Esame di Ricerca Operativa - 9 settembre 2015
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (21 punti):
Una ditta necessita di personale come da seguente calendario delle presenze.

mese	GEN	FEB	MAR	APR	MAG	GIU-DIC
presenze richieste	8	4	6	8	4	nessuna

I costi di ogni singolo contratto con l'agenzia di lavoro interinale dipendono dalla durata delle stesso, come da seguente tabella.

durata	1 mese	2 mesi	3 mesi
costo totale	700	900	1300

La ditta vuole minimizzare il costo complessivo dei contratti, coprendo peró ogni necessitá di personale anticipata nel calendario delle presenze.

(1pt) si dimostri che, dato il tariffario dell'agenzia di lavoro interinale sopra riportato, si potrebbe presentare il caso di calendari delle presenze per i quali convenga, in certi mesi, tenere del personale sotto contratto pur non avendo in programma delle mansioni per lo stesso.

(3pt) si fornisca una formulazione di PLI per il problema di minimizzare il costo complessivo dei contratti. Il modello deve consentire anche soluzioni con piante organico eccedenti il calendario delle presenze di partenza; ci interessa solo minimizzare i costi.

(1pt) quantomeno per quanto riguarda il calendario delle presenze, si renda indipendente dai dati (astragga) il modello sviluppato al punto precedente. Si assuma cioè che il calendario delle presenze sia rappresentato da 12 parametri $C_1, \ldots, C_{12}$ non noti a priori, e si scriva il modello in termini di questi, supportando quindi quantomeno questo grado di generalità.

(4pt) Si consideri la seguente famiglia di problemi:
per ogni mese $i = 1, \ldots, 12$, per ogni numero di presenze di partenza **g**ratuite da **un** mese g_1, e da **due** mesi g_2, con $g_1, g_2, C_{i+1} - g_2, C_i - g_1 - g_2 \geq 0$

sia $P[i, g_1, g_2] =$ minimo costo per coprire il calendario $C_i - g_1 - g_2, C_{i+1} - g_2, C_{i+2}, \ldots, C_{12}$,

Su questo spazio di problemi, organizza un algoritmo di programmazione dinamica per computare una soluzione ottima, di costo $P[1, 0, 0]$. Viene richiesto di specificare con chiarezza solamente i seguenti due aspetti:

(3pt) la ricorrenza per il computo di $P[i, g_1, g_2]$;
(1pt) gestione dei casi base.

(12pt) Una soluzione ottima del problema potrebbe essere la seguente:

(*) in gennaio fare partire 4 contratti trimestrali e 4 da mese singolo, in marzo fare partire 2 contratti trimestrali, in aprile fare partire 2 contratti bimestrali e 4 da mese singolo.

Questa soluzione è certamente ammissibile per il problema del presente esercizio, ed è quindi bene essa risulti ammissibile anche per la formulazione di PLI da te proposta per lo stesso, qui sopra al secondo punto dell'esercizio. Essa deve pertanto essere ammissibile anche per il rilassamento frazionario (ossia quando ignori i vincoli di interezza e ti ritrovi con un problema di PL) della tua formulazione di PLI. Sospettiamo che tale problema di PL (il rilassamento) possa ammettere sempre soluzioni ottime intere. Ti chiediamo pertanto di verificare se la soluzione (*) data qui sopra non sia ottima anche per il rilassamento frazionario della tua formulazione. Per giocare questa verifica converrà avvalersi degli scarti complementari, ed è questo il percorso che ti chiediamo qui di svolgere.

(1pt) verificare l'ammissibilità della soluzione (*);

(1pt) verificare che la (*) è una soluzione di base;

(1pt) la (*) è una soluzione di base degenere o non-degenere? Argomentare la risposta;

(1pt) scrivere il duale della formulazione rilassata;

(1pt) impostare le condizioni degli scarti complementari;

(1pt) siamo sicuri che esista una soluzione di base del duale che soddisfi gli scarti complementari con la (*)? E chi ci garantisce che essa sia unica?

(1pt) computare una soluzione duale che soddisfi gli scarti complementari con la (*);

(1pt) verifica se questa soluzione duale è ammissibile. Cosa dovresti dedurre dall'esito di questa verifica se la (*) fosse davvero una soluzione ottima del problema intero?

