NOME: .... COGNOME: ....

MATRICOLA: .... FIRMA: ....

Esame di Ricerca Operativa - 18 giugno 2015
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona

Problema 1 (4 punti):

Una casa editrice deve effettuare il trasporto di libri da 3 depositi (D_1, D_2, D_3) a 4 librerie (L_1, L_2, L_3, L_4). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto da ciascun deposito a ciascuna libreria, le quantità di libri disponibili nei depositi e quelle richieste dalle singole librerie:

	L_1	L_2	L_3	L_4	Disponibilità
D_1	$0,5$	$0,8$	1	$1,5$	50
D_2	$0,7$	2	$0,8$	$0,5$	100
D_3	1	$0,5$	$1,5$	$0,6$	40
Richieste	30	70	45	45	

Ad esempio, il deposito D_1 ha una disponibilità di 50 libri e la libreria L_3 ne richiede almeno 45; inoltre, trasportare un libro da D_1 a L_4 costa $1,5$ euro. Poichè i costi di trasporto sono a carico delle librerie, l'obiettivo è quello di minimizzare il massimo fra i costi di trasporto sostenuti da ciascuna libreria e nel contempo soddisfare i vincoli di domanda e di offerta. Formulare come un problema di PL.

Problema 2 (3 punti):

Il Ministero della Sanità ha in progetto la costruzione di ospedali ortopedici specializzati, che nel raggio di 200 km siano in grado di servire le seguenti città: Latina, Lecce, Matera, Napoli, Potenza, Salerno e Roma. Nel seguito, per ogni città, sono elencate quelle situate a una distanza inferiore ai 200 km:

Latina: Latina, Napoli, Roma;

Lecce: Lecce, Matera;

Matera: Lecce, Matera, Potenza;

Napoli: Latina, Napoli, Potenza, Salerno;

Potenza: Matera, Napoli, Potenza, Salerno;

Salerno: Napoli, Potenza, Salerno;

Roma: Latina, Roma.

Ad esempio, se un ospedale venisse costruito a Napoli, esso sarebbe in grado di servire anche le città di Latina, Potenza e Salerno, che si trovano a una distanza da Napoli inferiore a 200 km. Si vuole decidere in quali delle 7 città costruire gli ospedali, in maniera tale che ogni città abbia almeno un ospedale ad una distanza non superiore a 200 km.

Si formuli come un modello di Programmazione Lineare Intera (PLI) il problema di minimizzare il numero di ospedali da costruire.

Problema 3 (1+1+2+1+2=7 punti): Dato il problema di programmazione lineare $P(t)$ nei parametri $t = (t_1, t_2, t_3)$:

$$P(t)\begin{cases} \min_x z = & 4\,x_1 & -7\,x_2 & +4\,x_3 & +5\,x_4 & & \\ & 6\,x_1 & +4\,x_2 & +6\,x_3 & -3\,x_4 & \leq & 2+t_1 \\ & 7\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & +4\,x_4 & \geq & 3+t_2 \\ & 3\,x_1 & -2\,x_2 & -x_3 & +6\,x_4 & = & 5+t_3 \\ & x_1, & & x_3 & & \geq & 0 \end{cases}$$

3.1(1pt) costruire il duale $D(t)$ di $P(t)$;

3.2 (1pt) scrivere tutte le relazioni di scarto complementare che legano $P(t)$ e il suo duale;

3.3 (2pt) sapendo che la soluzione ottima di $P(0)$ è $\overline{x}^T = [0, 3/2, 0, 4/3]$, determinare una soluzione ottima del duale $D(0)$ applicando il teorema degli scarti complementari;

3.4 (1pt) esplicitare i prezzi ombra che vanno a moltiplicare t_1, t_2 e t_3 nell'espressione della funzione obiettivo $z(t)$ all'ottimo ed in un intorno di $t = 0$;

3.5 (2pt) per ogni $i = 1, 2, 3$, fornire i limiti a_i e b_i tali che il prezzo ombra di t_i sopra espresso ritenga validità purchè $a_i \leq t_i \leq b_i$ (con $t_j = 0 \; \forall j \neq i$).

Problema 4 (6 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
peso	14	13	15	6	13	3	11	16	4	14	2	46	41	44	34
valore	50	63	60	33	30	13	60	66	20	60	11	66	60	20	70

4.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

4.2 (1pt) e nel caso $B = 33$?

4.3 (1pt) e nel caso $B = 28$?

4.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

4.5 (2pt) e se l'oggetto G non fosse più disponibile, quale sarebbe allora la soluzione ottima per $B = 26, 28, 33, 36$?

