Esame di Ricerca Operativa - 14 febbraio 2018
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE - punti in palio: 56, con voto $\geq$ punti + k, $k \geq 0$

Problema 1 (22 punti):

Un grafo senza loops e senza archi paralleli è detto *semplice*. In questo esercizio ci interessano esclusivamente i grafi semplici, quelli che modellano le relazioni binarie simmetriche. Un grafo viene detto *r-regolare* quando ogni nodo ha *grado* r, ossia è in relazione di vicinanza con precisamente r altri nodi. Il *girth* di un grafo G è il minimo naturale k tale che G ammette un ciclo di lunghezza k.

(5pt) Dimostrare che ogni grafo 3-regolare di girth 5 ha almeno 10 nodi.

(7pt) È noto, più in generale, che ogni grafo r-regolare di girth g ha almeno $n(r,g)$ nodi, dove

$$n(r,g) = \begin{cases} 1 + (r-1)^{(g/2-1)} + r\sum_{i=0}^{(g-4)/2}(r-1)^i & \text{per } g \text{ pari,} \\ 1 + r\sum_{i=0}^{(g-3)/2}(r-1)^i & \text{per } g \text{ dispari.} \end{cases}$$

Dimostrare tale lower bound per il solo caso di g dispari.

(4pt) Formulare con la PLI il problema di trovare un eventuale grafo 3-regolare e girth 5 di 10 nodi.

(6pt) Un tale grafo esiste, ed è unico a meno di ismorfismo. Riesci a trovarlo?

svolgimento.

(5+7pt) Fissato un qualsiasi nodo v_0 di un grafo r-regolare G con girth $2k+1$, si consideri l'albero T, radicato in v_0, prodotto dalla visita BFS. In generale, per grafi G qualsiasi, l'albero BFS non è unico nemmeno dopo aver fissato il nodo radice. Vedremo tuttavia che, comunque scelto v_0, l'albero BFS è unico se G è r-regolare con girth $2k+1$ e $n \leq n(r,g)$. Di fatto, premesso che ogni albero BFS da v_0 è albero di cammini minimi da v_0, vedremo che anche l'albero dei cammini minimi da v_0 è unico. Infatti, se un nodo v dista al più k da v_0, allora esiste un unico cammino minimo da v_0 a v, altrimenti il girth sarebbe inferiore a $2k+1$. Pertanto, se con V_i indichiamo l'insieme dei nodi a distanza $d(v_0,v) = i$, e $V^j := \cup_{i=0}^{j} V_i$, allora l'albero dei cammini minimi è unico sul grafo indotto $G[V^k]$. Ed è interessante osservarlo più da vicino scoprendo che non può esistere un arco che collega due nodi in V_k tranne gli archi dell'albero BFS stesso, che collegano un generico nodo v in V_i (con $0 < i \leq k$) col suo padre in V_{i-1}. Tutti gli altri vicini di v sono fuori da V^{i-1}. Pertanto, $|V_0| = |\{v_0\}| = 1$, $|V_1| = r$, e, più in generale, $|V_{i+1}| = r(r-1)^i$ per $0 < i < k$. Per inciso, la profondità dell'albero BFS in un qualsiasi grafo r-regolare e girth almeno $2k+1$ non può essere inferiore a k poichè la r regolarità impedisce vi siano delle foglie. E solo limitandoci a considerare i nodi in V^k scopriamo che $|V^k| = 1 + r\left(\sum_{i=0}^{k-1}(r-1)^i\right) = n(r,k)$.

(4pt) Sull'insieme di nodi $V := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, per ogni coppia $i,j \in V$ con $i < j$, introduciamo la variabile $x_{i,j} \in \{0,1\}$ atta a specificare se il grafo G in questione ha $(x_{i,j} = 1)$, oppure no $(x_{i,j} = 0)$, un arco di estremi i e j.

Poichè vogliamo che G sia 3-regolare, imponiamo il vincolo $\sum_{i \neq j} x_{i,j} = 3$ per ogni $j \in V$.

