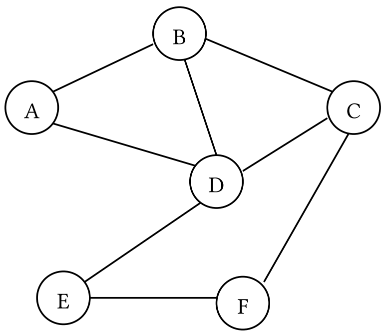
NOME:	COGNOME: ....
MATRICOLA:	FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 23 giugno 2023

Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

4 esercizi per 71 punti in palio (voto $\geq$ punti, 35$\longrightarrow$ 30 *e lode*, esercizio 4 aggiunto successivamente)

Esercizio 1 (con 7 richieste: 2+3+2+1+4+3+6 = 21 punti [modellazione/riduzioni]):
Un *independent set* in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di nodi $S \subseteq V$ tale che, per ogni arco $e \in E$, $e =$ uv, al più uno tra u e v è contenuto in S. Un independent set S è detto *massimale* se non esiste alcun independent set $S' \supsetneq S$.



esempio. $\{A, C, F\}$ non è un independent set per via dell'arco CF. Invece $\{B, F\}$, $\{D, F\}$ e $\{A, E\}$ sono independent sets ma $\{A, E\}$ non è massimale in quanto $\{A, E\} \subsetneq \{A, C, E\}$.

MAX INDEPENDENT SET è il problema di trovare un'independent set di massima cardinalità per un grafo G dato in input.

MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET è il problema di trovare un maximal independent set di minima cardinalità per un grafo G dato in input.

Richieste dell'Esercizio 1

1.1 (2 pt, model via graphs) Vorresti invitare un massimo numero di amici alla tua festa di compleanno. Purtroppo su alcune coppie di amici serpeggia inimicizia. Formula in termini di MAX INDEPENDENT SET il tuo problema di invitare il maggior numero possibile di amici evitando però di rischiare situazioni spiacevoli. Spiega come definiresti il tuo grafo partendo dalla situazione che rilevi sul campo.

1.2 (3 pt, model as ILP) Formula come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema MAX INDEPENDENT SET per la specifica istanza G in figura.

1.3 (2 pt, generalize model) Estendi la tua formulazione PLI di MAX INDEPENDENT SET a un generico grafo $G = (V, E)$.

1.4 (1 pt, graph models) A corto di soldi, vorresti minimizzare gli inviti ma senza che alcuno abbia a lamentarsene. Sai che nessun escluso si lamenterà se alla festa sarà presente almeno una persona con cui è in inimicizia. Puoi formulare in termini di MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET il problema di invitare il minor numero possibile di amici evitando però che alcuno abbia rimostranze? Commenta.

1.5 (4 pt, model as ILP) Formulare nella PLI il problema MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET per il grafo G in figura.

1.6 (3 pt, generalize model) Formulare nella PLI il problema MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET per un grafo $G = (V, E)$ generico.

1.7 (6 pt, NP-hardness proof) MAX INDEPENDENT SET è noto essere NP-hard. Sfrutta questo fatto per dimostrare che anche MIN MAXIMAL INDEPENDENT SET è NP-hard.

Esercizio 2 (con 10 richieste: 1+1+1+1+1+1+4+5+3+2 = 20 punti [grafi]):
Un grafo $G = (V, E)$ è *bipartito* se e solo se è 2-colorabile, ossia se esiste una colorazione $c : V \longrightarrow \{A, B\}$ tale che $c(u) \neq c(v)$ per ogni arco $\{u, v\} \in E$. Per $i = 1, 2, 3$, si consideri il grafo $G_i = (V, E_i)$, dove $V = \{A, B..., T\}$, ed E_1 è specificato in tabella.

u	H	I	I	A	D	A	A	B	C	F	B	A	F	G	G	M	M	L	G	L	N	B	C	O	A	E	I	O	P	Q	S
v	T	L	N	H	E	I	T	C	H	L	E	D	G	H	S	N	P	M	L	Q	O	G	D	P	F	F	R	R	Q	R	T
	4	5	3	5	3	2	5	4	5	3	4	3	5	5	5	5	4	5	4	3	4	4	4	4	4	2	3	5	5	4	5

Invece, E_2 differisce da E_1 per la presenza dell'arco $\{B, I\}$ al posto dell'arco $\{A, I\}$, e E_3 differisce sempre da E_1 per la presenza dell'arco $\{C, I\}$, sempre al posto dell'arco $\{A, I\}$.

