NOME: ............................ COGNOME: ........................
MATRICOLA: ................ FIRMA: ..........................

# Esame di Ricerca Operativa - 13 giugno 2016
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

**Problema 1 (2+1+2=5 punti):**

I laboratori della Willy Wonka stanno lavorando ad un burro di cacao il cui punto di fusione approssimi ancor più da vicino la temperatura del palato umano. Studi teorici ed analisi dimensionale hanno confermato un'intuizione di Willy secondo la quale la temperatura media del palato $t_p$ è legata alla temperatura dell'ambiente $t$ secondo la funzione $t_p = f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Cinque esperimenti hanno prodotto i seguenti valori.

| temperatura dell'ambiente esterno ($t$) | ($t_p$) temperatura del palato |
|---:|---|
| 10 | 36,54321 |
| 15 | 36,81111 |
| 20 | 36,91234 |
| 25 | 36,99999 |
| 30 | 37,12345 |

**(2pt)** Si vuole determinare la configurazione dei valori per i parametri che minimizzi il massimo scarto in valore assoluto dei punti che rappresentano i risultati degli esperimenti rispetto ai corrispondenti punti sulla curva $f(x)$. Formulare come un problema di PL.

**(1pt)** Nel prossimo futuro la Willy Wonka intende organizzare campagne sempre più massive di esperimenti per una più fedele approssimazione dei parametri, e prevede in particolare di realizzare termometri sempre più precisi per la lettura delle temperature. Esprimi la tua formulazione del problema in modo che non dipenda dai valori numerici per il particolare esperimento sopra riportato (ti chiediamo di astrarre dai dati). Quante variabili hai dovuto introdurre?

**(2pt)** Si vogliono determinare i parametri tali da minimizzare la somma degli scarti in valore assoluto. Ti è ancora possibile formulare questo come un problema di PL senza rinunciare alla data abstraction? Quante variabili servirebbero per rappresentare nel concreto una situazione con $n$ esperimenti?

**Problema 2 (1+3=4 punti):** Gli Umpa Lumpa alloggiano ciascuno in una graziosa casetta privata allocata su uno degli alti alberi di cacao. Il grafo $G = (V, E)$ che ha per nodi tali casette ed un arco tra ogni due casette direttamente collegate è cubico, ossia ogni nodo ha grado 3. Ci si chiede se sia possibile assegnare uno dei 3 sapori preferiti (cioccolato, panna, mirtillo) a ciascuno dei collegamenti in modo che ad ogni casetta siano incidenti collegamenti coi tre diversi sapori.

(**(1pt)**) cosa possiamo concludere sul numero degli Umpa Lumpa basandoci sul fatto che $G$ è cubico? Possono essi essere in 101? Enunciare un lemma che si esprima inequivocabilmente in merito a questa possibilità e dimostrarlo.

(**(3pt)**) formulare nel linguaggio della PLI la questione del se esista un modo di assegnare i sapori come richiesto.

**Problema 3 (1+6·1=7 punti):**

Forse non tutti sanno che Willy Wonka aveva stampato sul foglio d'oro la soluzione per il seguente problema di knapsack con zaino di capacità $B$.

$$\max z = 52\,x_1 + 40\,x_2 + 17\,x_3 + 7\,x_4 + 8\,x_5$$
$$\begin{cases} 15\,x_1 + 13\,x_2 + 5\,x_3 + 3\,x_4 + x_5 & \leq B \\ x_2, x_3 & \leq 2 \\ x_4, x_5 & \leq 1 \\ x_i \in \{0,1,2,3\} & \end{cases}$$

# Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| @(0, 0) | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × |
| $A(15, 52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | × | × |
| $B(15, 52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × |
| $C(15, 52)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 52 | × | × | × |
| $D(13, 40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | × | 52 | × | × | × |
| $E(13, 40)$ | 0 | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | × |
| $F(5, 17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | × | × | × | 40 | × | 52 | × | × | |
| $G(5, 17)$ | 0 | × | × | × | × | 17 | × | × | × | × | 34 | × | × | 40 | × | 52 | × | × | 57 |
| $H(3, 7)$ | 0 | × | × | 7 | × | 17 | × | × | 24 | × | 34 | × | × | 41 | × | 52 | 47 | × | 59 |
| $I(1, 8)$ | 0 | 8 | × | 7 | 15 | 17 | 25 | × | 24 | 32 | 34 | 42 | × | 41 | 49 | 52 | 60 | 55 | 59 |

| | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| @(0, 0) | × | × | × | × | × | | | × | | × | × | | × | | × | × | × | |
| $A(15, 52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × | × | × | × | × | × | × |
| $B(15, 52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | 104 | × | × | × | × | × | |
| $C(15, 52)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | × | × | × | × | × | |
| $D(13, 40)$ | × | × | × | × | × | × | × | × | × | | | | | × | × | × | × | × |
| $E(13, 40)$ | × | × | × | × | × | × | × | | × | 92 | × | | × | × | × | × | × | |
| $F(5, 17)$ | × | 69 | × | × | × | × | × | 80 | × | 92 | × | 104 | | | | × | | |
| $G(5, 17)$ | × | | × | × | 74 | × | 86 | 80 | × | 92 | × | | | | | × | | |
| $H(3, 7)$ | × | 69 | 64 | × | 76 | × | 86 | 81 | × | 93 | 87 | | | | | | | |
| $I(1, 8)$ | 67 | 69 | 77 | 72 | 76 | 84 | 86 | 94 | 89 | 93 | 101 | 104 | | | | | | |

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

| nome | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| peso | 15 | 15 | 15 | 13 | 13 | 5 | 5 | 3 | 1 |
| valore | 52 | 52 | 52 | 40 | 40 | 17 | 17 | 7 | 8 |

Purtroppo, prima di rendersi conto del fortunato ritrovamento, le dentiere dei nonni di Charlie Bucket hanno rosicchiato alcune delle caselle della tabella di programmazione dinamica e tutte le caselle della tabella con le risposte. Si colmino TUTTE (**1pt**) le lacune nella tabella di programmazione dinamica e si identifichino correttamente le risposte (**6pt**) riportandole in tabella.

| B | vincolo agg. | max val | peso | quali prendere |
|---|---|---|---|---|
| 36 | - | | | |
| 36 | escludere I | | | |
| 35 | prendere I | | | |
| 33 | - | | | |
| 33 | prendi I e H | | | |
| 28 | - | | | |

**Problema 4 (8 punti):**

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = AACACTCTTAGCAACAT$ e $t = CATACTGACTTCCATA$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di $s$ e $t$.

**4.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e $t$?

**4.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'T'?

**4.3 (1pt)** e la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e il suffisso $t_{11} = TGACTTCCATA$ di $t$?

**4.4 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $t$ e il suffisso $s_9 = TAGCAACAT$ di $s$?

**4.5 (4pt)** rispondere alle precedenti domande computando inoltre quante siano le sottosequenze di $t$ che attengano l'ottimalità specificata. Si adotti il seguente punto di vista: le sottosequenze di una stringa $t$ di lunghezza $len(t)$ sono in corrispondenza biunivoca coi sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$. Dato un tale sottoinsieme $S$, la sottosequenza che corrisponde ad $S$ si ottiene rimuovendo tutti i caratteri di $t$ tranne quelli la cui posizione originaria appaia in $S$. Chiediamo quanti sottoinsiemi di $\{1, 2, \ldots, len(t)\}$ corrispondano a sottosequenze che trovano un corrispondente in $s$ come da specifiche.

| tipo di sott. comune | lungh. | una sottosequenza ottima (stringa) | num. sott. di $t$ ottime |
|---|---|---|---|
| qualsiasi | | | |
| parte con 'T' | | | |
| tra $s$ e $t_{11}$ | | | |
| tra $s_9$ e $t$ | | | |

**Problema 5 (8 punti):**

Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

$$\max \ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \\ x_3 + 5x_4 \leq 10 + t_2 \\ 2x_5 + x_6 \leq 14 + t_3 \\ x_1 + x_3 + 2x_5 \leq 20 + t_4 \\ x_2 + 5x_4 + x_6 \leq 15 + t_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

5.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) = (6, 5, 0, 2, 7, 0)$ è soluzione ammissibile per $P(0)$.

