Parcial 1 Señales y Sistemas

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(x) - x_2(t)|^2 d$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-Jnw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{Jmw_0 t}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$.

Determine la distancia entre las dos señales

Hallamos $|x_1(t) - x_2(t)|^2$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = (x_1(t) - x_2(t))(x_1(t) - x_2(t))$$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = |Ae^{-Jnw_0 t} - Be^{Jmw_0 t}|^2$$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = (Ae^{-Jnw_0 t} - Be^{Jmw_0 t})(Ae^{Jnw_0 t} - Be^{-Jmw_0 t})$$

$$= A^2 - ABe^{-Jnw_0 t} e^{-Jmw_0 t} - ABe^{Jmw_0 t} e^{Jnw_0 t} + B^2$$

$$= A^2 + B^2 - AB[e^{-J(n+m)w_0 t} + e^{J(n+m)w_0 t}]$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t)$$

Potencia media

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T [A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t)]$$

Para señales periódicas, podemos calcular sobre un periodo

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \int_0^T [A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t)]$$

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \left[\int_0^T (A^2 + B^2)\,dt - 2AB \int_0^T \cos((n+m)w_0 t)\,dt \right]$$

Evaluamos las integrales

1) $\int_0^T (A^2+B^2)\,dt = (A^2+B^2)T$

2) $\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt = \int_0^T \cos\left((n+m)\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

Caso 1 $\quad n+m \neq 0$

$$d^2(x_1,x_2) = \frac{1}{T}\left[(A^2+B^2)T - 0\right] = A^2+B^2$$

Caso 2 $\quad n+m = 0$

$$d^2(x_1,x_2) = \frac{1}{T}\left[(A^2+B^2)T - 2AB\cdot T\right] = A^2+B^2-AB =$$

$$= (A-B)^2$$

$$d(x_1,x_2) = \begin{cases} \sqrt{A^2+B^2} & \text{si } n+m \neq 0 \\ |A-B| & \text{si } n+m = 0 \end{cases}$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$$

$\omega_1 = 1000$ rad/s $\quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1000\pi} \quad f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500$ Hz

$\omega_2 = 3000$ rad/s $\quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{3000\pi} \quad f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500$ Hz

$\omega_3 = 11000$ rad/s $\quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{11000\pi} \quad f_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500$ Hz

Hallamos frecuencia de muestreo

$$f_s \geq 2\cdot f_{max} \Rightarrow f_s \geq 2(5500) \Rightarrow f_s \geq 11000$$

Como $f_s = 5000\,Hz$ no cumple con el teorema de Nyquiest

Discretizamos la señal

para ir de $x(t)$ a $x[n]$ usamos

$t = nT_s = \frac{n}{F_s}$ $\qquad F_s = 5000\,Hz$

$$x\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3\cos\left(1000\pi \frac{n}{F_s}\right) + 5\,sen\left(3000\pi \frac{n}{F_s}\right) + 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{F_s}\right)$$

$$x\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3\cos\left(\frac{1000\pi}{5000} n\right) + 5\,sen\left(\frac{3000\pi}{5000} n\right) + 10\cos\left(\frac{11000\pi}{5000} n\right)$$

$$x\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + 5\,sen\left(\frac{3\pi}{5} n\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi}{5} n\right)$$

$10\cos\left(\frac{11}{5}\pi n\right)$ no está en $[-\pi, \pi]$

Para que esté en el intervalo restamos 2π

$$\Omega_{ori} = \Omega_{copia} - 2\pi$$
$$= \frac{11\pi}{5} - 2\pi = \frac{\pi}{5}$$

Entonces

$$x\left(\frac{n}{F_s}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + 5\,sen\left(\frac{3\pi}{5} n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right)$$

$$x\left(\frac{n}{F_s}\right) = 13\cos\left(\frac{\pi}{5} n\right) + 5\,sen\left(\frac{3\pi}{5} n\right)$$

Esta será la señal que obtendrá en tiempo discreto el conversor análogo digital.

