

# Esame di Ricerca Operativa - 26 settembre 2018

## Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

- **CORREZIONE** - punti in palio: 46, con voto  $\geq$  punti +  $k$ ,  $k \geq 0$

### Problema 1 (5 punti):

Un traghetto ha tre compartimenti per il trasporto delle merci: prua, poppa, stiva. Vi sono dei limiti sul peso e volume di merce trasportabile nei tre compartimenti. La seguente tabella specifica tali limiti in megagrammi (tonnellate) ed in metri cubi, rispettivamente:

Compartimento	Peso (Mg)	Spazio ( $m^3$ )
Prua	10	6800
Poppa	16	8700
Stiva	8	5300

Inoltre, per garantire un galleggiamento bilanciato del traghetto, il peso del carico deve essere ripartito sui tre compartimenti secondo le stesse percentuali delle capacità totali dei singoli compartimenti.

Per il prossimo viaggio abbiamo a disposizione le seguenti 4 tipologie di merce da carico.

Cargo	Peso (Mg)	Volume ( $m^3$ /Mg)	Profitto (Euro/Mg)
$C_1$	18	480	310
$C_2$	15	650	380
$C_3$	23	580	350
$C_4$	12	390	285

Una qualsiasi porzione di queste merci disponibili può essere trasportata (la tabella specifica solo la quantità massima, ossia quella attualmente presente nei magazzini di terra). Formulare come problema di programmazione lineare il problema di determinare quanto trasportare di ciascuna merce e come ripartirla sui compartimenti col fine di massimizzare il profitto.

**svolgimento.** Preferisco questo problema resti come esercizio aperto, maggiormente utile per esercitarsi. Per i pochi che si sono iscritti a questo appello autunnale, nel prossimo periodo (di lezioni) sarà facile reperirmi ove servissero spiegazioni e per visionare insieme il compito.

### Problema 2 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe  $s = \text{CTATAGAGGTCACTATG}$  e  $t = \text{ATGCAGCTAGGACTGT}$ . Fare lo stesso con alcuni prefissi di  $s$  e  $t$ .

**2.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e  $t$ ?

**2.2(1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

**2.3(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e il prefisso  $t_9 = \text{ATGCAGCTA}$  di  $t$ ?

**2.4(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $t$  e il prefisso  $s_8 = \text{CTATAGAG}$  di  $s$ ?

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

$s \backslash$	-	A	T	G	C	A	G	C	T	A	G	G	A	C	T	G	T
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
T	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
A	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
T	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
A	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
G	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
A	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
G	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
G	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
T	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
C	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
A	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
A	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
G	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	ATAGAGGACTG
termina con 'C'	9	ATAGAGGAC
tra $s$ e $t_9$	8	ATGAGCTA
tra $s_8$ e $t$	7	TATAGAG

**Problema 3 (3+3=6 punti):**

Formulare come un problema di PLI il problema di trovare la piú lunga sottosequenza strettamente crescente di una sequenza assegnata  $s = s_1 s_2 \cdots s_n$  di valori interi.

**(2pt)** Nel caso in cui  $n = 7$ ,  $s_1 = 33$ ,  $s_2 = 18$ ,  $s_3 = 50$ ,  $s_4 = 22$ ,  $s_5 = 45$ ,  $s_6 = 72$ ,  $s_7 = 64$ .

**(3pt)** In generale.

**svolgimento. (3pt)** Preferisco affrontare una volta per tutte il caso generale, e poi istanziare il caso particolare senza ripetizioni. La prima cosa da fare è introdurre delle variabili che consentano di descrivere lo spazio delle scelte. Abbiamo una variabile  $x_i \in \{0, 1\}$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , con l'idea che 1 significa “elemento  $s_i$  della sequenza  $s$  incluso nella sottosequenza soluzione” mentre 0 significa la negazione di quanto sopra.

Volendo massimizzare la cardinalità della sottosequenza crescente riscontrata adotteremo la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=1}^n x_i$$

Avremo una famiglia di vincoli intesi ad imporre la stretta crescita: di fatto una sequenza é crescente se e solo se non contiene due elementi di cui il primo ecceda il secondo, ed é questa condizione “locale” che non risulta difficile formulare tramite i seguenti vincoli.

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni coppia } i, j = 1, 2, \dots, m \text{ con } i < j \text{ tale che } s_i \geq s_j.$$

**(3pt)** Nel caso particolare dell'istanza proposta ( $n = 7$  e 5 inversioni) questo si traduce nel seguente problema di PLI con 7 variabili e 5 vincoli:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_3 + x_5 \leq 1 \\ & x_6 + x_7 \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(1)

**Problema 4 (8 punti):**

Un robot  $R$ , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home  $H$  situata nella cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>A</i>	<i>R</i>	1	3	0	1	1	0	0	●
<i>B</i>	2	2	0	0	●	●	0	0	0
<i>C</i>	2	2	0	1	0	0	1	1	1
<i>D</i>	0	0	●	0	0	0	1	0	0
<i>E</i>	0	0	1	1	●	1	0	0	0
<i>F</i>	0	1	1	1	0	1	●	●	1
<i>G</i>	3	3	0	1	●	0	0	1	<i>H</i>

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (●) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

**4.1(1pt)** Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

**4.2(1pt)** e se la partenza è in B-3?

**4.3(1pt)** e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

**4.4(1pt)** e se con partenza in A-1 ed arrivo in G-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

**4.5(2pt)** Quale é il massimo guadagno raccogliabile nella traversata da A-1 a G-9? **(1pt)**  
Specificare una tale soluzione con una sequenza di B (basso) e D (destra) **(1pt)**.

