Estadística (Química) - Primer Cuatrimestre 2020 - Coronavirus
Práctica 6 - Tests de Hipótesis

Comentario: En todos los ejercicios propuestos

a) defina las variables aleatorias y los parámetros involucrados.

b) de ser posible indique:

   i. la distribución de las variables aleatorias

   ii. el significado intuitivo de los parámetros.

   (a) plantee las hipótesis nula y alternativa, e indique el nivel que usará para el test.

   (b) elija un test, calcule el valor del estadístico, calcule o acote el $p-$valor e indique la conclusión del test. Si el nivel del test no se especifica en el enunciado, tome por default 0.05.

   (c) compare los resultados de hacer las cuentas a mano con las salidas obtenidas con el R, de manera de chequear las primeras y aprender a usar las segundas, en aquellos ejercicios en los que ambas cosas sean posibles.

1. Una colonia de ratones de laboratorio tiene varios cientos de ratones de una determinada especie. El peso en gramos de los ratones de esta especie sigue una distribución normal con desvío estándar de 5g. Se eligieron al azar 25 ratones de dicha colonia. El peso promedio de estos 25 animales fue de 27g.

   (a) ¿Muestran estos datos evidencia suficiente a un nivel del 5% para decir que el peso medio de todos los ratones de la colonia es menor a 30g? Justifique planteando un test adecuado.

   (b) Calcule el p-valor del test planteado en (a).

   (c) Sin hacer más cuentas, ¿puede decir cuál sería la conclusión del test anterior pero a nivel 1%?

2. Supongamos que la proporción de monóxido de carbono (CO) de un gas es de 70 ppm. Se realizan mediciones con un fotómetro cuyos errores de medición siguen una distribución $N(0, \sigma^2)$, es decir que si el fotómetro está bien calibrado podemos suponer que las mediciones siguen una distribución $N(70, \sigma^2)$. Cuando el fotómetro no está calibrado y se produce un error sistemático las mediciones siguen una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \neq 70$. Para cada uno de los siguientes conjuntos de mediciones independientes plantee un test adecuado para ver si encuentra evidencia a nivel 5% de error sistemático.

   (a) 71, 68, 79

   (b) 71, 68, 79, 84, 78, 85, 69

   (c) 71

   (d) 71, 84

   En uno de los casos es imposible plantear el test, ¿cuál y por qué?

3. Se quiere calibrar otro fotómetro. En este caso no está claro si el modelo que supone errores con distribución normal se verifica. Los siguientes son conjuntos de mediciones independientes sobre el gas del ejercicio anterior:

   (a) 71, 70, 72, 69, 71, 68, 93, 75, 68, 61, 94, 91

   (b) 71, 73, 69, 74, 65, 67, 71, 69, 70, 75, 71, 68

   (c) 71, 69, 71, 69, 71, 69, 71, 69, 71, 69, 71, 69

En dos de los casos anteriores el modelo de errores normales no se satisface: ¿cuáles y por qué? Para el conjunto de datos para el que parece razonable suponer un modelo de normal, haga el test que considere más apropiado para estudiar si hay evidencia de error sistemático a nivel del 5%.

4. En cada caso indique si la afirmación es verdadera o falsa y justifique:

   (a) El nivel de significación de un test es igual a la probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta.

   (b) No rechazar H_0 cuando ésta es falsa es más grave que rechazar H_0 cuando es verdadera.

   (c) Si el p-valor es 0.3, el test correspondiente rechazará al nivel 0.01.

   (d) Si un test rechaza a nivel de significación 0.06, entonces el p-valor es menor o igual a 0.06.

5. Consideremos un procedimiento para medir el contenido de manganeso en un mineral. A este procedimiento se lo ha usado muchas veces y se sabe que las mediciones siguen una distribución normal cuya desviación estándar es 0.15. Se está estudiando si el método tiene error sistemático.

