# Esame di Ricerca Operativa - 22 giugno 2022
# Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
# - CORREZIONE - punti in palio: 61, con voto $\geq$ punti + $k$, $k \geq 0$

**Problema 1 (7 punti):**

Un robot $R$, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home $H$ situata nella cella I–10.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $R$ | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | • | 6 |
| $B$ | 3 | 3 | 1 | 0 | • | • | 0 | 0 | 0 | 5 |
| $C$ | 2 | • | 0 | • | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| $D$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | • | 0 | 3 |
| $E$ | 0 | 0 | • | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| $F$ | 0 | 1 | 1 | 1 | • | 3 | • | 3 | 1 | 1 |
| $G$ | 3 | • | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 4 | 1 | • |
| $H$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 0 |
| $I$ | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | • | 0 | $H$ |

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

**1.1(1pt)** Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

**1.2 (1pt)** e se la partenza è in B–3?

**1.3 (1pt)** e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

**1.4 (1pt)** e se con partenza in A–1 ed arrivo in I–10 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

**1.5(1pt)** Quale é il massimo valore in premi raccoglibili lungo una traversata da A–1 a I–10?

**1.6(2pt)** Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a case tale massimo valore?

**svolgimento.** La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella I–10.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 370 | 154 | 86 | 18 | 18 | 18 | 18 | 4 | • | 0 |
| *B* | 216 | 68 | 68 | 0 | • | • | 14 | 4 | 2 | 0 |
| *C* | 148 | • | 68 | • | 74 | 34 | 10 | 2 | 2 | 0 |
| *D* | 148 | 94 | 68 | 68 | 40 | 24 | 8 | • | 2 | 0 |
| *E* | 54 | 26 | • | 28 | 16 | 16 | 8 | 8 | 2 | 0 |
| *F* | 28 | 26 | 26 | 12 | • | 8 | • | 6 | 2 | 0 |
| *G* | 2 | • | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | • |
| *H* | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| *I* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | • | 1 | 1 |

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | • | 0 |
| *B* | 1 | 2 | 3 | 4 | • | • | 1 | 2 | 2 | 2 |
| *C* | 1 | • | 3 | • | 0 | 0 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| *D* | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | • | 5 | 12 |
| *E* | 1 | 2 | • | 4 | 8 | 12 | 17 | 17 | 22 | 34 |
| *F* | 1 | 3 | 3 | 7 | • | 12 | • | 17 | 39 | 73 |
| *G* | 1 | • | 3 | 10 | 10 | 22 | 22 | 39 | 78 | • |
| *H* | 1 | 1 | 4 | 14 | 24 | 46 | 68 | 107 | 185 | 185 |
| *I* | 1 | 2 | 6 | 20 | 44 | 90 | 158 | • | 185 | 370 |

Ritrovare il valore 370 ci conforta, forse non abbiamo introdotto errori di calcolo nel computo delle due tabelle. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nelle due tabelle entro la cella di passaggio obbligato per il robot.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0_1$ | $2_1$ | $5_1$ | $6_1$ | $7_1$ | $8_1$ | $8_1$ | $8_1$ | $\bullet$ | $6_0$ |
| $B$ | $3_1$ | $6_1$ | $7_1$ | $7_1$ | $\bullet$ | $\bullet$ | $8_1$ | $8_2$ | $8_2$ | $13_2$ |
| $C$ | $5_1$ | $\bullet$ | $7_1$ | $\bullet$ | $0_0$ | $0_0$ | $9_1$ | $10_1$ | $11_1$ | $17_2$ |
| $D$ | $5_1$ | $5_1$ | $8_1$ | $8_1$ | $8_1$ | $8_1$ | $10_1$ | $\bullet$ | $11_1$ | $20_2$ |
| $E$ | $5_1$ | $5_2$ | $\bullet$ | $9_1$ | $9_1$ | $10_1$ | $12_2$ | $12_2$ | $12_2$ | $22_2$ |
| $F$ | $5_1$ | $6_3$ | $7_3$ | $10_1$ | $\bullet$ | $13_1$ | $\bullet$ | $15_2$ | $16_2$ | $23_2$ |
| $G$ | $8_1$ | $\bullet$ | $7_3$ | $11_1$ | $13_1$ | $13_2$ | $13_2$ | $19_2$ | $20_2$ | $\bullet$ |
| $H$ | $10_1$ | $11_1$ | $13_1$ | $14_1$ | $16_1$ | $17_1$ | $19_1$ | $20_3$ | $22_5$ | $22_5$ |
| $I$ | $14_1$ | $18_1$ | $21_1$ | $24_1$ | $26_1$ | $28_1$ | $29_1$ | $\bullet$ | $22_5$ | $22_{10}$ |

Leggendo i valori riportati nella cella I–10 scopriamo che il massimo valore raccoglibile lungo una traversata é di 22, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

| consegna | numero percorsi |
|---|---|
| A–1 → I–10 | 370 |
| B–3 → I–10 | 68 |
| A–1 → F–6 | 12 |
| passaggio per D–5 | 40*4 = 160 |
| massimo valore | 22 |
| numero di max-val paths | 10 |

Per maggiori e precise informazioni sulla logica con cui siano state compilate le varie tabelle di programmazione dinamica rimandiamo al codice c++ che le ha prodotte. Esso è reso disponibile nella stessa cartella della presente correzione.

**Problema 2 (6 punti):**

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s$ = C T A T A G A G G T C A C T A T G e $t$ = A T G C A G C T A G G A C T G T. Fare lo stesso con alcuni prefissi di $s$ e $t$.

**2.1(1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e $t$?

**2.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'T'?

**2.3 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e il prefisso $t_9$ = A T G C A G C T A di $t$?

**2.4 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $t$ e il prefisso $s_8$ = C T A T A G A G di $s$?

**2.5 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $t_9$ e $s_8$?

**2.6 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra $s$ e $t$ che abbia CCA come suffisso?

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

| s⌢ | - | A | T | G | C | A | G | C | T | A | G | G | A | C | T | G | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| T | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| A | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| T | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| A | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| G | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| G | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 |
| G | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 |
| C | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| C | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 |
| G | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 | 10 | 11 | 11 |

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo di sottosequenza comune | lunghezza | sottosequenza |
|---|---|---|
| qualsiasi | 11 | A T A G A G G A C T G |
| termina con 'T' | 11 | A T A G A G G A C T T |
| tra $s$ e $t_9$ | 8 | A T G A G C T A |
| tra $s_8$ e $t$ | 7 | T A T A G A G |
| tra $s_8$ e $t_9$ | 5 | A T G A G |
| con C C A come suffisso | 6 | A T G C C A |

---

**Problema 3 (16 punti):**

$$\max \; 4x_1 - 2x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 \; -x_2 \; -2x_3 \leq 0 \\ x_1 \; -x_2 \; -x_3 \leq 1 \\ x_1 \; -x_2 \; +x_3 \geq 3 \\ x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

**3.1(1pt)** Portare in forma standard.

**3.2(1pt)** Impostare il problema ausiliario.

**3.3(1pt)** Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.

**3.4(1pt)** Ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario in forma standard dalla soluzione ottima di base del problema ausiliario.

**3.5(1pt)** Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi la prova del 9 della PL per verificare la correttezza della soluzione ammissibile di base ottenuta.

