

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ICEx-Departamento de Matemática

Primeira lista de EDN - Existência e unicidade - 2018/II

Professora: Aniura Milanés

Data de entrega: 18/09

**Exercício 1.**

Uma maneira mais precisa de escrevermos o método de Euler seria

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) + \rho_{j+1}$$

onde cada  $\rho_{j+1}$ ,  $0 \leq j \leq N-1$  representa o erro introduzido pela avaliação inexata de  $y_j + hf(t_j, y_j)$  produto dos erros de arredondamento associados à aritmética finita e  $\rho_0 = \varphi(t_0) - y_0$  é o erro de arredondamento cometido avaliando  $\varphi(t_0)$ .

Utilize cálculos similares aos que fizemos em sala para provar que o erro de aproximação em cada ponto da malha satisfaz

$$|\varphi(t_j) - y_j| \leq e^{L(t_j-a)} \left[ \frac{1}{L} \left( \frac{hM}{2} + \frac{\rho}{h} \right) + |\rho_0| \right]$$

onde  $M = \max_{t \in [a,b]} |\varphi''(t)|$ ,  $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$  e  $\rho = \max_{1 \leq j \leq N} |\rho_j|$ .

**Exercício 2.**

Dado o PVI  $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{2y}{t} + t^2 e^t, & 1 \leq t \leq 2; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

- (a) Mostre que  $\varphi(t) = t^2(e^t - e)$  é a única solução do PVI.
- (b) Aplique o método de Euler com  $h = 0.2$  e monte uma tabela com colunas  $t_j$ ,  $y_j$  e  $|\varphi(t_j) - y_j|$ .
- (c) Repita o procedimento anterior com  $h = 0.1$ . Comente os resultados.
- (d) Use as respostas do item anterior e interpolação linear para aproximar  $y(1,97)$  e compare com o valor exato. Explique.
- (e) Usando a fórmula da questão anterior supondo  $|\rho_0| = \rho = 5 \times 10^{-9}$  se for usada aritmética de 8 dígitos, calcule a cota superior que essa desigualdade nos fornece para o erro em cada passo dos itens (b) e (c). Compare estes valores com os erros reais obtidos em (b) e (c).
- (f) Determine o valor  $h^*$  que minimiza a função  $\frac{hM}{2} + \frac{\rho}{h}$ . O que significa o valor obtido? O que aconteceria se tivéssemos utilizado este valor nos itens (b) e (c)?
- (g) Para cada um dos valores  $h_k = 0.025 \times k$ ,  $1 \leq k \leq 10$ , calcule o erro  $E(h) = \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi(t_j) - y_j|$ . Plote os valores de  $E(h)$ . O mínimo desta função fica perto do  $h^*$  que você calculou acima?

**Exercício 3.**

Deduza o Método de Taylor de ordem 3 e mostre que seu erro de truncamento local é de fato  $O(h^3)$ .

**Exercício 4.**

O objetivo deste exercício é analisar a convergência das soluções aproximadas do PVI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2(y-1)}, \quad y(0) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$$

com  $\varepsilon = 0,001$  utilizando os diferentes métodos que são listados abaixo.

- Método de Euler

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j)$$

- Método de Heun

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_j + hf(t_j, y_j))]$$

- Método do Ponto Médio

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(t_j, y_j)\right)$$

- Método de Taylor de ordem 3 (deduzido por você no item anterior)

- Método de Runge - Kutta de quarta ordem (RK4)

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],$$

$$k_1 = f(t_j, y_j)$$

$$k_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_{j+1}, y_j + hk_3)$$

A solução exata deste PVI é

$$\varphi(t) = 1 + \sqrt{t + \varepsilon}.$$

Você deve começar fixando um valor do erro de discretização global ( $E(h)$ ) máximo admissível. A seguir, divida o intervalo  $[0, 4]$  em 4 subintervalos e continue reduzindo o tamanho do passo pela metade até você atingir a precisão desejada para cada método. Perceba que é possível que o valor de  $h$  adequado seja diferente para métodos diferentes.

Para cada método usado, faça gráficos com as soluções numéricas que você encontrou junto com a solução exata e retorne também os valores de  $h$  usados. Discuta os resultados obtidos.