

1 Wstęp

RAMES jest graficznym programem typu SDI (*Single Document Interface*) stworzonym w języku C++ na bazie bibliotek MFC (*Microsoft Foundation Class*) służącym do obliczeń numerycznych jednowymiarowych zagadnień przepływu ciepła. Implementacja zawiera wykorzystanie metody elementów skończonych w podejściu Galerkinia o elementach 2- i 3-węzłowych.

2 Metoda Elementów Skończonych dla transferu ciepła [1]

2.1 Przepływ ciepła

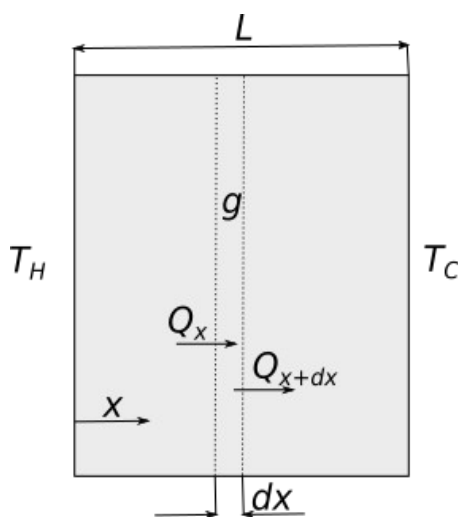
Transfer ciepła opisany jest przez prawo Fouriera, zgodnie z którym gęstość strumienia ciepła q jest proporcjonalna do gradientu temperatury:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (1)$$

gdzie λ – przewodność cieplna. Jeśli A jest wielkością powierzchni mierzonej prostopadle do przepływu ciepła, to strumień ciepła wynosi

$$\dot{Q} = q A = -\lambda A \frac{dT}{dx}. \quad (2)$$

Program został zaprojektowany do wyznaczenia rozkładu temperatury wzdłuż osi x w jednowymiarowej strukturze złożonej z N obszarów o przewodnościach cieplnych k_i i wewnętrznych źródłach ciepła o wydajnościach \dot{g}_i''' . Ogólny schemat takiej struktury przedstawia rysunek 12. Rozpatrując jednorodną ścianę (o stałej przewodności cieplnej k) zawierającą źródło



Rys 1. Przepływ ciepła przez jednorodną ścianę z jednorodnym źródłem ciepła.

ciepła o stałej objętościowej wydajności cieplnej \dot{g}''' , zgodnie z zasadą zachowania energii, strumień przez elementarny przekrój dx wynosi

$$\dot{Q}_x + \dot{g} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}}{dx} dx, \quad (3)$$

gdzie

$$\dot{g} = \dot{g}''' A dx. \quad (4)$$

Podstawiając (2) i (4) do (3), otrzymuje się

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = - \frac{\dot{g}'''}{\lambda}, \quad (5)$$

którego rozwiązaniem jest

$$T(x) = \frac{gL^2}{2k} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] - \frac{T_H - T_C}{L_2} (x) + T_H, \quad (6)$$

2.2 Metoda elementów skończonych

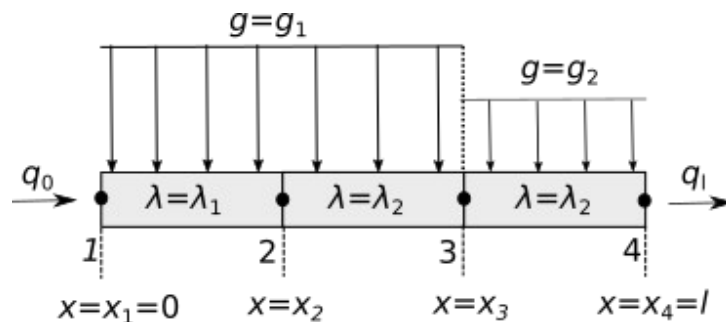
Podejściem zastosowanym do numerycznego wyznaczenia rozkładu temperatury w zadanej strukturze jest aproksymacja Galerkina. Rozważmy pewien obszar, w którym zagadnienie jest opisane wzorem (5). W obszarze mogą występować 2 rodzaje nieciągłości:

- zmiana parametrów materiałowych z λ_1 do λ_2 ,
- nieciągłość w rozkładzie źródeł pola z \dot{g}_1''' do \dot{g}_2''' .

