Esame di Ricerca Operativa - 30 settembre 2014
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (2+1+1+1+2+1=8 punti):

É noto che la media di n valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, é quel valore $\overline{x} := \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, definito quindi da un'unica equazione lineare, che minimizza lo scarto quadratico medio $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Assumiamo ora che n sia dispari e di essere interessati al valore mediano (noto anche come secondo quartile), ossia a quell'unico valore reale $\tilde{x}$ per il quale $|\{i \,|\, x_i < \tilde{x}\}| < \frac{n}{2}$ e $|\{i \,|\, x_i > \tilde{x}\}| < \frac{n}{2}$.

(**(2pt)**) Fornire un modello di PL per il computo di tale valore mediano.

(**(1pt)**) Caratterizzare lo spazio delle soluzioni ottime del modello di cui al punto precedente nel caso in cui n sia pari.

(**(1pt)**) Quante possono essere le soluzioni ottime **di base** nel caso in cui n é pari?

(**(1pt)**) Quando accade che le soluzioni ottime di base siano degeneri?

(**(2pt)**) Dove $\hat{x} := \max_{i=1,\ldots,n} x_i$ e $\check{x} := \min_{i=1,\ldots,n} x_i$, fornire un modello di PL per il computo di $\frac{\hat{x}+\check{x}}{2}$ a partire dai soli parametri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in input.

(**(1pt)**) Quando accade che le soluzioni ottime di base di questo secondo modello siano degeneri?

svolgimento.

(**(2pt)**) Modello di PL per il computo del valore mediano $\tilde{x}$.

$$\min \ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$
$$\begin{cases} \varepsilon_i \ \geq \ x_i - \tilde{x} \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n \\ \varepsilon_i \ \geq \ \tilde{x} - x_i \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Si noti che al valore mediano $\tilde{x}$ é concesso di essere negativo, mentre gli n vincoli di non negativitá $\varepsilon_i \geq 0$ sono deducibili combinando a coppie le $2n$ diseguaglianze fornite esplicitamente.

(**(1pt)**) Caratterizzare lo spazio delle soluzioni ottime del modello di cui al punto precedente nel caso in cui n sia pari.

Dove gli $n = 2t$ parametri in input vengano riordinati in modo da avere $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, allora lo spazio delle soluzioni ottime é dato dall'intevallo $[x_t, x_{t+1}]$. Una caratterizzazione meno esplicita, ma che non richieda ordinamento, definisce lo spazio delle soluzioni ottime come l'insieme di quei valori reali $\tilde{x}$ per i quali $|\{i \,|\, x_i \leq \tilde{x}\}| \leq t$ e $|\{i \,|\, x_i \geq \tilde{x}\}| \leq t$. Infine, a parte l'escamotage di impiegare $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ al posto di t nei due vincoli sopra, una caratterizzazione naturale che possa valere sia per n pari che per n dispari, e quindi indissolubilmente legata al modello proposto, definirebbe lo spazio delle soluzioni ottime come l'insieme di quei valori reali $\tilde{x}$ per i quali $|\{i \,|\, x_i \leq \tilde{x}\}| \geq |\{i \,|\, x_i > \tilde{x}\}|$ e $|\{i \,|\, x_i \geq \tilde{x}\}| \geq |\{i \,|\, x_i < \tilde{x}\}|$, ossia quel luogo di punti dove, in considerazione della funzione obiettivo proposta, non possa mai risultare coveniente spostarsi verso sinistra oppure verso destra. Ai bordi subentrerà una sconvenienza stretta all'ulteriore spostamento, fuoriuscendo così dalla regione individuata in un compatto.

(**(1pt)**) Quante possono essere le soluzioni ottime **di base** nel caso in cui n é pari?

Nel caso di n pari le soluzioni ottime di base sono 2: x_t e x_{t+1}, che possono peró ovviamente ritrovarsi a coincidere in un'unica soluzione ottima di base (degenere).

