Esame di Ricerca Operativa - 23 luglio 2024

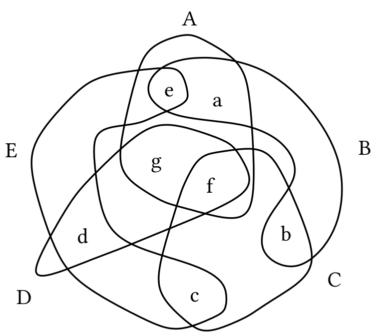
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 56 punti in palio (voto $\geq$ punti -6, $40 \longrightarrow 30$ *e lode*)

- CORREZIONE -

Esercizio 1 (con 7 richieste: 1+1+1+1+1+1+4 = 10 punti [modellazione/riduzioni]):

Un ipergrafo è una coppia $H = (U, \mathcal{E})$ con U un insieme finito di elementi chiamati *nodi* ed $\mathcal{E}$ una famiglia di sottoinsiemi non-vuoti di U chiamati *iperarchi*. In pratica H è una qualsiasi famiglia di insiemi non-vuoti, e viene chiamato anche col nome di *set system*. Un *set cover* di H è un qualsiasi sottoinsieme $\mathcal{E}'$ di $\mathcal{E}$ tale che $\cup_{e \in \mathcal{E}'} e = U$.



esempio. i set covers dell'ipergrafo $\overline{H}$ in figura sono $\{A, B, E\}$, $\{A, C, D\}$, $\{A, C, E\}$, $\{B, D, E\}$ e tutti i loro sovrainsiemi. Non è invece set cover di $\overline{H}$ alcun sottoinsieme di $\{A, B, C\}$ (il nodo d rimarrebbe scoperto), di $\{A, B, D\}$ (manca c), di $\{A, D, E\}$ (manca b), di $\{B, C, D\}$ (manca e), di $\{B, C, E\}$ (manca g), o di $\{C, D, E\}$ (manca a).

Min Set Cover è il problema di trovare un set cover di minima cardinalità per un generico ipergrafo H dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

1 .1 (1 pt, model via hypergraphs) Vuoi inviare una mail pubblicitaria al maggior numero possibile di persone. Tali liste overlappano ma, escluse quelle non opportune, esse coprono complessivamente un sottoinsieme U della popolazione di tuo interesse. Rinunci ai destinatari al di fuori di U, ma stabilisci di dover raggiungere quantomeno chiunque ricada in U. Modella il problema di farlo minimizzando il numero di mailing list impiegate come un problema di Min Set Cover.

1 .2 (1 pt, forge hypergraph model) In realtà a ciascuna mailing list è associato un costo di utilizzo. Prova a definire un problema Min Set Cover Pesato che ti consenta di meglio rappresentare il tuo problema.

1 .3 (1 pt, model your problem) Assumi ora che il costo di impiego di ciascuna mailing list sia nullo, o trascurabile. Poniti piuttosto il problema di minimizzare il numero totale di mail che finirebbero nelle mailing box dei destinatari, pur assicurandoti che ogni persona in U sia raggiunta da almeno una mail. Mostra come anche in questa situazione potresti comunque avvalerti del problema/modello Min Set Cover Pesato.

1 .4 (1 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema Min Set Cover per la specifica istanza $\overline{H}$ in figura.

1 .5 (1 pt, instance-specific dual LP) Scrivi il problema duale del rilassamento continuo dello specifico problema di PLI di cui al punto precedente.

1 .6 (1 pt, generalize ILP model) Estendi la tua formulazione PLI a un generico ipergrafo $H = (U, \mathcal{E})$.

1 .7 (4 pt, NP-hardness proof) 3-SAT è un problema di decisione noto essere NP-completo. Sfrutta questo fatto per dimostrare che il problema di ottimizzazione Min Set Cover è NP-hard. Un modo conveniente per farlo è introdurre una versione decisionale del problema Min Set Cover, osservare che la forma di ottimizzazione di nostro interesse non può essere che più facile della forma decisionale da te introdotta, e dare una riduzione da 3-SAT alla tua forma decisionale.

Svolgimento esercizio 1 .
Richiesta 1. Si consideri l'ipergrafo che ha per nodi gli elementi di U e dove per ogni mailing list si abbia un iperarco costituito precisamente da quegli elementi in U che siano iscritti in detta mailing list. Si noti che un sottoinsieme di questi iperarchi è un set cover in questo ipergrafo se e solo se la loro unione restituisce l'intero U. Pertanto, il problema di nostro interesse può essere visto come la ricerca di un set cover di cardinalità minima entro un ipergrafo dato, ricade cioè nel problema/modello MIN SET COVER.

Richiesta 2. Ad ogni iperarco si associa il costo della mailing list che esso rappresenta. In questo modo, se intendiamo minimizzare i costi pur ricoprendo l'intero U, ci ritroviamo con un'istanza di MIN SET COVER PESATO. Questo problema/modello più generale è definito come la variante di MIN SET COVER dove in input, oltre a $H = (U, \mathcal{E})$, mi viene inoltre specificata una funzione $c : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{N}$, dove, per ogni iperarco $i \in \mathcal{E}$, il valore $c_i := c(v)$ riporta il costo di includere l'iperarco i nella soluzione (ossia quanto mi costi impiegare la mailing list corrispondente). Il problema MIN SET COVER PESATO chiede di trovare un set cover nell'ipergrafo in input che minimizzi la somma dei costi come presa sugli iperarchi inclusi.

Richiesta 3.

L'idea è semplice: si associ ad ogni iperarco un costo pari al numero dei suoi nodi.

Richiesta 4.

Per stabilire quali iperarchi vadano presi introduciamo le variabili binarie

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \in \{0, 1\}$$

Volendo minimizzare la cardinalità del set cover selezionato, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min x_A + x_B + x_C + x_D + x_E$$

Abbiamo un'unica famiglia di vincoli, che prevede precisamente un vincolo per ogni nodo:

nodo *a*: $x_A + x_B \geq 1$
nodo *b*: $x_B + x_C \geq 1$
nodo *c*: $x_C + x_E \geq 1$
nodo *d*: $x_D + x_E \geq 1$
nodo *e*: $x_A + x_B + x_E \geq 1$
nodo *f*: $x_A + x_C + x_D \geq 1$
nodo *g*: $x_A + x_D \geq 1$

Questi vincoli impongono che il sottoinsieme di iperarchi descritto dal vetore x formi effettivamente un set cover.