Ponadto na brzegach występują warunki brzegowe opisane ogólnym równaniem

$$\alpha \frac{dT}{dx} + \beta T = \gamma. \quad (7)$$

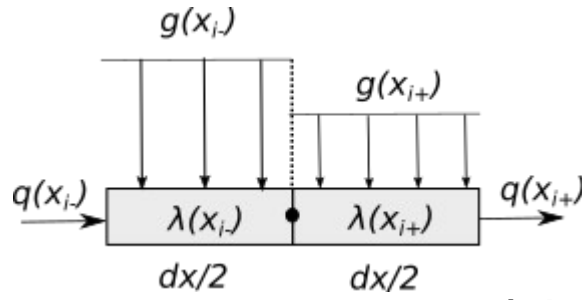
Pierwszym krokiem jest podział struktury na takie elementy (elementy skończone), wewnątrz których nie występują nieciągłości. Schemat powstałych w ten sposób obszarów przedstawia rys. 2. Otrzymana przykładowa struktura posiada 3 elementy i 4 węzły. Strumień ciepła w każdym punkcie struktury musi się bilansować. Bilans wewnątrz elementów jest przedstawiony na rys. 3 i prowadzi do



Rys 2. Podział struktury ze względu na nieciągłości.

równania (5). W węzłach, gdzie występują nieciągłości (rys. 3) otrzymuje się

$$q(x_{i-}) + \dot{g}'''(x_{i-}) \frac{dx}{2} + \dot{g}'''(x_{i+}) \frac{dx}{2} = q(x_{i+}). \quad (8)$$



Rys 3. Bilans strumienia ciepła q w węzłach wewnętrznych struktury.

Z bilansowania strumieni na brzegach struktury wynika:

$$\begin{aligned} q(0) &= q_0, \\ -q(l) &= q_l. \end{aligned} \quad (9)$$

Wykorzystując wzór (1), otrzymuje się

$$\begin{aligned} \lambda(0) \frac{dT}{dx} &= q_0, \\ -\lambda(l) \frac{dT}{dx} &= q_l. \end{aligned} \quad (10)$$

q_0 i q_l można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} q_0 &= h_0(T(0) - T_{inf0}), \\ q_l &= h_l(T(l) - T_{infl}), \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie h_0 i h_l są stałe i znane. Stąd

$$\begin{aligned} \lambda(0) \frac{dT}{dx} &= h_0(T(0) - T_{inf0}), \\ -\lambda(l) \frac{dT}{dx} &= h_l(T(l) - T_{infl}), \end{aligned} \quad (12)$$

co odpowiada równaniu (7) opisującemu w sposób ogólny warunki brzegowe.

Warunki opisane równaniami (11) zwane są warunkami konwekcyjnymi. W sytuacjach szczególnych, gdy $h_i = 0$ otrzymuje się

$$T(x) = \frac{\gamma}{\beta} = \text{const}, \quad (13)$$

co stanowi warunek brzegowy I rodzaju – temperatura na brzegu jest ustalona i znana. Z kolei, jeśli $\beta = 0$ mówimy o warunkach II rodzaju i opisują je równania (10). W szczególnym przypadku, gdy $q_i = 0$ warunek jest zwany adiabatycznym – przepływ ciepła na granicy struktury nie występuje.

W podejściu Galerkinia rozkład temperatury w strukturze zawierającej N węzłów aproksymuje się wzorem

$$T(x) = \sum_{i=1}^N T_i \Phi_i(x), \quad (14)$$

gdzie Φ_i są tzw. funkcjami bazowymi i są znane. Funkcje bazowe posiadają tę właściwość, że i -ta funkcja jest niezerowa tylko i wyłącznie w elementach zawierających i -ty węzeł. Funkcja Φ_i dla elementów dwuwęzłowych jest zdefiniowana jako

$$\Phi_i(x) = \psi_2^e(\xi) + \psi_1^{e+1}(\xi), \quad (15)$$

gdzie ψ_1 oraz ψ_2 są funkcjami kształtu, określonymi we współrzędnych lokalnych $\xi \in \langle -1, 1 \rangle$ danego elementu e . W implementacji metody przyjęto najprostsze, liniowe funkcje kształtu:

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ \psi_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi).\end{aligned}\tag{16}$$

Aby wyznaczyć temperaturę w dowolnym punkcie x wg równania (14) potrzeba wyznaczyć temperatury T_i we wszystkich węzłach i . W tym celu rozwiązuje się układ równań postaci

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{P}, \tag{17}$$

gdzie:

- \mathbf{K} jest macierzą kwadratową $N \times N$ zwaną macierzą przewodności cieplnej,
- \mathbf{P} jest wektorem $N \times 1$ zwanym wektorem obciążeń,
- \mathbf{T} jest wektorem $N \times 1$ szukanych wartości temperatur T_i w poszczególnych węzłach.

