Esame di Ricerca Operativa - 24 luglio 2012
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (8 punti):
Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un guadagno che viene ottenuto se il robot passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare il guadagno complessivo raccolto con la traversata.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

1.5(2pt) Quale é il massimo guadagno raccoglibile nella traversata da A–1 a G–9?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che consegnano questo guadagno massimo?

svolgimento. La risposta alle prime due domande può essere reperita nella rispettiva cella della seguente tabella di programmazione dinamica, dove in ogni cella C, partendo da quelle in basso a destra, si é computato il numero di percorsi che vanno dalla cella C alla cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	250	149	80	36	14	14	14	4	•
B	101	69	44	22	•	•	10	4	1
C	32	25	22	22	16	11	6	3	1
D	7	3	•	6	5	5	3	2	1
E	4	3	2	1	•	2	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1	•	•	1
G	0	0	0	0	•	1	1	1	H

Per rispondere alle due seguenti domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il numero di percorsi che vanno dalla cella

A–1 alla cella C.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1	1	1	1	1	1	1	1	•
B	1	2	3	4	•	•	1	2	2
C	1	3	6	10	10	10	11	13	15
D	1	4	•	10	20	30	41	54	69
E	1	5	5	15	•	30	71	125	194
F	1	6	11	26	26	56	•	•	194
G	1	7	18	44	•	56	56	56	250

Ritrovare il valore 250 ci conforta. La risposta alla terza domanda è contenuta nella rispettiva cella di questa seconda tabella.
La quarta domanda richiede di combinare le informazioni provenienti dalle due tabelle: la risposta è ottenuta come prodotto dei due valori riportati nella cella di passaggio.

Per rispondere alle ultime due domande compilo un'ulteriore tabella, dove in ogni cella C, partendo da quelle in alto a sinistra, si computa il massimo valore di un percorso che va dalla cella A–1 alla cella C. Computiamo e riportiamo inoltre in piccolo, per ogni cella C, il numero di tali percorsi di massimo valore.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0_1	1_1	4_1	4_1	5_1	6_1	6_1	6_1	•
B	2_1	4_1	4_2	4_3	•	•	6_1	6_2	6_2
C	4_1	6_2	6_2	7_2	7_2	7_2	8_2	9_2	10_2
D	4_1	6_2	•	7_2	7_4	7_6	9_2	9_4	10_2
E	4_1	6_2	7_2	8_4	•	7_6	9_2	9_6	10_2
F	4_1	7_2	8_4	9_8	9_8	10_8	•	•	11_2
G	7_1	10_2	10_2	11_2	•	10_8	10_8	11_8	11_{10}

Leggendo i valori riportati nella cella G–9 scopriamo che il massimo valore raccoglibile dal robot lungo la sua traversata é di 11, e che esistono 10 diversi possibili percorsi per raccogliere questo valore.

Riportiamo quindi i risultati finali.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	250
B–3 → G–9	44
A–1 → F–6	56
passaggio per D–5	100
massimo valore	11
numero di max-val paths	10

Problema 2 (4 punti):

Gestiamo dei traghetti che raggiungono i porti sardi di Cagliari, Olbia, Sassari a partire dai porti di Civitavecchia, Genova, Piombino. Il guadagno netto in cui si incorre per un viaggio di andata e ritorno su ogni singolo tragitto è riportato nella seguente tabella:

	Civitavecchia	Genova	Piombino
Cagliari	2	6	4
Olbia	5	8	7
Sassari	3	6	5

I tre porti sardi possono ricevere al massimo 350, 270 e 160 navi, rispettivamente, e dai porti continentali possono partire al massimo 220, 470 e 180 navi, rispettivamente. Formulare come un problema di programmazione lineare il nostro desiderio di massimizzare i profitti.

svolgimento.

Per $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$, indichiamo con $x_{i,j}$ il numero di traghetti che vanno dal porto continentale i (1=Civitavecchia, 2=Genova, 3=Piombino) al porto sardo j (1=Cagliari, 2=Olbia, 3=Sassari). Quindi $x_{i,j} \geq 0$ e, a rigore, queste $x_{i,j}$ dovrebbero essere variabili a valori interi. Tuttavia, poichè il numero delle navi coinvolte è nel numero delle centinaia, si otterranno delle superbe approssimazioni dell'ottimo arrotondando per difetto la formulazione di PL che andiamo a costruire assumendo le $x_{i,j}$ possano assumere anche valori frazionari (rilassamento continuo). Commenteremo più sotto che in realtà la formulazione di PL cui naturalmente si perviene è quì in tutto fedele al problema da modellare.

Il nostro desiderio di massimizzare i profitti trova espressione nella funzione obbiettivo:

$$\max 2\,x_{1,1} + 6\,x_{1,2} + 4\,x_{1,3} + 5\,x_{2,1} + 8\,x_{2,2} + 7\,x_{2,3} + 3\,x_{3,1} + 6\,x_{3,2} + 5\,x_{3,3}\,.$$

Ma dobbiamo tenere conto dei vincoli sulla capienza in entrata nei porti sardi.

vincoli capienza in entrata nei porti sardi:

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 350\,, x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 270\,, x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 160\,,$$

e dei vincoli sulla capienza in uscita dai porti continentali.

vincoli capienza in uscita dai porti continentali:

$$x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} \leq 220\,, x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} \leq 470\,, x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} \leq 180\,.$$

É bene inoltre non dimenticare di esprimere i vincoli di non-negativitá.

$$x_{i,j} \geq 0 \text{ per ogni } i, j = 1, 2, 3.$$

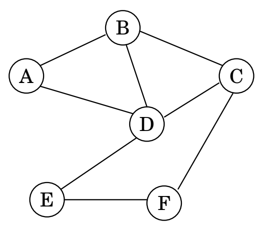
A rigore tali variabili $x_{i,j}$, in virtù del loro significato, sarebbero tenute ad essere intere. A quel punto la formulazione sarebbe però di Programmazione Lineare Intera (PLI) invece che non di Programmazione Lineare (PL) come richiesto dall'esercizio. In situazioni come queste si opta per la formulazione di PL dove, a fronte di un'approssimazione ed imprecisione spesso davvero minima, il problema puó essere risolto in tempo polinomiale e la sua buona caratterizzazione matematica ci consente di raccogliere diverse informazioni molto importanti (dualità e sensitività). In questo caso specifico poi, siamo di fronte ad un modello di trasporto classico per il quale è nota l'interezza del politopo ritagliato dalle diseguaglianze introdotte. La formulazione di PL proposta è pertanto in tutto fedele alla problematica combinatorica oggetto dell'esercizio.

Problema 3/ (2+2 punti):

Un MATCHING in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di archi $M \subseteq E$ tale che ogni nodo in V è estremo di al più un arco in M. Un matching di G è detto massimale se non esiste un altro matching di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{AB, DE\}$ e $\{DC, EF\}$ sono due matchings non-massimali mentre $\{BC, DE\}$ e $\{AB, DE, CF\}$ sono due matchings massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni arco e è associato un costo w_e, allora il costo di $X \subseteq E$ è espresso da $val(X) := \sum_{e \in X} w_e$.



	AB	AD	BC	BD	CD	CF	DE	EF
Costo	12	13	15	14	11	16	17	18

Siamo interessati a trovare matching massimali di costo minimo.

(2pt) Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

(2pt) Mostrare come sia più in generle possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un matching massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

svolgimento.