(2pt) su quale variabile primale ti suggerisce di spingere il vincolo violato dalla soluzione duale? Ma la (*) è davvero una soluzione ottima del problema intero o puoi ora proporne una migliore?

(2pt) ripercorrere alcuni dei passi sopra per andare a verificare se le soluzione ottime del problema intero sono anche soluzioni ottime del problema frazionario.

svolgimento.

(1pt) Il modo ottimo per esaudire al seguente calendario di presenze

mese	GEN	FEB	MAR	APR-DIC
presenze richieste	1	0	1	nessuna

è di stipulare un contratto trimestrale in gennaio, per un costo totale di 1300 euro. A febbraio si avrà quindi un eccesso di organico che ci consentirà di risparmiare 100 euro.

(3pt) Si introducano le seguenti variabili a valori interi,

a_1, a_2, a_3 = numero di contratti avviati a gennaio per 1,2,3 mesi.
b_1, b_2, b_3 = numero di contratti avviati a febbraio per 1,2,3 mesi.
c_1, c_2, c_3 = numero di contratti avviati a marzo per 1,2,3 mesi.
d_1, d_2 = numero di contratti avviati a aprile per 1,2 mesi.
e_1 = numero di contratti avviati a maggio per 1 mese.

La formulazione richiesta è la seguente.

$$\min\ 700\,(a_1+b_1+c_1+d_1+e_1)+900\,(a_2+b_2+c_2+d_2)+1300\,(a_3+b_3+c_3)$$

$$\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 \geq 8 \\
a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 \\
a_3 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 \geq 6 \\
b_3 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 \geq 8 \\
c_3 + d_2 + e_1 \geq 4 \\
a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, e_1 \geq 0, INTERI
\end{cases}$$

(1pt) Per separare (astrarre) il modello dai dati, si faccia riferimento ad essi come parametri il cui valore possa dipendere dall'istanza (e quindi possa non essere noto quando si elabora il modello). Il "modello astratto" è il seguente.

$$\begin{aligned} \min\ 700\,(a_1+b_1+c_1+d_1+e_1+f_1+g_1+h_1+i_1+j_1+l_1+m_1)+ \\ 900\,(a_2+b_2+c_2+d_2+e_2+f_2+g_2+h_2+i_2+j_2+l_2)+ \\ 1300\,(a_3+b_3+c_3+d_3+e_3+f_3+g_3+h_3+i_3+j_3) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 \geq C_1 \\ a_2+a_3+b_1+b_2+b_3 \geq C_2 \\ a_3+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3 \geq C_3 \\ b_3+c_2+c_3+d_1+d_2+d_3 \geq C_4 \\ c_3+d_2+d_3+e_1+e_2+e_3 \geq C_5 \\ d_3+e_2+e_3+f_1+f_2+f_3 \geq C_6 \\ e_3+f_2+f_3+g_1+g_2+g_3 \geq C_7 \\ f_3+g_2+g_3+h_1+h_2+h_3 \geq C_8 \\ g_3+h_2+h_3+i_1+i_2+i_3 \geq C_9 \\ h_3+i_2+i_3+j_1+j_2+j_3 \geq C_{10} \\ i_3+j_2+j_3+l_1+l_2 \geq C_{11} \\ j_3+l_2+m_1 \geq C_{12} \\ a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3,e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3,g_1,g_2,g_3,h_1,h_2,h_3,i_1,i_2,i_3,j_1,j_2,j_3,l_1,l_2,m_1 \geq 0, INT \end{cases}$$

In realtà, per poter proporre un modello più compatto e leggibile, converrà uniformare il nome delle variabili definendo $x_{i,j}$ come il numero di contratti di j mesi con partenza al mese i. La formulazione può ora essere scritta in modo più compatto come segue.

$$\min\ 700\sum_{i=1}^{12} x_{i,1} + 900\sum_{i=1}^{11} x_{i,2} + 1300\sum_{i=1}^{10} x_{i,3}$$

$$\begin{cases} x_{1,1}+x_{1,2}+x_{1,3} \geq C_1 \\ x_{1,2}+x_{1,3}+x_{2,1}+x_{2,2}+x_{2,3} \geq C_2 \\ x_{i-2,3}+x_{i-1,2}+x_{i-1,3}+x_{i,1}+x_{i,2}+x_{i,3} \geq C_i \quad \text{per } i=3,4,\ldots,10 \\ x_{9,3}+x_{10,2}+x_{10,3}+x_{11,1}+x_{11,2} \geq C_{11} \\ x_{10,3}+x_{11,2}+x_{12,1} \geq C_{12} \\ x_{i,j} \geq 0, INTERI \end{cases}$$

Si noti come sarebbe ora divenuto semplice (e naturale), astrarre ulteriormente sul numero dei mesi (chiamiamoli periodi), e sul tariffario della ditta di lavoro interinale.