Macierz \mathbf{K} oraz wektor \mathbf{P} są sumą odpowiednio lokalnych macierzy przewodności cieplnej \mathbf{k} oraz lokalnych wektorów naprężeń \mathbf{p} poszczególnych elementów e :

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \sum_{e=1}^N \mathbf{k}^e, \\ \mathbf{P} &= \sum_{e=1}^N \mathbf{p}^e\end{aligned}\tag{18}$$

Dla przyjętych funkcji kształtu (16) lokalne macierze i wektory są postaci:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^e &= \frac{\lambda_e}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_i & 0 \\ 0 & h_{i+1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}^e &= \frac{\dot{g}_e''' L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_i T_{inf i} \\ h_{i+1} T_{inf i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_i \\ q_{i+1} \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{19}$$

gdzie

- λ_e – przewodność cieplna e -tego elementu,
- L_e – szerokość e -tego elementu,
- \dot{g}_e''' - wydajność cieplna źródła e -tego elementu.
- h_i – stała Newtona warunku konwekcyjnego w i -tym węźle - dotyczy tylko i wyłącznie elementów na brzegach struktury, w których taki warunek został określony
- $T_{inf i}$ – temperatura w dużej odległości od granicy obszaru, określona w i -tym węźle w warunku konwekcyjnym,
- q_i – strumień ciepła w i -tym węźle, dotyczy tylko warunków brzegowych II rodzaju i pojawia się tylko w elementach na brzegu (w węźle granicznym), gdzie taki warunek został określony.

W ogólnym przypadku elementy mogą posiadać dowolną ilość węzłów. W programie zaimplementowane zostały jednak tylko elementy 2- i 3-węzłowe. Liczba węzłów wewnętrznych determinuje funkcje kształtu, które należy zastosować. Dla elementów 3-węzłowych przyjęto funkcje postaci

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1 - \xi), \\ \psi_2(\xi) &= 1 - \xi^2, \\ \psi_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi).\end{aligned}\tag{20}$$

Lokalne macierze przewodności cieplnej oraz wektory naprężeń elementów wyglądają wtedy następująco

$$\mathbf{k}^e = \frac{\lambda_e}{3L_e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{i+2} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{p}^e = \frac{\dot{g}_e''' L_e}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_i T_{infi} \\ 0 \\ h_{i+2} T_{infi+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_i \\ 0 \\ q_{i+2} \end{bmatrix}.$$

3 Implementacja

Program został napisany w języku C++ z wykorzystaniem bibliotek MFC. Kompilacja została przeprowadzona w środowisku Microsoft Visual Studio 2019.

3.1 Przechowywanie danych

Poszczególne węzły oraz elementy siatki są obiektami autorskich klas odpowiednio *KWezel1D* oraz *KElement1D*. Zbiór wszystkich takich obiektów jest przechowywany w formie wektorów ze standardowej biblioteki <vector>.

Obiektem zużywającym potencjalnie najwięcej miejsca w pamięci RAM jest macierz przewodności cieplnej. Ponieważ w zagadnieniu jednowymiarowym macierz tego typu jest macierzą pasmową oraz symetryczną, jej instancja jest obiektem autorskiej klasy *KmacierzSPF*, która przechowuje macierz w formacie SPF. Elementami macierzy są zmienne typu double w dynamicznie zadeklarowanej tablicy o rozmiarze $m \times p$, gdzie m to rozmiar macierzy sztywności, a $p = 2d - 1$, gdzie d - szerokość pasma.

3.2 Siatka

Po wczytaniu danych wejściowych z pliku tworzona jest pierwotna siatka posiadająca węzły w punktach rozgraniczających zdefiniowane przez użytkownika obszary. Użytkownik ma możliwość zagęszczenia siatki na 2 niewykluczające się sposoby:

1. Zagęszczenie wstępne – tworzy dodatkowe elementy w obszarach, które graniczą z obszarami znacznie węższymi. W ogólności, mechanizm ten ma za zadanie optymalizację obliczeń - niweluje błąd przybliżenia dla dużego obszaru, generując możliwie mało dodatkowych węzłów. Za stosunek szerokości obszarów, przy którym następuje podział przyjęto 3.
2. Zagęszczenie x -krotne – zagęszcza siatkę jednorodnie, tj. dzieli każdy z elementów na pół x razy. W rezultacie powstaje siatka posiadająca 2^x razy więcej elementów niż przed zagęszczeniem.

W przypadku struktury 1D zagęszczanie siatki ma praktyczny sens tylko dla struktury złożonej z elementów 2-węzłowych, w których występują lokalne źródła ciepła. Wtedy większe zagęszczenie pozwala na otrzymanie rozkładu temperatury bardziej zbliżonego do rozwiązania dokładnego w obszarach zawierających źródła, ale kosztem większego czasu obliczeń.

