Ondes électromagnétiques dans le vide et ondes planes progressives

Romain Gille

October 9, 2015

1 Équations de Maxwell dans le vide de charges et de courants

1.1 Équation d'onde

$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{E} = \vec{grad}\ div(\vec{E}) - \vec{\Delta}\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{grad}\ div(\vec{E}) = \vec{0}$ car pas de charges

$\vec{rot}\ \vec{rot}\ \vec{E} = \vec{\Delta}\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{rot}\ \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$

$-\vec{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\ \vec{B})$ $\qquad$ $\vec{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ $\qquad$ On retire $\mu_0 \vec{j}$ car il n'y a pas de courant donc $\vec{j} = \vec{0}$

$-\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

$-\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

On a donc $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

On fait la même chose avec $\vec{B}$: $\boxed{\vec{\Delta}\vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$

$$\vec{\Delta}\vec{S} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial t^2} = \vec{O}$$

Où $\vec{S}$ représente $\vec{E}$ ou $\vec{B}$
Où c est homogène à une vitesse

C'est une équation d'onde : $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$
Elle est valable pour d'autres ondes tels que le son.

$$(\vec{\Delta} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})\vec{S} = \vec{0}$$
$$\Box^2 \vec{S}^2 = \vec{0}$$

Équation de d'Alembert ($\Box$: d'Alembertien)

2 Quelques solutions formelles de l'équation d'onde

$$\Box^2\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{\Delta}\vec{S}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{0}$$

2.1 Onde plane progressive à une dimension

Définition : On dit qu'une onde est plane si, à chaque instant t, la fonction $\vec{S}(\vec{r},t)$ à la même valeur en tout point M appartenant à un plan perpendiculaire à une dimension fixe définie par un vecteur unitaire $\vec{n}$.

$$\begin{aligned}\Box^2\vec{S}(\vec{r},t)&=\vec{\Delta}\vec{S}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{0}\\&=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{S}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{0}\end{aligned}$$

On pose $u_\pm=z_\pm ct$
On veut montrer $S_\pm(u_\pm)$ est solution.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial u_\pm}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u_\pm}=\frac{\partial}{\partial u_\pm}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial {u_\pm}^2}\\\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial u_\pm}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u_\pm}=_\pm c\,\frac{\partial}{\partial u_\pm}\Rightarrow\frac{\partial^2}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2}{\partial {u_\pm}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\vec{S}_\pm}{\partial {u_\pm}^2}-\frac{1}{c^2}(c^2\frac{\partial^2\vec{S}_\pm}{\partial {u_\pm}^2})&=\vec{0}\\\frac{\partial^2\vec{S}_\pm}{\partial {u_\pm}^2}-\frac{\partial^2\vec{S}_\pm}{\partial {u_\pm}^2}&=\vec{0}\\\vec{0}&=\vec{0}\end{aligned}$$

$$S_\pm(u_\pm)\text{ est solution}$$

La solution générale est : $\boxed{\vec{S}=\vec{S}_+(z+ct)+\vec{S}_-(z-ct)}$

2.2 Onde plane de direction quelconque

$\vec{n}$ vecteur unitaire du sens de propagation
$\vec{n}(\alpha,\beta,\gamma)$
$\vec{n}=\alpha\vec{u}_x+\beta\vec{u}_y+\gamma\vec{u}_z$
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$
Dans le cas particulier précédent où $\vec{n}$ était le long de O_z.
$\vec{n}=\vec{u}_z \quad \vec{n}.\vec{r}=\vec{u}_z.z\vec{u}_z=z$
Le cas général est donné par $\vec{S}(\vec{r},t)=\vec{S}_+(\vec{n}.\vec{r}+ct)+\vec{S}_-(\vec{n}.\vec{r}+ct)$
Les plans ne sont plus perpendiculaire à $\vec{u}_z$.