**3.6(1pt)** Anche se non ammissibile, si renda esplicita la soluzione duale di base associata a questo primo dizionario per la seconda fase.

**3.7(2+1pt+1pt+1pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo. I punti aggiuntivi vengono attribuiti se ad ognuno dei diversi pivot che dovrai compiere effettuerai esplicitamente una prova del 9: un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base primale ammissibile, un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base duale ammissibile, un punto se verifichi con almeno una soluzione tutti i dizionari visitati. Come ogni altra evidenza che date per ottenere punti, queste prove devono essere offerte in modo chiaro ed esplicito, e cosiglio di incorniciare ogni vostra risposta che miri a diventare punti.

**3.8(1+1pt)** rendere esplicita la soluzione duale ottima. Utilizzarla per dimostrare l'ottimalità della soluzione primale.

**3.9(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di variazione in ciascuno dei termini noti dei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

**3.10(2pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

**svolgimento.**

**(1pt)** Portiamo dapprima il problema in forma standard riesprimendolo in termini delle variabili $x_1$, $x_3$ e $x'_2 = -x_2$ e moltiplicando per $-1$ il vincolo di $\geq$:

$$\max\ 4x_1 + 2x'_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 & +x'_2 & -2x_3 & \leq & 0 \\ x_1 & +x'_2 & -x_3 & \leq & 1 \\ -x_1 & -x'_2 & -x_3 & \leq & -3 \\ & & x_3 & \leq & 7 \\ x_1, x'_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**(1pt)** A questo punto il problema è in forma standard $\max\{cx\ :\ Ax \leq b, x \geq 0\}$. Pertanto ha almeno una soluzione di base, l'origine. Ma questo problema non è ad origine ammissibile dato che uno dei 4 termini noti è negativo ($-3$). Rimaniamo quindi col problema di reperire una prima soluzione di base ammissibile dalla quale avviare il metodo del simplesso. Non è un problema scontato, di fatto tale soluzione potrebbe non esistere (se il problema non ammette soluzioni ammissibili).

Il secondo punto dell'esercizio chiede di superare la difficoltà del reperire una prima soluzione di base ammissibile con il metodo del problema ausiliario. Il problema ausiliario è sempre ammissibile ed è ottenuto introducendo una variabile "di colla" $x_0$. In prima battuta del problema originario essenzialmente ci interessa investigare solo l'ammissibilità, e quindi viene gettata a mare la funzione obiettivo originaria e ci si prefigge invece di minimizzare la quantità di colla necessaria all'ottenimento dell'ammissibilità.

$$
\max \; -x_0
\quad
\begin{cases}
3x_1 + x_2' - 2x_3 - x_0 \le 0 \\
x_1 + x_2' - x_3 - x_0 \le 1 \\
-x_1 - x_2' - x_3 - x_0 \le -3 \\
x_3 - x_0 \le 7 \\
x_0, x_1, x_2', x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

Il problema ausiliario è sempre ammissibile (basta prendere un valore sufficientemente grande per $x_0$) e, ovviamente, il problema originario è ammissibile se e solo se il problema ausiliario ammette una soluzione ammissibile con $x_0 = 0$. Questa è la prima domanda che siamo chiamati ad affrontare, e lo faremo nella prima fase del metodo del simplesso, quella che identifica una soluzione di base ottima per il problema ausiliario.

Introduciamo le variabili di slack come segue.

$$
\max \; -x_0
\quad
\begin{cases}
w_1 = 0 - 3x_1 - x_2' + 2x_3 + x_0 \\
w_2 = 1 - x_1 - x_2' + x_3 + x_0 \\
w_3 = -3 + x_1 + x_2' + x_3 + x_0 \\
w_4 = 7 - x_3 + x_0 \\
x_0, x_1, x_2', x_3, w_1, w_2, w_3, w_4 \ge 0
\end{cases}
\quad \Longleftrightarrow
$$

Tableau Iniziale

| | | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $x_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-1$ |
| $w_1$ | 0 | $-3$ | $-1$ | 2 | 1 |
| $w_2$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 |
| $w_3$ | $-3$ | 1 | 1 | 1 | $\boxed{1}$ |
| $w_4$ | 7 | 0 | 0 | $-1$ | 1 |

Le equazioni con cui abbiamo definito le variabili di slack definiscono il nostro primo dizionario dal quale prende avvio il metodo del simplesso. La soluzione di base associata al primissimo dizionario è l'origine $(x_0, x_1, x_2', x_3) = (0, 0, 0, 0)$ che tuttavia non è ammissibile benchè ovvimente il problema ausiliario sia ammissibile per costruzione. Fortunatamente, un primo pivot risulta sempre sufficiente a raggiungere una prima soluzione di base ammissibile nel caso del problema ausiliario: facciamo entrare $x_0$ in base settandone il valore a $-3$ (si guarda al vincolo con termine noto più negativo) e facendo uscire di base la variabile di slack per quel vincolo ($w_3$). L'elemento di pivot è pertanto quello incorniciato e, con un passo di pivot, si perviene alla situazione seguente.

$$
\max \; -3 + x_1 + x_2' + x_3 - w_3
\quad
\begin{cases}
w_1 = 3 - 4x_1 - 2x_2' + x_3 + w_3 \\
w_2 = 4 - 2x_3 - 2x_2' + w_3 \\
x_0 = 3 - x_1 - x_2' - x_3 + w_3 \\
w_4 = 10 - x_1 - x_2' - 2x_3 + w_3 \\
x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \ge 0
\end{cases}
\quad \Longleftrightarrow
$$

Secondo Tableau

| | | $x_1$ | $x_2'$ | $x_3$ | $w_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-3$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ |
| $w_1$ | 3 | $-4$ | $-2$ | 1 | 1 |
| $w_2$ | 4 | $-2$ | $-2$ | 0 | 1 |
| $x_0$ | 3 | $-1$ | $-1$ | $\boxed{-1}$ | 1 |
| $w_4$ | 10 | $-1$ | $-1$ | $-2$ | 1 |

La soluzione di base attuale non è ancora ottima in quanto nella funzione obiettivo sono presenti dei coefficienti positivi (quello della $x_1$, della $x_2'$ e della $x_3$). Tra le tre, come varibile di pivot, optiamo per la $x_3$, scelta che conduce ad un maggior incremento in termini di funzione obiettivo e che, con un pivot più agevole da gestire, conduce anche a numeri tutti interi. La prima variabile in base ad annullarsi al crescere della $x_3$ sarebbe proprio la $x_0$; questo significa che non serve utilizzare colla ed il problema originario era ammissibile. A questo punto, anche ove fossero presenti ulteriori variabili che si annullano contemporaneamente alla $x_0$, resta comunque utile portare $x_0$ fuori dalla base, in modo da ottenere un dizionario ammissibile dove la $x_0$ è prevista essere nulla e la rimozione della sua colonna ci consegna un dizionario ammissibile per il problema originario (quindi non solo riusciamo a decidere in merito all'ammissibilità del problema originario, ma, se esso era in forma standard, allora il metodo si applica e ci consegna una soluzione di base ammissibile tutte le volte che il problema è ammissibile). Pertanto scegliamo la $x_0$ come variabile uscente e riga del pivot.

