Esame di Ricerca Operativa - 25 luglio 2018
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: ??, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (7 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	•	1	0	0	0	2
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	0	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in I–10 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I–10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	368	126	72	18	18	18	18	4	•	0
B	242	54	54	0	•	•	14	4	2	0
C	188	•	54	•	58	34	10	2	2	0
D	188	98	54	54	24	24	8	•	2	0
E	90	44	•	30	•	16	8	8	2	0
F	46	44	44	30	18	8	•	6	2	0
G	2	•	14	12	10	8	6	4	2	•
H	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
I	0	0	0	0	0	0	0	•	1	1

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•	0
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2	2
C	1	•	3	•	0	0	1	3	5	7
D	1	1	4	4	4	4	5	•	5	12
E	1	2	•	4	•	4	9	9	14	26
F	1	3	3	7	7	11	•	9	23	49
G	1	•	3	10	17	28	28	37	60	•
H	1	1	4	14	31	59	87	124	184	184
I	1	2	6	20	51	110	197	•	184	368

Ritrovare il valore 368 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0_1	2_1	5_1	6_1	7_1	8_1	8_1	8_1	$\bullet$	$-$
B	3_1	6_1	7_1	7_1	$\bullet$	$\bullet$	8_1	8_2	8_2	13_2
C	5_1	$\bullet$	7_1	$\bullet$	$-$	$-$	9_1	10_1	11_1	17_2
D	5_1	5_1	8_1	8_1	8_1	8_1	10_1	$\bullet$	11_1	20_2
E	5_1	5_2	$\bullet$	9_1	$\bullet$	9_1	10_1	10_1	11_1	22_2
F	5_1	6_3	7_3	10_1	10_1	13_1	$\bullet$	10_1	12_1	23_2
G	8_1	$\bullet$	7_3	11_1	13_1	13_2	13_2	14_2	14_2	$\bullet$
H	10_1	11_1	13_1	14_1	16_1	17_1	19_1	20_1	22_1	22_1
I	14_1	18_1	21_1	24_1	26_1	28_1	29_1	$\bullet$	22_1	22_2

Leggendo i valori riportati nella cella I–10 scopriamo che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 22, e che esistono 2 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → I–10	368
B–3 → I–10	54
A–1 → F–6	11
passaggio per D–5	24*4 = 96
massimo valore	22
numero di max-val paths	2

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

Problema 2 (2+2+1+1+5+11+1+1+4=28 punti):
Sulla retta reale si considerino i seguenti intervalli:

$$I_1 = [0,3), I_2 = [1,2], I_3 = [3,10], I_4 = [4,5], I_5 = [5,7], I_6 = [6,6], I_7 = [6,11].$$

Il problema che consideriamo è quello di individuare un sottoinsieme di cardinalità massima della collezione di intervalli sopra assegnati, evitando però di includere coppie di intervalli che siano in conflitto tra di loro. Due intervalli I_a ed I_b sono in conflitto se condividono anche un solo punto, ossia quando $I_a \cap I_b \neq \emptyset$. L'intervallo I_6 è pertanto in conflitto sia con I_5 che con I_7, mentre invece I_1 ed I_3 non sono in conflitto dato che I_1 è aperto a destra (non contiene il punto 3).

(2pt) Formulare tale problema con la Programmazione Lineare Intera (PLI). Si faccia riferimento all'istanza specifica, specificando ogni singolo vincolo.

(1+1=2pt) Ampliare la formulazione in due modi:

1. **(1pt)** per gestire il caso in cui siano assegnati n intervalli $I_1, \ldots, I_n$ con intervallo I_i, di estremi a_i e b_i, possibilmente aperto a destra e/o a sinistra. (Per gestire questa generalizzazione dovrai astrarre, in quanto non sarà più possibile elencare i singoli vincoli).

2. **(1pt)** ad ogni intervallo I_i è associato un valore v_i (per concretezza, e per rendere questo secondo punto indipendente dal precedente, nell'esempio specifico di 7 intervalli propongo il

set di valori tutti ad 1 tranne $v_5 = 3$). Vogliamo ora trovare una sottocollezzione di intervalli mutualmente compatibili che massimizzi la somma dei valori degli intervalli presi.