(3pt) la ricorrenza che definisce il valore di $P[i,g_1,g_2]$ in funzione dei valori di problemi più piccoli esprime la scelta ottima su quanti contratti di 1,2 o 3 mesi fare **p**artire col mese i:

$$P[i,g_1,g_2] = \min\{700\,p_1, 900\,p_2 + 1300\,p_3 + P[i+1, g_2+p_2, p_3] \mid C_i \leq g_1+g_2+p_1+p_2+p_3\}$$

(1pt) con caso base per $i=12$, dove la scrittura sopra perda di validità, e si utilizzerà invece:

$$P[12, g_1, g_2] = 700(C_{12} - g_1 - g_2)$$

La formulazione rilassata (problema di PL) è la seguente.

$$\min\ 700\,(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1) + 900\,(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) + 1300\,(a_3 + b_3 + c_3)$$

$$\begin{cases}
a_1 + a_2 + a_3 \geq 8 \\
a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 \\
a_3 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 \geq 6 \\
b_3 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 \geq 8 \\
c_3 + d_2 + e_1 \geq 4 \\
a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, e_1 \geq 0
\end{cases}$$

La soluzione (*) proposta dal testo risulta codificata come:
$a_1 = 4$, $a_3 = 4$, $c_3 = 2$, $d_1 = 4$, $d_2 = 2$, $a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = e_1 = 0$.
Essa ha costo $5600 + 1800 + 7800 = 15200$.
(1pt) verifichiamone l'ammissibilità:

$$\begin{cases}
4 + 0 + 4 = 8 \geq 8 \\
0 + 4 + 0 + 0 + 0 = 4 \geq 4 \\
4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 6 \geq 6 \\
0 + 0 + 2 + 4 + 2 = 8 \geq 8 \\
2 + 2 + 0 = 4 \geq 4
\end{cases}$$

I vincoli sono tutti soddisfatti e le variabili sono tutte non-negative, da cui l'ammissibilità. Si noti come i vincoli sono tutti soddisfatti ad eguaglianza, e pertanto non fanno scattare le corrispondenti condizioni di scarti complementari che impongono la nullità dei corrispondenti moltiplicatori.

(1+1pt) verifichiamo che la (*) è soluzione di base non-degenere: la (*) ha 5 variabili non nulle (si noti che le varibili di slack sono tutte nulle), proprio quanti sono i vincoli della formulazione proposta. Ne consegue che, se essa è di base, allora è di base non-degenere. Inoltre, per verificare se essa sia di base, basterà verificare che tutti i valori delle variabili non-nulle sono forzati una volta che siano state fissate a zero le variabili nulle. In effetti, dopo aver assunto $a_2 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = c_2 = e_1 = 0$, e dopo aver richiesto che tutti i vincoli siano soddisfatti ad eguaglianza (per la nullità delle variabili di slack), otteniamo $a_3 = 4$ dal vincolo 2, quindi $a_1 = 4$ dal vincolo 1 e $c_3 = 2$ dal vincolo 3; poi $d_2 = 2$ dal vincolo 5 e infine $d_1 = 4$ dal vincolo 4.

