

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

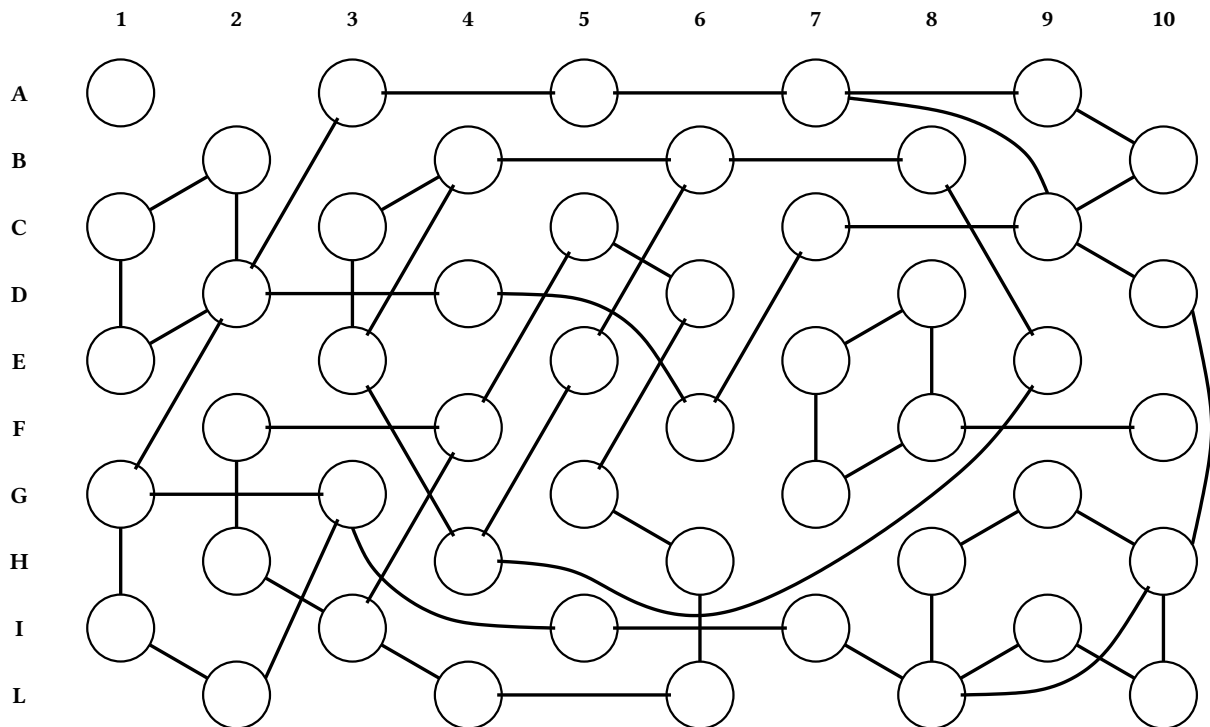
FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 03 luglio 2025

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

5 esercizi per 97 punti in palio voto \geq punti - 5, 40 \rightarrow 30 e lode

Esercizio 1 (con 6 richieste: 1+1+3+1+1+1 = 8 punti [grafi visual]):



Richieste dell'Esercizio 1

1.1 (1 pt, componenti connesse) Colora i nodi in modo da evidenziare le diverse componenti connesse

1.2 (1 pt, distingui nodi e archi speciali)

nodì isolati	foglie	cutnodes	bridges

1.3 (3 pt, make bipartite) rendi il grafo bipartito rimuovendo il minor numero di archi (1pt se suggerisci quali archi rimuovere ed evidenzi la bipartizione del grafo risultante, 1pt se esibisci una famiglia di cicli dispari che richiedano la rimozione di quel numero di archi per essere tutti eliminati, 1pt per il numero di soluzioni ottime). Addobba sempre la figura sopra per l'esibizione dei certificati

1.4 (1 pt, planarità) Dire se planare oppure no, argomentandolo via certificati

1.5 (1 pt, Hamilton) Per ogni componente di più nodi, fornire un ciclo Hamiltoniano se presente, altrimenti un cammino Hamiltoniano se presente, altrimenti spiega perchè no

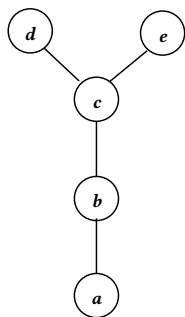
1.6 (1 pt, Eulero) Per ogni componente di più nodi, stabilire se ammetta un ciclo Euleriano, e, in caso contrario, stabilire se ammetta un cammino Euleriano (stabilire=certificato di SI oppure di NO)

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+3+2+2+1+7+5+5 = 26 punti [modellazione/riduzioni]):

In un grafo $G = (V, E)$, chiamiamo:

1. *independent set* ogni $X \subseteq V$ tale che nessun arco in E abbia entrambi gli estremi in X ,
2. *matching* ogni $M \subseteq E$ non contenente due archi con un estremo in comune.