Poichè vogliamo che G abbia girth 5, imponiamo le due seguenti famiglie di condizioni:

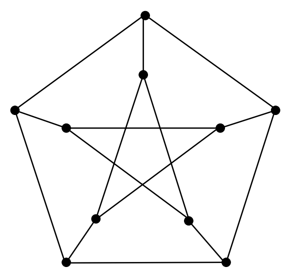
nessun ciclo di lunghezza 3: per ogni 3 nodi diversi $u, v, z \in V$,

$$x_{u,v} + x_{v,z} + x_{z,v} \leq 2$$

nessun ciclo di lunghezza 4: per $(u, v, w, z) \in V^4$ con $|\{u, v, w, z\}| = 4$,

$$x_{u,v} + x_{v,w} + x_{w,z} + x_{z,v} \leq 3$$

(6pt) Salta fuori il famigerato grafo di Petersen:



Problema 2 (8 punti):
Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

$$\max\ C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \\ x_3 + 5x_4 \leq 10 + t_2 \\ 2x_5 + x_6 \leq 14 + t_3 \\ x_1 + x_3 + 2x_5 \leq 20 + t_4 \\ x_2 + 5x_4 + x_6 \leq 15 + t_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2.1. **(1pt)** Verificare esplicitamente che $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5, \overline{x}_6) = (6, 5, 0, 2, 7, 0)$ è soluzione ammissibile per $P(0)$.

2.2. **(1pt)** Scrivere il problema duale $D(t)$ di $P(t)$.

2.3. **(1pt)** Impostare il sistema per la ricerca di una soluzione di base di $D(0)$ soggetta alle condizioni agli scarti complementari rispetto a $\overline{x}$.

2.4. **(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5. **(1pt)** Per quali valori dei parametri $C_1, \ldots, C_6$ la soluzione $\overline{x}$ assegnata è ottima per $P(0)$?

2.6 **(1pt)** esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

2.7 **(2pt)** per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$, fornire i limiti a_i e b_i tali che il prezzo ombra di t_i sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0\ \forall j \neq i$). che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) & = 11 \leq 12 \\ (0) + 5(2) & = \mathbf{10} \leq 10 \\ 2(7) + (0) & = \mathbf{14} \leq 14 \\ (6) + (0) + 2(7) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (5) + 5(2) + (0) & = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min \psi(t) = (12+t_1)\,y_1 + (10+t_2)\,y_2 + (14+t_3)\,y_3 + (20+t_4)\,y_4 + (15+t_5)\,y_5$$

$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq C_1 \\ y_1 + y_5 \geq C_2 \\ y_2 + y_4 \geq C_3 \\ 5y_2 + 5y_5 \geq C_4 \\ 2y_3 + 2y_4 \geq C_5 \\ y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1, 2, 4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} + y_4 = C_1 \\ + y_5 = C_2 \\ 5y_2 + 5y_5 = C_4 \\ 2y_3 + 2y_4 = C_5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$. (Questo significa che la soluzione primale assegnata era di base non degenere.)

Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. La prima condizione da imporre in tale senso è che ogni componente della soluzione sia non-negativa, da cui:

$$\begin{cases} C_1 \geq 0 \\ C_2 \geq 0 \\ C_4 \geq 5C_2 \\ C_5 \geq 2C_1 \end{cases}$$

Ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6). La soluzione primale assegnata sarà ottima se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = \frac{C_4-5C_2}{5} + C_1 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = \frac{C_5-2C_1}{2} + C_2 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se**

$$\begin{cases} C_1 & \geq & 0 \\ C_2 & \geq & 0 \\ C_4 & \geq & 5C_2 \\ C_5 & \geq & 2C_1 \\ C_3 & \leq & C_1 + \frac{C_4-5C_2}{5} \\ C_6 & \leq & C_2 + \frac{C_5-2C_1}{2} \end{cases}$$