Richiesta 5.

Il rilassamento continuo sarà:

$$
\begin{aligned}
\min x_A + x_B + x_C + x_D + x_E & & \\
x_A + x_B \qquad\qquad\qquad\qquad & \geq 1 & \text{(nodo } a\text{)} \\
x_B + x_C \qquad\qquad\quad & \geq 1 & \text{(nodo } b\text{)} \\
x_C \qquad + x_E & \geq 1 & \text{(nodo } c\text{)} \\
x_D + x_E & \geq 1 & \text{(nodo } d\text{)} \\
x_A + x_B \qquad\qquad + x_E & \geq 1 & \text{(nodo } e\text{)} \\
x_A \qquad + x_C + x_D \qquad & \geq 1 & \text{(nodo } f\text{)} \\
x_A \qquad\qquad + x_D \qquad & \geq 1 & \text{(nodo } g\text{)} \\
x_A, x_B, x_C, x_D, x_E \geq 0 & &
\end{aligned}
$$

Sempre per la specifica istanza data in figura, il duale del rilassamento continuo sarà:

$$
\begin{aligned}
\max y_a + y_b + y_c + y_d + y_e + y_f + y_g & & \\
y_a \qquad\qquad\qquad + y_e + y_f + y_g & \leq 1 & \text{(iperarco } A\text{)} \\
y_a + y_b \qquad\qquad + y_e \qquad\qquad & \leq 1 & \text{(iperarco } B\text{)} \\
y_b + y_c \qquad\qquad + y_f \qquad & \leq 1 & \text{(iperarco } C\text{)} \\
y_d \qquad + y_f + y_g & \leq 1 & \text{(iperarco } D\text{)} \\
y_c + y_d + y_e \qquad\qquad & \leq 1 & \text{(iperarco } E\text{)} \\
y_a, y_b, y_c, y_d, y_e, y_f, y_g \geq 0 & &
\end{aligned}
$$

Richiesta 6. Per fornire la formulazione PLI generale di Min Set Cover, introduciamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per ogni iperarco i del generico ipergrafo $H = (U, \mathcal{E})$ che potremmo ricevere in input. Come sopra, $x_i = 1$ significa «iperarco i incluso nel set cover soluzione» mentre $x_i = 0$ significa «iperarco i NON incluso nel set cover soluzione».

La funzione obbiettivo sarà:

$$\min \sum_{i \in U} x_i$$

E la famiglia di vincoli è:

$$\sum_{i \ni u} x_i \geq 1 \quad \text{per ogni} \quad u \in U$$

Da tenere inoltre presenti i vincoli di non-negatività.

Richiesta 7.

Nella forma decisionale di Min Set Cover, oltre ad un ipergrafo $H = (U, \mathcal{E})$ riceviamo in input un numero naturale $B \in \mathbb{N}$. La domanda cui rispondere vero o falso è se H ammetta o meno un set cover di al più B iperarchi. La forma decisionale è chiaramente in NP, il certificato è un set cover di al più B iperarchi. Inoltre, se sapessimo risolvere il problema Min Set Cover nella forma originale, ossia nella sua versione come problema di ottimizzazione, allora potremmo risolvere la forma decisionale con una solo domanda all'oracolo che risolve la forma di ottimizzazione. La forma di ottimizzazione sarà pertanto NP-hard se la forma decisionale sarà NP-completa.

Dobbiamo ora mostrare come, data una qualsiasi istanza di SAT, ossia una qualsiasi formula booleana f in forma CNF, sia possibile costruire un'istanza di Min Set Cover in forma decisionale che la rappresenti.

Siano $x_1, \dots, x_n$ le variabili booleane che occorrono in f; sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pertanto i $2n$ letterali che possono essere disposti in .OR. entro le clausole di f sono le n variabili $x_1, \dots, x_n$ e le loro negazioni $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$. Assumiamo che la CNF f consti di m clausole, ossia $f = \bigwedge_{j=1}^{m} C_j$. Ogni clausola C_j, $j = 1, \dots, m$, consta di un sottoinsieme dei letterali che essa dispone in .OR. logico. Sia $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$. Come istanza della nostra forma decisionale di Min Set Cover si consideri un budget di $B := n$ per l'ipergrafo H_f con insieme dei nodi $V := \mathcal{C} \cup X$ ed insieme degli iperarchi $\mathcal{E} := \{\{x_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni x_i\} : x_i \in X\} \cup \{\{\overline{x}_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni \overline{x}_i\} : x_i \in X\}$.

La validità della riduzione poggia sui seguenti fatti:

Fact [easy lemma]: Sia $\varphi : X \longrightarrow \{\top, \bot\}$ un assegnamento di verità alle n variabili che soddisfi f (ossia, secondo il quale la formula f valuti a vero, sia cioè soddisfatta). Allora un set cover $\mathcal{E}'$ di H_f con $|\mathcal{E}'| = B$ può essere ottenuto mettendo in $\mathcal{E}'$ tutti gli insiemi in $\mathcal{E}$ della forma $\{x_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni x_i\}$ con $\varphi(x_i) = \top$ e tutti gli insiemi della forma $\{\overline{x}_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni \overline{x}_i\}$ con $\varphi(x_i) = \bot$.

Fact [hard lemma]: Sia $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ un insieme di iperarchi di H_f che costituiscono un set cover di H_f con $|\mathcal{E}'| \leq B$. Allora $|\mathcal{E}'| = B$ dato che $\mathcal{E}'$ deve coprire quantomeno $X \subseteq V$ e considerato che $|X| = n = B$ mentre ogni set in $\mathcal{E}$ contiene precisamente un solo elemento in X. In verità, per ogni $i = 1, \dots, n$, sono precisamente due i set di $\mathcal{E}$ che contengono l'elemento x_i di X. Pertanto $\mathcal{E}'$ contiene uno di questi due e non l'altro. Si consideri pertanto l'assegnamento di verità $\varphi : X \longrightarrow \{\top, \bot\}$ con $\varphi(x_i) = \top$ se e solo se $\mathcal{E}'$ contiene il set della forma $\{x_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni x_i\}$ piuttosto che non il set della forma $\{\overline{x}_i\} \cup \{C \in \mathcal{C} : C \ni \overline{x}_i\}$. Si noti che ogni clausola in $\mathcal{C}$ è soddisfatta da φ in quanto $\mathcal{E}'$ deve coprire quantomeno $\mathcal{C} \subseteq V$.