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-Jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} x(t) e^{-Jnw_o t} dt \quad \therefore x(t) = \sum_n C_n e^{Jnw_o t}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n C_n e^{Jnw_o t}\right\} = \sum_n C_n e^{Jnw_o t} Jnw_o$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n C_n e^{Jnw_o t}(Jnw_o)\right\} = \sum_n C_n e^{Jnw_o t}(Jnw_o)^2$$

$$\tilde{C_n} = \frac{(x''(t) \cdot e^{Jnw_o t})}{\|e^{Jnw_o t}\|^2} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{x''(t) e^{-Jnw_o t}}{T} dt \quad \text{cuando } T = t_f - t_i$$

$$\tilde{C_n} = C_n (Jnw_o)^2 = \int_{t_i}^{t_f} \frac{x''(t) e^{-Jnw_o t}}{T} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(Jnw_o)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-Jnw_o t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-Jnw_o t} dt$$

$$x(t) = C_n + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nw_o t) + b_n \operatorname{sen}(nw_o t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(-nw_o) \operatorname{sen}(nw_o t) + b_n (nw_o) \cos(nw_o t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(-nw_o)(nw_o) \cos(nw_o t) + b_n (nw_o)(-nw_o) \operatorname{sen}(nw_o t)$$

Powered by CamScanner

$$a_n(-n^2 w_0^2) = \frac{2}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{-T n^2 w_0^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)\cos(n w_0 t)\,dt$$

$$b_n = (-n^2 w_0^2) = \frac{2}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)\,\text{sen}(n w_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{-T n^2 w_0^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)\,\text{sen}(n w_0 t)\,dt$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, Imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$

$t = -d_2$	$\delta(t+d_2)$	$\frac{A-b}{d_2-d_1}$
$t = -d_1$	$\delta(t+d_1)$	$\frac{-(A-b)}{d_2-d_1}$
$t = d_1$	$\delta(t-d_1)$	$\frac{-(A-b)}{d_2-d_1}$
$t = d_2$	$\delta(t-d_2)$	$\frac{A-b}{d_2-d_1}$

$$C_n^k = (J n w_0)^k C_n$$

para $k = 2$

$$C_n^2 = -n^2 w_0^2 C_n$$

los coeficientes de $x''(t)$

$$C_n^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)\, e^{-J n w_0 t}\, dt$$

Reemplazando en $x''(t)$

$$C_n^2 = \frac{1}{T}\left[\frac{A-b}{d_2-d_1} e^{J n w_0 d_2} - \frac{A-b}{d_2-d_1} e^{J n w_0 d_1} - \frac{A-b}{d_2-d_1} e^{-J n w_0 d_1} + \frac{A-b}{d_2-d_1} e^{-J n w_0 d_2}\right]$$

$$C_n^{(2)} = \frac{A-b}{T(d_2-d_1)}\left[e^{Jnw_0d_2} - e^{Jnw_0d_1} - e^{-Jnw_0d_1} + e^{-Jnw_0d_2}\right]$$

$$C_n^{(2)} = \frac{2(A-b)}{T(d_2-d_1)}\left[\cos(nw_0d_2) - \cos(nw_0d_1)\right]$$

$$C_n = \frac{C_n^{(2)}}{n^2w_0^2} = -\frac{2(A-b)}{n^2w_0^2T(d_2-d_1)}\left[\cos(nw_0d_2) - \cos(nw_0d_1)\right]$$

$$C_n = -\frac{2(A-b)T}{4\pi^2n^2(d_2-d_1)}\left[\cos(nw_0d_2) - \cos(nw_0d_1))\right]$$

$$C_n = -\frac{(A-b)T}{2\pi^2n^2(d_2-d_1)}\left[\cos\left(\frac{2\pi n d_2}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n d_1}{T}\right)\right]$$

Caso $n=0$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\left[2A\left(\frac{T}{2} - d_2\right) + 2b(d_2-d_1) + \frac{(A+b)(d_2-d_1)}{2}\right.$$

$$C_0 = A - \frac{2(A-b)(d_2-d_1)}{T} + \frac{(A-b)(d_2-d_1)}{T}$$

$$= A - \frac{(A-b)(d_2-d_1)}{T}$$