Ejercicio:

$f \in \mathbb{Q}$

Demostrar

f Tiene que ser racional.
para cos y sen como discretos.
porqué f tiene que ser un racional

Discretización de una señal sinusoidal continua

$$x(t) = \cos(2\pi f t)$$

Al muestrear esta señal con un periodo de muestreo T_s, obtenemos la secuencia discreta:

$$x[n] = x(nT_s) = \cos(2\pi f n T_s)$$

Definiendo la frecuencia digital $w = 2\pi f T_s$

$$x[n] = \cos(wn)$$

Periodicidad de la señal discreta

Una secuencia discreta $x[n]$ es periódica si existe un entero $N > 0$ tal que:

$$x[n+N] = x[n] \quad \forall n$$

Para $x[n] = \cos(wn)$.

$$\cos(w(n+N)) = \cos(wn)$$

Lo cual se cumple si

$$wN = 2\pi K \quad \text{para algún entero } K$$

$$w = \frac{2\pi K}{N}$$

$$2\pi f T_s = \frac{2\pi K}{N} \Rightarrow f T_s = \frac{K}{N} \qquad f = \frac{K}{N T_s}$$

Dado que K y N son enteros, f debe ser un número racional (cociente de dos enteros) para que exista un periodo N entero.

La señal discreta $x[n] = \cos(2\pi f n T_s)$ es periódica si y solo si $f T_s \in \mathbb{Q}$

Supongamos que $x[n]$ es periódica con periodo $N \in \mathbb{Z}^+$.
Entonces:

$$x[n+N] = x[n] \quad \forall n$$

$$\cos(2\pi f T_s (n+N)) = \cos(2\pi f T_s n)$$

$$2\pi f T_s N = 2\pi k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto

$$f T_s = \frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$$

Supongamos que $f T_s = \frac{k}{N} \in \mathbb{Q}$, con $k, N \in \mathbb{Z}$ y $N > 0$.
Entonces

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{k}{N} n\right)$$

Verificación de la periodicidad

$$x[n+N] = \cos\left(2\pi \frac{k}{N}(n+N)\right) = \cos\left(2\pi \frac{k}{N} + 2\pi k\right)$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) = x[n]$$

Para que la señal discreta $x[n] = \cos(2\pi f n T_s)$ sea periódica, es necesario y suficiente que $f T_s$ sea un número racional. Esto implica que f sea racional (dado que T_s es un número real)

Si $f T_s$ no es racional, la señal discreta no es periódica (aunque la señal continua sí lo sea). Esto puede causar problemas en aplicaciones como análisis espectral, procesamiento de señales y comunicaciones, donde se asume periodicidad para técnicas como la DFT (Transformada Discreta de Fourier)