(**(1pt)**) Quando accade che le soluzioni ottime di base siano degeneri?

Una soluzione ottima di base $\tilde{x}$ sarà degenere quando $|\{i \,|\, x_i = \tilde{x}\}| > 1$.

(**(2pt)**) Un modello di PL per il computo di $\mathring{x} := \frac{\hat{x}+\check{x}}{2}$.

$$\min \ \varepsilon$$
$$\begin{cases} \varepsilon \ \geq \ x_i - \mathring{x} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \\ \varepsilon \ \geq \ \mathring{x} - x_i \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \end{cases}$$

((**1pt**)) Quando accade che le soluzioni ottime di base siano degeneri?
Quando $|\arg\max_{i=1,\dots,n} x_i| > 1$ o $|\arg\min_{i=1,\dots,n} x_i| > 1$.

Problema 2 (8 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	*R*	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	*H*

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

2.5(2pt) Quale é il minimo costo di una traversata da A–1 a G–9?

2.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	•	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	•	•	194
G	1	7	18	44	•	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il minimo costo di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di costo minimo.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	1_1	4_1	4_1	5_1	6_1	6_1	6_1	•
B	2_1	3_1	3_1	3_1	•	•	6_1	6_2	6_2
C	4_1	5_1	3_1	4_2	4_2	4_2	5_2	6_2	7_4
D	4_1	4_1	•	4_2	4_4	4_6	5_6	5_6	5_6
E	4_1	4_2	5_2	5_2	•	5_6	5_{12}	5_{18}	5_{24}
F	4_1	5_3	6_5	6_2	6_2	6_6	•	•	6_{24}
G	7_1	8_3	6_5	7_7	•	6_6	6_6	7_6	6_{24}

Leggendo i valori riportati nella cella G–9 scopriamo che il minimo costo di una traversata é di 6, e che esistono 24 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	250
B–3 → G–9	44
A–1 → F–6	56
passaggio per D–5	100
minimo costo	6
numero di min-cost paths	24

Problema 3 (3+2+1+3+2+1=12 punti):

Dobbiamo decidere dove tenere aperti dei centri di pronto soccorso su 3 possibili localitá L_1, L_2 ed L_3. I costi per il matenimento sono come da seguente tabella:

Località 1	Località 2	Località 3
150	80	210

I centri dovranno coprire il servizio per 5 borghi, B_1, B_2, B_3, B_4 e B_5, con costi di servizio approssimativamente espressi dalla seguente matrice di trasporto (costi per autoambulanze e guardie mediche + ribaltamento dei disservizi dovuti alla distanza tradotti in termini contabili come da studi di settore):

	Località 1	Località 2	Località 3
Borgo 1	1	70	60
Borgo 2	80	1	100
Borgo 3	90	110	1
Borgo 4	70	60	50
Borgo 5	30	40	60

Vogliamo stabilire quali centri lasciare aperti ed i relativi bacini di utenza in modo da minimizzare le spese. L'1% del risparmio verrà devoluto sul tuo fondo di premialità, gravato da IVA al 21%.

((**3pt**)) Si formuli questo problema di ottimizzazione come un problema di programmazione lineare intera (PLI).

((**2pt**)) Punti bonus se nella tua formulazione PLI riuscirai a tenere al minimo il numero di variabili soggette a vincoli di interezza.

((**1pt**)) Fornire un modello di PLI generale che si riferisca ad un numero n_L arbitrario di localitá candidate al collocamento delle facility ed ad un numero n_U di utenze da coprire.

((**3pt**)) Dimostrare che il problema generale di facility location che hai modellato al punto precedente è NP-hard. (Mi basta l'idea della riduzione, non chiedo dimostrazioni formali. Ma la proposta di riduzione deve essere chiara ed esplicita).

((**2pt**)) Secondo te, considerando il rilassamento ottenuto ignorando i vincoli di interezza, esisterà comunque sempre sempre una soluzione ottima che sia anche intera? Fornire argomentazione a supporto (dimostrazione) oppure controesempio.

