

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 14 febbraio 2018

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 56, con voto \geq punti + k , $k \geq 0$

Problema 1 (22 punti):

Un grafo senza loops e senza archi paralleli è detto *semplice*. In questo esercizio ci interessano esclusivamente i grafi semplici, quelli che modellano le relazioni binarie simmetriche. Un grafo viene detto *r-regolare* quando ogni nodo ha *grado* r , ossia è in relazione di vicinanza con precisamente r altri nodi. Il *girth* di un grafo G è il minimo naturale k tale che G ammette un ciclo di lunghezza k .

(5pt) Dimostrare che ogni grafo 3-regolare di girth 5 ha almeno 10 nodi.

(7pt) È noto, più in generale, che ogni grafo r -regolare di girth g ha almeno $n(r, g)$ nodi, dove

$$n(r, g) = \begin{cases} 1 + (r-1)^{(g/2-1)} + r \sum_{i=0}^{(g-4)/2} (r-1)^i & \text{per } g \text{ pari,} \\ 1 + r \sum_{i=0}^{(g-3)/2} (r-1)^i & \text{per } g \text{ dispari.} \end{cases}$$

Dimostrare tale lower bound per il solo caso di g dispari.

(4pt) Formulare con la PLI il problema di trovare un eventuale grafo 3-regolare e girth 5 di 10 nodi.

(6pt) Un tale grafo esiste, ed è unico a meno di isomorfismo. Riesci a trovarlo?

Problema 2 (8 punti):

Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$:

$$\begin{array}{ll} \max & C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4 + C_5x_5 + C_6x_6 \\ \left\{ \begin{array}{ll} x_1 + & x_2 & & & & & \leq & 12 + t_1 \\ & & x_3 + & 5x_4 & & & \leq & 10 + t_2 \\ & & & & 2x_5 + & x_6 & \leq & 14 + t_3 \\ x_1 & & + & x_3 & & + & 2x_5 & \leq & 20 + t_4 \\ & x_2 & & + & 5x_4 & & + & x_6 & \leq & 15 + t_5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

2.1.(1pt) Verificare esplicitamente che $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6) = (6, 5, 0, 2, 7, 0)$ è soluzione ammissibile per $P(0)$.

2.2.(1pt) Scrivere il problema duale $D(t)$ di $P(t)$.

2.3.(1pt) Impostare il sistema per la ricerca di una soluzione di base di $D(0)$ soggetta alle condizioni agli scarti complementari rispetto a \bar{x} .

2.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

2.5.(1pt) Per quali valori dei parametri C_1, \dots, C_6 la soluzione \bar{x} assegnata è ottima per $P(0)$?

2.6 (1pt) esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

2.7 (2pt) per ogni $i = 1, 2, 3, 4, 5$, fornire i limiti a_i e b_i tali che il prezzo ombra di t_i sopra espresso ritenga validità purché $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0 \forall j \neq i$). che sei stato chiamato a compiere.

Problema 3 (7 punti):

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella H-9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0
E	0	0	•	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	3	•	0	1
G	3	•	0	1	2	0	0	1	0
H	2	1	2	1	2	1	2	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

3.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

3.2(1pt) e se la partenza è in B-3?

3.3(1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

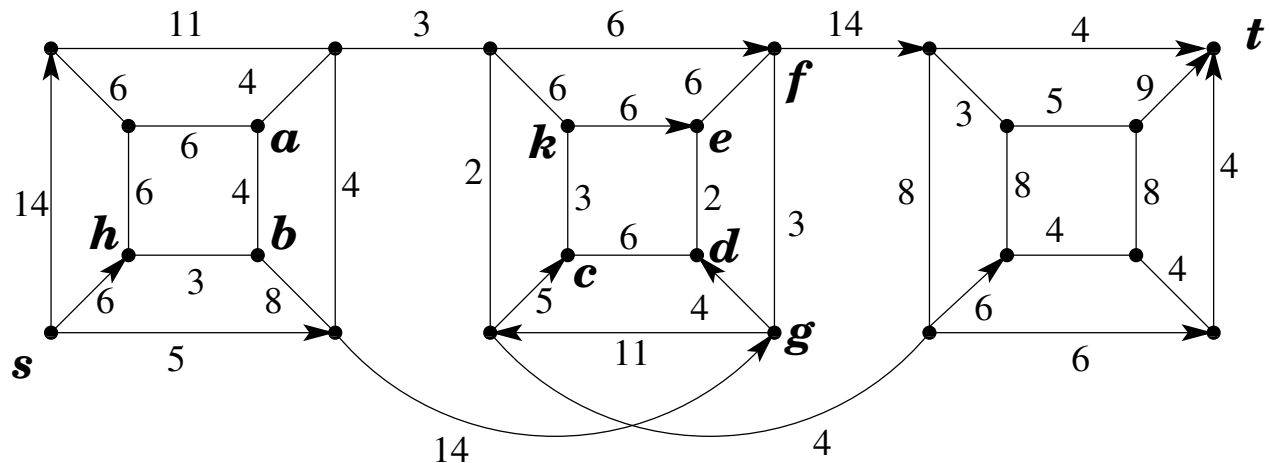
3.4(1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in H-9 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

3.5(1pt) Quale è il massimo valore in premi raccogliabili lungo una traversata da A-1 a H-9?

3.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

Problema 4 (19 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.(2pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

4.2.(1pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

4.3.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.4.(1+1+2=4pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: ab , cd , ef .

4.5.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .

4.6.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .

4.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

4.9.(3pt) Dire quale sia il minimo numero di archi tale che il valore del massimo flusso aumenta se mi è concesso di violare la loro capacità, fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il flusso aumenta, sia certificato (2pt) del fatto che agire su un numero minore di archi non può bastare.

4.10.(2pt) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato (1pt) del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in su i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.