

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 22 giugno 2022**Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona**punti in palio: 61, con voto \geq punti + k , $k \geq 0$ **Problema 1 (7 punti):**

Un robot R , inizialmente situato nella cella A-1, deve portarsi nella sua home H situata nella cella I-10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	R	2	3	1	1	1	0	0	•	6
B	3	3	1	0	•	•	0	0	0	5
C	2	•	0	•	0	0	1	1	1	4
D	0	0	1	0	0	0	1	•	0	3
E	0	0	•	1	0	1	2	0	0	2
F	0	1	1	1	•	3	•	3	1	1
G	3	•	0	1	2	0	0	4	1	•
H	2	1	2	1	2	1	2	1	2	0
I	4	4	3	3	2	2	1	•	0	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A-3 alla cella A-4) ed il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A-3 alla cella B-3). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (•). Quanti sono i percorsi possibili? Inoltre, in ogni cella non occupata da un pacman (•) è presente un premio il cui valore è riportato nella cella stessa. Potremmo quindi essere interessati al massimizzare la somma dei valori dei premi raccolti lungo il percorso.

1.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A-1?

1.2 (1pt) e se la partenza è in B-3?

1.3 (1pt) e se con partenza in A-1 il robot deve giungere in F-6?

1.4 (1pt) e se con partenza in A-1 ed arrivo in I-10 al robot viene richiesto di passare per la cella D-5?

1.5(1pt) Quale è il massimo valore in premi raccogliabili lungo una traversata da A-1 a I-10?

1.6(2pt) Quanti sono i percorsi possibili che assicurino di portare a casa tale massimo valore?

Problema 2 (6 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = \text{CTATAGAGGTCACTATG}$ e $t = \text{ATGCAGCTAGGACTGT}$. Fare lo stesso con alcuni prefissi di s e t .

2.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t ?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune termini con 'T'?

2.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il prefisso $t_9 = \text{ATGCAGCTA}$ di t ?

2.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s_8 = \text{CTATAGAG}$ di s ?

2.5 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t_9 e s_8 ?

2.6 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t che abbia CCA come suffisso?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
termina con 'T'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		
tra s_8 e t_9		
con C C A come suffisso		

Problema 3 (16 punti):

$$\begin{aligned} & \max 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \left\{ \begin{array}{lll} 3x_1 & -x_2 & -2x_3 \leq 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 \leq 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 \geq 3 \\ & & x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- 3.1(1pt)** Portare in forma standard.
- 3.2(1pt)** Impostare il problema ausiliario.
- 3.3(1pt)** Risolvere il problema ausiliario all'ottimo.
- 3.4(1pt)** Ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario in forma standard dalla soluzione ottima di base del problema ausiliario.
- 3.5(1pt)** Impiegando l'origine come soluzione di base ovvia e di immediata computazione, si utilizzi la prova del 9 della PL per verificare la correttezza della soluzione ammissibile di base ottenuta.
- 3.6(1pt)** Anche se non ammissibile, si renda esplicita la soluzione duale di base associata a questo primo dizionario per la seconda fase.
- 3.7(2+1pt+1pt+1pt)** Risolvere il problema originario all'ottimo. I punti aggiuntivi vengono attribuiti se ad ognuno dei diversi pivot che dovrai compiere effettuerai esplicitamente una prova del 9: un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base primale ammissibile, un punto se almeno uno dei dizionari lo verifichi con la prima soluzione di base duale ammissibile, un punto se verifichi con almeno una soluzione tutti i dizionari visitati. Come ogni altra evidenza che date per ottenere punti, queste prove devono essere offerte in modo chiaro ed esplicito, e consiglio di incorniciare ogni vostra risposta che miri a diventare punti.
- 3.8(1+1pt)** rendere esplicita la soluzione duale ottima. Utilizzarla per dimostrare l'ottimalità della soluzione primale.
- 3.9(1pt)** Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di variazione in ciascuno dei termini noti dei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)
- 3.10(2pt)** Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Problema 4 (10 punti):

Una stringa è detta antipalindroma quando è vuota oppure il primo e l'ultimo carattere differiscono e, quando si rimuova da essa il primo e l'ultimo carattere, la stringa così ottenuta sia antipalindroma. Le stringhe antipalindrome sono quindi tutte di lunghezza pari. Si consideri il problema di dover ricercare la più lunga sottosequenza antipalindroma entro una stringa. Esempio: ABABAB in ABABBBABA. Per trovare la più lunga sottosequenza antipalindroma in una stringa $s = s_1 s_2 \cdots s_n$, si è definita la seguente famiglia di sottoproblemi:

per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ con $i \leq j$, sia $P[i, j]$ = la massima lunghezza di una sottosequenza antipalindroma di $s_{i,j} = s_i s_{i+1} \dots s_j$.