((**1pt**)) Riguardo alla questione di cui al punto precedente, perché reputi non avrebbe potuto essere ragionevole attendersi il contrario?

svolgimento.

(**(3+2pt)**) Il primo non-determinismo nel problema che siamo chiamati ad affrontare è in merito a quali centri di pronto soccorso lasciare aperti. Ciò può essere convenientemente espresso con l'introduzione di 3 variabili boolene y_1, y_2, e y_3, con $y_i = 1$ se il centro nella località L_i deve rimanere aperto e $y_i = 0$ altrimenti.

Una volta introdotte queste 3 variabili (costose sul piano computazionale a causa della loro "integralità"), risulta possibile descrivere il resto del modello avvalendosi di sole variabili continue, riferendosi ad un modello di flusso come segue: per $i = 1, \ldots, 5$ e $j = 1, \ldots, 3$, si introduce una variabile $x_{i,j}$ atta a rappresentare in che percentuale l'utenza del Borgo i si riferisca al centro aperto in Località j. In pratica abbiamo introdotto la seguente tabella di variabili:

	Località 1	Località 2	Località 3
Borgo 1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$
Borgo 2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$
Borgo 3	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	$x_{3,3}$
Borgo 4	$x_{4,1}$	$x_{4,2}$	$x_{4,3}$
Borgo 5	$x_{5,1}$	$x_{5,2}$	$x_{5,3}$

A questo punto la problematica risulta formulata dal seguente modello di PLI, che, in base a quanto noto dalla teoria dei problemi di flusso, si può facilmente intuire avere sempre soluzioni ottime intere.

Il problema è quindi quello di minimizzare i costi.

$$\min 150\, y_1 + 80\, y_2 + 210\, y_3 + \begin{array}{rrr} 1x_{1,1} + & 70x_{1,2} + & 60x_{1,3} + \\ 80x_{2,1} + & 1x_{2,2} + & 100x_{2,3} + \\ 90x_{3,1} + & 110x_{3,2} + & 1x_{3,3} + \\ 70x_{4,1} + & 60x_{4,2} + & 50x_{4,3} + \\ 30x_{5,1} + & 40x_{5,2} + & 60x_{5,3} \end{array}$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di interezza e non-negatività

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$
$$x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3} \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n_U.$$

vincoli di copertura totale del sevizio richiesto da ciascuna utenza

$$x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} \geq 1 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n_U.$$

non erogabilità del servizio da parte di una struttura chiusa

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} \leq y_1,$$
$$x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} + x_{5,2} \leq y_2,$$
$$x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} + x_{5,3} \leq y_3.$$

(**(1pt)**) La formulazione del modello generale, con n_L localities dove eventualmente collocare le facilities (pagando costo di attivazione C_j, funzione della Locality j) e con n_U utenze dove si preveda un costo $c_{i,j}$ qualora l'Utenza i venga riferita alla Location j (consentito solo se la Location j è stata aperta).

$$\min \sum_{j=1}^{n_L} C_j y_j + \sum_{i=1}^{n_U} \sum_{j=1}^{n_L} c_{i,j} x_{i,j} \, ,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di interezza e non-negatività

$$y_j \in \{0,1\} \text{ per ogni } j = 1, \ldots, n_L.$$
$$x_{i,j} \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n_U, \; j = 1, \ldots, n_L.$$

vincoli di copertura totale del sevizio richiesto da ciascuna utenza

$$\sum_{j=1}^{n_L} x_{i,j} \geq 1 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n_U.$$

