Esame di Ricerca Operativa - 7 febbraio 2013
Facoltà di Scienze MM.FF.NN. - Verona
- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

Un'azienda chimica produce quattro tipi di colla, A, B, C, D, utilizzando 3 materie prime P_1 , P_2 e P_3. Per la produzione della colla D, inoltre, sono impiegate anche una certa quantità di A e di B. In tabella sono riportate le quantità, in Kg, di componenti che sono necessari per produrre un Kg di ogni tipo di colla.

Colla	P_1	P_2	P_3	A	B
A	0,2	0,4	0,3	-	-
B	0,4	0,1	0,2	-	-
C	0,2	0,5	0,1	-	-
D	0,1	0,1	0,2	0,1	0,3

Per il prossimo mese sono stati acquistati 1000, 1500 e 750 Kg di P_1, P_2 e P_3, rispettivamente. Nella tabella seguente sono riportati i profitti (in Euro per Kg di prodotto) di vendita per ogni tipo di colla.

	A	B	C	D
Profitto	2	2,5	2,5	3

Formulare il problema di pianificare la produzione del prossimo mese in modo da massimizzare il profitto, sapendo che la quantità di colla D prodotta non deve essere superiore a 500Kg.

svolgimento.

Si indichino con x_A, x_B, x_C ed x_D i quantitativi (in chili) di colla da produrre. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei tre prodotti ossia

$$\max R \quad = \quad 2\,x_A + 2,5\,x_B + 2,5\,x_C + 3\,x_D\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0.$$

limite sulla quantità di colla D prodotta

$$x_D \leq 500.$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{aligned}
0,2\,x_A + 0,4\,x_B + 0,2\,x_C \; &+ \; (0,1 + 0,1\cdot 0,2 + 0,3\cdot 0,4)\,x_D \;\leq\; 1000,\\
0,4\,x_A + 0,1\,x_B + 0,5\,x_C \; &+ \; (0,1 + 0,1\cdot 0,4 + 0,3\cdot 0,1)\,x_D \;\leq\; 1500,\\
0,3\,x_A + 0,2\,x_B + 0,1\,x_C \; &+ \; (0,2 + 0,1\cdot 0,3 + 0,3\cdot 0,2)\,x_D \;\leq\; 750,
\end{aligned}$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	4	13	22	52	27	22	29	23	9	47	48	20	15	5	24	17	5	13	17
valore	5	13	21	30	20	21	16	20	11	99	32	10	12	4	22	20	6	12	16

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Dapprima ordino gli oggetti forniti in input per peso crescente, e mi sbarazzo degli oggetti il cui peso eccede 36, ottenendo:

nome	A	P	S	I	T	B	O	U	R	H	F	C	N	Q	G	E
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	17	20	22	22	23	24	27	28
valore	5	4	6	11	12	13	12	16	20	10	21	21	20	22	20	15

Ovviamente non potró mai prendere in una soluzione due elementi entrambi di peso almeno 17, visto che U e R esauriscono da soli la capacità dello zaino (non posso aggiungere nemmeno l'elemento più leggero A) totalizzando solo 36 mentre A, O e R raccolgono più valore con lo stesso ingombro. E quindi posso sempre preferire di prendere R piuttosto che non U, o H, o N, o G, o E. Analogamente, posso rinunciare sempre a C visto che eventualmente lo posso sostituire con F (nessuna soluzione li puó contenere entrambi). Con questo ho ridotto i miei candidati ai seguenti:

nome	A	P	S	I	T	B	O	R	F	Q
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	8	11	12	13	12	20	21	22

A questo punto compilo la tabella di programmazione dinamica che è riportata all'ultima pagina del presente documento.

Sulla base di tale tabella, possiamo fornire le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	42=20+11+6+5	35=17+9+5+4	R,I,S,A
26	31=20+6+5	26=17+5+4	R,S,A
33	37=20+11+6	31=17+9+5	R,I,S
22	26=20 +6	22=17+5	R,S

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

20	-19	24	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-5	4	-1	5

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 10^o elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 14^o che il 16^o elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
20	1	25	12	33	0	31	11	34	3	19	0	5	0	30	8	14	6	27	2	15	0	7	2	6	5	10
20	-19	24	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-5	4	-1	5
33	13	32	8	21	0	34	3	23	0	16	0	20	15	30	0	19	13	21	0	13	0	10	3	8	4	5
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	34	7	9	31	23
include primo	33	1	5	20	21
include 10^o	19	7	11	31	16
include 14^o e 16^o	17	13	19	5	21