$$
\begin{array}{l}
\max \; -x_0 \\
\left\{
\begin{array}{rclrrrr}
w_1 & = & 6 & -5x_1 & -3x_2' & -x_0 & +2w_3 \\
w_2 & = & 4 & +2x_1 & -2x_2' & & +w_3 \\
x_3 & = & 3 & -x_1 & -x_2' & -x_0 & +w_3 \\
w_4 & = & 4 & x_1 & x_2' & -2x_0 & -w_3 \\
\multicolumn{7}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow
$$

Terzo Tableau

| | | $x_1$ | $x_2'$ | $x_0$ | $w_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | 0 | $-1$ | 0 |
| $w_1$ | 6 | $-5$ | $-3$ | $-1$ | 2 |
| $w_2$ | 4 | $-2$ | $-2$ | 0 | 1 |
| $x_3$ | 3 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $w_4$ | 4 | 1 | 1 | $-2$ | $-1$ |

Ora che $x_0$ è fuori base ci basta rimuovere la colonna relativa alla $x_0$ per ottenere un primo dizionario con soluzione di base associata ammissibile per il problema originario posto in forma standard. La soluzione di base associata è $x_1 = 0$, $x_2' = 0$ e $x_3 = 3$ e risulta agevole verificare che essa è appunto ammissibile per tale problema (quando si pongano la variabile non-basica $x_1$, $x_2'$ e $w_3$ a 0 allora la $x_3$ risulta forzate ad assumere quel valore, quindi trattasi in effetti di una soluzione di base). Per la scrittura della funzione obiettivo in tale dizionario, si parte dalla funzione obiettivo originaria e si utilizzano le equazioni del dizionario per svendere fuori le variabili di base in termini delle variabili non di base. (Cioé $4x_1 + 2x_2' - 3(3 - x_1 - x_2' + w_3) = -9 + 7x_1 + 5x_2' - 3w_3$.

$$
\begin{array}{l}
\max \; -9 + 7x_1 + 5x_2' - 3w_3 \\
\left\{
\begin{array}{rclrrr}
w_1 & = & 6 & -5x_1 & -3x_2' & +2w_3 \\
x_3 & = & 4 & -2x_1 & -2x_2' & +w_3 \\
w_3 & = & 3 & -x_1 & -x_2' & +w_3 \\
w_4 & = & 4 & x_1 & x_2' & -w_3 \\
\multicolumn{6}{l}{x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\end{array}
\quad \Longleftrightarrow
$$

Primo Tableau della $2^a$ Fase

| | | $x_1$ | $x_2'$ | $w_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $-9$ | 7 | 5 | $-3$ |
| $w_1$ | 6 | $-5$ | $\boxed{-3}$ | 2 |
| $w_2$ | 4 | 2 | $-2$ | 1 |
| $x_3$ | 3 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $w_4$ | 4 | 1 | 1 | $-1$ |

Per leggere la soluzione primale di base associata a questo dizionario si procede come segue: $x_1 = x_2' = w_3 = 0$ in quanto queste sono variabili-colonna, ossia variabili libere, ossia variabili non in base. Per le variabili in base si leggono i valori riportati nella colonna che contiene il valore attuale della funzione obiettivo. Ossia:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
w_1 & = & 6 \\
x_3 & = & 4 \\
w_3 & = & 3 \\
w_4 & = & 4
\end{array}
\right.
$$

che è quanto si ottiene sostituendo $x_1 = x_2' = w_3 = 0$ nelle equazioni riportate nel dizionario disposto a sinistra del "Primo Tableau della $2^a$ Fase" per meglio esemplificare come un dizionario non sia altro che una scrittura compatta di un insieme di equazioni lineari.

Per leggere la soluzione duale di base associata a questo stesso dizionario si procede in modo analogo, ma con due differenze:

1. il tableau và letto anti-trasposto (trasposizione di matrice ed inversione dei segni), ossia andranno messe a zero le variabili-riga e calcolate di conseguenza le altre variabili (o, più direttamente, vanno ora lette dalla riga che contiene il valore attuale della funzione obiettivo, nella tabella non-ancora trasposta ma già invertita nei segni).

2. occorre ricordarsi che la mappa biunivoca tra le variabili del primale e quelle del duale è data da $x_i \leftrightarrow s_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $w_j \leftrightarrow y_j$ per $j = 1, \dots, m$, ossia alle $n$ variabili di decisione del primale corrispondono le $n$ variabili di slack del duale mentre alle $m$ variabili di slack del primale corrispondono le $m$ variabili di decisione del duale (sono entrambe in corrispondenza biunivoca coi vincoli del primale, la corrispondenza tra di loro ne consegue).

In base all'attenzione di cui al punto 2 il tableau va quindi letto con le seguenti etichette di riga e di colonna:

$$
\begin{array}{crrrr}
 & & s_1 & s_2 & y_3 \\
z & -9 & 7 & 5 & -3 \\
y_1 & 6 & -5 & \boxed{-3} & 2 \\
y_2 & 4 & 2 & -2 & 1 \\
s_3 & 3 & -1 & -1 & 1 \\
y_4 & 4 & 1 & 1 & -1
\end{array}
$$

In base all'attenzione di cui al punto 1, $y_1 = y_2 = s_3 = y_4 = 0$ mentre $s_1 = -7$, $s_2 = -5$, $y_3 = 3$.

Si noti che le ragioni di non-ottimalità della soluzione primale ($7 > 0$ e anche $5 > 0$) si traducono in non-ammissibilità (per violazione dei vincoli di non-negatività) della soluzione duale ($s_1 = -7 < 0$, $s_2 = -5 < 0$).

La soluzione di base primale associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che i coefficienti delle prime due variabili fuori base sono positivi. Pertanto dobbiamo scegliere se portare in base la $x_1$ o la $x'_2$. In questa correzione portiamo in base la $x'_2$, il cui costo ridotto è 5. Come variabile uscente possiamo scegliere tra la $w_1$ e la $w_2$, entrambe si annullano non appena $x'_2 = 2$. In termini di funzione obiettivo ci attendiamo un incremento di $2 \cdot 5 = 10$. Come variabile uscente conviene forse scegliere la $w_2$, visto che l'aggiornamento è meno faticoso. In questa correzione abbiamo invece scelto la $w_1$.

$$
\max\ 1 - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{3}w_1 + \tfrac{1}{3}w_3
$$
$$
\left\{
\begin{array}{rcrrrr}
x'_2 & = & 2 & -\frac{5}{3}x_1 & -\frac{1}{3}w_1 & \frac{2}{3}w_3 \\
w_2 & = & 0 & \frac{16}{3}x_1 & \frac{2}{3}w_1 & -\frac{1}{3}w_3 \\
x_3 & = & 1 & \frac{2}{3}x_1 & \frac{1}{3}w_1 & \frac{1}{3}w_3 \\
w_4 & = & 6 & -\frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}w_1 & -\frac{1}{3}w_3 \\
\multicolumn{6}{l}{x_0, x_1, x'_2, x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
\iff
$$

Tableau 2 di Fase 2

$$
\begin{array}{crrrr}
 & & x_1 & w_1 & w_3 \\
z & 1 & -4/3 & -5/3 & 1/3 \\
x'_2 & 2 & -5/3 & -1/3 & 2/3 \\
w_2 & 0 & 16/3 & 2/3 & -1/3 \\
x_3 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\
w_4 & 6 & -2/3 & 1/3 & -1/3
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questo dizionario non è ancora ottima visto che il coefficiente della $w_3$ è positivo. Il dizionario attuale è degenere ed appena le $w_3$ entra in base ne esce la $w_2$. Otteniamo il seguente dizionario.

