

Péndulos Acoplados No Lineales con Forzamiento Armónico

Camilo R. Rodríguez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Noviembre 2025

Introducción

- Se estudia el comportamiento dinámico de dos péndulos acoplados con interacción no lineal cúbica.
- El sistema incluye amortiguamiento viscoso y forzamiento externo periódico.
- Objetivo: analizar transferencia de energía, sincronización, resonancia y transición al caos.

Modelo físico

Ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= -\frac{g}{l} \sin \theta_1 - \gamma \dot{\theta}_1 - \kappa(\theta_1 - \theta_2)^3 + F_0 \cos(\omega_f t), \\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{g}{l} \sin \theta_2 - \gamma \dot{\theta}_2 - \kappa(\theta_2 - \theta_1)^3.\end{aligned}$$

Potencial de acoplamiento:

$$V_c = \frac{\kappa}{4}(\theta_1 - \theta_2)^4$$

Fuerza de acoplamiento:

$$F_c = -\frac{\partial V_c}{\partial \theta_1} = -\kappa(\theta_1 - \theta_2)^3$$

Energía total del sistema

$$E_T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + mgl(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \frac{\kappa}{4}(\theta_1 - \theta_2)^4$$

- En ausencia de amortiguamiento y forzamiento, E_T se conserva.
- Para $\gamma = 0$, $F_0 = 0$ se verifica la conservación aproximada de energía:

$$\frac{E_T(t) - E_T(0)}{E_T(0)} \approx 10^{-4}.$$

- Esto valida la precisión del integrador RK4.

Métodos numéricos

- Se implementaron dos métodos de integración:
 - **Euler–Cromer**: rápido pero menos preciso.
 - **Runge–Kutta 4 (RK4)**: mayor precisión, usado por defecto.
- Paso temporal: $\Delta t = 10^{-3}$.
- Se comprobó estabilidad y convergencia en régimen forzado y libre.

Transferencia de energía

Energía individual de cada péndulo:

$$E_i(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_i^2 + mgl(1 - \cos\theta_i)$$

$$E_T(t) = E_1(t) + E_2(t) + \frac{\kappa}{4}(\theta_1 - \theta_2)^4$$

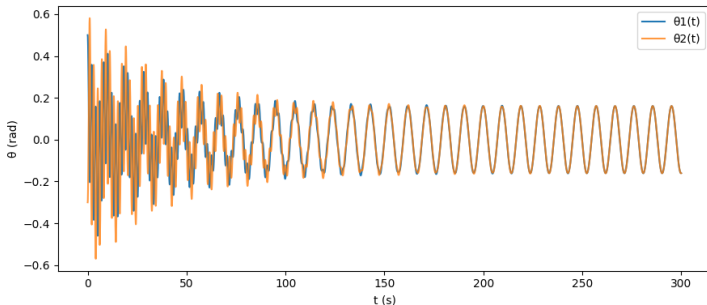


Figure 1: Evolución angular $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ mostrando transferencia de energía.

Transferencia de energía (continuación)

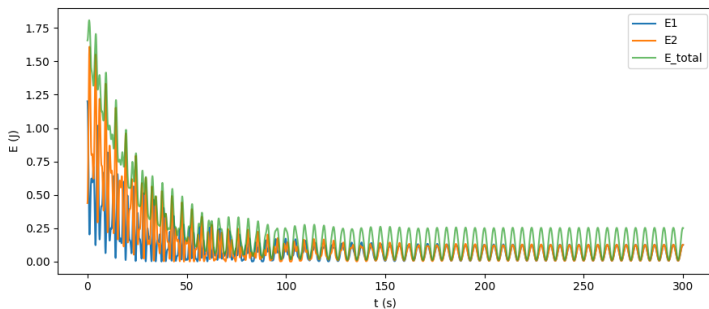


Figure 2: Energías individuales y total. Se observa transferencia irregular y disipación por amortiguamiento.

Mismos parámetros que la figura anterior.

