Esame di Ricerca Operativa - 19 giugno 2012
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

La fonderia Plegiaminga produce un acciaio, ottenuto dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. Il costo unitario (Euro/kg) di ciascun materiale e la sua composizione espressa in percentuali kg/kg di materiale, sono espressi nella seguente tabella:

	% alluminio	% silicio	% carbonio	costo al kg
materiale 1	2	9	7	700
materiale 2	5	8	7	600
materiale 3	3	6	5	500
materiale 4	4	6	7	650

Si tenga conto che il prodotto finale deve contenere una percentuale di alluminio compresa tra il 3% e l'8%, una percentuale di silicio tra il 4% e il 5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%. Formalizzare il problema di pianificare la produzione della fonderia con l'obiettivo di minimizzare i costi.

svolgimento.

Per $i = 0, 1, 2, 3, 4$, una variabile x_i indica la percentuale di materiale i (espressa in kg/kg) presente in ogni unitá di prodotto. Quindi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ e $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. L'obbiettivo di contenere i costi trova espressione nella funzione obbiettivo:

$$\min 700\, x_1 + 600\, x_2 + 500\, x_3 + 650\, x_4\,.$$

Ma dobbiamo tenere conto dei vincoli sulle percentuali di alluminio, silicio e carbonio. Questi trovano espressione nei seguenti vincoli lineari.

vincolo alluminio:

$$2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \geq 3\,, 2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 \leq 8\,.$$

vincolo silicio:

$$9\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 \geq 4\,, 9\,x_1 + 8\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 \leq 5\,.$$

vincolo carbonio:

$$7\,x_1 + 7\,x_2 + 5\,x_3 + 7\,x_4 \leq 5\,.$$

É bene non dimenticare di esprimere i vincoli di non-negativitá e non omettere la condizione di normalizzazione data dal significato delle x_i come percentuali.

$$x_i \geq 0 \text{ ed intera per ogni } i = 1, 2, 3, 4,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,.$$

Problema 2 (2+2 punti):

Data la formula booleana $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5) \wedge (\overline{x}_3 \vee x_5)$ siamo interessati a quegli assegnamenti di valori di veritá alle variabili che rendano vera la formula (ossia che soddisfino ciascuna delle sue 5 clausole).

Assumiamo tuttavia che settare la variabile x_i a *true* comporti dei costi come da seguente tabella.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
cost of truth	2	5	-3	4	-1

(2pt) Formulare come problema di programmazione lineare intera (PLI) l'intento di soddisfare la formula a costo minimo.

(2pt) Piú in generale, data una formula booleana in forma normale congiuntiva $\Phi = \wedge_{i=1}^{m} \left(\vee_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)}\right) \vee \left(\vee_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)}\right)$, ossia una disgiunzione (.OR.) di m clausole, dove p_i é un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono positive nella clausola i e $|p_i|$ indica la lunghezza di p_i, mentre n_i é un vettore che restituisce gli indici delle variabili che appaiono negate nella clausola i e, analogamente, $|n_i|$ é il numero di variabili che compaiono negate nella clausola i, si esprima come un problema di PLI la ricerca di assegnamenti di veritá che soddisfino alla formula a costo minimo, dove con c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, indichiamo il costo di settare la variabile x_j a *true*.

svolgimento.

Le variabili giá le abbiamo, sono le x_i che possono valere 0 (codifica del valore *false*) oppure 1 (codifica del valore *true*).

In questo modo la funzione obbiettivo da minimizzare é immediata:

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i \, .$$

che nel caso dell'istanza specifica fornita risulta:

$$\min 2\,x_1 + 5\,x_2 + -3\,x_3 + 4\,x_4 - x_5 \, .$$

Vediamo ora i vincoli, trattando ora prima il caso specifico:

Clausola 1: $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$:

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \geq 1, \quad \text{ossia} \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,$$

Clausola 2: $(x_3 \vee x_4 \vee \overline{x}_5)$:

$$x_3 + x_4 - x_5 \geq 0,$$

Clausola 3: $(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4)$:

$$-x_1 + x_2 - x_4 \geq -1,$$

Clausola 4: $(\overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_5)$:

$$-x_2 + x_3 - x_5 \geq -1,$$

Clausola 5: $(\overline{x}_3 \vee x_5)$:

$$-x_3 + x_5 \geq 0,$$

Detta ora in astratto, ossia sul metalivello, la generica clausola $C_i = \left(\vee_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)}\right) \vee \left(\vee_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)}\right)$, dove $|p_i|$ ed $|n_i|$ sono tesi ad indicare il numero di letterali positivi e nagativi della clausola i, $i = 1, 2, \ldots, m$, trova rappresentazione nel seguente vincolo lineare:

$$\sum_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} + \sum_{j=1}^{|n_i|} \Big(1 - x_{n_i(j)}\Big) \geq 1, \quad \text{ossia} \quad \sum_{j=1}^{|p_i|} x_{p_i(j)} - \sum_{j=1}^{|n_i|} x_{n_i(j)} \geq 1 - |n_i| \,.$$

