Trabalho 1 - Amortecedores Ativos
Equações Diferenciais Numéricas
Alunos: Romeu e Gustavo

O Problema

Avanços recentes nas ciências dos materiais têm criado "fluidos inteligentes" (fluidos MR ou MR fluids) que mudam suas propriedades quando expostos a um campo magnético. Se um fluido MR é colocado em um amortecedor, uma mudança no campo magnético aplicado pode alterar as propriedades do fluido relativas ao amortecimento, de forma que o coeficiente de amortecimento é ajustado dinamicamente. Estes amortecedores " ativos" têm encontrado aplicação em diversos objetos como máquinas de lavar, próteses e suspensões de carros.

Uma das primeiras aplicações desta tecnologia é o Sistema de Gerenciamento Motion Master Ride (Motion Master Ride Management System), um amortecedor ativo utilizado em assentos de caminhões e ônibus.

O movimento harmônico de oscilação com amortecimento é descrito pela equação:

$$F = F_{ext} - kx - c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}.$$

Como o movimento será vertical mudamos para variável y:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b(v)\frac{dy}{dt} + ky = 0,$$

Aqui trocamos a constante *c* pelo coeficiente de amortecimento *b(v),* que é modelado em função da velocidade.

Para uma " viagem perfeita", gostaríamos de ter $k = 0$ e coeficiente de amortecimento $b = 0$. Nesse caso, o assento flutuaria acima do caminhão. Por razões óbvias, o assento tem que estar ligado ao caminhão, então alguma das duas constantes tem que ser não nula. Na prática, os desenhadores tem que estabelecer um compromisso entre ter *b* pequeno (um passeio agradável com o perigo de grandes solavancos) e um *b* grande (proteção contra grandes solavancos, mas um passeio desconfortável). Outra constante, a massa de um motorista típico, também deve ser levada em conta como um fator importante na escolha de *b*.

Para este trabalho, assumimos que as unidades foram escolhidas da forma $k = m = 1$, e estudaremos a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b(v)\frac{dy}{dt} + y = 0. \qquad (1)$$

Quando a velocidade vertical do banco é próxima de zero, precisamos ter pouco amortecimento de forma que pequenos solavancos não sejam transmitidos ao assento.

Quando a velocidade vertical do assento é grande, precisamos que *b(v)* seja grande para evitar que ele desça ou suba muito. Estes critérios dão bastante liberdade na escolha da função *b(v).*

Neste trabalho, consideramos o comportamento do assento de um caminhão para três possíveis escolhas da função de amortecimento *b(v)*:

- $b(v) = v^4$
- $b(v) = 1 - e^{-10v^2}$
- $b(v) = arctan(v)$

Proposta

Como não conhecemos uma solução de (1) à priori e (1) não é linear, não podemos solucionar o problema diretamente. Uma alternativa é transformar (1) em um sistema de equações diferenciáveis de primeira ordem, e adicionar condições iniciais para definir um sistema de PVIs:

$$\begin{cases} y' = v & y(t_0) = y_0 \\ v' = -y - b(v)v & v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Agora estamos aptos de resolver esse sistema através de algum método numérico para solução aproximada de EDO's. Euler, Escolhemos o Runge Kutta de ordem 4 e Adams Bashforth Moulton de ordem 4 para fazer comparações. Basta então algumas modificações simples neste método para resolver dois PVIs simultaneamente.

A seguir vamos variar as condições iniciais e fazer uma análise, através de gráficos nos planos (t,y), (t,v) e (y,v), sobre o comportamento do banco do motorista dadas as três funções de amortecimento e decidir qual seria a escolha perfeita (dentre as três) para diferentes tipos de veículos, em diferentes tipos de estradas.