$$\max\ 1 + 4x_1 - w_1 - w_2$$
$$\begin{cases} x_2' &= 2 & 9x_1 & w_1 & -2w_2 \\ w_3 &= 0 & 16x_1 & 2w_1 & -3w_2 \\ x_3 &= 1 & 6x_1 & w_1 & -w_2 \\ w_4 &= 6 & -6x_1 & -\frac{1}{3}w_1 & w_2 \\ x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Tableau 3 di Fase 2

| | | $x_1$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 4 | −1 | −1 |
| $x_2'$ | 2 | 9 | 1 | −2 |
| $w_3$ | 0 | 16 | 2 | −3 |
| $x_3$ | 1 | 6 | 1 | −1 |
| $w_4$ | 6 | −6 | −1/3 | 1 |

Succede ora di dover pivotare la $x_1$ (unica variabile fuori base con costo ridotto positivo) e la $w_4$ (unica variabile che seondo il presente dizionario cala al crescere della $x_1$).

$$\max\ 5 - \frac{2}{3}w_4 - \frac{11}{9}w_1 - \frac{1}{3}w_2$$
$$\begin{cases} x_2' &= 11 & -\frac{3}{2}w_4 & -\frac{11}{9}w_1 & -\frac{1}{3}w_2 \\ w_3 &= 16 & -\frac{8}{3}w_4 & +\frac{1}{9}w_1 & -\frac{1}{3}w_2 \\ x_3 &= 7 & -w_4 & +\frac{2}{3}w_1 & \\ x_1 &= 1 & -\frac{1}{6}w_4 & -\frac{1}{18}w_1 & +\frac{1}{6}w_2 \\ x_0, x_1, x_2', x_3, x_4, w_2, w_3 \geq 0 \end{cases} \iff$$

Ultimo Tableau

| | | $w_4$ | $w_1$ | $w_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | 5 | −2/3 | −11/9 | −1/3 |
| $x_2'$ | 11 | −3/2 | 1/2 | −1/2 |
| $w_3$ | 16 | −8/3 | 1/9 | −1/3 |
| $x_3$ | 7 | −1 | 2/3 | 0 |
| $x_1$ | 1 | −1/6 | −1/18 | 1/6 |

Si noti come la soluzione di base associata al dizionario ottenuto sia ora ottima (tutti i coefficienti della funzione obiettivo sono non-positivi) e quindi in questo caso non sono necessari ulteriori passi di pivot.

In termini delle variabili di decisione originarie la soluzione ottima è data da $x_1 = 1$, $x_2 = -x_2' = -11$, e $x_3 = 7$ cui corrisponde un valore di 5 per la funzione obiettivo. É facile verificare che tale soluzione risulta in effetti ammissibile per il problema originario (sostituzione) e che sommando il primo vincolo moltiplicato per $\frac{11}{9}$ (perché questo valore?), il secondo vincolo moltiplicato per $\frac{1}{3}$ (perché questo valore?) ed il quarto vincolo per $\frac{2}{3}$ (perché questo valore?) si scopre che nessuna soluzione ammissibile puó totalizzare piú di 5. (Queste cose io quì mi sono limitato a dirle ma voi dovete farle!) Quindi le soluzioni (primale e duale) offerte dall'ultimo dizionario si autocertificano.

Si noti che i tre vincoli che lavorano (primo, secondo e quarto) sono tutti e tre vincoli di $\leq$. Per ogni unità di incremento del termine noto del primo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{11}{9}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del secondo vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{1}{3}$ (almeno per piccoli incrementi). Per ogni unità di incremento del termine noto del quarto vincolo saremmo disposti a pagare $\frac{2}{3}$ (almeno per piccoli incrementi).

Per capire fino a dove saremmo disposti a pagare tali prezzi ombra devo ricomputare l'ultimo dizionario sotto l'assunzione che i termini noti dei tre vincoli siano $t_1$, $1 + t_2$, $3 + t_3$ e $7 + t_4$ (invece di 0, 1, 3 e 7). Mi interessa comprendere come i vari valori dell'ultimo dizionario vadano riveduti. Poichè solo i termini noti del problema originale sono cambiati, ed il dizionario finale é stato ottenuto dal dizionario iniziale tramite dei passi di pivot, che altro non sono che operazioni di riga (moltiplicare una riga per uno scalare od aggiungere un multiplo di una riga ad un'altra), ne consegue che solo i valori della colonna dei termini noti vanno eventualmente rivisti. Di questi me ne interessano solamente tre: quelli relativi ai tre vincoli che lavorano all'ottimo. Per ricomputarli in modo agevole (senza ripercorrere i vari passi) mi avvalgo della "prova del nove" del tableau e riconsidero quindi l'ultimo dizionario cui si era pervenuti dando per incogniti i valori $t_1$, $t_2$ e $t_3$ della colonna dei termini noti che mi serve rideterminare. Questo viene lasciato come esercizio.

**Problema 4 (10 punti):**

Una stringa è detta antipalindroma quando è vuota oppure il primo e l'ultimo carattere differiscono e, quando si rimuova da essa il primo e l'ultimo carattere, la stringa così ottenuta sia antipalindroma. Le stringhe antipalindrome sono quindi tutte di lunghezza pari. Si consideri il problema di dover ricercare la più lunga sottosequenza antipalindroma entro una stringa. Esempio: ABABAB in <u>ABAB</u>BB<u>AB</u>A. Per trovare la più lunga sottosequenza antipalindroma in una stringa $s = s_1 s_2 \cdots s_n$, si è definita la seguente famiglia di sottoproblemi:

> per ogni $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \leq j$, sia $P[i, j]$ = la massima lunghezza di una sottosequenza antipalindroma di $s_{i,j} = s_i s_{i+1} \cdots s_j$.

4.1.**(3pt)** si dia la ricorrenza sulla famiglia dei sottoproblemi $P[i, j]$.

4.2.**(2pt)** si dia la base atta al calcolo di detta ricorrenza.

4.3.**(2+1+2pt)** ci si organizzi per trovare (**(2pt)**) una sottosequenza antipalindroma di massima lunghezza in:

AAAAAAAAAAABBBABBABBABBBABBABBBAAABBBBBBBBBB

**attenzione:** si noti che riempire l'intera tabella di programmazione dinamica ($45 \cdot 44/2 = 990$ sarebbe del tutto fuori luogo all'esame). É quindi il caso di adottare un approccio meno sistematico, che eviti di risolvere tutti i sottoproblemi ma affronti solo quelli che si rilevano via via di pertinenza. Riesci ad individuare ed enunciare **(1pt)** un lemma che ti aiuta molto a ridurre le possibilità (ad esempio nel caso dell'istanza data sopra se ne mangia una gran parte prima ancora che tu debba cominciare a clonarti per inseguire il non-determinismo. Riesci a dimostrarlo formalmente **(2pt)**?

ci si organizzi per trovare (**(2pt)**) una sottosequenza antipalindroma di massima lunghezza in

**svolgimento o suggerimenti.**

4.1.**(3pt)** la ricorrenza chiave:

$$P[i, j] = \begin{cases} 2 + P[i+1, j-1] & \text{se } s_i \neq s_j \\ \max\{P[i+1, j], P[i, j-1]\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4.2.**(2pt)** la base atta all'avvio del calcolo per questa famiglia di problemi e ricorrenza:

$$P[i, i] = 0 P[i, i+1] = \begin{cases} 2 & \text{se } s_i \neq s_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti come la forma della ricorsione si rispecchi nel secondo caso base. Una possibile opzione era pertanto quella di introdurre anche i problemi "sentinella" della forma $P[i][i-1] = 0$, ed evitare il caso base $P[i, i+1]$ che ancora deve guardare all'istanza.