non erogabilità del servizio da parte di una struttura chiusa

$$\sum_{i=1}^{n_U} x_{i,j} \leq y_j \text{ per ogni } j = 1, \ldots, n_L.$$

(**(3pt)**) Riduciamo 3-SAT a Facility-Location (FL). Data la generica istanza di 3-SAT sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$, introduciamo due facility L_j ed $\overline{L}_j$ per ciascuna delle sue variabili x_j. Carichiamo un costo di 1 su ciascuna di queste $2n$ facility in modo da evitare che venga aperta sia L_j che $\overline{L}_j$. Per forzare che almeno una delle 2 facility venga comunque aperta, in modo che la coppia $(L_j, \overline{L}_j)$ si comporti a tutti gli effetti come un bistabile, ossia si presti a codificare il valore della variabile booleana y_j, introduciamo, per ogni $j = 1, \ldots, n$, una utenza u_j con $C(u_j, L_j) = C(u_j, \overline{L}_j) = 0$ e $C(u_j, L'_j) = C(u_j, \overline{L}'_j) = M$ per ogni $j' \neq j$. Qui M vuole essere un valore sufficientemente grande, e in realtà basterà prendere $M = m$, il numero di clausole nella formula di 3-SAT che si intende rappresentare. Inoltre, per ciascuna di queste m clausole, ad esempio per la t-esima clausola, che per praticità si assumi essere $c_t = (x_i \vee \overline{x}_j \vee x_k)$, dobbiamo introdurre un'ulteriore utenza u_{n+t} tale che $C(u_{n+t}, L_i) = C(u_{n+t}, \overline{L}_j) = C(u_{n+t}, L_k) = 0$ mentre $C(u_{n+t}, L) = 1$ per ogni altra location.

(**(2pt)**) Un controesempio: 3 locations L_1, L_2, L_3, dove aprire il servizio costi 1 e 3 utenze U_{12}, U_{23}, U_{13}, con $C(U_{ij}, L_i) = C(U_{ij}, L_j) = 0$ e $C(U_{ij}, L_k) = 100$ per $k \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$. La soluzione ottima $y_1 = y_2 = y_3 = \frac{1}{2} = x_{U_{ij},L_i} = x_{U_{ij},L_j}$ con $x_{U_{ij},L_k} = 0$ per $k \in \{1,2,3\} \setminus \{i,j\}$ è frazionaria di costo $\frac{3}{2}$, mentre la migliore soluzione intera prevede di aprire il servizio in 2 location, per un costo di $2 > \frac{3}{2}$.

(**(1pt)**) Non era lecito aspettarsi che esistesse sempre una soluzione ottima intera visto che la PL è in P, vista l'NP-hardness del problema di ottimizzazione, e visto che la questione P=NP è ancora aperta (e generalmente considerata falsa).

Problema 4 (7 punti):

Progettare un problema di PL (od una famiglia di tali problemi), od argomentare che una tal cosa non possa esistere.

4.1 (2pt) progettare una famiglia P_n, $n \in \mathbf{N}$, di problemi di programmazione lineare in forma standard tale che P_n abbia esattamente n soluzioni di base ottime;

4.2 (2pt) progettare una famiglia Q_n, $n \in \mathbf{N}$, di problemi di programmazione lineare in forma standard tale che il duale di Q_n abbia almeno n soluzioni di base ottime;

4.3 (2pt) progettare un problema che abbia $(0,3,3)$, $(3,0,3)$, $(3,3,0)$ tra le soluzioni ammissibili e $(2,2,2)$ come unica soluzione ottima.

4.4 (1pt) progettare un problema che abbia un'unica soluzione di base ottima, ma diverse soluzioni ottime non di base.

svolgimento.

(4.1)

$$\max \ \sum_{i=1}^n x_i$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \ \leq \ 1 \\ x_i \geq 0 \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

(4.2) Si scriva il duale Q_n del problema sopra P_n. (Stiamo sfruttando il fatto che il primale è il duale del duale).

Ovviamente, per aggiudicarsi i punti, il duale va interpretato come costruzione generica, in modo da portare a casa l'intera famiglia Q_n, $n \in \mathbf{N}$.