Fact [corollary of hard and easy lemma]: Una CNF f è soddisfacibile se e solo se l'ipergrafo H_f ammette un set cover di cardinalità B.

Ne conseque l'NP-complessità della versione decisionale del problema Min Set Cover. Ne conseque l'NP-hardness del problema Min Set Cover.

La ragione per cui abbiamo optato per introdurre la forma decisionale di Min Set Cover come terzo problema intermedio è la seguente:

Min Set Cover è un problema di ottimizzazione mentre SAT è solo un problema di decisione, pertanto se vogliamo evitare di progettare una Turing reduction e limitarci a progettare una Karp reduction conviene concentraci su una versione di decisione di Min Set Cover che certo non potrà essere computazionalmente più difficile da risolvere che non la forma di ottimizzazione. Nella forma di decisione riceviamo in input non solo H ma anche un budget di spesa B e la domanda è se H ammetta un set cover $\mathcal{E}'$ con $|\mathcal{E}'| \leq B$.

Esercizio 2 (con 8 richieste: 1+1+1+1+1+2+1+2 = 10 punti [programmazione dinamica]):

Un robot, inizialmente situato nella cella **A−1**, deve portarsi nella sua home, nella cella **I−10**.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0	1	1	1	1	1	0	0	●	6
B	2	1	1	0	●	0	●	0	0	5
C	0	●	0	●	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	●	0	3
E	0	0	●	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	●	3	1	3	0	1
G	3	●	2	1	2	0	●	3	1	●
H	2	1	2	1	2	1	1	1	2	0
I	4	4	3	3	2	1	1	●	0	0

I movimenti base consentiti da ogni cella sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A−3 alla cella A−4) o il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A−3 alla cella B−3). Se il robot deve evitare le celle proibite (●), quanti sono i percorsi ammissibili? Inoltre, se in ogni cella permessa si incontra un premio del valore riportato nella cella stessa, sapresti massimizzare la somma dei numeri che appaiono lungo il suo percorso?

Richieste dell'Esercizio 2

2 .1 (1 pt, numero percorsi) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **I−10**
2 .2 (1 pt, num percorsi da B−3) Numero di percorsi ammissibili da **B−3** a **I−10**
2 .3 (1 pt, num percorsi a F−6) Numero di percorsi ammissibili da **A−1** a **F−6**
2 .4 (1 pt, num percorsi per D−5) Numero di percorsi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**
2 .5 (1 pt, opt val) Massimo totale di premi su un cammino da **A−1** a **I−10**. (E soluzione di tale valore).
2 .6 (2 pt, numero cammini ottimi) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10**
2 .7 (1 pt, opt val per D−5) Massimo totale di premi su un cammino da **A−1** a **I−10** passante per **D−5**
2 .8 (2 pt, num paths of opt val via D−5) Numero cammini ottimi da **A−1** a **I−10** passanti per **D−5**

Svolgimento esercizio 2 .

La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della tabella **num cammini da**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I−10.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	444	228	142	56	56	56	4	4	0	0
B	216	86	86	0	0	52	0	4	2	0
C	130	0	86	0	110	52	16	2	2	0
D	130	100	86	86	58	36	14	0	2	0
E	30	14	0	28	22	22	14	8	2	0
F	16	14	14	6	0	8	6	6	2	0
G	2	0	8	6	4	2	0	4	2	0
H	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
I	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabella 2: **num cammini da**

Per rispondere alle domande successive serve anche la tabella **num cammini a**, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, è riportato il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
B	1	2	3	4	0	1	0	1	1	1
C	1	0	3	0	0	1	1	2	3	4
D	1	1	4	4	4	5	6	0	3	7
E	1	2	0	4	8	13	19	19	22	29
F	1	3	3	7	0	13	32	51	73	102
G	1	0	3	10	10	23	0	51	124	0
H	1	1	4	14	24	47	47	98	222	222
I	1	2	6	20	44	91	138	0	222	444

Tabella 3: **num cammini a**

Ritrovare il valore 444 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.

La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle prossime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella C alla cella I–10. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	20^{4}	19^{16}	18^{12}	17^{8}	16^{8}	15^{8}	5^{2}	5^{2}	-1^{0}	-1^{0}
B	20^{4}	18^{4}	17^{4}	-1^{0}	-1^{0}	14^{8}	-1^{0}	5^{2}	4^{2}	-1^{0}
C	16^{18}	-1^{0}	16^{4}	-1^{0}	14^{16}	14^{8}	14^{4}	5^{2}	4^{2}	-1^{0}
D	16^{18}	16^{8}	16^{4}	15^{4}	14^{8}	14^{4}	13^{4}	-1^{0}	3^{2}	-1^{0}
E	16^{10}	16^{4}	-1^{0}	15^{4}	14^{4}	14^{4}	12^{4}	9^{4}	3^{2}	-1^{0}
F	16^{6}	16^{4}	15^{4}	11^{2}	-1^{0}	13^{4}	10^{4}	9^{4}	3^{2}	-1^{0}
G	16^{2}	-1^{0}	12^{4}	10^{2}	9^{2}	5^{2}	-1^{0}	6^{4}	3^{2}	-1^{0}
H	13^{2}	11^{2}	10^{2}	8^{2}	7^{2}	5^{2}	4^{2}	3^{2}	2^{2}	0^{1}
I	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	-1^{0}	0^{1}	0^{1}

Tabella 4: **valore ottimo di un cammino da * a I-10 e numero di cammini ottimi da * a I-10**

Leggendo i valori riportati nella cella A–1 scopriamo che il massimo valore di una traversata é di 20, e che esistono 4 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore.