Resultados

Tempo e número de avaliações de b(v)

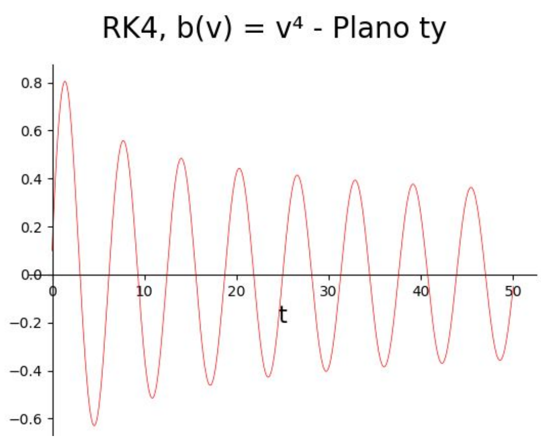
	v4	exp	arct	
	time			f
Euler	0.4022471905	0.4161081314	0.3749756813	25900
RK4	0.0468776226	0.04687070847	0.04687213898	2800
ABM4	0.06247544289	0.07812023163	0.06249189377	5576

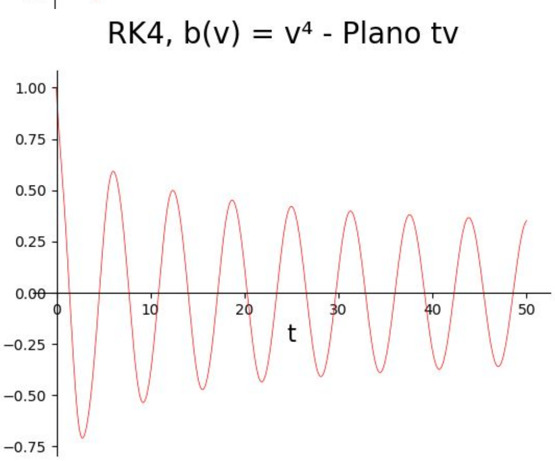
O método de Euler precisa de 3 iterações para resolver o problema, enquanto RK4 e ABM4 já tem a aproximação desejada na primeira iteração. Os resultados de RK4 e ABM4 são bem similares sendo que RK4 tem desempenho relativamente melhor, dado que não conseguimos verificar de fato o erro global com o problema, pois não possuímos a solução exata.

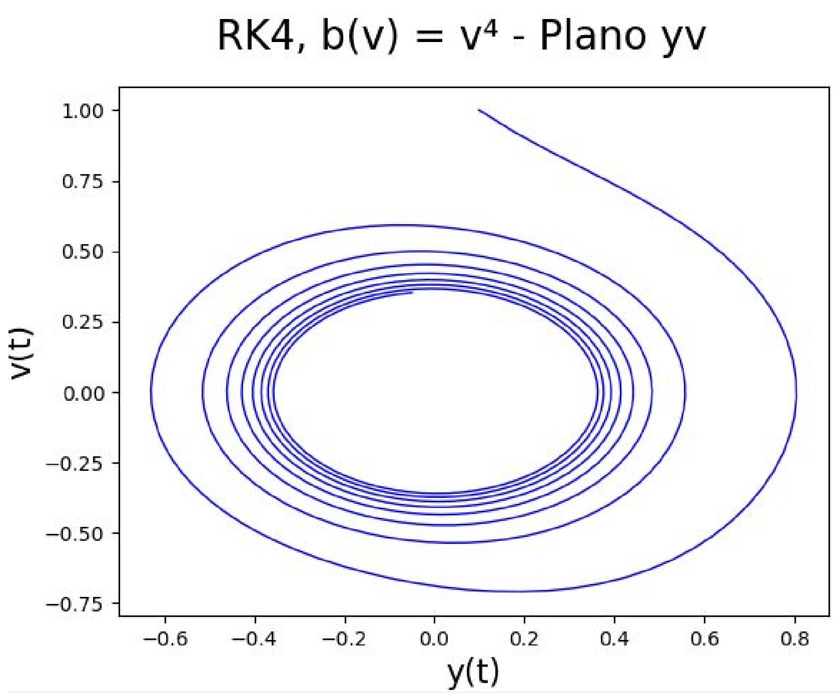
Gráficos

Os gráficos são praticamente idênticos para os três métodos para as *b(v) = v^4* e *b(v) = 1-e^(-10v²)*, apresentaremos para estas duas funções apenas os métodos RK4 e ABM4, respectivamente.