(1pt) Chiedo più cose, in AND: Elencare le soluzioni ottime per l'istanza di esempio, sia ove la funzione obiettivo sia la cardinalità, sia ove essa sia il valore. In questo caso, i due spazi di soluzioni ottime sono del tutto disgiunti. Per mettere in relazione i due problemi e le relative complessità (ridurre il primo problema al secondo) si osservi in generale come, per n intervalli assegnati, sia sempre possibile assegnare n valori v_i in modo che i due spazi di soluzioni ottime coincidano.

(1pt) Data una collezione di intervalli chiusi, si consideri il problema di individuare una sottocollezione di intervalli disgiunti la cui unione ricopra il massimo numero di punti. (Nel caso dell'istanza esempio (dopo aver chiuso tutti gli intervalli) la soluzione ottima sarebbe $\{I_1, I_3\}$). Ridurre anche questo problema al caso generale pesato.

(2+2+1b=5pt) Suggerire (**(2pt)**) un semplice algoritmo greedy per il caso di cardinalità, argomentando in modo chiaro e lucido (= dimostrando **(2pt)**) che esso ritorna sempre una soluzione ottima. Per semplicità si consideri prima il caso in cui tutti gli intervalli assegnati siano chiusi. Il punto bonus viene assegnato se si specifica come comportarsi in caso vi siano anche intervalli non-chiusi.

(3+2+1+1+1b+1+2=11pt) Fornire un algoritmo polinomiale, di programmazione dinamica, per il problema generale (quello coi valori). Non chiedo necessariamente né codice né pseudocodice, la cosa importante é definire la famiglia dei problemi (**(3pt)**), poi dare la ricorrenza (**(2pt)**), infine identificare e gestire gli eventuali casi base (**(1pt)**) ed esplicitare come avvalersi della famiglia di problemi per rispondere (**(1pt)**). La logica del punto bonus è come da commessa precedente.

Ridefinire solo la famiglia di problemi per affrontare la variante del problema che richiede di ricoprire il massimo numero di punti, nel caso particolare di intervalli tutti chiusi (**(1pt)**) e nel caso generale (**(2pt)** aggiuntivi).

(1pt) Alla famiglia di intervalli dell'istanza può essere associato un grafo (grafo dei conflitti) che ha per nodi gli n intervalli, e dove due nodi sono adiacenti se e solo se, come intervalli, hanno punti in comune. Si disegni il grafo dei conflitti per l'istanza d'esempio.

(1pt) Si osservi come il problema pesato può essere visto come un caso particolare del problema della ricerca di un insieme indipendente di peso massimo entro un grafo. Di quale grafo stiamo parlando? Quali elementi (nodi od archi?) di questo grafo sono pesati, ed a cosa corrispondono questi numeri? Si definisca cosa sia un insieme indipendente nel grafo, ed in cosa consista il problema della ricerca di un insieme indipendente di peso massimo in un grafo pesato (per supportare la riduzione/rappresentazione suggerita).

(4pt) La famiglia di n intervalli si dice *standard* se tutti gli intervalli sono chiusi, tutti gli estremi sono interi e più precisamente

$$\{a_i, b_i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{1, 2, \ldots, 2n\}.$$

Si dimostri costruttivamente che data una qualsiasi famiglia di intervalli esiste una famiglia di intervalli standard che presenta lo stesso grafo dei conflitti. Esibire una procedura per standardizzare una famiglia di intervalli (uno pseudocodice potrebbe rappresentare il modo più efficace per esprimersi).

svolgimento.

(2pt) Per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$ introduciamo una variabile booleana $x_i \in \{0, 1\}$ a rappresentare la scelta di includere o meno l'intervallo I_i nella soluzione ottima. La funzione obbiettivo sará:

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Dobbiamo solo aggiungere il seguente insieme di vincoli.

vincoli per la incompatibilitá degli intervalli.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 1,\\
x_1 + x_3 &\leq 1,\\
x_3 + x_4 &\leq 1,\\
x_3 + x_5 &\leq 1,\\
x_3 + x_6 &\leq 1,\\
x_3 + x_7 &\leq 1,\\
x_4 + x_5 &\leq 1,\\
x_5 + x_6 &\leq 1,\\
x_5 + x_7 &\leq 1,\\
x_6 + x_7 &\leq 1.
\end{aligned}$$

Esplicito meglio i vincoli sul dominio delle variabili (booleane).
vincoli di non-negatività.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

upper bounds.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \leq 1.$$

vincolo di interezza.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \text{ tutte intere.}$$

Tutte le variabili introdotte sono intere e pertanto parliamo di formulazione di PLI in senso proprio, e non di formulazione di MPLI (**m**ixed **i**nteger **l**inear **p**rogramming).

