

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 04 settembre 2019**Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona**punti in palio: 72, con voto \geq punti + k , $k \geq 0$ **Problema 1 (10 punti):**

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I-10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	1	1	1	1	1	0	0	•	6
B	2	1	1	0	•	0	•	0	0	5
C	0	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	1
F	0	1	3	1	•	3	•	3	0	1
G	3	•	2	1	2	0	0	3	1	•
H	2	1	2	1	2	1	1	1	2	0
I	4	4	3	3	2	1	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in I-10 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

1.5(1pt) Quale è il massimo valore in premi raccogliabili lungo una traversata da A-1 a I-10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

1.7(1pt) Quale è il massimo valore in premi raccogliabili lungo una traversata da A-1 a I-10 passante per D-5?

1.8(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

consegna	num. percorsi	opt	una sol opt
A-1 \rightarrow I-10			
B-3 \rightarrow I-10			
A-1 \rightarrow F-6			
passaggio per D-5			
massimo valore			
n. max-val paths			
max val D-5-path			
n. max-val D-5-paths			

Problema 2 (41 punti):

Su un bus di comunicazione si affacciano, nell'ordine, n dispositivi elettronici numerati da 1 ad n . Il bus risulta pertanto suddiviso in $n - 1$ tratte, dove l' i -esima tratta collega i dispositivi i ed $i + 1$ e consente di far fluire informazione dallo snodo i allo snodo $i + 1$ del bus. Ogni bit che dovesse fluire dal dispositivo i al dispositivo j , con $j > i$, deve pertanto attraversare le tratte $i, i + 1, \dots, j - 1$ in questo ordine. Nessuna comunicazione da j ad i è invece possibile. Per $i = 1, \dots, n - 1$, si indichi con C_i la capacità della tratta i , ossia il massimo numero di bits transitabili lungo essa. Oltre ai valori di n e delle capacità C_i , un'istanza del nostro problema specifica un insieme I di m coppie interessanti $c_p = (a_p, b_p)$, con $b_p > a_p$, per $p = 1, \dots, m$. L'obiettivo è trasmettere il massimo numero di bit, dove ciascun bit trasmesso deve marciare dalla sorgente a_p alla destinazione b_p per una stessa coppia c_p , e dove nessuna tratta i , $i = 1, \dots, n - 1$, veda transitare più di C_i bits.

(1pt) fornire una formulazione di PLI per l'istanza I_5 : ($n = 7$; $C_1 = 4, C_2 = 2, C_3 = 6, C_4 = 3, C_5 = 4, C_6 = 8$; $m = 5$; $a_1 = 1, b_1 = 4, a_2 = 2, b_2 = 3, a_3 = 3, b_3 = 5, a_4 = 4, b_4 = 6, a_5 = 1, b_5 = 7$).

(1pt) quale istanza (chiamiamola I_4) è catturata dalla seguente formulazione di PLI?

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & \leq 4 \\ x_1 + x_2 & \leq 2 \\ x_1 + x_3 & \leq 6 \\ x_3 + x_4 & \leq 3 \\ x_4 & \leq 4 \\ x_p \geq 0 \text{ e intera per } p = 1, 2, \dots, 4. \end{array} \right. \end{array}$$

(1pt) fornire una soluzione ottima per l'istanza I_4 .

(1+1pt) in che senso I_4 è un sottoproblema di I_5 ? (Specificare quale scelta lo determini in seno a I_5 e le due semplificazioni che ne conseguono e conducono a I_4 .) Dire quale sia la relazione tra le soluzioni ottime di I_4 e quelle di I_5 , e darne dimostrazione. È in virtù di tale relazione che la scelta che riduce I_5 ad I_4 non può pregiudicare il raggiungimento dell'ottimo. In pratica se risolviamo I_4 abbiamo la soluzione per I_5 .

(1+1pt) guardando alle due formulazioni di PLI, osservare quali due operazioni poliedrali corrispondano alle due semplificazioni legate alla scelta che riduce il problema I_5 ad I_4 .

