

Régime variable

Romain Gille

October 7, 2015

1 Equations de Maxwell dans le vide

Vide rempli de charges $\rho(\vec{r}, t)$ et de courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$

1.1 Equation de Maxwell-Faraday

Quelque soit le cas considéré, il se ramène à la variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit contenant le courant induit.

De plus, le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre qu'il crée tend à s'opposer à la variation du champ magnétique qui lui a donné naissance : c'est la loi de Lenz.

La circulation de la force motrice :

$$e = \frac{1}{q} \oint_C \vec{f}_m \cdot d\vec{l}$$

1.1.1 Lois de Faraday

Expérimentalement, il a été déterminé que

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = q\vec{E}$$

On utilise la formule de la circulation

$$\vec{F}_m = q\vec{E} \Rightarrow e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

J'applique le théorème de Stokes-Ampère

$$e = \iint_S \vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S \vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_S [\vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}] = 0$$

$$\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad : \text{Équation de Maxwell-Faraday}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{r} \operatorname{ot} \vec{E}) &= 0 = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{B}) \\
\Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} &= f(\vec{r}) \quad \text{or pas de monopôle magnétique} \\
\Rightarrow f(\vec{r}) &= 0
\end{aligned}$$

En régime variable aussi :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

1.2 Loi de Maxwell-Gauss

Dans le régime variable, la loi de Gauss est toujours valable.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}$$

1.3 Loi de Maxwell-Ampère

1.3.1 Loi de conservation de charge

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \iiint_V \rho d\tau \\
\frac{dQ(t)}{dt} &= \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \\
\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r}, t) d\tau &= - \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \cdot d\tau \\
\Rightarrow \iiint_V \left[\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right] \cdot d\tau &= 0 \\
\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \quad : \text{équation de la continuité}
\end{aligned}$$

1.3.2 Equation de Maxwell-Ampère

La loi $\vec{r} \operatorname{ot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ n'est plus valable.

Par contre $\vec{r} \operatorname{ot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{f}(\vec{r}, t)$ est plus général et variable.

Déterminons $\vec{f}(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\vec{r} \text{ot} \vec{B}) = 0 &= \mu_0 \text{div} \vec{j} + \text{div} \vec{f}(\vec{r}, t) \\
 &= -\mu_0 \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{f}(\vec{r}, t) \\
 &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div} \vec{E}) + \text{div} \vec{f}(\vec{r}, t) \\
 &= -\mu_0 \epsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \text{div} \vec{f}(\vec{r}, t) \\
 &= \text{div} \left[-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{f}(\vec{r}, t) \right] = 0 \\
 \Rightarrow \vec{f}(\vec{r}, t) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 \vec{r} \text{ot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad : \text{Maxwell} \rightarrow \text{densité de courant de déplacement}
 \end{aligned}$$

\vec{E} et \vec{B} forment un ensemble indissociable que l'on nomme le champ électromagnétique.

Propriétés de symétrie du champ électromagnétique

Attention : L'étude des symétries n'est pas aussi simple que dans les régimes statiques. Dans le régime variable les termes $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ modifient les symétries.