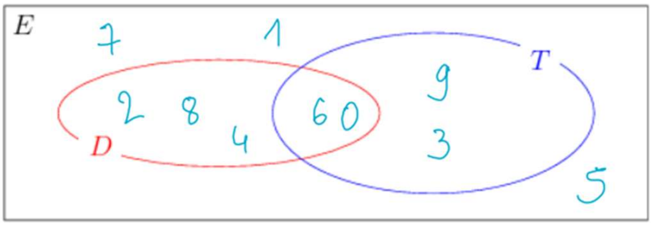
Corrigés Fiche 1

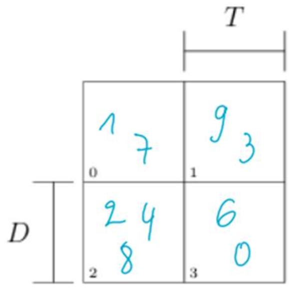
❒ Exercice 1 : compréhension

Dans le référentiel $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, on considère les parties D et T telles que :
$D =$ ensemble des multiples de 2 et $T =$ ensemble des multiples de 3.

1. Placer les éléments de E dans chacun des deux dessins suivants :



EULER-VENN

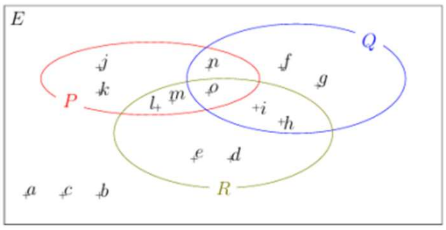


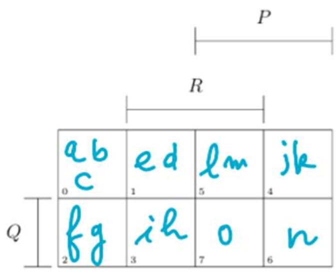
KARNAUGH

2. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes les parties suivantes et exprimer ces parties en extension :
   - le sous-ensemble des multiples de 2 et 3 $T \cap D = \{6, 0\}$
   - le sous-ensemble des multiples de 2 mais pas de 3 $D \cap \overline{T} = \{2,4,8\}$
   - le sous-ensemble des multiples de 2 ou 3 $D \cup T = \{2,8,4,6,0,9,3\}$
   - le sous-ensemble des multiples de 2 ou 3 mais pas des deux $D \Delta T = \{2,8,4,9,3\}$
   - le sous-ensemble des éléments de E qui ne sont ni multiples de 2 ni de 3
     $\hookrightarrow \overline{D \cup T} = \{7,1,5\}$

❒ Exercice 2 :

P, Q et R sont trois parties d'un référentiel E représentées sur le diagramme de Venn ci-dessous :





1. Reporter les données dans le diagramme de Karnaugh.
2. Exprimer en extension les sous-ensembles suivants de E :
   - $\overline{P} = \{a,b,c,d,e,f,g,i,h\}$
   - $P \cap Q = \{n,o\}$
   - $P \cup Q = \{f,g,h,i,j,k,l,m,n,o\}$
   - $P \Delta Q = \{j,k,l,m,i,h,f,g\}$
   - $\overline{P} \cup \overline{Q} \cup \overline{R} = \overline{P \cap Q \cap R} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n\}$
   - $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R} = \overline{P \cup Q \cup R} = \{a,b,c\}$
   - $\overline{P} \cup \overline{Q} \cap \overline{R}$

- $(\overline{P} \cup \overline{Q}) \cap \overline{R} = \overline{P \cap Q} \cap \overline{R} = \{a,b,c,f,g,j,k\}$
- $\overline{P} \cup (\overline{Q} \cap \overline{R}) = \overline{P} \cup \overline{Q \cup R} = \{a,b,c,d,e,f,g,i,h,j,k\}$

❐ **Exercice 3 :**

On considère les ensembles suivants :

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $C = \emptyset$ $D = \{3,4,5,7\}$ $E = \{4,6,8\}$ $F = \{1,4,3\}$

Décrire en extensions les ensembles :

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cup D = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- $B \cap A = \{1,2,3\} = A$
- $E \cap (B \cup D) = \{4,6\}$
- $(E \cap B) \cup D = \{3,4,5,6,7\}$
- $(E \cup B) \cap D = \{3,4,5\}$
- $E \cup (B \cap D) = \{3,4,5,6,8\}$

Conclusion : $(E \cup B) \cap D \neq E \cup (B \cap D)$. Il faut respecter les priorités opératoires.

□ Exercice 4

1) • $A = \{2^k \,/\, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 6\}$

autre possibilité qui marche tout le temps mais n'est pas satisfaisante :

$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, (x-1)(x-2)(x-4)\cdots(x-64) = 0\}$

• $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x | 20\}$

• $C = \{2000 + 4k \,/\, k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq 6\}$

2) • $D = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ → on cherche les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$

• $E = \{1\}$

• $F = \{-1; 1\}$

• $G = \{-1; 1; i; -i\}$

3) • $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

• $B =]-2,8 ; 4,5[$

• $C = \emptyset$ car $-3 \notin \mathbb{N}$

• $D = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$

• $E = \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$

• $F = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

• $G = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

□ Exercice 5 :

1) ① $T = C \cup B$

② $G \subset C$

③ $\overline{G} \subset \overline{B}$ (ou $B \subset G$)

④ $C \subset G \cap H$

⑤ $H \cap R = \emptyset$ (ou $H \subset \overline{R}$)

⑥ $R = G$

2)a) 6 $R = G$
5 $H \cap R = \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow H \cap G = \emptyset$
4 $C = G \cap H$ $\Big\} \Rightarrow C = \emptyset$

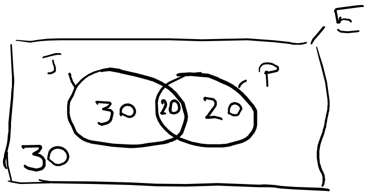
Comme 2 $G \subset C$, alors $G = \emptyset$

b) $G = \emptyset$
or $B \subset G$ 3, donc $B = \emptyset$
1 $J = C \cup B$ avec $B = \emptyset$ et $C = \emptyset$
donc $J = \emptyset$

Exercice 6

Notons J l'ensemble de étudiants ayant pratiqué Javascript et P l'ensemble des étudiants ayant pratiqué Python.

On a alors $|J| = 50$ $|P| = 40$ $|E| = 100$
et $|\bar{J} \cap \bar{P}| = 30$



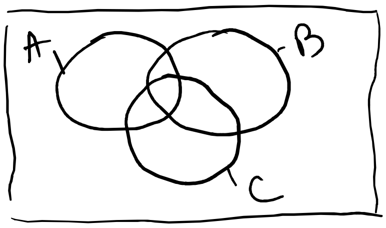
On a $|J \cup P| = 100 - 30 = 70$.

Or $|J \cup P| = |J| + |P| - |J \cap P|$
$70 = 50 + 40 - |J \cap P|$

donc $|J \cap P| = 50 + 40 - 70 = 20$

20 étudiants ont pratiqué les 2 langages.

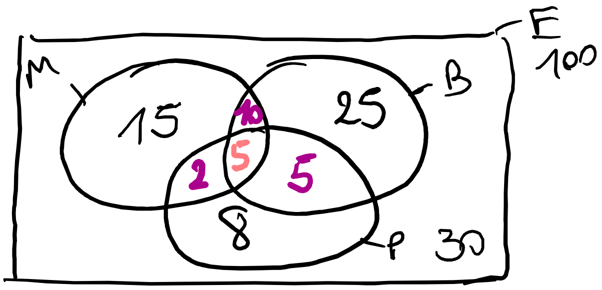
Exercice 7



1) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

2) On sait que $|E| = 100$ $|M| = 32$ $|P| = 20$ $|B| = 45$
$|M \cap B| = 15$ $|M \cap P| = 7$ $|P \cap B| = 10$ $|\bar{P} \cap \bar{B} \cap \bar{M}| = 30$

a)



b) On sait que $|\overline{P \cup B \cup M}| = 30$

Donc $|P \cup B \cup M| = 100 - 30 = 70$.

D'après la formule du 1), on a :

$$|P \cup B \cup M| = |P| + |B| + |M| - |P \cap B| - |P \cap M| - |B \cap M| + |P \cap M \cap B|$$

$$70 = 20 + 45 + 32 - 10 - 7 - 15 + |P \cap M \cap B|$$

$$70 = 65 + |P \cap M \cap B|$$

$$|P \cap M \cap B| = 70 - 65 = 5$$

5 étudient les 3 matières.

Exercice 8 :

1) $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \mid 18\}$

$B = \{37, 74, 111\} = \{x = 37k \,/\, k \in [\![1; 3]\!]\}$

$C = \{7, 9, 11, 13\} = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ est impair et } x \in [\![7; 13]\!]\}$

2) $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$F = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

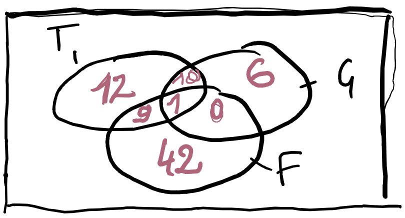
Exercice 9 :

T = "joue au Tennis" G : "joue au Golf" F = "joue au football".

$|T| = 32$ $|G| = 17$ $|T \cap G| = 11$ $|G \cap F| = 1$

$|T \cap G \cap F| = 1$ $|T \cup F \cup G| = 80$

1)



2) $|T \cup F \cup G| = |T| + |F| + |G| - |T \cap F| - |T \cap G| - |F \cap G| + |T \cap F \cap G|$

$$80 = 32 + |F| + 17 - 10 - 11 - 1 + 1$$

$$80 = 28 + |F|$$

$$|F| = 80 - 28 = 52$$

52 jouent au football.

3) $12 + 42 + 6 = 60$ 60 pratiquent un seul sport.

4) 6 personnes ne jouent qu'au Tennis.