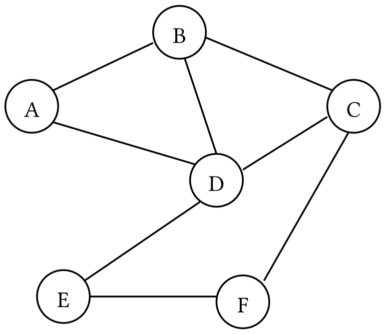
Esame di Ricerca Operativa - 06 luglio 2023

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

3 esercizi per 63 punti in palio (*voto* $\geq$ *punti* -5, $40 \longrightarrow 30$ *e lode*) **- CORREZIONE -**

Esercizio 1 (con 8 richieste: 2+3+2+1+1+3+2+2 = 16 punti [modellazione/riduzioni]):
Una *clique (cricca)* in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di nodi $S \subseteq V$ tale che $uv \in E$ per ogni coppia $u, v \in S$. Se invece vale il contrario, ossia se $uv \notin E$ per ogni coppia $u, v \in S$, allora S è un *independent set* di G.



esempio. nel grafo G in figura, $\{B, D\}$, $\{B, D, A\}$ e $\{B, D, C\}$ sono tre cricche mentre $\{C, D, E, F\}$ non lo è perchè D e F non sono adiacenti. Invece $\{B, F\}$, $\{D, F\}$ e $\{A, E\}$ sono tre independent set mentre $\{A, C, F\}$ non lo è per via dell'arco CF.

Max Clique è il problema di trovare una cricca di massima cardinalità per un generico grafo G dato in input.

Max Independent Set è il problema di trovare un'independent set di massima cardinalità per un grafo G dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

1.1 (2 pt, model via graphs) Vuoi creare una coalizione di governo che includa il massimo numero di partiti. Ma alcune coppie di partiti sono proprio incompatibili (o lui o mè). Formula in termini di Max Clique il tuo problema di formare un nuovo governo.

1.2 (3 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Max Clique per la specifica istanza G in figura.

1.3 (2 pt, generalize model) Estendi la tua formulazione PLI a un generico grafo $G = (V, E)$.

1.4 (1 pt, forge graph model) In realtà ogni partito p ha un numero di deputati d_p. Prova a definire un problema Max Clique Pesato che ti consenta di formulare in modo naturale il problema di individuare una coalizione che ricomprenda il numero massimo di deputati, su istanza generica.

1.5 (1 pt, model as ILP) Offri una formulazione PLI di Max Clique Pesato per grafo generico.

1.6 (3 pt, NP-hardness proof) Max Independent Set è noto essere NP-hard. Sfrutta questo fatto per dimostrare che anche Max Clique è NP-hard.

1.7 (2 pt, NP-hardness proof) Deduci dal risultato sopra che anche Max Clique Pesato è NP-hard.

1.8 (2 pt, problemi equivalenti) Con un'ultima riduzione da Max Clique a Max Independent Set fai vedere che questi due problemi sono di fatto equivalenti nel senso che l'esistenza di un algoritmo polinomiale per l'uno implica l'esistenza di un algoritmo polinomiale per l'altro.

svolgimento esercizio 1.

Richiesta 1. Si consideri il grafo che ha per nodi i partiti e dove due nodi sono adiacenti se e solo se possono stare entrambi in uno stesso governo. Si noti che un sottoinsieme dei partiti è una cricca in questo grafo se e solo se essi costituiscono una coalizione ammissibile. Pertanto, il problema di nostro interesse può essere visto come la ricerca di una cricca di massima cardinalità entro un grafo dato.

Richiesta 2. Introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo $v \in \{A, B, C, D, E, F\}$, con l'idea che $x_v = 1$ significhi che il nodo v vada incluso nella cricca mentre $x_v = 0$ significa che il nodo

v vada lasciato fuori. Queste 6 variabili riescono quindi a catturare lo spazio delle possibili scelte, descrivendo compiutamente un qualsiasi sottoinsieme dei nodi.

Volendo massimizzare la cardinalità della cricca selezionata, la funzione obbiettivo sarà:

$$\max x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F$$

Abbiamo un'unica famiglia di vincoli, che prevede precisamente un vincolo per ogni non-arco:

non-arco AC: $x_A + x_C \leq 1$
non-arco AE: $x_A + x_E \leq 1$
non-arco AF: $x_A + x_F \leq 1$
non-arco BE: $x_B + x_E \leq 1$
non-arco BF: $x_B + x_F \leq 1$
non-arco CE: $x_C + x_E \leq 1$
non-arco DF: $x_D + x_F \leq 1$

Questi vincoli impongono che il sottoinsieme di nodi descritto dal vetore x formi effettivamente una cricca.

Richiesta 3. Più in generale, introduciamo una variabile $x_v \in \{0, 1\}$ per ogni nodo v del generico grafo $G = (V, E)$ che potremmo ricevere in input. Come sopra, $x_v = 1$ significa "nodo v incluso nella cricca soluzione" mentre $x_v = 0$ significa "nodo v NON incluso nella cricca soluzione".

La funzione obbiettivo sarà:

$$\max \sum_{v \in V} x_v$$

E la famiglia di vincoli è:

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \text{per ogni } u, v \in V \quad \text{tale che } uv \notin E$$

Richiesta 4. Si noti che lo spazio delle scelte (ossia se includere o meno un partito nella nostra coalizione dei migliori) non è cambiato per il fatto che ora guardiamo anche alle dimensioni dei partiti, il numero dei deputati in un certo senso concerne solo la formulazione della funzione obiettivo. Definiamo pertanto il problema Max Clique Pesato come la variante di Max Clique dove in input, oltre a $G = (P, E)$, mi viene inoltre specificata una funzione $d : P \longrightarrow \mathbb{N}$, dove, per ogni partito $p \in P$, il valore $d_p := d(p)$ ne indica il numero di deputati. Il problema Max Clique Pesato chiede di trovare una cricca nel grafo in input che massimizzi la somma dei pesi come presa sui nodi inclusi. Spesso una tale coppia (G, p) che costituisce l'input di un problema di ottimizzazione viene chiamata "grafo pesato", volendo essere più specifici in questo caso potremmo parlare di "grafo pesato sui nodi".

Richiesta 5.

Usiamo le stesse variabili $x_v \in \{0, 1\}$ di cui sopra (una per ogni nodo v del generico grafo pesato $(G = (V, E), p)$ che potremmo ricevere in input; e come sopra $x_v = 1$ significa che il nodo v vada incluso).

La funzione obbiettivo sarà:

$$\max \sum_{v \in V} p_v x_v$$

E la famiglia di vincoli rimane:

$$x_u + x_v \leq 1 \quad \text{per ogni } u, v \in V \quad \text{tale che } uv \notin E$$

Richiesta 6. Data un'istanza $G = (V, E)$ di Max Independent Set consideriamo, ad istanza di Max Clique, il *grafo complemento* $\overline{G}=(V,\overline{E})$ con $\overline{E} := \{uv : u, v \in V, uv \notin E\}$.

