Leçon 3 : Prédicats

1. Un peu de cours

1.1. Quelques définitions

Définition 1

Soit E un ensemble non vide. E est appelé le ***référentiel***.
Un prédicat $\mathcal{P}$ sur le référentiel E associe à tout élément x de E une proposition notée $\mathcal{P}(x)$.
$\mathcal{P}(x)$ est soit vraie, soit fausse.
A chaque prédicat $\mathcal{P}$ on associe son ***ensemble de vérité (ou de véracité)***. C'est l'ensemble des éléments x du référentiel pour lesquels la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

$$\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} = \text{ ensemble de vérité de } \mathcal{P}(x)$$

Exemple 1

- Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(x) : x^2 = 1764$, alors son ensemble de véracité est $\{-42; 42\}$
- Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathcal{P}(x) : x^4 = 1764$, alors son ensemble de véracité est $\{-\sqrt{42}; \sqrt{42}; -i\sqrt{42}; i\sqrt{42}\}$

1.2. Quantificateurs universelles

Définition 2

- $\forall$: "pour tout, quelque soit"
  $\forall x : \mathcal{P}(x)$ signifie $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} = E$
- $\exists$: "il existe au moins un"
  $\exists x : \mathcal{P}(x)$ signifie $\{x \in E : \mathcal{P}(x)\} \neq \emptyset$

Propriété 4 : De Morgan généralisé

- $\overline{\forall x : \mathcal{P}(x)} = \exists x : \overline{\mathcal{P}(x)}$
- $\overline{\exists x : \mathcal{P}(x)} = \forall x : \overline{\mathcal{P}(x)}$

Propriété 5 : Équivalences et conséquences logiques

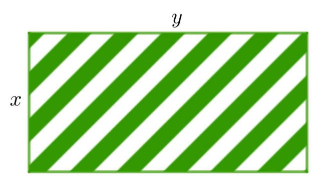
- $(\forall x : \mathcal{P}(x)) \implies (\exists x : \mathcal{P}(x))$
- $(\forall x \quad \forall y \quad : \quad \mathcal{P}(x,y)) = (\forall y \quad \forall x \quad : \quad \mathcal{P}(x,y))$
  $(\exists x \quad \exists y \quad : \quad \mathcal{P}(x,y)) = (\exists y \quad \exists x \quad : \quad \mathcal{P}(x,y))$
  Autrement dit, on peut échanger des quantificateurs de même nature.
- On en déduit l'enchainement logique suivant :

$$\forall x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y) \implies \exists x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y) \implies \forall y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y) \implies \exists y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y)$$

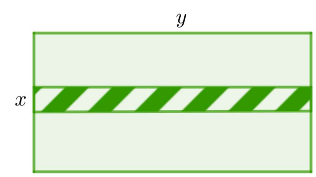
Remarque importante 1

On ne peut pas échanger des quantificateurs qui ne sont pas de même nature.
Considérons par exemple le prédicat suivant : $\mathcal{P}(x,y) =$ l'athlète x a remporté l'épreuve y.
Alors $\forall y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y)$ signifie :
"pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que x a remporté y". Autrement dit, chaque épreuve y a été remporté par un athlète x (pas forcément le même).
Alors que $\exists x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y)$ signifie :
"il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, x a remporté y". Autrement dit, l'athlète x a remporté toutes les épreuves y.
Les deux propositions n'ont pas du tout le même sens.
Par contre, il est clair que : $\exists x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y) \Longrightarrow \forall y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y)$

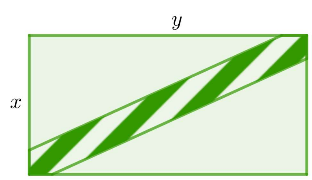
1.3. Des illustrations pour mieux visualiser



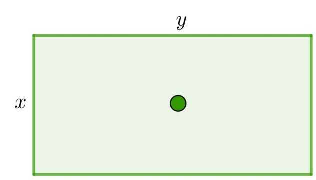
$\forall x \quad \forall y$



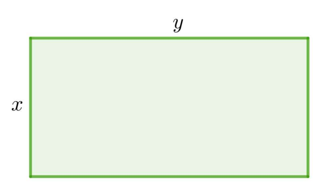
$\exists x \quad \forall y$



$\forall y \quad \exists x$



$\exists y \quad \exists x$



tout est faux