Il prossimo obiettivo (4.3.**(2pt)**]) è trovare una sottosequenza palindroma di massima lunghezza in: AAAAAAAAAAABBBABBABBABBBABBABBBAAABBBBBBBBBBB

L'istanza è troppo lunga per affrontarla con un algoritmo quadratico senza farsi del male. Vediamo se riusciamo ad accellerare in pratica (non dovrebbe essere possibile fornire un algoritmo lineae in generale perchè vedo come ridurre ad esso il problema di trovare la più lunga sottosequenza comune tra due stringhe binarie), e in modo significativo almeno per l'istanza di nostro interesse.

L'intuizione è che risulta troppo conveniente prendere tutte quelle A iniziali accoppiandole con le B disposte in fondo. Ma ci serve un lemma che ci assicuri in merito a questa intuizione e magari ci consenta anche di portarla oltre.

**Congettura:** se il primo ed ultio carattere di una stringa sono diversi allora esiste sempre una massima sottosequenza palindroma che li utilizza entrambi.

Questa cosa se vera ci risparmia un sacco di lavoro, vediamo di convincercene con una

**Dimostrazione:** la tecnica è quella di prendere a riferimento una sottosequenza massima ed eventualmente modificarla in una con la struttura che intendiamo imporre. La dimostrazione può anche essere vista come un algoritmo: presa una qualsiasi sottosequenza anti-palindroma, la si porta nella forma espressa dal lemma con le seguenti trasformazioni:

1. se essa contiene il primo e l'ultio carattere è già nella forma del lemma, da noi individuata come interessante.

2. se essa non include nè il primo nè il secondo carattere, allora posso aggiungere entrambi ottenendo una soluzione più lunga (e nella forma da noi desiderata).

3. se contiene uno dei caratteri estremi ma lo accoppia con un altro carattere $x$ all'altra estremità allora possa buttare a mare $x$ ed accoppiare il carattere vedovo con quello all'altra estremità dato che sono compatibili per ipotesi. (In questo caso la soluzione non si allunga ma nemmeno si accorcia, ed acquisisce la forma da noi desiderata).

In base a questo lemma possiamo dire che

Risposta(AAAAAAAAAAABBBABBABBABBBABBABBBAAABBBBBBBBBBB)
= 2*11 + Risposta(BBBABBABBABBBABBABBBAAA)

Ma poi anche oltre

22+Risposta(BBBABBABBABBBABBABBBAAA) = 22+6 + Risposta(ABBABBABBBABBABBB)
= 30 + Risposta(BBABBABBBABBABB)

a questo bunto delle due B agli estremi ne posso prendere al massimo una, anzi, da almeno una delle due parti devo buttare via tutte le B e giungere fino ad una A. Pertanto la simmetria del problema mi consente di dire:

30+Risposta(BBABBABBBABBABB) = Risposta(BBABBABBBABBA) = 32 + Risposta(BABBABBBABB)

Ora, dobbiamo clonarci per esplorare le due possibilità, ma abbiamo già intuito che su un probema come questo la ricorsione con memoizzazione può dare maggiori soddisfazioni che non la programmazione dinamica. Abbrevio "Risposta" ad "R".

$$
\begin{aligned}
R(BABBABBBABB) &= \max(R(ABBABBBABB), R(BABBABBBA)) \\
&= \max(2 + R(BBABBBAB), 4 + R(BBABB)) \\
&= \max(2 + \max(R(ABBBAB), R(BBABBBA)), 4 + \max(R(ABB), R(BBA)) \\
&= \max(2 + \max(4 + R(BB), 2 + R(BABBB)), 6 + \max(R(B), R(B)) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Quindi 32+6=38 e una soluzione ottima è:
AAAAAAAAAAA BBB A B A B AB A B A B AAA BBBBBBBBBBB

**Problema 5 (7 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 58 | 50 | 48 | 43 | 47 | 36 | 29 | 23 | 52 | 32 | 6 | 47 | 26 | 38 | 13 | 11 | 49 | 46 | 54 | 31 | 12 | 44 | 28 | 19 | 45 |

**5.1(1pt)** trovare una sottosequenza (strettamente) decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.2(1pt)** una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice $i$ tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l'$i$-esimo, sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 52. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.4(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.5(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze (non-strettamente) crescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| decrescente | | |
| Z-sequenza | | |
| decrescente con 52 | | |
| evita i primi 4 | | |
| evita da 13-mo a 16-mo | | |
| minima copertura | | |

**svolgimento.** Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ | $\Rightarrow$ |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 | 6 | 4 | 1 | 5 | 3 | 4 | 2 | 1 | 5 | 4 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 1 |
| 58 | 50 | 48 | 43 | 47 | 36 | 29 | 23 | 52 | 32 | 6 | 47 | 26 | 38 | 13 | 11 | 49 | 46 | 54 | 31 | 12 | 44 | 28 | 19 | 45 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 | 7 | 2 | 6 | 8 | 4 | 7 | 6 | 8 | 9 | 3 | 5 | 2 | 7 | 9 | 6 | 8 | 9 | 8 |
| $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ | $\Leftarrow$ |

Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

| tipo sottosequenza | opt val | soluzione ottima |
|---|---|---|
| decrescente | 9 | 58, 50, 48, 43, 40, 29, 23, 13, 11 |
| Z-sequenza | 14 | 58, 50, 48, 43, 40, 29, 23, 13, 11, 49, 46, 31, 28, 19 |
| decrescente con 60 | 7 | 58, 52, 47, 38, 31, 28, 19 |
| evita i primi 4 | 6 | 51, 40, 29, 23, 13, 11 |
| evita da 13-mo a 16-mo | 9 | 58, 50, 48, 43, 40, 32, 31, 28, 19 |
| minima copertura | 9 | $\underbrace{56}_{1};\ \underbrace{50, 51, 52, 54}_{2};\ \underbrace{48, 49}_{3};\ \underbrace{43, 47}_{4};\ \underbrace{40, 46}_{5};\ \underbrace{29, 32, 38, 44}_{6};\ \underbrace{23, 26, 31}_{7};\ \underbrace{6, 13, 28, 45}_{8};\ \underbrace{11, 12, 19}_{9}$ |