Un independent set (o matching) è detto *massimale* se non è strettamente contenuto in un altro independent set (o matching, rispettivamente).



Due problemi modello espressi nel linguaggio dei grafi sono:

1. MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET: trova un independent set massimale di cardinalità la più piccola possibile.
2. MIN MAXIMAL MATCHING: trova un matching massimale di cardinalità la più piccola possibile.

Qui il matching $M = \{bc\}$ e l'independent set $X = \{a, c\}$ sono entrambi massimali ma non di cardinalità massima, anzi, sono proprio quelli di cardinalità minima come da ricercarsi nei due problemi sopra introdotti.

Richieste dell'Esercizio 2

- 2.1 (1 pt, rimappatura) Esprimere l'istanza di MIN MAXIMAL MATCHING data in figura in termini di un'opportuna istanza di MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET. Assicurati che gli independent set del grafo da te prodotto siano in corrispondenza biunivoca coi matching del grafo in figura.
- 2.2 (3 pt, riduzione tra problemi) Ridurre MIN MAXIMAL MATCHING a MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET (1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).
- 2.3 (2 pt, model minMIS as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).
- 2.4 (2 pt, model minMM as ILP) Formula con la Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MIN MAXIMAL MATCHING per la specifica istanza in figura (1pt) e per grafo generico (1pt).
- 2.5 (1 pt, closed formula) Dare la formula chiusa per la minima cardinalità di un maximal independent set e per quella di un maximal matching sul cammino di n nodi.
- 2.6 (7 pt, dynamic programming) Nel problema MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET PESATO a ciascun nodo del grafo ricevuto in input è associato un costo e quello che vogliamo determinare è il minimo costo (definito come la somma dei costi sui nodi presi) di un independent set massimale. Assegniamo 1pt se determini correttamente il minimo costo per il cammino dove i nodi, come incontrati nell'ordine lungo il cammino, abbiano costo 1,7,2,3,9,1,2,5,2,4,6,3,4,2,2. Miriamo a progettare un algoritmo di programmazione dinamica per MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET PESATO ristretto a cammini: 3pt per la famiglia di sotto-problemi associate ai nodi, 2pt per la ricorrenza, 1pt per i casi base.
- 2.7 (5 pt, classic model knowledge) Descrivi il problema/modello MIN NODE COVER (1pt) e dimostrane l'NP-completezza (ne abbiamo visto una dimostrazione in classe). 1pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 2pt per il lemma hard).
- 2.8 (5 pt, NPC-proof for minMIS) Ridurre MIN NODE COVER a MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET per dimostrare l'NP-completezza di quest'ultimo (3pt per la riduzione, 1pt per il lemma easy, 1pt per il lemma hard).

Esercizio 3 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home, nella cella I-10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	3	1	0	1	1	0	0	●	6
B	2	●	1	●	0	0	●	0	0	5
C	0	●	0	0	●	2	0	1	1	4
D	0	0	1	0	1	0	1	●	0	3
E	0	0	●	2	0	●	2	0	0	1
F	0	1	3	1	1	3	1	●	0	1
G	●	3	2	1	2	●	●	3	1	●
H	2	1	2	●	●	1	1	1	●	0
I	4	4	3	3	2	1	1	●	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3) e il passo diagonale (che in pratica porta direttamente alla cella raggiunta concatenando quello orizzontale e quello verticale). Se il robot deve evitare le celle proibite (●), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un pedaggio del valore riportato nella cella stessa, sapresti minimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 3

- 3.1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da A-1 a I-10
3.2 (1 pt, num percorsi da B-3) Numero di percorsi ammissibili da B-3 a I-10
3.3 (1 pt, num percorsi a F-6) Numero di percorsi ammissibili da A-1 a F-6
3.4 (1 pt, num percorsi per D-5) Numero di percorsi da A-1 a I-10 passanti per D-5
3.5 (1 pt, opt val) Minimo totale di pedaggi su un cammino da A-1 a I-10. (E soluzione di tale valore).
3.6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da A-1 a I-10
3.7 (1 pt, opt val per D-5) Minimo totale di pedaggi su un cammino da A-1 a I-10 passante per D-5
3.8 (2 pt, num paths of opt val via D-5) Numero cammini ottimi da A-1 a I-10 passanti per D-5

Quadro delle risposte dell'Esercizio 3

consegna	num. paths	opt val	un path (percorso) ottimo
A-1 → I-10			
B-3 → I-10			
A-1 → F-6			
passaggio per D-5			
minimo costo			
n. min-cost paths			
min-cost D-5-path			
n. min-cost D-5-paths			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 3: **num cammini a**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 4: **num cammini da**