(1+1=2pt) Nel caso di n intervalli, introduciamo le variabili di decisione booleana $x_1, \ldots x_n$ come sopra e, nel caso all'intevallo i sia associato un valor v_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, otteniamo la seguente formulazione

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1 \text{ per ogni } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ con } i \neq j \text{ tale che } I_i \cap I_j \neq \emptyset,$$
$$x_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

(1pt) Nel caso di cardinalità le soluzioni ottime per l'istanza di esempio sono le seguenti:

$$\{1, 4, 6\}, \quad \{1, 4, 7\}, \quad \{2, 4, 6\}, \quad \{2, 4, 7\}.$$

Nel caso pesato, le soluzioni ottime, per la stessa famiglia di 7 intervalli, sono le seguenti:

$$\{1,5\}, \quad \{2,5\}.$$

In effetti, con questo cambio di funzione obiettivo, i due spazi di soluzioni ottime sono del tutto disgiunti (i due spazi di soluzioni ammissibili restano invece gli stessi, ovviamente).

Ma veniamo alla competenza di mettere in relazione problemi, o anche solo varianti di un problema (**(1pt)**). L'osservazione è che il caso di cardinalità può sempre essere gestito come il caso particolare della variante pesata fissando $v_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Potremmo esprimere l'idea di questa riduzione dicendo che, con questa pesatura, non solo i due spazi di soluzioni ammissibili ma anche i due spazi di soluzioni ottime coincidono ora tra loro visto che la funzione obiettivo è ora la stessa.

(1pt) Per rappresentare il problema di, data una collezione di intervalli chiusi, individuare una sottocollezione di intervalli disgiunti che ricopra il massimo numero di punti, come istanza del caso pesato, viene naturale ricorrere nuovamente ad una pesatura opportuna, che potrebbe essere: $v_i := b_i - a_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

(2pt) L'algoritmo greedy per il caso pesato potrebbe essere il seguente:

$\mathcal{I} :=$ l'insieme di n intervalli fornito in input;
$\mathcal{S} := \emptyset$; // inizializzata a vuoto la soluzione ottima
while $\mathcal{I} \neq \emptyset$:
    sia $I_{\bar{\imath}}$ un intervallo di $\mathcal{I}$ primo a chiudersi; // ossia $\bar{\imath} := \arg\min_{i: I_i \in \mathcal{I}} b_i$ con preferenza ai semiaperti
    $\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{I_{\bar{\imath}}\}$; // si aggiunga tale intervallo alla soluzione ottima
    $\mathcal{I} := \{I_i \in \mathcal{I} \mid I_i \cap I_{\bar{\imath}} = \emptyset\}$; // si ripulisca/aggiorni l'insieme di inervalli ancora disponibili

(2pt) Per convincerci che l'algoritmo greedy ritorna sempre una soluzione ottima dobbiamo argomentare che esiste sempre una soluzione ottima che include il primo intervallo a chiudersi $I_{\bar{\imath}}$ scelto ad una generica iterazione: si consideri una soluzione ottima $\overline{\mathcal{S}}$ che non contenga $I_{\bar{\imath}}$ e, tra gli intervalli di $\overline{\mathcal{S}}$, sia $I_{\bar{\jmath}}$ il primo intervallo a chiudersi. Si noti che $b_{\bar{\jmath}} \geq b_{\bar{\imath}}$ per il criterio con cui $I_{\bar{\imath}}$ è stato scelto. (E, qualora $b_{\bar{\jmath}} = b_{\bar{\imath}}$, non può aversi che $I_{\bar{\imath}}$ chiuso a destra e $I_{\bar{\jmath}}$ aperto a destra). Pertanto, $(\overline{\mathcal{S}} \setminus \{I_{\bar{\jmath}}\}) \cup \{I_{\bar{\imath}}\}$ è soluzione ammissibile (e ovviamente ottima anche essa, dato che stiamo seguendo il criterio di cardinalità).

