

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 3 luglio 2014 Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (3+1+2+1=7 punti):

Riforniamo $n_C = 3$ clienti di acqua da $n_S = 2$ sorgenti. Le richieste dei 3 clienti, riportate in ettolitri nella seguente tabella, devono essere assolutamente evase:

Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
150	80	210

Le disponibilità (in ettolitri) dalle 2 sorgenti sono le seguenti:

Sorgente 1	Sorgente 2
250	300

Si noti che $250 + 300 = 550 > 440 = 150 + 80 + 210$, ed è quindi lecita l'aspettativa di evadere ogni richiesta. I costi unitari di trasporto, come da seguente tabella, sono a carico dei clienti.

	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Sorgente 1	10	15	20
Sorgente 2	8	14	7

Poiché non vogliamo disaffezionare nessun cliente, vogliamo organizzare il trasporto in modo che il massimo costo di trasporto unitario sostenuto da un cliente nel suo complesso, risulti il più basso possibile.

((3pt)) Fornire un modello di PL per tale problema specifico.

((1pt)) Fornire un modello di PL generale che si riferisca ad un numero n_C arbitrario di clienti ed ad un numero n_S arbitrario di sorgenti. Si continui ad assumere che la portata complessiva delle sorgenti sia sufficiente ad evadere tutte le richieste.

((2pt)) Esisterà sempre una soluzione ottima che è anche intera? Fornire argomentazione a supporto (dimostrazione) oppure controesempio.

((1pt)) Proporre un modello generale che valga nel caso in cui la disponibilità alle sorgenti non basti ad evadere tutta la richiesta. In questo caso, vorremmo collocare la massima quantità d'acqua possibile, e, soggetto a ciò, vorremmo poi minimizzare il massimo costo complessivo di trasporto sostenuto da un singolo cliente.

Problema 2 (3+1+3=7 punti):

Ad ogni casella (i, j) , $i, j = 0, \dots, n-1$ di una scacchiera $n \times n$ è associato un costo $c_{i,j} \in \mathbf{N}$. Quando sulla casella (i, j) viene collocata una torre, si incorre nel costo $c_{i,j}$ ad essa associato. Vogliamo collocare delle torri sulla scacchiera in modo da minimizzare la somma dei costi ma sotto il vincolo che ogni cella risulti sotto il controllo di almeno una torre. Una torre controlla una cella se la occupa oppure se è collocata su una casella della stessa riga o colonna.

((3pt)) Si formuli questo problema come un problema di programmazione lineare intera (PLI).

((1pt)) Si consideri la versione di questo problema dove in input viene inoltre fornito un numero naturale k e viene richiesto di collocare esattamente k torri. Si mostri che la versione originale di questo problema non potrà certo rivelarsi più difficile di quella con la prescrizione sul numero esatto di torri da impiegare.

((2+1pt)) Si descriva un algoritmo che restituisca sempre una soluzione ammissibile ottima per la versione originale di questo problema. Dimostra che la soluzione restituita dal tuo metodo è sempre

ottima.

Problema 3 (8 punti):

$$\begin{aligned} & \max \quad 2 + 22x_1 - 10x_2 - 12x_3 \\ & \begin{cases} 10x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ -10x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.1(1pt) Portare il problema in forma standard.

3.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

3.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario.

3.4(1pt) Scrivere il tableau per una soluzione ammissibile di base al problema originario.

3.5(1pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

3.6(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei due vincoli? (Per piccole variazioni.)

3.7(1pt) Fornire una soluzione primale, parametrizzata negli incrementi, che evidenzia la nostra disponibilità a pagare tale prezzo.

3.8(1pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tale prezzo?

Problema 4 (6 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
66	58	56	51	59	48	37	31	60	40	14	55	34	46	21	19	57	54	62	39	20	52	36	27	53

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 60. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

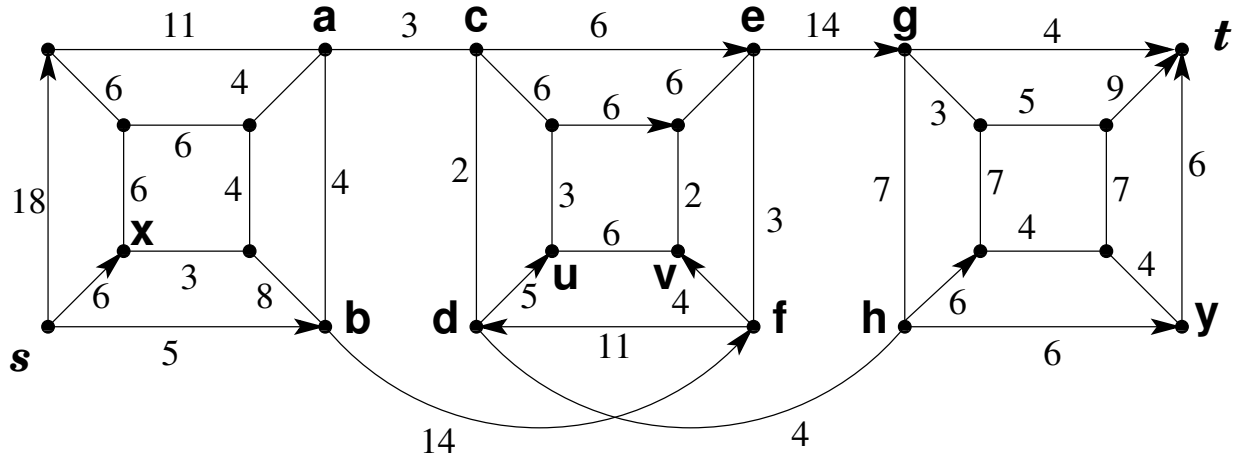
4.5(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.6(1pt) fornire un minimo numero di sottosequenze non-decrescenti tali che ogni elemento della sequenza originale in input ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescnte		
Z-sequenza		
decrescnte con 60		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Problema 5 (12 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 5.2.(1pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.3.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.4.(1pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: sx , uv , yt .
- 5.5.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 5.6.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.7.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .
- 5.9.(2pt) Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo sia certificato (1pt) del fatto che il grafo ottenuto a seguito della rimozione è bipartito sia certificato (1pt) del fatto che la rimozione di un numero minore di archi non poteva bastare.

Problema 6 (6 punti):

Si ricerchino soluzioni algoritmiche per il seguente modello della Ricerca Operativa.

KNAPSACK' variante del KNAPSACK classico con vincolo sul massimo numero di oggetti presi.

INPUT: Tre numeri naturali n, k, B ed un insieme di n oggetti descritti ciascuno da una coppia valore/peso, (v_i, p_i) per ogni $i = 1, \dots, n$.

OUTPUT: Trovare un sottoinsieme di al massimo k degli oggetti assegnati in input, a somma dei pesi non eccedente il budget assegnato B , e massimizzando il valore totale raccolto.

((1pt)) Si osservi come sia possibile ridurre il KNAPSACK classico alla versione KNAPSACK' di attuale interesse.

((1pt)) Se ne deduca che KNAPSACK' è NP-hard.

((1pt)) Definire una famiglia di (al più un numero pseudo-polinomiale di) sottoproblemi chiusa rispetto ad induzione ed atta a risolvere KNAPSACK'.

((1pt)) Fornire una ricorrenza risolutiva per i sottoproblemi della famiglia proposta.

((1pt)) Trattare i casi base.

((1pt)) Specificare come vada letto dalla tabella il valore della soluzione ottima e come essa possa poi essere ricostruita.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo**

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, né comunicare con i compagni.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi NOME, COGNOME e MATRICOLA per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
- 4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.