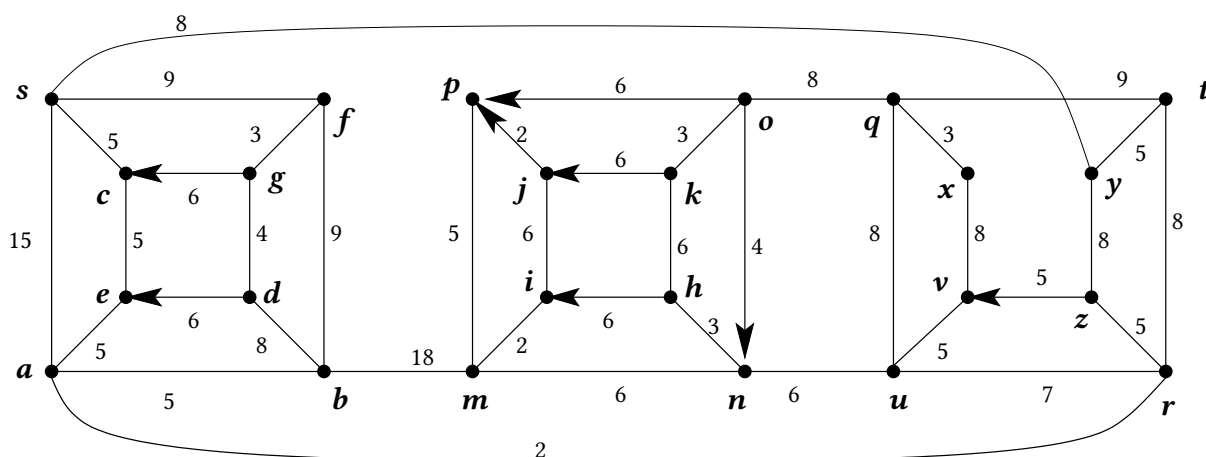
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 5: **opt val path to (e num opt paths)**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										

Tabella 6: **opt val path from (e num opt paths)**

Esercizio 4 (con 11 richieste: 3+2+2+2+2+2+1+2+4+5+2 = 27 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 4

- 4.1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G , il grafo G_u ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco su , e il grafo G_q ottenuto da G sostituendo l'arco sy con un arco sq .
- 4.2 (2 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G , G_u e G_q (1pt se corretti tutti i certificati di bicolazione, 1 pt se ok ogni certificato di ottimalità).
- 4.3 (2 pt, max flow) In G , trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 4.4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.
- 4.5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.
- 4.6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).
- 4.7 (1 pt, one MST) In G , fornire un albero ricoprente di peso minimo.
- 4.8 (2 pt, MST categorize edges) Etichetta ciascun arco con la lettera A se appartiene a ogni MST, B se a nessuno, C altrimenti. (Se li hai ti conviene usare 3 colori.)
- 4.9 (4 pt, count MSTs) Quanti sono gli MST in G ?
- 4.10 (5 pt, MST certificates) Per ciascuno dei quattro archi incidenti nel nodo m certificare l'etichetta assegnatagli al punto precedente.
- 4.11 (2 pt, max match) Fornire un matching di massima cardinalità in $G_{s,r}$, il grafo ottenuto da G rimuovendo i nodi s ed r (1pt). Certifica la non esistenza di un matching con un numero maggiore di archi? (1pt)