(3pt) Come prima cosa rinumeriamo gli intervalli $I_1, \ldots, I_n$ in modo che valga che per ogni coppia $i, j = 1, \ldots, n$ con $i < j$ valga che $b_i \leq b_j$. (e qualora $b_i = b_j$ allora non si abbia che I_i chiuso a destra ed I_j aperto a destra). Per $t = 1, \ldots, n$, sia P_t il massimo peso di una collezione di intervalli disgiunti che abbia proprio I_j come suo intervallo di indice minimo.

(2pt) $P_i = v_i + \max\{P_j \mid 1 < j \leq n, P_j \cap P_i = \emptyset\}$.

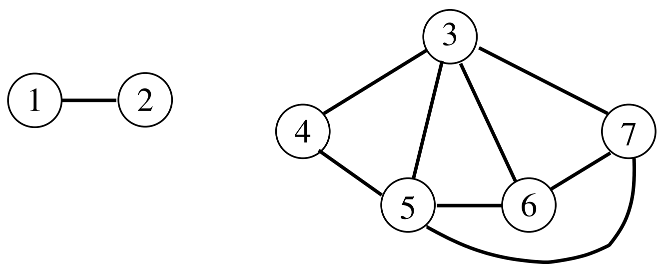
(1pt) Non ci sono casi basi, si utilizzi la convenzione che il massimo su un insieme vuoto di reali vale $-\infty$.

(1pt) La risposta al problema di interesse resta individuata computando $\max_{i=1}^{n} P_i$.

(1pt) Stesso approccio che sopra, ma ora, per $t = 1, \ldots, n$, sia P_t la massima lunghezza ricoperta da una collezione di intervalli disgiunti che abbia proprio I_j come suo intervallo di indice minimo.

(1pt) Come sopra, ma dobbiamo valutare le collezioni di intervalli disgiunti in modo più fine. La difficoltà è che un solo punto in più non altera la misuta di una lunghezza. Usciamo da quello stallo se affidiamo la valutazione ad un dominio di coppie $(len, anti-dots) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$. Nella componente $anti - dots$ si tiene traccia di quanti estremi di intervalli della collezione siano aperti. L'order della metrica è dato da: $(l_1, a_1) < (l_2, a_2)$ se $l_1 < l_2$ oppure se $l_1 = l_2$ e $a_1 > a_2$.

(1pt) Il grafo dei conflitti per l'istanza esempio è il seguente:



(1pt) Il grafo dei conflitti è pesato sui nodi (il peso del nodo I_i è proprio v_i). Un insieme indipendente è definito come un insieme di nodi del grafo tale che tra nessuna coppia di essi sia presente un arco (un conflitto). In questo modo gli insiemi indipendenti sono in corrispondenza biunivoca con le soluzioni ammissibili del problema originario e ne forniscono una utile rappresentazione. Il problema chiede di trovare un insieme indipendente di massimo peso, ossia che massimizzi la somma dei pesi dei nodi contenuti.

(3pt) In altri contesti risulterebbe forse più adeguato offrire lo pseudocodice di un algoritmo iterativo che descriva l'intero processo di standardizzazione. In questo contesto preferisco cogliere l'occasione per valorizzare il potere dell'induzione.

