ESIEE E2
Le champ magnétostatique

Romain Gille

September 26, 2015

1 Le courant électrique

1.1 Densité volumique de courant

Dans un référentiel donné, un courant électrique traduit un mouvement d'ensemble de charges électriques.
Imaginons un petit volume $d\tau$ centré sur un point P dans lequel des charges en densité $\rho(P)$ se déplacent à la même vitesse $\vec{v}$.
On définit le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}(P)$ par $\vec{j}(P) = \rho(P)\vec{v} \quad en \quad A.m^{-2}$.

Remarque :

- S'il existe des charges différentes 'i' en densité ρ_i avec une vitesse $\vec{v}_i$:

$$\vec{j}(P) = \sum_i \vec{j}_i(P) = \sum_i \rho_i(P)\vec{v}_i$$

- $\rho(P)$ est la densité de charge qui se déplacent.

- Si on impose un champ électrique $\vec{E}_{ext}$: la force subie par chaque charge est de la forme $\vec{F} = q\vec{E}$.
  Dans un métal, seuls certains électrons sont capables de quitter les atomes d'origine. On les appelle électrons libres.
  Posons n_+ densité de charges supérieure à 0 par unité de volume : $\rho_+(P) = n_+e$.
  Posons n_- densité de charges inférieure à 0 par unité de volume : $\rho_-(P) = n_-e$.

$$n_+ = n_- = n \qquad \rho_+(P) + \rho_-(P) = ne(1-1) = 0 = \rho(P)$$

  Sous l'effet de $\vec{E}$ supposons n_i^- électrons libres avec une vitesse

$$\vec{v} \quad : \quad \vec{j} = n_i^-(-e)\vec{v}$$

  L'intensité d'un courant est le nombre de charges qui traversent par unité de temps une surface donnée (Σ_i)

$$dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho d\tau}{dt} = \frac{\rho v dt dS}{dt}$$

  ρ est la charge contenue dans le tube de courant de longueur vdt et de section dS.

$$I = \iint_\Sigma \vec{j}.\vec{dS} \quad en \quad A.$$

1.2 Densité surfacique de courant

Si le courant volumique se répartit sur une faible épaisseur (cas de conducteur en ruban) on invente une densité surfacique de courant $\vec{j}_s = \sigma\vec{v}$ (σ densité surfacique de courant).

$$\vec{j}_s = \vec{j}_v.h$$

1.3 Densité linéique

On associe à $\vec{j}_v$ un courant linéique d'intensité I.

2 Origine du champ magnétostatique

2.1 Loi de Biot et Savart

$$\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl} \wedge \vec{P}M}{PM^3}$$

Remarque :

Avec $\vec{j}(P)$ on remplace $I\vec{dl}$ par $\vec{j}(P)d\tau$.
Avec $\vec{j_s}(P)$ on remplace $I\vec{dl}$ par $\vec{j_s}dS$.
Si les courants sont confinés dans le volume Ω, le champ magnétique total est la somme des champs magnétiques élémentaires.
On applique donc le principe de superposition :

$$ex \ : \quad \vec{B}(M) = \iiint_{\Omega} \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(P)\frac{d\tau \wedge \vec{P}M}{PM^3}$$

Remarque :

$$\frac{\vec{P}M}{PM^3} = \frac{\vec{P}M}{PM}\frac{1}{PM^2} = \vec{u}_{PM}.\frac{1}{PM^2}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.
Dans le système internationnal : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}H.M^{-1}$.

3 Propriétés de symétrie

- Par rapport à un plan de symétrie
  - la composante de $\vec{B}(M)$ parallèle à ce plan est changée en son opposée.
  - la composante de $\vec{B}(M)$ perpendiculaire à ce plan est conservée $\vec{B}(M) = \vec{B}(M')$.
  - Si M appartient à un plan de symétrie de courant, $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan.
- Par rapport à un plan d'anti-symétrie
  - la composante de $\vec{B}(M)$ parallèle à ce plan est conservée.
  - la composante de $\vec{B}(M)$ perpendiculaire à ce plan est changée en son opposée.
  - Si M appartient à un plan d'anti-symétrie de courant, $\vec{B}(M)$ est parallèle à ce plan.
  - Si M apartient à deux plans d'anti-symétrie, $\vec{B}(M)$ a pour direction celle de la droite intersection des deux plans.

Ayant la direction de $\vec{B}(M)$, les invariances par rotation ou par translation (de la distribution de courant) permettent d'éliminer des variables. On évite des calculs.

4 Le théorème d'Ampère

Énoncé :

La circulation de $\vec{B}(M)$ sur un contour fermé Γ est égal à μ_0 fois l'intensité du courant qui traverse une surface Σ quelconque s'appuyant sur Γ.

$$\int_\Gamma \vec{B}(M \in \Gamma).\vec{dl} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_\Sigma \vec{j}(M \in \Gamma).\vec{dS}$$

Si on a déterminé la direction de $\vec{B}(M)$ et les variables dont il dépend, on essaie de trouver un contour Γ sur lequel $\vec{B}(M).\vec{dl} = B(M).dl$ au moins sur une partie.

Ex : Un fil dans lequel circule I, le fil est parallèle à Oz et il est infini.

- Point 1 ; Direction de $\vec{B}(M)$?
  - Tout plan défini par $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi)$ est plan de symétrie pour la distribution de courant. Pour tous M de l'espace, il appartient forcément à un de ces plans :
    $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\phi$.
  - Invariances ?
    - Oui par translation le long de $Oz \to B(M) = B(\rho, \phi)$
    - Oui par rotation autour de $Oz \to B(M) = B(\rho)$

$$\vec{B} = B(\rho)\vec{u}_\phi$$

- Point 2 : défini par Γ, contour fermé
  - Γ : cercle d'axe Oz, de rayon $\rho = OM$

$$dC_\Gamma = \vec{B}(M \in \Gamma).\vec{dl}$$

$$dC_\Gamma = B(\rho)\vec{u}_\phi.dl\vec{u}_\phi = B(\rho)dl$$

$$C_\Gamma = \int_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \int_\Gamma B(\rho)dl = B(\rho)\int_\Gamma dl = 2\pi\rho B(\rho)$$

Application au théorème d'Ampère :

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 \iint_{\Sigma sur\Gamma} \vec{j}.\vec{dS}$$