b(v) = v^4 (y0=0.1, v0=1, t0=0, t=50, n=100)

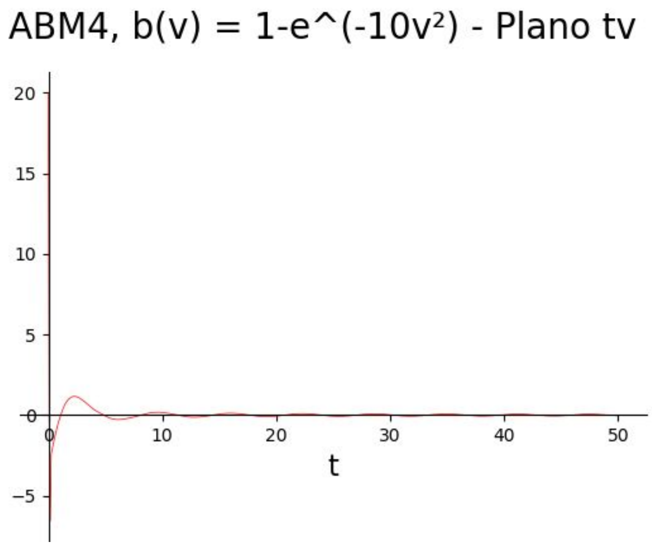


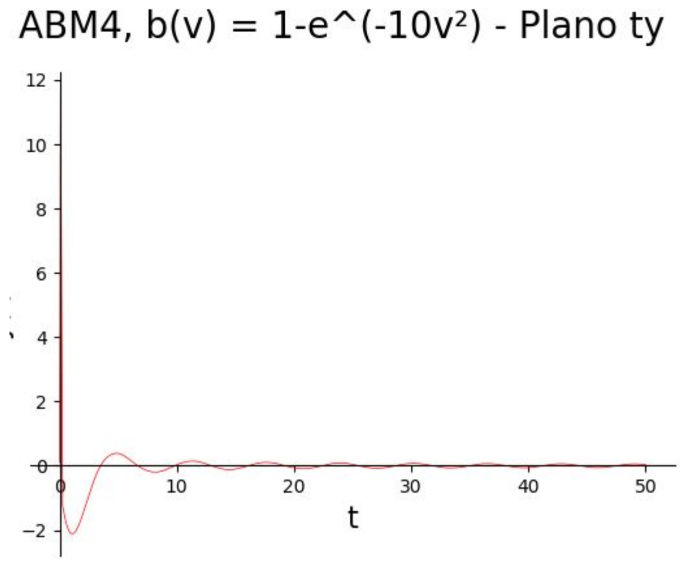


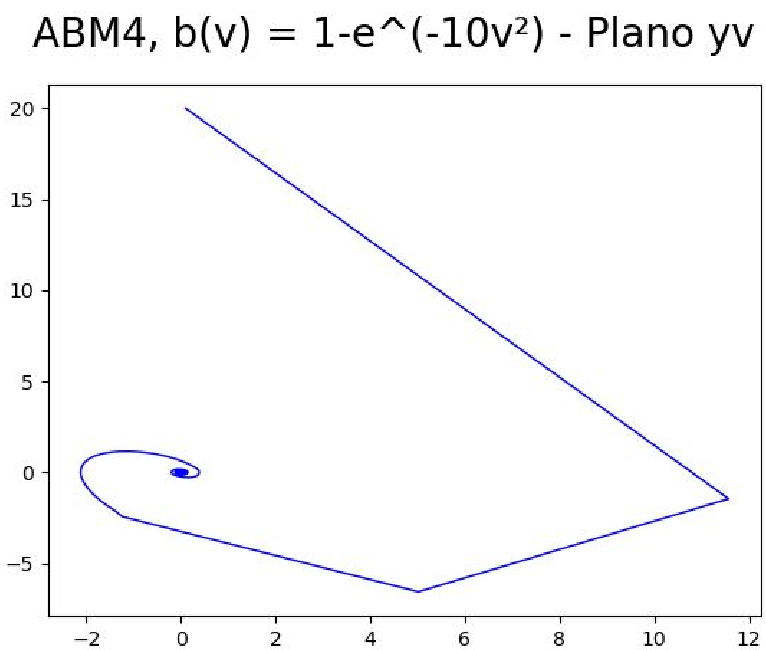


Este método entre os estudados mantém um equilíbrio entre conforto