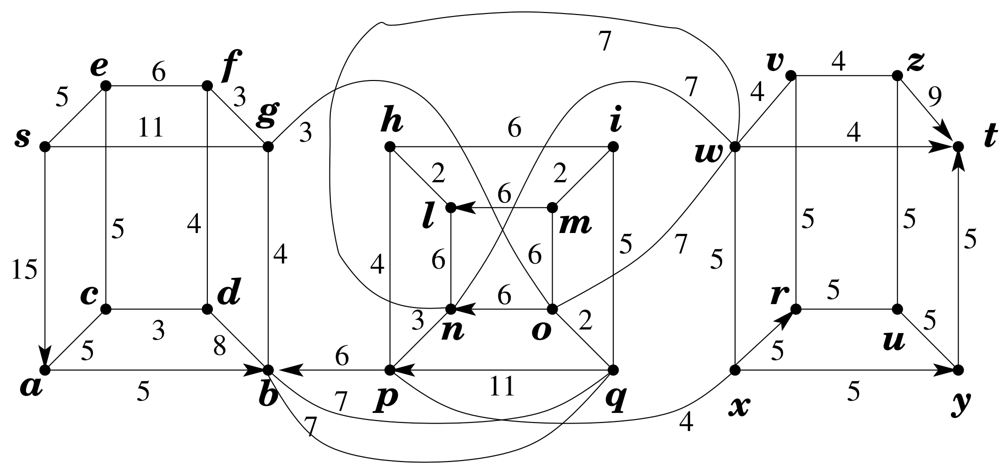
Dove per il penultimo punto (5.5) si é osservato dalla tabella di DP (ultima riga) che:

per raccogliere 8 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 6,
per raccogliere 7 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 23,
per raccogliere 6 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 32,
per raccogliere 5 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 40,
per raccogliere 4 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 47,
per raccogliere 3 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 48,
per raccogliere 2 elementi sul solo lato sinistro, l'ultimo deve valere massimo 52,
per raccogliere 1 elementi sul solo lato sinistro, esso deve valere massimo 66,

e si sono poi ordinatamente combinate queste osservazioni con analoghe osservazioni concernenti le migliori (non-dominate) scelte relative al come giocarsi il lato destro, sempre come lette dalla tabella (prima riga). La scelta migliore si è rilevata quella di prendere 6 elementi a sinistra (terminando in un 32) e 3 elementi a destra (cominciando con un 31); sono due scelte compatibili in quanto $32 > 31$.

Infine, per l'ultimo punto (5.6) ho costruito la sequenza crescente $i$-esima collocando in essa tutti quei numeri della sequenza in input tali che la massima lunghezza di una sequenza decrescente terminante in essi, come calcolata nell'ultima riga della tabella di PD, era precisamente $i$.

**Problema 6 (15 punti):**
Si consideri il grafo $G$, con pesi sugli archi, riportato in figura.




6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo $G$ è planare oppure no; (2) se il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gl$ è planare oppure no.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo $G$; (1) il grafo $G'$.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di $G$ di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: $fg$, $wx$, $ln$.

6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

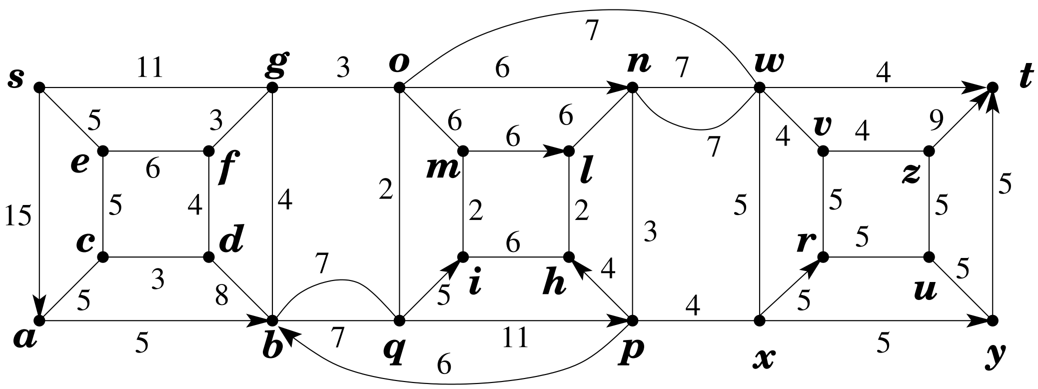
6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da $s$ e determinare le distanze di tutti i nodi da $s$.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da $s$. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$.

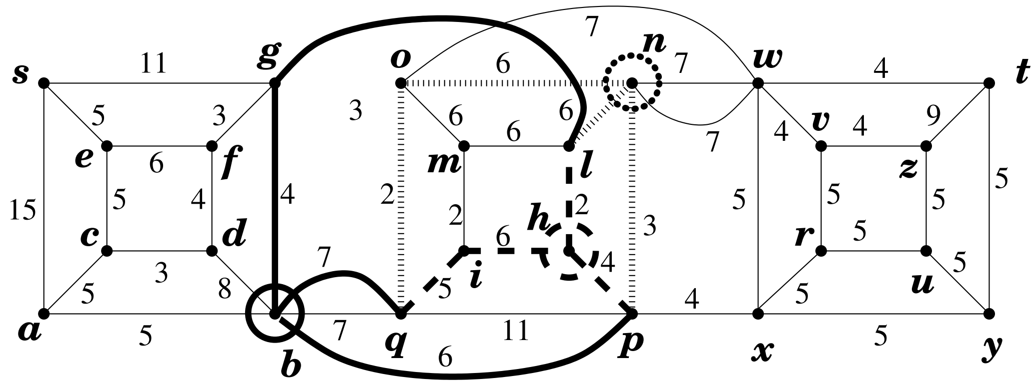
6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo $s$ al nodo $t$.

**risposte.** Il fatto che $G$ sia planare può essere messo in evidenza esibendo il planar embedding in figura.

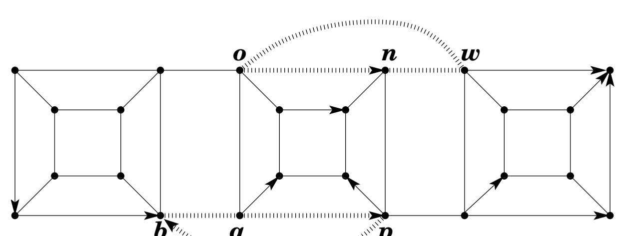



Nello svolgimento dei successivi punti converrà riferirsi al planar drawing fornito sopra.

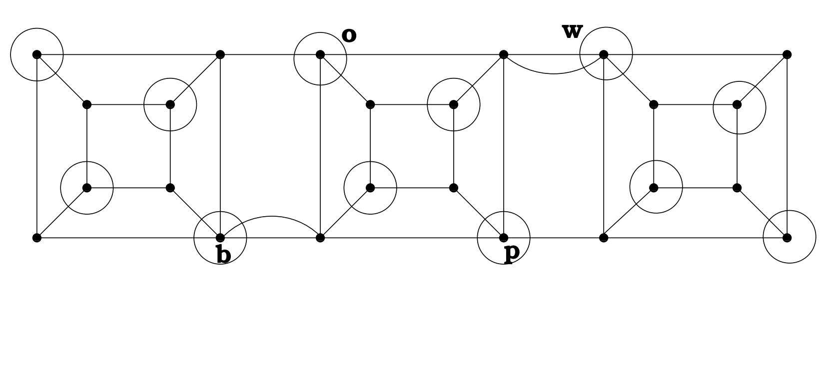
Invece $G'$ non è planare come messo in evidenza (=certificato) dal sottografo isomorfo ad una $K_{3,3}$-subdivision esibito in figura.