La validità della riduzione poggia sul seguente fatto:

Fact: Un insieme $S \subseteq V$ è un independent set di G se e solo se S è una cricca di $\overline{G}$.

Dal quale diseguono ovvi i due lemmi che corroborano la validità della riduzione:

Lemma [easy]: Se G ha un independent set (X) di cardinalità k allora $\overline{G}$ ha una cricca di cardinalità k (infatti proprio lo stesso set X è cricca in $\overline{G}$).

Lemma [hard]: Se G ha una cricca (sia X) di cardinalità k allora $\overline{G}$ ha un independent set di cardinalità k (infatti proprio lo stesso set X è un independent set in $\overline{G}$).

Richiesta 7.

Questa riduzione è in discesa in quanto Max Clique può essere visto come il caso particolare di Max Clique Pesato ristretto a quelle sole istanze dove d_p è sempre la funzione che associa il valore $d_p = 1$ ad ogni $p \in P$.

Richiesta 8.

Data un'istanza $G = (V, E)$ di Max Clique consideriamo, ad istanza di Max Independent Set, il *grafo complemento* $\overline{G}=(V,\overline{E})$ con $\overline{E} := \{uv : u, v \in V, uv \notin E\}$.

La validità della riduzione poggia sul fatto già visto sopra e può essere convenientemente argomentata con gli stessi due lemmi.

Esercizio 2 (con 19 richieste: 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+2+4 = 23 punti [simplesso a due fasi]):
Lasciati condurre passo passo nella soluzione del seguente problema di PL. In questo modo, anche se otterrai brutti numeri frazionari, potrai verificare la correttezza dei tuoi conteggi lungo il percorso prima ancora di giungere ai certificati finali.

$$\begin{aligned} \max\ 11x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 7 \\ 10x_1 - \ \ x_2 - 4x_3 \le 8 \\ -10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \ge 10 \\ x_2 - \ \ x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

Richieste dell'Esercizio 2

2.1 (1 pt, forma standard) Portare il problema in forma standard di massimizzazione.
2.2 (1 pt, forma canonica) Introdurre le variabili di slack. La soluzione di base associata al primo dizionario (quello di definizione delle variabili di slack) è ammissibile? Perchè?
2.3 (1 pt, problema ausiliario) Impostare il problema ausiliario in forma standard.
2.4 (1 pt, prima fase 1) Portare il problema ausiliario in forma canonica.
2.5 (1 pt, punti di controllo) Scrivi e metti da parte per future prove del nove la soluzione estesa di base associata a questo primo dizionario della forma canonica. Siccome essa presenta diversi zeri, calcolati (e mettiti da parte) anche la soluzione estesa che otterresti settando le 5 variabili fuori-base a 1 invece che a 0. Per ciascuna di queste due soluzioni dire se ammissibile e perchè.
2.6 (1 pt, primo tableau) Comporre il tableau per questo primo dizionario. Spiega poi come in esso determini le variabili entrante ed uscente per il primo pivot.

2.7 (1 pt, primo pivot) Esegui il primo pivot. La soluzione di base associata al tableau ottenuto è ammissibile? Cosa devi constatare per assicurartene? Doveva necessariamente esserlo (dire solo SI o NO)?
2.8 (1 pt, verifica su punto~1) Verifica **esplicitamente** la correttezza del nuovo tableau tramite la prova del nove riferita alla prima soluzione di base trovata.
2.9 (1 pt, verifica su punto~2) Verifica **esplicitamente** la correttezza del nuovo tableau tramite la prova del nove riferita alla seconda soluzione non-di-base costruita ponendo ad 1 le variabili indipendenti nel primissimo dizionario o tableau.
2.10 (1 pt, first check opt) Dire perchè la soluzione di base attuale non è ottima e indicare quali scelte sono ora disponibili per il prossimo elemento di pivot.
2.11 (1 pt, pivot~2) Si esegua il pivot. Si commenti perchè la soluzione di base è ora ottima e perchè il problema originario deve essere ammissibile.
2.12 (1 pt, inter-fase) Dal tableau ottimo prodotto per il problema ausiliario si estragga un primo tableau per il problema originale in forma standard. Esso esprimerà una soluzione ammissibile. Non dimenticarsi di ripristinare la soluzione obiettivo originaria.
2.13 (1 pt, verif pre-fase~2) Verifica questo primo tableau per il problema originale in forma standard con la prova del nove sulla soluzione estesa determinata da $x_1 = 1$, $x_2^- = x_3' = 2$, $x_2^+ = 3$.
2.14 (1 pt, verifica ottimalità) Dire perchè la soluzione di base attuale non è ottima e discutere come scegli il prossimo elemento di pivot.
2.15 (1 pt, ultimo pivot) Esegui il prossimo pivot. (Usciranno numeri brutti, i più orribili sono $-\frac{169}{20}$ e $-\frac{39}{40}$)
2.16 (1 pt, check opt + prova~9) Dire perchè sei all'ottimo. Verifica questo ultimo tableau per il problema originale in forma standard con la prova del nove sulla soluzione estesa determinata da $x_1 = 1$, $x_2^- = x_3' = 2$, $x_2^+ = 3$.
2.17 (1 pt, soluzioni ottime) Leggere le soluzioni ottime estese primale e duale.
2.18 (2 pt, prezzi ombra) Dire quali sono i prezzi ombra delle risorse (si faccia riferimento alla forma standard ottenuta come primo passo per esaudire la richiesta 1) ed evidenziare perchè per acquisire unità aggiuntive di ciascuna risorsa non saresti mai disposto a pagare più del suo prezzo ombra.
2.19 (4 pt, scadenze prezzi ombra) Fino a dove saresti disposto a pagare quel prezzo per le risorse 1 e 2?

svolgimento esercizio 2.

Richiesta 1. Portando il problema in forma standard otteniamo:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 11x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\
& 10x_1 - x_2^+ + x_2^- + 4x_3' \leq 8 \\
& 10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3' \leq -10 \\
& x_2^+ - x_2^- + x_3' \leq 5 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \geq 0
\end{aligned}$$

Richiesta 2. La forma canonica si ottiene con la definizione delle variabili di slack:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 11x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\
& w_1 = 8 - 10x_1 + x_2^+ - x_2^- - 4x_3' \\
& w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - 2x_3' \\
& w_3 = 5 \quad x_2^+ + x_2^- - x_3' \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3', w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}$$

La soluzione di base associata a questo primo dizionario è quella che si ottiene mettendo a 0 le tre variabili indipendenti e leggendo di conseguenza i valori delle variabili di slack e della funzione obiettivo. Tale soluzione non è ammissibile perchè presenta $w_2 = -10 < 0$.