I prezzi ombra sono dati proprio da $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$ e possono essere messi in evidenza nella seguente scrittura per i valori della funzione obiettivo all'ottimo

$$\begin{aligned} z(t) &= \psi(t) \\ &= (12+t_1)\, y_1 + (10+t_2)\, y_2 + (14+t_3)\, y_3 + (20+t_4)\, y_4 + (15+t_5)\, y_5 \\ &= (10+t_2)\, \frac{C_4-5C_2}{5} + (14+t_3)\, \frac{C_5-2C_1}{2} + (20+t_4)\, C_1 + (15+t_5)\, C_2 \\ &= 6\, C_1 + 5\, C_2 + 2\, C_4 + 7\, C_5 + \frac{C_4-5C_2}{5}\, t_2 + \frac{C_5-2C_1}{2}\, t_3 + C_1\, t_4 + C_2\, t_5. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la soluzione di base di $P(t)$, per t generico, corrispondente alla stessa partizione delle variabili (in base/fuori base) che per la soluzione di base assegnata $\overline{x} = (6,5,0,2,7,9)$ per $P(0)$. Tengo cioè a 0 quelle stesse variabili su cui $\overline{x}$ è a 0 (ossia $\overline{x}_3 = \overline{x}_6 = 0$) e lo stesso per le varibili di slack (ossia metto ad eguaglianza quegli stessi vincoli che $\overline{x}$ soddisfa ad eguaglianza).

$$P(t) \begin{cases} & & (0) + & 5(2+\delta_4) & & & = & 10+t_2 \\ & & & & 2(7+\delta_5) + & (0) & = & 14+t_3 \\ (6+\delta_1) & & + \ (0) & & + \ 2(7+\delta_5) & & = & 20+t_4 \\ & (5+\delta_2) & & + \ 5(2+\delta_4) & & + \ (0) & = & 15+t_5 \end{cases}$$

Da cui $\left(6+t_4-t_3, 5+t_5-t_2, 0, 2+\frac{1}{5}t_2, 7+\frac{1}{2}t_3, 0\right)$ è la soluzione ottima di base per $P(t)$. La domanda è dove essa ritenga ammissibilità. Dualmente, la soluzione di base duale $\overline{y} = \left(0, \frac{C_4-5C_2}{5}, \frac{C_5-2C_1}{2}, C_1, C_2\right)$ non dipende da t e pertanto resta ammissibile per ogni t. Tuttavia, affinchè essa sia ottima (e la soluzione primale complementare ad essa sia ammissibile) dovremo avere che:

non negatività della x_1: $x_1(t) = 6 + t_4 - t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \leq 6, t_4 \geq -6$;

non negatività della x_2: $x_2(t) = 5 + t_5 - t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \leq 5, t_5 \geq -5$

non negatività della x_4: $x_4(t) = 2 + \frac{1}{5}t_2 \geq 0 \Rightarrow t_2 \geq -10$

non negatività della x_5: $x_5(t) = 7 + \frac{1}{2}t_3 \geq 0 \Rightarrow t_3 \geq -14$

primo vincolo primale: $x_1 + x_2 \leq 12 + t_1 \Leftrightarrow (t_4 - t_3) + (t_5 - t_2) \leq 1 \Leftrightarrow t_4 + t_5 \leq 1 + t_2 + t_3$, quindi $t_4 \leq 1$, $t_5 \leq 1$, $t_2 \geq -1$, $t_3 \geq -1$.

Quindi, $a_2 = -1$, $b_2 = 5$, $a_3 = -1$, $b_3 = 6$, $a_4 = -6$, $b_4 = 1$, $a_5 = -5$, $b_5 = 1$ delimitano gli ambiti di validità dei vari prezzi ombra.

Problema 3 (7 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella H–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0
E	0	0	•	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	0
H	2	1	2	1	2	1	2	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

3.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

3.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

3.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in H–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

3.5(1pt) Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a H–9?

3.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella H–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	184	63	36	9	9	9	9	2	•
B	121	27	27	0	•	•	7	2	1
C	94	•	27	•	29	17	5	1	1
D	94	49	27	27	12	12	4	•	1
E	45	22	•	15	•	8	4	4	1
F	23	22	22	15	9	4	•	3	1
G	1	•	7	6	5	4	3	2	1
H	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	$\bullet$
B	1	2	3	4	$\bullet$	$\bullet$	1	2	2
C	1	$\bullet$	3	$\bullet$	0	0	1	3	5
D	1	1	4	4	4	4	5	$\bullet$	5
E	1	2	$\bullet$	4	$\bullet$	4	9	9	14
F	1	3	3	7	7	11	$\bullet$	9	23
G	1	$\bullet$	3	10	17	28	28	37	60
H	1	1	4	14	31	59	87	124	184

