

# Leçon 3 : Arithmétique

## 1. Objectifs

Il s'agit de :

- revoir (ou voir) la notion de nombres premiers
- savoir décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
- savoir trouver le nombre et la liste des diviseurs d'un entier.
- revoir (ou voir) plusieurs méthodes pour le calcul du PGCD et du PPCM de deux entiers.

## 2. Un peu de cours

### 2.1. Rappel sur le calcul de puissances

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

### 2.2. Nombres premiers et décomposition

#### Définition 3 : diviseur, multiple

On dira que :

- $b$  *divise*  $a$
- $a$  est un *multiple* de  $b$
- $b$  est un *diviseur* de  $a$

si le reste de la division euclidienne de  $a$  par  $b$  est nul. On le note  $b|a$ .

#### Propriété 1

Soient  $a$  et  $b$  des entiers,  $b$  étant non nul.

Le nombre  $b$  divise  $a$  si et seulement si il existe un entier  $k$  tel que  $a = bk$ .

#### Exemple 5

5 divise 15 car il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $15 = 5k$ . ( $k = 3$ )

#### Définition 4 : nombre premier

Un entier  $p > 1$  est dit *premier* lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

#### Propriété 2 : décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier  $a$  peut être décomposé en produit de nombres premiers, et cette décomposition est unique.

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

Les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts.

Les exposants  $\alpha_i$  sont des entiers naturels non nuls.

## 2.3. PGCD, PPCM

### Définition 5 : PGCD, PPCM

- $PGCD(a, b) =$  le plus grand des diviseurs communs à  $a$  et  $b$ .  
On le note aussi  $a \wedge b$ .
- $PPCM(a, b) =$  le plus petits des multiples communs à  $a$  et  $b$ .  
On le note aussi  $a \vee b$ .

### Propriété 3 : caractérisation du PGCD

$$(d|a \text{ et } d|b) \Leftrightarrow d|a \wedge b$$

### Définition 6 : premiers entre eux

On dit que deux entiers  $a$  et  $b$  sont *premiers entre eux* si  $PGCD(a, b) = 1$ .

### Théorème 1 : théorème de Bezout

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \text{il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } d = au + bv.$$

## 3. Pratique guidée - Exercices corrigés

### Exemple 6 : Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Donner la décomposition en facteurs premiers de 132 et 108.

On commence à le diviser par le plus petit de ses facteurs premiers, on fait la même chose pour le quotient obtenu, puis sur le deuxième quotient, etc.

$  \begin{array}{r l}  132 & 2 \\  66 & 2 \\  33 & 3 \\  11 & 11 \\  1 &   \end{array}  $	$\text{donc } 132 = 2^2 \times 3 \times 11$	$  \begin{array}{r l}  108 & 2 \\  54 & 2 \\  27 & 3 \\  9 & 3 \\  3 & 3 \\  1 &   \end{array}  $	$\text{donc } 108 = 2^2 \times 3^3$
---	---	---	-------------------------------------

### Exemple 7 : Liste des diviseurs d'un entier

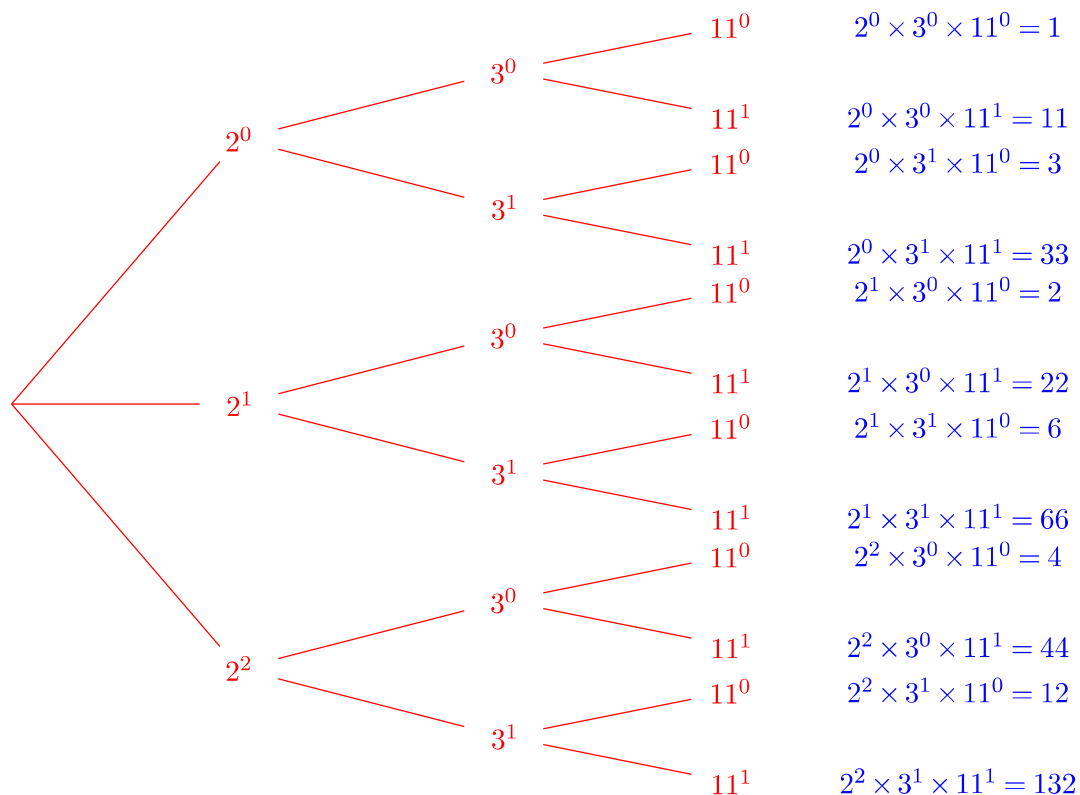
Donner la liste des diviseurs de 132.

Il faut l'avoir au préalable décomposer en facteurs premiers.

D'après l'exemple précédent, on a  $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ .

Alors les diviseurs positifs de 132 sont tous les nombres de la forme  $2^a \times 3^b \times 11^c$  où  $a \in \{0, 1, 2\}$ ,  $b \in \{0, 1\}$  et  $c \in \{0, 1\}$ .

Il y a donc  $3 \times 2 \times 2 = 12$  diviseurs positifs et autant de diviseurs négatifs.



Ainsi, les diviseurs positifs de 132 sont :  $\{1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132\}$ .

ET les diviseurs négatifs de 132 sont :  $\{-1, -2, -3, -4, -6, -11, -12, -22, -33, -44, -66, -132\}$ .

### Exemple 8 : Calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition

Calculer le PGCD et le PPCM de 132 et 108.

On sait que  $132 = 2^2 \times 3 \times 11$  et  $108 = 2^2 \times 3^3$ .

On utilise ensuite les propriétés ci-dessous :

- Le PGCD de deux entiers  $a$  et  $b$  est le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de  $a$  et de  $b$  munis du plus petit des exposants.
- Le PPCM de deux entiers  $a$  et  $b$  est le produit des facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de  $a$  ou de  $b$  munis du plus grand des exposants

Ainsi, on a  $132 \wedge 108 = 2^2 \times 3 = 12$  et  $132 \vee 108 = 2^2 \times 3^3 \times 11 = 1188$ .

### Exemple 9 : Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Calculer le PGCD et le PPCM de 132 et 108.

On effectue une série de divisions euclidiennes.

$$132 = 108 \times 1 + 24$$

$$108 = 24 \times 4 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Alors, le PGCD est le **dernier reste non nul**.

Donc  $132 \wedge 108 = 12$ .