**4.6(2pt)** Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

**svolgimento.** La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella *C*, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella *C* alla cella G-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>A</i>	250	149	80	36	14	14	14	4	●
<i>B</i>	101	69	44	22	●	●	10	4	1
<i>C</i>	32	25	22	22	16	11	6	3	1
<i>D</i>	7	3	●	6	5	5	3	2	1
<i>E</i>	4	3	2	1	●	2	1	1	1
<i>F</i>	1	1	1	1	1	1	●	●	1
<i>G</i>	0	0	0	0	●	1	1	1	<i>H</i>

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella *C*, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A-1 alla cella *C*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	•	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	•	•	194
G	1	7	18	44	•	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A-1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0 <sub>1</sub>	1 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	5 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	6 <sub>1</sub>	•
B	2 <sub>1</sub>	4 <sub>1</sub>	4 <sub>2</sub>	4 <sub>3</sub>	•	•	6 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>2</sub>
C	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	6 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>2</sub>	9 <sub>2</sub>	10 <sub>2</sub>
D	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	•	7 <sub>2</sub>	7 <sub>4</sub>	7 <sub>6</sub>	9 <sub>2</sub>	9 <sub>4</sub>	10 <sub>2</sub>
E	4 <sub>1</sub>	6 <sub>2</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>4</sub>	•	7 <sub>6</sub>	9 <sub>2</sub>	9 <sub>6</sub>	10 <sub>2</sub>
F	4 <sub>1</sub>	7 <sub>2</sub>	8 <sub>4</sub>	9 <sub>8</sub>	9 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	•	•	10 <sub>2</sub>
G	7 <sub>1</sub>	10 <sub>2</sub>	10 <sub>2</sub>	11 <sub>2</sub>	•	10 <sub>8</sub>	18 <sub>8</sub>	10 <sub>8</sub>	11 <sub>10</sub>

Leggendo i valori riportati nella cella G-9 scopriamo che il massimo valore raccogliabile dal robot lungo la sua traversata é di 11, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A-1 → G-9	250		
B-3 → G-9	44		
A-1 → F-6	56		
passaggio per D-5	$100 = 20 \cdot 5$		
massimo valore		11	BBDBBBDDDDDBDDDD
max-val paths	10		

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

Si consideri il grafo  $G$ , con pesi sugli archi, riportato in figura.

- risposte.** Ometto la correzione anche di questo esercizio (per i pochi che si sono iscritti a questo appello autunnale, nel prossimo periodo (di lezioni) sarà facile reperirmi ove servissero spiegazioni e per visionare insieme il compito.)

Tengo piuttosto a ricordare la disponibilità a riconoscere ai fini del voto ogni progetto che possa essere utile al corso. Per esempio, sarebbe interessante curare la resa anche interattiva di correzioni di esercizi come questo sotto sage, entro un Jupyter Notebook. La riproposizione di questo stesso esercizio entro nbgrader potrebbe servirmi come progetto pilot, sarebbe quindi un progetto che anche da solo vale l'esame. Per chi non ha paura ed anzi gli piace programmare, vorrei realizzare problemi di ricerca operativa entro il sistema opensource TuringArena (<https://github.com/turingarena/turingarena>) alla cui realizzazione stiamo lavorando.

---

**Problema 6 (7 punti):**

Al solito valgono solo le argomentazioni conclusive od i certificati (potete ovviamente fare riferimento a teoremi noti).

- 6.1(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia illimitato ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Argomentare la risposta.
- 6.2(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale sia anch'esso non ammissibile? Certificare la risposta.
- 6.3(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Certificare la risposta.
- 6.4(1pt) Costruire un problema di PL in forma standard il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 2 soluzioni ottime di base.
- 6.5(1pt) Costruire un problema di PL in forma standard la cui unica soluzione ottima sia degenerare.
- 6.6(1pt) É possibile costruire un problema di PL in forma standard con due variabili e almeno 3 soluzioni ottime di base.
- 6.7(1pt) É possibile costruire un problema di PL in forma standard con tre variabili e precisamente 5 soluzioni ottime di base.

**solo le risp (che da sole non fanno alcun punto).**

- 6.1(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia illimitato ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? No, ma **quale potrà essere una conveniente argomentazione?**
- 6.2(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale sia anch'esso non ammissibile? Sì, ma **quale potrà essere un conveniente certificato?**
- 6.3(1pt) É possibile costruire un problema di PL che sia non ammissibile ed il cui duale abbia infinite soluzioni ottime? Sì, ma **quale potrà essere un conveniente certificato?**
- 6.6(1pt) É possibile costruire un problema di PL in forma standard con due variabili e almeno 3 soluzioni ottime di base. No, ma **quale potrà essere una conveniente argomentazione?**
- 6.7(1pt) É possibile costruire un problema di PL in forma standard con tre variabili e precisamente 5 soluzioni ottime di base. Sì. ma **quale potrà essere un conveniente certificato?**

**CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME**

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino



col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo. L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

<http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html>

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sé, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarvi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavorare per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti

punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

**gestione dei voti conseguiti.**

I voti dei singoli appelli verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.