שאלה 1

$E(2X+4)=6$ $\quad \sigma=2$

$E(X)=5$ $\quad V(X)=\sigma^2=4$

$E(2X+4)=2E(X)+4=14$

$V=\sigma^2$

$V(2X+4)=2^2V=16 \Rightarrow \sigma=V^2 \Rightarrow \sigma=4$

$Y\sim(14,4)$ ✓

שאלה 2

$A=E((X-c)^2)$

$E(X^2)=V(X)+E^2(X)$

$E((X-c)^2)=V(X-c)+E^2(X-c)=V(X)+(E(X)-c)^2=A$

$=V(X)+E(X)^2-2cE(X)+c^2=\sigma^2+\mu^2-2c\mu+c^2=$

$c=\mu \Rightarrow \sigma^2+\mu^2-2c\mu+\mu^2=0$

$\Rightarrow 2\mu=4\mu-2\mu$

$A(c)=c^2-2\mu c+\mu^2=\sigma^2$ ✓

$$\frac{dA(c)}{dc} = 2c - 2\mu = 0 \Rightarrow c = \mu$$

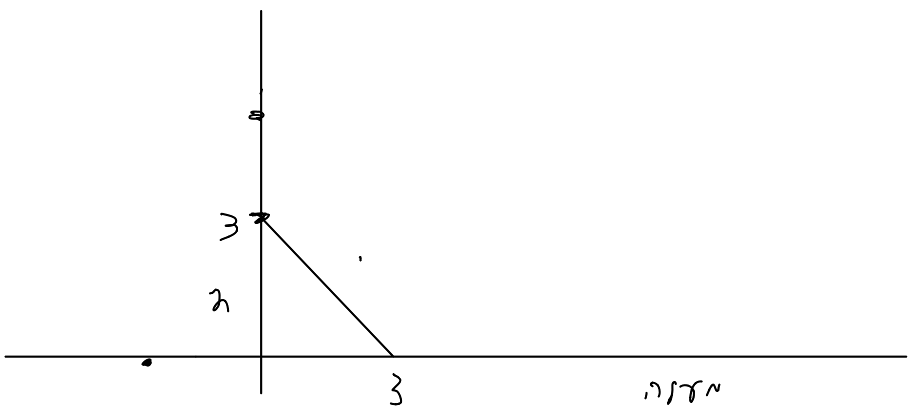
$$\frac{d^2A(c)}{dc^2} = 2$$

נגזרת שנייה חיובית, נקודה חשודה היא מינימום מקומי, שהיא יחידה מוחלט. לכן $c = \mu$ זו נקודת המינימום ✓

שאלה 4

$f_X(x) = e^{-x} \quad x > 0$

$Y = -4X + 3$ מצא $f_Y(y)$



$P(-4X + 3 \leq y)$ → מקרה $x > 0$, $y \geq 3$; $x < 0$, $y > 3 \Rightarrow f = 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-4X + 3 \leq y) = P\left[X \geq \frac{3-y}{4}\right]$$

$$= 1 - F_X\left[X \leq \frac{3-y}{4}\right] = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3-y}{4}}\right) = e^{-\frac{3-y}{4}}$$

לא קיים התחום $X<0$ לכן ההתפלגות שם אפס

$y<3$, $x>\frac{3-s}{4}$

נגזור שוב הכל. כמו החישוב הקודם

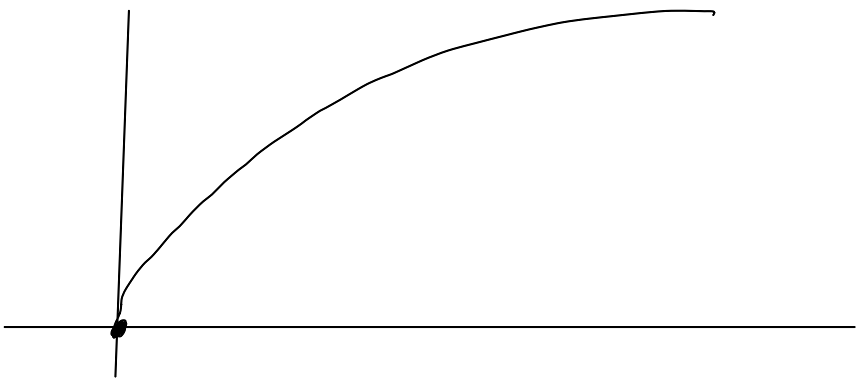
נציב לפי s את $f_Y(s)$

לפי s ונגזור

$F_Y(s)=\frac{1}{4}e^{-\frac{3-s}{4}}$ ✓

שאלה 4

$y=\sqrt{x}$, $f(x)=e^{-x}$ $x>0$



$y\le 0$, $x\ge 0$

$y^2 > x < 0$

$F_Y(s)=P[\sqrt{X}\le y]=P[X\le y^2]=F_X(y^2)$

$1-e^{-y^2}=s$

נציב ונגזור האקספוננט רגיל ✓

$2y\,e^{-y^2}=f_Y(y)\big|_{r=\frac{1}{2}}$

שאלה 5

($p+q=1$ $p\neq q$) מקרה כללי

$$E(X)=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$$

$$P(X=k)=p^{x}q+q^{k}p$$

$$E(X)=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p^{k-1}q+q\cdot\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p$$

$$=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}kp^{k-1}+q\cdot\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}=pq\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{\infty}p^{k}\right)+pq\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{p}q^{k}\right)=qp\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right)$$

$$+pq\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right)=p\cdot\frac{q}{(1-p)^2}+q\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$$