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

10	23	17	11	13	30	37	61	14	35	60	18	41	28	21	55	19	16	12	34	20	15	38	48	53	22

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 16. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	
10	6	7	9	8	5	4	1	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
10	23	17	11	13	30	37	61	14	35	60	18	41	28	21	55	19	16	12	34	20	15	38	48	53	22
1	1	2	3	3	1	1	1	3	2	2	3	3	4	5	3	6	7	8	4	6	8	4	4	4	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	

Decrescente

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

Crescente

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	
10	6	7	9	8	5	4	1	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
10	23	17	11	13	30	37	61	14	35	60	18	41	28	21	55	19	16	12	34	20	15	38	48	53	22
1	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**6**	**5**	**6**	**6**	**6**	**7**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**5**	**8**	**9**	**10**	**8**
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	

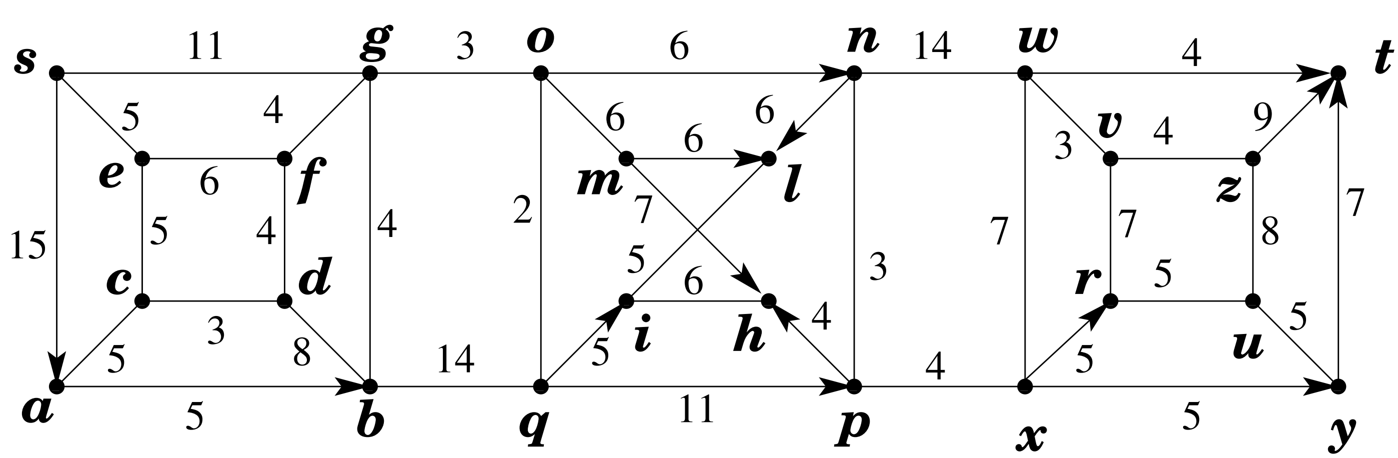
Crescente

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	10, 11, 13, 14, 18, 28, 34, 38, 48, 53
decrescente	8	61, 60, 41, 28, 21, 19, 16, 15
V-sequenza	12	61, 60, 41, 28, 21, 19, 16, 12, 34, 38, 48, 53
crescente con 16	9	10, 11, 13, 14, 16, 20, 38, 48, 53

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(2pt)** Dire quale sia il minimo numero di archi la cui rimozione renda il grafo bipartito fornendo i certificati del caso.

5.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

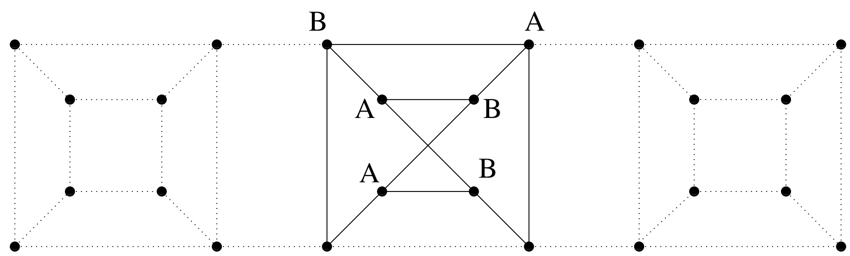
5.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