Procedura Standardizza($\mathcal{I}$) // $\mathcal{I}$ è la famiglia di intervalli da standardizzare
//Input: la famiglia di intervalli $\mathcal{I}$ da standardizzare
//Output: un ordinamento totale OT sugli estremi degli intervalli in $\mathcal{I}$
se $\mathcal{I} = \emptyset$ return $\emptyset$;
altrimenti:
    sia $I_{\bar{\imath}}$ un intervallo di $\mathcal{I}$ ultimo a chiudersi; // ossia $\bar{\imath} := \arg\max_{i: I_i \in \mathcal{I}} b_i$ con preferenza ai semi-chiusi
    sia $\mathcal{I}_1 = \{I \in \mathcal{I} \mid I \not\subseteq I_{\bar{\imath}}\}$;
    sia $\mathcal{I}_2 = \{I \in \mathcal{I} \mid I \cap I_{\bar{\imath}} \neq \emptyset\}$;
    $OT_1 :=$ Standardizza($\mathcal{I}_1$); //impiego della ricorsione per esprimere l'idea induttiva
    $OT_2 :=$ Standardizza($\mathcal{I}_2$); //ricorsione anche doppia, non ci fa paura
    sia $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$;
    // si noti che ogni estremo di $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_3$ ed ogni estremo sinistro di $\mathcal{I}_3$ è strettamente
    // a sinistra di ogni estremo di $\mathcal{I}_2 \setminus \mathcal{I}_3$ ed ogni estremo destro di $\mathcal{I}_3$.
    // Pertanto l'ordinamento OT può essere ottenuto come segue:
    in OT, prima si collochi ogni estremo di $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_3$ ed ogni estremo sinistro di $\mathcal{I}_3$,
     seguendo l'ordinament OT_1;
    in OT, si collochi quindi l'estremo sinistro di $I_{\bar{\imath}}$;
    poi, in OT, si collochi ogni estremo di $\mathcal{I}_2 \setminus \mathcal{I}_3$ ed ogni estremo destro di $\mathcal{I}_3$,
     seguendo l'ordinament OT_2;
    infine, in OT, si collochi l'estremo destro di $I_{\bar{\imath}}$ come ultimo estremo dell'ordinamento;
    return OT.

Problema 3 (10 punti):

$$\max\ 2 + 22x_1 - 10x_2 - 12x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ -10x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3.1(2pt) Portare il problema in forma standard.

3.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

3.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario.

3.4(1pt) Scrivere il tableau per una soluzione ammissibile di base al problema originario.

3.5(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

3.6(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

3.7(1pt) Fornire una soluzione primale, parametrizzata negli incrementi, che evidenzi la nostra disponibilitá a pagare tale prezzo.

3.8(1pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.
(3.1) Portando il problema in forma standard otteniamo:

$$
\max\ 2 + 22x_1 - 10x_2^+ + 10x_2^- - 12x_3
$$
$$
\begin{cases}
10x_1 - x_2^+ + x_2^- + 4x_3 \leq 8 \\
10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3 \leq -10 \\
x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

(3.2) A questo punto il problema è in forma standard ma posso vedere che esso non è ad origine ammissibili dato che uno dei termini noti risulta negativo (la disponibilità di valore -10).

L'esercizio chiede di superare la difficoltà del reperire una prima soluzione di base ammissibile con il metodo del problema ausiliario. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\max\ -x_0
$$
$$
\begin{cases}
10x_1 - x_2^+ + x_2^- + 4x_3 - x_0 \leq 8 \\
10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3 - x_0 \leq -10 \\
x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

(3.3) Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\max\ -x_0
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = 8 - 10x_1 + x_2^+ - x_2^- - 4x_3 + x_0 \\
w_2 = -10 - 10x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - 2x_3 + x_0 \\
x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{cases}
$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare x_0 in base settandone il valore a 10 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$
\max\ -10 - 10x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - x_3 - w_2
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = 18 - 4x_2^+ + 4x_2^- - 2x_3 + w_2 \\
x_0 = 10 + 10x_1 - 5x_2^+ + 5x_2^- + 2x_3 + w_2 \\
x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{cases}
$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2^+ nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2^+ in base. A farle posto è la x_0 che si annulla, quindi il problema originario era ammissibile (basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla (in caso di dizionario degenere potrei anche decidere di portare fuori base un'altra variabile, ma non sarebbe una buona idea ...).

$$
\max\ -x_0
$$
$$
\begin{cases}
w_1 = 10 - 8x_1 - \frac{18}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 + \frac{4}{5}x_0 \\
x_2^+ = 2 + 2x_1 + x_2^- + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 - \frac{1}{5}x_0 \\
x_0, x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2 \geq 0
\end{cases}
$$

(3.4) Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base.

$$\max\ 2 + 22x_1 - 10x_2 - 12x_3 = -18 + 2x_1 - 16x_3 - 2w_2$$
$$\begin{cases} w_1 = 10 - 8x_1 - \frac{18}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_2^+ = 2 + 2x_1 + x_2^- + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}w_2 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

(3.5) La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portano in base x_1 esce w_1 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$\max\ -\frac{31}{2} - \frac{1}{4}w_1 - \frac{169}{10}x_3 - \frac{39}{20}w_2$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{8}w_1 - \frac{9}{20}x_3 + \frac{1}{40}w_2 \\ x_2^+ = \frac{9}{2} - \frac{2}{8}w_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{9}{2}$, $x_3 = 0$ cui corrisponde un valore di $-\frac{31}{2}$ per la funzione obiettivo.