Abbiamo una variabile $x_i \in \{0, 1\}$ per $i = AB, AD, BC, BD, CD, CF, DE, EF$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Volendo minimizzare il costo del matching massimale, la funzione obbiettivo sarà:

$$\min 12\, x_{AB} + 13\, x_{AD} + 15\, x_{BC} + 14\, x_{BD} + 11\, x_{CD} + 16\, x_{CF} + 17\, x_{DE} + 18\, x_{EF}$$

Abbiamo due insiemi di vincoli.

matching. Dobbiamo imporre che la soluzione sia un matching. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono ai nodi.

nodo A: $x_{AB} + x_{AD} \leq 1$;

nodo B: $x_{AB} + x_{BC} + x_{BD} \leq 1$;

nodo C: $x_{BC} + x_{CD} + x_{CF} \leq 1$;

nodo D: $x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \leq 1$;

nodo E: $x_{DE} + x_{EF} \leq 1$;

nodo F: $x_{EF} + x_{CF} \leq 1$.

massimalità. Dobbiamo imporre che il matching sia massimale. Predisponiamo dei vincoli che corrispondono agli archi.

arco AB**:** $x_{AB} + x_{AD} + x_{BC} + x_{BD} \geq 1$;

arco AD**:** $x_{AD} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BD**:** $x_{BD} + x_{AB} + x_{BC} + x_{AD} + x_{CD} + x_{DE} \geq 1$;

arco BC**:** $x_{BC} + x_{AB} + x_{BD} + x_{CD} + x_{CF} \geq 1$;

arco CD**:** $x_{CD} + x_{BC} + x_{CF} + x_{AD} + x_{BD} + x_{DE} \geq 1$;

arco CF**:** $x_{CF} + x_{BC} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco DE**:** $x_{DE} + x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} + x_{EF} \geq 1$;

arco EF**:** $x_{EF} + x_{DE} + x_{CF} \geq 1$.

Nel caso di un grafo $G = (V, E)$ generico introduciamo una variabile $x_{uv} \in \{0, 1\}$ per ogni arco $uv \in E$, con l'idea che 1 significa "arco incluso nel matching massimale" e 0 significa "arco non incluso nel matching massimale".

Otteniamo quindi la seguente formulazione PLI per il problema del MAXIMAL-MATCHING di costo minimo.

$$\begin{aligned}
\min \sum_{uv \in E} C_{uv} x_{uv}\,, \\
\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \text{ per ogni nodo } v \in V, \\
x_{uv} + \sum_{e \in \delta(u) \setminus \{uv\}} + \sum_{e \in \delta(v) \setminus \{uv\}} \geq 1 \text{ per ogni arco } uv \in E, \\
x_{uv} \in \{0, 1\} \text{ per ogni arco } uv \in E.
\end{aligned}$$

Problema 4 (4 punti):

Ho uno zaino di capacità $B = 30$ e, soggetto al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B, intendo trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	47	27	28	48	9	5	17	24	52	17	4	22	22	15	5	13	23	13	20
valore	71	20	15	32	11	4	16	22	30	16	5	21	21	12	6	12	20	14	10

4.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

4.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

4.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

4.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 30, ottenendo:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	G	L	U	N	O	S	H	B	C
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	16	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che $17 + 17 = 34 > 30$. E quindi posso sempre preferire di prendere L piuttosto che non G, o U, o C. Analogamente, ad S e B posso sempre preferire N. Posso inoltre rinunciare ad O visto che eventualmente lo posso sostituire con N (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
30	32=16+11+5	30=17+9+4	L,E,M
25	26=11+6+4+5	23=9+5+5+4	E,Q,F,M
29	31=14+11+6	27=13+9+5	T,E,Q
21	22=11+6+5	18=9 +5+4	E,Q,M

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 10$, $x_4 = 20$, $x_5 = 28$ del seguente problema.

$$\max\ 3x_1 + 18x_2 + 36x_3 + 60x_4 + C_5x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_3 + x_4 \leq 20 \\ x_5 + x_6 \leq 28 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 40 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

