Ejercicios 2.8

Demostración

i) $\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} =$

Supongamos $t_0 \geq 0$ y señal desplazada o general, asumiendo que $x(t)=0$ para $t<0 \Rightarrow x(t-t_0)$ se anula para $t<t_0$

Definición

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Entonces

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} x(t-t_0) e^{-st} dt$$

Cambio de variable

$$\tau = t - t_0, \quad d\tau = dt, \quad t = \tau + t_0$$

Cuando $t=0$, $\tau = -t_0$. Pero $x(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, entonces los límites reales de integración en τ son desde 0 hasta ∞

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau$$

$$= e^{-st_0} \int_0^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= e^{-st_0} X(s)$$

ii) $\mathcal{L}\{x(at)\}$

Sea $a \geq 0$

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_0^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

Cambio $u = at$, $t = u/a$, $dt = du/a$

Límites: $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$\int_0^{\infty} x(u) e^{-s(u/a)} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} x(u) e^{-(s/a)u} du$$

$$= \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

Si $a < 0$, $x(at)$ cambia tiempo invertido, para mantener límites de integración apropiados (0 a ∞) se introduce valor absoluto en factor.

Para transformada unilateral, $a > 0$ necesario si queremos $x(at)$ con soporte $t \geq 0$.
Para bilateral:

$$\mathcal{L}_b\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

Haciendo cambio

$u = at$, $dt = du/|a|$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-(s/a)u} du = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

iii) $\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$

Para unilateral (señales con $x(t) = 0$ para $t < 0$):

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = \int_0^\infty x'(t)e^{-st}\,dt$$

Integración por partes:

$u = e^{-st}$, $dv = x'(t)\,dt$, $du = -se^{-st}\,dt$, $v = x(t)$

$$= \left[e^{-st}x(t)\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} x(t)(-s)e^{-st}\,dt$$

$$= \left[0 - x(0^-)\right] + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

$$= sX(s) - x(0^-)$$

Si se asume $x(0^-) = 0$ y definición desde 0^+, el término $x(0^-)$ desaparece, obteniendo $sX(s)$.

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s)$$

Para bilateral

$$\mathcal{L}_b\{x'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt$$

iv) $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$

Convolución bilateral

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot y(t-\tau)\,d\tau$$

Laplace bilateral

$$\mathcal{L}_b\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt$$

Intercambio de integrales (suponiendo convergencia absoluta):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$

Scribe

Variable en integral interior:

$u(t-\tau)$, $du = dt$, $t = u + \tau$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-s(u+\tau)} du = e^{-s\tau} Y(s)$$

Entonces,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} Y(s) d\tau = Y(s) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = X(s) Y(s)$$

Ejercicios 2.9 - transformadas de Laplace, polos/ceros, ROC

i) $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-3t} u(t)$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} u(t)\} = \frac{1}{s+2}, \quad Re(s) > -2$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} u(t)\} = \frac{1}{s+3}, \quad Re(s) > -3$$

Suma

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{(s+3)+(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}$$

ROC: intersección $Re(s) > -2$ y $Re(s) > -3 \rightarrow Re(s) > -2$

Polos: $s = -2$ y $s = -3$

Ceros: raíz de $2s + 5 = 0$

$$2s = -5$$

$$s = -\frac{5}{2} = -2.5$$

ROC es a la derecha del polo más a la derecha (-2)

ii) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

Para $\mathcal{L}\{e^{2t}u(t)\} = \frac{1}{s-2}$, $Re(s) > 2$

Para $e^{-3t}u(-t)$

Transformada bilateral

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-3t} e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+3)t}\, dt$$

$$= \left. \frac{e^{-(s+3)t}}{-(s+3)} \right|_{-\infty}^{0}$$

Para convergencia cuando $t \to -\infty$, necesitamos

$Re(-(s+3)) > 0 \Rightarrow Re(s+3) < 0 \Rightarrow Re < -3$

$= \frac{1-0}{-(s+3)}$ (en límite $t \to -\infty$ exponencial decrece si $Re(s) < -3$)

$= -\frac{1}{s+3}$, $Re < -3$

Entonces

$$X(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \frac{(s+3)-(s-2)}{(s-2)(s+3)}$$

$$= \frac{5}{(s-2)(s+3)}$$

Polos: $s = 2$ y $s = -3$
Ceros: Infinito
ROC: Sin ROC común

iii) $x(t) = e^{-a|t|}$ con $a > 0$

$x(t) = e^{-at} u(t) + e^{at} u(-t)$

Para $\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) > -a$

Para $e^{at} u(-t) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-st} dt$

$= \int e^{-(a+s)t} dt = \frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)}$

Converge si $Re(-(s-a)) > 0 = Re(s-a) < 0$

$Re < a$

$= \frac{e^{-(a-s)t}}{-(a-s)} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1-0}{-(s-a)} = -\frac{1}{s-a}$, $Re < a$

$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{(s-a)-(s+a)}{(s+a)(s-a)} = \frac{-2a}{(s+a)(s-a)}$

ROC: Intersección $Re(s) > -a$ y $Re(s) < a \Rightarrow -a < Re(s) < a$
(Banda vertical)

Polos: $s = -a$ $s = a$

Cero en $s = \infty$ (o ningún finito si $a \neq 0$)

iv) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)]$

$x(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t+5)$

Para $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \dfrac{1}{s+2}$, $Re > -2$

Para $e^{-2t}u(t-5)$ $\qquad e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$

hacemos $e^{-2t}u(t-5) = e^{-2((t-5)+5)}u(t-5)$

$= e^{-2(t-5)-10}u(t-5)$

$e^{-2t}u(t-5) = e^{-10} \cdot e^{-2(t-5)}u(t-5)$

Usando desplazamiento

$$\mathcal{L}\{e^{-2(t-5)}u(t-5)\} = e^{-5s}\frac{1}{s+2}$$

Entonces $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t-5)\} = e^{-10}e^{-5s}\dfrac{1}{s+2}$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - e^{-10}e^{-5s}\frac{1}{s+2} = \frac{1 - e^{-10}e^{-5s}}{s+2}$$

ROC: Todo s con $Re(s) > -2$ (la ROC no cambia porque la resta mantiene misma exponencial decreciente)

Polos $= s = -2$

Ceros: $1 - e^{-10}e^{-5s} = 0 \Rightarrow e^{-5s} = e^{10} \Rightarrow -5s = 10 + j2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow s = -2 + j\dfrac{2\pi k}{-5} \Rightarrow s = -2 - j\dfrac{2\pi k}{5}$ para $k \in \mathbb{Z}$

Infinitos ceros en $Re(s) = -2$, espaciados $2\pi/5$ en dirección imaginaria

ROC: $Re(s) > -2$