Ritrovare il valore 256 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore raccoglibile lungo un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	2_1	5_1	6_1	7_1	8_1	8_1	8_1	$\bullet$
B	3_1	6_1	7_1	7_1	$\bullet$	$\bullet$	8_1	8_2	8_2
C	5_1	$\bullet$	7_1	$\bullet$	$-$	$-$	9_1	10_1	11_1
D	5_1	5_1	8_1	8_1	8_1	8_1	10_1	$\bullet$	11_1
E	5_1	5_2	$\bullet$	9_1	$\bullet$	9_1	10_1	10_1	11_1
F	5_1	6_3	7_3	10_1	10_1	13_1	$\bullet$	10_1	12_1
G	8_1	$\bullet$	7_3	11_1	13_1	13_2	13_2	14_2	14_2
H	10_1	11_1	13_1	14_1	16_1	17_1	19_1	20_1	20_1

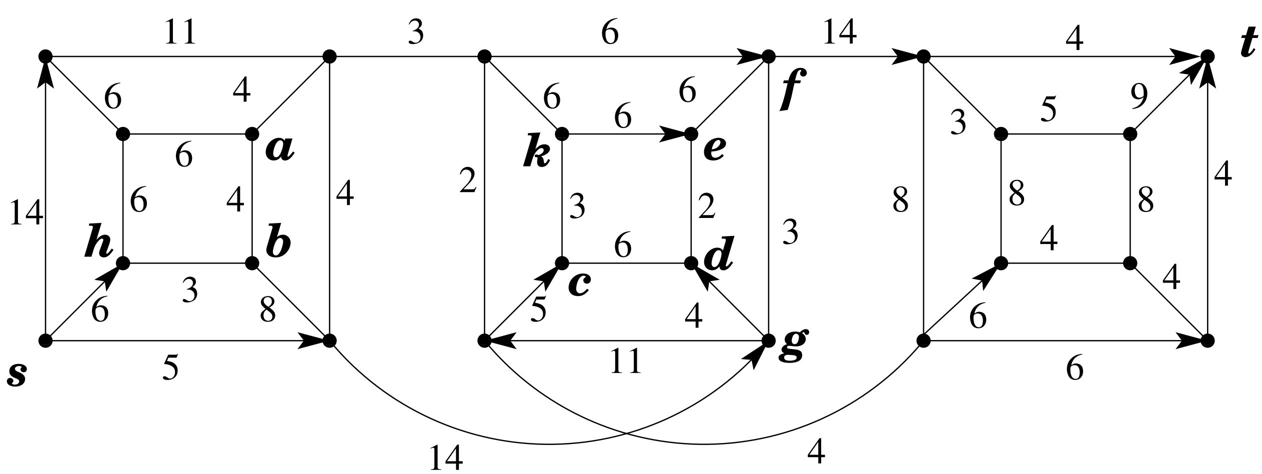
Leggendo i valori riportati nella cella H–9 scopriamo che il minimo costo di una traversata é di 7, e che esistono 36 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → H–9	256
B–3 → H–9	27
A–1 → F–6	11
passaggio per D–5	12*4 = 48
massimo valore	20
numero di max-val paths	1

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

Problema 4 (19 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

4.2.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

4.3.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.4.**(1+1+2=4pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: ab, cd, ef.

4.5.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

4.6.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.7.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