(1pt) scriviamo il problema duale:

$$
\max\ 8\,y_1 + 4\,y_2 + 6\,y_3 + 8\,y_4 + 4\,y_5
$$
$$
\begin{cases}
\begin{array}{lllllrr}
y_1 & & & & & \leq & 700 \\
y_1+ & y_2 & & & & \leq & 900 \\
y_1+ & y_2+ & y_3 & & & \leq & 1300 \\
 & y_2 & & & & \leq & 700 \\
 & y_2+ & y_3 & & & \leq & 900 \\
 & y_2+ & y_3+ & y_4 & & \leq & 1300 \\
 & & y_3 & & & \leq & 700 \\
 & & y_3+ & y_4 & & \leq & 900 \\
 & & y_3+ & y_4+ & y_5 & \leq & 1300 \\
 & & & y_4 & & \leq & 700 \\
 & & & y_4+ & y_5 & \leq & 900 \\
 & & & & y_5 & \leq & 700
\end{array} \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

(1pt) impostare le condizioni di scarti complementari: come osservato sopra, nessuna delle y è congelata a 0 dato che tutti i vincoli primali sono soddisfatti ad eguaglianza. L'altro gruppo di condizioni è invece produttivo: poichè $a_1, a_3, c_3, d_1, d_2 > 0$ allora sono soddisfatti ad eguaglianza i vincoli 1,3,9,10,11.

(1pt) poichè la (*) è soluzione di base per il primale, deve esistere una soluzione per il duale che rispetti con essa gli scarti complementari. Tale soluzione del duale deve poi essere unica poichè la (*) è non-degenere.

(1pt) computo della soluzione duale che soddisfa gli scarti complementari con la (*): $y_1 = 700$ dal vincolo 1, $y_4 = 700$ dal vincolo 10, e quindi $y_5 = 200$ dal vincolo 11, poi $y_3 = 500$ dal vincolo 9, e infine $y_2 = 100$ dal vincolo 3.

(1pt) la soluzione duale gemellata alla (*) dagli scarti complementari non è ammissibile in quanto viola il vincolo 8 del problema duale dato che $y_3 + y_4 = 1200 > 900$. Questo significa che la soluzione (*) non è ottima per il rilassamente frazionario della nostra formulazione di PLI. Se la (*) fosse ottima per la nostra formulazione di PLI potremmo dedurne che il politopo del rilassamento non ha vertici interi e non ci apre quindi la via verso possibili algoritmi polinomiali per la soluzione del problema (contrariamente a quanto ci era parso legittimo sperare dato che abbiamo già individuato un primo algoritmo di PD).

(2pt) al vincolo 8 del duale corrisponde la variabile c_2 del primale, che è non-basic (nulla, in una soluzione di base non-degenere), e quindi, ad un eventuale tentativo del simplesso duale di ridurre la non-ammissibilità del vincolo 8, nel simplesso primale corrisponde la scelta di portare la variabile c_2 in base ed alzarne conseguentemente il valore. Otterremo un miglioramento effettivo immediato in quanto la (*) è non-degenere. Non abbiamo a disposizione i vari coefficienti di quella colonna, ma, andando ad esplorare come possa essere modificata la soluzione (*), introducendo contratti di categoria c_2, in seno al problema combinatorio originale, scopriamo che il seguente piano di modifica ridurrebbe effettivamente i costi:

modifica	variazione costo	fin dove resta ammissibile
$c_2+ = \varepsilon$	$+900\varepsilon$	$\varepsilon \leq \infty$
$d_1- = \varepsilon$	-700ε	$\varepsilon \leq 4$
$a_3- = \varepsilon$	-1300ε	$\varepsilon \leq 4$
$a_2+ = \varepsilon$	$+900\varepsilon$	$\varepsilon \leq \infty$
complessivo mossa	-200ε	$\varepsilon \leq 4$

Ora, scegliendo $\varepsilon = 4$, otteniamo la seguente soluzione intera (**) che mette in evidenza come la (*) non fosse una soluzione ottima del problema di PLI:

(**) $a_1 = 4$, $a_2 = 4$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2$, $d_2 = 2$, $a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = c_1 = d_1 = e_1 = 0$.

Essa ha costo 14400.

Sarà ora ottima per la formulazione PLI? E per la formulazione PL?

Gli scarti complementari forniscono un metodo sistematico efficiente per rispondere in generale quantomeno alla seconda domanda (quando la prima potrebbe tranquillamente essere coNP-completa). Rivediamoli in action nell'ultimo punto.

