 1 - x_{uv} \qquad \text{per ogni arco } uv \in E \\
&y_u + y_v \leq 1 + x_{uv} \qquad \text{per ogni arco } uv \in E \\
&x_e \in \{0,1\} \qquad \text{per ogni } e \in E \\
&y_v \in \{0,1\} \qquad \text{per ogni } v \in V.
\end{aligned}
$$

Questo modello è compatto, ossia prevede un numero al più polinomiale di variabili e vincoli.

(3pt) Dato un grafo $G = (V, E)$ con $n := |V|$ nodi e $m := |E|$ archi, si noti che $F = \delta(X)$ è un cut di G di almeno k archi se e solo se $E - F$ è un bipartizer di G di al più $m - k$ archi.

(1pt) Poichè esistono algoritmi polinomiali per la programmazione lineare, avere una formulazione di PL compatta per un certo problema implica che quel problema possa essere risolto in tempo polinomiale. Tuttavia, dalla domanda al punto precedente, sabbiamo che il notro problema è NP-completo e quindi esso non può ammettere una formulazione di PL compatta a meno del collasso P=NP.

(2pt) Se il problema ammettesse una formulazione di PL con un numero polinomiale di variabili $p(n)$, allora, per dimostrare l'ottimalità di una soluzione (ossia di un vertice del politopo) ci basterebbe esibire al più $p(n)$ vincoli indipendenti soddisfatti da quel vertice ad uguaglianza. Essi sono noti dover esistere per ogni soluzione ottima, infatti, in ogni soluzione di base, le variabili in base sono quante la dimensionalità del problema, ossia al più quante le variabili nella formulazione, prima di introdurre le variabili di slack per ciascuna diseguaglianza. Avremmo quindi un certificato polinomiale e verificabile polinomialmente dell'ottimalita' di una soluzione ottima: Mago Merlino dovrebbe solo indicarci gli al più $p(n)$ vincoli che da soli determinano l'ottimalità, ed il lavoro di verifica di Re Artù ammonterebbe alla soluzione di un problema di PL con al più $p(n)$ variabili e vincoli. Quindi il problema sarebbe in coNP. Poichè sappiamo che il nostro problema è NP-completo, ossia ogni problema in NP può essere a lui ridotto, se esso fosse davvero in coNP allora potrei certificare il NO per ogni problema in NP, trasformandone prima l'istanza di interesse in un'istanza di GRAPH-BIPARTIZER e fornendo quindi il certificato di NO per questa seconda istanza che fedelmente rappresenta quella di interesse. Pertanto, se il nostro problema ammettesse una tale formulazione di PL, ricadrebbe in coNP, ed allora si avrebbe NP$\subseteq$ coNP poichè esso è NP-completo. In definitiva, data la perfetta simmetria tra NP e coNP, si avrebbe il collasso NP=coNP.

Problema 3 (15 punti):

Si consideri la soluzione $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 14$, $x_5 = 6$, $x_6 = 5$ del seguente problema.

$$\max\ 12x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + x_5 + 6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq 10 \\ x_3 + x_4 & \leq 14 \\ x_5 + x_6 & \leq 12 \\ x_1 + x_3 + x_5 & \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 & \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

3.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

3.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

3.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

3.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

3.5.**(2pt)** La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

3.6.**(2pt)** Costruire un piccolo problema della stessa tipologia e tale che: (1) la soluzione primale x fornita sia ammissibile; (2) le condizioni agli scarti complementari risultino contraddittorie, ossia non esista alcuna soluzione duale y che le soddisfi in riferimento alla soluzione primale x fornita.

3.7.**(2pt)** Costruire un piccolo problema della stessa tipologia e tale che: (1) la soluzione primale fornita sia ammissibile; (2) le condizioni agli scarti complementari portino a ricostruire univocamente la soluzione duale y ad essa associata; (3) le verifiche finali prese su y portino a concludere che la soluzione primale fornita **non** è ottima.