5.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale $D(t)$ di $P(t)$.

5.3.**(1pt)** Impostare il sistema per la ricerca di una soluzione di base di $D(0)$ soggetta alle condizioni agli scarti complementari rispetto a $\overline{x}$.

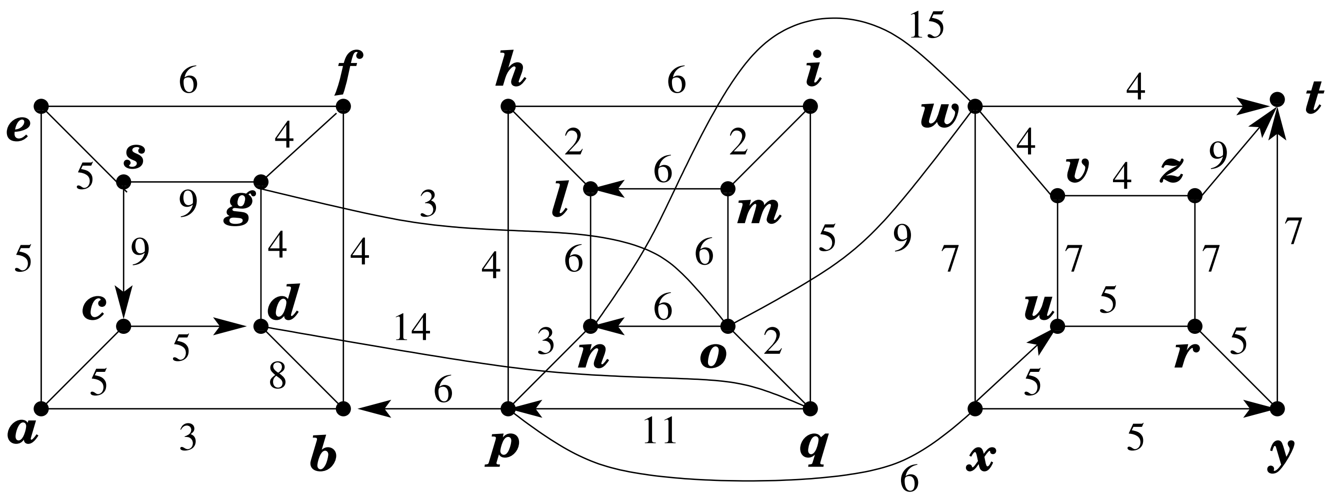
5.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

5.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri $C_1, \ldots, C_6$ la soluzione $\overline{x}$ assegnata è ottima per $P(0)$?

5.6 **(1pt)** esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ e $t_5$ nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

5.7 **(2pt)** per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$, fornire i limiti $a_i$ e $b_i$ tali che il prezzo ombra di $t_i$ sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0 \; \forall j \neq i$). che sei stato chiamato a compiere.

**Problema 6 (20 punti):**
Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.




6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no **(1pt)**; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $ox$ è planare oppure no **(1pt)**.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: il grafo $G$ **(1pt)**; il grafo $G'$ **(1pt)**.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $wo$, $wv$, $wx$.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.9.**(1pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

6.10.**(1pt)** Quanti sono i possibili tagli minimi?

6.11.**(1pt)** Quale è il minimo numero di archi su cui violare il vincolo di capacità per riuscire ad incrementare il flusso massimo? Quali sono questi archi?

6.12.**(1+1pt)** Argomentare che la scelta al punto precedente è ottima. Argomentare che è unica.

6.13.**(1+1pt)** Flusso massimo quando si sia rimosso il vincolo di capacità su questi archi e suo certificato di ottimalità.

## LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

### PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

### PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

### COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI **-completamento esame**

I voti verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.