תרגיל 3

נתון :
- K כדורים
- כולם נמוכים מ- m
- לפחות אחד מהם שווה ל m

$max = z \qquad 1 \leq z \leq n$

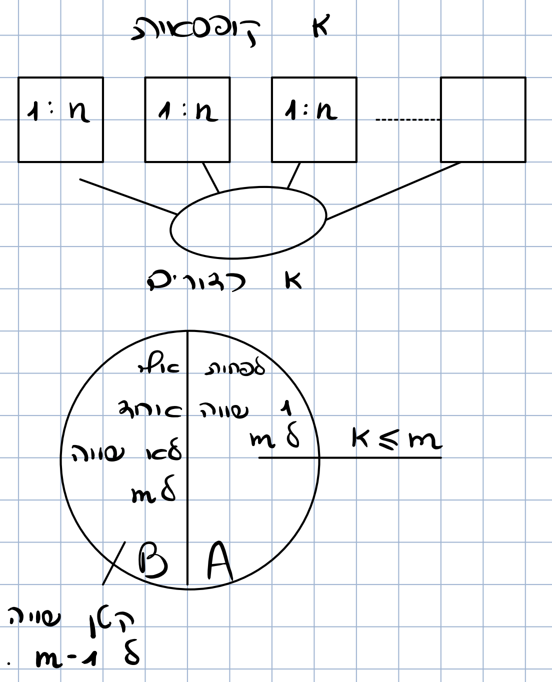
$P(z = m)$

A - כל הכדורים קטנים מ m וכן לפחות אחד שווה ל m.

B - כל הכדורים קטנים שווים ל m-1.

C - כל הכדורים קטנים שווים ל m. $\left(\frac{m}{n}\right)^K$

A זה האירוע שאנו מחפשים. $P(A) = ?$



$A \cup B = C \qquad A \cap B = \emptyset$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(C) = P(A) + P(B)$

$P(C) = \left(\frac{m}{n}\right)^K$

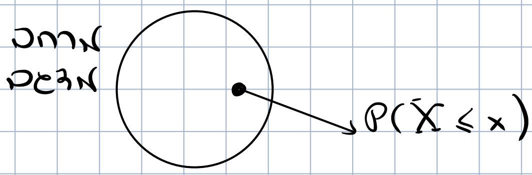
$P(B) = \left(\frac{m-1}{n}\right)^K$

$P(A) = \left(\frac{m}{n}\right)^K - \left(\frac{m-1}{n}\right)^K$

משתנה אקראי רציף - משתנה שמקבל ערכים רציפים.

פונקציית פילוג ההסתברות

$F_X(x) \triangleq (X \leq x)$



הסתברות ש X קטן מהערך x

(ההסתברות שהטמפ' תהיה קטנה מערך נתון למשל.

$$F_X(x) = Prob(\overset{\text{טמפ' (שם המשתנה)}}{X} \leq \overset{\text{(פרמטר) } 10^\circ}{x})$$

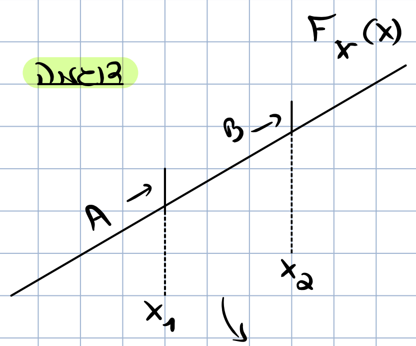
X - המשתנה האקראי

x - הערך של המשתנה האקראי.