   (a) Se hacen 8 determinaciones de un mineral preparado que tiene 7% de manganeso y se obtienen los siguientes resultados:

   6.90   7.10   7.20   7.07   7.15   7.04   7.18   6.95 $(\overline{x} = 7.074)$

   ¿Cuál es su conclusión si desea que la probabilidad de equivocarse al decir que el método tiene error sistemático cuando en realidad no lo tiene sea 0.05? (En este caso si no hay error sistemático las determinaciones siguen una distribución $N(7, 0.15^2)$ y si hay error la distribución es $N(\mu, 0.15^2)$ con $\mu \neq 7$).

   (b) Si el método tiene un error sistemático de 0.10 (o sea, si $\mu = 7.10$), ¿cuál es la probabilidad de cometer error de tipo II?

   (c) Se quiere aplicar un test estadístico de modo que, al igual que en el inciso a), la probabilidad de decir que hay error sistemático cuando no lo hay sea 0.05. Pero además se desea que si hay un error sistemático de 0.10, la probabilidad de detectarlo sea ≥ 0.80 (o lo que es equivalente, la probabilidad de error tipo II sea ≤ 0.20).

      i. El test del inciso a) ¿cumple con este requisito?

      ii. En caso contrario, ¿cuántas determinaciones habría que hacer como mínimo?

6. Se comparó un nuevo método propuesto para la determinación de la demanda de oxígeno en aguas residuales contra el método standard. Suponga que con ambos métodos las determinaciones siguen una distribución normal. Se hicieron 10 determinaciones para cada método en una misma muestra de aguas residuales, obteniéndose los siguientes resultados (en mg/l):

Método standard	74.4	67.2	66.1	71.2	68.7
	69.9	71.0	77.8	72.4	70.1
Método propuesto	71.6	71.4	71.3	74.5	71.9
	72.6	69.1	73.4	69.5	70.2

Ingresando los datos al R se calcularon las medias y los desvíos estándar muestrales de estos datos:

	n	$\overline{x}$	s
Método standard	10	70.88	3.4224
Método propuesto	10	71.55	1.6821

¿Tenemos información suficiente para decir que la precisión del método propuesto es significativamente mejor que la del método standard a un nivel del 5%?

7. Utilizando dos métodos de análisis se hicieron determinaciones del contenido de hierro de una muestra de un mineral. Se asume que las determinaciones correspondientes a ambos métodos tienen distribución normal. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Método 1	$n_1 = 12$	$\overline{x} = 15.22\%$	$s_x = 0.10\%$
Método 2	$n_2 = 11$	$\overline{y} = 15.30\%$	$s_y = 0.12\%$

   (a) ¿Son significativamente diferentes las desviaciones estándares de las mediciones de ambos métodos a un nivel del 5%? Las instrucciones `qf` y `pf` del R pueden ser útiles para hallar los cuantiles de la F de Fisher, o su función de distribución (por ejemplo: `qf(0.025,df1=11,df2=10)`)

   (b) ¿Son significativamente diferentes a nivel 5% las medias de ambos métodos? (para elegir el test, tenga en cuenta el resultado del inciso anterior).

   (c) Repita a) y b) pero con $s_y = 0.20\%$ (en lugar de $s_y = 0.12\%$).

8. Este es un ejemplo en el que se desea estudiar si un cambio en las condiciones de un experimento afecta el resultado. Se está estudiando un procedimiento para la determinación de estaño en productos alimenticios. Para ello se tomaron 12 muestras del mismo producto. Se eligieron 6 de estas muestras al azar y se llevaron al punto de ebullición con HCl a reflujo durante 30 minutos. Con las 6 muestras restantes el tiempo de reflujo fue de 70 minutos. Los resultados fueron los siguientes:

Tiempo de reflujo (m)	Estaño encontrado (mg/Kg)	$\overline{x}$	s^2
30	57, 57, 59, 56, 56, 59	57.33	1.867
70	57, 55, 58, 59, 59, 59	57.83	2.57

   Suponga que la cantidad de estaño encontrada cuando el tiempo de reflujo es de 30 minutos es una variable aleatoria con distribución $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y dicha distribución es $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ cuando el tiempo de reflujo es de 70 minutos. ¿Encuentra evidencia a nivel 5% de que las medias de estaño para los dos tiempos de ebullición son diferentes?