(3.6) Questa soluzione di base non risulta essere degenere poichè $\frac{5}{4} > 0$ e $\frac{9}{2} > 0$. Pertanto, per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{4}$ (almeno per piccoli incrementi) e per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{39}{20}$ (almeno per piccoli incrementi).

(3.7) Lo studio di cosa succede a seguito di variazioni nei termini noti dei vincoli porta a considerare la seguente generalizzazione del problema originale:

$$\max\ 2 + 22x_1 - 10x_2 - 12x_3$$
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 + t_1 \\ 10x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -10 + t_2 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

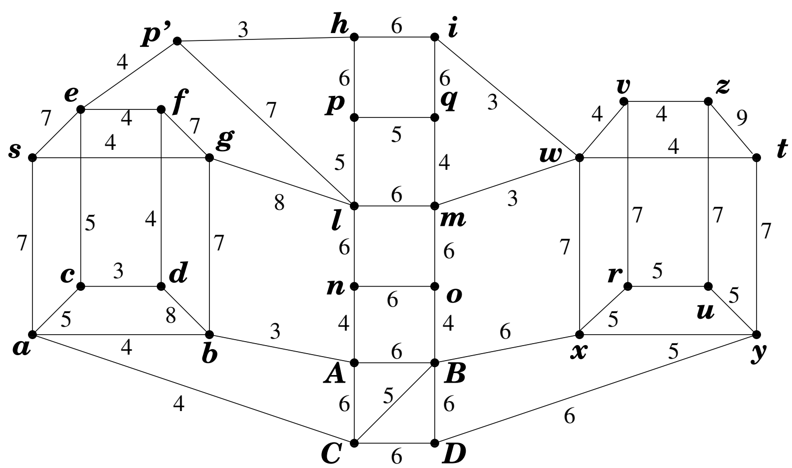
Il tableau per la soluzione di base di questo problema caratterizzata dalla medesima partizione (in base/fuori base) delle variabili che nella soluzione ottima riscontrata per il problema originario differirà dal tableau di detta soluzione del problema originario solo per la colonna dei termini noti, la quale può essere facilmente ricostruita avvalendosi della prova del nove per il tableau. Poichè $(x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2, z) = (0, 0, 0, 0, 8+t_1, -10+t_2, 0)$ soddisfaceva al primissimo tableau (dizionario) essa dovrá soddisfare anche all'ultimo, e queste 3 condizioni ci consentono di ricostruire le 3 entries nella colonna dei termini noti. Con i conseguenti conteggi otteniamo il seguente tableau:

$$\max\ -\frac{31}{2} + \frac{1}{4}t_1 + \frac{39}{20}t_2 - \frac{1}{4}w_1 - \frac{169}{10}x_3 - \frac{39}{20}w_2$$
$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{40}t_2 - \frac{1}{8}w_1 - \frac{9}{20}x_3 + \frac{1}{40}w_2 \\ x_2^+ = \frac{9}{2} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2 - \frac{2}{8}w_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}w_2 \\ x_1, x_2, x_3, w_1, w_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si noti come questo dizionario generalizzi effettivamente il dizionario da cui è stato ottenuto (riscontrabile per $t_1 = t_2 = 0$). La soluzione di base associata a questo dizionario, ossia $(x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, w_1, w_2, z) = (\frac{5}{4} + \frac{1}{8}t_1 - \frac{1}{40}t_2, \frac{9}{2} + \frac{1}{4}t_1 - \frac{1}{4}t_2, 0, 0, 0, 0, -\frac{31}{2} + \frac{1}{4}t_1 + \frac{39}{20}t_2)$ evidenzia la nostra disponibilità a pagare i prezzi ombra, come appaiono nell'espressione della coordinata z (valore di funzione obiettivo).

(3.8) Tale soluzione rimane indefinitivamente ammissibile al crescere di t_1, e pertanto non vi è limite alla nostra propensione a pagare quel prezzo sul primo vincolo. La non-negatività della x_2^+ suggerisce però che il prezzo ombra per la seconda risorsa perda il suo significato per $t_2 > 18$. Quando $t_2 = 18$ la soluzione ottima è degenere e per $t_2 > 18$ dobbiamo rivedere le nostre strategie.