(2pt) Cominciamo con la verifica dell'ammissibilità anche per individuare quali vincoli siano soddisfatti ad eguaglianza.

$$\begin{cases} 4+ \quad 4+ \quad 0 & = 8 \geq 8 \\ \quad 4+ \quad 0+ \quad 0+ \quad 0+ \quad 0 & = 4 \geq 4 \\ \quad\quad 0 \quad + \quad 0+ \quad 0+ \quad 0+ \quad 4+ \quad 2 & = 6 \geq 6 \\ \quad\quad\quad 0 \quad + \quad 4+ \quad 2+ \quad 0+ \quad 2 & = 8 \geq 8 \\ \quad\quad\quad\quad 2 \quad + \quad 2 \quad +0 & = 4 \geq 4 \end{cases}$$

I vincoli sono tutti soddisfatti e le variabili sono tutte non-negative, da cui l'ammissibilità. Si noti come i vincoli sono tutti soddisfatti ad eguaglianza, e pertanto non fanno scattare le corrispondenti condizioni di scarti complementari che impongono la nullità dei corrispondenti moltiplicatori.

Molto credibile, e non così pertinente ora, possiamo verificare come in precedenza che la (**) è soluzione di base non degenere, quindi la strada dovrebbe essere spianata in discesa (unicità della soluzione duale ad essa associata dagli scarti complementari).

Poichè in (**) le variabili strettamente positive sono $a_1 = 4$, $a_2 = 4$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2$, e $d_2 = 2$, la soluzione duale è determinata dai vincoli 1,2,8,9, e 11 del problema duale messi ad eguaglianza. Dal vincolo 1, $y_1 = 700$; dal vincolo 2, $y_2 = 200$; combinando i vincoli 8 e 9, $y_5 = 1300 - 900 = 400$; dal vincolo 11, $y_4 = 500$; e dal vincolo 8, $y_3 = 400$.

La soluzione duale è stata univocamente ricostruita e quindi la soluzione primale era in effetti di base non-degenere.

La soluzione duale è non-negativa e soddisfa tutti i vincoli, quindi è ammissibile.

Pertanto, (**) è soluzione ottima per la formulazione di PL (rilassamento) e quindi anche per la formulazione di PLI, ossia per il problema oggetto dell'esercizio. Sembra confermata l'intuizione che dietro questo problema possa celarsi un politopo a vertici interi ed un algoritmo risolutore fortemente polinomiale.

Problema 2 (6 punti):

Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = ATTCTCACAATGCTTCTA$ e $t = ACTATCAGTCAACCTAT$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

2.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'C'?

2.3 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'G'?

2.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = T\,C\,A\,A\,C\,C\,T\,A\,T$ di t?

2.5 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il suffisso $s_8 = T\,G\,C\,T\,T\,C\,T\,A$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'C'		
parte con 'G'		
tra s e t_9		
tra s_8 e t		
contiene una 'G'		

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

```
s\t  a  c  t  a  t  c  a  g  t  c  a  a  c  c  t  a  t
-------------------------------------------------------
a   12 11 11 11 10  9  9  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   11 11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   11 11 11 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
c   11 11 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  4  3  2  1  0
t   10 10 10 10 10  9  8  8  8  7  6  5  4  3  3  2  1  0
c    9  9  9  9  9  9  8  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
a    9  8  8  8  8  8  8  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
c    8  8  7  7  7  7  7  7  7  7  6  5  4  3  2  2  1  0
a    8  7  7  7  6  6  6  6  6  6  6  5  4  3  2  2  1  0
a    7  7  7  7  6  6  6  5  5  5  5  5  4  3  2  2  1  0
t    6  6  6  6  6  5  5  5  5  4  4  4  4  3  2  1  1  0
g    6  6  6  5  5  5  5  5  4  4  4  4  4  3  2  1  1  0
c    6  6  6  5  5  5  4  4  4  4  4  4  4  3  2  1  1  0
t    5  5  5  5  5  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  1  0
t    4  4  4  4  4  4  4  4  4  3  3  3  3  3  2  1  1  0
c    3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  3  2  1  1  0
t    2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  2  1  1  0
a    1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  0  0
     0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi	12	A C T C A C A A C C T A
parte con 'C'	11	C T C A C A A C C T A
parte con 'G'	5	G C C T A
tra s e t_9	8	T C A A C C T A
tra s_8 e t	6	T G C C T A
contiene una 'G'	11	A C T A C A G T C T A

dove la risposta alla ultima domanda è stata ottenuta sommando al 5 nell'unica casella G-G della tabella sopra il 7 nell'ultima casella della seguente tabella, e sottraendo poi uno (per non conteggiare due volte il carattere 'G').

