UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ICEx-Departamento de Matemática

Projeto II: implementaçao em Python de métodos de diferenças para a resolução de problemas para a equação do calor - EDN - 2018/II

Professora: Aniura Milanés

Data de entrega:

Problemas:

1. **Lucas e Louise**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 < x < 1, t \geq 0;$$
$$u(0,t) = 2(t^2 - 1), \quad u(1,t) = -2(t^2 - 1);$$
$$u(x,0) = 0.$$

Sugestão: Usar o exercício 5 da lista 5 para achar a solução aproximada.

2. **Erick e Pedro Henrique**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad -1 < x < 1, t \geq 0;$$
$$u(-1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0;$$
$$u(x,0) = |x|^{1/2} - x^2.$$

3. **Emanuel e Josué**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 < x < 1, t \geq 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} 2\left|x - \frac{1}{6}\right| - \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}; \\ 0, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{2} - 3\left|x - \frac{5}{6}\right|, & \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}.$$

4. **Gustavo e Romeu**

$$\partial_t u = 10\partial_x^2 u, \quad 0 < x < \pi, t \geq 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{4}{\pi}\left(\frac{3\pi}{4} - x\right), & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

5. **Breno e Artur**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 < x < 10, t \geq 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(10,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x \leq 2; \\ 11 - 5x, & 2 \leq x \leq 3; \\ 5x - 19, & 3 \leq x \leq 4; \\ 5 - x, & 4 \leq x \leq 5; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

6. **Francisco e Mírian**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 < x < 1, t \geq 0;$$
$$\partial_x u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(1,t) = 0;$$
$$u(x,0) = \frac{1}{2} + \cos(2\pi x) - \frac{1}{2}\cos(3\pi x).$$

7. **Brenner e Cleiton**

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 < x < 1, t \geq 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(1,t) = 0;$$
$$u(x,0) = -3\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}x\right).$$

Tarefas:

- Obtenha a solução exata ou uma aproximação dela com cinco casas decimais.
- Implemente o método das Diferenças Progressivas usando $T = 0.5$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1/2$ e $\lambda = 1/6$ e $M = 4$, $M = 8$, $M = 10$, $M = 12$ e $M = 14$. Você deve reportar seus resultados através de tabelas com os valores de $|e_{m,j}|$ e de gráficos de $v_{m,j}$ e de $u(\cdot, t_j)$.
- Faça o mesmo com método das Diferenças Regressivas.
- Faça o mesmo com o método de Crank-Nicolson.
- Discuta seus resultados.
- Se possível, faça um estudo teórico e numérico do comportamento da solução quando t cresce.

Observação:

Se seu problema tiver uma condição de fronteira contendo uma derivada em relação a x, você pode

- utilizar a aproximação de diferenças finitas que é de primeira ordem, ou;
- utilizar a aproximação unilateral de segunda ordem

$$\partial_x u(x_0, t_j) \approx \frac{-3u(x_0, t_j) + 4u(x_1, t_j) - u(x_2, t_j)}{2\Delta x},$$

  ou

- usar a aproximação de segunda ordem

$$\partial_x u(x_0, t_j) \approx \frac{u(x_1, t_j) - u(x_{-1}, t_j)}{2\Delta x},$$

  e o esquema numérico em x_0 para eliminá-lo.