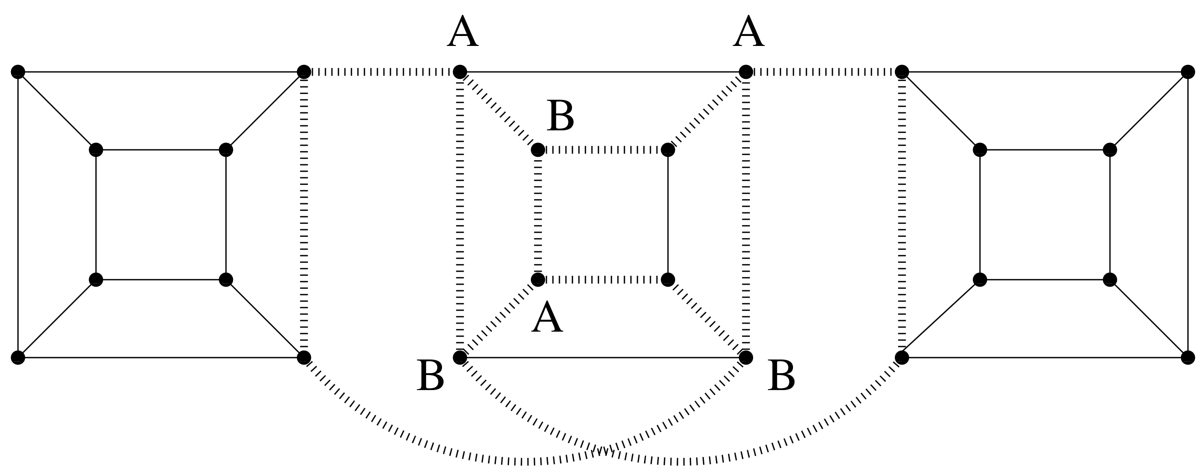
4.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

4.9.**(3pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi tale che il valore del massimo flusso aumenta se mi è concesso di violare la loro capacità, fornendo sia certificato **(1pt)** del fatto che il flusso aumenta, sia certificato **(2pt)** del fatto che agire su un numero minore di archi non può bastare.

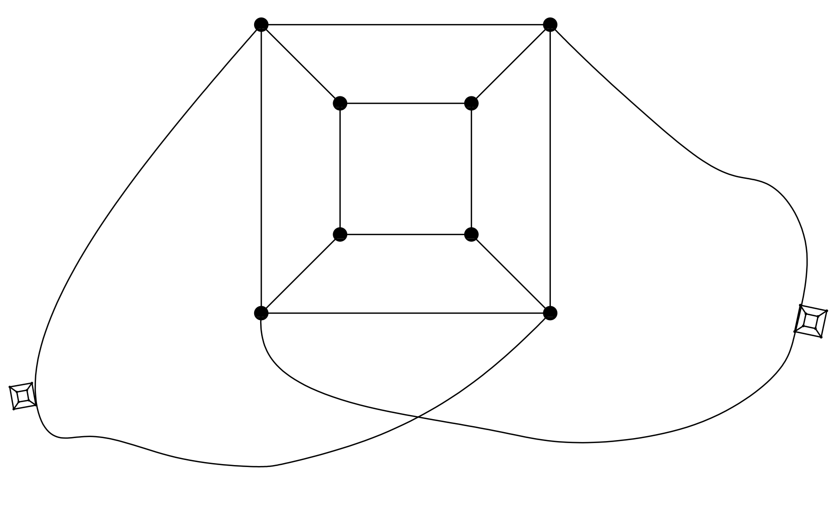
4.10.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato **(1pt)** del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato **(1pt)** del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di $K_{3,3}$ in figura.



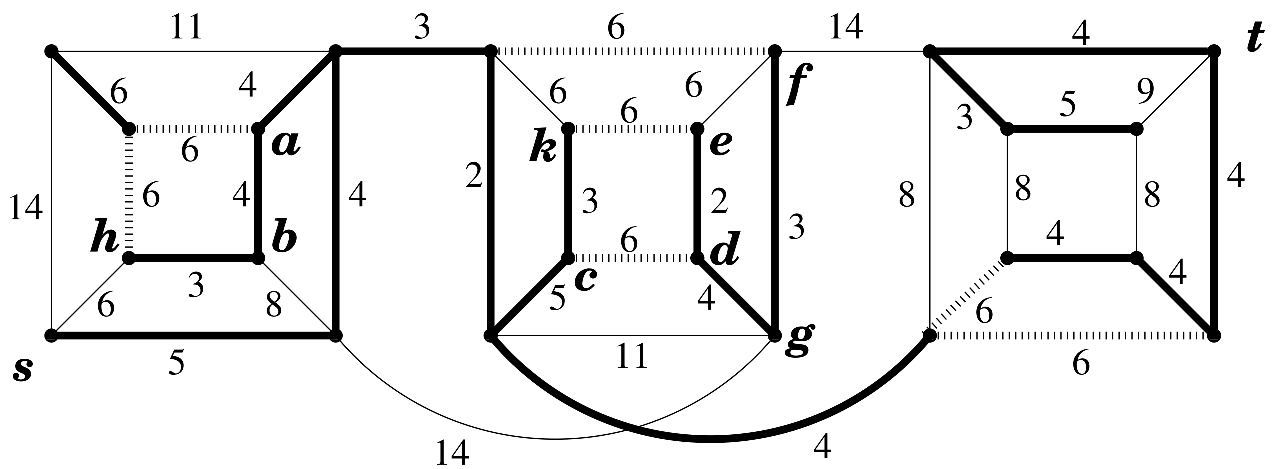
Nella ricerca di tale certificato (o di un planar embedding), poteva sicuramente aiutare la considerazione che G è planare se e solo se lo è anche il seguente grafo G'.