2.3 Structure de l'onde plane progressive

Définition : Donner la structure de l'onde, c'est préciser l'orientation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par rapport à la direction de propagation et donner la relation entre leurs intensités.
Prenons une onde qui se propage selon z, pas de dépendance en x et y.

$$\vec{E} = \begin{array}{l} E_x(z,t)\vec{u}_x \\ E_y(z,t)\vec{u}_y \\ E_z(z,t)\vec{u}_z \end{array}$$

$$\vec{B} = \begin{array}{l} B_x(z,t)\vec{u}_x \\ B_y(z,t)\vec{u}_y \\ B_z(z,t)\vec{u}_z \end{array}$$

On sait que dans le vide de charges et de courants :

$$div\vec{E} = 0$$
$$div\vec{B} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$
$$E_z = cste \qquad B_z = cste$$

donc

$$\vec{E} = \begin{array}{l} E_x(z,t)\vec{u}_x \\ E_y(z,t)\vec{u}_y \\ \vec{0} \end{array}$$

$$\vec{B} = \begin{array}{l} B_x(z,t)\vec{u}_x \\ B_y(z,t)\vec{u}_y \\ \vec{0} \end{array}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont dis transverses

$$\vec{r}ot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \wedge \begin{array}{c} E_x \\ E_y \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial Bx}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$u_{\pm} = z_{\pm}\ ct \rightarrow u = z - ct$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial E_y}{\partial u} = -\frac{\partial E_y}{\partial u} = -\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial B_x}{\partial u} = -c\frac{\partial B_x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial u} = -c\frac{\partial B_x}{\partial u} \Rightarrow E_y = -cB_x + constante$$

On trouve également $E_x = cB_y + constante$

$$\vec{E} = \begin{array}{l} E_x\ \vec{u}_x \\ E_y\ \vec{u}_y \\ 0 \end{array}$$

$$\vec{B} = \begin{array}{l} -\frac{E_y}{c}\ \vec{u}_x \\ \frac{E_x}{c}\ \vec{u}_y \\ 0 \end{array}$$

$$\vec{E}.\vec{B} = -\frac{E_x E_y}{c} + \frac{E_x E_y}{c} = 0$$

Donc $\vec{E}$ et $\vec{B}$ Sont perpendiculaires.

$$||\vec{E}||^2 = E_x^2 + E_y^2$$

$$||\vec{B}||^2 = \frac{E_y^2}{c^2} + \frac{E_x^2}{c^2} = \frac{||\vec{E}||^2}{c^2}$$

donc

$$||\vec{E}|| = c\ ||\vec{B}||$$

$\vec{E}\wedge\vec{B} = ||\vec{E}||\ ||\vec{B}||\ \vec{u}_z = \dfrac{||\vec{E}||^2}{c}\vec{u}_z = c\,||\vec{B}||^2\ \vec{u}_z \Rightarrow (\vec{u}_z, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre rectangle direct

3 Ondes sphériques

$\Box^2 \vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{0}$
$\vec{S}(\vec{r}, t)$ à la même valeur en tout point d'une sphère de centre le point d'émission.
Donc $\vec{S}(\vec{r}, t)$ ne dépend pas de ϕ et $\theta \Rightarrow \vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}(r, t)$.
$\vec{\Delta}\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\vec{S}(r,t)}{\partial r^2}$

L'équation devient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\vec{S}}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial^2 r\vec{S}}{\partial r^2} - \frac{r}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial^2 r\vec{S}}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r\vec{S}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$\vec{\Phi}(r, t) = r\vec{S}(r, t)$ est solution de l'équation.
$\vec{\Phi}(r, t) = \vec{F}_-(r - ct) + \vec{F}_+(r + ct)$
$\vec{S}(r, t) = \frac{1}{r}\vec{F}_-(r - ct) + \frac{1}{r}\vec{F}_+(r + ct)$

$\frac{1}{r}\vec{F}_-(r - ct)$ est une onde sphérique divergente à partir de l'origine à la vitesse c.
$\frac{1}{r}\vec{F}_+(r + ct)$ est une onde sphérique convergente vers l'origine à la vitesse c.