Problema 4 (4 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \mathrm{C\,T\,G\,T\,G\,A\,G\,A\,A\,T\,C\,G\,C\,T\,G\,T\,A}$ e $t = \mathrm{G\,T\,A\,C\,G\,A\,C\,T\,G\,A\,A\,G\,C\,T\,A\,T}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'C'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \mathrm{G\,T\,A\,C\,G\,A\,C\,T\,G}$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \mathrm{C\,T\,G\,T\,G\,A\,G\,A}$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'C'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

s ⌒	-	G	T	A	C	G	A	C	T	G	A	A	G	C	T	A	T
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
T	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
G	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
T	0	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4
G	0	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
A	0	1	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5
G	0	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7
A	0	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7	7	7	7	7	7
T	0	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8
C	0	1	2	3	4	4	5	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8
G	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8
C	0	1	2	3	4	5	5	6	6	7	7	7	8	9	9	9	9
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10	10	10
G	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	10
T	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	8	8	8	9	10	10	11
A	0	1	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	9	9	10	11	11

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	11	G T G A G A A G C T A
termina con 'C'	9	G T G A G A A G C
tra s e t_9	8	G T A G A C T G
tra s_8 e t	7	T G T G A G A

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

17	18	16	44	32	15	52	27	4	9	11	50	48	21	33	10	55	27	6	54	30	23	7	3	8	6	13

1.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.2(2pt) una sequenza è detta quasi-decrescente, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga sequenza quasi-decrescente che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

1.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 11. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Per risolvere questo esercizio conviene avvalersi della programmazione dinamica, ossia risolvere in modo iterativo una sequenza di problemi opportunamente progettata. Sia $x_1 = 17$, $x_2 = 18$, ..., $x_{27} = 13$, la sequenza S fornita in input. Allora con P_i indichiamo la massima lunghezza di una sottosequenza decrescente di S che abbia x_i come suo ultimo elemento. In questo modo la risposta alla prima domanda é data da $\max_{1 \leq i \leq 27} P_i$. Inoltre, $P_1 = 1$ ed é facile calcolare i valori $P_1, P_2, \ldots, P_{27}$ in questo ordine. Per rispondere alle due ulteriori domande poste dall'esercizio converrá avvalersi, oltre che della famiglia di problemi P_i sopra introdotta, di una seconda famiglia di problemi. Ad esempio, potremmo indicare con Q_i la massima lunghezza di una sottosequenza decrescente di S che abbia x_i come suo primo elemento. Anche qui, la risposta alla prima domanda dell'esercizio é data da $\max_{1 \leq i \leq 27} Q_i$ (e questo fatto puó essere sfruttato come verifica parziale della qualitá dei valori computati). Questa volta l'ordine corretto in cui calcolare i valori é dato da $Q_{27}, Q_{26}, \ldots, Q_2, Q_1$, ossia vanno calcolati in ordine inverso. La risposta alla seconda domanda dovrebbe essere data da $\max_{1 \leq i < j \leq 27} P_i + Q_j$. Per calcolare tale funzionale in tempo linerare, converrà definire $P'_i := \max_{1 \leq j \leq i} P_j$ e $P'_i := \max_{i \leq j \leq 27} Q_j$. A questo punto la risposta alla seconda domanda potrà essere calcolata come

$$\max_{1 \leq i < j \leq 27} P_i + Q_j = \max_{1 \leq i < 27} P'_i + Q'_{i+1}.$$

La massima lunghezza di una sottosequenza decrescente di S che contenga $x_{11} = 11$ é data da $P_{11} + Q_{11} - 1$.

Le risposte da me ottenute sono le seguenti.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente	8	52, 50, 48, 33, 30, 23, 8, 6
quasi-decrescente	11	52, 50, 48, 33, 10, 55, 54, 30, 23, 7, 3
decrescente con 11	7	44, 32, 27, 11, 10, 6, 3

Problema 5 (8 punti):

$$\max\ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

5.1(1pt) Impostare il problema ausiliario.

5.2(2pt) Risolvere il problema ausiliario per ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

5.3(2pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

5.4(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

5.5(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

svolgimento.

Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" x_0. Del problema originario ci interessa solamente investigare l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 - x_0 \leq 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 - x_0 \leq -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_0 \leq 4 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che il problema originario era ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$\max\ -x_0$$
$$\begin{cases} w_1 = 5 + 4x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + x_0 \\ w_2 = -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_0 \\ w_3 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_0 \\ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tecnicamente, anche il problema ausiliario non è ad origine ammissibile, ma riusciamo facilmente a procurarci una soluzione di base ammissibile in un singolo pivot: facciamo entrare

x_0 in base settandone il valore a 15 (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facciamo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo.

$$\begin{array}{l}\max \ -5 - 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - w_2 \\ \left\{\begin{array}{rclrrrrrr} w_1 & = & 10 + & 6x_1 - & 10x_2 + & 4x_3 - & 2x_4 + & w_2 \\ x_0 & = & 5 + & 2x_1 - & 5x_2 + & x_3 - & x_4 + & w_2 \\ w_3 & = & 9 & - & 4x_2 - & x_3 & + & w_2 \\ \multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0} \end{array}\right.\end{array}$$

La soluzione di base attuale non è ancora ottima: il coefficiente della x_2 nella funzione obiettivo vale $5 > 0$, quindi portiamo la x_2 in base. Ad arrestare la crescita della x_2 sono la x_0 e la w_1 che si annullano entrambe contemporaneamente per $x_2 = 1$. In situazioni come questa, per fare posto in base alla x_2 conviene portare fuori base la x_0 dato che essa ormai si annulla (il problema originario era cioè ammissibile dacchè basta zero colla). Effettuiamo questo ultimo pivot per il problema ausiliario avendo cura di portare la x_0 fuori base non appena essa si annulla così che un dizionario ammissibile per il problema originario potrà essere facilmente ottenuto.

$$\begin{array}{l}\max \ -x_0 \\ \left\{\begin{array}{rclrrrrr} w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 & - & w_2 + & 2x_0 \\ x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 - & \frac{1}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 - & \frac{1}{5}x_0 \\ w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 + & \frac{4}{5}x_0 \\ \multicolumn{8}{l}{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0} \end{array}\right.\end{array}$$

Ora che x_0 è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla x_0 per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario. In tale dizionario, la scrittura per la funzione obiettivo è stata ottenuta partendo dalla funzione obiettivo originaria ed utilizzando le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6x_1 - 5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}w_2\right) - 3x_3 - 4x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 - 3x_4 - w_2$).

$$\begin{array}{l}\max \ 6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -5 + 4x_1 - 4x_3 - 3x_4 - w_2 \\ \left\{\begin{array}{rclrrrr} w_1 & = & & 2x_1 + & 2x_3 & - & w_2 \\ x_2 & = & 1 + & \frac{2}{5}x_1 + & \frac{1}{5}x_3 - & \frac{1}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 \\ w_3 & = & 5 - & \frac{8}{5}x_1 - & \frac{9}{5}x_3 + & \frac{4}{5}x_4 + & \frac{1}{5}w_2 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0} \end{array}\right.\end{array}$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della x_1 nella funzione obiettivo è positivo. Portando in base x_1 esce w_3 ed otteniamo il seguente dizionario.

$$\begin{array}{l}\max \ \frac{15}{2} - \frac{5}{2}w_3 - \frac{17}{2}x_3 - x_4 - \frac{1}{2}w_2 \\ \left\{\begin{array}{rclrrrr} w_1 & = & \frac{25}{4} - & \frac{5}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 + & x_4 - & \frac{3}{4}w_2 \\ x_2 & = & \frac{9}{4} - & \frac{1}{4}w_3 - & \frac{1}{4}x_3 & + & \frac{1}{4}w_2 \\ x_1 & = & \frac{25}{8} - & \frac{5}{8}w_3 - & \frac{9}{8}x_3 + & \frac{1}{2}x_4 + & \frac{1}{8}w_2 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0} \end{array}\right.\end{array}$$

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi); non sono quindi necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = \frac{25}{8}$, $x_2 = \frac{9}{4}$, $x_3 = x_4 = 0$ cui corrisponde un valore di $\frac{15}{2}$ per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{1}{2}$ (perché questo valore?) ed il terzo vincolo per $\frac{5}{2}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di $\frac{15}{2}$. Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{2}$ (almeno per piccoli incrementi).Per ogni unità di incremento del termine noto del terzo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{5}{2}$ (almeno per piccoli incrementi). Non saremmo invece disposti a pagare nulla per incrementare il termine noto del primo vincolo.