תכונות פונקציית פילוג ההסתברות:

1. $F_X(\infty) = 1$
2. $F_X(-\infty) = 0$
3. F_X פונק' עולה בתחום מ 0 ל 1 (מונוטונית עולה)
4. $F_X(x^-) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x-\varepsilon)$
5. $F_X(x^+) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_X(x+\varepsilon)$
6. אם $x_1 \leq x_2$, אז: $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$

דוגמא



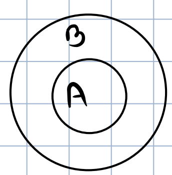
$X \leq x_1$ קבוצה A (אירוע)

$X \leq x_2$ קבוצה B (אירוע)

$P(B) \geq P(A)$

$A \subset B$

$P(x_1 < X \leq x_2) = ?$



$B - A$

פונקציית פילוג צפיפות ההסתברות :

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Prob(x \leq X \leq x+dx)}{\Delta x}$$

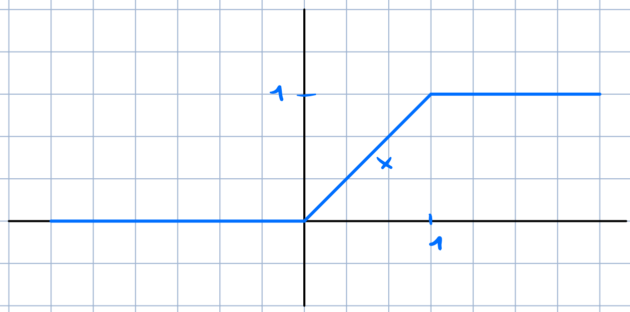
$$Prob(x \leq X \leq x+dx) = f_X(x) \cdot dx$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$$

דוגמה :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1< x \end{cases}$$

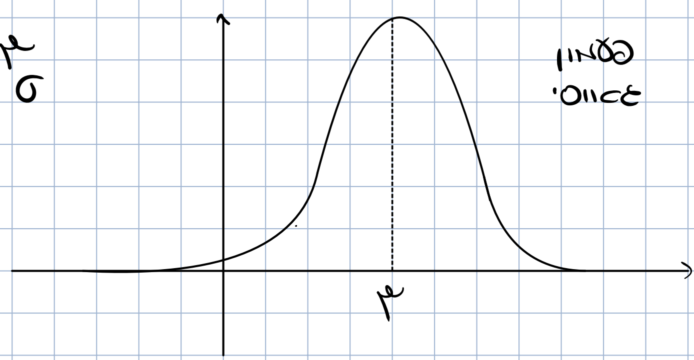
hist – (היסטוגרמה) מראה פונקציית פילוג ההסתברות.

פילוג גאוס:

פעמון גאוסי

μ - ממוצע

σ - סטיית תקן



$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2} dz = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = G(z)$$

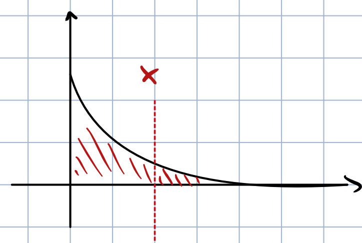
$$x = \sigma z + \mu$$

$$G = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{g^2}{2}} dg$$

נורמלי: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, משמש לצרכים רבים....

עבור משתנה זה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty \le x \le \infty \quad ; \quad E(X) = \mu; \quad V(X) = \sigma^2$

פילוג exp:



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{y/\lambda} e^{-y} dy = 1 - e^{-y/\lambda}$$

$$= 1 - e^{-x}$$

$\lambda x = y$

$dx = \frac{dy}{\lambda}$

$$P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(X \ge x) = (1 - P(X \le x)) = e^{-\lambda x}$$

מעריכי (אקספוננציאלי): $X \sim ezp(\lambda)$, משמש בדרך כלל לתיאור אורך חיי רכיבים ומערכות אלקטרוניות.