Richiesta 3. Il problema ausiliario è un problema ammissibile per costruzione ottenuto introducendo una variabile di colla'' x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria al soddisfacimento di tutti i vincoli. Chiaramente basta disporre della colla aggiusta-tutto su quei soli vincoli che presentavano un termine noto negativo (questo dovrebbe bastare ad esempio se teniamo a 0 le variabili di decisione del problema originario). Scritto direttamente in forma standard, il problema ausiliario è:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -x_0 \\
& 10x_1 - x_2^+ + x_2^- + 4x_3' \leq 8 \\
& 10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3' - x_0 \leq -10 \\
& x_2^+ - x_2^- + x_3' \leq 5 \\
& x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \geq 0
\end{aligned}$$

Il problema ausiliario potrà essere definito/costruito anche in modi diversi ma la proprietà fondamentale resta questa: il problema originario è ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$, ossia se 0 è il suo valore ottimo.

Richiesta 4. La forma canonica del problema ausiliario è ottenuta con l'introduzione delle variabili di slack:

$$\begin{aligned}
\max \quad & -x_0 \\
& w_1 = 8 - 10x_1 + x_2^+ - x_2^- - 4x_3' \\
& w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - 2x_3' + x_0 \\
& w_3 = 5 - x_2^+ + x_2^- - x_3' \\
& x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3', w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Dove z indica la funzione obiettivo, la soluzione di base associata a questo primo dizionario del problema ausiliario è:

x_0	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
0	0	0	0	0	8	-10	5	0

Chiaramente abbiamo avuto cura di leggere ogni componente della soluzione estesa, ci servono tutte per condurre una prova del nove che coinvolga tutti i numeri ricompresi nel tableau.

Questa soluzione di base (che in fondo si proietta su quella vista sopra per il problema originario in forma canonica, dato che $x_0 = 0$) di nuovo non è ammissibile in quanto $w_2 = -10 < 0$. Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è pertanto ad origine ammissibile, ma un fatto importante è questo: riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore al più negativo dei termini noti in modo che si annulli e possa fuoriuscire dalla base la variabile di slack di un vincolo che presenti tale termine noto.

Richiesta 5. La seconda soluzione (ora non di base) che si è stabilito di mettere da parte è:

x_0	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
1	1	1	1	1	-6	-21	4	-1

Nemmeno questa soluzione è ammissibile (ben tre valori negativi). Ciò non significa che non possa essere spesa per condurre le nostre prove del nove.

Richiesta 6. Il primo tableau del problema ausiliario codifica il primo dizionario, così:

	$-$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	x_0
z	0	0	0	0	0	-1
w_1	8	-10	1	-1	-4	0
w_2	-10	-10	5	-5	-2	1
w_3	5	0	-1	1	-1	0

Quando il problema di partenza non è ad origine ammissibile e si decide di utilizzare il simplesso a due fasi, il primo pivot che si andrà a compiere su questo tableau è di portare in base la variabile di colla x_0 per richiedere esattamente quanta colla ne serva per ottenere ammissibilità tenendo a zero le altre variabili di decisione (quelle del problema originario). Con questo la variabile uscente di base è una qualsiasi variabile di slack tra quelle a valore più negativo nel primissimo dizionario/tableau. In questo caso la variabile uscente è la x_2.

Richiesta 7. Col primo pivot otteniamo il seguente tableau:

	$-$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_2
z	-10	-10	5	-5	-2	-1
w_1	8	-10	1	-1	-4	0
x_0	10	10	-5	5	2	1
w_3	5	0	-1	1	-1	0

La soluzione di base associata a questo tableau è ammissibile perchè tutti i numeri nella prima colonna del tableau (eccetto quello per la funzione obiettivo) sono non-negativi. Per altro doveva necessariamente esserlo perchè abbiamo aderito al criterio di scelta indicato per la variabile entrante e per quella uscente.

Richiesta 8. Prova del nove riferita a

x_0	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
0	0	0	0	0	8	-10	5	0

		$-$	0	0	0	0	-10
		$-$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_2
0	z	-10	-10	5	-5	-2	-1
8	w_1	8	-10	1	-1	-4	0
0	x_0	10	10	-5	5	2	1
5	w_3	5	0	-1	1	-1	0

esplicito le verifiche di riga sottese:
$0 = -10 - 10(0) + 5(0) - 5(0) - 2(0) - 1(-10)$
$8 = 8 - 10(0) + 1(0) - 1(0) - 4(0) + 0(-10)$
$0 = 10 - 10(0) - 5(0) + 5(0) + 2(0) + 1(-10)$
$5 = 5 + 0(0) - 1(0) + 1(0) - 1(0) + 0(-10)$

Richiesta 9. Prova del nove riferita a

x_0	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
1	1	1	1	1	-6	-21	4	-1

	$-$	1	1	1	1	-21
	$-$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_2
$-1 = z =$	-10	-10	5	-5	-2	-1
$-6 = w_1 =$	8	-10	1	-1	-4	0
$1 = x_0 =$	10	10	-5	5	2	1
$4 = w_3 =$	5	0	-1	1	-1	0

Richiesta 10. Questa soluzione di base non è ottima in quanto il costo ridotto della x_2^+ è $5 > 0$. Poichè questo è l'unico costo ridotto positivo la scelta per la variabile entrante cade necessariamente sulla x_2^+. Al crescere del valore della x_2^+, tenendo ferme a 0 le altre variabili di colonna, la prima variabile basica ad annullarsi è la x_0. Questo significa che anche la scelta per la variabile uscente è unica e cade sulla x_0. Questo significa anche che il problema originario era ammissibile (ci basta zero colla).

Richiesta 11. Richiesta 7. Col secondo pivot (entra x_2^+ e esce x_0) otteniamo il seguente tableau:

	$-$	1	1	1	1	-21
	$-$	x_1	x_0	x_2^-	x_3'	w_2
$-1 = z =$	0	0	-1	0	0	0
$-6 = w_1 =$	10	-8	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{18}{5}$	$\frac{1}{5}$
$1 = x_2^+ =$	2	2	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$4 = w_3 =$	3	-2	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Anche se non richiesto, ho preferito portarmi meco la prova del nove embeddata (quella basata sul secondo punto di controllo, ma avrei anche potuto stackerarmele entrambe sui bordi superiore e sinistro del tableau).