e amortecimento, pois as variações no eixo y não são tão exageradas, nem tão pequenas.

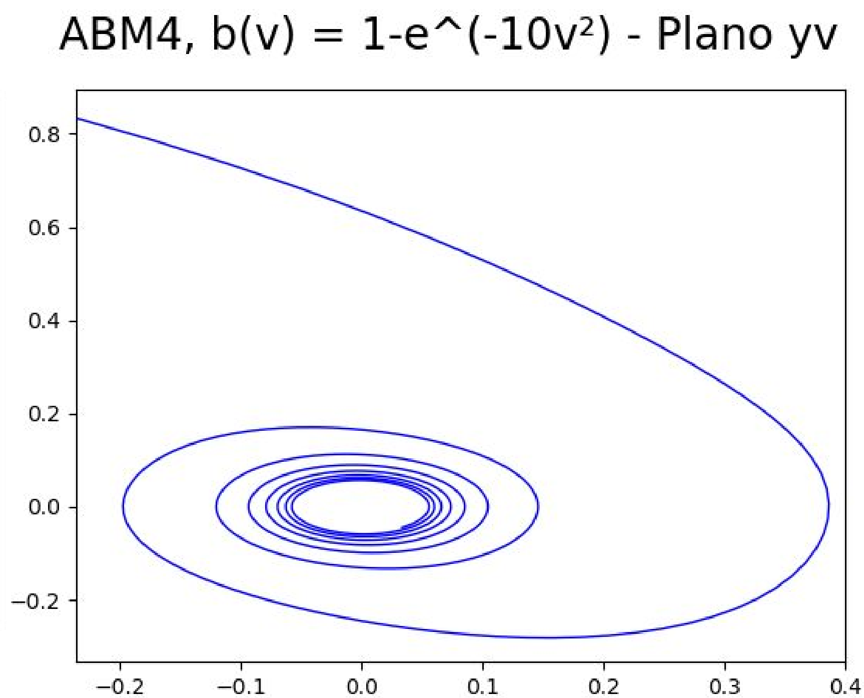
b(v) = 1-e^(-10v²) (y0=0.1, v0=20, t0=0, t=50, n=100)







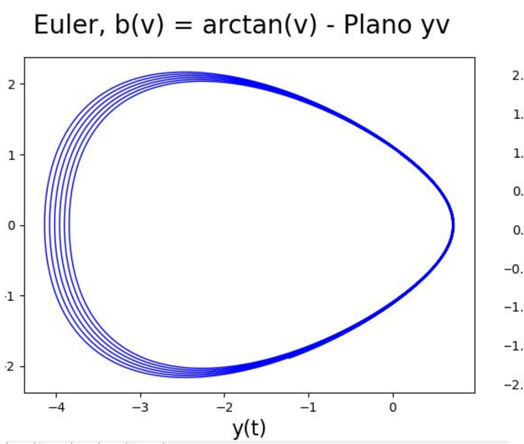
Zoom:

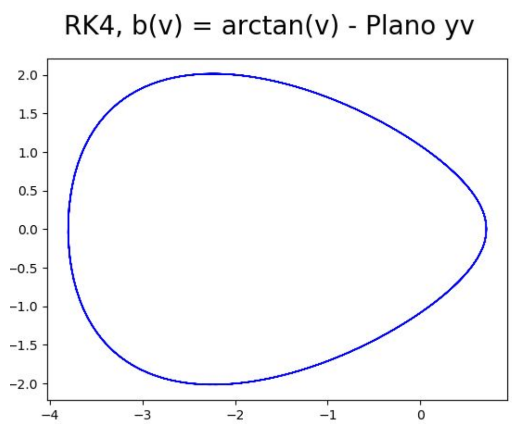


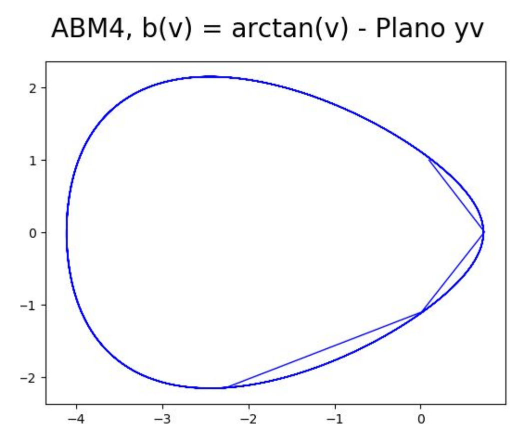
Obs: Este método requer ser inicializado por algum outro método, utilizamos o RK4 (pois são métodos de mesma ordem, obtendo assim uma melhor aproximação) para calcular os três primeiros pontos aproximados da solução. Por este motivo as primeiras curvas no plano yv são retas.

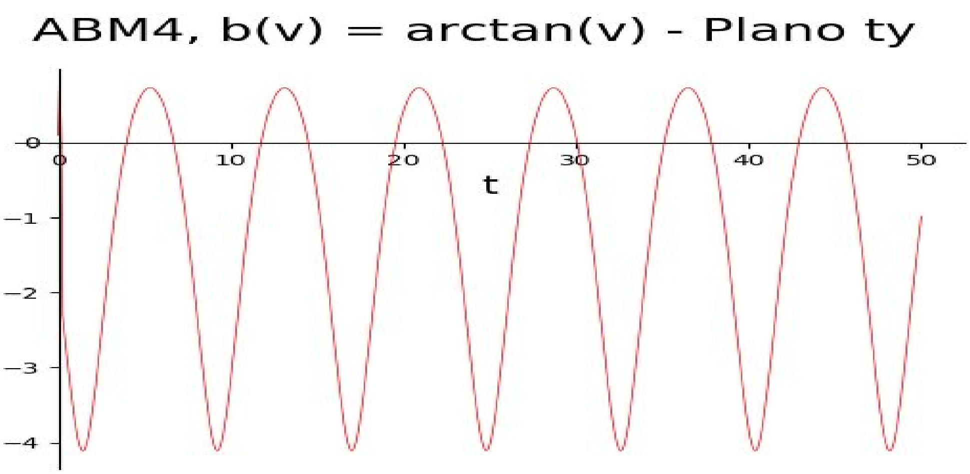
Está função *b(v)* é ideal para maximizar o amortecimento, dado que o quando o banco recebe grande velocidade vertical, retorna rapidamente para a posição original, o que pode não ser muito confortável.

b(v) = arctan(v) (y0=0.1, v0=1, t0=0, t=50, n=100)









Como os gráficos nos planos ty, e tv são praticamente os mesmos, apresentamos apenas o gráfico tv do método ABM4. Para esta função *b(v)* notamos que a ideal aplicação seria em assentos de veículos que não circulam em estradas irregulares, dado que mudanças na velocidade do acento são pouco amortecidos. Porém caso a velocidade no banco seja mínima, o motorista terá um viagem bastante confortável.

Para esta função, podemos ilustrar como o método de Euler demora para convergir para solução esperada comparado com os outros dois métodos de ordem 4.