9. En una estación del INTA se divide un terreno en 30 parcelas homogéneas. Las parcelas se encuentran separadas entre ellas por un área de borde que no se siembra, de modo que los resultados de distintas parcelas se pueden considerar independientes. En 15 de ellas elegidas al azar se utiliza el fertilizante A y en las restantes el B. En las 30 parcelas se cultiva la misma variedad de maíz. Se supone que los rendimientos con el fertilizante A son variables aleatorias $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ y con el fertilizante B son $N(\mu_B, \sigma_B^2)$. Los resultados obtenidos son:

Parcelas con el fertilizante A							
238	237	235	220	233	203	228	220
221	215	218	217	232	225	209	

Parcelas con el fertilizante B							
253	227	241	245	237	248	250	218
239	243	257	208	215	240	229	

   (a) Proponga un test para $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contra $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$.

   (b) Proponga un test para $H_0 : \mu_A = \mu_B$ contra $H_1 : \mu_A < \mu_B$. ¿Hubiera podido anticipar su conclusión (rechazar H_0 o no hacerlo) a partir de las cuentas realizadas en a)?

   (c) Verifique que se satisfagan los supuestos del test.

   (d) Construya un intervalo de confianza de nivel 0.95 para la diferencia de rendimiento promedio entre los fertilizantes.

(e) Responda a las preguntas a) y b) si en realidad los datos corresponden a 15 parcelas cada una dividida en 2 de forma que en una mitad se usó el fertilizante A y en la otra el B. ¿Qué supuesto debe hacerse para que este test sea válido? Verifíquelo.

10. Se comparó un método espectroscópico de absorción atómica de llama para determinar antimonio en la atmósfera con el método colorimétrico recomendado. Para seis muestras de atmósfera urbana se obtuvieron los siguientes resultados:

Antimonio encontrado (mg/m^3)		
Muestra	Método standard	Método nuevo
1	25.0	23.8
2	19.5	19.0
3	16.6	15.9
4	21.3	20.4
5	20.7	19.6
6	16.8	15.8

(a) ¿Difieren significativamente las medias de ambos métodos? Antes de aplicar un test, observe si es razonable hacer las suposiciones correspondientes.

(b) En caso de que responda afirmativamente a la pregunta anterior, calcule un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de las medias.

11. En la construcción de un edificio debe usarse un concreto que tenga tensión media mayor a 300 psi. Para verificar si el concreto preparado a partir del cemento “Loma Blanca” cumple con este requerimiento, se realizan 60 mediciones independientes de la tensión de este concreto. Se observa una media muestral de 304 psi y un desvío estándar muestral de 20 psi.

(a) Plantee un test de nivel asintótico 5% para decidir si hay evidencia de que el concreto preparado a partir del cemento “Loma Blanca” cumple con las especificaciones.

(b) Calcule el p-valor.

(c) En base al resultado del ítem (b), decir cuál sería la conclusión de un test de nivel asintótico 10%.

12. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria $Bi(1, p)$.

(a) Proponga un test asintótico de nivel α para $H_0 : p = p_0$ contra $H_1 : p \neq p_0$.

(b) Se tiene la hipótesis de que en una población de insectos la proporción de machos y de hembras es la misma, es decir que la proporción de hembras y de machos es 0.5. Testear esta hipótesis a nivel 0.05 sabiendo que se tomaron 100 insectos obteniéndose 43 machos.

(c) ¿Qué test utilizaría si sospechara que el porcentaje de hembras es mayor que el de machos?