Richiesta 12. Per ottenere ora il tableau per il problema originario si rimuove dal tableau sopra la colonna per la x_0 (in caso di pari-merito per la variabile uscente nel pivot che porta all'ottimo del problema ausiliario sarebbe stata nostra cura privilegiare la x_0, in questo modo la x_0 è sicuramente una variabile colonna una volta giunti a questo punto). Dobbiamo anche ripristinare la funzione obiettivo del problema originario che era:

$$\begin{aligned} z &= 11x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 7 \\ &= 11x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\ &= 11x_1 - 5\left(2 + 2x_1 + x_2^- + \frac{2}{5}x_3' + \frac{1}{5}w_2\right) + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\ &= -3 + x_1 - 8x_3' - w_2. \end{aligned}$$

	$-$	x_1	x_2^-	x_3'	w_2
z	-3	1	0	-8	-1
w_1	10	-8	0	$-\frac{18}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_2^+	2	2	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
w_3	3	-2	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Richiesta 13. La prova del nove richiesta va riferita alla seguente soluzione estesa del problema in forma standard:

x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
1	3	2	2	-9	-19	2	1

Ed è riassunta nella seguente tabella:

	$-$	1	2	2	-19
	$-$	x_1	x_2^-	x_3'	w_2
$1 = z =$	-3	1	0	-8	-1
$-9 = w_1 =$	10	-8	0	$-\frac{18}{5}$	$\frac{1}{5}$
$3 = x_2^+ =$	2	2	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$2 = w_3 =$	3	-2	0	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$

	$-$	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{-19}$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$1 =$	-3	1	0	-16	19
$-\frac{45}{5} =$	$\frac{50}{5}$	$-\frac{40}{5}$	0	$-\frac{36}{5}$	$-\frac{19}{5}$
$\frac{15}{5} =$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{10}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{19}{5}$
$\frac{10}{5} =$	$\frac{15}{5}$	$-\frac{10}{5}$	0	$-\frac{14}{5}$	$\frac{19}{5}$

Gestire le frazioni è rognoso, per questo almeno nella verifica ho preferito riportare ciascuna riga al minimo comune multiplo dei denominatori coinvolti sulle varie colonne.

Richiesta 14.

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ottima in quanto è positivo il costo ridotto della x_1 (è un 1). Poichè questo è l'unico costo ridotto positivo, per aumentare da quì il valore della funzione obiettivo và necessariamente portata in base la x_1 (al chè esce forzatamente la w_1 che è in assoluto la prima ad azzerrsi al crescere della x_1 tenendo a zero le altre variabili fuori base.

Richieste 15-16.

L'esecuzione di tale pivot ci conduce al seguente tableau (con la prova del nove inclusa):

	$-$	-9	2	2	-19
	$-$	w_1	x_2^-	x_3'	w_2
$1 = z =$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{169}{20}$	$-\frac{39}{40}$
$1 = x_1 =$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{9}{20}$	$\frac{1}{40}$
$3 = x_2^+ =$	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$2 = w_3 =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

	$-$	$\cancel{-9}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{-19}$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{40}{40} =$	$-\frac{70}{40}$	$\frac{45}{40}$	0	$-\frac{676}{40}$	$\frac{741}{40}$
$\frac{40}{40} =$	$\frac{50}{40}$	$\frac{45}{40}$	0	$-\frac{36}{40}$	$-\frac{19}{40}$
$\frac{12}{4} =$	$\frac{18}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{8}{4}$	$-\frac{4}{4}$	$-\frac{19}{4}$
$\frac{8}{4} =$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{9}{4}$	0	$-\frac{4}{4}$	$\frac{19}{4}$

Siamo all'ottimo perchè nessun costo ridotto è positivo.

Richieste 17.

Dove z indica la funzione obiettivo sia per il problema primale che per quello duale, le soluzioni ottime primale e duale estese che posso leggere da questo tableau sono:

soluzione primale ottima per la forma standard:

x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
5/4	3	0	0	0	0	1/2	-7/4

La soluzione ottima per il problema originario sarà pertanto $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

soluzione duale ottima:

s_1	s_3	y_1	y_2	y_3	z
0	169/20	1/8	39/40	0	-7/4

Alla coppia x_2^+/x_2^- nel duale corrispondono due vincoli contrapposti, pertanto $s_2^+ = s_2^- = 0$ e forse è preferibile omettere questa non-informazione.

Richiesta 17.

Il prezzo ombra della risorsa 1 è $y_1 = \frac{1}{8}$. Il prezzo ombra della risorsa 2 è $y_2 = \frac{39}{40}$. Il prezzo ombra della risorsa 3 è $y_3 = 0$.

Se generalizziamo il problema in forma standard in modo che, per $i = 1, 2$, contempli una variazione δ_i sulla risorsa (ossia termine noto) nell'i-esimo vincolo della forma standard, otteniamo:

$$\begin{aligned} P(\delta_1,\delta_2) = \max \quad & 11x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\ & 10x_1 - x_2^+ + x_2^- + 4x_3' \le 8 + \delta_1 \\ & 10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3' \le -10 + \delta(2) \\ & x_2^+ - x_2^- + x_3' \le 5 \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3' \ge 0 \end{aligned}$$

Sappiamo che se ora moltiplichiamo il primo vincolo di questo problema per δ_1 ed il secondo per δ_2, e poi li sommiamo sommando anche la diseguaglianza tautologica $7 \le 7$ (ci serve a causa del termine nodo di 7 nella funzione obiettivo) otteniamo un tetto sempre valido su quanto ottenibile in termini di funzione obiettivo (e che questo tetto è anche stretto per $\delta_1 = \delta_2 = 0$). Facciamolo:

$$\begin{array}{rlllllr} \frac{1}{8} \times & (10x_1 - & x_2^+ + & x_2^- + & 4x_3' \le & & 8 + \delta_1) + \\ \frac{39}{40} \times & (10x_1 - & 5x_2^+ + & 5x_2^- + & 2x_3' \le & & -10 + \delta_2) + \\ & & & & 7 \le & & 7 \\ & ----- & ----- & ----- & ----- & & ------- \\ & \frac{16}{2}x_1 - & 5x_2^+ + & 5x_2^- + & \frac{49}{20}x_3' + 7 \le & & -\frac{7}{4} + \frac{1}{8}\delta_1 + \frac{39}{40}\delta_2 \end{array}$$

Si noti che il termine a sinistra della diseguaglianza ottenuta domina sempre la funzione obiettivo di $P(\delta_1, \delta_2)$ per ogni assegnamento non-negativo al vettore delle variabili x, mentre il termine a destra è proprio opt_val($P(0,0)$) $+\frac{1}{8}\delta_1 + \frac{39}{40}\delta_2$.

Pertanto, l'incremento su opt_val($P(0,0)$) in cui si può incorrere espresso al variare di δ_1 e δ_2 è limitato superiormente da $\frac{1}{8}\delta_1 + \frac{39}{40}\delta_2$.

Richiesta 18.

Il primo dizionario del problema $P(\delta_1, \delta_2)$ può essere accomodato nella seguente scrittura (che generalizza il dizionario del problema primale in forma canonica, essendone suo caso particolare per $\delta_1 = \delta_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- - 6x_3' + 7 \\ & w_1 = 8 + \delta_1 - 10x_1 + x_2^+ - x_2^- - 4x_3' \\ & w_2 = -10 + \delta_2 - 10x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - 2x_3' \\ & w_3 = \quad 5 \qquad\qquad\quad x_2^+ + x_2^- - x_3' \\ & x_1, x_2^+, x_2^-, x_3', w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Il nostro primo obiettivo ora è riscrivere queste equazioni sotto la stessa partizione delle variabili in base e fuori base che abbiamo all'ottimo del caso particolare $P(0,0)$. Siccome in nessun pivot i valori a termine noto si propagano al di fuori della colonna dei termini noti, allora il tableau di $P(\delta_1,\delta_2)$ sotto tale partizione sarà identico a quello di $P(\delta_1,\delta_2)$ all'ottimo eccetto che nella colonna dei termini noti. Dobbiamo pertanto ricalcolare solamente i termini nella prima colonna. Per falro utilizzaremo la prova del nove della PL.