```
s\t     a  c  t  a  t  c  a  g
-----------------------------
     0  0  0  0  0  0  0  0  0
a    0  1  1  1  1  1  1  1  1
t    0  1  1  2  2  2  2  2  2
t    0  1  1  2  2  3  3  3  3
c    0  1  2  2  2  3  4  4  4
t    0  1  2  3  3  3  4  4  4
c    0  1  2  3  3  3  4  4  4
a    0  1  2  3  4  4  4  5  5
c    0  1  2  3  4  4  5  5  5
a    0  1  2  3  4  4  5  6  6
a    0  1  2  3  4  4  5  6  6
t    0  1  2  3  4  5  5  6  6
g    0  1  2  3  4  5  5  6  7
```

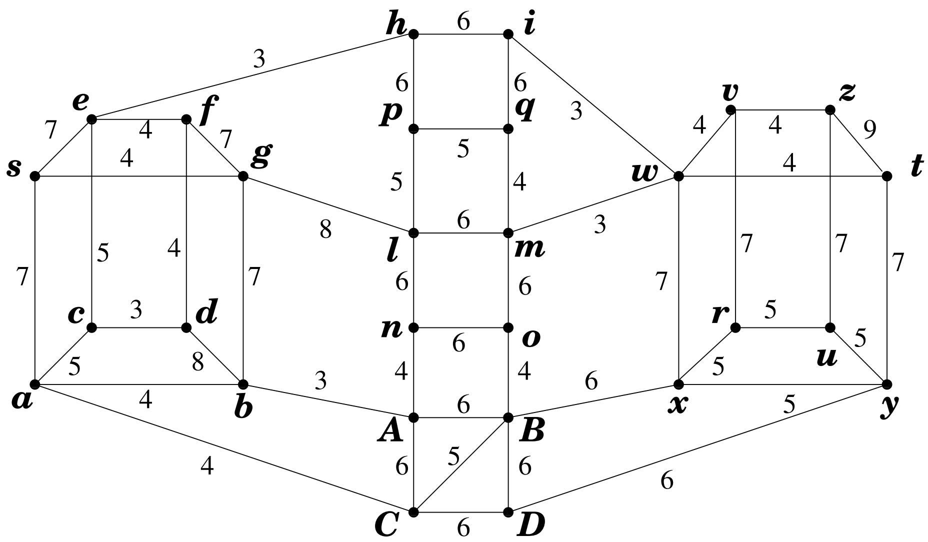
Problema 3 (2 punti):
Si costruisca un quadrato di Klee-Minty, ossia un problema di PL in forma standard con due variabili e due vincoli per il quale il metodo del simplesso, con la regola di scegliere sempre la variabile a costo ridotto maggiore per farla entrare in base, visiti tutte e quattro le soluzioni di base prima di trovare quella ottima.

Problema 4 (16 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.

4.1.**(1+2pt)** Dire, certificandolo, (1pt) se il grafo G è planare oppure no; (2pt) quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo planare.

4.2.**(2pt)** Dire, certificandolo, quale sia il minor numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito.

4.3.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di G di peso minimo.



4.4.**(3pt)** Per ciascuno dei seguenti archi dire, certificandolo, se esso appartenga a (tutte / a nessuna / a qualcuna ma non a tutte) le soluzioni ottime: *ln*, *no*, *ca*.

4.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.6.**(1pt)** Trovare un albero dei cammini minimi da s e determinare le distanze di tutti i nodi da s.

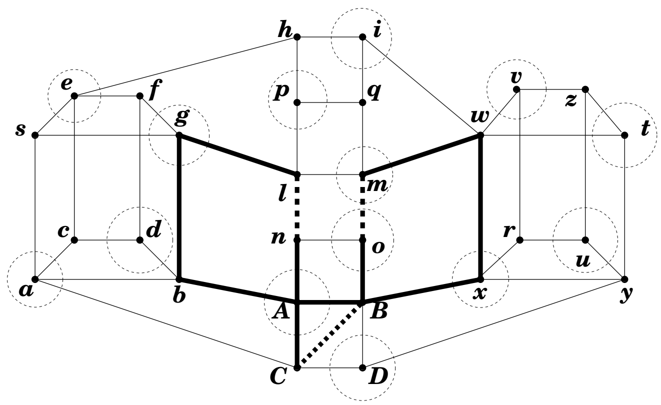
4.7.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi dei cammini minimi da s. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

4.8.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

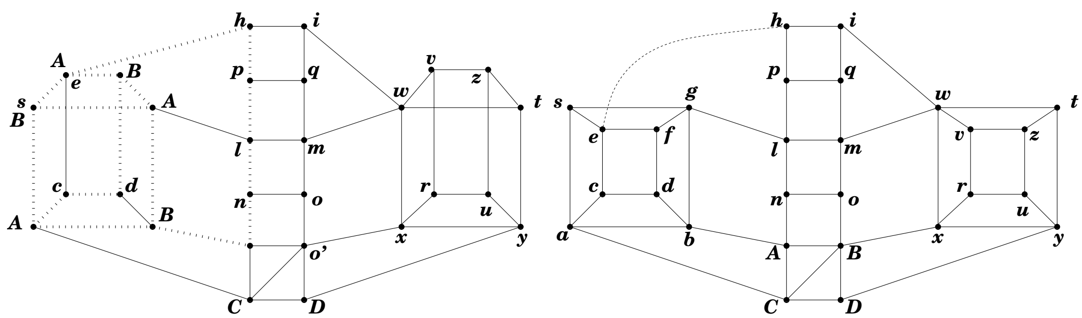
4.9.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

risposte.