3.8. **(2pt)** Con riferimento all'esempio da te proposto al punto 3.7 immediatamente precedente, andare a vedere ed intuire **come** la soluzione duale y indichi quale variabile del primale portare in base per ottenere una nuova soluzione primale di valore strettamente migliore di quella fornita.

3.9. **(3pt)** Congetturare la forma di una regola generale (nel caso di soluzione duale y univocamente ricostruita dalle condizioni degli scari complementari) per ottenere precisa indicazione su una variabile del primale da portare in base per ottenere miglioramento in un solo pivot, ove la soluzione non sia già ottima.

svolgimento.

(1pt) Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (0) + (10) & & & = \mathbf{10} \leq 10 \\ & (14) + (0) & & = \mathbf{14} \leq 14 \\ & & (6) + (5) & = 11 \leq 12 \\ (0) \quad + (14) & \quad + (6) & & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (10) & \quad + (0) & \quad + (5) & = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

(1pt) Il problema duale è il seguente.

$$\min \; 10\,y_1 + 14\,y_2 + 12\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 12 \\ y_1 + y_5 \geq 20 \\ y_2 + y_4 \geq 10 \\ y_2 + y_5 \geq 10 \\ y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_3 + y_5 \geq 6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

(1pt) Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_3 = 0$ poichè il vincolo 3 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_2, x_3, x_5, x_6 > 0$, i vincoli 2,3,5 e 6 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} y_1 + y_5 = 20 \\ y_2 + y_4 = 10 \\ y_4 = 1 \\ + y_5 = 6 \end{cases}$$

(1pt) Risolvendo tale sistema lineare si viene a scoprire che il duale ammette un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(14, 9, 0, 1, 6)$.

(2pt) Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 1 e 4).

Poichè la semplice verifica (per sostituzione) ha esito affermativo, possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima**.

(2pt) Per realizzare un problema di questa tipologia e con le proprietà richieste, dobbiamo proporre un problema di PL (meglio semplice e piccolo, e diamolo in forma standard) con una soluzione ammissibile non di base. Infatti, per ogni soluzione di base (ammissibile o meno) esiste una soluzione duale che soddisfi con essa le condizioni degli scarti complementari.

Proporrei

$$\max\ x_1 \quad \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

corredato con la soluzione ammissibile e non-di-base $x = 1$. Questo dovrebbe funzionare.

Per puro scrupolo, verifichiamolo. In questo caso, il problema duale è:

$$\min\ y \quad \begin{cases} y \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Dagli scarti complementari, abbiamo due condizioni sulla soluzione duale y:

1. poichè il vincolo primale non è soddisfatto ad eguaglianza allora $y = 0$.
2. poichè $x > 0$ allora il vincolo duale deve essere soddisfatto ad eguaglianza, ossia $y = 1$.

La contraddizione è evidente.

(2pt) Per realizzare un problema di questa tipologia e con le proprietà richieste, dobbiamo proporre un problema di PL (meglio semplice e piccolo, e diamolo in forma standard) e corredarlo con una soluzione primale b che sia:

1. di base, così che le condizioni agli scarti complementari non siano contraddittorie ed esista almeno una soluzione duale y complementare ad x;

2. non-degenere, così vi sarà un'unica soluzione duale y complementare a b.

3. non-ottima, poichè vogliamo che alla fine dello svolgimento dell'esercizio sorgano dei problemi con l'ammissibilità della soluzione duale y. Sappiamo infatti che se la soluzione duale y ricostruita dagli scarti complementari fosse ammissibile allora y costituirebbe certificato di ottimalità di x. (In un certo senso con questo esercizio andiamo ad esplorare il converso di questo fatto importante.) Le prime due condizioni non guardano minimamente alla funzione obiettivo, e, una volta ottemperato ad esse, potremo sempre dara al nostro problema primale una funzione obiettivo in virtù della quale la soluzione b non sia ottima (a meno che essa non sia unica).

Dovrebbe bastare un problema di due sole variabili tipo il seguente

$$\max\ 2x_1 + x_2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione di base non-degenere $x_1 = 0, x_2 = 1$ è non-ottima.