(1pt) verifica che la soluzione di I_4 risulta ammissibile per il problema di PLI assegnato, e quindi anche del suo rilassamento continuo (il problema di PL ottenuto ignorando i vincoli di interezza sulle variabili) che è solo meno vincolato. Vogliamo ora impiegare la teoria degli scarti complementari per verificare sull'istanza I_4 un fatto che vale in generale per questa famiglia di formulazioni PLI: i vincoli di interezza non lavorano e possono quindi essere ignorati. Quindi, se la tua soluzione è davvero ottima per il PLI assegnato, allora lo è anche per il suo rilassamento. Andremo a verificarlo. Il primo passo di questo percorso è condurre questa verifica di ammissibilità prendendo nota di quali vincoli sono soddisfatti ad uguaglianza.

(1pt) secondo passo: scrivere il duale del rilassamento continuo.

(1pt) utilizzando la tua soluzione ottima per il problema primale, imposta il sistema basato sulle condizioni degli scarti complementari per la determinazione di una soluzione duale ottima.

(1+1+1+1pt) fornire una soluzione duale ottima. Argomentare l'ottimalità della soluzione primale che hai impiegato. Per quale ragione la soluzione duale è unica? È possibile fornire esempio di istanza dove la soluzione duale ottima non è unica?

(1+1pt) individuare lo spazio delle soluzioni primali ottime sia del rilassamento continuo che del problema combinatorio originale per l'istanza I_4 .

(1+1pt) se anche la soluzione duale è intera (e magari 0/1) deve venire il sospetto che il problema ammetta una formula di min-max con interpretazione combinatoria naturale. Riesci a formulare una congettura che interpreti il significato combinatorio della soluzione duale (ad ora solo due numeri diversi da zero, che vorranno mai dire?) con una definizione e col lemma debole (che dica che la presenza di un tale oggetto duale pone di fatto un upper bound sul valore della soluzione primale ottima)? Basta la formulazione, non chiedo la dimostrazione (che dovrebbe essere ovvia).

(1+5pt) Valuto invece l'eventuale dimostrazione del lemma forte. Nell'ottenerla può aiutarti l'algoritmo greedy di cui nei punti più sotto. Di converso, tenere contemporaneamente presenti gli oggetti primale e duale di questa buona caratterizzazione combinatoria aiuta nell'ottenere tale algoritmo.

(1pt) quanto saresti disposto a pagare per aumentare di un'unità la capacità di ogni singola tratta? (Specificare per ciascuna tratta).

(1pt) fino a quale entità di incremento della capacità della tratta saresti disposto a pagare tale prezzo unitario?

(1+1pt) nell'eseguire il metodo del simplesso per ottenere una soluzione ottima di I_4 riusciresti a non cambiare lo stato di alcuna variabile (da in base a fuori base o viceversa) più di una volta? Specificare variabile entrante e variabile uscente per ogni pivot di una tale sequenza. Senza necessariamente effettuare davvero tali pivots, dettagliare il valore di tutte le variabili in base ad ogni passo.

(4pt) A rendere speciale c_2 c'è che j_2 è la più piccola (più a sinistra) destinazione. Quale argomento "locale" ti consente di concludere che per quella coppia non sbagli a mandare quanti più bits possibile e ridurre in tale modo l'istanza originale con una scelta definitiva? Riesci a proporre un algoritmo greedy per questo problema?

(1+1+5+1+1pt) dare la formulazione di PL per il problema generale (non specifica alla singola istanza). Arricchire la formulazione contemplando che per ogni $p = 1, \dots, m$, in I venga anche specificato il numero n_p di bits disponibili a transire da a_p a b_p .

Dimostrare l'NP-hardness della variante di questo problema dove per ciascun p la comunicazione deve essere tutto o niente (vanno mandati tutti gli n_p bits oppure nessuno). È dato sapere che il problema di decidere se un insieme di $2n$ numeri naturali possa essere partizionato in due insiemi di cardinalità n ed uguale somma è NP-completo. Dare allora una formulazione PLI di questa generalizzazione ed argomentare perché una formulazione di PL naturale, con numero polinomiale di variabili e di vincoli, sarebbe a questo punto improbabile.