Problema 4 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo planare.

4.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito.

4.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

4.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: ln, no, ca.

4.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

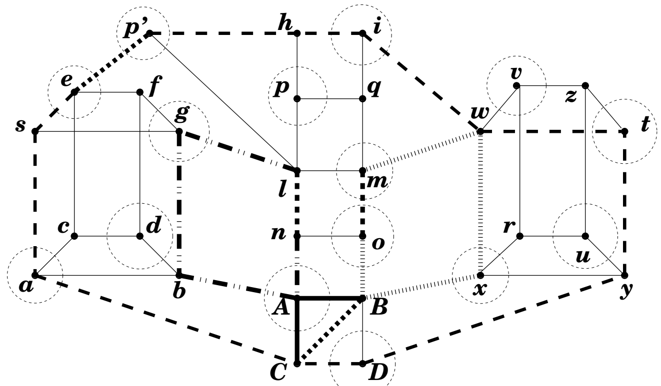
4.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

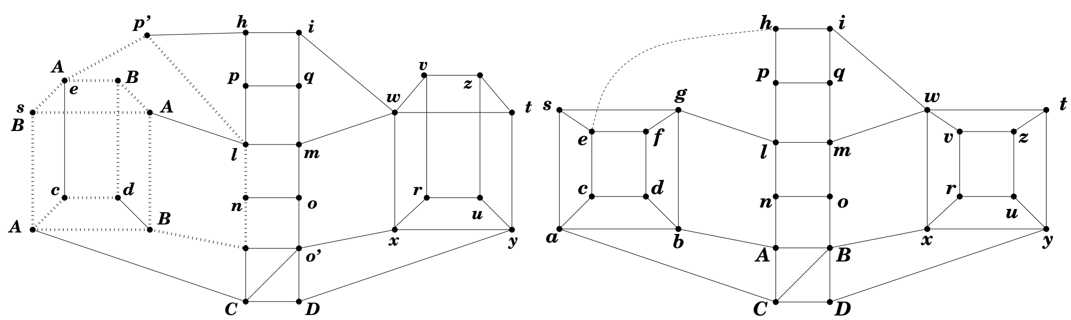
4.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte.

Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno 4 archi per renderlo tale, è certificato dai 4 cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura con archi a tratto spesso. Di questi, i 4 archi in linea tratteggiata (uno per ciclo) sono quelli che si suggerisce di rimuovere. La figura esibisce inoltre la bipartizione dei nodi che mette in evidenza come il grafo ottenuto con la rimozione dei 4 detti archi sia bipartito. La presenza di questo elegante certificato di ottimalitá è del tutto fortuita (il problema di rimuovere il minimo numero di archi per rendere un grafo bipartito è NP-hard).

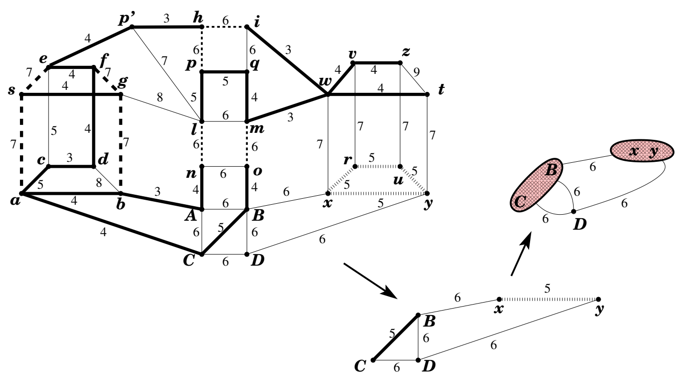


Il fatto che G non sia planare è comprovato dalla suddivisione di $K_{3,3}$ presente in G ed esibita nella seguente figura.