Per rispondere alle ulteriori domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo inoltre e riportiamo in piccolo, per ogni cella C, il numero di percorsi di tale valore ottimo.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	0^1	1^1	2^1	3^1	4^1	5^1	5^1	5^1	-1^0	-1^0
B	2^1	3^1	4^1	4^1	-1^0	5^1	-1^0	5^1	5^1	10^1
C	2^1	-1^0	4^1	-1^0	-1^0	5^1	6^1	7^1	8^1	14^1
D	2^1	2^1	5^1	5^1	5^1	5^2	7^1	-1^0	8^1	17^1
E	2^1	2^2	-1^0	6^1	6^1	7^1	9^2	9^2	9^2	18^1
F	2^1	3^3	6^3	7^4	-1^0	10^1	11^1	14^1	14^1	19^1
G	5^1	-1^0	8^3	9^3	11^3	11^3	-1^0	17^1	18^1	-1^0
H	7^1	8^1	10^4	11^4	13^7	14^7	15^7	18^1	20^2	20^2
I	11^1	15^1	18^1	21^1	23^1	24^1	25^1	-1^0	20^2	20^4

Tabella 5: **valore ottimo di un cammino da A-1 a * e numero di cammini ottimi da A-1 a ***

Avendo riempito l'intera tabella (non serviva per solo rispondere alle ultime due domande), nella cella I–10 troviamo conferma che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 20, e che esistono 4 diversi percorsi ammissibili che totalizzano questo valore. Le risposte alle ulteriori domande sono ottenute consultando queste due tabelle, eventualmente entrambe: nel caso di celle di passaggio obbligato il valore ottimo andrà ottenuto tramite somma (avendo cura di non conteggiare due volte il valore della cella di passaggio) mentre il numero di soluzioni ottime sarà il prodotto dei due numeri riportati in piccolo nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.
Riportiamo quindi i risultati finali.

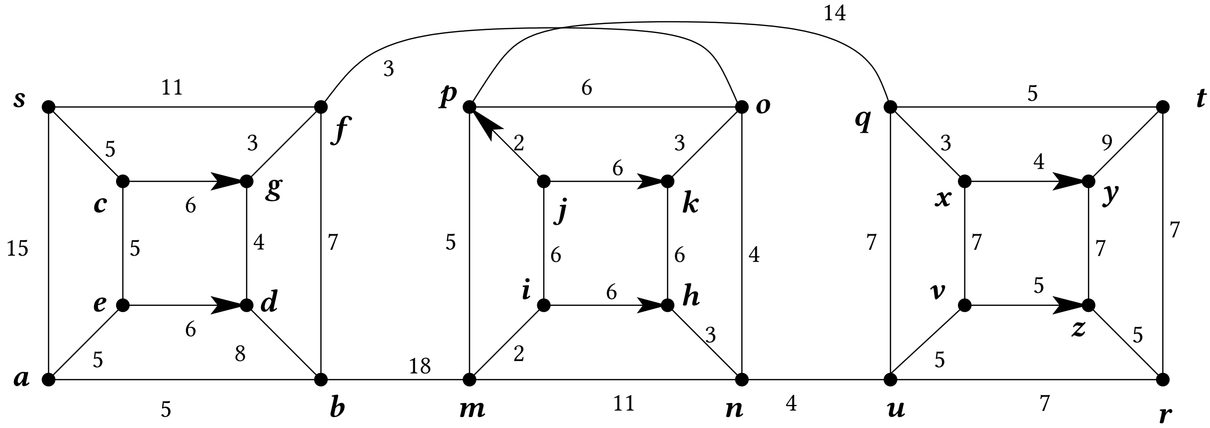
consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A–1 → I–10	444		
B–3 → I–10	86		
A–1 → F–6	13		
passaggio per D–5	$4 * 58 = 232$		
massimo valore		20	A1-B1-B2-B3-C3-D3-D4-E4-E5-E6-F6-F7-F8-G8-G9-H9-H10-I10
n. max-val paths	4		
max-val D–5-path		19	A1-B1-B2-B3-C3-D3-D4-D5-D6-D7-E7-F7-F8-G8-G9-H9-I9-I10
n. max-val D–5-paths	$1 * 8 = 8$		

Anche quì il numero di cammini di interesse che passano per la cella D–5 è ottenuto come prodotto del numero della stessa tipologia che giungono in D–5 per quelli che da quì dipartono. Lo spazio dei cammini otimi passanti per D–5 è infatti prodotto cartesiano di quelli con arrivo in D–5 per quelli con partenza da D–5.

Per quanto riguarda il massimo valore di un cammino passante per D–5 esso è ottenuto sommando il massimo valore di un cammino che terminano in D–5 col massimo valore di un cammino che parte da D–5, avendo cura di sottrarre il valore in D–5 (ma in questo caso è 0) che altrimenti viene conteggiato doppio.

Per ricostruire i cammini che attengono i valori ottimi calcolati devi procedere in ordine inverso, e quindi dopo aver finito di calcolare tutti i numeri (risposte ai sottoprobelmi). Quando procedendo a ritroso non sai quale strada prendere, guarda a questi numeri per i sottoprolemi cui ti ridurresti a valle di ciascuna delle possibili scelte. Almeno una delle opzioni a tua disposizione ad ogni passo deve fulfillare la promessa ad Abramo.

Esercizio 3 (con 8 richieste: 3+4+2+2+2+2+1+4 = 20 punti [grafi]):



Richieste dell'Esercizio 3

3 .1 (3 pt, recognize planarity) Dire, certificandolo, se siano planari o meno il grafo G e il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco bm con un arco bt. (2 punti per il certificato di non-planarità, 1 per quello di planarità)

3 .2 (4 pt, recognize 2-colorability) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per rendere bipartiti i grafi G e G' (1 punto per ogni soluzione certificata da bicolorazione e 1 per ogni certificato di ottimalità).

3 .3 (2 pt, max flow) In G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

3 .4 (2 pt, min cut) Certificare l'ottimalità di tale flusso massimo.

3 .5 (2 pt, flow sensitivity) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco modifica il massimo valore di flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

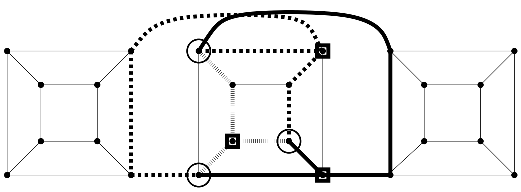
3 .6 (2 pt, certify flow sensitivity) Scegli uno qualsiasi degli archi per cui il valore di incremento che hai fornito al punto precedente è massimo ed esibisci prova che rilassandone la capacità si possa ottenere quel valore di flusso (1pt). Certifica anche che l'aumento non è superiore a quanto dichiarato (1pt).