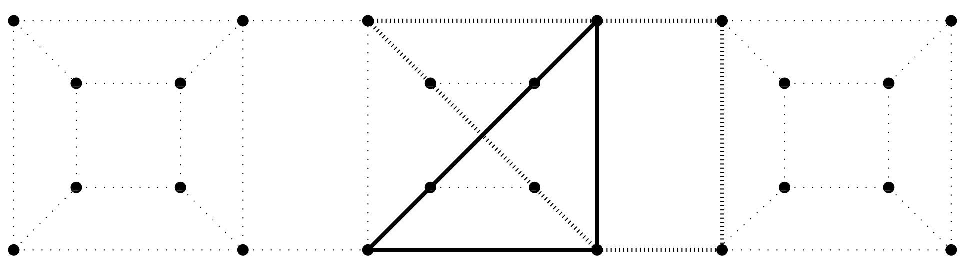
risposte.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il sottografo di G riportato in figura.

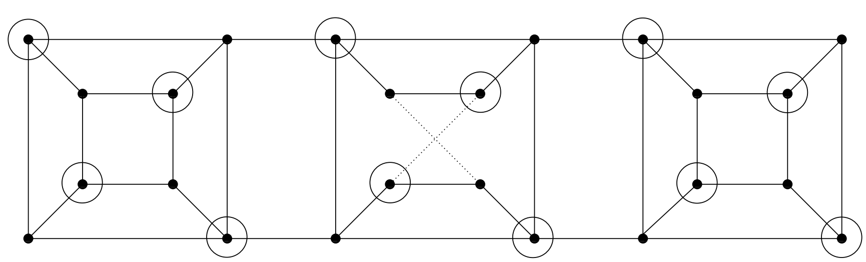


Il verificatore dovrà solo controllare che tale sottografo di G è una suddivisione di $K_{3,3}$.

Il fatto che G non sia bipartito è messo in evidenza dalla presenza di circuiti dispari quali n, p, h, m, o, oppure q, p, h, m, o, oppure p, n, l, i, q. Si noti che nessun arco di G appartiene a tutti e 3 tali circuiti. Pertanto occorre rimuovere almeno 2 archi per rendere il grafo bipartito. Per arrivare a tale conclusione si potevano più semplicemente esibire i due circuiti dispari disgiunti indicati nella seguente figura.

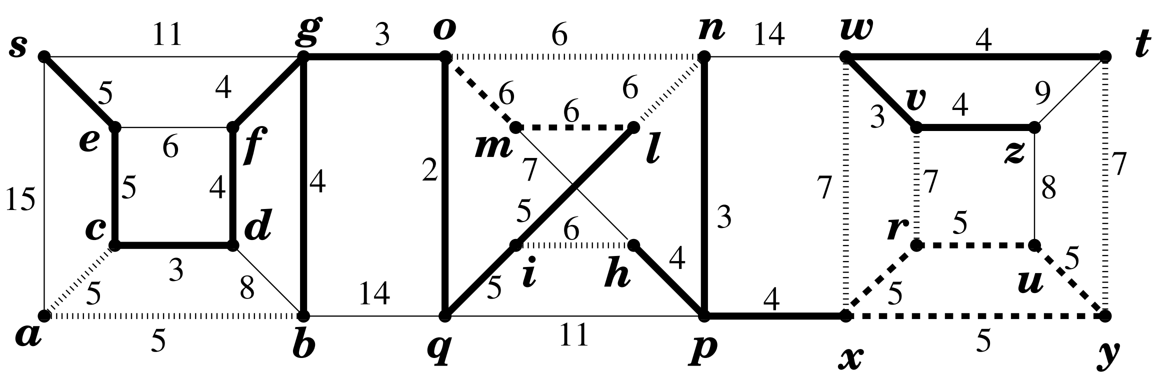


In effetti la rimozione dei 2 archi mh ed li rende il grafo bipartito come certificato in figura.

