

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 11 febbraio 2015 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (5 punti):

La Coloraben mira ad affermarsi nella vendita di tinte e smalti. La disponibilità di vernici base in magazzino, per le vendite del prossimo mese, è la seguente: 550 kg di bianco, 150 kg giallo, 90 kg di rosso e 70 kg di verde. Ogni barattolo messo sul mercato contiene 500 grammi di una tinta ottenuta miscelando le quattro vernici base. La Coloraben propone quattro tipi di tinte, descritte di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
tinta 1	solo bianco	260
tinta 2	non più del 50% di bianco almeno il 10% di rosso almeno il 15% di giallo	400
tinta 3	solo giallo	510
tinta 4	almeno il 30% di giallo almeno il 20% di rosso almeno il 30% di verde	520

Quindi un barattolo di tinta 2 potrebbe ad esempio essere composto al 45% di bianco, 10% di rosso, 20% di giallo, e 25% di verde.

Supponendo che tutto quanto miscelato venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Coloraben.

Problema 2 (1+1+1+1+1+2=8 punti):

Si formuli come un modello di Programmazione Lineare Intera (PLI) il seguente modello classico della Ricerca Operativa.

KNAPSACK

INPUT: Due numeri naturali n, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \dots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme S degli oggetti assegnati in input, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B , e massimizzando il valore totale raccolto.

A((1pt)) Fornire una formulazione di PLI per KNAPSACK.

B((1pt)) L'esistenza della formulazione di PLI di cui al punto precedente, ti consente di dedurre quali delle seguenti affermazioni? (Specificando il perchè): (1) la PLI è NP-hard in senso forte; (2) la PLI è NP-hard in senso debole; (3) esiste un algoritmo pseudo-polinomiale per la PLI; (4) esiste un algoritmo polinomiale per KNAPSACK; (5) esiste un algoritmo pseudo-polinomiale per KNAPSACK.

C((1pt)) quali affermazioni tra (1-5) sono note valere pur non essendo di per se deducibili dalla mappatura di KNAPSACK in PLI da te realizzata?

D((1pt)) Si consideri il rilassamento di Programmazione Lineare (PL) ottenuto rimuovendo i vincoli di interezza dalla formulazione di PLI sopra. Fornire un esempio di istanza dove l'unica soluzione ottima di questo rilassamento è frazionaria.

E((1pt)) Fornire un esempio di istanza dove una soluzione ottima di questo rilassamento è frazionaria ed un'altra è intera.

F((1pt)) Puoi fornire un esempio di istanza dove una soluzione ottima di questo rilassamento ha almeno due componenti frazionarie? Perchè?

G((2pt)) Puoi fornire un esempio di istanza dove ogni soluzione ottima di questo rilassamento ha almeno due componenti frazionarie? Perchè?

Problema 3 (6 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B .

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N
peso	2	13	14	6	13	3	11	16	4	46	41	44
valore	11	63	60	33	30	13	60	66	20	66	60	20

3.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso $B = 33$?

3.3 (1pt) e nel caso $B = 28$?

3.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

3.5 (2pt) e se l'oggetto G non fosse più disponibile, quale sarebbe allora la soluzione ottima per $B = 26, 28, 33, 36$?

Con oggetto G disponibile:

B	max val	peso	quali prendere
36			
33			
28			
26			

Senza oggetto G :

B	max val	peso	quali prendere
36			
33			
28			
26			

Problema 4 (4 punti):

Con riferimento ai **Problemi 2,3**. Nel Problema 2 si era fatto riferimento ad un modello di PLI ed al suo rilassamento (problema di PL) per il KNAPSACK. Nel Problema 3 si è fornita un'istanza di KNAPSACK. Chiediamo qui l'applicazione di quei modelli a questa istanza specifica.

4.1 (1pt) scrivere il modello di PLI ed il suo rilassamento di PL per questa istanza.

4.2 (3pt) fornire soluzione ottima di base per il problema di PL.

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
65	57	55	50	58	47	36	30	59	39	13	54	33	45	20	18	56	53	61	38	19	51	35	26	52

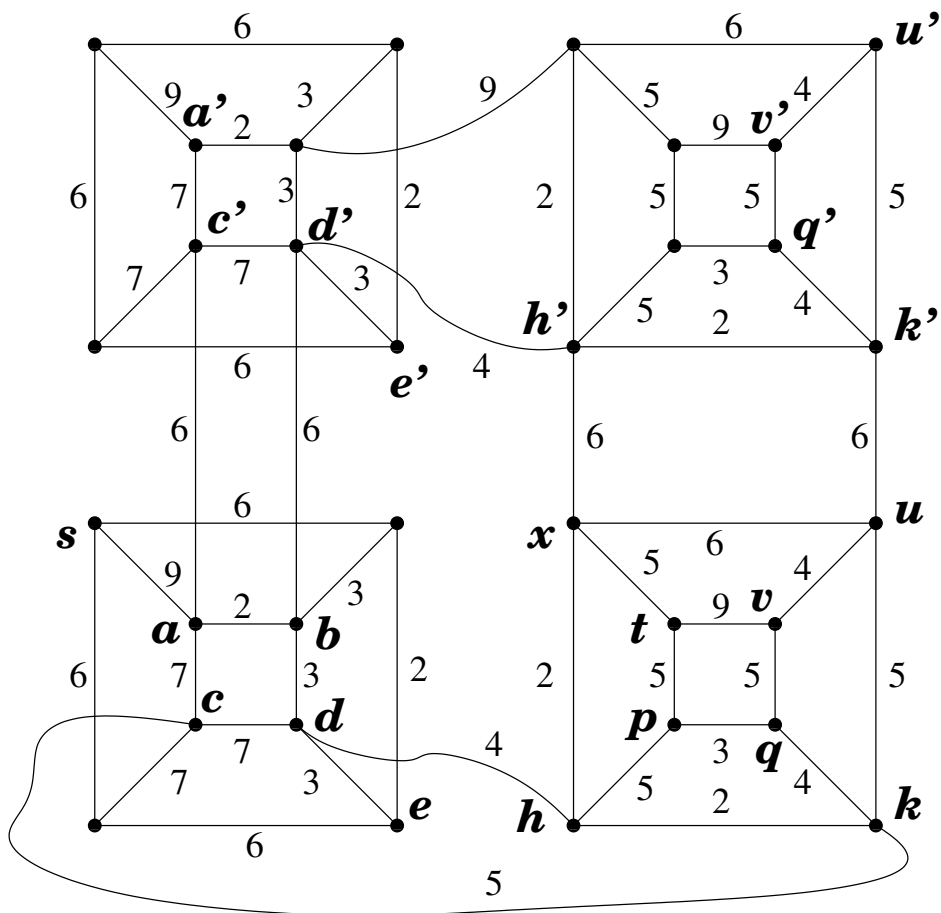
- 5.1(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.2(1pt)** una sequenza è detta decrescere con un possibile ripensamento (Z-sequenza), se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l' i -esimo, è strettamente minore dell'immediatamente precedente nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 59. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.4(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.5(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 5.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze crescenti tali che ogni elemento della sequenza data ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente		
Z-sequenza		
decrescente con 59		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Problema 6 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 6.1.(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.
- 6.2.(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco $h'x$ con un arco $q'x$ è planare oppure no.
- 6.3.(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s . Esprimere la famiglia di tali alberi.
- 6.4.(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 6.5.(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare come generarli).
- 6.6.(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 6.7.(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .
- 6.8.(1+1pt)** Fornire (con certificato di ottimalità) il flusso massimo dal nodo s al nodo q .



LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in su i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.