3.3 Uwzględnianie warunków I rodzaju [1]

Warunki brzegowe I rodzaju mogą być uwzględnione na 2 sposoby:

1. Poprzez redukcję układu tak, jak to zostało opisane w paragrafie 2.2.
2. Metodą zastosowaną przez Payne'a i Irons'a.

Drugi przypadek polega na przemnożeniu odpowiedniego wyrazu na przekątnej w macierzy lokalnej przez bardzo dużą liczbę oraz zmodyfikowanie odpowiedniego wyrazu w lokalnym wektorze obciążeń. W programie użyto mnożnika równego 10^8 . Przykładowo, dla struktury z warunkiem brzegowym I rodzaju w węźle $i = 1$ modyfikacji ulegają wyrazy K_{11} oraz P_1 :

$$K_{11}^m = K_{11} \cdot 10^8,$$

$$P_{11}^m = K_{11} \cdot 10^8 \cdot T_{01},$$

gdzie T_{01} jest znane. Przy małych wartościach K i T daje to w przybliżeniu:

$$K_{11} \cdot 10^8 \cdot T_1 = K_{11} \cdot 10^8 \cdot T_{01},$$

stąd

$$T_1 \approx T_{01}.$$

3.4 Rozwiązywanie układu równań

Obliczenie temperatury w węzłach polega na rozwiązaniu układu równań (17). Zastosowano w tym celu rozkład Cholesky'ego-Banachiewicza. Algorytm polega na wyznaczeniu takiej macierzy L na podstawie rozkładanej macierzy (w naszym przypadku macierzy przewodności cieplnej K), że:

$$K = L L^T. \quad (22)$$

Macierz K musi być przy tym symetryczna oraz dodatnio określona, co w rozpatrywanym zagadnieniu przepływu ciepła jest zawsze spełnione. W ogólności wyrazy macierzy L wyznacza się wg wzorów

$$L_{ii} = \sqrt{K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2},$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \left(K_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} L_{ik} \right). \quad (23)$$

Jednakże wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy K (duża liczba węzłów) wzrasta eksponencjalnie czas obliczeń. Dlatego algorytm rozkładu zoptymalizowano wykorzystując fakt, że dla macierzy podlegającej rozkładowi, która jest pasmowa i symetryczna, macierz $L + L^T$ również jest pasmowa i symetryczna o tej samej szerokości pasma. Zmianie ulega jedynie indeks k , od którego zaczyna się sumowanie. Ponadto do określenia elementu L_{ij} wykorzystywany jest tylko element K_{ij} macierzy rozkładanej, co umożliwia jej modyfikację bez konieczności tworzenia nowej macierzy w pamięci. Zatem zmodyfikowany algorytm ma postać:

$$K_{ii}^m = \sqrt{K_{ii} - \sum_{k=i-\frac{d+1}{2}}^{i-1} K_{ik}^2},$$

$$K_{ij}^m = \frac{1}{K_{ii}^m} \left(K_{ij} - \sum_{k=j-\frac{d+1}{2}}^{j-1} K_{jk}^m K_{ik}^m \right), \quad (24)$$

gdzie d jest szerokością pasma macierzy \mathbf{K} . W kodzie powyższy algorytm jest zaimplementowany przez metodę `RozlozCholeskySelf()` w klasie `KmacierzSPF`:

Mając wyznaczoną macierz \mathbf{L} , układ równań (17) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{T}=\mathbf{P}, \quad (25)$$

W ogólności układ taki rozwiązuje się rozwiązując kolejno układy

$$\mathbf{L}\mathbf{X}=\mathbf{P}, \quad (26)$$

$$\mathbf{L}^T\mathbf{T}=\mathbf{X}. \quad (27)$$

Ponieważ macierz \mathbf{L} jest macierzą trójkątną dolną, elementy wektora \mathbf{X} można wyznaczyć metodą podstawiania:

$$X_i = \frac{\left(P_i - \sum_{j=1}^{i-1} X_j \cdot L_{ij} \right)}{L_{ii}}. \quad (28)$$

Podobnie szukany wektor temperatury \mathbf{T} , ale uwzględnivszy fakt, że macierz \mathbf{L}^T jest macierzą trójkątną górną iterowanie odbywa się odwrotnie - od ostatniego elementu $i = N$ do $i = 1$:

$$T_i = \frac{\left(X_i - \sum_{j=N}^{i-1} T_j \cdot L_{ij}^T \right)}{L_{ii}^T}. \quad (29)$$