Il fatto che $G$ non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno due archi per renderlo tale, è certificato dai due cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura.

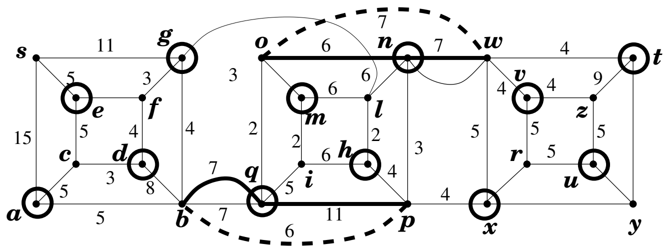



In effetti la rimozione di 2 soli archi ($ow$ e $pb$) basta a rendere $G$ bipartito come esibito in figura.



Il numero di archi la cui rimozione rende $G$ bipartito è pertanto 2.

Il grafo $G'$ ottenuto da $G$ rimpiazzando l'arco $go$ con l'arco $gh$ non é bipartito, ed almeno 2 archi devono essere rimossi per renderlo tale come messo in evidenza dai 2 cicli dispari disgiunti sugli archi esibiti nella seguente figura (sempre i 2 triangoli $onw$ e $bqp$).




La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 4 \cdot 29 = 232$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 17 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo $a$ (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi $on$, $ml$, $ih$, $pb$), più **4** archi opportumanete scelti tra gli 8 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra. Come scegliere 4 archi tra questi 8 merita più attenzione, ci sono 29 modi e sono i seguenti:

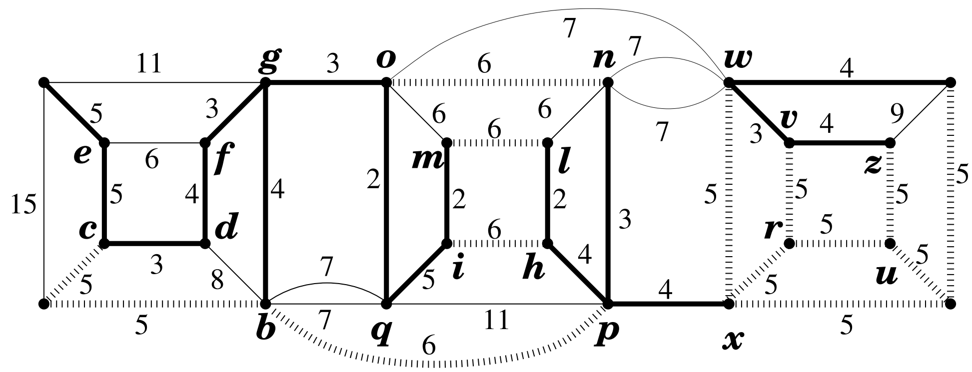
**1 modo:** prendi i 4 archi verticali.

**8 modi:** prendi 3 qualsiasi dei 4 archi verticali (4 modi) e 1 qualsisi dei 2 archi a quadrato (2 modi) che collegano il nodo dell'arco verticale non preso ad uno dei due a lui adiacenti. Può aiutare il pensare che in fondo stiamo cercando di contare il numero di spanning trees di una piramide, i 4 archi verticali sono quelli incidenti nel vertice (il quadrato in alto si è contratto in un nodo dato che tutti i suoi archi pesano meno di 5).

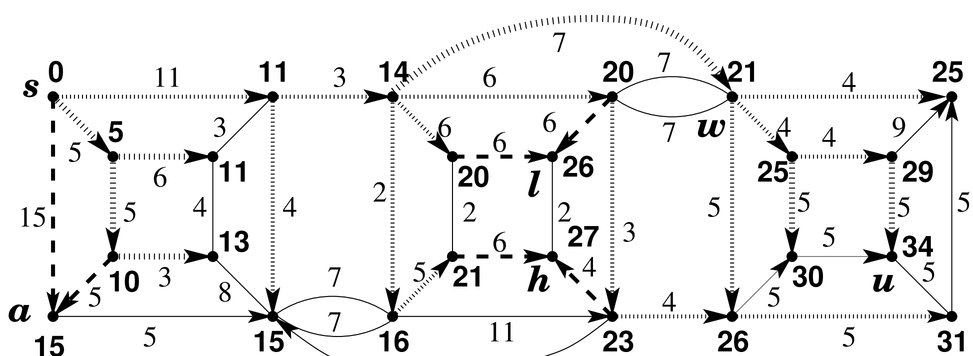
**12 modi:** prendi due archi del quadrato (base della piramide) adiacenti e due verticali; ci sono 4 modi per scegliere 2 archi adiacenti in un quadrato, e un arco verticale deve prendere il nodo altrimenti lasciato isolato mentre l'altro può essere liberamente scelto tra 3.

**8 modi:** prendi due archi del quadrato non adiacenti e due verticali; ci sono 2 modi per scegliere 2 archi adiacenti in un quadrato, e $2 \cdot 2 = 4$ modi per scegliere i due archi verticali in modo da connettere i 2 archi scelti nel quadrato.

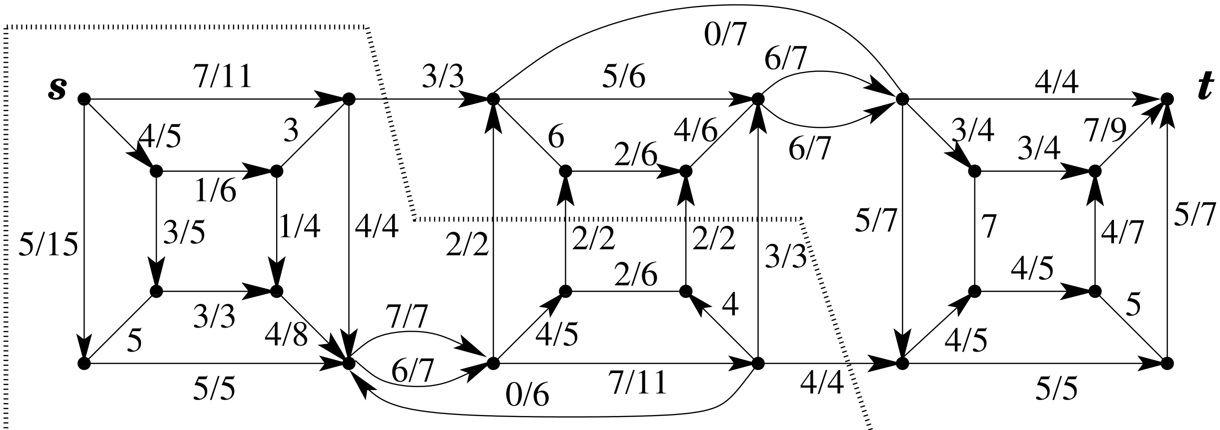
- $fg$ in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $s$, $e$, $a$, $c$, $f$, $d$ da tutti gli altri nodi;
- $wx$ in qualche soluzione ottima in quanto arco di peso minimo nel taglio che separa i nodi $w$, $v$, $z$, $t$ da tutti gli altri nodi (primo certificato) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $wxrv$;
- $ln$ in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $lnph$.