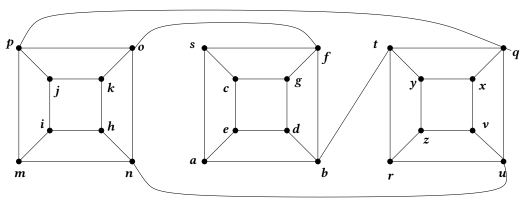
3 .7 (1 pt, MST) In G, fornire un albero ricoprente di peso minimo.

3 .8 (4 pt, MST certificates) Per ciascuno dei tre archi incidenti in t dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutti / a ne ssuno / a qualcuno ma non a tutti) gli alberi ricoprenti di peso minimo.

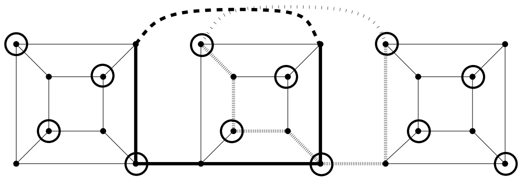
Svolgimento esercizio 3 .

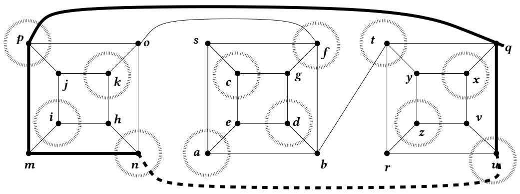
La non-planarità di G è certificata dalla $K_{3,3}$ subdivision in figura, sulla sinistra. Sulla destra, un planar embedding di G' ne certifica la planarità.



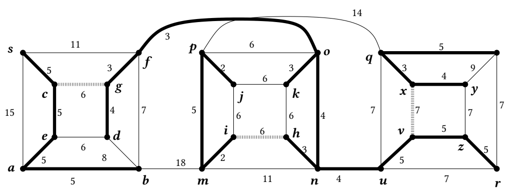


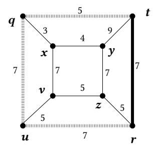
Rimossi i due archi tratteggiati, G è 2-colorabile come mostrato in figura. I due cicli dispari disgiunti sugli archi evidenziati in linea spessa certificano che G non avrebbe potuto essere reso bipartito con la rimozione di un solo arco. Anche G' non è bipartito, come evidenziato dal suo ciclo dispari in linea spessa. In questo caso esiste però una 2-colorazione di G' che rispetta tutti i suoi archi tranne uno solo.

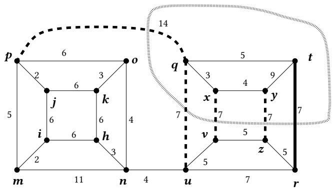


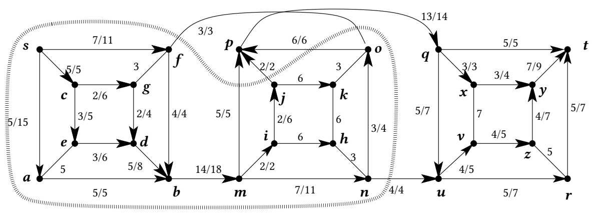


La figura quì sotto a sinistra visualizza un MST in linea spessa. Alla sua immediata destra si evidenzia un ciclo che certifica che l'arco rt non può appartenere a tutti gli MST, più a destra ancora si evidenzia il taglio che separa i nodi $\{x, y, q, t\}$ da tutti gli altri, certificando che l'arco rt appartiene ad almeno un MST. Che l'arco qt appartenga invece a tutti gli MST è certificato dalla stella di t. Che l'arco yt non appartenga ad alcun MST è certificato dal ciclo $ytqx$.









Un flusso massimo ed un taglio minimo che ne dimostra l'ottimalità (non esibisco i passaggi spesi per ottenerli). Il flusso ha valore 17 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 17. Esso certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Si noti che se nell's,t-taglio dato facciamo cambiare sponda (portandolo dalla parte di t invece che dalla parte di s) il nodo j (oppure anche sia il nodo j che il nodo i) otteniamo un secondo (e terzo) s,t-taglio ottimo, scarico in entrata e saturato in uscita dal flusso ottimo proposto. Pertanto, anche se l'arco (j, p) appartiene al minimo s,t-taglio evidenziato in figura, non saremmo disposti a pagare nulla per aumentarne la capacità. Invece gli altri 3 archi di quel taglio sono in effetti critici, come meglio precisato nella seguente tabella che contempla l'ipotesi di rimuovere il vincolo di capacità su uno di essi:

arco	**flow val increase**	**new bottleneck**
mp	1	the s,t-cut comprising pq and nu
op	1	the s,t-cut comprising pq and nu
nu	3	the s,t-cut separating nodes until q, u from nodes to their right

Attraverso il cammino $saedbmn$ potremmo sempre far arrivare 3 unità di flusso extra al nodo n; quando la caacità dell'arco nu viene incrementata di 3 esse giungono in u, 2 unità di tale flusso extra possono prendere il cammino urt, l'altra la possiamo instradare sul cammino $uvzyt$.