Tak jak przy rozkładzie Cholesky'ego, powyższy algorytm również został zoptymalizowany tak, aby iteracja nie odbywała się po zerowych elementach macierzy pasmowej. Zmianie ulegają jedynie indeksy j , od których rozpoczyna się sumowanie. Należy przy tym zwrócić uwagę, że w programie macierze \mathbf{L} oraz \mathbf{L}^T są tą samą macierzą przechowywaną w zmodyfikowanej wcześniej macierzy \mathbf{K} . Zaimplementowany algorytm wygląda następująco

$$X_i = \frac{\left(P_i - \sum_{j=i-\frac{d+1}{2}}^{i-1} X_j \cdot K_{ij}^m \right)}{L_{ii}}, \quad (30)$$

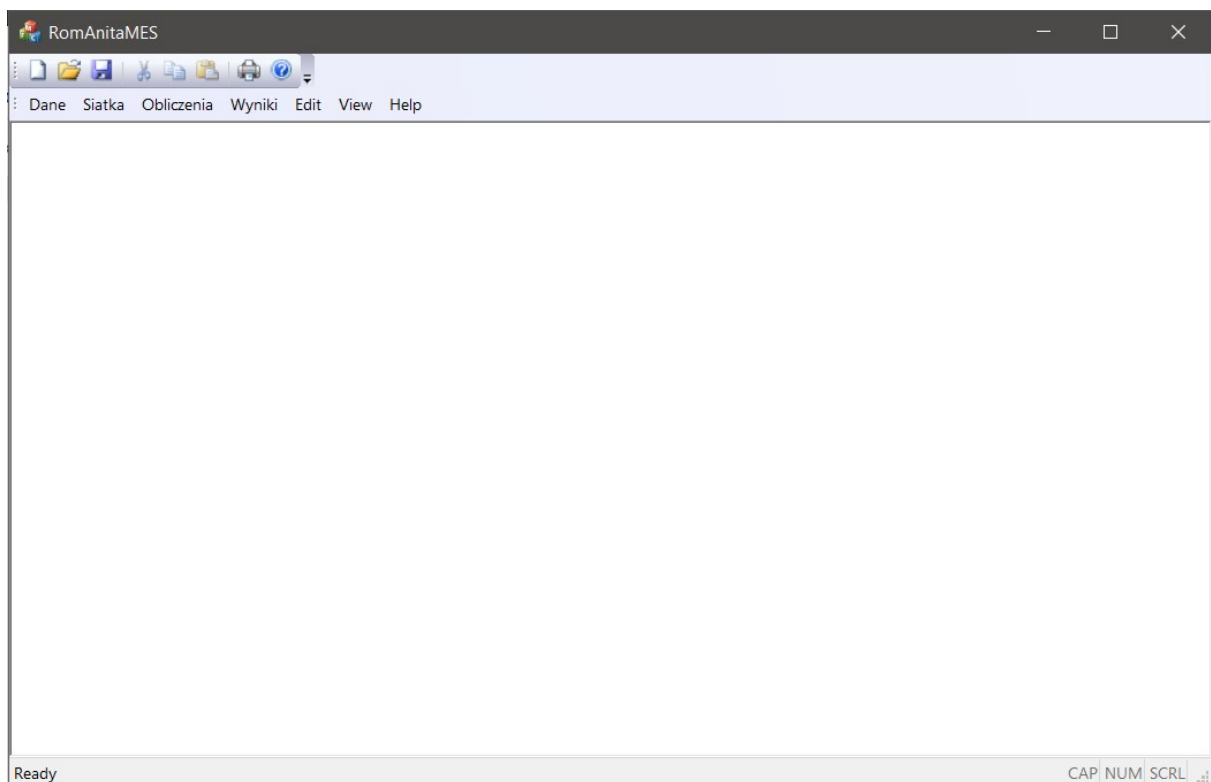
$$T_i = \frac{\left(X_i - \sum_{j=i+\frac{d+1}{2}}^{i-1} T_j \cdot K_{ji}^m \right)}{K_{ii}^m}. \quad (31)$$

4 Interfejs

RAMES jest programem typu *Single Document Interface* (SDI) i składa się z jednego okna głównego widocznego na rys. 4.

4.1 Wczytywanie danych

Przed przystąpieniem do korzystania z programu, polecamy zapoznać się z zakładką „Help” (ostatnia na pasku menu narzędzi) oraz z niniejszym raportem.