La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo $s$. Ci sono $2^3 = 8$ alberi dei cammini minimi dal nodo $s$ e ciascuno di essi include i 21 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $a$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $h$, uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati entranti nel nodo $l$.




La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.




Il flusso ha valore 16 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di $s$ al lato di $t$. Questi 6 archi costituiscono pertanto un minimo $s,t$-taglio, anch'esso di valore 16 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

**CONSIGLI SU COME PREPARARSI ALL'ESAME**

Per conseguire un voto per l'insegnamento di Ricerca Operativa devi partecipare ad un appello di esame. Il primo appello d'esame di ogni anno accademico ha luogo a giugno, dopo la conclusione del corso.
L'esame è scritto, dura circa 4 ore ed ha luogo in aula delta, dove, specie in estate, l'ambiente può risultare freddo. Consiglio di portarsi golfini, snack, acqua e matite o pennarelli colorati. (E dovete portare il tesserino col vostro numero di matricola.) Chi avesse problemi con l'aria condizionata è pregato di segnalarlo.
L'esame presenta diverse tipologie di esercizi e domande su vari aspetti di quanto esposto a lezione. Nel prepararti all'esame, prendi a riferimento i testi e le correzioni dei temi precedenti come scaricabili al sito del corso:

`http://profs.sci.univr.it/ rrizzi/classes/RO/index.html`

Ogni esercizio è anche un'opportunità di apprendimento e di allenamento, usa pertanto il tuo senso critico per farne miglior uso senza sprecarlo. Una volta letto il testo di un esercizio, ti conviene sfruttarlo innanzitutto per testare la tua preparazione all'esame. Consigliamo pertanto di svolgere l'esercizio quantomeno nella propria mente, e comunque, su una buona percentuale di casi, anche materialmente (e prestando attenzione ai tempi impiegati ed ai punti conseguiti). Solo a valle di un'esperienza almeno parziale con l'esercizio, passa alla lettura della correzione. Se non sai come affrontare l'esercizio, sbircia sí la correzione, ma cercando di utilizzarla solo come suggerimento, cercando di riacquisire quanto prima autonomia nella conduzione dell'esercizio.

E una volta completato l'esercizio? Beh, a questo punto vale il converso: anche se ti sembra di avere svolto pienamente l'esercizio, omettere la successiva lettura della correzione, se fatto sistematicamente, rischia di rivelarsi una grave ingenuità. Il workflow standard cui riferirsi *cum granu salis* dovrebbe essere il seguente: esegui autonomamente l'esercizio e confronta poi le tue risposte con quelle nel rispettivo documento di correzione. Nel confronto con la correzione proposta, presta attenzione non solo alle risposte in sè, ma anche a come esse vadano efficacemente offerte all'esaminatore/verificatore, ossia alla qualità dei tuoi certificati, alla precisione della tua dialettica, a come ottemperi il contratto implicito nella soluzione di un problema ben caratterizzato. In un certo senso, questo ti consentirà di raggiungere pragmaticamente quella qualità che in molti chiamano impropriamente "ordine", che ha valore e giustamente finisce, volenti o nolenti, per essere riconosciuta in ogni esame della vita. Ordine, ma noi preferiamo chiamarlo "saper rispondere in chiarezza alla consegna" non significa bella calligrafia o descrizioni prolisse, ma cogliere tempestivamente gli elementi salienti, quelli richiesti da contratto più o meno implicito. In questo le competenze che abbiamo messo al centro di questo insegnamento di ricerca operativa potranno renderti più consapevolmente ordinato. Lo scopo del documento di correzione non è tanto quello di spiegare come l'esercizio vada risolto ma piuttosto come le risposte vadano adeguatamente esibite pena il non conseguimento dei punti ad esse associati. È secondo quest'ottica che i documenti con le correzioni sono stati scritti. Preso cura di questo delicato aspetto (chiarire cosa si voglia dallo studente), altri obiettivi che, subordinatamente, cerco di assecondare nella stesura dei documenti di correzione sono semmai: aggiungere domande che arricchiscano l'esperienza di apprendimento offerta dall'esercizio, compendiare con altre considerazioni a latere che non potevano essere richieste allo studente, avanzare proposte di percorso ulteriore, e offrire spiegazioni contestualizzate che non possano essere reperite in altro documento. Infatti, per le tipologie di esercizio classiche, descrizioni curate dei più noti algoritmi risolutori possono essere facilmente reperite altrove (e vi incoraggio ad aiutarmi ad arricchire una tabella di link a tali sorgenti, o anche possiamo curare dispense di compendio a titolo di progetti che possono concorrere al voto).

I punti messi in palio ad ogni tema eccedono significativamente quanto necessario al raggiungimento dei pieni voti, gestitevi quindi per dimostrare le competenze che avete, senza impelagarvi dove avete invece delle lacune. Non mi interessano le vostre mancanze o lacune quanto piuttosto quello che dimostrate di saper fare. Se analizzate i temi di appelli precedenti, osserverete che avete a disposizione un'ampia varietà di modi per raccogliere punti e dimostrare la vostra preparazione. Lo scopo dell'esame sono il riconoscimento e la conferma. Essi sono a loro volta funzionali all'apprendimento. L'utilizzo corretto e pieno dei testi e correzioni rese disponibili ti consentirà di:

1. verificare la tua comprensione degli argomenti trattati e degli algoritmi e metodologie illustrati durante il corso;
2. affinare la tua preparazione ai fini dell'esame, non solo mettendo a punto le tue procedure ed approcci (privati e personali), ma chiarendo inoltre cosa l'esercizio richieda di produrre senza sbavature (ad

esempio, a meno che non sia esplicitamente richiesto diversamente, la maggior parte degli esercizi non chiede che lo studente spieghi od illustri come ha risolto un problema, ma solo che fornisca risposte certificate);

3. toccare con mano la portata metodologica del concetto di certificato offertaci dalla complessità computazionale.

Durante l'esame, dovrete lavore per almeno 4 ore a quella che definisco "una prova di cromatografia su carta". Serve per riconoscervi con ragionevole confidenza quanto avete lavorato, appreso, sedimentato. E trasformare questo in una proposta di voto il più congrua possibile. La logica dello svolgimento dell'esame deve essere quella di dimostrare al meglio le competenze acquisite andando con efficienza a raccogliere, dei molti punti messi in palio a vario titolo, quelli che vi risultano più funzionali al concretizzare un buon punteggio. Il punteggio in buona sostanza corrisponde al voto. Contano le risposte corrette, fornite in chiarezza, ed i certificati. Tutto il resto non verrà conteggiato. In questo la struttura dell'esame ribadisce il ruolo metodologico ed ubiquito dei concetti di complessità computazionale propagandati nel corso.

**gestione dei voti conseguiti.**

I voti dei singoli appelli verrano comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto. L'eventuale rifiuto del voto, oppure la sua sospensione (per condurre un progetto atto ad incrementare il voto, oppure perchè lo studente richiede del tempo per pensarci, oppure chiede di poter partecipare ad appello successivo decidendo solo alla fine se consegnare o meno riscrivendo voto precedente) vanno richiesti con una mail. Ovviamente, specie per un progetto, se ne deve parlare anche a voce, ma la mail serve comunque come promemoria e contabilità.

Se hai idee su come migliorare il corso od i suoi materiali proponi un tuo progetto, con esso potrai aggiungere al voto conseguito all'esame.