Esercizio 4 (con 10 richieste: 1+1+1+1+1+1+5+2+1+2 = 16 punti [simplesso]):

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & 3x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & x_1 - x_2 - \ \ x_3 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 + \ \ x_3 \geq 3 \\ & \qquad\qquad\ \ x_3 \leq 7 \\ & x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Richieste dell'Esercizio 4

4 .1 (1 pt, STD form) Porta in forma standard.
4 .2 (1 pt, auxiliary problem) Imposta il problema ausiliario.
4 .3 (1 pt, fase 1) Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.
4 .4 (1 pt, inter-fases) Ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario in forma standard dalla soluzione ottima di base del problema ausiliario.
4 .5 (1 pt, prova del 9 su prima soluzione ammissibile) Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi la prova del 9 della PL per verificare la correttezza della soluzione ammissibile di base ottenuta.
4 .6 (1 pt, first dual sol) Si espliciti la soluzione duale di base associata a questo primo dizionario per la seconda fase. Si commenti se essa sia ammissibile o meno.
4 .7 (5 pt, reach optimality) Risolvere il problema originario all'ottimo. I punti aggiuntivi vengono attribuiti se ad ognuno dei diversi pivot che dovrai compiere effettuerai esplicitamente una prova del 9: un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base primale ammissibile, un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base duale ammissibile, un punto se verifichi con almeno una soluzione tutti i dizionari visitati. Come ogni altra evidenza che date per ottenere punti, queste prove devono essere offerte in modo chiaro ed esplicito, e cosiglio di incorniciare ogni vostra risposta che miri a diventare punti. **(2+1pt+1pt+1pt)**
4 .8 (2 pt, dual opt sol) rendere esplicita la soluzione duale ottima **(1pt)**. Utilizzarla per dimostrare l'ottimalità della soluzione primale **(1pt)**.
4 .9 (1 pt, shadow prices) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di variazione in ciascuno dei termini noti dei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)
4 .10 (2 pt, sensitivity analisys) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Svolgimento esercizio 4 .

Richiesta 1 (1 pt) (goal: STD form**).**

Portiamo dapprima il problema in forma standard riesprimendolo in termini delle variabili x_1, x_3 e $x'_2 = -x_2$ e moltiplicando per -1 il vincolo di $\geq$:

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + 2x'_2 - 3x_3 \\ & 3x_1 + x'_2 - 2x_3 \leq 0 \\ & x_1 + x'_2 - \ \ x_3 \leq 1 \\ & -x_1 - x'_2 - \ \ x_3 \leq -3 \\ & \qquad\qquad\ \ x_3 \leq 7 \\ & x_1, x'_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Richiesta 2 (1 pt) (goal: auxiliary problem).
A questo punto il problema è in forma standard $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$. Pertanto ha almeno una soluzione di base, l'origine. Ma questo problema non è ad origine ammissibile dato che uno dei 4 termini noti è negativo (-3). Rimaniamo quindi col problema di reperire una prima soluzione di base ammissibile dalla quale avviare il metodo del simplesso. Non è un problema scontato, di fatto tale soluzione potrebbe non esistere (se il problema non ammette soluzioni ammissibili).

Il secondo punto dell'esercizio chiede di superare la difficoltà del reperire una prima soluzione di base ammissibile con il metodo del problema ausiliario. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile «di colla» x_0. In prima battuta del problema originario essenzialmente ci interessa investigare solo l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_0 \\
& 3x_1 + x_2' - 2x_3 - x_0 \leq 0 \\
& x_1 + x_2' - x_3 - x_0 \leq 1 \\
& -x_1 - x_2' - x_3 - x_0 \leq -3 \\
& x_3 - x_0 \leq 7 \\
& x_1, x_2', x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Il problema ausiliario è sempre ammissibile (basta prendere un valore sufficientemente grande per x_0) e, ovviamente, il problema originario è ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$. Questa è la prima domanda che siamo chiamati ad affrontare, e lo faremo nella prima fase del metodo del simplesso, quella che identifica una soluzione di base ottima per il problema ausiliario.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

PRIMO DIZIONARIO

$$
\begin{cases}
z = 0 + 0x_1 + 0x_2' + 0x_3 - 1x_0 \\
w_1 = 0 - 3x_1 - 1x_2' - 2x_3 + 1x_0 \\
w_2 = 1 - 1x_1 - 1x_2' + 1x_3 + 1x_0 \\
w_3 = -3 + 1x_1 + 1x_2' + 1x_3 + 1x_0 \\
w_4 = 7 + 0x_1 + 0x_2' - 1x_3 + 1x_0
\end{cases}
$$

$\max z : x_1, x_2', x_3, x_0, w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$

PRIMO TABLEAU

	–	x_1	x_2'	x_3	x_0
z	0	0	0	0	-1
w_1	0	-3	-1	-2	1
w_2	1	-1	-1	1	1
w_3	-3	1	1	1	(1)
w_4	7	0	0	-1	1

Le equazioni con cui abbiamo definito le variabili di slack definiscono il nostro primo dizionario dal quale prende avvio il metodo del simplesso. La soluzione di base associata al primissimo dizionario è l'origine $(x_0, x_1, x_2', x_3) = (0, 0, 0, 0)$ che tuttavia non è ammissibile benchè ovvimente il problema ausiliario sia ammissibile per costruzione. Fortunatamente, un primo pivot risulta sempre sufficiente a raggiungere una prima soluzione di base ammissibile nel caso del problema ausiliario: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a -3 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facendo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo (w_3). L'elemento di pivot è pertanto quello incorniciato e, con un passo di pivot, si perviene alla situazione seguente.

Secondo Dizionario

$$\begin{cases} z = -3+1x_1+1x_2'+1x_3-1w_3 \\ w_1=3 -4x_1-2x_2'+1x_3+1w_3 \\ w_2=4 -2x_1-2x_2'+0x_3+1w_3 \\ x_0=3 -1x_1-1x_2'-1x_3+1w_3 \\ w_4=10 -1x_1-1x_2'-2x_3+1w_3 \end{cases}$$

$\max z : x_1, x_2', x_3, w_3, w_1, w_2, x_0, w_4 \geq 0$

Secondo Tableau

	–	x_1	x_2'	x_3	w_3
z	-3	1	1	1	-1
w_1	3	-4	-2	1	1
w_2	4	-2	-2	0	1
x_0	3	-1	-1	(-1)	1
w_4	10	-1	-1	-2	1

La soluzione di base attuale non è ancora ottima in quanto nella funzione obiettivo sono presenti dei coefficienti positivi (quello della x_1, della x_2' e della x_3). Tra le tre, come varibile di pivot, optiamo per la x_3, scelta che conduce ad un maggior incremento in termini di funzione obiettivo e che, con un pivot più agevole da gestire, conduce anche a numeri tutti interi. La prima variabile in base ad annullarsi al crescere della x_3 sarebbe proprio la x_0; questo significa che non serve utilizzare colla ed il problema originario era ammissibile. A questo punto, anche ove fossero presenti ulteriori variabili che si annullano contemporaneamente alla x_0, resta comunque utile portare x_0 fuori dalla base, in modo da ottenere un dizionario ammissibile dove la x_0 è prevista essere nulla e la rimozione della sua colonna ci consegna un dizionario ammissibile per il problema originario (quindi non solo riusciamo a decidere in merito all'ammissibilità del problema originario, ma, se esso era in forma standard, allora il metodo si applica e ci consegna una soluzione di base ammissibile tutte le volte che il problema è ammissibile). Pertanto scegliamo la x_0 come variabile uscente e riga del pivot.