(4.3) Non è possibile in quanto $(2,2,2)$ risulta combinazione convessa di 3 punti ammissibili:

$$(2,2,2) = \frac{1}{3}(0,3,3) + \frac{1}{3}(3,0,3) + \frac{1}{3}(3,3,0).$$

Pertanto, dove f sia la funzione obiettivo, allora

$$f(2,2,2) = \frac{1}{3}f(0,3,3) + \frac{1}{3}f(3,0,3) + \frac{1}{3}f(3,3,0)\,,$$

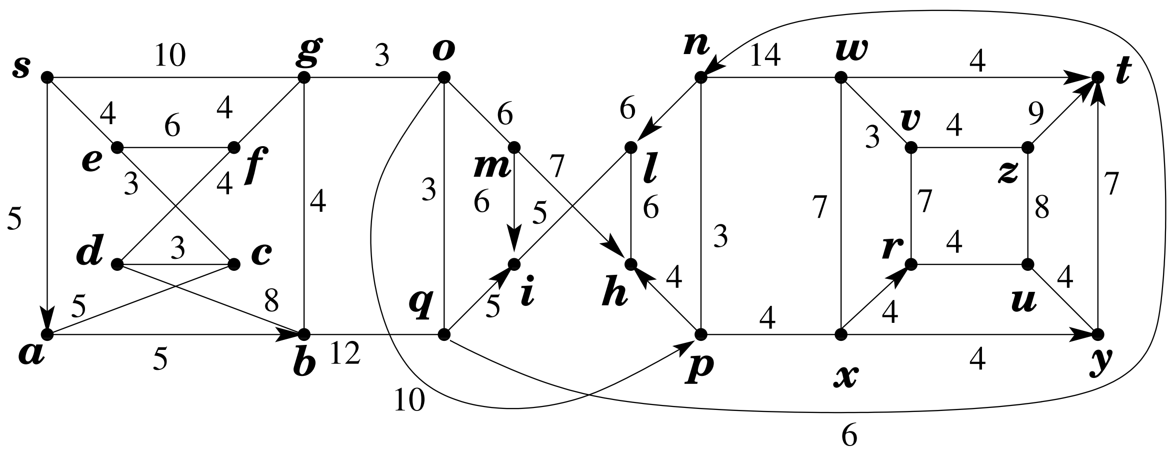
dacchè $f()$ è funzione lineare. Pertanto, essendo i 3 punti a destra tutti ammissibili, se essi non sono tutti ottimi allora otterremo l'assurdo che nemmeno $(2,2,2)$ lo è.

(4.4)

$$\max \ x_1$$
$$\begin{cases} x_1 \leq \ 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Problema 5 (10 punti):

Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

5.3.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

5.4.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

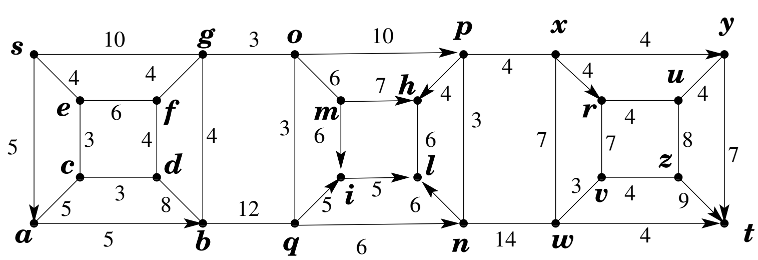
5.5.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.6.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

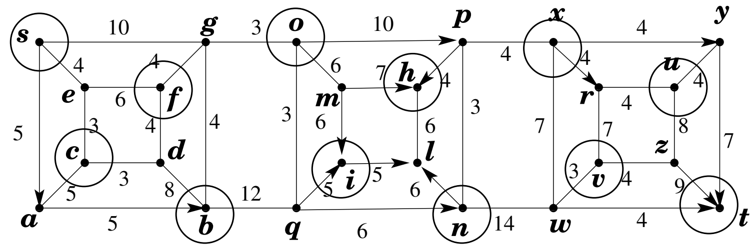
5.7.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.8.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