Problema 3 (8 punti):

Voglio eseguire il prima possibile una certa attività target T . Prima di poter eseguire T deve però essere trascorsa almeno un'ora da quando ho eseguito l'attività D ed almeno 4 da quando ho eseguito l'attività A , e ci sono anche altri vincoli di precedenza analoghi con ulteriori attività. La seguente tabella riporta in forma compatta tutti i vincoli ed attività coinvolte.

T: (A,4), (D,1)	D: (A,2), (C,8)	H: (C,1), (I,3)
A: (B,6), (E,5), (G,1), (H,4)	E: (F,8), (H,2)	I: (T,3)
B: (C,2), (E,1)	F: (I,1)	
C: (F,2), (I,5)	G: (B,2), (H,8)	

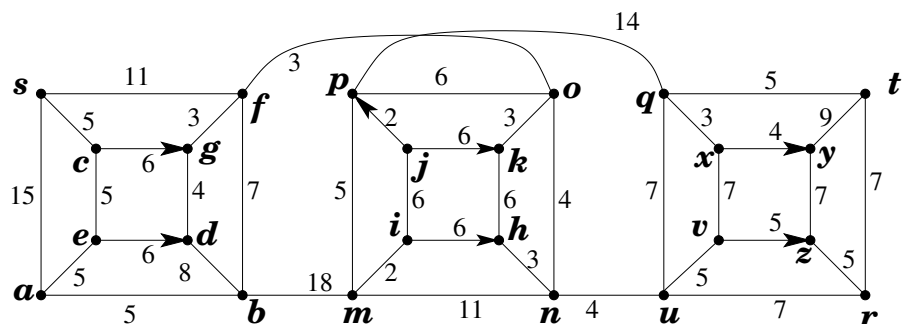
L'esecuzione delle attività è istantanea, esse hanno durata nulla (se voglio modellare un'attività con una durata minima la rappresento con due attività ed un vincolo di precedenza).

- 3.1.(1pt) Fornire certificato che non è possibile schedulare l'attività T rispettando tutti i vincoli.
- 3.2.(1pt) Se tralasciamo il vincolo "I: (T,3)" la schedulazione è possibile. Darne certificato fornendo un'ordinamento delle attività tale che ogni attività abbia a prerequisite solo attività che la precedono nell'ordine.
- 3.3.(1pt) supponendo di eseguire subito l'attività I, dire quale è il minimo numero di ore che devono trascorrere prima che sia possibile eseguire T .
- 3.4.(1pt) specificare il tempo minimo di esecuzione di ciascuna attività, nell'ordine.
- 3.5.(1pt) specificare l'ultimo momento utile per eseguire le varie attività senza dover per questo posticipare T.
- 3.6.(1pt) si consegna un cammino critico, ossia una sequenza di attività nessuna delle quali possa essere anticipata per rispettare il vincolo di precedenza sulla precedente, e che dimostri che T non può essere anticipato.

3.7.(2=1+1pt) Quale è il minimo numero di vincoli che occorre violare se intendiamo rispettare il vincolo “I: (T,3)”?

Problema 4 (13 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



4.1.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .

4.2.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

4.3.(3pt) Per quali archi un incremento della capacità dell'arco porta ad un incremento del massimo flusso? Specificare il massimo incremento ottenibile agendo su ciascun singolo arco.

4.4.(3=1+1+1pt) Dire se in grafo è planare e quale sia il minimo numero di archi da rimuovere per renderlo bipartito.

4.5.(3pt) Per ciascuno dei tre archi incidenti in t dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutti / a nessuno / a qualcuno ma non a tutti) gli alberi ricoprenti di peso minimo.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti, (2) portatevi snacks e maglione (l'aula delta può essere molto fredda, specie in estate, e su permanenze protratte), e (3) non venite all'esame solo per fare i curiosi con quella di uscirvene quando vi pare (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in su i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.