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che la quantitá di risorsa disponibile sul terzo vincolo sia $4 + t_3$ (invece di 4) e che la quantitá di risorsa disponibile sul secondo vincolo sia $-5 + t_2$ (invece di -5). Pertanto solo due valori del problema originale (solo due valori della colonna dei termini noti del problema iniziale) sono ora cambiati. Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poiché il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori K, k_1, k_2 e k_3 della colonna dei termini noti.

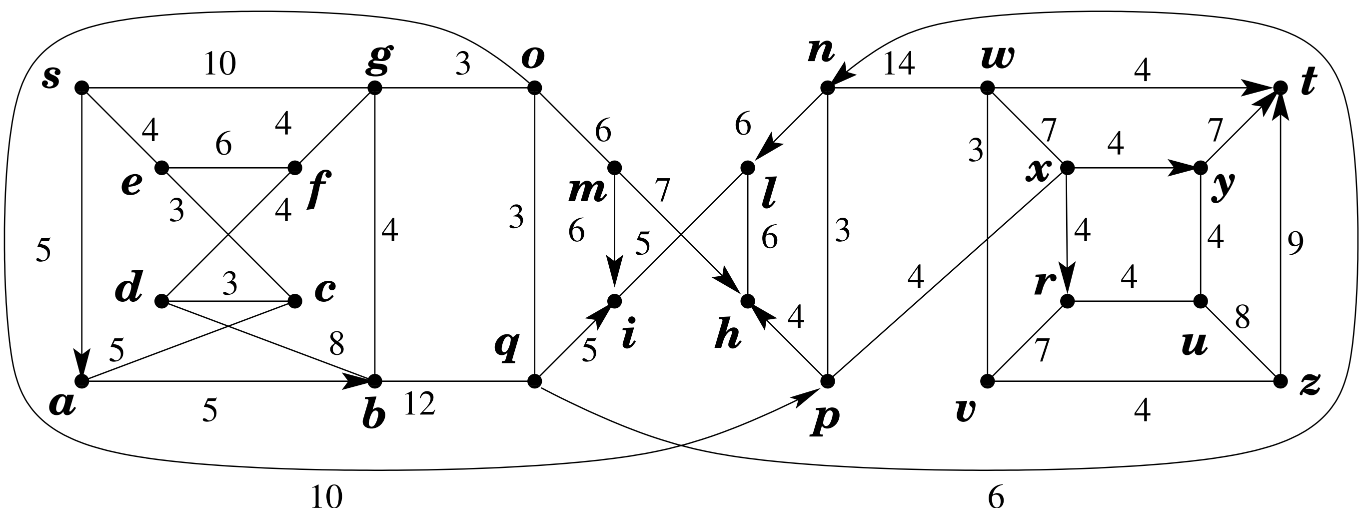
$$\begin{array}{cccccc}
 & k & w_3 & x_3 & x_4 & w_2 \\
z & K & -\frac{5}{2} & -\frac{17}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\
w_1 & k_1 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\
x_2 & k_2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
x_1 & k_3 & -\frac{5}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}
\end{array}$$

con la soluzione di base iniziale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $z = 0$, $w_1 = 5$, $w_2 = -5+t_2$, $w_3 = 4+t_3$, come associata al tableau iniziale del problema modificato (il tableau di definizione delle variabili di slack). Si perviene cosí alle seguenti equazioni di controllo:

$$\begin{aligned}
(0) &= K - \frac{5}{2}(t_3+4) - \frac{1}{2}(t_2-5) \longrightarrow K = \frac{15}{2} + \frac{5}{2}t_3 + \frac{1}{2}t_2 \\
(5) &= k_1 - \frac{5}{4}(t_3+4) - \frac{3}{4}(t_2-5) \longrightarrow k_1 = \frac{25}{4} + \frac{5}{4}t_3 + \frac{3}{4}t_2 \\
(0) &= k_2 - \frac{1}{4}(t_3+4) + \frac{1}{4}(t_2-5) \longrightarrow k_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}t_3 - \frac{1}{4}t_2 \\
(0) &= k_3 - \frac{5}{8}(t_3+4) + \frac{1}{8}(t_2-5) \longrightarrow k_3 = \frac{25}{8} + \frac{5}{8}t_3 + \frac{1}{8}t_2
\end{aligned}$$

La prima equazione (valore di K) conferma l'interpretazione economica (prezzi ombra) delle variabili duali esprimendo il valore della funzione obbiettivo per quella soluzione di base al variare di t_3 e t_2. Poiché tutti gli altri coefficienti della funzione obbiettivo restano negativi, questa soluzione di base (intesa come partizionamento tra la variabili in base e quelle fuori base) rimarrá sempre ottima. Dobbiamo solo andare a studiare per quali valori di t_3 e t_2 essa resti ammissibile. Imponiamo quindi le tre condizioni di ammissibilitá $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, $k_3 \geq 0$. Otteniamo che t_3 puó crescere a piacere (ossia non ci sono limiti all'acquisto in risorsa 1 al suo prezzo ombra) mentre $t_2 \leq 9$ (ossia oltre le 9 unitá extra in risorsa 2 il valore marginale di quella risorsa diminuisce). Piú precisamente $t_2 \leq 9 + t_3$.