Rys 4. Okno startowe - to powinien zobaczyć użytkownik po włączeniu programu

Okno programu po włączeniu powinno wyglądać jak na rys. 4. Pracę z programem rozpoczyna się od wczytania danych przez naciśnięcie z poziomu menu przycisku *Dane*->*Wczytaj* i odnalezienia na swoim komputerze odpowiedniego pliku tekstowego z danymi. Plik wsadowy powinien posiadać następującą strukturę:

NAZWA test

LICZBA_WEZLOW_W_ELEMENCIE 2

STRUKTURA

START	nr	xl	xp	k	g
	1	0.0	0.15	70	0
	2	0.15	0.35	10	120000
	3	0.35	0.65	25	0

KONIEC

WARUNKI_BRZEGOWE_I_RODZAJU

START	x	T
	0	300

KONIEC

WARUNKI_BRZEGOWE_II_RODZAJU

START	x	q
-------	---	---

KONIEC

WARUNKI_KONWEKCYJNE

START	x	h	T_inf
	0.65	30	800

KONIEC

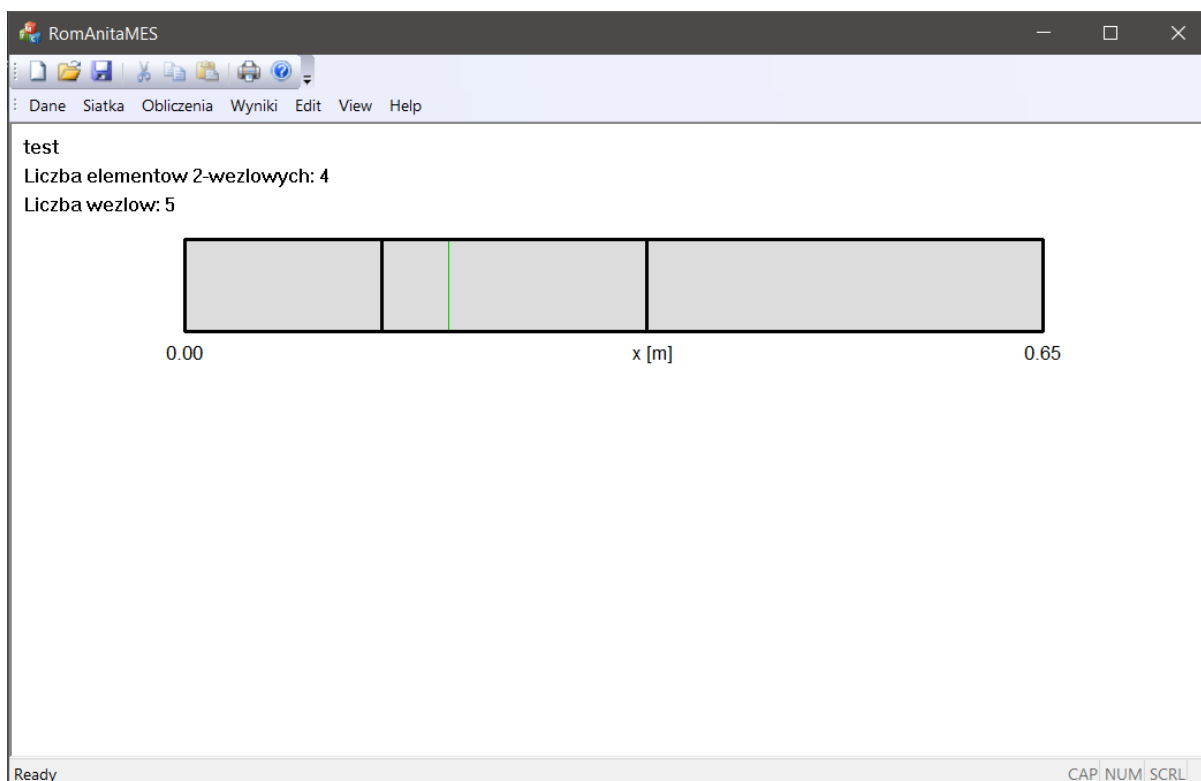
Każdy z bloków danych powinien się rozpoczynać od odpowiedniego specyfikatora, informującego program o rozpoczęciu wczytania danego typu danych (np. STRUKTURA). Linie z wartościami danych powinny być poprzedzone linią zawierającą komendę „START” i kończyć linią z instrukcją „KONIEC”. Jeśli określony typ danych nie występuje w pliku należy *usunąć wszystkie linie pomiędzy instrukcjami „START” i „KONIEC”* lub usunąć cały blok, łącznie ze specyfikatorem.

Wyjątek od powyższej reguły stanowią specyfikatory NAZWA oraz LICZBA_WEZLOW_W_ELEMENCIE, których wartości powinny być umieszczone w tej samej linii. NAZWA określa roboczą nazwę struktury wyświetlaną później w widoku programu oraz służącą do określenia domyślnej nazwy pliku z wynikami.