Ci serve quindi un punto di riferimento che soddisfi tutti i vincoli della forma standard di $P(\delta_1,\delta_2)$ scritti sopra. Si può ottenerlo facilmente mettendo a zero tutte le variabili x e calcolando le variabili di slack di conseguenza.

In questo modo otteniamo il punto:

x_1	x_2^+	x_2^-	x_3'	w_1	w_2	w_3	z
0	0	0	0	8 + delta_(1)	-10 + delta(2)	5	0

Riaffrontiamo quindi la prova del nove prendendo questo punto a riferimento:

	$-$	$8+\delta_1$	0	0	$-10+\delta_2$
	$-$	w_1	x_2^-	x_3'	w_2
$7 =$ $z =$	$-\frac{7}{4}+ ?_0$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{169}{20}$	$-\frac{39}{40}$
$0 =$ $x_1 =$	$\frac{5}{4} + ?_1$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{9}{20}$	$\frac{1}{40}$
$0 =$ $x_2^+ =$	$\frac{9}{2} + ?_2$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$5 =$ $w_3 =$	$\frac{1}{2} + ?_3$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

	$-$	$\cancel{8+\delta_1}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{-10+\delta_2}$
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{28}{40} =$	$-\frac{70}{40} + ?_0$	$-\frac{20}{40} - \frac{5}{40}\delta_1$	0	0	$\frac{390}{40} - \frac{39}{40}\delta_2$
$0 =$	$\frac{50}{40} + ?_1$	$-\frac{5}{40} - \frac{5}{40}\delta_1$	0	0	$-\frac{10}{40} + \frac{1}{40}\delta_2$
$0 =$	$\frac{18}{4} + ?_2$	$-\frac{8}{4} - \frac{1}{4}\delta_1$	0	0	$-\frac{10}{4} + \frac{1}{4}\delta_2$
$\frac{20}{4} =$	$\frac{2}{4} + ?_3$	$\frac{8}{4} + \frac{1}{4}\delta_1$	0	0	$\frac{10}{4} - \frac{1}{4}\delta_2$

Interpretiamo i controlli:

1. Dal controllo della riga 1 (quella della funzione obiettivo otteno che $?_0 = \frac{1}{8}\delta_1 + \frac{39}{40}\delta_2$, riconfermando ancora una volta il significato di prezzi ombra per per variabili y_1 e y_2 del duale.

Non solo abbiamo che $\frac{1}{8}\delta_1 + \frac{39}{40}\delta_2$ esprime un upper bound sull'incremento in termini di funzione obiettivo, ma vale anche che la soluzione di base associata a questo tableau (a questa politica aziendale caratterizzata dalla scelta sulla partizione delle variabili tra in base e fuori base) ottiene proprio questo incremento. Il punto chiave è pertanto questo: posso comprare le risorse pagandole fino al loro prezzo ombra fino a quando questa soluzione di base resta ammissibile.

2. Dal controllo della riga 2 otteniamo $?_1 = \frac{1}{8}\delta_1 - \frac{1}{40}\delta_2$.
3. Dal controllo della riga 3 otteniamo $?_2 = \frac{1}{4}\delta_1 - \frac{1}{4}\delta_2$.
4. Dal controllo della riga 4 otteniamo $?_3 = -\frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$.

limite all'acquisto per la risorsa 1:

L'acquisto delle risorse può essere condotto al suo prezzo ombra fintanto che la soluzione di base associata alla strategia aziendale espressa da questo dizionario e ammissibile, ossia fino a quando essa è non-negativa su ogni coordinata. Le condizioni sono quindi:

1. $0 \leq \frac{50}{40} + ?_1 = \frac{50}{40} + \frac{1}{8}\delta_1 - \frac{1}{40}\delta_2$
2. $0 \leq \frac{18}{4} + ?_2 = \frac{18}{4} + \frac{1}{4}\delta_1 - \frac{1}{4}\delta_2$
3. $0 \leq \frac{2}{4} + ?_3 = \frac{2}{4} - \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$

Tali condizioni descrivono lo spazio di quelle coppie (δ_1, δ_2) dove è possibile procedere all'acquisto; questo spazio sarà in generale un poliedro.

Ma l'esecutivo potrebbe necessitare di regole più semplici quando deve affrontare una contrattazione. Proiettiamole quindi su particolari scenari monodimensionali.

tetto su acquisto per la risorsa 1 in separato:

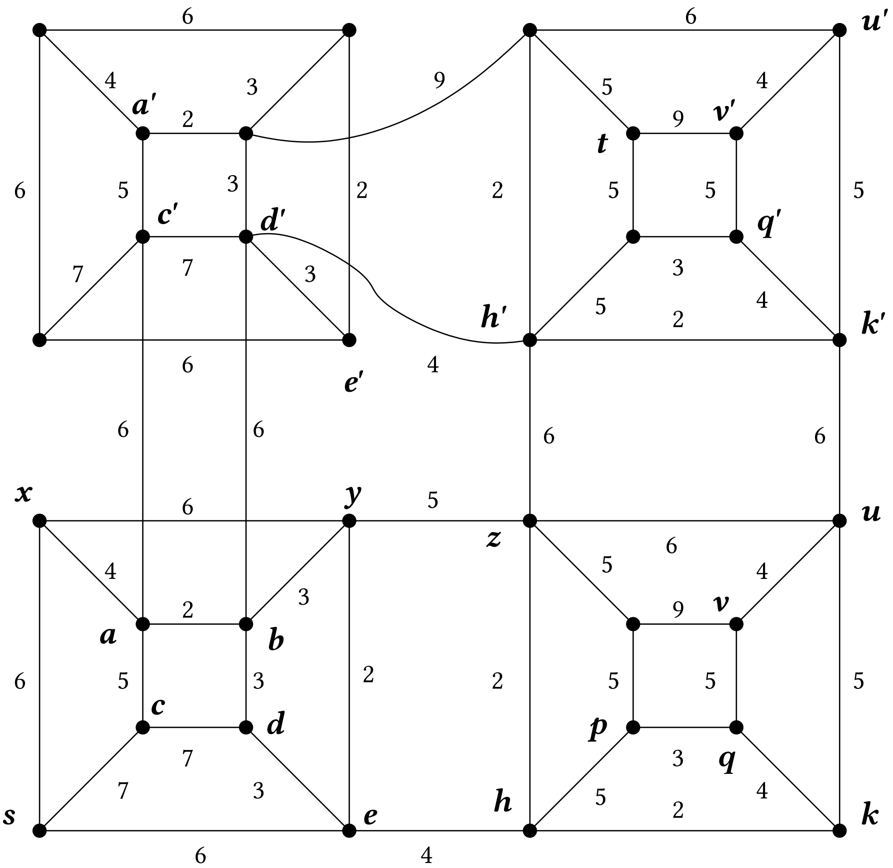
Tenendo $\delta_2 = 0$, la terza condizione è la solo a porre in limite superiore su δ_1. Ma se contemplassimo anche la possibilità di vendere la risorsa invece che di acquistarla allora lavorano anche gli altri due. In definitiva, $-10 \leq \delta_1 \leq 2$.

tetto su acquisto per la risorsa 2 in separato:

Assumendo $\delta_1 = 0$ otteniamo $-2 \leq \delta_2 \leq 5$.