Con oggetto G disponibile:

B	max val	peso	quali prendere
36			
33			
28			
26			

Senza oggetto G:

B	max val	peso	quali prendere
36			
33			
28			
26			

Problema 5 (7 punti):

Un robot R, inizialmente situato nella cella A–1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella G–9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	R	1	3	0	1	1	0	0	•
B	2	2	0	0	•	•	0	0	0
C	2	2	0	1	0	0	1	1	1
D	0	0	•	0	0	0	1	0	0
E	0	0	1	1	•	1	0	0	0
F	0	1	1	1	0	1	•	•	1
G	3	3	0	1	•	0	0	1	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) é presente un valore intero che esprime un pedaggio che viene pagato dal robot se passa per quella cella. Potremmo quindi essere interessati al minimizzare il costo complessivo della traversata.

5.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

5.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

5.3 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

5.4 (1pt) e se con partenza in A–1 ed arrivo in G–9 al robot viene richiesto di passare per la cella D–5?

5.5(1pt) Quale é il minimo costo di una traversata da A–1 a G–9?

5.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che comportano questo costo minimo?

consegna	numero percorsi
A–1 → G–9	
B–3 → G–9	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	
minimo costo	
numero di min-cost paths	

Problema 6 (15 punti):

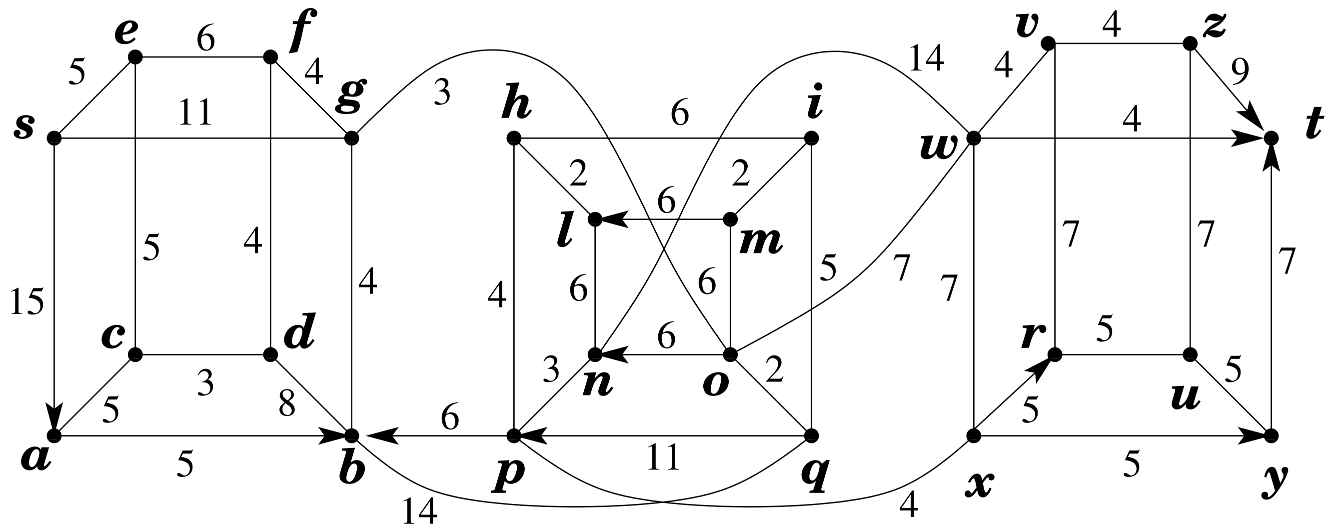
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

6.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gh è planare oppure no.

6.2.**(2pt)** Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G; (1) il grafo G'.

6.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg, wx, ln.



6.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

6.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:

Procedura da seguire per l'esame **-controllo**

1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico, né consultare libri o appunti, nè comunicare con i compagni.
3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito immediatamente dopo l'esame).

Procedura da seguire per ogni esercizio **-assegnazione punti**

1) La risoluzione completa degli esercizi deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
2) Per tutti i fogli consegnati oltre alla copertina, vi conviene che riportino anche essi Nome, Cognome e Matricola per scongiurare rischi di smarrimenti. In genere vi conviene consegnare tutto, tranne inutili ripetizioni.
3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.
4) Assicurarsi di fornire i certificati idonei ovunque richiesti.

Comunicazione esiti e registrazione voti **-completamento esame**

I voti verranno comunicati e resi disponibili tramite ESSE3. Dal 18 in sù i voti verranno registrati automaticamente a valle di un intervallo di tempo concessovi per eventualmente rifiutare il voto.