Régime variable

Romain Gille

October 1, 2015

1 Equations de Maxwell dans le vide

Vide rempli de charges $\rho(\vec{r},t)$ et de courant $\vec{j}(\vec{r},t)$

1.1 Equation de Maxwell-Faraday

Quelque soit le cas considéré, il se ramène à la variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit contenant le courant induit.
De plus, le sens du courant induit est tel que le champ magnétique propre qu'il crée tend à s'opposer à la variation du champ magnétique qui lui a donné naissance : c'est la loi de Lenz.
La circulation de la force motrice :

$$e = \frac{1}{q}\oint_C \vec{f_m}.\vec{dl}$$

1.1.1 Lois de Faraday

Expérimentalement, il a été déterminé que

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS}$$

Force de Lorentz :

$$\vec{F_m} = q\vec{E}$$

On utilise la formule de la circulation

$$\vec{F_m} = q\vec{E} \Rightarrow e = \oint_C \vec{E}.\vec{dl}$$

J'applique le théorème de Stokes-Ampère

$$e = \iint_S \vec{r}ot\vec{E}.\vec{dS}$$

$$\iint_S \vec{r}ot\vec{E}.\vec{dS} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\vec{dS} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial}.\vec{dS}$$

$$\iint_S [\vec{r}ot\vec{E}.\vec{dS} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{dS}] = 0$$

$$\vec{r}ot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad : \text{Équation de Maxwell-Faraday}$$

$$\begin{aligned} div(\vec{r}ot\vec{E}) = 0 &= -div\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}(div\vec{B}) \\ &\Rightarrow div\vec{B} = f(\vec{r}) \quad \text{or pas de monopôle magnétique} \\ &\Rightarrow f(\vec{r}) = 0 \end{aligned}$$

En régime variable aussi :

$$div\vec{B} = 0$$

1.2 Loi de Maxwell-Gauss

Dans le régime variable, la loi de Gauss est toujours valable.

$$div\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0}$$

1.3 Loi de Maxwell-Ampère

1.3.1 Loi de conservation de charge

$$\begin{aligned} Q(t) &= \iiint_V \rho d\tau \\ \frac{dQ(t)}{dt} &= \iint \vec{j}.\vec{dS} \\ \frac{d}{dt}\iiint_V \rho(\vec{r},t)d\tau &= -\iiint_V div\vec{j}.d\tau \\ &\Rightarrow \iiint_V [\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + div\vec{j}].d\tau = 0 \\ \frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + div\vec{j} = 0 & \ \text{ : équation de la continuité} \end{aligned}$$

1.3.2 Equation de Maxwell-Ampère

La loi $\vec{r}ot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ n'est plus valable.

Par contre $\vec{r}ot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \vec{f}(\vec{r},t)$ est plus général et variable.

Déterminons $\vec{f}(\vec{r},t)$:

$$\begin{aligned}
div(\vec{r}ot\vec{B}) = 0 &= \mu_0 div\vec{j} + div\vec{f}(\vec{r},t) \\
&= -\mu_0 \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + div\vec{f}(\vec{r},t) \\
&= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 div\vec{E}) + div\vec{f}(\vec{r},t) \\
&= -\mu_0\epsilon_0 div(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) + div\vec{f}(\vec{r},t) \\
&= div[-\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{f}(\vec{r},t)] = 0 \\
&\Rightarrow \vec{f}(\vec{r},t) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\
&\vec{r}ot\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad : \text{Maxwell} \rightarrow \text{densité de courant de déplacement}
\end{aligned}$$

1.3.3 Nécessité de l'équation de Maxwell-Ampère