Struktura może się składać z dowolnej ilości obszarów o dowolnych współczynnikach przewodności i dowolnej wydajności źródeł, może wystąpić dowolna kombinacja warunków brzegowych z zastrzeżeniem, że dla każdego z brzegów jest zdefiniowany tylko jeden warunek brzegowy i tylko jeden warunek II rodzaju dla całej struktury. Jeśli warunek dla danego brzegu nie został w pliku określony, domyślnym warunkiem zastosowanym w obliczeniach jest warunek adiabatyczny. Ponadto należy pamiętać, aby zdefiniowane obszary były spójne, tzn. nie występowały przerwy między ich granicami, ani się nie nanosiły. Współrzędna x_l obszaru z prawej strony musi się pokrywać ze współrzędną x_p obszaru z lewej. Podobnie współrzędne x warunków brzegowych powinny się pokrywać z granicami całej struktury.

Program zakłada, że poszczególne wielkości w pliku wejściowym są podane w jednostkach SI, tj. położenie x [m], temperatura T [K], stała przewodności cieplnej k [W/mK], stała przejmowania h [W/m²K], wydajność źródła ciepła g [W/m³].

Po wczytaniu danych na ekranie powinien pojawić się schemat struktury (patrz: rys. 5) z wyszczególnionymi obszarami (grube czarne linie) oraz węzłami siatki (cienkie zielone linie), przy czym węzły siatki są przesłonięte przez granice obszarów. Widoczne są również podstawowe informacje w lewym górnym rogu widoku: nazwa struktury (wczytana z pliku z danymi), liczba i rodzaj elementów oraz liczba węzłów.



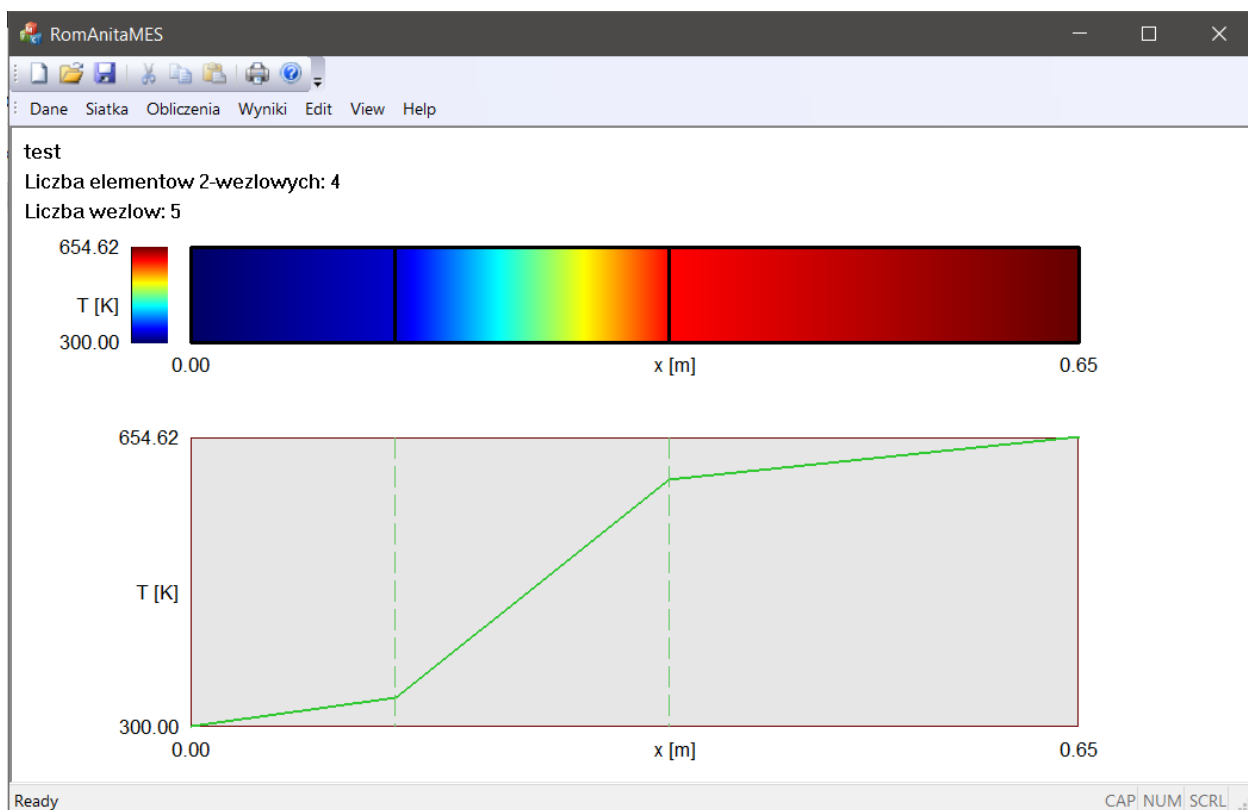
Rys 5. Pierwotna struktura (przykładowa), która pojawia się po załadowaniu danych.

