UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ICEx-Departamento de Matemática

Primeira lista de EDN - Existência e unicidade - 2018/II

Professora: Aniura Milanés

Data de entrega: 18/09

Exercício 1.

Uma maneira mais precisa de escrevermos o método de Euler seria

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) + \rho_{j+1}$$

onde cada $\rho_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq N-1$ representa o erro introduzido pela avaliação inexata de $y_j + hf(t_j, y_j)$ produto dos erros de arredondamento associados à aritmética finita e $\rho_0 = \varphi(t_0) - y_0$ é o erro de arredondamento cometido avaliando $\varphi(t_0)$.

Utilize cálculos similares aos que fizemos em sala para provar que o erro de aproximação em cada ponto da malha satisfaz

$$|\varphi(t_j) - y_j| \leq e^{L(t_j - a)} \left[\frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\rho}{h} \right) + |\rho_0| \right]$$

onde $M = \max_{t \in [a,b]} |\varphi''(t)|$, $|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$ e $\rho = \max_{1 \leq j \leq N} |\rho_j|$.

Exercício 2.

Dado o PVI $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2y}{t} + t^2 e^t, \quad 1 \leq t \leq 2; \\ y(1) = 0. \end{cases}$

(a) Mostre que $\varphi(t) = t^2(e^t - e)$ é a única solução do PVI.

(b) Aplique o método de Euler com $h = 0.2$ e monte uma tabela com colunas t_j, y_j e $|\varphi(t_j) - y_j|$.

(c) Repita o procedimento anterior com $h = 0.1$. Comente os resultados.

(d) Use as respostas do item anterior e interpolação linear para aproximar $y(1,97)$ e compare com o valor exato. Explique.

(e) Usando a fórmula da questão anterior supondo $|\rho_0| = \rho = 5 \times 10^{-9}$ se for usada aritmética de 8 dígitos, calcule a cota superior que essa desigualdade nos fornece para o erro em cada passo dos itens (b) e (c). Compare estes valores com os erros reais obtidos em (b) e (c).

(f) Determine o valor h^* que minimiza a função $\dfrac{hM}{2} + \dfrac{\rho}{h}$. O que significa o valor obtido? O que aconteceria se tivéssemos utilizado este valor nos itens (b) e (c)?

(g) Para cada um dos valores $h_k = 0.025 \times k, \quad 1 \leq k \leq 10$, calcule o erro $E(h) = \max_{1 \leq j \leq N} |\varphi(t_j) - y_j|$. Plote os valores de $E(h)$. O mínimo desta função fica perto do h^* que você calculou acima?

Exercício 3.

Deduza o Método de Taylor de ordem 3 e mostre que seu erro de truncamento local é de fato $O(h^3)$.

Exercício 4.

O objetivo deste exercício é analisar a convergência das soluções aproximadas do PVI

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2(y-1)}, \quad y(0) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$$

com $\varepsilon = 0,001$ utilizando os diferentes métodos que são listados abaixo.

- Método de Euler
$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j)$$
- Método de Heun
$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}[f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_j + hf(t_j, y_j))]$$
- Método do Ponto Médio
$$y_{j+1} = y_j + hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f(t_j, y_j)\right)$$
- Método de Taylor de ordem 3 (deduzido por você no item anterior)
- Método de Runge - Kutta de quarta ordem (RK4)

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}[k_1 + k_2 + k_3 + k_4],$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_{j+1}, k_3) \end{aligned}$$

A solução exata deste PVI é

$$\varphi(t) = 1 + \sqrt{t + \varepsilon}.$$

Você deve começar fixando um valor do erro de discretização global ($E(h)$) máximo admissível. A seguir, divida o intervalo $[0, 4]$ em 4 subintervalos e continue reduzindo o tamanho do passo pela metade até você atingir a precisão desejada para cada método. Perceba que é possível que o valor de h adequado seja diferente para métodos diferentes.

Para cada método usado, faça gráficos com as soluções numéricas que você encontrou junto com a solução exata e retorne também os valores de h usados. Discuta os resultados obtidos.