5.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

5.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

5.3. **(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

5.4. **(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

5.5. **(2pt)** Dire per quali valori dei parametri C_5 e C_6 la soluzione assegnata è ottima indicando con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (12) + (10) & = 22 \leq 24 \\ (0) + (20) & = \mathbf{20} \leq 20 \\ (28) + (0) & = \mathbf{28} \leq 28 \\ (0) + (28) + (12) & = \mathbf{40} \leq 40 \\ (20) + (0) + (10) & = \mathbf{30} \leq 30 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min \; 24\,y_1 + 20\,y_2 + 28\,y_3 + 40\,y_4 + 30\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 3 \\ y_1 + y_5 \geq 18 \\ y_2 + y_4 \geq 36 \\ y_2 + y_5 \geq 60 \\ y_3 + y_4 \geq C_5 \\ y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} + y_4 = 3 \\ + y_5 = 18 \\ y_2 + y_5 = 60 \\ y_3 + y_4 = C_5 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 42, C_5 - 3, 3, 18)$. Dobbiamo ora verificare per quali valori di C_5 e C_6 questa soluzione duale di base è ammissibile. Le variabili duali sono tutte non negative per $C_5 \geq 3$, mentre per $C_5 < 3$ una variabile duale é negativa e la soluzione primale assegnata non é ottima. Ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6), almeno nel caso ancora da determinare di $C_5 \geq 3$.

Analisi del terzo vincolo:

$$y_2 + y_4 \geq 36$$

dove $y_2 = 42$ e $y_4 \geq 0$ é di necessità soddisfatto.

Resta da vedere il sesto vincolo

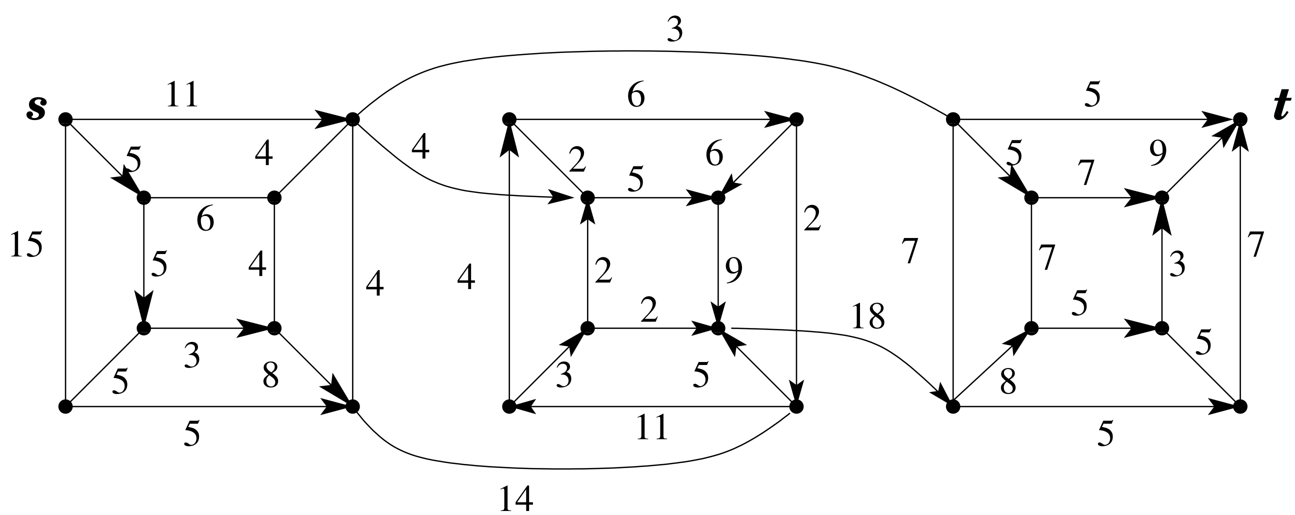
$$y_3 + y_5 \geq C_6$$

in corrispondenza della soluzione duale reperita $(0, 42, C_5 - 3, 3, 18)$, unica soluzione duale alla primale assegnata.

$$C_5 - 3 + 18 \geq C_6$$

possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima** se e solo se $C_5 \geq 3$ e $C_5 \geq C_6 - 15$ sono entrambe soddisfatte.