Espacios fase

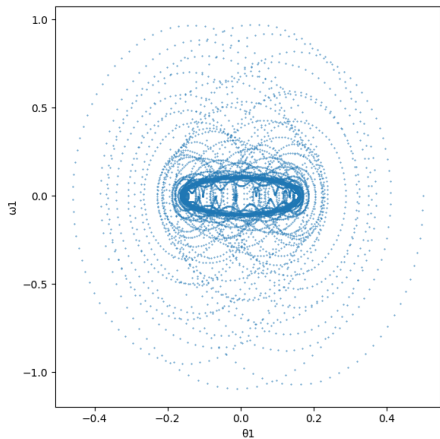


Figure 3: Espacio fase péndulo 1.

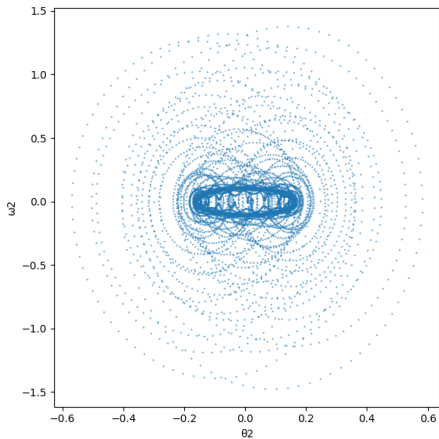


Figure 4: Espacio fase péndulo 2.

Interpretación: El sistema muestra órbitas cerradas para movimientos regulares y trayectorias densas en régimen caótico.

Análisis espectral y caos

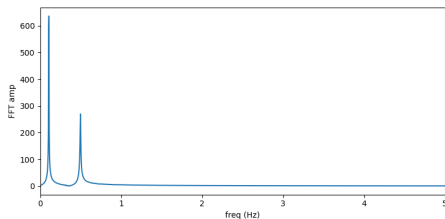


Figure 5: FFT de $\theta_1(t)$: múltiples frecuencias indican caos.

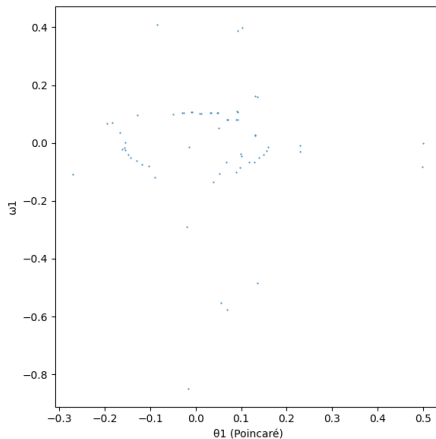


Figure 6: Sección de Poincaré: estructura fractal y dispersa.

Parámetros: $\kappa = 0.5$, $F_0 = 0.3$, $\omega_f = 1.0$, $\gamma = 0.05$.

Barrido de resonancia

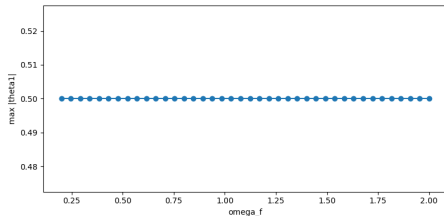


Figure 7: Curva de resonancia: amplitud vs frecuencia de forzamiento.

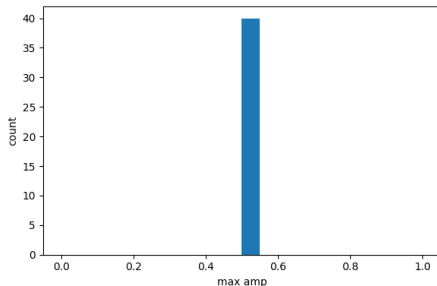


Figure 8: Histograma de amplitudes de respuesta.

Conclusión: la no linealidad modifica la frecuencia de resonancia y genera sincronización parcial.

Conclusiones

- El acoplamiento no lineal simétrico $\propto (\theta_1 - \theta_2)^3$ es físicamente coherente y genera fenómenos complejos.
- Se observan modos simétricos, transferencia de energía y caos determinista.
- El integrador RK4 mantiene la precisión y estabilidad del sistema.
- Las gráficas de fase, energía y Poincaré muestran transición orden-caos al aumentar κ y F_0 .

Trabajo futuro

- Estudiar sincronización parcial y patrones de fase.
- Analizar bifurcaciones de Hopf al variar κ y γ .
- Extender a redes de péndulos acoplados para explorar modos colectivos.

¡Gracias!