Richieste dell'Esercizio 2
2.1 (1 pt, recognize planarity) Dire se G_1 sia planare o meno, fornendo certificato.
2.2 (1 pt, recognize planarity) Dire se G_2 sia planare o meno, fornendo certificato.
2.3 (1 pt, recognize planarity) Dire se G_3 sia planare o meno, fornendo certificato.
2.4 (1 pt, recognize 2-colorability) Dire se G_1 sia bipartito o meno, fornendo certificato.
2.5 (1 pt, 2-colorability, feasibility) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda G_2 bipartito, fornendo certificato che rimuovere quel numero di archi basti.
2.6 (1 pt, 2-colorability, optimality) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda G_2 bipartito, fornendo certificato che sia necessario rimuovere almeno quel numero di archi.
2.7 (4 pt, MST: cicli e tagli, 4=1+1+2) Per ciascuno degli archi DC, DE e QR, dire se esso appartenza a tutti, oppure a nessuno, oppure a qualcuno ma non tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo di G_1, fornendo i certificati del caso.
2.8 (5 pt, MST: struttura famiglia) Si descriva la struttura della famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo per il grafo G_1, e si dica quanti essi siano.
2.9 (3 pt, cammini minimi, 3=1+1+1) Si evidenzino, in un disegno del grafo G_1, gli archi di un albero dei cammini minimi dal nodo S (si scriva la distanza da S in coppa ad ogni nodo, in modo che sia facile verificare l'ottimalità dell'albero fornito). Si descriva la struttura della famiglia degli alberi dei cammini minimi da S e si dica quanti sono.
2.10 (2 pt, DAG recognition) Si condiderino gli archi come diretti da u (nodo nella prima riga della tabella) a v (nodo nella seconda riga della tabella). Trovare un ciclo diretto nel grafo G_1 e fornirlo, oppure fornire un ordinamento topologico dei nodi di G_1.

Esercizio 3 (con 7 richieste: 8+2+4+1+2+1+2 = 20 punti [programmazione dinamica]):
Il tempo è stato suddiviso in 30 slot di 1 minuto ciascuno. Per $i = 1, 2, ..., 30$, il trailer $r_i = (V_i, A_i, D_i)$ è caratterizzato da 3 valori:

V_i è il ***valore*** che saremmo disposti a pagare per poter vedere il trailer r_i

D_i è la ***durata*** del trailer r_i espressa in timeslots

A_i è il timeslot all'inizio del quale prende ***avvio*** lo streaming del trailer r_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
V	4	3	7	3	4	5	1	4	5	2	7	8	3	1	1	4	1	1	5	3	1	7	6	8	4	7	1	5	3	6
D	4	2	9	3	6	6	1	4	2	5	2	4	2	3	5	1	4	3	5	1	1	3	4	2	3	1	2	3	1	9
A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Un fatto importante, si noti, è che $A_i = i$ per ogni $i = 1, 2, ..., 30$. Si noti che un trailer r_i finisce per occupare i $D[i]$ timeslots nell'intervallo $[i, i + D[i])$. Ad esempio, il timeslot r_6 ha durata sei e quindi occupa i timeslots in $[6, 12) = [6, 11]$.

Purtroppo non posso visionare sia il trailer r_i che il trailer r_j se si sovrappongono anche solo per un singolo timeslot, ossia se $i < j$ e $A_j \leq A_i + (D_i - 1)$.

Decidi quali trailer visionare con l'obiettivo di massimizzarne il valore complessivo.