(3pt) In questo caso, il problema duale è:

$$\min\ y$$
$$\begin{cases} y & \geq & 2 \\ y & \geq & 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e l'unica condizione agli scarti complementari che abbiamo (implicata da $x_2 > 0$) è che $y = 1$. Questa soluzione y non è ammissibile per il problema duale in quanto viola il vincolo duale $y \geq 2$. È come se il duale ci dicesse che ci siamo scordati di questo vincolo. Questo è il vincolo che al momento della compilazione del problema duale voleva esprimenre la dominanza a livello dei coefficienti della variabile x_1. Attualmente $x_1 = 0$ e invece x_1 va caricata portandola in base. Dobbiamo pertanto fare pivot su x_1 entrante. Con questo ci siamo assicurati i **(2pt)** qui in palio.

Quando si è chiamati ad intuire e congetturare, è però naturale guardarsi un po' in giro. Sorge ad esempio naturale la domanda: Ma quale variabile eleggere come uscente? In questo caso non abbiamo alternative, ma, anche in problemi con più variabili, se siamo seduti su una soluzione di base non-degenere, allora sappiamo che il miglioramento deve attenersi con un solo pivot, ossia basta guessare una variabile attualmente in base che vada portata fuori base (ed il cui valore vada reso quindi nullo, anche se potrebbe non essere sola in questo se la nuova e migliore soluzione di base dovesse essere degenere); in ogni caso, il range di possibilità per questo guessing è di size polinomiale e ciascuna di queste possibilità può essere sondata in tempo polinomiale.

Ma davvero ci viene indicata solo la variabile entrante e non otteniamo alcuna informazione su quella uscente? L'esempio scelto potrebbe essere troppo piccolo per parlare. Progettiamoci un esempio più grande, con 3 variabili:

$$\max\ 2x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + & x_2 + & x_3 & \leq & 2 \\ & & x_3 & \leq & 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione di base non-degenere $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$ è non-ottima, andrebbe infatti caricato sulla x_2 ma senza togliere dalla x_3. Vediamo se dagli scarti complementari otteniamo informazioni che ci consentano di distinguere tra x_2 ed x_3.

Il duale è

$$\min\ 2y_1 + y_2$$
$$\begin{cases} y_1 - & y_2 & \geq & 2 \\ y_1 & & \geq & 1 \\ y_1 + & y_2 + & \geq & 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari abbiamo $y_1 = 1$ e $y_1 + y_2 = 2$, ossia $y_2 = 1$. La soluzione $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ viola il primo vincolo ($y_1 - y_2 \geq 2$), quello associato alla variabile

x_1 che di nuovo và caricata. Non sembra di ottenere informazioni sul fatto che a dover essere espulsa dalla base sia la x_2 piuttosto che la x_3.

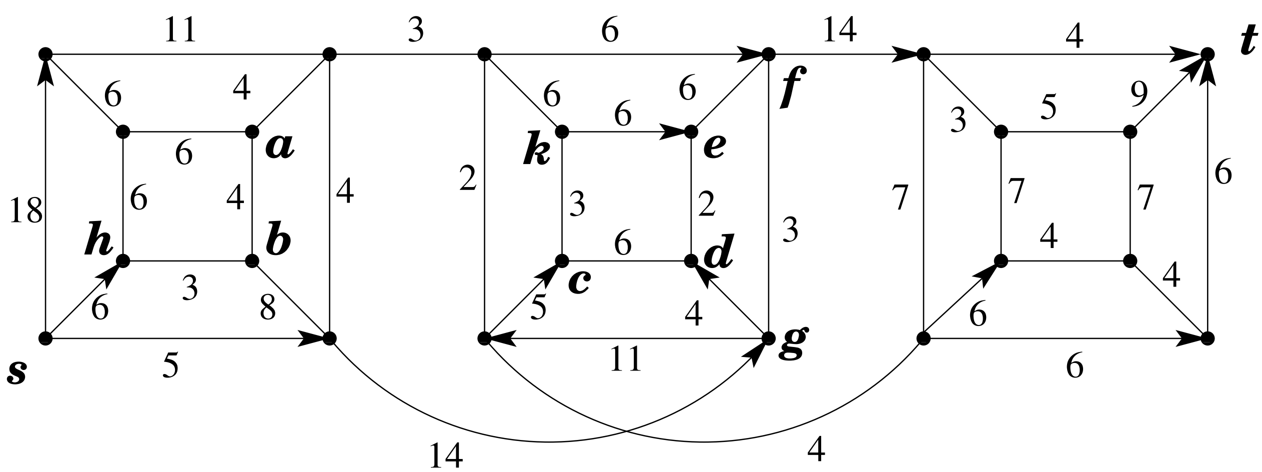
(3pt) Ma torniamo a quanto espressamente richiesto dall'esercizio e andiamo ad enunciare/congetturare in generalità come la ragione di inammissibilità della y ci indichi quale variabile debba essere fatta entrare. Ci sono due modi diversi in cui una soluzione y per il problema duale che rispetti le condizioni degli scarti complementari con la soluzione primale di base fornita può manifestarsi inammissibile:

viola i vincoli di non-negatività Se una delle variabili y è settata su un valore negativo, allora il corrispondente vincolo del primale viene utilizzato nel verso sbagliato, ed è necessariamente un vincolo tight dato che il valore di y non è evidentemente stato imposto a zero dalle condizioni degli scarti complementari utilizzate. Quindi è attualmente nulla, e quindi fuori base (abbiamo sempre l'ipotesi che la soluzione primale fornita sia non-degenere), la variabile di slack di tale vincolo. Congetturerei essere questa la variabile da portare in base.

viola i vincoli propri del duale È il caso che avevamo visto sopra nell'esempio. Se un vincolo del duale non è rispettato da y, allora il costo ridotto della corrispondente variabile primale entro la soluzione di base primale fornita è positivo e tale variabile spinge per entrare in base.

Potresti ora provare a costruire un secondo esempio che serva a corroborare quanto sopra congetturato. L'esplorazione libera è un'ottima fonte di esercizi.

Problema 4 (15 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

4.2.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

4.3.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: ab, cd, ef.

4.5.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

4.6.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

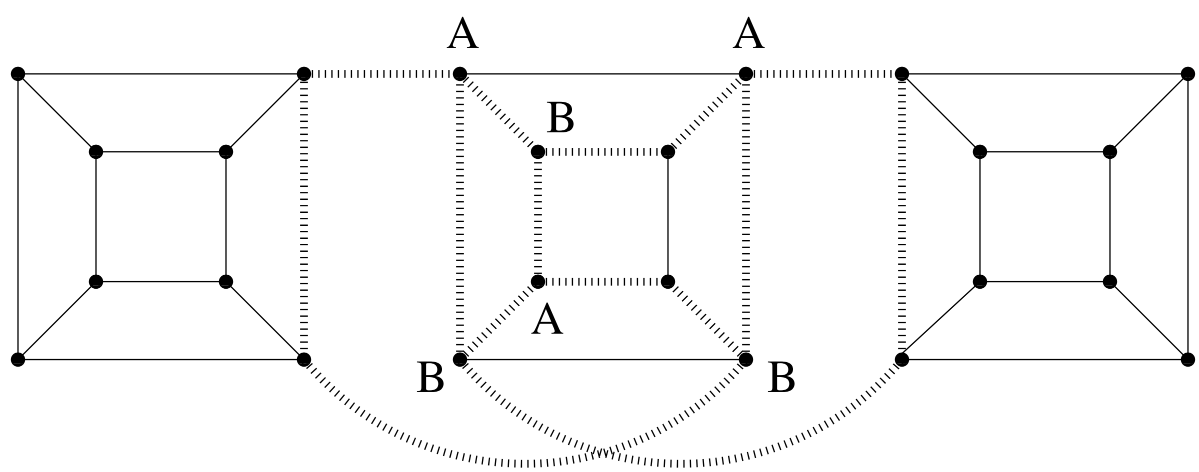
4.7.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

