

ESIEE E2
Les équations locales

Romain Gille

September 26, 2015

1 Théorème de la divergence ou théorème de Green-Ostrogradsky

1.1 Enoncé du théorème

Si $\vec{A}(M)$ est un champ vectoriel partout défini et dérivable sur les domaines considérés, le flux de $\vec{A}(M)$ à travers toute la surface fermée Σ_f est égal à l'intégrale de sa divergence étendue à tout le domaine Ω délimité par Σ_f

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{A}(M \in \Sigma_f) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \text{div} \vec{A}(M \in \Omega) \cdot dT$$

1.2 Application au théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{E}(M \in \Sigma_f) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Avec le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \vec{E}(M \in \Omega) \cdot dT = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho(M \in \Omega) \cdot dT$$

$$\iiint_{\Omega} [\text{div} \vec{E}(M) - \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}] \cdot dT = 0$$

Equation de Maxwell-Gauss

$$\forall dT \Rightarrow \forall M \in \Omega \quad \text{div}(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

C'est une équation locale qui permet par exemple de déterminer $\vec{E}(M)$

1.3 Application au flux de \vec{B}

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{B}(M \in \Sigma_f) \cdot d\vec{S} = 0$$

Avec le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \vec{B}(M \in \Omega) \cdot dT = 0 \quad \forall dT \Rightarrow \forall M \quad \text{div} \vec{B}(M) = 0$$

Remarque :

$$\forall M \quad \text{div} \vec{B}(M) = 0$$

Signifie que $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}(M)$

Si $\vec{A}(M) = \vec{A}(M) + \vec{grad} f(M)$

$$\vec{rot} \vec{A}(M) = \vec{rot} \vec{A} + \vec{rot}(\vec{grad} f) = \vec{rot} \vec{A}$$

2 Théorème de Stocks

2.1 Enoncé

La circulation de $\vec{A}(M)$ sur un contours fermé Γ est égal au flux du rotationnel de \vec{A} à travers une surface Σ quelconque qui s'appuie sur Γ .

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M \in \Gamma) \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{A}(M \in \Sigma) \cdot d\vec{S}$$

2.2 Application au théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M \in \Gamma) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{A}(M \in \Sigma) \cdot d\vec{S}$$

Avec le théorème de Stokes :

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{B}(M \in \Sigma) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(M \in \Sigma) \cdot d\vec{S}$$

Théorème d'Ampère local :

$$\forall dS \Rightarrow \vec{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

On peut calculer $\vec{B}(M)$ à partir de cette relation.

2.3 Application à \vec{E}

En électrostatique, on établit :

$$\int_A^B \vec{E}(M \in AB) \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

Sur un contour fermé :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(M \in \Gamma) \cdot d\vec{l} = 0$$

Théorème de Stokes :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{E}(M \in \Sigma) \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{rot} \vec{E}(M) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ainsi en régime stationnaire $\forall M$:

$$div \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$div \vec{B}(M) = 0$$

$$\vec{rot} \vec{E}(M) = 0 \Rightarrow \exists V(M) \text{ tel que } \vec{E}(M) = -\vec{grad} V(M)$$

$$\vec{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}$$

2.4 En régime quasi-statique

$$fem = e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}(M \in \Gamma, t) \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B}(M \in \Sigma, t) \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{\Sigma} \vec{rot} \vec{E}(M \in \Sigma, t) \cdot d\vec{S} = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}(M \in \Sigma, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{rot} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

Un champ électrique peut être créé par une variation temporelle d'un champ magnétique.