Richieste dell'Esercizio 3

3.1 (8 pt, pensa programmazione dinamica) Ti chiediamo di lavorare con metodo: di fronte al caso generale con n trailers, poniti prima il solo obiettivo di come determinare il valore ottimo, ossia di rispondere alla domanda di quale sia il massimo valore complessivo per un insieme di trailer tutti visualizzabili (penserai solo successivamente a come costruirlo). Inventati una famiglia di domande che includa la domanda di interesse come un suo membro particolare, e che sia chiusa rispetto ad induzione. Questi punti vengono attribuiti se prima (1) definisci la famiglia e poi (2) offri la regola uniforme per il computo dei sui membri. Per questa richiesta ti aggiudichi:

3 punti: se il numero di domande è esponenziale in n (una qualsiasi espressione ricorsiva, anche inefficiente)

4 punti: se il numero di domande è super-lineare in n

5 punti: se è lineare in n

≥ 6 punti: se è n o $n + 1$, ma i punti salgono a ...

8 punti: se per rispondere ad una domanda ti basta sbirciare la risposta a due sola altre domande (per sotto-istanze più piccole).

3.2 (2 pt, valore ottimo) quale è il massimo valore complessivo ottenibile per il problema in tabella?

3.3 (4 pt, soluzione ottima) fornire una soluzione ottima (quali trailer vanno scelti?)

3.4 (1 pt, opt val -tardi 6) ti sei svegliato tardi, perdendoti i primi 5 timeslot; quale è il massimo valore complessivo cui ambire ora?

3.5 (2 pt, opt sol -tardi 6) fornire una soluzione di massimo valore quando non si possa includere alcuno dei primi 5 trailer

3.6 (1 pt, opt val -tardi 16) quale è il massimo valore complessivo per una soluzione che non includa nessuno dei primi 15 trailer?

3.7 (2 pt, opt sol -tardi 16) fornire una soluzione di massimo valore quando non si possa includere alcuno dei primi 15 trailer

Esercizio 4 (con 3 richieste: 5+2+3 = 10 punti [programmazione dinamica]):

\	A	B	C	D	E	F	G
1	0	1	3	2	1	2	2
2	1	*	2	1	*	1	1
3	1	1	*	2	1	*	1
4	2	1	2	2	1	2	1
5	2	1	1	1	2	*	1
6	1	*	1	*	1	1	1
7	1	2	2	2	1	1	0

Un *cammino* nella griglia 7 x 7 in figura è una sequenza di celle $C_1, C_2, ..., C_{13}$ tale che:

1. nessuna cella attraversata contiene una mina
2. per ogni $i = 1, ..., 7 + 7 - 2$, la cella C_{i+1} è la cella immediatamente sotto oppure all'immediata destra della cella C_i.

Il *premio* di un cammino è pari alla somma dei numeri riportati nelle celle che visita (incluse la prima e l'ultima).

Richieste dell'Esercizio 4

4.1 (5 pt, numero cammini) Stabilire il numero di cammini dalla cella A1 alla cella G7 (1 punto), dalla cella A1 alla cella E6 (1 punto), dalla cella C2 alla cella G7 (1 punto), dalla cella A1 alla cella G7 passanti per D5 (2 punti)
4.2 (2 pt, max val cammino) Calcolare il massimo premio di un cammino dalla cella A1 alla cella G7 (1 punto), dalla cella A1 alla cella E6 (1 punto)
4.3 (3 pt, cammino ottimo) Fornire un cammino di massimo premio tra quelli dalla cella A1 alla cella G7 (2 punti), dalla cella A1 alla cella E6 (1 punto)

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-collaborare al controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò la corrispondenza di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.

2) Ripiega questa copertina a mo' di teca (intestazione coi dati personali su faccia esterna). In essa inserirai i fogli col tuo lavoro per raccoglierli. Vi conviene (non richiesto) che anche essi riportino Nome/Cognome/Matricola per scongiurare smarrimenti. Conviene consegnare tutto quanto possa contenere ulteriore valore (potete tirare una riga su inutili ripetizioni, risposte sbagliate, parti obsolete).

3) **non consentito:** utilizzare sussidi elettronici, consultare libri o appunti, comunicare con i compagni.

4) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglioncino (specie nei laboratori, specie in estate, stando fermi a lungo si patisce il freddo), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (testi e correzione vengono pubblicati a valle dell'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

2) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri ove previsti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti conseguiti restano validi fino ad eventuale consegna ad un qualche appello successivo. La registrazione dell'ultimo voto conseguito và richiesta come da dettagli nella comunicazione degli esiti.