Mathématiques discrètes

Partie 2 : logique

Résumé de cours et exercices

BUT INFORMATIQUE
Semestre 1
R1.06

Marie Deletombe
Moulay-Driss Benchiboun

marie.deletombe@univ-lille.fr

version du 2 octobre 2025

Université de Lille

iut Informatique

1 Logique ensembliste . . . . . . **p 5**

Un peu de cours 5

Vocabulaire ensembliste 5

Quelques propriétés 6

Les exercices 6

Les exercices de base 6

Pour s'entrainer 8

Pour aller plus loin 9

2 Logique booléenne . . . . . . **p 11**

Un peu de cours 11

Opérateurs logiques 11

Formulaire de calcul booléen 13

Les exercices 14

Les exercices de base 14

Pour s'entrainer 17

Pour aller plus loin 18

3 Prédicats . . . . . . **p 19**

Un peu de cours 19

Quelques définitions 19

Quantificateurs universels et existentiels 19

Des illustrations pour mieux visualiser 20

Les exercices 21

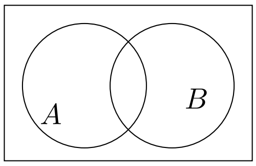
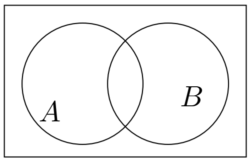
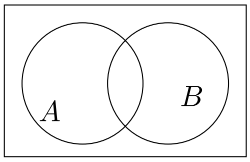
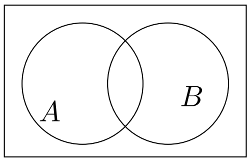
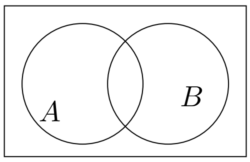
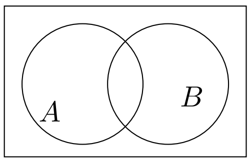
Les exercices de base 21

Pour aller plus loin 23

Leçon 1 : Logique ensembliste

1. Un peu de cours

1.1. Vocabulaire ensembliste

Vocabulaire	Signification	notation ensembliste	illustration
Ensemble A	ensemble constitué de tous les éléments de A	A	
Intersection de A et B	ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B	$A \cap B$	
Union de A et B	ensemble des éléments de A et de B	$A \cup B$	
Différence symétrique de A et B	ensemble des éléments qui ne sont que dans A ou que dans B (mais pas les deux en même temps)	$A \Delta B$	
Complémentaire de A	ensemble constitué des éléments qui ne sont pas dans A	$\overline{A}$	
Différence de A et B	ensemble constitué des éléments qui sont dans A mais pas dans B	$A \setminus B$	

1.2. Quelques propriétés

Propriété 1

Soient A et B deux ensembles du référentiel E.
- $A \cap \overline{A} =$
- $A \cup \overline{A} =$
- $A \Delta B =$

Propriété 2 : Lois de De Morgan

Soient A et B deux ensembles du référentiel E.
- $\overline{A \cup B} =$
- $\overline{A \cap B} =$

Le ***cardinal*** de A, noté $card(A)$ ou $|A|$, est

Propriété 3

$|A \cup B| =$

2. Les exercices

2.1. Les exercices de base

Un ensemble peut être donné ***en extension*** (en énonçant une liste de ses éléments) ou en ***compréhension*** (en énonçant un propriété qui caractérise ses éléments).

❒ **Exercice 1 :**

Représenter les ensembles suivants à l'aide d'un diagramme de Venn :

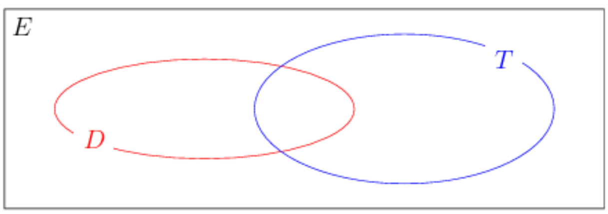
$\overline{A \cap B}$ $\quad$ $\overline{A} \cap B$ $\quad$ $\overline{A} \cup B$ $\quad$ $\overline{A \cup B}$ $\quad$ $\overline{\overline{A} \cap B}$ $\quad$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

❒ **Exercice 2 :**

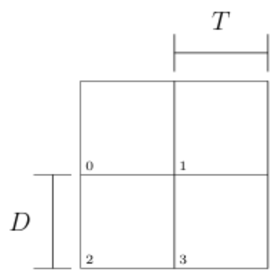
Dans le référentiel $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on considère les parties D et T telles que :

$D =$ ensemble des multiples de 2 $\quad$ et $\quad$ $T =$ ensemble des multiples de 3.