4.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

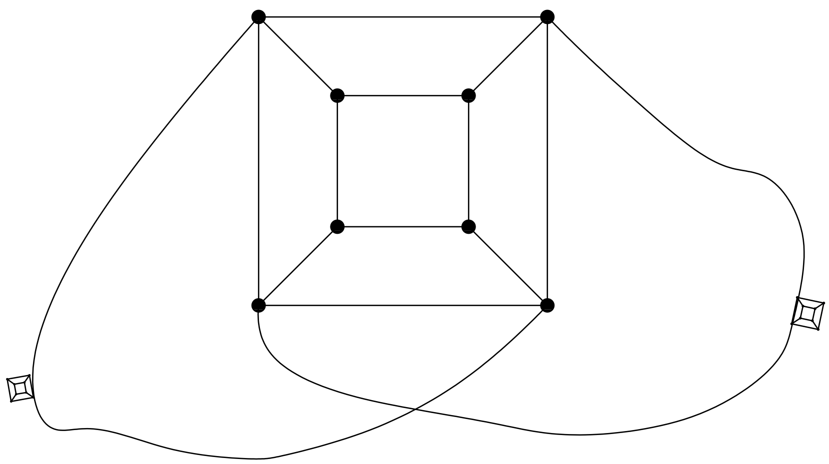
4.9.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato **(1pt)** del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato **(1pt)** del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.

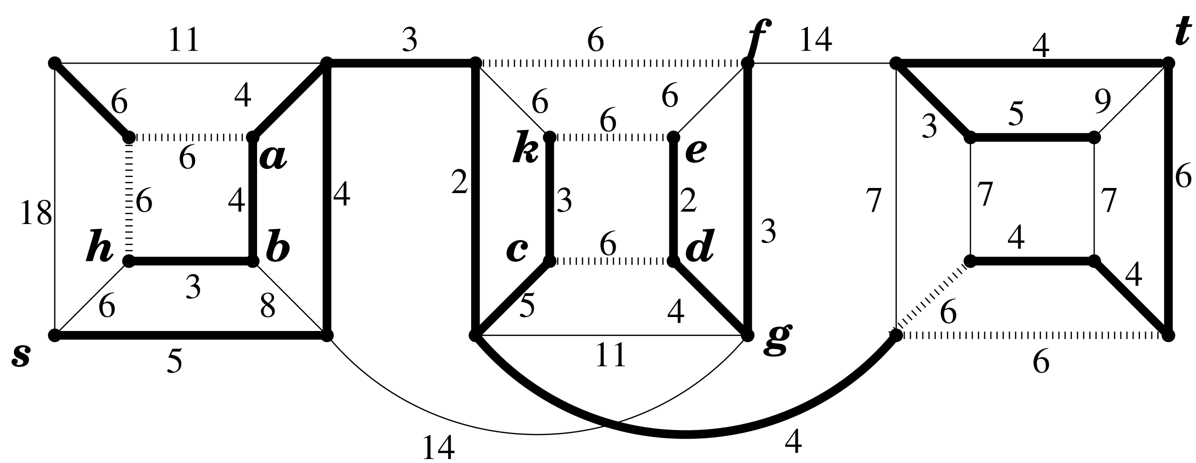


Nella ricerca di tale certificato (o di un planar embedding), poteva sicuramente aiutare la considerazione che G è planare se e solo se lo è anche il seguente grafo G'.



Tale grafo non sembra planare, e tuttavia non può contenere una suddivisione di K_5 visto che ha solo 4 nodi di grado almeno 4. Si era quindi indotti alla ricerca di una suddivisione di $K_{3,3}$. Una volta trovata una suddivisione di $K_{3,3}$ in G' era facile derivarne una suddivisione di $K_{3,3}$ in G.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 12 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra, più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.