Terzo Dizionario

$$\begin{cases} z = 0+0x_1+0x_2'-1x_0+0w_3 \\ w_1=6-5x_1-3x_2'-1x_0+2w_3 \\ w_2=4-2x_1-2x_2'+0x_0+1w_3 \\ x_3=3-1x_1-1x_2'-1x_0+1w_3 \\ w_4=4+1x_1+1x_2'+2x_0-1w_3 \end{cases}$$

$\max z : x_1, x_2', x_0, w_3, w_1, w_2, x_3, w_4 \geq 0$

Terzo Tableau

	–	x_1	x_2'	x_0	w_3
z	0	0	0	-1	0
w_1	6	-5	-3	-1	2
w_2	4	-2	-2	0	1
x_3	3	-1	-1	-1	1
w_4	4	1	1	2	-1

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario posto in forma standard. La soluzione di base associata è $x_1 = 0$, $x_2' = 0$ e $x_3 = 3$ e risulta agevole verificare che essa è appunto ammissibile per tale problema (quando si pongano la variabile non-basica x_1, x_2' e w_3 a 0 allora la x_3 risulta forzate ad assumere quel valore, quindi trattasi in effetti di una soluzione di base). Per la scrittura della funzione obiettivo in tale dizionario, si parte dalla funzione obiettivo originaria e si utilizzano le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $4x_1 + 2x_2' - 3(3 - x_1 - x_2' + w_3) = -9 + 7x_1 + 5x_2' - 3w_3$.

Primo Dizionario di Fase 2

$$\begin{cases} z = -9+7x_1+5x_2'-3w_3 \\ w_1=6 -5x_1-3x_2'+2w_3 \\ w_2=4 -2x_1-2x_2'+1w_3 \\ x_3=3 -1x_1-1x_2'+1w_3 \\ w_4=4 +1x_1+1x_2'-1w_3 \end{cases}$$

$\max z : x_1, x_2', w_3, w_1, w_2, x_3, w_4 \geq 0$

Primo Tableau di Fase 2

	–	x_1	x_2'	w_3
z	-9	7	5	-3
w_1	6	-5	(-3)	2
w_2	4	-2	-2	1
x_3	3	-1	-1	1

	–	x_1	x_2'	w_3
w_4	4	1	1	-1

Per leggere la soluzione primale di base associata a questo dizionario si procede come segue: $x_1 = x_2' = w_3 = 0$ in quanto queste sono variabili-colonna, ossia variabili libere, ossia variabili non in base. Per le variabili in base si leggono i valori riportati nella colonna che contiene il valore attuale della funzione obiettivo. Ossia:

$$\begin{cases} w_1 = 6 \\ w_2 = 4 \\ x_3 = 3 \\ w_4 = 4 \end{cases}$$

che è quanto si ottiene sostituendo $x_1 = x_2' = w_3 = 0$ nelle equazioni riportate nel dizionario disposto a sinistra del «Primo Tableau della 2^a Fase", oppure operando direttamente nel tableau come secondo le regole. Quindi il dizionario altro non è che una riscrittura delle equazioni lineari della prima forma canonica nella quale si è avuto modo di modificare la separazione tra variabili dipendenti (in base) ed indipendenti (fuori base), ed il tableau altro non è che una scrittura compatta di tali equazioni in forma tabellare.

Ma spendiamo ora la prova del nove richiesta. Il punto di verifica è la soluzione di base associata alla prima forma canonica, ossia $x_1 = x_2' = x_3 = 0$, cui corrisonde (si veda il primo dizionario ignorando la colonna della x_0) $z = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = -3$, $w_4 = 7$. La prova del nove corrisponde quindi a verificare che questo punto soddisfa ancora a tutte le equazioni del dizionario/tableau corrente:

Primo Diz. Fase 2 (Prova del Nove)

$$\begin{cases} z{=}0 \;\; = -9+7(x_1{=}0)+5(x_2'{=}0)-3(w_3{=}-3) \\ w_1{=}0{=}6 \;\; -5(x_1{=}0)-3(x_2'{=}0)+2(w_3{=}-3) \\ w_2{=}1{=}4 \;\; -2(x_1{=}0)-2(x_2'{=}0)+1(w_3{=}-3) \\ x_3{=}0{=}3 \;\; -1(x_1{=}0)-1(x_2'{=}0)+1(w_3{=}-3) \\ w_4{=}7{=}4 \;\; +1(x_1{=}0)+1(x_2'{=}0)-1(w_3{=}-3) \end{cases}$$

Primo Tableau Fase 2 (Prova del Nove)

	–	$x_1 = 0$	$x_2' = 0$	$w_3 = -3$
$z = 0$	-9	7	5	-3
$w_1 = 0$	6	-5	-3	2
$w_2 = 1$	4	-2	-2	1
$x_3 = 0$	3	-1	-1	1
$w_4 = 7$	4	1	1	-1

La verifica viene convenientemente condotta riga per riga. Ovviamente esiste altresì una prova del nove duale che lavora invece sul punto duale e viene quindi condotta colonna per colonna.

Per leggere la soluzione duale di base associata a questo stesso dizionario si procede in modo analogo, ma con due differenze:

1. il tableau và letto anti-trasposto (trasposizione di matrice ed inversione dei segni), ossia andranno messe a zero le variabili-riga e calcolate di conseguenza le altre variabili (o, più direttamente, vanno ora lette dalla riga che contiene il valore attuale della funzione obiettivo, nella tabella non-ancora trasposta ma già invertita nei segni).

2. occorre ricordarsi che la mappa biunivoca tra le variabili del primale e quelle del duale è data da $x_i \leftrightarrow s_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $w_j \leftrightarrow y_j$ per $j = 1, \dots, m$, ossia alle n variabili di decisione del primale corrispondono le n variabili di slack del duale mentre alle m variabili di slack del primale corrispondono le m variabili di decisione del duale (sono entrambe in corrispondenza biunivoca coi vincoli del primale, la corrispondenza tra di loro ne consegue).