Tale grafo non sembra planare, e tuttavia non può contenere una suddivisione di K_5 visto che ha solo 4 nodi di grado almeno 4. Si era quindi indotti alla ricerca di una suddivisione di

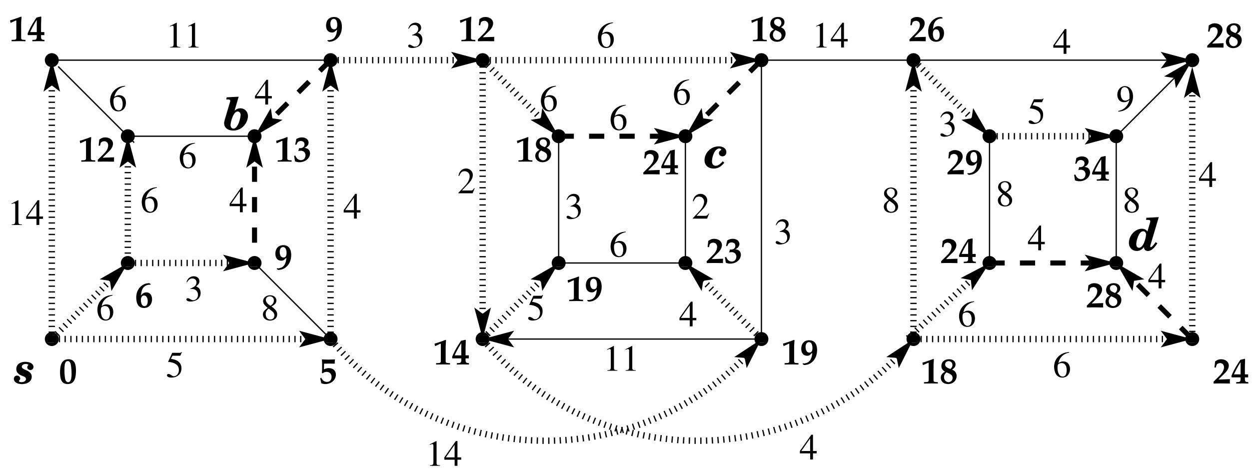
$K_{3,3}$. Una volta trovata una suddivisione di $K_{3,3}$ in G' era facile derivarne una suddivisione di $K_{3,3}$ in G.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 12 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra, più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.

