

NOME: .....

COGNOME: .....

MATRICOLA: .....

FIRMA: .....

**Esame di Ricerca Operativa - 20 settembre 2022****Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona**punti in palio: 46, con voto  $\geq$  punti +  $k$ ,  $k \geq 0$ **Problema 1 (5 punti [modellazione]):**

Un traghetto ha tre compartimenti per il trasporto delle merci: prua, poppa, stiva. Vi sono dei limiti sul peso e volume di merce trasportabile nei tre compartimenti. La seguente tabella specifica tali limiti in megagrammi (tonnellate) ed in metri cubi, rispettivamente:

Compartimento	Peso (Mg)	Spazio ( $m^3$ )
Prua	10	6800
Poppa	16	8700
Stiva	8	5300

Inoltre, per garantire un galleggiamento bilanciato del traghetto, il peso del carico deve essere ripartito sui tre compartimenti secondo le stesse percentuali delle capacità totali dei singoli compartimenti.

Per il prossimo viaggio abbiamo a disposizione le seguenti 4 tipologie di merce da carico.

Cargo	Peso (Mg)	Volume ( $m^3$ /Mg)	Profitto (Euro/Mg)
$C_1$	18	480	310
$C_2$	15	650	380
$C_3$	23	580	350
$C_4$	12	390	285

Una qualsiasi porzione di queste merci disponibili può essere trasportata (la tabella specifica solo la quantità massima, ossia quella attualmente presente nei magazzini di terra). Formulare come problema di programmazione lineare il problema di determinare quanto trasportare di ciascuna merce e come ripartirla sui compartimenti col fine di massimizzare il profitto.

**Problema 2 (6 punti):**

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe  $s = \text{CTATAGAGGTCACTATG}$  e  $t = \text{ATGCAGCTAGGACTGT}$ . Fare lo stesso con alcuni prefissi di  $s$  e  $t$ .

**2.1 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e  $t$ ?

**2.2 (1pt)** e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'T'?

**2.3 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e il prefisso  $t_9 = \text{ATGCAGCTA}$  di  $t$ ?

**2.4 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $t$  e il prefisso  $s_8 = \text{CTATAGAG}$  di  $s$ ?

**2.5 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $t_9$  e  $s_8$ ?

**2.6 (1pt)** quale è la più lunga sottosequenza comune tra  $s$  e  $t$  che abbia CCA come suffisso?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'T'		
tra $s$ e $t_9$		
tra $s_8$ e $t$		
tra $s_8$ e $t_9$		
con CCA come suffisso		

**Problema 3 (7 punti):**

Un robot  $R$ , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home  $H$  situata nella cella I-10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	2
F	0	1	1	1	•	3	•	3	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	4	1	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

**3.1(1pt)** Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

**3.2(1pt)** e se la partenza è in B-3?

**3.3(1pt)** e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

**3.4(1pt)** e se con partenza in A-1 ed arrivo in I-10 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

**3.5(1pt)** Quale è il massimo valore in premi raccogliabili lungo una traversata da A-1 a I-10?

**3.6(2pt)** Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

**Problema 4 (3+3=6 punti):**

Formulare come un problema di PLI il problema di trovare la più lunga sottosequenza strettamente crescente di una sequenza assegnata  $s = s_1 s_2 \dots s_n$  di valori interi.

**(2pt)** Nel caso in cui  $n = 7$ ,  $s_1 = 33$ ,  $s_2 = 18$ ,  $s_3 = 50$ ,  $s_4 = 22$ ,  $s_5 = 45$ ,  $s_6 = 72$ ,  $s_7 = 64$ .

**(3pt)** In generale.

**Problema 5 (7 punti):**

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
58	50	48	43	47	36	29	23	52	32	6	47	26	38	13	11	49	46	54	31	12	44	28	19	45

**5.1(1pt)** trovare una sottosequenza (strettamente) decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.2(1pt)** una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice  $i$  tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l' $i$ -esimo, sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.3(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 52. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.4(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

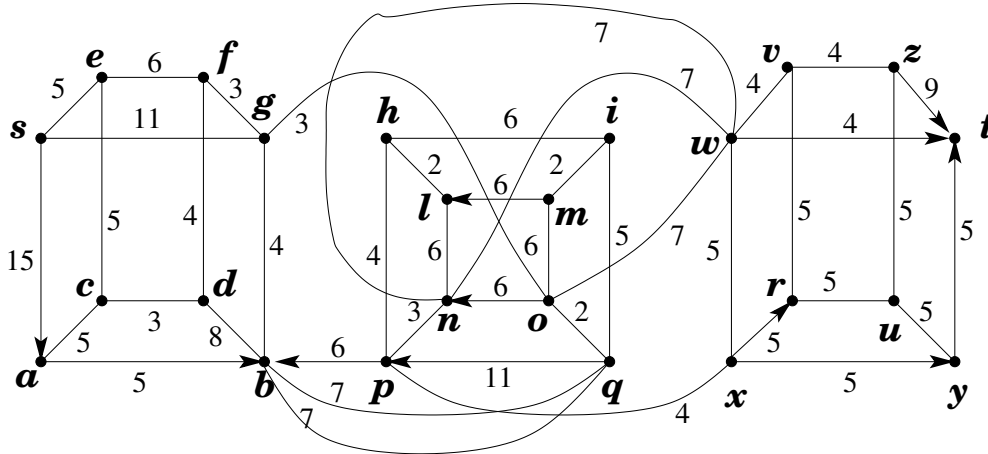
**5.5(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

**5.6(2pt)** fornire un minimo numero di sottosequenze (non-strettamente) crescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente		
Z-sequenza		
decrescente con 52		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

**Problema 6 (15 punti):**

Si consideri il grafo  $G$ , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 6.1.(2pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo  $G$  è planare oppure no; (2) se il grafo  $G'$  ottenuto da  $G$  rimpiazzando l'arco  $go$  con l'arco  $gl$  è planare oppure no.
- 6.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo  $G$ ; (1) il grafo  $G'$ .
- 6.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di  $G$  di peso minimo.
- 6.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime:  $fg$ ,  $wx$ ,  $ln$ .
- 6.5.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 6.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da  $s$  e determinare le distanze di tutti i nodi da  $s$ .
- 6.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da  $s$ . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 6.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .
- 6.9.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo  $s$  al nodo  $t$ .