

Estadística (Química)
Práctica 1 - Probabilidad

1. Sea (\mathbb{P}, Ω) un espacio de probabilidad. Demuestre que:
 - (a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
 - (b) Si $A_1, \dots, A_n \in \Omega$ y son eventos disjuntos, entonces $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$. Observe que esto prueba en particular que $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$.
 - (c) Si $A \in \Omega$ entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. Definamos $P : \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) \rightarrow [0, 1]$ dado por,

$$P(A) = \frac{\#A}{5}.$$

Demuestre que $(P, \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4\}))$ es un espacio de probabilidad.

3. Se arroja 3 veces una moneda equilibrada y se observa la secuencia de caras y cecas.
 - (a) Describa el espacio muestral. ¿Es equiprobable? Asigne probabilidad a cada uno de los posibles resultados.
 - (b) Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
 - I. A : salieron al menos dos caras
 - II. B : en los dos primeros tiros salieron caras
 - III. C : en el último tiro salió ceca
 - IV. no ocurrió el suceso A
 - V. ocurrieron los sucesos A y B simultáneamente
 - VI. ocurrió alguno de los dos sucesos A ó B.
4. Se lanzan dos dados equilibrados de 6 caras y se anotan los números de las caras observadas.
 - (a) Describa un espacio muestral de este experimento que sea equiprobable.
 - (b) Calcule la probabilidad de que se anoten los números 2 y 5.
 - (c) Calcule la probabilidad de que se hayan observado dos 1.
 - (d) Calcule la probabilidad de que la suma de los números observados sea 6.
5. Una caja contiene 3 bolitas rojas, 2 azules y 4 blancas. Se extraen 2 bolitas **con reposición**. Calcule la probabilidad de obtener:
 - (a) las dos bolitas del mismo color.
 - (b) al menos una bolita roja.
 - (c) una bolita azul y una roja.
 - (d) una bolita azul o una roja.
6. Rehaga el ejercicio 5. pero con las extracciones realizadas **sin reposición**.
7. Se arroja un dado seis veces. ¿Cuál de las siguientes opciones ofrece la mejor manera de ganar? ¿O son equivalentes?

- (a) Ganar \$1 si sale al menos un as.
- (b) Ganar \$1 si sale un as todas las veces.
- (c) Ganar \$1 si sale la secuencia 1, 2, 3, 4, 5, 6 (en ese orden).
- (d) Ganar \$1 si los dos primeros números que salen son iguales.

8. Se realiza una experiencia que consiste en provocar una reacción y luego se registra (i) el nivel (bajo, medio, alto) de presión al finalizar la reacción y (ii) si la reacción se completa antes de los 10 minutos o pasados los 10 minutos. Las probabilidades que dicha reacción se complete antes de los 10 minutos y con distintos niveles de presión en un día cualquiera son conocidas y se muestran en la primer fila de siguiente tabla.

		Niveles de presión		
		bajo	medio	alto
Tiempo de reacción	< 10 minutos	0,05	0,15	0,40
	≥ 10 minutos	0,10		0,20

- (a) Complete el cuadro. ¿Cuál es la probabilidad de que la reacción se complete antes de los 10 minutos y con un nivel de presión alto?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la reacción no se produzca a nivel de presión alto y se produzca antes de los diez minutos?
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de reacción sea menor a los 10 minutos?
- (d) ¿A qué nivel de presión es más probable que se produzca la reacción?

9. Consideremos nuevamente las condiciones del ejercicio anterior.

- (a) Sabiendo que una reacción se produjo antes de los 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido a nivel de presión media?
- (b) Sabiendo que el nivel de presión fue alto, ¿cuál es la probabilidad de que la reacción haya tenido lugar antes de los 10 minutos?
- (c) Considere los siguientes sucesos

A : el tiempo de reacción fue menor a 10 minutos

B : el nivel de presión fue bajo

Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(A | B)$, $P(B | A)$, $P(B^c | A)$, $P(B | A^c)$ y $P(A \cap B)$.

- (d) ¿Es el nivel de presión independiente del tiempo de reacción? Justifique su respuesta.

10. Sean $A, B \in \Omega$. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) A y B son independientes.
- (b) A^c y B son independientes.
- (c) A y B^c son independientes.
- (d) A^c y B^c son independientes.

11. Se realiza el mismo experimento del ejercicio anterior pero se registra apenas el nivel de presión de la reacción. Recordemos que la probabilidad de cada uno de los niveles de presión al completarse la reacción son:

$$P(\text{bajo}) = 0,15 \quad P(\text{medio}) = 0,25 \quad P(\text{alto}) = 0,60$$

Se repite la experiencia en 2 días sucesivos en condiciones independientes e idénticas.

12. ¿Cuántos invitados necesitás en una fiesta para que al menos dos cumplan años el mismo día? ¿Cuántos para que al menos dos cumplan años el mismo día con probabilidad mayor o igual a 0,5? ¿Y mayor o igual a 0,95?¹ Asuma que un año tiene 365 días e implemente, en R, una función que tenga como entrada la cantidad de invitados y devuelva, `cumple(invitados)`, la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día. Grafique en el eje x el número de invitados y en el eje y la probabilidad calculada para cada número de invitados.
- (a) Describa el espacio muestral asociado a este experimento y calcule la probabilidad de cada uno de los posibles resultados.
- (b) Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
- la reacción se completa con un nivel de presión bajo el primer día.
 - la reacción se completa con un nivel de presión bajo en los dos días.
 - la reacción se completa por lo menos en un día con un nivel de presión bajo.
 - la reacción se completa a lo sumo un día con nivel de presión alto.
13. Rehaga el ejercicio 1 suponiendo que la moneda está cargada de manera tal que la probabilidad de obtener cara es $3/4$.
14. En una materia que se dictó el primer cuatrimestre del año pasado, la distribución de la frecuencia de notas obtenidas fue la siguiente:

Nota	Porcentaje
0 y 1	5 %
2 y 3	15 %
4 a 7	50 %
8 a 10	30 %

La materia se aprueba con una nota mayor o igual a 4.

- (a) Se elige un estudiante al azar. Hallar la probabilidad de que haya aprobado.
- (b) Sabiendo que hubo 200 alumnos en el curso, si se eligen sin reposición dos estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos hayan aprobado? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno haya aprobado?
- (c) Responder b) si a los estudiantes se los elige con reposición. Compare las probabilidades halladas en este ítem con las del b), ¿son muy diferentes entre sí?
- (d) Felipe cursó dicha materia el cuatrimestre pasado y la aprobó. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sacado más de 7?
15. Una caja contiene tres monedas: una de ellas es de curso legal (equilibrada), otra tiene dos caras y la restante está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{5}$. Se selecciona una moneda al azar y se lanza.
- (a) Hallar la probabilidad de que salga cara.
- (b) Sabiendo que salió cara, hallar la probabilidad de que se haya extraído la moneda que hace más probable que salga ceca.

¹Clickeando acá encontrarás una nota publicada en un diario sobre este problema.