Leçon 2 : Les bases

1. Objectifs

Il s'agit de :

- savoir lire et écrire un entier (positif) dans n'importe quelle base b.
- savoir passer d'une base à une autre
- savoir faire des additions et multiplications en base 2.

Afin de mieux comprendre la notion de base, nous mettrons en œuvre des bases *exotiques* (trois, neuf, ...) que vous ne verrez pas en informatique réel.

2. Un peu de cours

Lorsque la base n'est pas précisée, c'est que l'on travaille en base 10 (celle utilisée lorsque l'on apprend à compter).
Lorsque l'on écrit 32645, qu'est-ce que cela signifie fondamentalement ?
5 est le chiffre des unités, 4 est le chiffre des dizaines, 6 celui des centaines, ...
On a donc $(32645)_{10} = 3\times 10^4 + 2\times 10^3 + 6\times 10^2 + 4\times 10^1 + 3\times 10^0$

Définition 2

De manière générale, en base b, on a :

$$(a_n a_{n-1}...a_1 a_0)_b = a_n\times b^n + a_{n-1}\times b^{n-1} + ... + a_1\times b^1 + a_0\times b^0 \quad \text{où} \quad \mathbf{0 \leqslant a_i < b}$$

3. Pratique guidée - Exercices corrigés

Exemple 3 : Convertir en base 10

On passe par la définition, et donc par les puissances de la base.

$$\begin{aligned}(1789)_{10} &= 1\times 10^3 + 7\times 10^2 + 8\times 10^1 + 9\times 10^0\\ &= 1789\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1789)_{16} &= 1\times 16^3 + 7\times 16^2 + 8\times 16^1 + 9\times 16^0\\ &= 4096 + 7\times 256 + 8\times 16 + 9\\ &= 6025\end{aligned}$$

$(1789)_8$= ... impossible car $9 > 8$

Remarque 1

En base 16, on écrit $10 = a,\quad 11 = b,\quad 12 = c,\quad 13 = d,\quad 14 = e,\quad 15 = f$

Exemple 4 : Comment écrire un nombre en base b

1. **Écrire 1789 en base 16 (passer de la base 10 à la base 16)**

   1re méthode : succession de divisions euclidiennes.

   $$\begin{array}{r|l} 1789 & 16 \\ \hline \mathbf{13} & 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 111 & 16 \\ \hline \mathbf{15} & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 16 \\ \hline \mathbf{6} & 0 \end{array}$$

   On lit les restes de la droite vers la gauche : $6 \to 15 \to 13$.

   Ainsi : $(1789)_{10} = (6fd)_{16}$.

   2e méthode : recherche des puissances de la base

   $16^2 = 256 \qquad 16^3 = 4096$

   $$\begin{aligned} 1789 &= 6 \times 256 + 15 \times 16 + 13 \\ &= \mathbf{6} \times 16^2 + \mathbf{15} \times 16^1 + \mathbf{13} \times 16^0 \end{aligned}$$

   Ainsi : $(1789)_{10} = (6fd)_{16}$.

2. **Écrire 1789 en base 2 (passer de la base 16 à la base 2)**

   Comme $16 = 2^4$, chaque bit de la base 16 peut s'écrire avec 4 bit de la base 2.

   $6 = 0110$
   $f = 1111$
   $d = 1101$

   Et donc $(6fd)_{16} = (011011111101)_2$.

3. **Écrire 1789 en base 16 (passer de la base 2 à la base 16)**

   $(1789)_{10} = (011011111101)_2$

   On fait des paquets de 4 dans l'écriture en base 2. Et on convertit chacun des paquets en base 16.

   $(\underbrace{0110}\ \underbrace{1111}\ \underbrace{1101})_2 = (6fd)_{16}$.