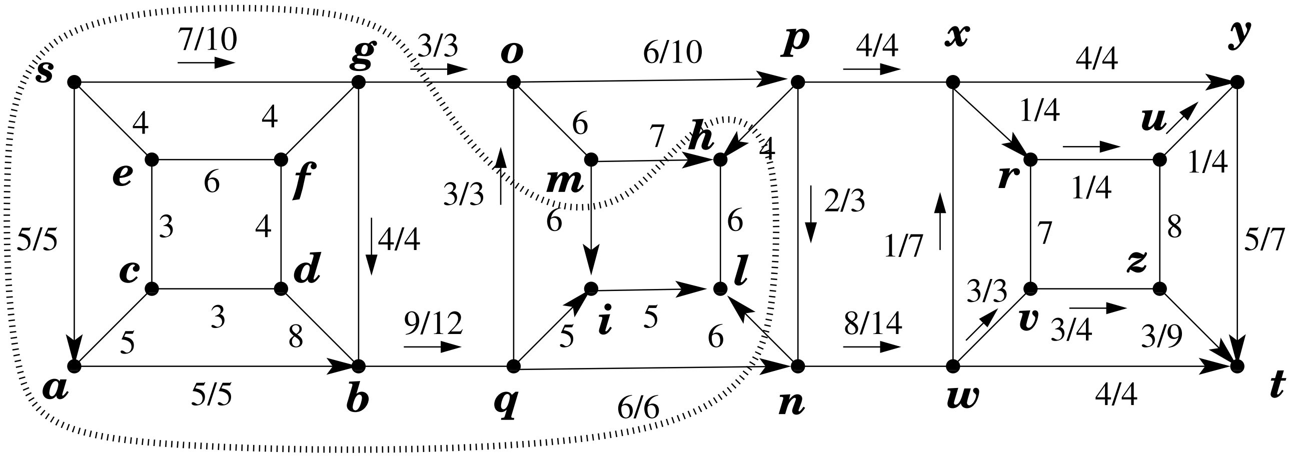
Problema 6 (4 punti):



6.1**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

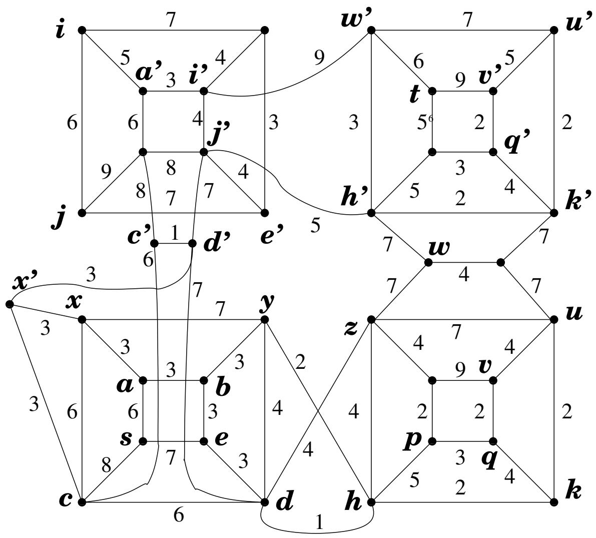
6.2**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 3 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (13 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

7.3.**(1+1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo. (Certificando che la rimozione di quel numero di archi è sufficiente a renderlo bipartito ed argomentando che esso é anche necessario).

7.4.**(1+1pt)** Nel grafo G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.5.**(1pt)** Nel grafo G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.7.**(1+1pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xx'. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.

L'unica domanda che risulta decisamente nuova é la (5.7) ed é bene che io la svolga per illustrare come andava ben affrontata (quale sia la tipologia dei certificati).

ij contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio che separa il nodo j da tutti gli altri.

ab contenuto in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso strettamente minimo nel taglio di archi $ab, se, cd, xy, j'h', i'w'$ dagli altri nodi del grafo.

$h'w$ contenuto in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa gli 8 nodi dei due cubi in alto da tutti gli altri nodi sotto, ma non contenuto in tutte in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wzdd'j'h'$.