Il fatto che G non sia bipartito, e che sia richiesta la rimozione di almeno 3 archi per renderlo tale, è certificato dai 3 cicli dispari disgiunti sugli archi rappresentati in figura con archi a tratto spesso. Di questi, i 3 archi in linea tratteggiata (uno per ciclo) sono quelli che si suggerisce di rimuovere. La figura esibisce inoltre la bipartizione dei nodi che mette in evidenza come il grafo ottenuto con la rimozione dei 3 detti archi sia bipartito. La presenza di questo elegante certificato di ottimalitá del tutto fortuita (il problema di rimuovere il minimo numero di archi per rendere un grafo bipartito NP-hard).

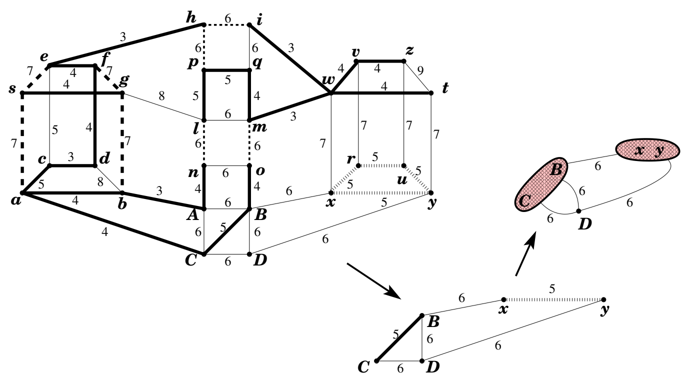


Il fatto che G non sia planare è comprovato dalla suddivisione di $K_{3,3}$ presente in G ed esibita nella seguente figura.



Nella stessa figura, sulla destra, si mostra come rendere G planare con l'eliminazione di un solo arco.

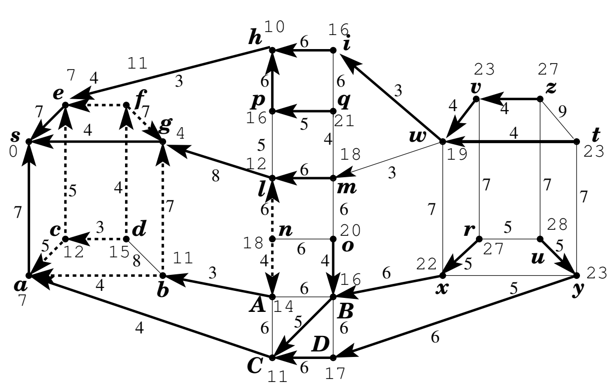
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 320$ alberi ricoprenti di peso minimo e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 6 tratteggiati come i due incidenti in h, più uno qualsiasi dei 4 archi di peso 7 incidenti in s oppure in g, più tre qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra (ru, uy, yx, xr), più 2 archi scelti opportunamente tra CD, DB, Bx, Dy. Vedremo ora nel dettaglio come vi siano precisamente 5 modi diversi per scegliere questi 2 archi tra CD, DB, Bx, Dy in modo tale da ottenere alberi ricoprenti di peso minimo. Per meglio rappresentarci e comprendere quali siano le possibili scelte di questi 2 archi tra CD, DB, Bx, Dy, procediamo come segue: nel grafo G contraiamo tutti gli archi di peso inferiore a 6 e rimuoviamo tutti gli archi di peso superiore a 6. Inoltre, siccome già stabilito che dei 4 archi di peso 6 tratteggiati come i due incidenti in h ne va preso almeno uno (considerato il taglio che separa i nodi i, w, v, z, t, m, q, p, ed l dagli altri) e non più di uno (finiscono tutti in parallelo non appena contratti tutti gli archi di peso inferiore a 6), contraiamo allora anche questi quattro archi di peso 6. Concentriamoci poi sulla zona in questione (tralasciamo cioè di