1. Placer les éléments de E dans chacun des deux dessins suivants :



EULER-VENN

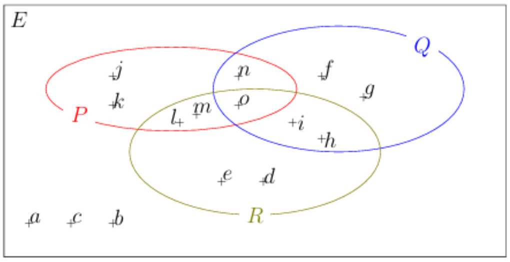


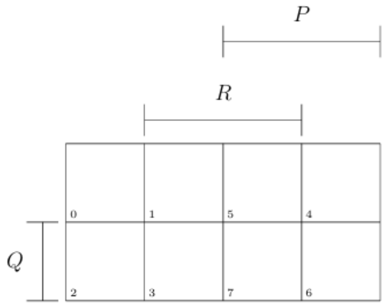
KARNAUGH

2. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes les parties suivantes et exprimer ces parties en extension :
   - le sous-ensemble des multiples de 2 et 3
   - le sous-ensemble des multiples de 2 mais pas de 3
   - le sous-ensemble des multiples de 2 ou 3
   - le sous-ensemble des multiples de 2 ou 3 mais pas des deux
   - le sous-ensemble des éléments de E qui ne sont ni multiples de 2 ni de 3

❒ Exercice 3 :

P, Q et R sont trois parties d'un référentiel E représentées sur le diagramme de Venn ci-dessous :





1. Reporter les données dans le diagramme de Karnaugh.
2. Exprimer en extension les sous-ensembles suivants de E :
   - $\overline{P}$
   - $P \cap Q$
   - $P \cup Q$
   - $P \Delta Q$
   - $\overline{P} \cup \overline{Q} \cup \overline{R}$
   - $\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$
   - $\overline{P} \cup \overline{Q} \cap \overline{R}$

❒ Exercice 4 :

On considère les ensembles suivants :

$A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad C = \emptyset$ $\quad D = \{3,4,5,7\}$ $\quad E = \{4,6,8\}$

Décrire en extensions les ensembles :

- $A \cup B$
- $A \cap C$
- $B \cup D$
- $B \cap A$
- $E \cap (B \cup D)$
- $(E \cap B) \cup D$
- $(E \cup B) \cap D$
- $E \cup (B \cap D)$

Conclusion :

❒ Exercice 5 : extension ou compréhension

1. Énoncer les ensembles suivants en compréhension :
   $A = \{1,2,4,8,16,32,64\}$ $\quad B = \{1,2,4,5,10,20\}$ $\quad C = \{2004,2008,2012,2016,2020,2024\}$
2. Énoncer les ensembles suivants en extension :
   $D = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 1 + x\}$ $\quad E = \{x \in \mathbb{N} / x^4 = 1\}$ $\quad F = \{x \in \mathbb{R} / x^4 = 1\}$ $\quad G = \{x \in \mathbb{C} / x^4 = 1\}$
3. Décrire en extension les ensembles suivants :
   - $A = \{x \in \mathbb{N} / -2{,}8 < x < 4{,}5\}$
   - $B = \{x \in \mathbb{R} / -2{,}8 < x < 4{,}5\}$
   - $C = \{x \in \mathbb{N} / x + 5 = 2\}$
   - $D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ impair et } x < 17\}$
   - $E = \{x \in \mathbb{N} / 3 \text{ divise } x \text{ et } x \leqslant 24\}$
   - $F = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ divise } 18\}$
   - $G = \{x \in \mathbb{N} / \frac{x}{8} \leqslant 1\}$

❒ **Exercice 6 : Ethnologie**

Un ethnologue publie un article sur une tribu où l'on apprend que :

1. Tout membre de la tribu porte un collier ou une boucle d'oreille.
2. Tous les guerriers portent un collier.
3. Ceux qui ne sont pas des guerriers n'ont pas de boucles d'oreille.
4. Ceux qui portent un collier sont des guerriers mâles.
5. Les hommes ne préparent jamais les repas.
6. Les repas sont préparés à tour de rôle par tous les guerriers.

On utilise les notations suivantes :

T : ensemble des membres de la tribu.
C : ensemble des membres de la tribu portant un collier.
B : ensemble des membres de la tribu portant une boucle d'oreille.
G : ensemble des guerriers de la tribu.
H : ensemble des hommes de la tribu.
R : ensemble des membres de la tribu qui préparent les repas.

1. Traduire chacune des phrases de l'article en utilisant les ensembles ci-dessus.
2. a) Démontrer qu'il n'y a pas de guerriers dans cette tribu.
   b) En déduire que cette tribu n'existe pas.
   On pourra utiliser le fait que pour tout ensemble A et B : $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

❒ **Exercice 7 :**

Dans une promotion de 100 étudiants, 50 ont déjà pratiqué Javascript et 40 ont déjà pratiqué Python. Sachant que 30 n'ont pratiqué aucun de ces deux langages, combien ont déjà pratiqué les deux langages ?

❒ **Exercice 8 :**

1. En vous inspirant de la propriété 3, essayer de trouver une formule analogue pour $|A \cup B \cup C|$.
2. On étudie une population de 100 étudiants. Parmi eux, 32 étudient la médecine, 20 la physique et 45 la biologie. 15 étudient la médecine et la biologie, 7 la médecine et la physique, 10 la physique et la biologie. 30 n'étudient aucune de ces trois matières.
   a) Représenter la situation par un diagramme de Venn ou de Karnaugh.
   b) Combien étudient les trois matières en même temps ?
   c) Combien étudient la médecine et la biologie mais pas la physique ?
   d) Combien étudient une seule matière ?

2.2. Pour s'entrainer

❒ **Exercice 9 : extension ou compréhension**

1. Énoncer les ensembles suivants en compréhension :
   $A = \{1,2,3,6,9,18\}$ $B = \{37,74,111\}$ $C = \{7,9,11,13\}$
2. Énoncer les ensembles suivants en extension :
   $D = \{\text{nombres entiers compris entre } \sqrt{2} \text{ et } 2\pi\}$
   $F = \{x \in \mathbb{N} / \frac{5}{3} < x < \frac{47}{7}\}$
   $G = \{x \in \mathbb{N} / 2x - 13 \leqslant 0\}$

❒ **Exercice 10 :**

Dans un groupe formé de 80 personnes, 32 jouent au tennis, 17 pratiquent le golf, 11 jouent au tennis et au golf, 1 personne joue au golf et au football, 1 personne pratique les 3 sports, 20 pratiquent exactement deux sports et chacun pratique au moins l'un des trois sports.

1. Faites un diagramme de Venn.
2. Combien de personnes jouent au football ?
3. Combien de personnes pratiquent un seul sport ?
4. Combien de personnes ne jouent qu'au tennis ?

❒ **Exercice 11 :**
Dans un groupe de 40 touristes, 16 parlent l'allemand, 19 le français, 17 l'italien, 5 parlent l'allemand et le français, 6 l'allemand et l'italien, 7 le français et l'italien et 2 parlent ces trois langues.
Combien de personnes y a-t-il dans ce groupe qui ni parlent aucune de ces trois langues ?

2.3. Pour aller plus loin

❒ **Exercice 12 :** **différence symétrique**

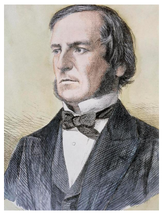
1. Soient $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,3,5,7,9\}$, $C=\{4,5,6,7,8,9\}$ et $D=\{2,3,5,7,8\}$.
   Trouver $A\Delta B$, $C\Delta B$, $A\cap(B\Delta D)$, $B\Delta C$, $A\Delta D$ et $(A\cap B)\Delta(A\cap D)$.
2. Soit E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E.
   a) Calculez $A\Delta A$, $A\Delta E$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta A$.
   b) Démontrer que $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
   c) ♠ Démontrer que si $A\Delta B=C$, alors $A\Delta C=B$ et $B\Delta C=A$.

❒ **Exercice 13 :** **parties d'un ensemble**
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Énumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$ si $E=\{a,b,c\}$.
2. Énumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$ si $E=\{a\}$.
3. Énumérer les éléments de $\mathcal{P}(E)$ si $E=\{a,b\}$.
4. Que vaut $\mathcal{P}(\emptyset)$?
5. Que vaut $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Leçon 2 : Logique booléenne

1. Un peu de cours

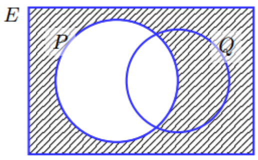


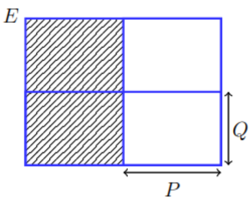
En programmation informatique, une ***variable booléenne*** est une variable qui peut prendre deux états (vrai et faux), destinée à représenter les valeurs de vérité de la logique et l'algèbre booléenne. Elle est nommée ainsi d'après George Boole, fondateur dans le milieu du XIX^e siècle, de l'algèbre portant son nom.

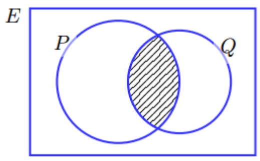
1.1. Opérateurs logiques

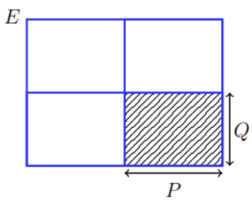
Négation, conjonction, disjonction

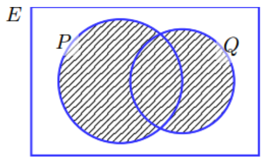
Les **opérateurs booléens** : négation, conjonction, disjonction (autrement dit *non*, *et*, *ou inclusif*) et les opérations ensemblistes (complémentaire, intersection, union) sont liés par :

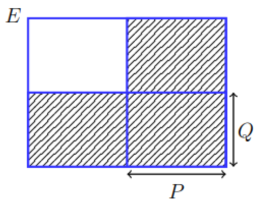
<table>
<tr><th>négation : non NOT</th><th>conjonction : et AND</th><th>disjonction : ou (inclusif !) OR</th></tr>
<tr>
<td>$\overline{P} = E \setminus P = \{x \in E : \neg(x \in P)\}$




<table><tr><th>p</th><th>$\neg p$</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td>
<td>$P \cap Q = \{x \in E : x \in P \wedge x \in Q\}$




<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \wedge q = p \cdot q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td>
<td>$P \cup Q = \{x \in E : x \in P \vee x \in Q\}$


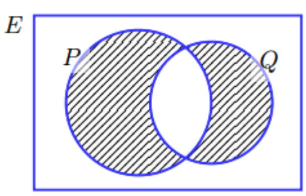


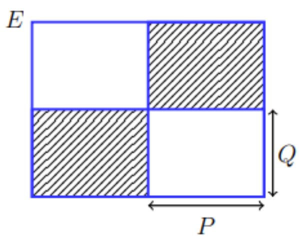
<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \vee q = p + q$</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Les autres opérateurs

- Le **ou exclusif**
  Le ou exclusif est noté $\oplus$, ou XOR, et est associé à la différence symétrique ensembliste.

$$\begin{aligned} P \Delta Q &= (P \cup Q) \setminus (P \cap Q) \\ &= \overline{P} \cap Q \;\cup\; P \cap \overline{Q} \\[1ex] p \oplus q &= \neg p \wedge q \;\vee\; p \wedge \neg q \\ &= \overline{p} \cdot q \;+\; p \cdot \overline{q} \end{aligned}$$





- L'opérateur **flèche**
  $p \rightarrow q$ si lit "p flèche q" ou "si p alors q" est faux seulement si l'antécédent p est vrai et le conséquent q est faux.
  On a :
  $\boxed{p \rightarrow q = \overline{p} \vee q = \overline{p} + q}$
- L'opérateur **double flèche**
  $p \leftrightarrow q$ si lit "p double flèche q" est vrai seulement si les deux propositions sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.
  On a :
  $\boxed{p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) = (\overline{p} + q).(p + \overline{q})}$

p	q	$p \wedge q$	$p \oplus q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Équivalence logique

Si g et d sont deux expressions logiques, on a :

$\boxed{(g = d) \text{ si et seulement si } (g \text{ et } d \text{ ont le même table de vérité}) \text{ si et seulement si } (g \leftrightarrow d = 1)}$

De même, on a :

$\boxed{(g \Rightarrow d) \text{ ssi (l'ensemble représenté par } g \text{ est contenu dans celui représenté par } d) \text{ ssi } (g \rightarrow d = 1)}$

Tautologie/antilogie

Définition 1

Une ***tautologie*** est une proposition toujours vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions initiales qui la composent.

Définition 2

Une ***antilogie*** est une proposition toujours fausse quelque soit la valeur de vérité des propositions initiales qui la composent.

Maxterm/Minterm

Définition 3

Un ***maxterm*** est une variable booléenne qui n'a qu'un seul 0 dans sa table de vérité.

Définition 4

Un ***minterm*** est une variable booléenne qui n'a qu'un seul 1 dans sa table de vérité.

1.2. Formulaire de calcul booléen

Par convention, l'opérateur ***non*** est **prioritaire** sur le ***et***, qui lui-même est **prioritaire** sur le ***ou***.

Notation logique

Propriété	**Conjonction (AND)**	**Disjonction (OR)**
Liens entre 0 et 1	$\neg 0 = 1$	$\neg 1 = 0$
Liens entre contraires	$p \wedge \neg p = 0$	$p \vee \neg p = 1$
Neutralité	$p \wedge 1 = p$	$p \vee 0 = p$
Absorption	$p \wedge 0 = 0$	$p \vee 1 = 1$
Double Négation	$\neg(\neg p) = p$	
Idempotence	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
Associativité	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
Commutativité	$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
Distributivités	$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	
Absorptions étendues	$p \wedge (p \vee q) = p$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Notation algébrique

Propriété	**Multiplication (AND)**	**Addition (OR)**
Liens entre 0 et 1	$\overline{0} = 1$	$\overline{1} = 0$
Liens entre contraires	$p \cdot \overline{p} = 0$	$p + \overline{p} = 1$
Neutralité	$p \cdot 1 = p$	$p + 0 = p$
Absorption	$p \cdot 0 = 0$	$p + 1 = 1$
Double Négation	$\overline{\overline{p}} = p$	
Idempotence	$p \cdot p = p$	$p + p = p$
Associativité	$p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$	$p + (q + r) = (p + q) + r$
Commutativité	$p \cdot q = q \cdot p$	$p + q = q + p$
De Morgan	$\overline{p \cdot q} = \overline{p} + \overline{q}$	$\overline{p + q} = \overline{p} \cdot \overline{q}$
Distributivités	$(p \cdot q) + r = (p + r) \cdot (q + r)$ $(p + q) \cdot r = (p \cdot r) + (q \cdot r)$	
Absorptions étendues	$p \cdot (p + q) = p$	$p + (p \cdot q) = p$
	$p \cdot (\overline{p} + q) = p \cdot q$	$p + (\overline{p} \cdot q) = p + q$

Notation ensembliste

Propriété	Intersection (AND)	Union (OR)
Liens entre $\varnothing$ et référentiel	$\overline{\varnothing}=E$	$\overline{E}=\varnothing$
Liens entre complémentaires	$P\cap\overline{P}=\varnothing$	$P\cup\overline{P}=E$
Neutralité	$P\cap E=P$	$P\cup\varnothing=P$
Absorption	$P\cap\varnothing=\varnothing$	$P\cup E=E$
Double Négation	$\overline{\overline{P}}=P$	
Idempotence	$P\cap P=P$	$P\cup P=P$
Associativité	$P\cap(Q\cap R)=(P\cap Q)\cap R$	$P\cup(Q\cup R)=(P\cup Q)\cup R$
Commutativité	$P\cap Q=Q\cap P$	$P\cup Q=Q\cup P$
De Morgan	$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$	$\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$
Distributivités	$(P\cap Q)\cup R=(P\cup R)\cap(Q\cup R)$ $(P\cup Q)\cap R=(P\cap R)\cup(Q\cap R)$	
Absorptions étendues	$P\cap(P\cup Q)=P$	$P\cup(P\cap Q)=P$
	$P\cap(\overline{P}\cup Q)=P\cap Q$	$P\cup(\overline{P}\cap Q)=P\cup Q$

2. Les exercices

2.1. Les exercices de base

❒ **Exercice 14 : Amours et Désamours**

Supposons que l'on donne aux variables propositionnelles c et d les sens *Camille aime dominique* et *Dominique aime Camille*.

1. Donner un énoncé du langage courant simple et clair pour chacune des propositions suivantes :
   a) $\overline{c}.d$
   b) $\overline{c+d}$
   c) $\overline{c.d}$
2. Inversement, traduire en expression logiques les affirmations suivantes :
   a) Camille et Dominique s'aiment l'un l'autre
   b) Camille et Dominique ne s'aiment ni l'un ni l'autre
   c) Camille aime Dominique, mais Dominique ne le lui rend pas
   d) Il est faux que Camille aime Dominique et n'en soit pas aimé.

❒ **Exercice 15 : Code de la route**

Supposons qu'on donne aux variables propositionnelles v et p les sens *Vous roulez à plus de 80 km/h* et *Vous avez une contravention*.
Écrivez avec des opérateurs logiques :

1. Vous conduisez à moins de 80 km/h.
2. Vous roulez à plus de 80 km/h et pourtant vous n'avez pas de contravention.
3. Conduire à plus de 80 km/h est suffisant pour avoir une contravention.
4. Vous avez une contravention et pourtant vous roulez à moins de 80 km/h.
5. Chaque fois que vous avez une contravention, c'est que vous conduisez à plus de 80 km/h.

❒ Exercice 16 :

Simplifier les expressions suivantes :

- $a+a.b$
- $a.(a+b)$
- $a+\overline{a}.b$
- $(a+b).(a+\overline{b})$
- $(\overline{a}+\overline{b})+(\overline{a}+b)+(a+\overline{b})$
- $(a+b).(a+c)$

❒ Exercice 17 : Table de vérité à une et deux variables

1. Dresser la liste des tables de vérités à une variable p.
   Pour chacune de ces tables, proposer une expression qui admet cette table.

p	T_0	T_1	T_2	T_3
0				
1				
expressions				

2. a) Même question pour les tables de vérités à deux variables p et q.

p	q	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}

   b) Quels sont les **Maxterms**, quels sont les **Minterms**

3. Combien de lignes comporte chaque table de vérité à n variables ? Combien y a-t-il de telles tables ?

❒ Exercice 18 : Retrouver l'expression logique

On envisage la table de vérité d'une fonction logique de 3 variables p, q et r dans cet ordre :

p	q	r	a
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Proposer une expression de a qui admette cette table de vérité.
2. Déterminer la valeur en base 10 de $(01110001)_2$
3. On considère que la table de vérité de a est numérotée 113 parmi les tables de vérités à 3 variables. On écrit alors que $a=T_{113}$.

a) Combien y a-t-il de tables de vérité à 3 variables ?

b) Quel est le numéro de la table associée à $\overline{a}$?

4. Donner la table T_{17}, puis proposer une expression b admettant cette table.
5. A-t-on $a \Rightarrow b$? A-t-on $b \Rightarrow a$? Les propositions a et b sont-elles logiquement équivalentes ?

❐ Exercice 19 :

Un musée accepte un visiteur quand il respecte l'une des situations suivantes :

- Être accompagné par un adulte et avoir moins de 18 ans.
- Avoir un billet d'entrée.
- Avoir plus de 18 ans et avoir un billet d'entrée.

On considère les variables booléennes suivantes : a , b , c où :

- $a = 1$ si le visiteur est majeur ($a = 0$ sinon)
- $b = 1$ si le visiteur n'est pas accompagné ($b = 0$ sinon)
- $c = 1$ si le visiteur n'a pas de billet d'entrée ($c = 0$ sinon)

1. Traduire par une expression booléenne A le fait que le visiteur soit accepté.
2. Simplifier A par le calcul.
3. Vérifier le résultat en utilisant les tables de vérité.

❐ Exercice 20 : Simplification

On considère l'expression logique :

$$a = (p + \overline{(q + (r.\overline{s}.\overline{q}.0))}).\overline{p}.q.(1 + \overline{s})$$

Simplifier cette expression en utilisant les règles du calcul logique en détaillant soigneusement les étapes successives du calcul.
Est-ce une tautologie ? Une antilogie ?

❐ Exercice 21 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes de façon algébrique, puis vérifier le résultat grâce aux tables de vérités :

1. $(p \to q) \wedge (p \to r)$
2. $(p \to q) \vee (p \to r)$
3. $(p \to r) \wedge (q \to r)$
4. $(p \to r) \vee (q \to r)$

❐ Exercice 22 : Tables

Établir les tables de vérités des expressions suivantes :

1. $(q \vee p) \to (q \to \overline{r})$
2. $(q \leftrightarrow \overline{p}) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

❐ Exercice 23 :

On considère les propositions a et b suivantes :

$$a = [(p \wedge q) \to (q \wedge r)] \vee r$$

$$b = [(p \wedge q) \to (q \wedge r)] \vee p$$

Simplifier algébriquement les expressions suivantes et dire, pour chacune d'elle, si elle est remarquable (antilogie, tautologie, minterm, maxterm).

2.2. Pour s'entrainer

❒ **Exercice 24 : Tables**

Établir les tables de vérités des expressions suivantes :

1. $(q \to p) \to [(p \to \overline{r}) \to (\overline{r} \to q)]$
2. $[p \to (q \to r)] \to [q \to (p \to r)]$

❒ **Exercice 25 :**

Simplifier les expressions suivantes :

- $(a+\overline{b}).(b+\overline{c}).(c+\overline{a})$
- $(\overline{b}+\overline{a}).(a.c+\overline{b})$
- $a.(b.c+\overline{b}.c+b.\overline{c})$

❒ **Exercice 26 :**

Démontrer la formule de conséquence logique :

$$[(r \to q) \wedge p] \vee (q \to p) \Rightarrow p \vee \overline{q}$$

❒ **Exercice 27 :**

Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une mairie doit recruter une personne pour un travail concernant la circulation des voitures dans le centre-ville.
Pour faire son choix, le DRH met en place trois critères de sélection concernant les connaissances en informatique, l'expérience dans le domaine concerné et le suivi d'un stage de formation spécifique.
Pour chaque employé, on définit les variables booléennes suivantes :

- a : il a des connaissances en informatique.
- b : il a de l'expérience dans le domaine concerné.
- c : il a suivi un stage de formation spécifique.

La direction des ressources humaines décide que pourront postuler les employés suivant :

- qui satisfont aux trois conditions.
- **ou** qui n'ont pas de connaissances en informatique mais ont suivi un stage de formation spécifique.
- **ou** qui ont de l'expérience dans le domaine concerné mais n'ont pas suivi de stage de formation spécifique.

1. Donner l'expression booléenne E qui décrit les critères des ressources humaines.
2. Démontrer que $(a \wedge b) \vee \bar{a} = b \vee \bar{a}$.
3. Simplifier E en utilisant la propriété démontrée à la question précédente.
4. Vérifier ce résultat en utilisant les tables de vérité.

❒ **Exercice 28 :**

On envisage la table de vérité d'une fonction logique de 3 variables.

p	q	r	a	b		
0	0	0	1			
0	0	1	1			
0	1	0	0			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	0	1	0			
1	1	0	1			
1	1	1	0			

1. Proposer une expression de a qui admette cette table de vérité.

2. Justifier que $[11010010]_2 = 210$.
   On note $a = f_3^{210}$.
3. Quel est le numéro de la table associée à $\bar{a}$? *Justifer.*
4. Remplir dans le tableau la table n°27, puis proposer une expression de $b = f_3^{27}$.

2.3. Pour aller plus loin

❒ **Exercice 29 :**

Simplifier les expressions suivantes :

- $(\overline{a}+b).(a+b+d).\overline{d}$
- $(a.b+c+d).a.b$
- $c.(b+c)+(a+d).(\overline{a}+d).\overline{c}$

❒ **Exercice 30 :**

Démontrer la formule de conséquence logique :

$$(p+q+r).(\overline{p}+q+r).(\overline{q}+r) \Rightarrow r$$

Leçon 3 : Prédicats

1. Un peu de cours

1.1. Quelques définitions

Définition 5

Soit E un ensemble non vide. E est appelé le ***référentiel***.
Un prédicat $\mathcal{P}$ sur le référentiel E associe à tout élément x de E une proposition notée $\mathcal{P}(x)$.
$\mathcal{P}(x)$ est soit vraie, soit fausse.
A chaque prédicat $\mathcal{P}$ on associe son ***ensemble de vérité (ou de véracité)***. C'est l'ensemble des éléments x du référentiel pour lesquels la proposition $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple 1

- Si $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(x) : x^2 = 1764$, alors son ensemble de véracité est
- Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathcal{P}(x) : x^4 = 1764$, alors son ensemble de véracité est

1.2. Quantificateurs universels et existentiels

Définition 6

- $\forall$:
  $\forall x : \mathcal{P}(x)$ signifie
- $\exists$:
  $\exists x : \mathcal{P}(x)$ signifie

Exemple 2 : Quantificateur universel

« Tout parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle. »
« Quel que soit x, x^2 est positif ou nul. »
« Tous les ans, Noël est en décembre. »
Dans ces trois affirmations, on énonce une propriété **universelle**, vraie pour tous les parallélogrammes, pour tout nombre réel x, pour chaque année.

Exemple 3 : Quantificateur existentiel

« Il existe des parallélogrammes dont les diagonales sont de même longueur. »
« Il existe des réels x tels que $x^2 > 100$. »
« Il existe des années où il ne neige pas. »
Dans ces trois affirmations, on énonce une propriété vraie sur des exemples mais qui n'est pas universelle.

Propriété 4 : De Morgan généralisé

- $\overline{\forall x : \mathcal{P}(x)} =$
- $\overline{\exists x : \mathcal{P}(x)} =$

Propriété 5 : Équivalences et conséquences logiques

- $(\forall x : \mathcal{P}(x)) \implies (\exists x : \mathcal{P}(x))$
- $(\forall x \quad \forall y \quad : \quad \mathcal{P}(x,y)) = (\forall y \quad \forall x \quad : \quad \mathcal{P}(x,y))$
  $(\exists x \quad \exists y \quad : \quad \mathcal{P}(x,y)) = (\exists y \quad \exists x \quad : \quad \mathcal{P}(x,y))$
  Autrement dit,
- On en déduit l'enchainement logique suivant :

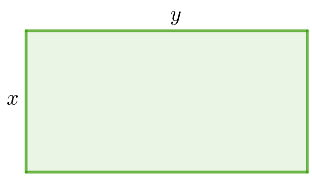
Remarque importante 1

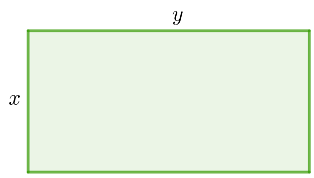
On ne peut pas échanger des quantificateurs qui ne sont pas de même nature.
Considérons par exemple le prédicat suivant : $\mathcal{P}(x,y) =$ l'athlète x a remporté l'épreuve y.
Alors $\forall y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y)$ signifie :

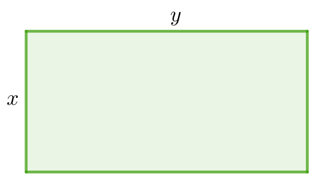
Alors que $\exists x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y)$ signifie :

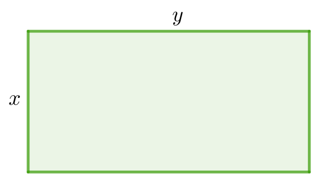
Les deux propositions n'ont pas du tout le même sens.
Par contre, il est clair que : $\exists x \quad \forall y : \mathcal{P}(x,y) \implies \forall y \quad \exists x : \mathcal{P}(x,y)$

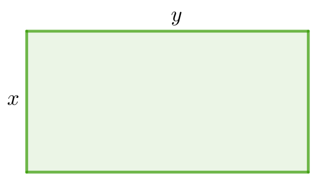
1.3. Des illustrations pour mieux visualiser











2. Les exercices

2.1. Les exercices de base

❒ Exercice 31 : Pour se familiariser 1

On se donne le référentiel $E = \{8, 10, 12, 14\}$.
Donner, en justifiant la réponse, la validité de chacun des énoncés quantifiés suivants :

1. $\exists x : x > 0$
2. $\forall x : x > 10$
3. $\exists x : x > 10$
4. $\forall x : x > 7$
5. $\exists x : x > 7$
6. $\forall x \quad \forall x' : |x - x'| < 10$
7. $\forall x \quad \forall x' : |x - x'| < 5$
8. $\exists x \quad \forall x' : |x - x'| < 5$
9. $\forall x \quad \exists x' : |x - x'| \leqslant 2$
10. $\exists x \quad \exists x' : |x - x'| > 5$

❒ Exercice 32 : Pour se familiariser 2

Dire quelles sont celles de ces quatre propositions qui sont vraies dans chacun des exemples suivants de prédicats à deux variables, et mettre à chaque fois en évidence l'ensemble de vérité.

1. Dans cette question, le prédicat considéré est défini sur le référentiel $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathcal{P}(x,y)$	ensemble de vérité	$\forall x\ \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists x\ \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\forall y\ \exists x : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists y\ \exists x : \mathcal{P}(x,y)$
$x^2 + y^2 \geqslant 0$					
$x^2 + y^2 \leqslant 0$					
$x^2 + y^2 > 0$					
$x^2 + y^2 < 0$					
$x^2 - y^2 \geqslant 0$					
$x.y \neq 0$					
$x.y = 0$					

2. Dans cette question, le prédicat considéré est défini sur le référentiel $E = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : x \geqslant 2 \text{ et } y \geqslant 2\}$

$\mathcal{P}(x,y)$	ensemble de vérité	$\forall x\, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists x\, \forall y : \mathcal{P}(x,y)$	$\forall y\, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$	$\exists y\, \exists x : \mathcal{P}(x,y)$
$x.y = 3$					
$x.y = 4$					
$x.y = 13$					
$x.y = 52$					
$x.y$ est impair					

❒ Exercice 33 :

Écrire la négation de la phrase suivante :
"Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

❒ Exercice 34 : Taux de chômage

On considère les taux de chômage de trois pays (codés X, Y et Z) pour trois tranches d'âges :

- J pour la tranche des moins de 25 ans
- M pour la tranche des 26 à 50 ans.
- V pour la tranche des plus de 51 ans.

et ce pour les années 2011, 2012 et 2013.
Le résultat est donnée dans un tableau où les symboles **1** et **0** signifient respectivement que le taux de chômage a été ou non inférieur à 10% (ce que l'on appelle respectivement dans les journaux "un chômage à un chiffre" ou "un chômage à deux chiffres").
On note $\mathcal{P}$ le prédicat à 3 variables p, t et a où $\mathcal{P}(p,t,a)$ signifie :
« dans le pays p, le taux de chômage a été inférieur à 10% pour la tranche d'âge t au cours de l'année a ».

	X			Y			Z		
	J	M	V	J	M	V	J	M	V
2011	1	1	0	1	0	1	1	1	0
2012	1	0	0	1	1	1	0	0	0
2013	0	1	0	1	1	0	0	1	0

Pour chacune des propositions ci-dessous écrites en langage courant, on demande :

- de la formaliser dans l'écriture du calcul des prédicats.
- de dire (en justifiant la réponse) si cette proposition est vraie ou fausse.
- d'écrire sa négation avec l'écriture des prédicats.
- d'écrire cette négation en langage courant.

1. Pour les plus de 51 ans, il y a au moins un pays où le taux de chômage n'a pas toujours été supérieur à 10%.
2. Pour chaque tranche d'âge, il y a chaque année au moins un pays où le taux de chômage a été inférieur à 10%.
3. En 2012, il y a au moins un pays où le taux de chômage a été supérieur à 10% dans toutes les tranches d'âge.
4. Il existe une tranche d'âge pour laquelle dans chaque pays, le taux de chômage a été, au moins pendant une année, supérieur à 10%.

❒ Exercice 35 : Température

Le tableau ci-dessous donne pour 4 villes (Ajaccio, Brest, Clermont-Ferrand et Dijon) la température nocturne minimale et la température diurne maximale de 3 jours de novembre 1998 (le 6, le 13 et le 20) :

	6		13		20	
	n	d	n	d	n	d
A	5°C	17°C	9°C	15°C	2°C	9°C
B	10°C	15°C	6°C	11°C	5°C	9°C
C	0°C	16°C	3°C	8°C	−10°C	2°C
D	−1°C	11°C	3°C	7°C	−6°C	1°C

On note $V = \{A, B, C, D\}$ l'ensemble des villes codées par leur initiale, $J = \{6, 13, 20\}$ l'ensemble des jours et $M = \{n, d\}$ l'ensemble des moments de la journée (nocturne et diurne).
Enfin, on indique que les météorologues appellent *gradient de température* la différence entre la température diurne maximale et la température nocturne minimale de la journée.

On considère les deux prédicats suivants :
- $\mathcal{P}(v, j, m)$ signifie que « dans la ville v, la température du jour j au moment de la journée m est supérieure ou égale à 0° C ».
- $\mathcal{Q}(v, j)$ signifie que « dans la ville v, le gradient de température du jour j est supérieur ou égal à 15°C ».

Pour chacune des propositions ci-dessous écrites en langage courant, on demande :
- de la formaliser dans l'écriture du calcul des prédicats.
- de dire (en justifiant la réponse) si cette proposition est vraie.
- d'écrire sa négation avec l'écriture des prédicats.
- d'écrire cette négation en langage courant.

1. Chaque jour, la température nocturne a été positive ou nulle dans toutes les villes.
2. Il y a au moins une ville où jamais la température n'est tombée en dessous de 0° C.
3. Chaque jour, le gradient de température n'a dépassé 15° C dans aucune ville.

2.2. Pour aller plus loin

❒ Exercice 36 : Exercice difficile

On trouve parfois la notation ∃! avec l'interprétation *"il existe un unique"*.
Attention, ∃! n'est pas un quantificateur.

1. Exprimer correctement $\exists! x : \mathcal{P}(x)$ à l'aide des symboles suivants :
   - les connecteurs $\wedge$, $\neg$ et $\leftarrow$
   - les quantificateurs $\exists$ et $\forall$
   - le signe d'égalité $=$
2. Ecrire la négation de $\exists! x : \mathcal{P}(x)$