Quadro delle risposte dell'Esercizio 4

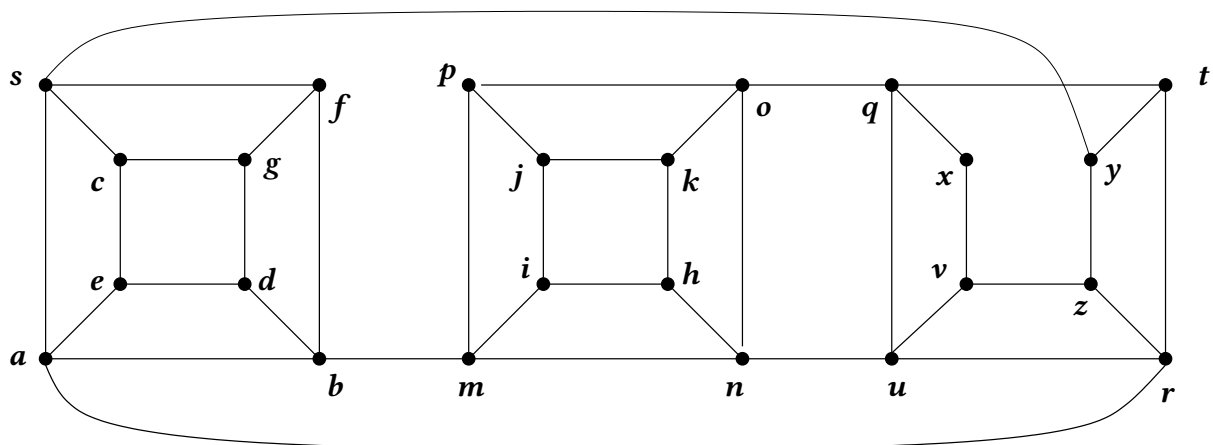


Figura 1: **planarità o meno di G .**

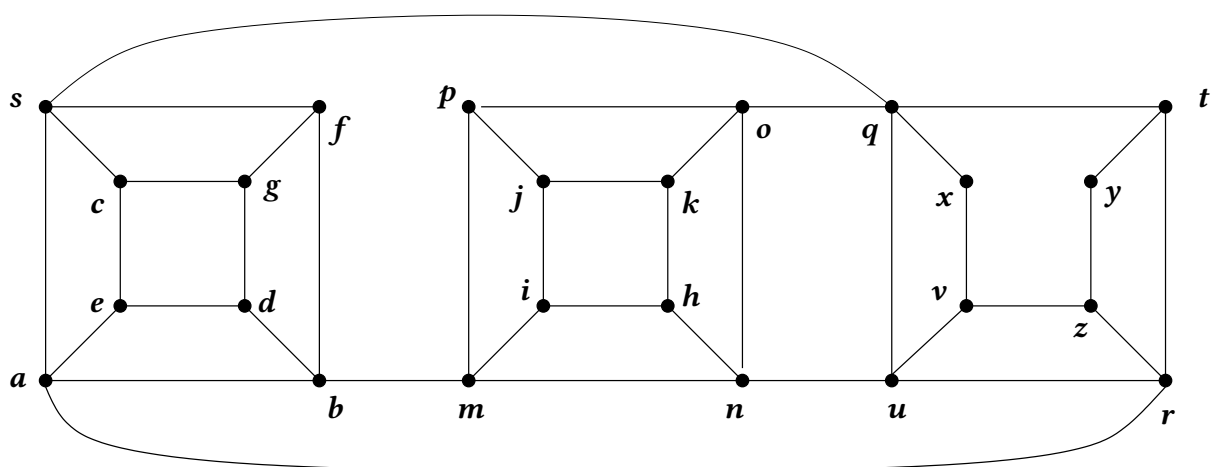


Figura 2: **planarità o meno di G_q .**

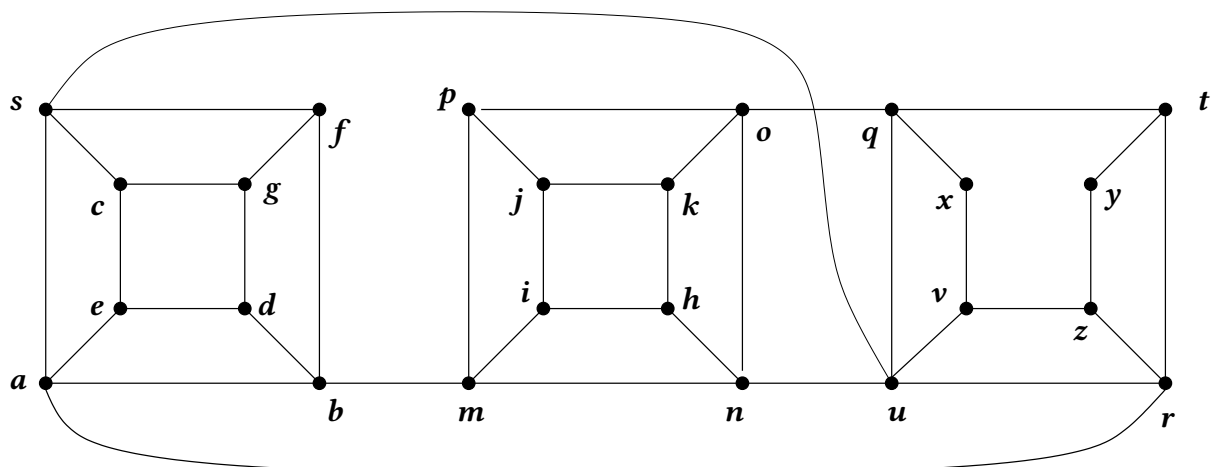


Figura 3: **planarità o meno di G_u .**

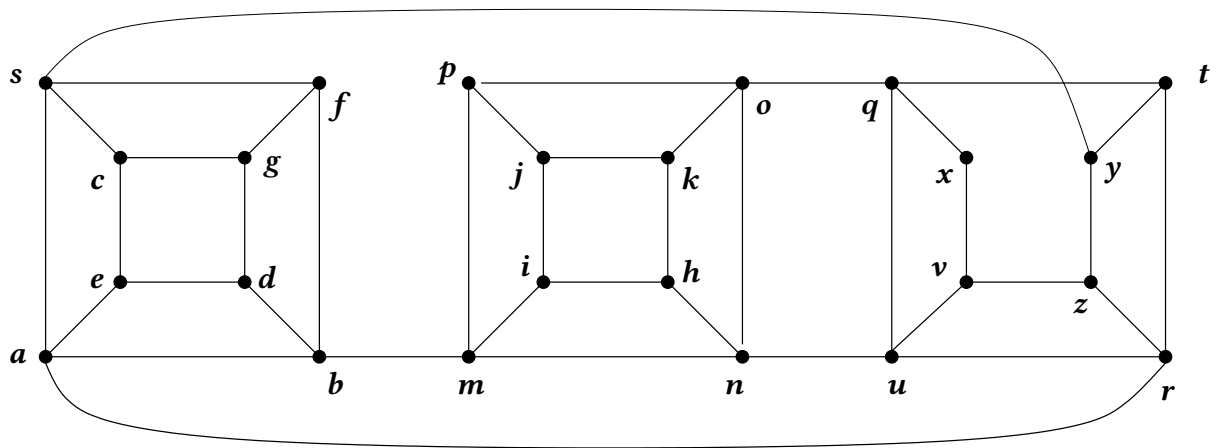