considerare la componente connessa formata dai due nodi s e g, rimasta isolata con la rimozione degli archi di peso superiore a 6). Dopo aver così sgomberato il tavolo, ci ritroviamo con 3 soli macronodi connessi da questi 4 archi, due disposti in parallelo, ma altrimenti in disposizione a triangolo. Dei due archi in parallelo ne va preso massimo uno ed in totale ne vanno presi 2. In pratica abbiamo una possibile configurazione di scelta valida per ogni spanning tree del grafetto piccolino che abbiamo isolato in figura. Esso cattura fedelmente le possibilità sul tavolo. Ci è ora facile contare i possibili spanning tree del grafetto isolato e vedere che le configurazioni sono 5.



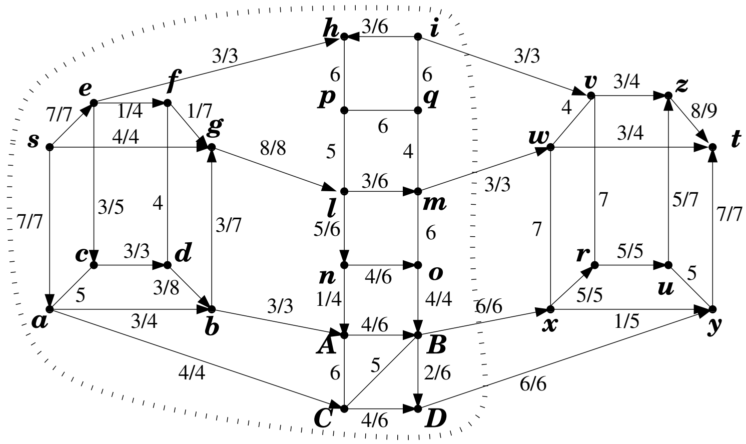
Si noti che nella componente in figura che abbiamo etichettato con x ed y sono in realtà presenti anche i nodi r ed u, mentre la componente che include B e C comprende in realtà tutti i restanti nodi (tranne s e g).

- ln in qualche soluzione ottima in quanto è uno degli archi di peso minimo entro il seguente insieme di archi che formano un taglio del grafo: $\{hi, hp, ln, mo, Bx, Dy\}$ (primo certificato/argomento) ma non in tutte le soluzioni ottime in quanto arco di peso massimo nel ciclo $lnom$ (secondo certificato/argomento);
- no in nessuna soluzione ottima in quanto unico arco di peso massimo nel ciclo $noBCabA$;
- ca in tutte le soluzioni ottime in quanto unico arco di peso minimo nel taglio $\delta(\{c, d, e, f, h\})$ che separa i nodi c, d, e, f, h da tutti gli altri nodi.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi dei cammini minimi dal nodo s. Ci sono $2^5 = 32$ alberi dei cammini minimi dal nodo s e ciascuno di essi include i 20 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi tratteggiati uscenti dal nodo c (nel nodo f, nel nodo b, nel nodo d, nel nodo n).



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 18 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 5 archi costituiscono pertanto un minimo s, t-taglio, anch'esso di valore 18 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.