עבור משתנה זה: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}; \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \le x \end{cases}; \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

* תהליך exp הינו חסר זיכרון:

ואז $X > X_0$ $\quad$ $X > X_0 + t$

$$P(B/A) = e^{-\lambda t}$$

$$P(B/A) = \frac{e^{-\lambda(x_0+t)}}{e^{-\lambda x_0}} = P(B) = e^{-\lambda t}$$

$\leftarrow P(A)$

$P(A) = e^{-\lambda x_0}$ $\quad$ $A: \ X > x_0$

$P(B) = e^{-\lambda(x_0+t)}$ $\quad$ $B: \ X > x_0 + t$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

פילוגים נפוצים:

Cauchy

$$F_X(x) = \frac{\frac{\alpha}{\pi}}{(x-\mu)^2 + \alpha^2} \qquad |x| < \infty$$

Laplace

$$F_X(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha|x|} \qquad |x| < \infty$$

Max Well

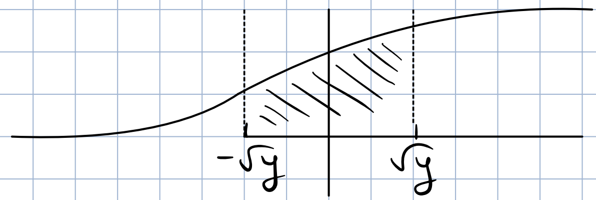
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sigma^2\sqrt{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ראלי

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\cdot\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

בקורס נשתמש: אחיד, גאוסין, ריאלי, פואסון

פונקציה של מ"מ X :



תחום x
רק שבתוכו נעלה אותו
בריבוע הוא יהיה קטן מ Y

$$Y = g(x)$$

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = Prob(x \in R_y)$$

דוגמה:

$X \rightarrow$ מ"מ גאוס $N(0,1)$ $\quad -\infty < x < \infty$

$0 < y < \infty$

$$Y = x^2$$

$$-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}$$

$$Prob(-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

דוגמה נוספת:

$f_x(x) = e^{-x}$ $\quad \lambda = 1$ $\quad x \geq 0$ $\quad exp$ פילוג

$$Y = x^2$$

$$F_x = 1 - e^{-x}$$

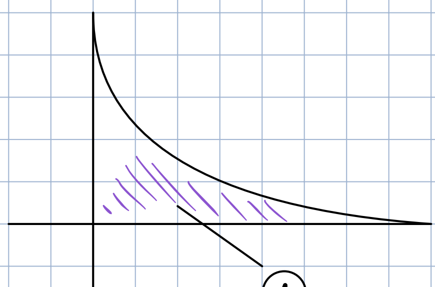
$$F_Y = (F_x(\sqrt{y})) - (\underbrace{F_x(-\sqrt{y})}_{=0}) = (1 - e^{-\sqrt{y}})$$

לא מוגדרת
עבור ערכים שליליים.
F_Y לא יכולה להיות שלילית

$$f_Y = \frac{dF_y}{dy} = \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}\, dy = 1$$

פונקציית צפיפות ההסתברות f_Y :



1 = השטח

דוגמה:

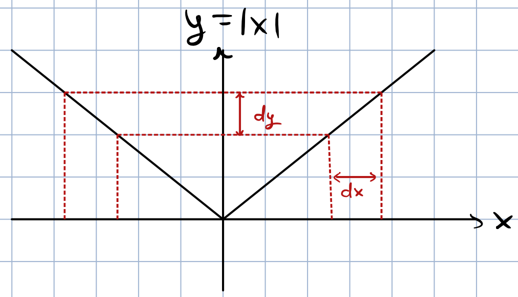
$X \sim N(0,1)$ $\quad -\infty \leq x \leq \infty$

$Y = |x|$ $\quad 0 \leq Y \leq \infty$

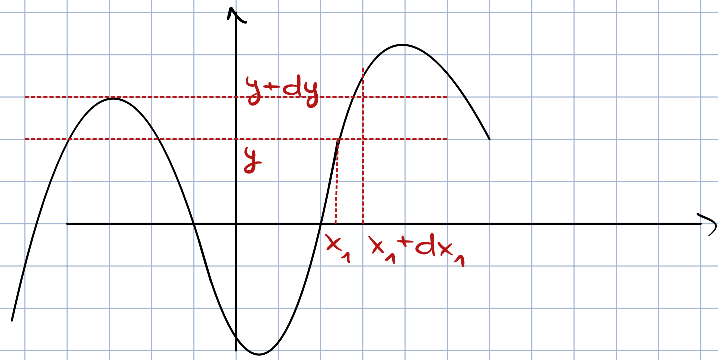
$$F_Y = Prob(Y \leq y) = Prob(-y \leq X \leq y) = F_x(+y) - F_x(-y)$$