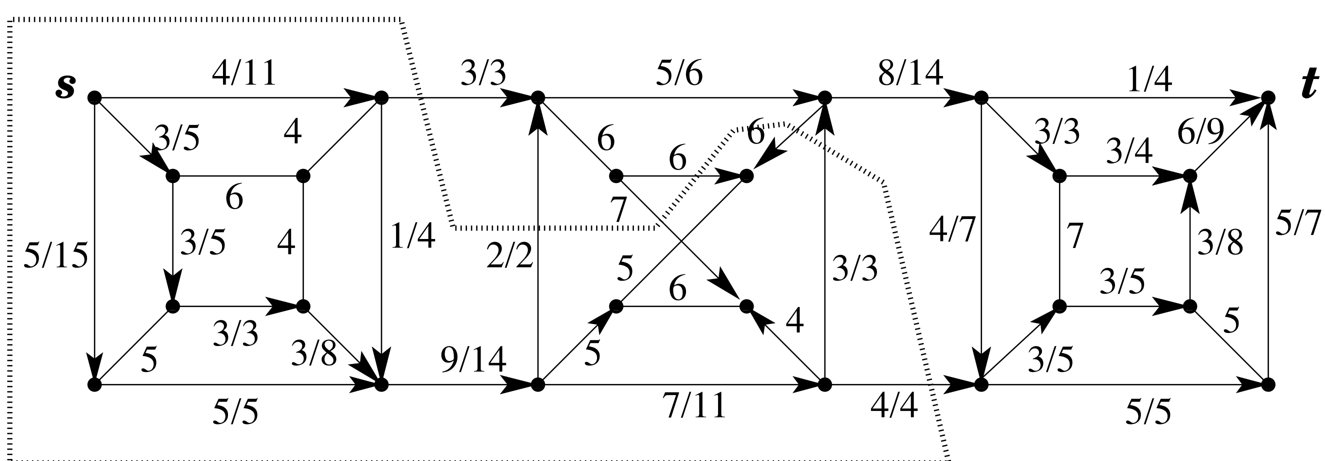


Il numero minimo di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito è pertanto 2.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 13 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 5 incidenti al nodo a (i 2 archi in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra), più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi on, nl, ih), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 6 (6 punti):
Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 12$, $x_2 = 10$, $x_4 = 20$, $x_5 = 28$ del seguente problema.

$$
\max\ x_1 + 6x_2 + 16x_3 + 20x_4 + 10x_5 + 10x_6
$$
$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 \leq 24 \\
x_3 + x_4 \leq 20 \\
x_5 + x_6 \leq 28 \\
x_1 + x_3 + x_5 \leq 40 \\
x_2 + x_4 + x_6 \leq 30 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(1pt)** La soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$
\begin{cases}
(12) + (10) = 22 \leq 24 \\
(0) + (20) = \mathbf{20} \leq 20 \\
(28) + (0) = \mathbf{28} \leq 28 \\
(0) + (28) + (12) = \mathbf{40} \leq 40 \\
(20) + (0) + (10) = \mathbf{30} \leq 30
\end{cases}
$$

Il problema duale è il seguente.

$$
\min\ 24\,y_1 + 20\,y_2 + 28\,y_3 + 40\,y_4 + 30\,y_5
$$
$$
\begin{cases}
y_1 + y_4 \geq 1 \\
y_1 + y_5 \geq 6 \\
y_2 + y_4 \geq 16 \\
y_2 + y_5 \geq 20 \\
y_3 + y_4 \geq 10 \\
y_3 + y_5 \geq 10 \\
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$
\begin{cases}
+ y_4 = 1 \\
+ y_5 = 6 \\
y_2 + y_5 = 20 \\
y_3 + y_4 = 10
\end{cases}
$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 14, 9, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

Poichè il terzo vincolo risulta violato ($y_2 + y_4 = 15 < 16$) possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **NON è ottima**.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$A(4,5)$	0	·	·	·	5	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$P(5,4)$	0	·	·	·	5	4	·	·	·	9	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(5,6)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	·	15	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$(9,11)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	·	22	21	·	·	·	26	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$(13,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	17	22	21	·	·	23	26	·	·	28	29	·	·	·	34	33	·	·	·	38
$(13,13)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	·	·	18	22	21	·	·	24	26	·	·	29	30	·	·	30	35	34	·	·	36	39
$(15,12)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	18	22	21	18	·	24	26	23	22	29	30	28	29	30	35	34	34	33	36	39
$(17,20)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41
$(22,21)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41
$(24,22)$	0	·	·	·	5	6	·	·	·	11	10	·	·	16	17	12	·	20	22	21	18	25	26	26	23	22	31	30	28	29	36	37	34	34	38	42	41

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	A	P	S	I	T	B	O	R	F	Q
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	5	4	6	11	12	13	12	20	21	22