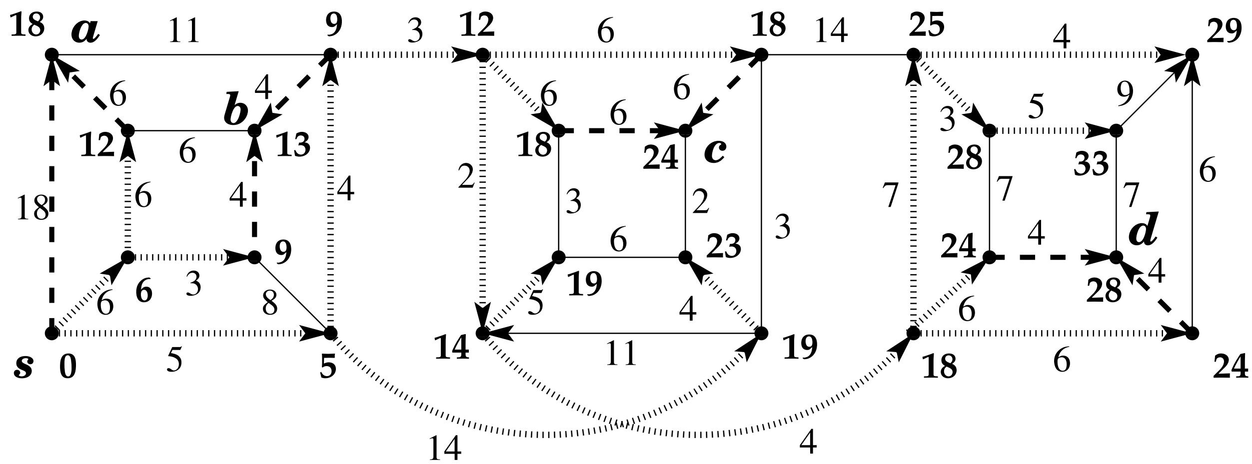


- ab in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi h e b da tutti gli altri nodi del grafo;

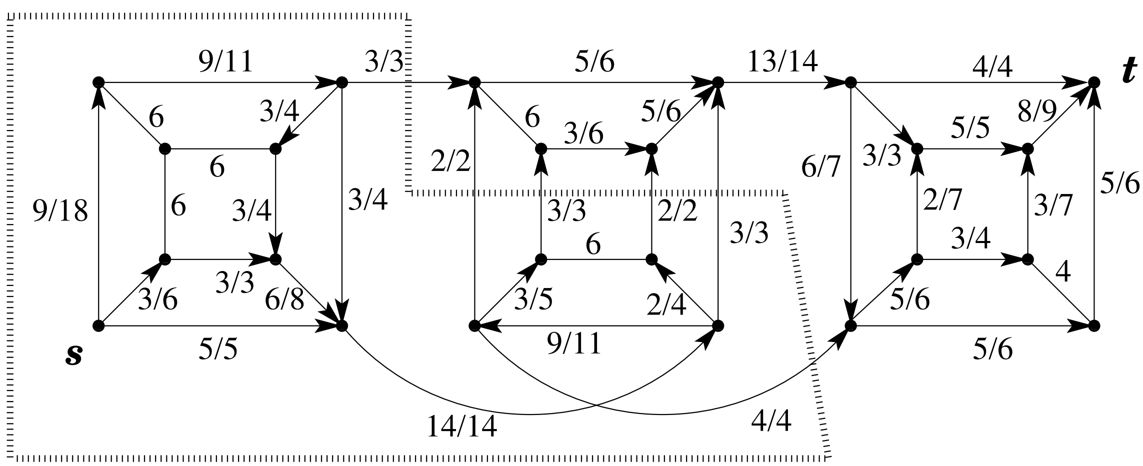
- cd in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi e, d, f, e g dagli altri nodi del grafo, ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $edck$;

- ef in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $efgd$.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^4 = 16$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 19 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo a, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo b, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo c e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo d.