Esercizio 3 (con 10 richieste: 3+2+3+1+1+3+5+2+2+2 = 24 punti [grafi]):

Si consideri il grafo G in figura.



Richieste dell'Esercizio 3

3.1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$. (2 punti sono per il certificato di non-planarità, 1 per quello di planarità)

3.2 (2 pt, make planar) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda planare quello dei due grafi che non lo è.

3.3 (3 pt, 2-colorability G+G' (2+1=3)) Individuare un minimo numero di archi la cui rimozione renda G e G' bipartiti (3 certificati).

3.4 (1 pt, one MST) Su G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

3.5 (1 pt, MST: classify edges) Colorare (o marcare) gli archi di G in tre categorie: quelli contenuti in tutti/nessuno/alcuni ma non tutti gli MST.

3.6 (3 pt, MST: certify edges) Fornire i 4 certificati che comprovano la corretta catalogazione dei 3 archi ax, bd e yz.

3.7 (5 pt, MST: family structure) Si descriva la struttura della famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo per il grafo G, e si dica quanti essi siano.

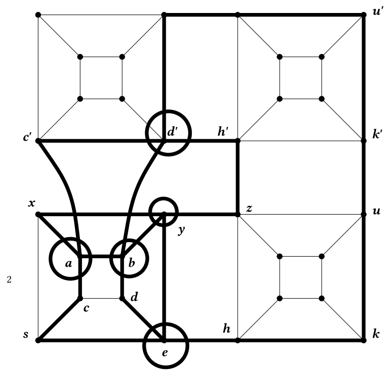
3.8 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

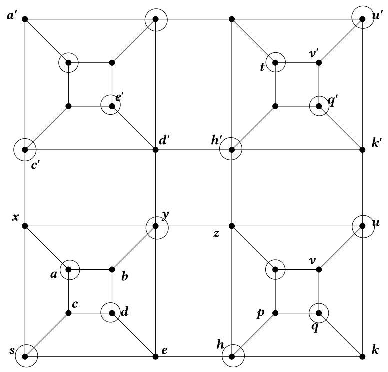
3.9 (2 pt, min cut) In G, trovare un s,t-taglio minimo.

3.10 (2 pt, cammini minimi) Si evidenzino, in un disegno del grafo G, gli archi di un albero dei cammini minimi dal nodo s (si scriva la distanza da s in coppa ad ogni nodo, in modo che sia facile verificare l'ottimalità dell'albero fornito). Si descriva la struttura della famiglia degli alberi dei cammini minimi da s e si dica quanti sono.

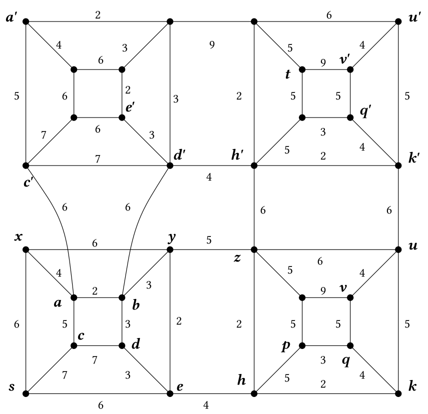
svolgimento esercizio 3.

Il fatto che G non sia planare (e che quindi sia necessaria la rimozione di almeno un arco per renderlo tale) può essere messo in evidenza esibendo come certificato la K_5 subdivision in figura, sulla sinistra.



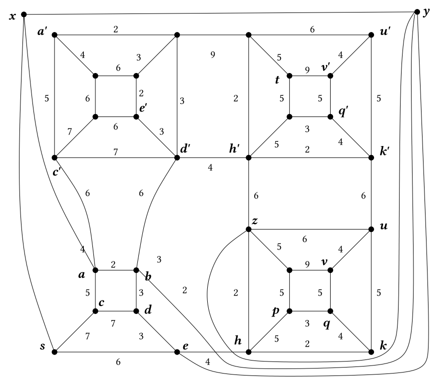


Sulla destra, un planar embedding di G' ne evidenzia (=certificato) la planarità e anche la bipartizione (2-colorabilità). Questo embedding di G' suggerisce la seguente rappresentazione di G volta a minimizzare il numero di incroci tra archi.



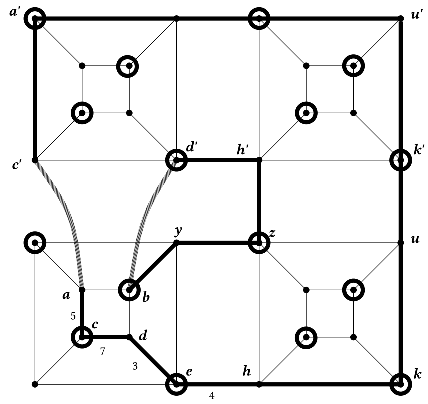
Nello svolgimento dei successivi punti mi riferirò a questo drawing di G perchè con un minore numero di archi che si incrociano ogni cosa potrebbe apparire più chiaramente, ma anche il drawing originale andava benissimo ed è immediato trasdurre ogni cosa da uno all'altro drawing. In esso è per altro possibile scorgere come la rimozione di un solo arco (arco xy) basti a rendere il grafo planare. Come visto sopra, meno di così non è possibile.

Anche la sola rimozione dell'arco eh basta ad ottenere un grafo planare. Si noti per altro che quì i due archi che attraversano eh sono incidenti in uno stesso nodo, ossia in un certo senso siamo ancora più vicini ad essere planari. Ciò nonostante ho optato per adottare il drawing quì sopra che mi è parso in definitiva più semplice.



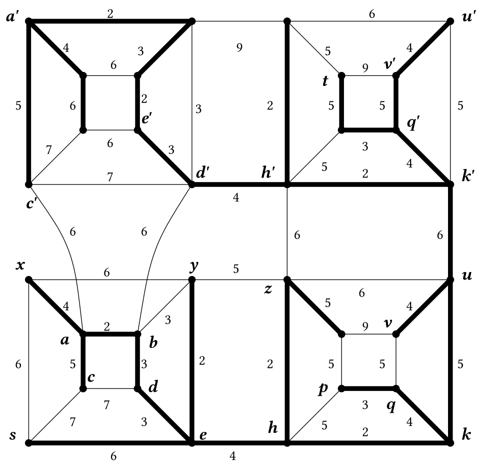
Ragionando dualmente potremmo concludere che ogni certificato di non-planarità di G deve necessariamente fare uso sia dell'arco xy che dell'arco eh. Frequentare questo tipo di ragionamenti ripaga. Secondo tè esiste una suddivisione di $K_{3,3}$ in G?