Nella stessa figura, sulla destra, si mostra come rendere G planare con l'eliminazione di un solo arco.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 320$ alberi ricoprenti di peso minimo e ciascuno di essi include i 21 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 tratteggiati come i due incidenti in h, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 incidenti in s oppure in g, più tre qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (ru, uy, yx, xr), più 2 archi scelti opportunamente tra CD, DB, Bx, Dy. Vedremo ora nel dettaglio come vi siano precisamente 5 modi diversi per scegliere questi 2 archi tra CD, DB, Bx, Dy in modo tale da ottenere alberi ricoprenti di peso minimo. Per meglio rappresentarci e comprendere quali siano le possibili scelte di questi 2 archi tra CD, DB, Bx, Dy, procediamo come segue: nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 6 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 6. Inoltre, siccome già stabilito che dei 4 archi di peso 6 tratteggiati come i due incidenti in h ne va preso almeno uno (considerato il taglio che separa i nodi i, w, v, z, t, m, q, p, ed l dagli altri) e non più di uno (finiscono tutti in parallelo non appena contratti tutti gli archi di peso inferiore a 6), contraiamo allora anche questi quattro archi di peso 6. Concentriamoci poi sulla zona in questione (tralasciamo cioè di considerare la componente connessa formata dai due nodi s e g, rimasta isolata con la rimozione degli archi di peso superiore a 6). Dopo aver così sgomberato il tavolo, ci ritroviamo con 3 soli macronodi connessi da questi 4 archi, due disposti in parallelo, ma altrimenti in disposizione a triangolo. Dei due archi in parallelo ne va preso massimo uno ed in totale ne vanno presi 2. In pratica abbiamo una possibile configurazione di scelta valida per ogni spanning tree del grafetto piccolino che abbiamo isolato in figura. Esso cattura fedelmente le possibilità sul tavolo. Ci è ora facile contare i possibili spanning tree del grafetto isolato e vedere che le configurazioni sono 5.



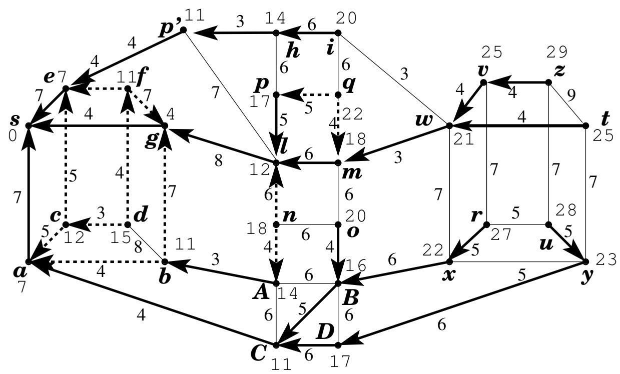
Si noti che nella componente in figura che abbiamo etichettato con x ed y sono in realtà presenti anche i nodi r ed u, mentre la componente che include B e C comprende in realtà tutti i restanti nodi (tranne s e g).

ln in qualche soluzione ottima in quanto è uno degli archi di peso minimo entro il seguente insieme di archi che formano un taglio del grafo: $\{hi, hp, ln, mo, Bx, Dy\}$ (primo certificato/argomento) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $lnom$ (secondo certificato/argomento);

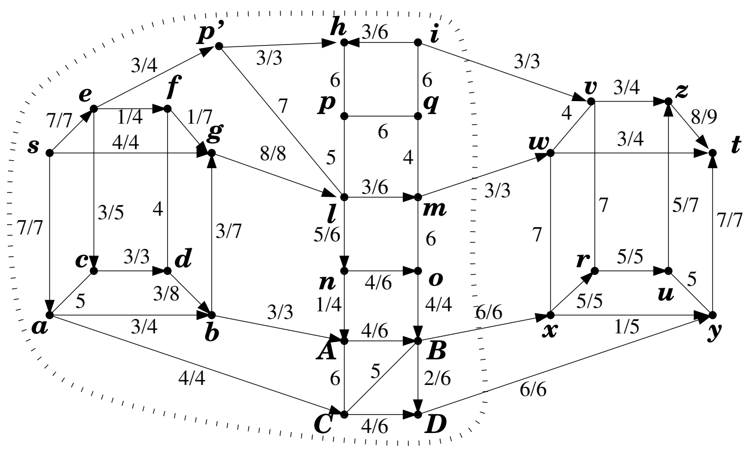
no in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $noBCabA$;

ca in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio $\delta(\{c, d, e, f, p', h\})$ che separa i nodi c, d, e, f, p', h da tutti gli altri nodi.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^6 = 64$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati uscenti dal nodo c (nel nodo f, nel nodo b, nel nodo d, nel nodo n, nel nodo q).



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;

2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);

3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.