Les équations locales

Romain Gille

September 24, 2015

1 Théorème de la divergence ou théorème de Green-Ostrogradsky

1.1 Enoncé du théorème

Si $\vec{A}(M)$ est un champ vectoriel partout défini et dérivable sur les domaines considérés, le flux de $\vec{A}(M)$ à travers toute la surface formée Σ_f est égal à l'intégrale de sa divergence étendue à tout le domaine Ω délimité par Σ_f

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{A}(M \in \Sigma_f).\vec{dS} = \iiint_{\Omega} div\vec{A}(M \in \Omega).dT$$

1.2 Application au théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{E}(M \in \Sigma_f).\vec{dS} = \frac{Q_int}{\epsilon_0}$$

Avec le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\Omega} div\vec{E}(M \in \Omega).dT = \frac{1}{\epsilon_0}\iint_{\Omega} \rho(M \in \Omega).dT$$

$$\iint_{\Omega}[div\vec{E}(M) - \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}].dT = 0$$

Equation de Maxwell-Gauss

$$\forall dT \Rightarrow \forall M \in \Omega \quad div(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

C'est une équation locale qui permet par exemple de déterminer $\vec{E}(M)$

1.3 Application au flux de $\vec{B}$

$$\iint_{\Sigma_f} \vec{B}(M \in \Sigma_f).\vec{dS} = 0$$

Avec le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\Omega} div\vec{B}(M \in \Omega).dT = 0 \quad \forall dT \Rightarrow \forall M \quad div\vec{B}(M) = 0$$

Remarque :
$\forall M \quad div\vec{B}(M) = 0$

Signifie que $\vec{B} = \vec{r}ot\vec{A}(M)$

Si $\vec{A}(M) = \vec{A}(M) + \vec{g}rad\ f(M)$

$\vec{r}ot\vec{A}(M) = \vec{r}ot\vec{A} + \vec{r}ot(\vec{g}rad\ f) = \vec{r}ot\vec{A}$

2 Théorème de Stocks

2.1 Enoncé

La circulation de $\vec{A}(M)$ sur un contours fermé Γ est égal au flux du rotationnel de $\vec{A}$ à travers une surface Σ quelconque qui s'appuie sur Γ.

$$\oint_{\Gamma} \vec{A}(M \in \Gamma).\vec{dl} = \iint_{\Sigma} \vec{r}ot\vec{A}(M \in \Sigma).\vec{dS}$$

2.2 Application au théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M \in \Gamma).\vec{dl} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{r}ot\vec{A}(M \in \Sigma).\vec{dS}$$

Avec le théorème de Stokes :

$$\iint_{\Sigma} \vec{r}ot\vec{B}(M \in \Sigma).\vec{ds} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(M \in \Sigma).\vec{dS}$$

Théorème d'Ampère local :

$$\forall dS \Rightarrow \vec{r}ot\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}(M)$$

On peut calculer $\vec{B}(M)$ à partir de cette relation.

2.3 Application à $\vec{E}$

En électrostatique, on établit :

$$\int_A^B \vec{E}(M \in AB).\vec{dl} = V_A - V_B$$

Sur un contour fermé :

$$\oint_\Gamma \vec{E}(M \in \Gamma).\vec{dl} = 0$$

Théorème de Stokes :

$$\iint_\Sigma \vec{r}ot\vec{E}(M \in \Sigma).\vec{dS} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r}ot\vec{E}(M) = \vec{0}$$

Ainsi en régime stationnaire $\forall M$:

$$div\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

$$div\vec{B}(M) = 0$$

$$\vec{r}ot\vec{E}(M) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists V(M) \text{ tel que } \vec{E}(M) = -\vec{g}rad\ V(M)$$

$$\vec{r}ot\vec{B}(M) = \mu_0\vec{j}$$

2.4 En régime quasi-statique

$$fem = e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}(M \in \Gamma, t).\vec{dl} = -\frac{d}{dt}\iint_\Sigma \vec{B}(M \in \Sigma, t).\vec{dS}$$

$$\iint_\Sigma \vec{r}ot\vec{E}(M \in \Sigma, t).\vec{dS} = -\iint_\Sigma \frac{\partial \vec{B}(M \in \Sigma, t)}{\partial t}.\vec{dS}$$

$$\vec{r}ot\vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

Un champ électrique peut être créé par une variation temporelle d'un champ magnétique.