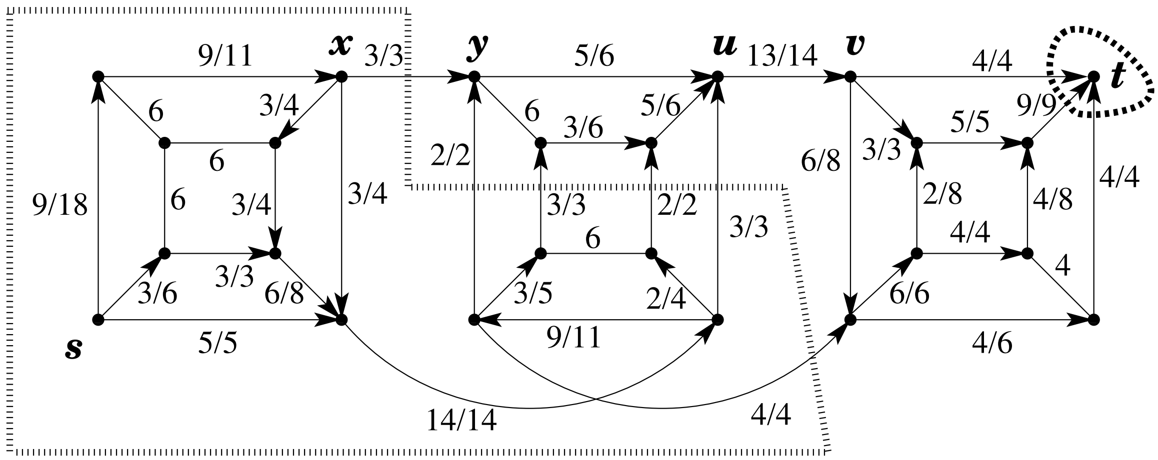


- ab in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi h e b da tutti gli altri nodi del grafo;
- cd in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi e, d, f, e g dagli altri nodi del grafo, ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $edck$;
- ef in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $efgd$.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^3 = 8$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo b, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo c e uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo d.

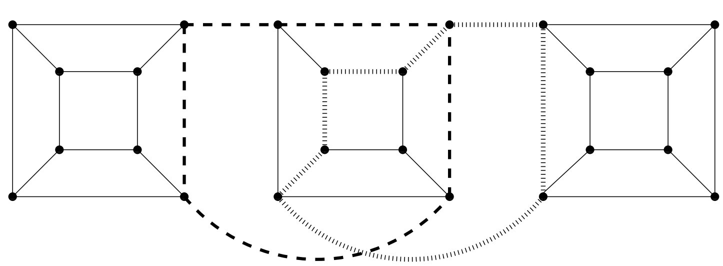


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

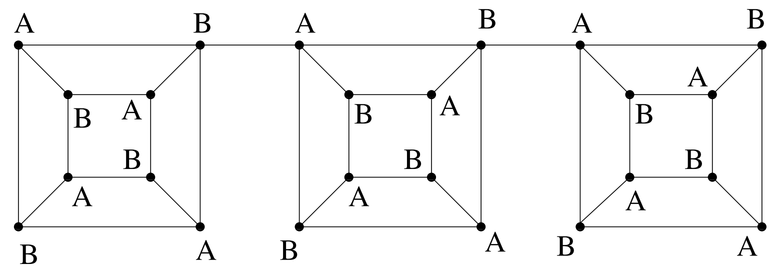


Il flusso ha valore 17 e satura tutti e 3 gli archi entranti in t. Pertanto tale flusso è ottimo come certificato dal taglio costituito dalla stella degli archi entranti in t. In verità, anche l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata che abbraccia la parte sinistra del grafo, portandosi dal lato di s al lato di t, sono tutti saturati. Inoltre, tutti gli archi che attraversano tale curva in senso inverso sono scarichi. Questi 6 archi costituiscono pertanto un secondo s,t-taglio minimo, anch'esso di valore 17 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto. Si noti che i due s,t-tagli minimi discussi sopra non hanno archi in comune. Ogni flusso di valore maggiore a 17 dovrà pertanto sforare la capacità di almeno due degli archi della rete. In effetti basta alzare di $\varepsilon > 0$ la capacità dei due archi (x, y) e (u, v) perchè il valore del massimo flusso si alzi da 17 a $\min\{18, 17 + \varepsilon\}$. Per $\varepsilon > 1$ non ha senso alzare ulteriormente la capacità di questi due archi, data la presenza del taglio che separa gli 8 nodi più a sinistra (incluso s) da tutti gli altri (incluso t).

Occorre rimuovere almeno 2 archi per rendere G bipartito dato che esso contiene 2 circuiti dispari disgiunti sugli archi come evidenziato in figura.



Di converso, con la rimozione di 2 soli archi possiamo rendere G bipartito come evidenziato in figura.



CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);
3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

gestione dei voti conseguiti.

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.