Figura 4: **bipartiteness** di G .

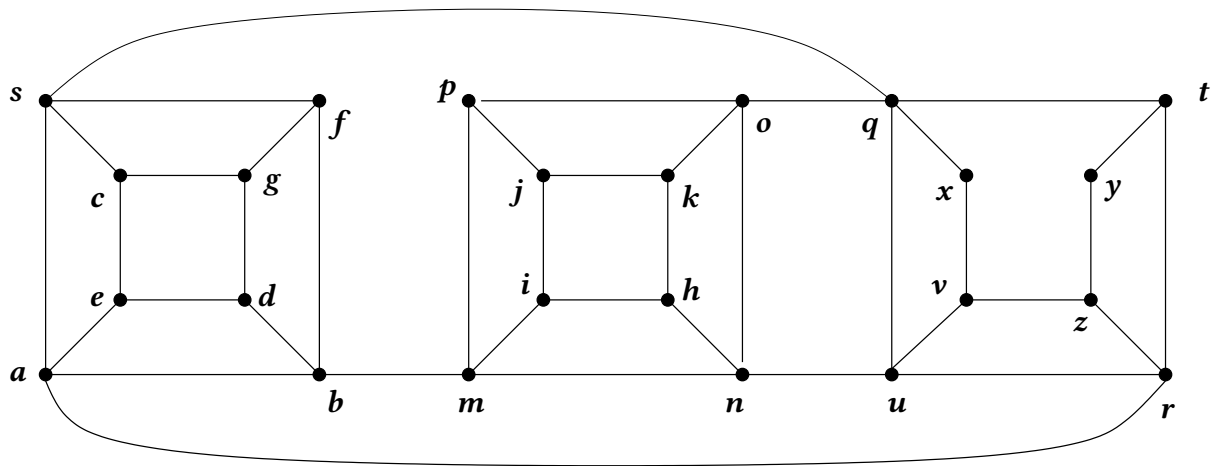


Figura 5: **bipartiteness** di G_q .

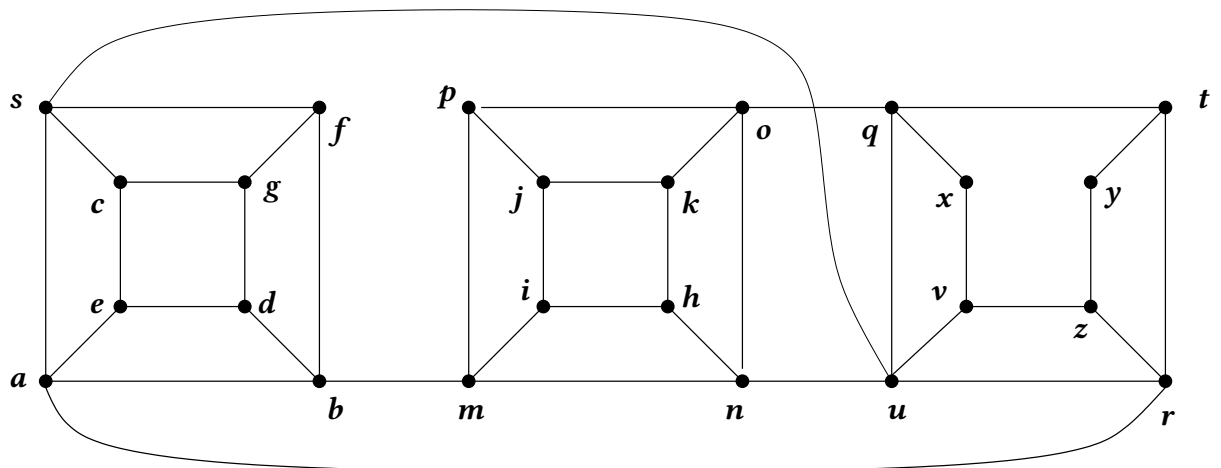
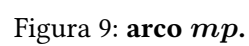
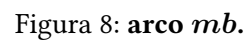
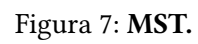


Figura 6: **bipartiteness** di G_u .



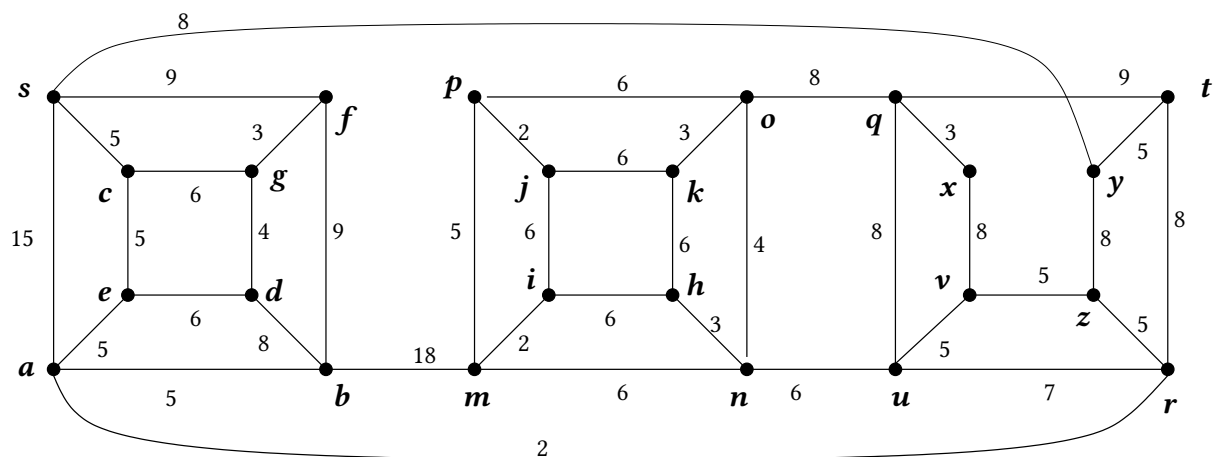


Figura 10: arco mi .

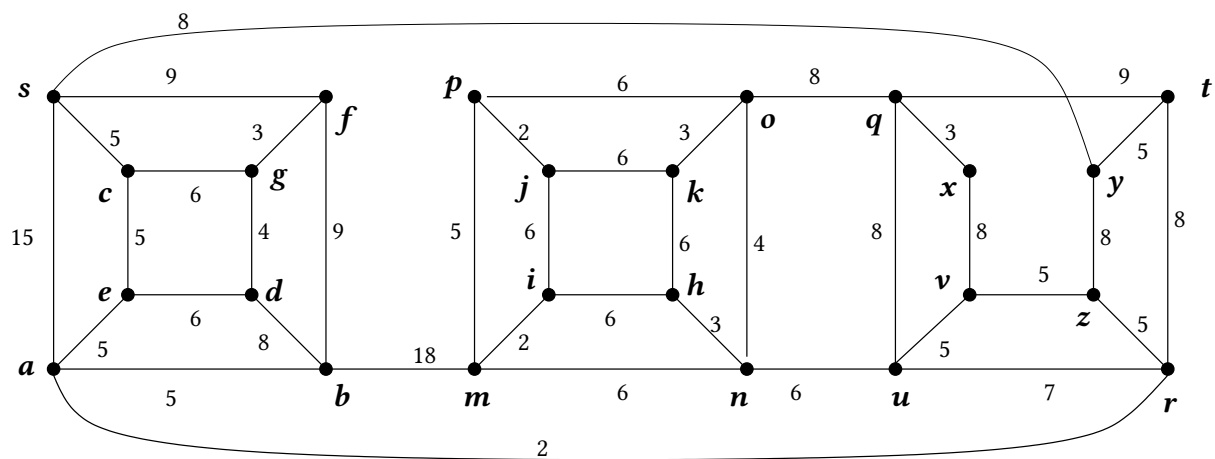


Figura 11: arco mn .