In base all'attenzione di cui al punto 2 il tableau va quindi letto con le seguenti etichette di riga e di colonna:

	–	y_1	y_2	s_3	y_4
z	9	-6	-4	-3	-4
s_1	-7	5	2	1	-1
s_2	-5	3	2	1	-1
y_3	3	-2	-1	-1	1

Leggeremo pertano $y_1 = y_2 = s_3 = y_4 = 0$, e quindi $s_1 = -7$, $s_2 = -5$, $y_3 = 3$.

Si noti che le ragioni di non-ottimalità della soluzione primale ($7 > 0$ e anche $5 > 0$) si traducono in non-ammissibilità (per violazione dei vincoli di non-negatività) della soluzione duale ($s_1 = -7 < 0$, $s_2 = -5 < 0$).

La soluzione di base primale associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che i coefficienti delle prime due variabili fuori base sono positivi. Pertanto dobbiamo scegliere se portare in base la x_1 o la x_2'. In questa correzione portiamo in base la x_2', il cui costo ridotto è 5. Come variabile uscente possiamo scegliere tra la w_1 e la w_2, entrambe si annullano non appena $x_2' = 2$. In termini di funzione obiettivo ci attendiamo un incremento di $2 \cdot 5 = 10$. Come variabile uscente conviene forse scegliere la w_2, visto che l'aggiornamento è meno faticoso. In questa correzione abbiamo invece scelto la w_1.

Secondo Dizionario di Fase 2

$$\begin{cases} z = 1 - \frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_3 \\ x_2' = 2 - \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{2}{3}w_3 \\ w_2 = 0 + \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_3 \\ x_3 = 1 + \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_3 \\ w_4 = 6 - \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_3 \end{cases}$$

$$\max z : x_1, w_1, w_3, x_2', w_2, x_3, w_4 \geq 0$$

Secondo Tableau di Fase 2

	–	x_1	w_1	w_3
z	1	-4/3	-5/3	1/3
x_2'	2	-5/3	-1/3	2/3
w_2	0	4/3	2/3	(-1/3)
x_3	1	2/3	1/3	1/3
w_4	6	-2/3	1/3	-1/3

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della w_3 è positivo. Il dizionario attuale è degenere ed appena le w_3 entra in base ne esce la w_2. Otteniamo il seguente dizionario.

Terzo Dizionario di Fase 2

$$\begin{cases} z = 1 + 0x_1 - 1\,w_1 - 1w_2 \\ x_2' = 2 + 1x_1 + 1\,w_1 - 2w_2 \\ w_3 = 0 + 4x_1 + 2\,w_1 - 3w_2 \\ x_3 = 1 + 2x_1 + 1\,w_1 - 1w_2 \\ w_4 = 6 - 2x_1 - \frac{1}{3}w_1 + 1w_2 \end{cases}$$

$$\max z : x_1, w_1, w_2, x_2', w_3, x_3, w_4 \geq 0$$

Terzo Tableau di Fase 2

	–	x_1	w_1	w_2
z	1	0	-1	-1
x_2'	2	1	1	-2
w_3	0	4	2	-3
x_3	1	2	1	-1
w_4	6	-2	-1/3	1

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = 0$, $x_2 = -x_2' = -2$, e $x_3 = 1$ cui corrisponde un valore di 1 per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per 1 (perché questo valore?), il secondo vincolo moltiplicato sempre per 1 (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di 1. (Queste cose io quì mi sono limitato a dirle ma voi dovete farle!) Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Si noti che i tre vincoli che lavorano (primo e secondo) sono tutti e due vincoli di $\leq$. Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare 1 (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare 1 (almeno per piccoli incrementi).

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che i termini noti di questi due vincoli siano t_1 e $1 + t_2$ (invece di 0 e 1). Ci interessa infatti comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti in corrispondenza, al variare dei parametri t_1 e t_2. Poichè solo i termini noti del problema originale sono cambiati, ed il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti diventando ora funzioni lineari dei parametri t_1 e t_2. Di questi, quello per la riga z evidenzierà come coefficienti di t_1 e di t_2 proprio i due prezzi ombra (1 e 1), ma mi interessano anche quelli di ogni altra riga poichè imponendo la non-negatività otterrò limiti di validità sul prezzo ombra. In ogni riga il funzionale lineare dei parametri t_1 e t_2 deve avere per termine noto il valore già riportato nel terzo tableau (che in fondo è il caso particolare per $t_1 = t_2 = 0$). Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo, riga per riga, della «prova del nove» del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i coefficienti di t_1, t_2 della colonna dei termini noti che mi serve rideterminare. Questo viene lasciato come esercizio.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso. Per gli appelli estivi in aula delta, non abbiamo controllo dell'aria condizionata e l'ambiente potrà risultarvi troppo freddo. Data la durata dell'appello consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. Potete portarvi materiali cartacei ma non è consentita alcuna strumentazione elettronica. Dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco «una prova di cromatografia su carta». Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto la più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo: cercate e concretizzate quelli che più vi convengono, non impegolatevi a dimostrare quello che non sapete o dove incontrate incertezze. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati (in questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso). Tutto il resto (incluse le castronerie colossali ma anche le doppie risposte discordanti) non verrà conteggiato. Ricordate che in buona sostanza il voto corrisponderà al punteggio positivamente raccolto. I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non ci interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare.

L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti che trovi al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, sfruttalo al meglio senza sprecarlo. Una prima utilità è quella di testare la tua preparazione all'esame. Dopo aver letto il testo, consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente. Ma, in sufficiente numero di esemplari, poi anche materialmente, prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti. Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura del documento di correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sì la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E se invece ti sembra di saper risolvere del tutto l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: controlla che quanto hai in mente come soluzione corrisponda a quanto considerato e proposto come svolgimento opportuno. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente ordine'", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo saper rispondere in chiarezza alla consegna"" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l"esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il mancato conseguimento dei punti ad esse associati. Aggiungo che per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (perchè non collaborare a raccogliere una ricca collezione di link a tali sorgenti?).