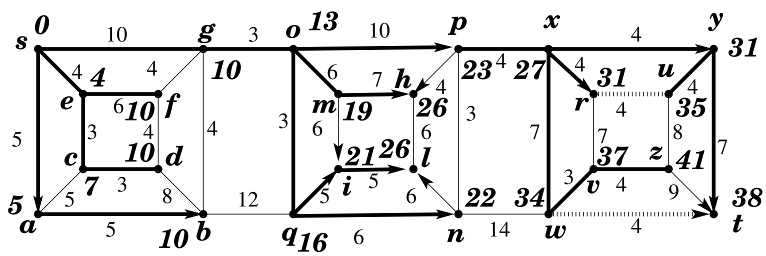
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



Il grafo è altresì bipartito come certificato nella seguente figura.

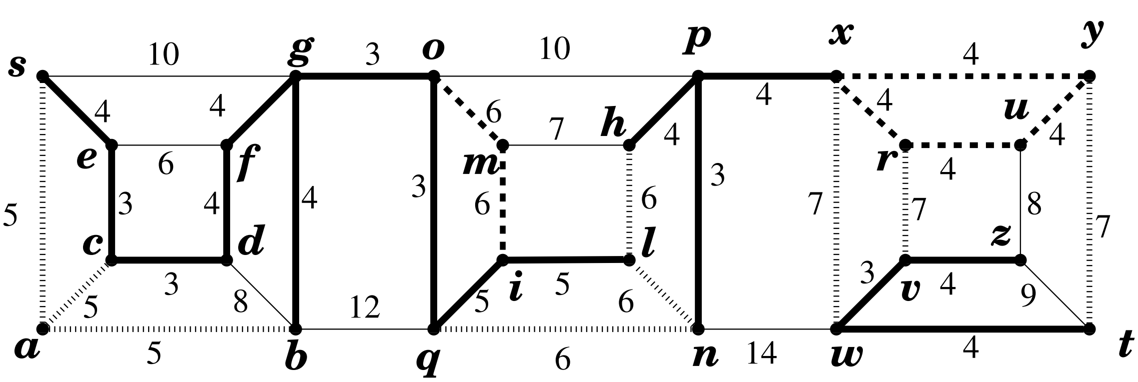


Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato, in archi spessi, in figura.

