Corrigés Fiche TD 3

Exercice 31 :

$E = \{8 ; 10, 12, 14\}$.

1. $\exists x : x > 0$
2. $\forall x : x > 10$
3. $\exists x : x > 10$
4. $\forall x : x > 7$
5. $\exists x : x > 7$
6. $\forall x \quad \forall x' : |x - x'| < 10$
7. $\forall x \quad \forall x' : |x - x'| < 5$
8. $\exists x \quad \forall x' : |x - x'| < 5$
9. $\forall x \quad \exists x' : |x - x'| \leqslant 2$
10. $\exists x \quad \exists x' : |x - x'| > 5$

VRAI ex $x = 8$
FAUX ex $x = 8$
VRAI ex $x = 12$.
VRAI
VRAI
VRAI
VRAI
FAUX ex $x = 8$ $x' = 14$
VRAI $x = 10$
VRAI
VRAI $x = 8$ $x' = 14$.

Exercice 32 :

1) $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathcal{P}(x,y)$	ensemble de vérité	$\forall x \, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists x \, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\forall y \, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists y \, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$
$x^2 + y^2 \geqslant 0$	$\mathbb{R}^2$	1	1	1	1
$x^2 + y^2 \leqslant 0$	$\{(0,0)\}$	0	0	0	1
$x^2 + y^2 > 0$	$\mathbb{R}^2 \setminus \{0;0\}$.	0	1	1	1
$x^2 + y^2 < 0$	$\emptyset$	0	0	0	0
$x^2 - y^2 \geqslant 0$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|x\| \geqslant \|y\|\}$	0	0	1	1
$x.y \neq 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$	0	0	0	1
$x.y = 0$	$\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$	0	1	1	1

2) $E = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x \geqslant 2$ et $y \geqslant 2\}$

$\mathcal{P}(x,y)$	ensemble de vérité	$\forall x \, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists x \, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\forall y \, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists y \, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$
$x.y = 3$	$\emptyset$	0	0	0	0
$x.y = 4$	$\{(2;2)\}$	0	0	0	1
$x.y = 13$	$\emptyset$	0	0	0	0
$x.y = 52$	$\{(26;2) \cup (2;26) \cup (13;4) \cup (4;13)\}$	0	0	0	1
$x.y$ est impair	x et y impairs	0	0	0	1

Exercice 33

Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans.

Exercice 34 :

$P = \{X, Y, Z\}$ $\quad T = \{J, M, V\}$ $\quad A = \{2011 ; 2012 ; 2013\}$.

$\mathcal{P}(p, t, a)$ = pays p, tranche d'âge t, année a, $t_x < 10\%$.

① • $\exists p \in P, \exists a \in A : \mathcal{P}(p, V, a)$

• VRAI (2011 ou 2012, pays Y)

• $\forall p \in P, \forall a \in A, \overline{\mathcal{P}(p, V, a)}$

• pour les plus de 51 ans, dans tous les pays et pour toutes les années le taux de chomage a été $\geq 10\%$.

② • $\forall t \in T, \forall a \in A, \exists p \in P : \mathcal{P}(p, t, a)$

• FAUX (dans la tranche d'âge V en 2013, il n'existe pas de pays tel que $\mathcal{P}(p, t, a)$.

• $\exists t \in T, \exists a \in A, \forall p \in P : \overline{\mathcal{P}(p, t, a)}$

• il existe une tranche d'âge et une année pour laquelle aucun pays n'a un taux $< 10\%$.

③ • $a = 2012, \exists p \in P, \forall t \in T : \overline{\mathcal{P}(p, t, 2012)}$

• VRAI (pays Z)

⚠ $\forall y \exists x \neq \exists x \forall y$.

• $\forall p \in P, \exists t \in T : \mathcal{P}(p, t, 2012)$

• en 2012, pour chaque pays il existe une tranche d'âge pour laquelle le taux a été $< 10\%$.

④ . $\exists t \in T : \forall p \in P, \exists a \in A : \overline{\mathcal{P}(p, t, a)}$

• VRAI (en 2013 car V = 0)

. $\forall t \in T, \exists p \in P, \forall a \in A : \mathcal{P}(p, t, a)$

. Pour toutes les tranches d'âge, il existe un pays dans lequel le taux de chomage a été $< 10\%$ pour toutes les années.

Exercice 35 :

① • $\forall j \in J, \forall v \in V, P(v,j,n)$
• FAUX (car pour $J = 6$, $V = D \to -1$)

• $\exists j \in J, \exists v \in V, \overline{P(v,j,n)}$
• il existe un jour et une ville dans laquelle la T° nocturne est < 0

② • $\exists v \in V, \forall j \in J, \forall n \in M, P(v,j,n)$
• VRAI (villes A et B)

• $\forall v \in V, \exists j \in J, \exists n \in M, \overline{P(v,j,n)}$
• dans toutes les villes, il existe un jour où la T° nocturne ou la T° diurne est < 0

③ • $\forall j \in J, \forall v \in V, \overline{Q(v,j)}$
• FAUX (6 nov dans la ville C le grad est ≥ 15)

• $\exists j \in J, \exists v \in V : Q(v,j)$
• il existe un jour et il existe une ville dans laquelle le gradient est $\geq 15°$.

Exercice 36 :

1) $\exists! x \; P(x)$ signifie "il existe un x tel que la proposition soit vraie et cet élément est unique"

ce qui signifie "si on a 2 éléments x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$ soient vraies alors $x = y$".

ce qui signifie $\exists x \, P(x) \wedge [(\forall x, \forall y \; P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x = y]$

2) la négation est : $\forall x \; \overline{P(x)} \vee [(\exists x, \exists y \; P(x) \wedge P(y)) \vee y \neq x]$

Remarque : la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$