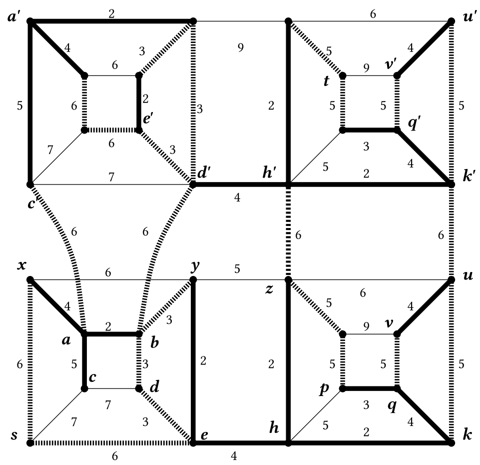
Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.



In effetti la rimozione dei 2 soli archi presenti in G ma non in G' basterà a rendere G bipartito come G'. E potrà essere riutilizzato il certificato di bipartizione di G' (ho però preferito riportare una 2-colorazione in questa stessa figura in modo che sia apprezzabile la complementarietà tra cicli dispari, archi rimossi e 2-colorazione del rafo residuo). Il numero di archi la cui rimozione rende il grafo G bipartito è pertanto 2.

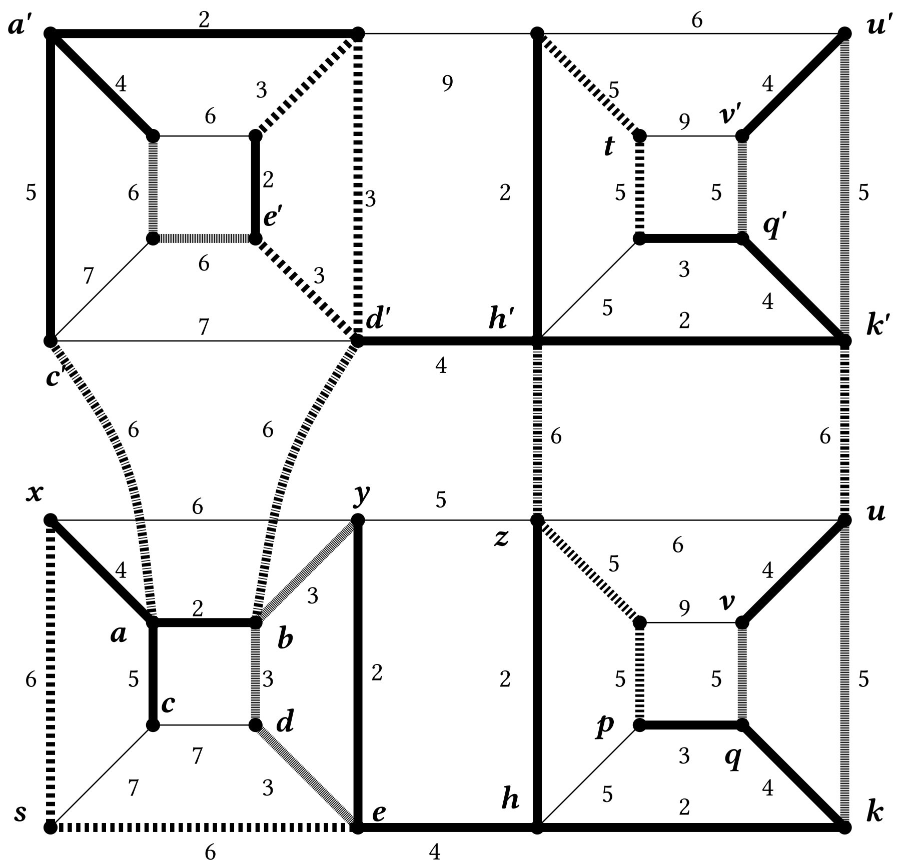
La seguente figura visualizza un particolare albero ricoprente di peso minimo nella sua parte sinistra.





A destra troviamo la catalogazione degli archi a seconda se contenuti in tutti (archi in linea spessa) oppure nessuno (archi in linea sottile) oppure alcuni ma non tutti (alberi in linea tratteggiata spessa) gli MST.

La seguente figura cerca di raccogliere gli archi in bilico (la terza cetegoria) in gruppi di archi intercambiali. Per questo particolare grafo ci aiuta abbastanza nell'esprime la struttura della famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo.



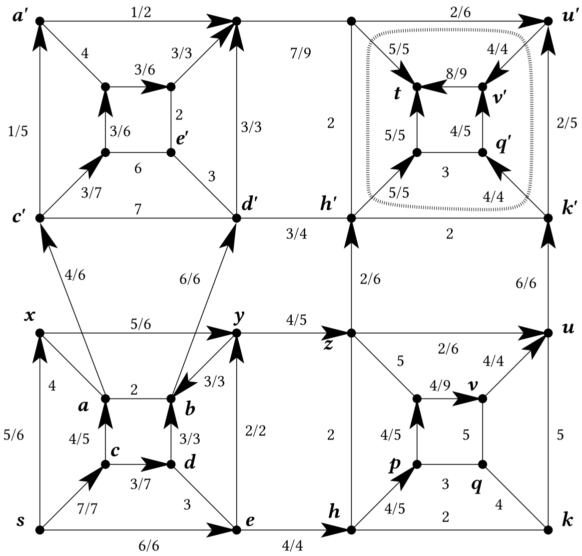
Ci sono $3^2 \times 2^6 \times 4 = 2304$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 nel cubo in alto a sinistra (linea tratteggiata) e 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 3 nel cubo in basso a sinistra (linea sfumata), uno dei 2 archi di peso 6 incidenti in s, uno dei 2 archi di peso 6 nel quadrato in alto a sinistra (linea sfumata), uno dei 2 archi di peso 5 incidenti in t, uno dei 2 archi di peso 5 analogamente tratteggiati nel cubo in basso a destra, uno dei 2 archi di peso 5 in linea sfumata nel cubo in alto a destra e uno dei 2 archi di peso 5 in linea sfumata nel cubo in basso a destra. Infine, 1 dei 4 archi di peso 6 che uniscono la parte alta a quella bassa della figura ed in linea tratto-puntinata.

L'arco bd appartiene a degli MST ma non a tutti. Appartiene ad alcuni in quanto arco di peso minimo tra quelli incidenti in d (ossia del taglio che separa d dagli altri nodi). Non appartiene a tutti in quanto arco di peso massimo del ciclo $bdey$.