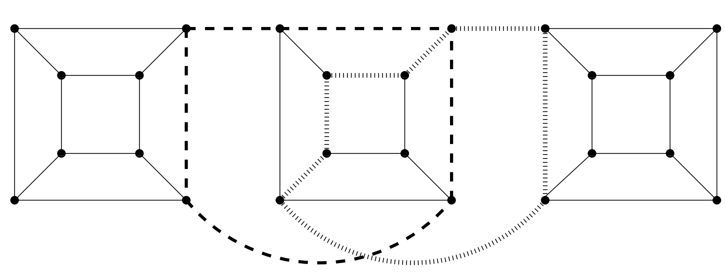


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

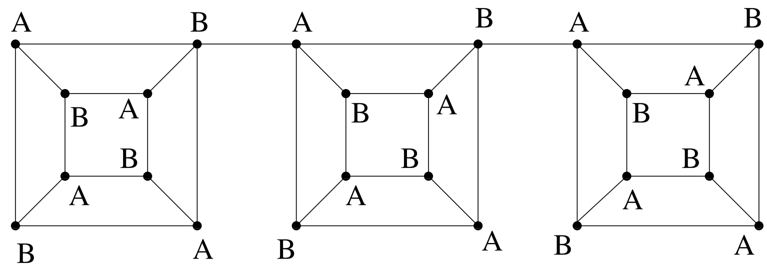


Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Occorre rimuovere almeno 2 archi per rendere G bipartito dato che esso contiene 2 circuiti dispari disgiunti sugli archi come evidenziato in figura.



Di converso, con la rimozione di 2 soli archi possiamo rendere G bipartito come evidenziato in figura.



Problema 5 (2+2=4 punti):

I numeri naturali da 1 ad n sono collocati nelle n celle di un vettore v, di indici da 1 ad n. Si parte con i numeri collocati secondo una permutazione arbitraria, e, fintantochè $v[1] \neq 1$, si effettua la seguente mossa:

sia $p = v[1]$. Si rovesci il prefisso $v[1 \dots p]$ del vettore v.

Esempio: se partiamo dalla permutazione `5, 8, 2, 4, 6, 3, 7, 1`, il processo attraversa i seguenti stati:

stato iniziale:

5	8	2	4	6	3	7	1

$\rightarrow$

6	4	2	8	5	3	7	1

$\rightarrow$

3	5	8	2	4	6	7	1

$\rightarrow$

8	5	3	2	4	6	7	1

$\rightarrow$

1	7	6	4	2	3	5	8

-stato finale.

(2pt) Dimostrare che il processo deve necessariamente terminare qualsiasi sia la permutazione di partenza.

(1pt) Fornire un upper-bound (come funzione di n) sul numero di mosse che possano avvenire in tutto.

(1pt) Questo ulteriore punto se il tuo upper-bound è del tipo c^n per un qualche c.

svolgimento.

Progettiamo una monovariante. Si noti che la mossa porta il naturale $p := v[1]$ proprio in posizione p, ossia a quella che sarebbe "casa sua" se la permutazione fosse perfettamente ordinata (ossia l'identità). Sembra pertanto che il processo tenda a riordinare la permutazione. È tuttavia facile costruire esempi dove la mossa di fatto aumenta, anche di molto, il numero di elementi che non sono a casa loro. Portarsi a casa non sembra affatto una conquista definitiva durante il processo. Tuttavia, quando $p := v[1]$ viene portato a casa sua nessuno degli elementi maggiori di p può essere tolto da casa in quella stessa mossa.

Questo ci conduce a considerare la seguente funzione di valutazione di un vettore:

$$f(v) = \sum_{i:v[i]=i} 2^i \, .$$

In base a quanto abbiamo detto, ad ogni mossa il valore di $f(v)$ può solo aumentare dato che ogni potenza di due eccede di 1 la somme di tutte le potenze di due che la precedono.

In altri termini, $f(v)$ è una monovariante stretta e quindi il processo deve necessariamente terminare **(2pt)**: non può infatti rivisitare 2 volte la stessa configurazione, ed il numero di configurazioni diverse è finito (più precisamente $n!$ e quindi, se il processo termina, $n!$ è un ovvio upper bound sul numero di passi compiuti). Ovviamente $0 \leq f(v) \leq 2^{n+1} - 1$; pertanto il processo termina in al più $2^{n+1} - 1$ passi **(1+1=2pt)**.