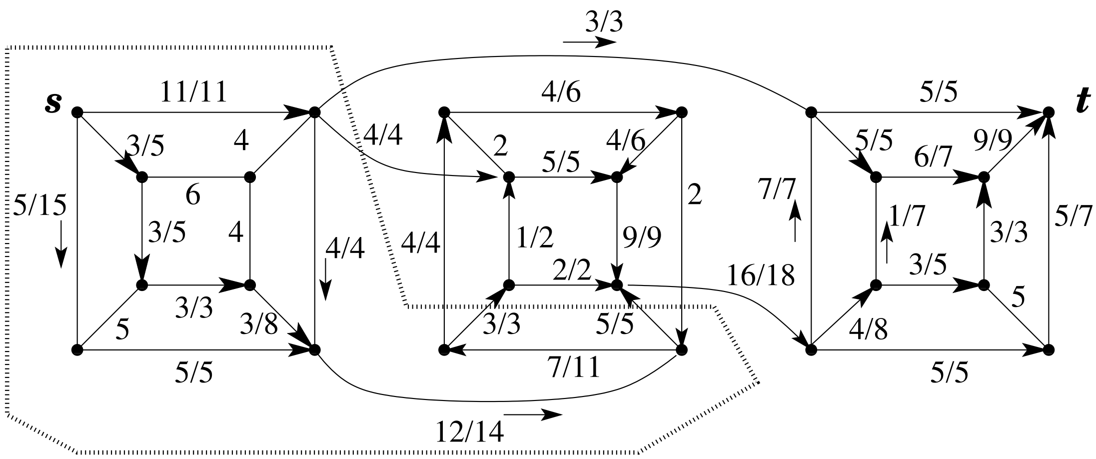
Problema 6 (4 punti):



6.1**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

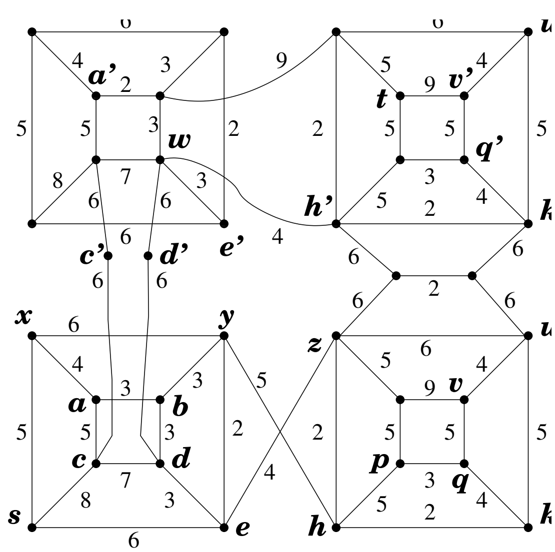
6.2**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 15 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 7 (12 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo G' ottenuto da G sostituendo l'arco $c'c$ con un arco $c'x$ e l'arco $d'd$ con un arco $d'y$ è planare oppure no. Se non planare, rimuovere il minimo numero di archi per planarizzarlo.

7.3.**(1+1pt)** Dire, certificandolo, se G e G' è bipartito oppure no. Ove non bipartito, rimuovere il minimo numero di archi per bipartizzarlo. (Certificando che la rimozione di quel numero di archi è sufficiente a renderlo bipartito ed argomentando che esso é anche necessario).

7.4.**(1+1pt)** Nel grafo G, trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.5.**(1pt)** Nel grafo G, trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.6.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.7.**(1+1pt)** Per i seguenti archi dire, certificandolo, in quale categoria ricadano (contenuti in ogni/nessuna/qualcuna-ma non-tutte le soluzioni ottime): zu, $h'w$, xy. Trova un arco della categoria mancante e certificane l'appartenenza a detta categoria.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$M(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$F(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$Q(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$E(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·
$(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·
$(13,14)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	19	22	21	·	·	25	26	·	·	30	31	·	·	31
$(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	·	25	26	23	22	30	31	28	29	31
$(17,16)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32
$(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	19	22	21	18	21	25	26	23	22	30	31	28	29	32

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	M	F	Q	E	R	T	P	L	N	H
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	14	12	16	21	22