$$F_y(y) =$$

$$\mathrm{Prob}(y \le Y \le y+dy) \triangleq f_y(y)\,dy$$
$$= f_x(+y)\,dx + f_x(-y)\,dx$$



$$f_y = 2\cdot f_x(y) = \frac{2\cdot e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad y>0$$



$$P(y \le Y \le y+dy) \triangleq f_Y(y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} f_x(x_i(y))\cdot|dx_i|$$

$$f_Y(y) = \sum f_x(x_i(y))\cdot\left|\frac{dx_i}{dy}\right| = \frac{\sum f_x(x_i(y))}{\left|\frac{dy}{dx_i}\right|} = \frac{f(+\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$y = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x = 2\sqrt{y}$$

דוגמה:

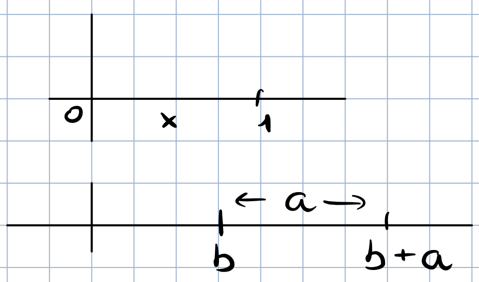
$$y = ax+b \qquad x = \frac{y-b}{a} \qquad \frac{dy}{dx} = a$$

$$f_Y(y) = \frac{f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

$$f_x = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פילוג
אחיד

$$f_Y = \begin{cases} \frac{1}{a} & b \le Y \le b+a \end{cases}$$



דוגמה:

$N(0,1)$

$y = \sigma x + \mu \qquad x = \frac{y-\mu}{\sigma}$

$F_Y = \frac{F_x(y)}{\sigma}$

$f_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

$F_y = \frac{f_x(y)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

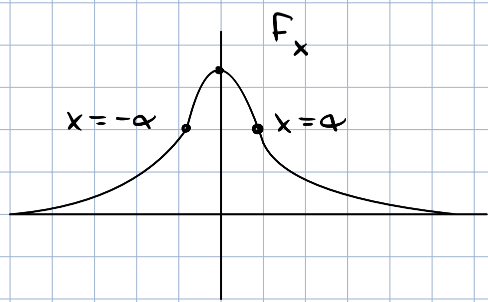
דוגמה:

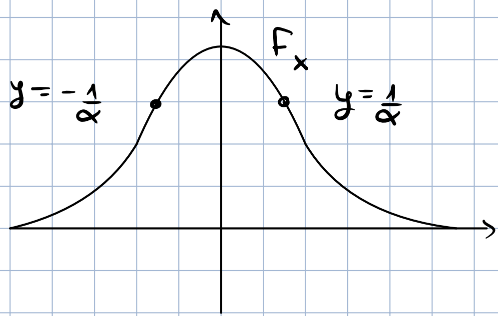
$y = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{y}$

$\left|\frac{dy}{dx}\right| = -\frac{1}{x^2} = y^2$

$f_x = \frac{\alpha/\pi}{x^2+\alpha^2}$

$F_Y(y) = \frac{f_x\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2} = \frac{\frac{1}{\alpha\pi}}{\left(\frac{1}{\alpha^2} + y^2\right)}$





פונקציית פילוג אחיד X מפולג בין 0 ל 1 $X = RAND$

$y = g(x)$

$F_Y(y) \longrightarrow$ רצויה

רוצים להמיר ל exp

$F_Y = e^{-y}$

$\boxed{Y = -\ln x}$ $\quad 0 \le X \le 1$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$ $\quad 0 \le Y \le \infty$

$$F_Y = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = x = e^{-y}$$