Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

Esame di Ricerca Operativa - 2 luglio 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (7+5+3+1+? punti):

Per il prossimo anno, il piano di produzione della Miraprimule prevede una produzione di d_t unitá di prodotto nel mese t, $t = 1, \dots, 12$. Ciascun operaio é in grado di produrre k unitá di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio é pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, e che le variazioni in organico (assunzioni e licenziamenti) possano aver luogo solo a ciascun inizio mese, vorreste determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da minimizzare il costo complessivo (stipendi, assunzioni, licenziamenti) sull'intero anno pur essendo sempre in grado, su ciascun mese $t = 1, \dots, 12$, di produrre la domanda d_t. Il prodotto non puó essere messo in magazzino.

(7 punti). Riusciresti a mettere a punto un algoritmo di programmazione dinamica che risolva all'ottimo questa tipologia di problema?

(4 punti). Formulare come problema di programmazione lineare o come problema di programmazione lineare intera.

(2 punti). Argomentare il perché sia tutto sommato possibile omettere i vincoli di interezza sulle variabili scelte nella formulazione di cui sopra, ad esempio spiegando (e dimostrando) nel dettaglio come una generica soluzione ammissibile frazionaria possa sempre essere "arrotondata" ad una soluzione intera di costo strettamente minore (purché $s, p, q > 0$).

(1 punto). Se avrai argomentato in modo pulito, saprai dirmi quali delle seguenti condizioni siano sufficienti al concludere che ogni soluzione ottima ritornata dal *linear solver engine* sará di suo intera. Ecco le tre possibilitá che ti chiedo di catalogare:

A. $s, p \geq 0$, $q > 0$;

B. $s \geq 0$, $p, q > 0$;

C. $s > 0$, $p, q \geq 0$.

(+? punti). Se alcune delle condizioni sopra (A, B, o C) non ti appaiono sufficienti, ricevi 1 punto per ogni condizione che fai fuori (dead) con un controesempio.

Problema 2 (5 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 20x_4 + 10x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

2.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

2.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

2.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

Problema 3 (4 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	·	●
B	·	·	·	·	●	●	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	·	●	·	·	·	●	·
E	·	·	·	·	●	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	●	·
G	·	·	·	·	●	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili?

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–8 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	
B–3 → G–8	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GTCTCACAATGCGTCTA$ e $t = CTAGCAGTCAACGTAT$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

4.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

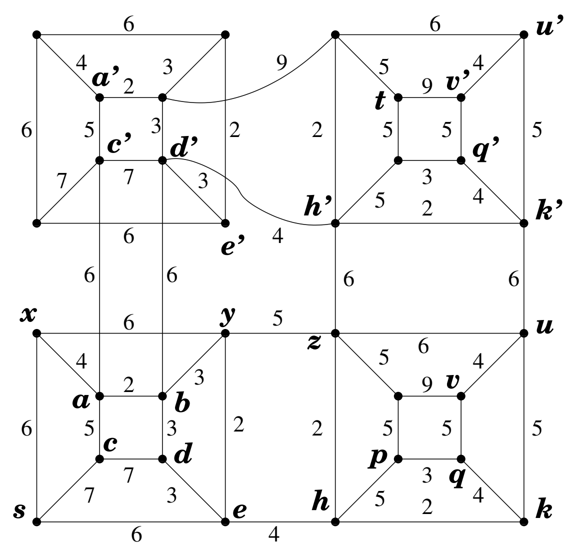
4.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

4.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = CTAGCAGTC$ di t?

4.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = G\,T\,C\,T\,C\,A\,C\,A$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

Problema 5 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'a$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'b$ con un arco $d'y$ è planare oppure no.

5.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no.

5.4.**(1+1pt)** Su G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

5.5.**(2pt)** Su G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(2pt)** Su G, trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.7.**(2pt)** Su G, trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

Problema 6 (6 punti): Si consideri il seguente problema di PL.

$$\max\ 3\,x_1 + 5\,x_2 - 7\,x_3 + 17\,x_4$$
$$\begin{cases} 3\,x_1 & & & & \leq & 19 \\ & 11\,x_2 & & & \leq & 23 \\ & & 13\,x_3 & & \leq & 27 \\ & & & x_4 & \leq & 51 \\ & & & x_4 & \leq & 49 \\ & 11\,x_2 & & & \leq & 25 \\ & 22\,x_2 & & & \leq & 46 \\ \multicolumn{4}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0} \end{cases}$$

6.1**(1pt)** Fornire la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$.

6.2**(1pt)** Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto di ciascuno dei 7 vincoli presi separatamente? E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per incrementare le disponibilità delle risorse? Vi è un limite a tali incrementi o il prezzo ombra rimane equo fino a $+\infty$? (Se vi è un limite, specificare quale).

6.3**(1pt)** Di quanto dovremmo alterare il primo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima? Di quanto il secondo?

6.4**(1pt)** Secondo te il problema duale ha una soluzione ammissibile che sia gemella di $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ nel senso che soddisfi con essa le condizioni agli scarti complementari? Argomentare il perchè.

6.5**(1pt)** È quantomeno possibile concludere che, nel caso essa esista, allora tale soluzione duale è unica? O ve ne possono essere un numero finito, od infinito? Argomentare il perchè.

6.6**(1pt)** Rimuovere un vincolo in modo che la soluzione ottima $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ individuata al primo punto resti ottima, ma nel contempo le condizioni agli scarti complementari individuino univocamente l'unica soluzione duale gemella.