4.1.(3pt) si dia la ricorrenza sulla famiglia dei sottoproblemi $P[i, j]$.

4.2.(2pt) si dia la base atta al calcolo di detta ricorrenza.

4.3.(2+1+2pt) ci si organizzi per trovare ((2pt)) una sottosequenza antipalindroma di massima lunghezza in:

AAAAAAAAAAABBBABBABBABBBABBABBBAAABBBBBBBBBBB

attenzione: si noti che riempire l'intera tabella di programmazione dinamica ($45 \cdot 44/2 = 990$ sarebbe del tutto fuori luogo all'esame). É quindi il caso di adottare un approccio meno sistematico, che eviti di risolvere tutti i sottoproblemi ma affronti solo quelli che si rilevano via via di pertinenza. Riesci ad individuare ed enunciare (1pt) un lemma che ti aiuta molto a ridurre le possibilità (ad esempio nel caso dell'istanza data sopra se ne mangia una gran parte prima ancora che tu debba cominciare a clonarti per inseguire il non-determinismo. Riesci a dimostrarlo formalmente (2pt)?

ci si organizzi per trovare ((2pt)) una sottosequenza antipalindroma di massima lunghezza in

Problema 5 (7 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali (la prima riga serve solo ad indicizzarla).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
58	50	48	43	47	36	29	23	52	32	6	47	26	38	13	11	49	46	54	31	12	44	28	19	45

5.1(1pt) trovare una sottosequenza (strettamente) decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza, esclusi al più il primo e l' i -esimo, sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 52. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare i primi 4 elementi. Specificare quanto è lunga e fornirla.

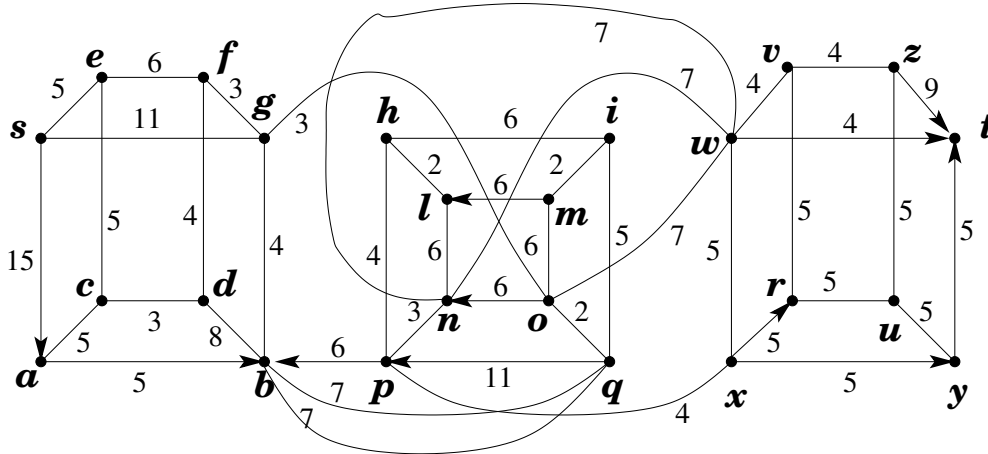
5.5(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile ma eviti di utilizzare gli elementi dal 13-esimo a 16-esimo. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.6(2pt) fornire un minimo numero di sottosequenze (non-strettamente) crescenti tali che ogni elemento della sequenza fornita ricada in almeno una di esse. Specificare quante sono e fornirle.

tipo sottosequenza	opt val	soluzione ottima
decrescente		
Z-sequenza		
decrescente con 52		
evita i primi 4		
evita da 13-mo a 16-mo		
minima copertura		

Problema 6 (15 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 6.1.(2pt) Dire, certificandolo, (1) se il grafo G è planare oppure no; (2) se il grafo G' ottenuto da G rimpiazzando l'arco go con l'arco gl è planare oppure no.
- 6.2.(2pt) Fornendo i certificati del caso, dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda bipartito: (1) il grafo G ; (1) il grafo G' .
- 6.3.(1pt) Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.
- 6.4.(3pt) Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: fg , wx , ln .
- 6.5.(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 6.6.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s .
- 6.7.(1pt) Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s . (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 6.8.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 6.9.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .