

Leçon 3 : Arithmétique

1. Objectifs

Il s'agit de :

- revoir (ou voir) la notion de nombres premiers
- savoir décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
- savoir trouver le nombre et la liste des diviseurs d'un entier.
- revoir (ou voir) plusieurs méthodes pour le calcul du PGCD et du PPCM de deux entiers.

2. Un peu de cours

2.1. Rappel sur le calcul de puissances

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

2.2. Nombres premiers et décomposition

Définition 3 : diviseur, multiple

On dira que :

- b *divise* a
- a est un *multiple* de b
- b est un *diviseur* de a

si le reste de la division euclidienne de a par b est nul. On le note $b|a$.

Propriété 1

Soient a et b des entiers, b étant non nul.

Le nombre b divise a si et seulement si il existe un entier k tel que $a = bk$.

Exemple 5

5 divise 15 car il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $15 = 5k$. $(k = 3)$

Définition 4 : nombre premier

Un entier $p > 1$ est dit *premier* lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Propriété 2 : décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier a peut être décomposé en produit de nombres premiers, et cette décomposition est unique.

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots$$

Les p_i sont des nombres premiers distincts.

Les exposants α_i sont des entiers naturels non nuls.

2.3. PGCD, PPCM

Définition 5 : PGCD, PPCM

- $\text{PGCD}(a, b)$ = le plus grand des diviseurs communs à a et b .
On le note aussi $a \wedge b$.
- $\text{PPCM}(a, b)$ = le plus petits des multiples communs à a et b .
On le note aussi $a \vee b$.

Propriété 3 : caractérisation du PGCD

$$(d|a \text{ et } d|b) \Leftrightarrow d|a \wedge b$$

Définition 6 : premiers entre eux

On dit que deux entiers a et b sont *premiers entre eux* si $\text{PGCD}(a, b)=1$.

Théorème 1 : théorème de Bezout

$$d = a \wedge b \Leftrightarrow \text{il existe } u \in \mathbb{Z} \text{ et } v \in \mathbb{Z} \text{ tels que } d = au + bv.$$

3. Pratique guidée - Exercices corrigés

Exemple 6 : Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Donner la décomposition en facteurs premiers de 132 et 108.

On commence à le diviser par le plus petit de ses facteurs premiers, on fait la même chose pour le quotient obtenu, puis sur le deuxième quotient, etc.

$\begin{array}{c c} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \quad \text{donc } 132 = 2^2 \times 3 \times 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{c c} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \quad \text{donc } 108 = 2^2 \times 3^3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
---	--

Exemple 7 : Liste des diviseurs d'un entier

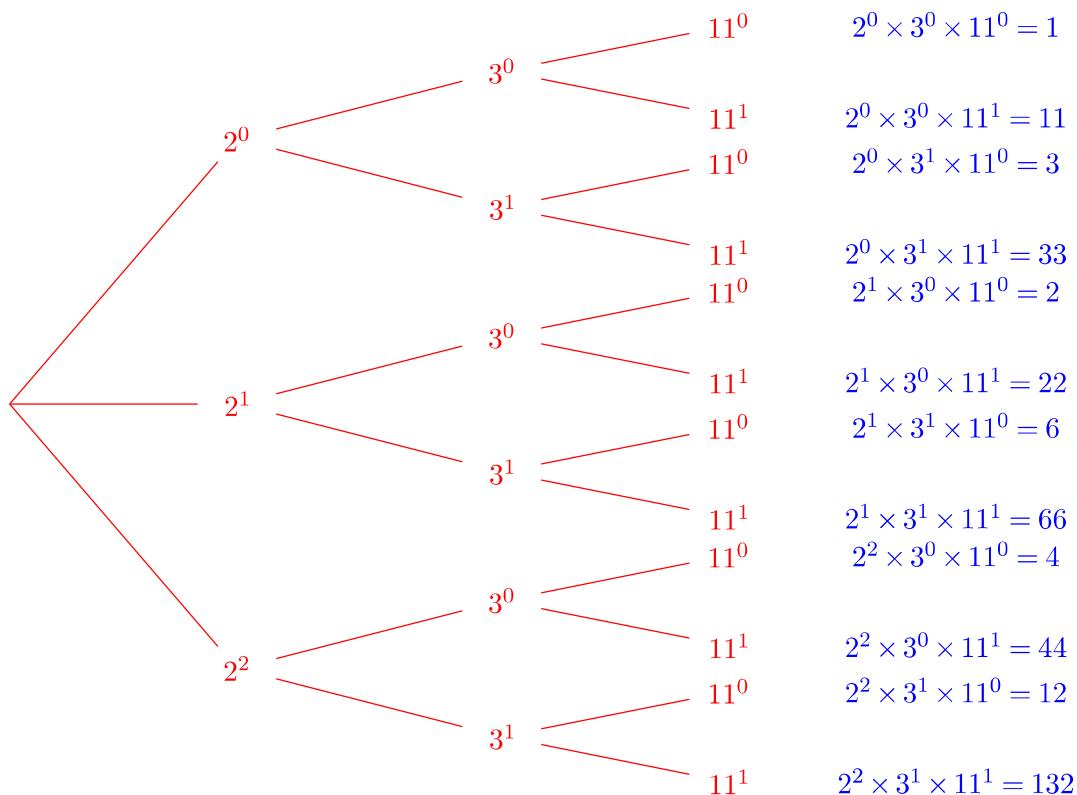
Donner la liste des diviseurs de 132.

Il faut l'avoir au préalable décomposer en facteurs premiers.

D'après l'exemple précédent, on a $132 = 2^2 \times 3 \times 11$.

Alors les diviseurs positifs de 132 sont tous les nombres de la forme $2^a \times 3^b \times 11^c$ où $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1\}$ et $c \in \{0, 1\}$.

Il y a donc $3 \times 2 \times 2 = 12$ diviseurs positifs et autant de diviseurs négatifs.



Ainsi, les diviseurs positifs de 132 sont : $\{1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132\}$.

ET les diviseurs négatifs de 132 sont : $\{-1, -2, -3, -4, -6, -11, -12, -22, -33, -44, -66, -132\}$.

Exemple 8 : Calcul du PGCD et du PPCM par la décomposition

Calculer le PGCD et le PPCM de 132 et 108.

On sait que $132 = 2^2 \times 3 \times 11$ et $108 = 2^2 \times 3^3$.

On utilise ensuite les propriétés ci-dessous :

- Le PGCD de deux entiers a et b est le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants.
- Le PPCM de deux entiers a et b est le produit des facteurs premiers apparaissant dans la décomposition de a ou de b munis du plus grand des exposants

Ainsi, on a $132 \wedge 108 = 2^2 \times 3 = 12$ et $132 \vee 108 = 2^2 \times 3^3 \times 11 = 1188$.

Exemple 9 : Calcul du PGCD par l'algorithme d'Euclide

Calculer le PGCD et le PPCM de 132 et 108.

On effectue une série de divisions euclidiennes.

$$132 = 108 \times 1 + 24$$

$$108 = 24 \times 4 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

Alors, le PGCD est le **dernier reste non nul**.

Donc $132 \wedge 108 = 12$.