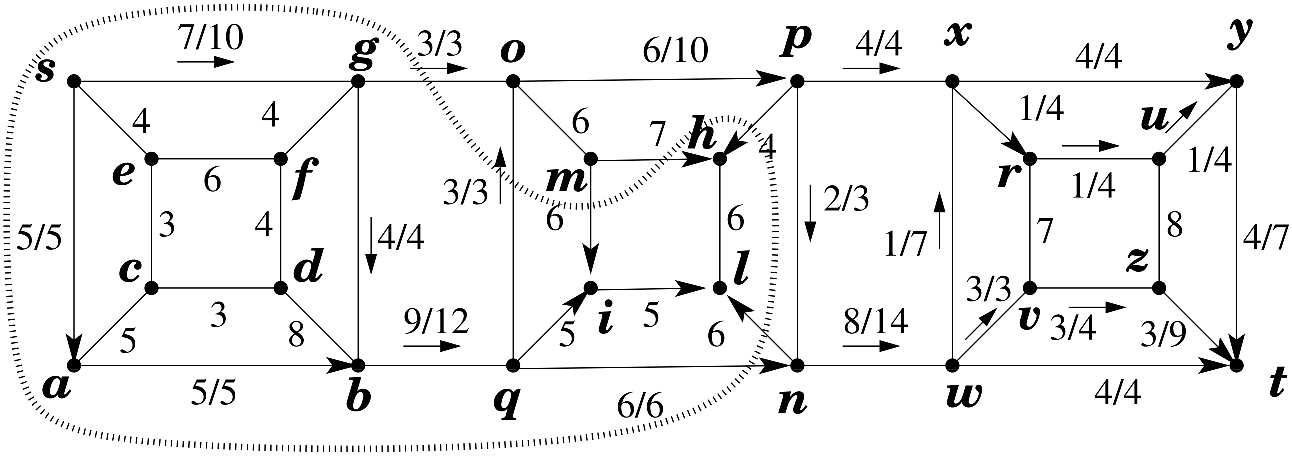


Nella stessa figura, i due archi tratteggiati in grosso rappresentano scelte alternative. Abbiamo pertanto $2 \cdot 2 = 4$ possibili alberi dei cammini minimi da s.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 6 (6 punti):
Si ricerchino soluzioni algoritmiche per il seguente modello della Ricerca Operativa.

KNAPSACK' variante del KNAPSACK classico con vincolo sulla parità del numero di oggetti presi.

INPUT: Due numeri naturali n, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \ldots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme S degli oggetti assegnati in input, di cardinalità $|S|$ pari, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B, e massimizzando il valore totale raccolto.

(**(1pt)**) Si osservi come sia possibile ridurre il KNAPSACK classico alla versione KNAPSACK' di attuale interesse.
(**(1pt)**) Se ne deduca che KNAPSACK' è NP-hard in senso debole.
(**(1pt)**) Definire una famiglia di (al più un numero pseudo-polinomiale di) sottoproblemi chiusa rispetto ad induzione ed atta a risolvere KNAPSACK'.
(**(1pt)**) Fornire una ricorrenza risolutiva per i sottoproblemi della famiglia proposta.
(**(1pt)**) Trattare i casi base.
(**(1pt)**) Specificare come vada letto dalla tabella il valore della soluzione ottima e come essa possa poi essere ricostruita.

svolgimento.
(**(1pt)**) Si osservi come sia possibile ridurre il KNAPSACK classico alla versione KNAPSACK' di attuale interesse: data un'istanza di KNAPSACK, possiamo sempre aggiungere un oggetto $Z = (0, 0)$ di valore e peso nulli che possa servire ad "aggiustare la parità". L'istanza di KNAPSACK' cosiì ottenuta ben rappresenta l'istanza di KNAPSACK originale in quanto, data una qualsiasi soluzione S' per l'istanza di KNAPSACK', $S' \setminus \{Z\}$ è una soluzione di pari valore per l'istanza originale di KNAPSACK e, viceversa, data una qualsiasi soluzione S per

l'istanza originale di Knapsack, S stessa oppure $S \cup \{Z\}$ è una soluzione di pari valore per l'istanza di Knapsack'.

(**(1pt)**) Sappiamo che ogni problema in NP pu'øessere ridotto al Knapsack classico (che è noto essere NP-hard in senso debole) ed abbiamo visto che il Knapsack classico può essere ridotto alla sua variante Knapsack' da noi considerata. Componendo le due riduzioni se ne deduce che ogni problema in NP pu'øessere ridotto a Knapsack' e quindi Knapsack' è NP-hard in senso debole.

(**(1pt)**) per $n' = 0, 1, \ldots, n$ e $B' = 0, 1, \ldots, B$, si definisca $opt_0[n', B']$ il valore della soluzione ottima per l'istanza modificata considerando solo i primi n' oggetti e ponendo $B := B'$. In modo del tutto similare (eccetto la parità), per $n' = 0, 1, \ldots, n$ e $B' = 0, 1, \ldots, B$, si definisca $opt_1[n', B']$ il massimo valore complessivo di un sottoinsieme di cardinalità dispari, di oggetti presi tra i soli primi n', ed a peso complessivo non eccedente B'.

(**(3pt)**) Definire la famiglia corrisponde ad infilare la chiave di volta. Collocata questa pietra angolare nel punto sopra, riesci ora ad aggiudicarti gli altri tre punti?