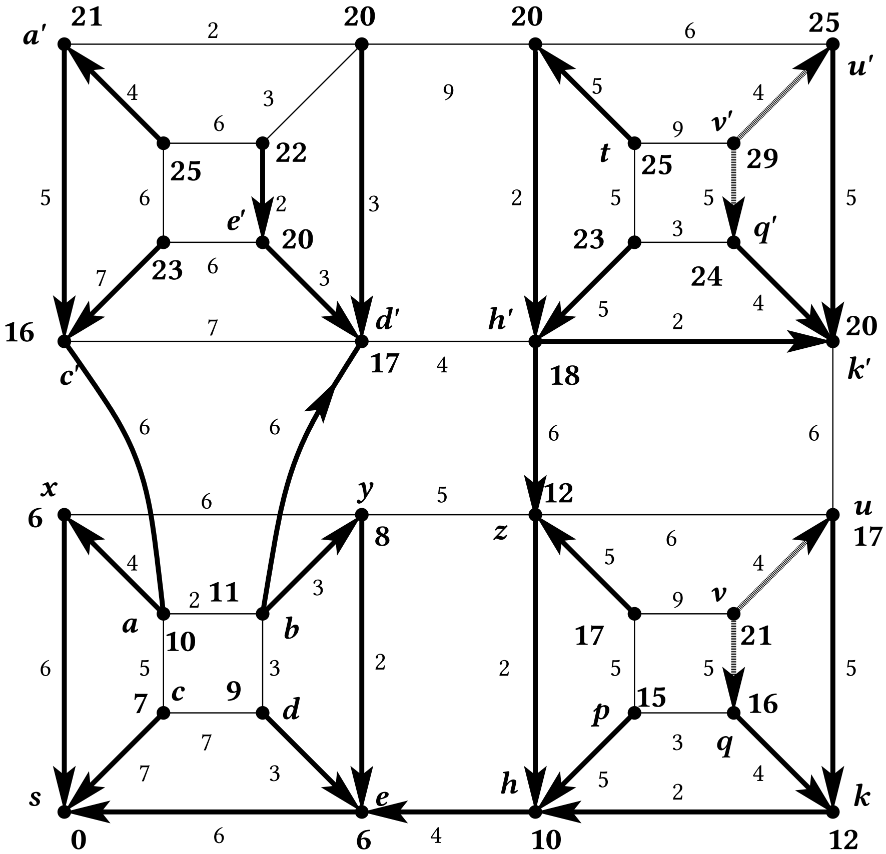
L'arco ax appartiene a tutti gli MST in quanto arco di peso strettamente minimo tra quelli incidenti in x (ossia del taglio che separa x dagli altri nodi).

L'arco yz non appartiene ad alcun MST in quanto arco di peso strettamente massimo del ciclo $yehz$.

Un flusso massimo ed un taglio minimo che ne dimostra l'ottimalità (non esibisco i passaggi spesi per ottenerli). Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s, t-taglio, anch'esso di valore 18. Esso certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. I membri di tale famiglia scaturiscono come prodotto cartesiano delle due possibili scelte per il nodo v e delle due possibili scelte per il nodo v' riguardo il nodo padre cui agganciarsi nell'albero dei cammini minimi. Ci sono pertanto $2^2 = 4$ alberi dei cammini minimi dal nodo s: ciascuno di essi include i 29 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo v, e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo v'.



Si noti come nella figura si è avuto cura di riportare la distanza di ciascun nodo dal nodo S. Per verificare l'ottimalità dell'albero basta pertanto controllare che nessun arco del coalbero è più corto delle differenza delle distanze in coppa ai suoi estremi.

Una nota: Succede spesso che per questo esercizio lo studente consegni una reportistica degli aggiornamenti alle distanze dei nodi come avvengono durante l'esecuzione di un algoritmo (tipicamente un Dijkstra). Questo va bene per quelli che io tendo a classificarmi come "i fogli della brutta", da cui cerco di recuperare dei punti se vedo che lo studente era riuscito comunque ad ottenere in essi qualcosa di concludente o quantomeno significativo, ma non è il modo più opportuno nè il più conveniente per rispondere alla consegna. La giusta forma per "la bella" è qualcosa come il disegno quì sopra (tutto questo documento di correzione, come i suoi fratelli, è prioritariamente inteso ad esemplificare come si debba rispondere alle consegne), e cerco di spiegarlo: di fronte ad una consegna dovete consegnare un prodotto finito, e in una forma conveniente per il committente (ben approssimato dal verificatore King Arthur). Se in uno stesso disegno del grafo, il più semplice e leggibile possibile, riportate sia le lunghezze degli archi che le distanze che col vostro lavoro avete computato per ciascun nodo, allora quella figura racconta già espone ciaramente la famiglia di tutti gli alberi dei cammini ottimi. Evidenziati inoltre gli archi di una particolare soluzione (di un particolare albero), King Arthur potrà verificare che:

1. per ogni arco di albero la sua lunghezza sia pari alla differenza tra i potenziali (le distanze) riportati in coppa ai nodi
2. per ogni arco di coalbero la sua lunghezza sia non-inferiore alla differenza tra i potenziali (le distanze) riportati in coppa ai nodi

Un punto chiave, a valore metodologico generale, è questo: il garbo verso King Arthur non solo è funzionale ad ottemperare congruamente una consegna, ma vi consente di evitare di consegnare soluzioni che contengano errori. Ben presto diventa quindi strumento dialettico di crescita, di problem solving, e di ricerca.

Tornando all'esame:

0. Se tutte le verifiche tornano, i punti sono in cassaforte.
1. Se uno degli atti di verifica 1 riscontra un errore, potrete correggerlo in modo immediato ripropagando i potenziali lungo l'albero.
2. Se uno degli atti di verifica 2 riscontra un errore, potrete individuare dei cammini migliori, aggiornando la vostra soluzione fino ad ora solo ammissibile per un albero dei cammini minimi.

E se nella verifica 2 per degli archi ottenente uguaglianza? Beh, state sensando tutti quegli archi che appartengono a qualche albero dei cammini minimi.

Cercate di fare tesoro generale di questa metodologia che ci arriva in parte dalla Ricerca Operativa ed in parte dalla Complessità Computazionale.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. Per gli appelli estivi in aula delta, non abbiamo controllo dell'aria condizionata e l'ambiente potrà risultarvi troppo freddo. Data la durata dell'appello consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. Potete portarvi materiali cartacei ma non è consentita alcuna strumentazione elettronica. Dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto la più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo: cercate e concretizzate quelli che più vi convengono, non impegolatevi a dimostrare quello che non sapete o dove incontrate incertezze. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati (in questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso). Tutto il resto (incluse le castronerie colossali ma anche le doppie risposte discordanti) non verrà conteggiato. Ricordate che in buona sostanza il voto corrisponderà al punteggio positivamente raccolto. I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non ci interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare.

L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti che trovi al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, sfruttalo al meglio senza sprecarlo. Una prima utilità è quella di testare la tua preparazione all'esame. Dopo aver letto il testo, consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente. Ma, in sufficiente numero di esemplari, poi anche materialmente, prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti. Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura del documento di correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E se invece ti sembra di saper risolvere del tutto l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: controlla che quanto hai in mente come soluzione corrisponda a quanto considerato e proposto come svolgimento opportuno. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente ordine'', che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo saper rispondere in chiarezza alla consegna'' non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il mancato conseguimento dei punti ad esse associati. Aggiungo che per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (perchè non collaborare a raccogliere una ricca collezione di link a tali sorgenti?).