

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 18 febbraio 2020

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

punti in palio: 74, con voto \geq punti

Problema 1 (5+10=15 punti [modellazione/riduzioni]):

Per fare un'auto servono 4 ruote, un motore, ed un volante. Alla BasicCars abbiamo quattro operai (Dante, Carlo, Bruno ed Angela). Sebbene siano stati assunti con contratti diversi, con un numero diverso di ore previsto, ciascuno di loro sa produrre qualsiasi componente base, seppur con diverse produttività (esprese in unità di componente per ogni ora). I parametri in questione sono catturati nella seguente tabella:

Operaio	Ore a contratto	Produttività		
		ruote (R)	motori (M)	sterzi (S)
Angela (A)	200	10	15	20
Bruno (B)	80	20	5	10
Carlo (C)	150	15	10	5
Dante (D)	100	10	15	5

(5pt) [modellazione] Modellare con la PL il problema di determinare il numero di ore che ciascun operaio debba essere assegnato su ciascuna linea di produzione (R, M o S) in modo da massimizzare la quantità di auto complessivamente prodotte.

(10pt) [riduzione, hard] Si evidenzia come, volendo insistere sull'interezza della soluzione, il problema generale risulti sufficientemente espressivo da poter mappare in esso istanze generiche di KNAPSACK.

Problema 2 (3+3+3+3=12 punti):

Un grafo diretto (ossia con gli archi che hanno tutti un verso, ossia una testa ed una coda) si dice aciclico se non contiene cicli diretti. Il nostro scopo è riconoscere se un grafo diretto $G = (V, A)$ è aciclico. Invece che progettare un algoritmo apposito e codificarlo, vorremo ridurre questa domanda ad un problema di programmazione lineare.

(3pt) Mostra come, a partire da G , sia possibile comporre un problema $P_{NO}(G)$, di programmazione lineare, tale che $P_{NO}(G)$ sia soddisfacibile se e solo se G non è aciclico.

(3pt) Mostra come, a partire da G , sia possibile comporre un problema $P_{SI}(G)$, di programmazione lineare, tale che $P_{SI}(G)$ sia soddisfacibile se e solo se G è aciclico.

(3pt) Mostra come ottenere un certificato di non aciclicità di G a partire da una soluzione ammissibile di $P_{NO}(G)$.

(3pt) Mostra come ottenere un certificato di aciclicità di G a partire da una soluzione ammissibile di $P_{SI}(G)$.

Problema 3 (2+2+5=9 punti):

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M . Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

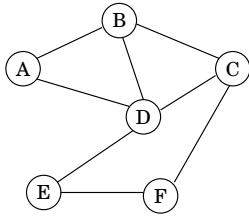
Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e , allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.

Siamo interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

(2pt) Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

(5pt) Dimostrare che la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico è un problema NP-hard riducendo ad esso il problema del minimo node cover.

Problema 4 (7 punti):

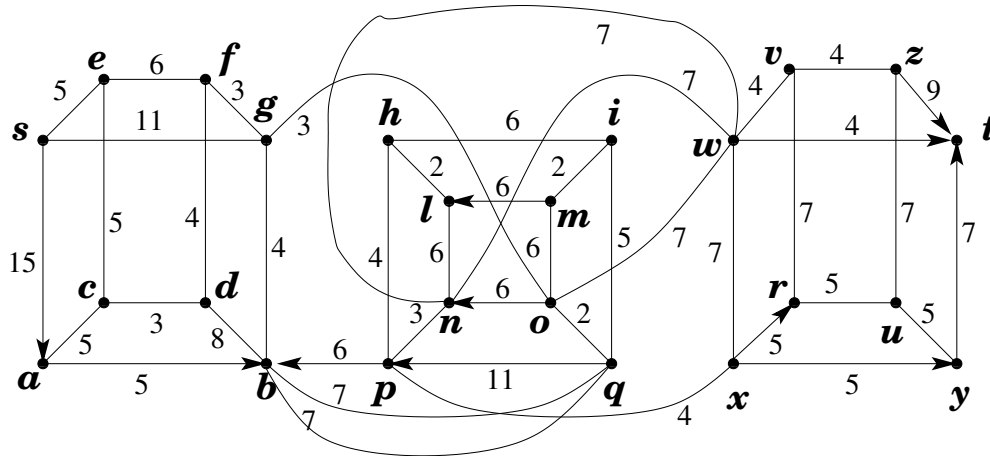
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
34	42	44	49	41	52	63	69	40	60	86	45	66	54	79	81	43	46	38	61	80	48	64	73	47

- 4.1(1pt)** trovare una sottosequenza (strettamente) crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.2(1pt)** una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l' i -esimo, sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 40. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.4(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.5(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze decrescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
crescente		
N-sequenza		
crescente con 40		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(2pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.
- 5.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G ; (1) il grafo G' .
- 5.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 5.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg , wx , ln .
- 5.5.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 5.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.9.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Problema 6 (16 punti):

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 - 6x_2 + 4x_3 \\ \left\{ \begin{array}{lll} 3x_1 & -2x_2 & +x_3 \leq 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 \leq 3 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 \geq 9 \\ & x_2 & \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- 6.1(1pt)** Portare in forma standard.
- 6.2(1pt)** Impostare il problema ausiliario.
- 6.3(1pt)** Scrivere il primo tableau per il problema ausiliario ed osservare che la soluzione di base che esso esprime non è ammissibile.
- 6.4(1pt)** Compiere un primo pivot per conquistare l'ammissibilità della soluzione di base associata al secondo tableau.
- 6.5(1pt)** Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.
- 6.6(1pt)** Stabilire se il problema originale era ammissibile: in caso negativo si concluda il presente esercizio offrendo dimostrazione della sua non-ammissibilità, in caso positivo si produca un primo tableau con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario in forma standard e si prosegua con le domande a seguire.
- 6.7(1pt)** Si verifichi la correttezza di tale tableau con la prova del 9 della PL (benchè non ammissibile, si impieghi l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione).
- 6.8(1pt)** Anche ove fosse non ammissibile, si renda esplicita la soluzione duale di base associata a questo primo dizionario per la seconda fase.
- 6.7(2+1pt+1pt+1pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo. I punti aggiuntivi vengono attribuiti se ad ognuno dei diversi pivot che dovrai compiere effettuerai esplicitamente una prova del 9: un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base primale ammissibile, un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base duale ammissibile, un punto se verifichi con almeno una soluzione tutti i dizionari visitati. Come ogni altra evidenza che date per ottenere punti, queste prove devono essere offerte in modo chiaro ed esplicito, e consiglio di incorniciare ogni vostra risposta che miri a diventare punti.
- 6.7(1+1pt)** rendere esplicita la soluzione duale ottima. Utilizzarla per dimostrare l'ottimalità della soluzione primale.
- 6.5(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di variazione in ciascuno dei termini noti dei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)
- 6.6(2pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.

3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.