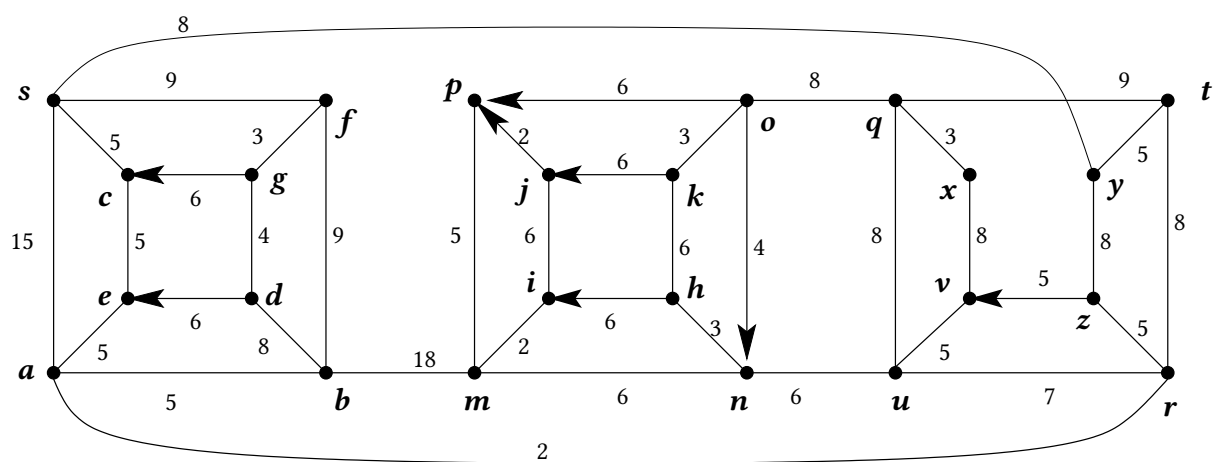


Figura 12: max-flow min-cut.

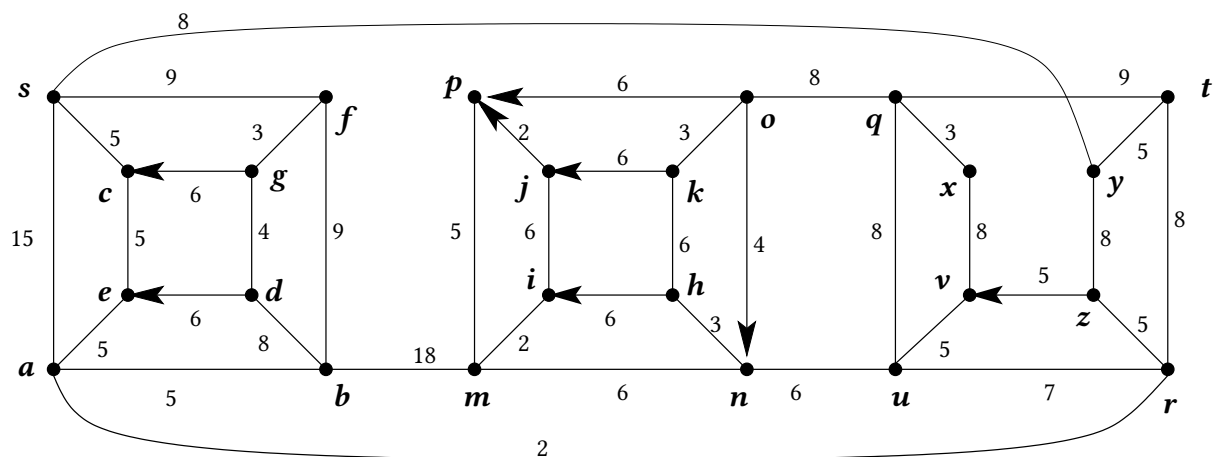


Figura 13: certificati di corretta valutazione della sensitività per l'arco scelto.

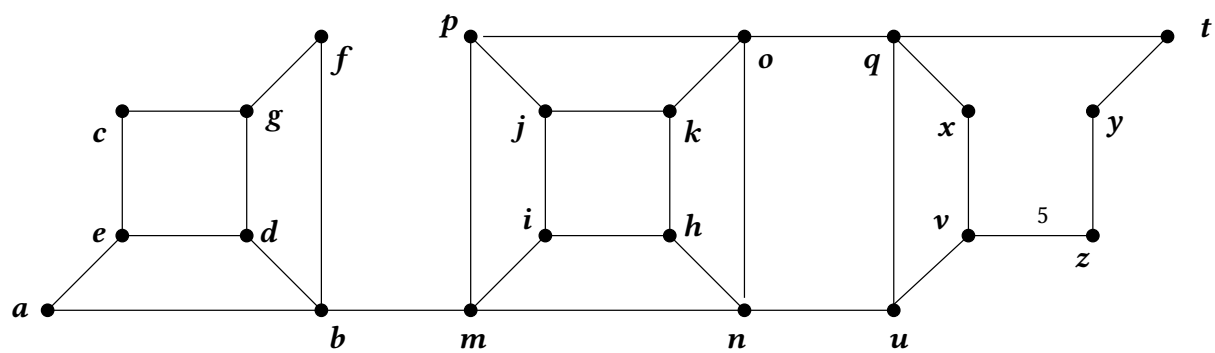


Figura 14: max matching.

Esercizio 5 (con 10 richieste: 1+5+2+2+1+4+2+3+2+4 = 26 punti [simplesso]):

Nel seguente problema di PL, K è un parametro a valori reali (in \mathbb{R}).

$$\begin{array}{rcll} \min & 5x_A + 2x_B + 2x_C + Kx_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 & & \\ & x_A & + & x_1 \geq 1 \\ & -x_A & & -x_2 \leq -1 \\ & x_A & & +x_3 \geq 1 \\ & x_A & & +x_3 - x_4 \geq 1 \\ & & x_B & +x_2 \geq 1 \\ & & x_C & +x_2 \geq 1 \\ & x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \leq 0 & & \end{array}$$

Richieste dell'Esercizio 5

5 .1 (1 pt, standard form) Portare il problema nella forma di minimizzazione standard ($\min\{c'x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$). Nota: per evitare di introdurre confusione sugli effettivi valori delle variabili, nelle domande a seguire ci riferiremo sempre al problema già portato in forma standard. Lo chiameremo problema P , mentre chiameremo problema P' il problema originale fornito sopra.

5 .2 (5 pt, recognize structure) Cosa sai dire sulla forma della matrice dei coefficienti? (1pt) Di quale importante proprietà gode quindi tale matrice in virtù della sua struttura? (1pt) Sapresti dimostrare che se A è una matrice che gode di tale proprietà allora anche la matrice $(A \mid I)$ ottenuta affiancando ad essa la matrice identità dello stesso numero di righe gode della proprietà? (2pt) Che conseguenze ne derivano per il poliedro delle soluzioni ammissibili? (1pt)

5 .3 (2 pt, foresee the form of optimal basic solutions) Si assuma $K \geq 0$ e sia x una qualsiasi soluzione di base per il problema P . Quanto al punto precedente già esclude che le sue coordinate possano assumere molti valori reali. Argomenta il necessario per dedurre da quanto al punto precedente, e riconsiderando la struttura del problema P nel suo complesso, che i valori possibili per ciascuna coordinata di x sono al massimo due. (1pt) Quali sono questi due valori per P e per P' ? (1pt)

5 .4 (2 pt, combinatorial problem view) In virtù di quanto sopra, riesci a rappresentarti il problema P come un qualche problema combinatorico, magari dandone rappresentazione su un qualche grafo pesato? Cosa sono le soluzioni ammissibili di questo problema combinatorico? (1pt) Riesci a scorgere quali possano essere le soluzioni ottime per questo problema al variare di K ? Cosa sono le soluzioni ammissibili del problema combinatorico duale? (1pt) Riesci a scorgere quali possano essere le soluzioni ottime del duale al variare di K ? (1pt)

5 .5 (1 pt, canonic form) Scrivere la forma canonica di P (il primo dizionario) e il primo tableau. Leggerne la prima soluzione di base associata. Interpretare il significato combinatorico di tale soluzione di base (se hai espresso la visione combinatorica nel punto precedente).

5 .6 (4 pt, simplex method) Risolvi all'ottimo col metodo del simplesso dopo aver scelto un qualsiasi valore per K , la visione combinatorica può aiutarti a sceglierlo in modo da fare 2 soli pivot. In compenso, se hai espresso la visione combinatorica, vedi di commentare ad ogni pivot dove ti trovi sul problema combinatorico. (3pt) Spendi esplicitamente (in chiarezza) almeno una prova del nove, al passaggio che preferisci. (1pt)

5 .7 (2 pt, get dual LP) Scrivi l'LP duale D di P (1pt). Fornire soluzione ottima di D per lo stesso valore scelto per K (1pt).

5 .8 (3 pt, complementary slackness conditions) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari (2pt). Verificale una per una sulla coppia di soluzioni prodotte (1pt).

5 .9 (2 pt, eval optimality) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione primale è ottima (1pt). Dove

ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K ? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K . (1pt) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione duale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K ? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K . (1pt)

5.10 (4 pt, eval optimality) Fornire soluzione primale e duale ottime per il range complementare di K (1pt). Stabilire per quali valori di K la tua soluzione primale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K ? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K . (1pt) Stabilire per quali valori di K la tua soluzione duale è ottima (1pt). Dove ottima, cosa può fungere da certificato di ottimalità a prescindere dal valore di K ? Mostra come usare il certificato per argomentare l'ottimalità su tutto quel range per K . (1pt) Esprimi ogni condizione degli scarti complementari per tale coppia di soluzioni e verificale (1pt).

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame -collaborare al controllo

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccogliarli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame) oppure portatevi altre cose da fare in quelle ore.

Procedura da seguire per ogni esercizio -assegnazione punti

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti -completamento esame

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito va richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.