4.2 Obliczenia

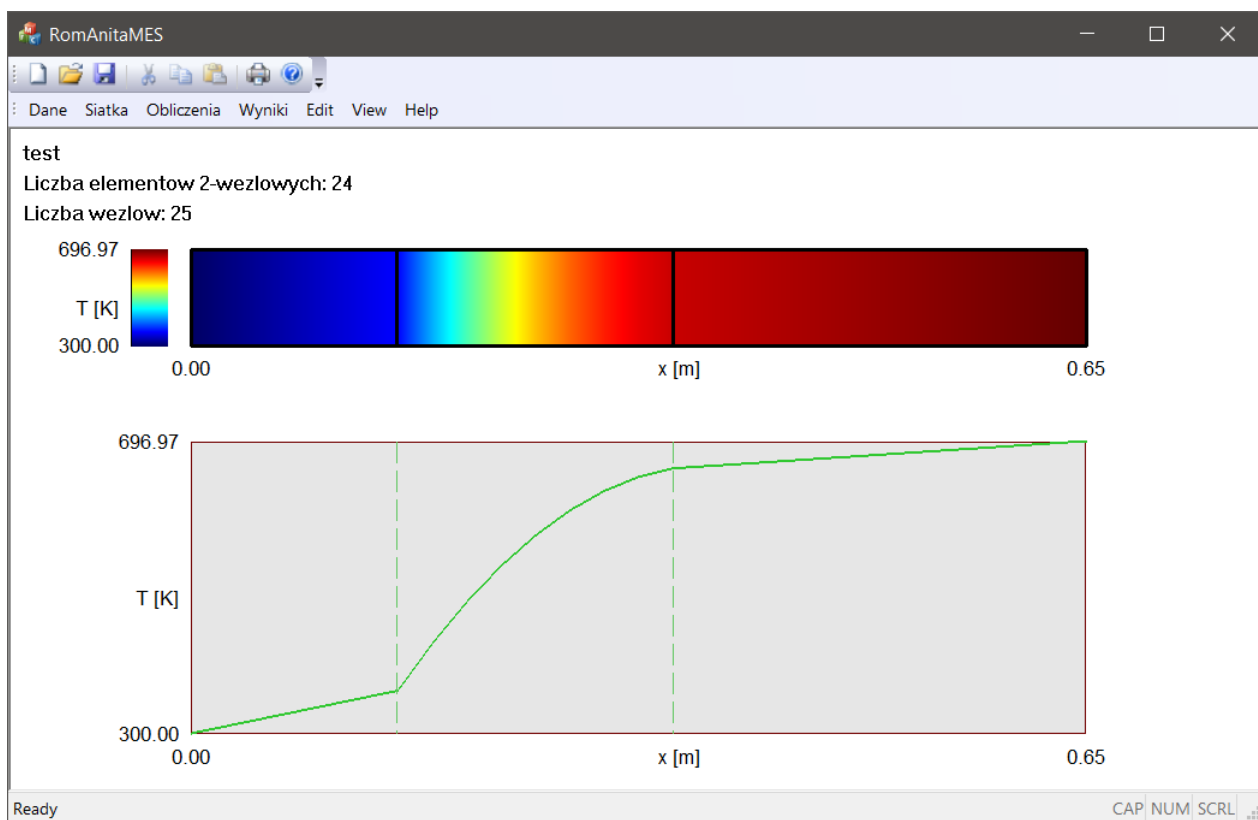
Po wczytaniu struktury można przystąpić do obliczeń. W tym celu należy wybrać w menu opcję *Obliczenia->Ustawienia*; na ekranie pojawi się okno ustawień (rys. 7) z możliwością ustawienia ilości węzłów w elemencie, włączenia opcji wstępnego zagęszczenia siatki, zagęszczenia wielokrotnego. Aby wygenerować nową siatkę, należy określić ustawienia zagęszczenia i kliknąć przycisk *Generuj*. Widok struktury powinien się zaktualizować do aktualnie wygenerowanej siatki. Należy pamiętać, że ustawienia zagęszczania stosują się do siatki pierwotnej (wczytanej z pliku wejściowego), a nie aktualnie wygenerowanej.

Rys 6. Okno ustawień obliczeń, jakie pojawia się po naciśnięciu *Obliczenia → Ustawienia*.

Ponadto w oknie ustawień można wybrać sposób uwzględniania warunków brzegowych I rodzaju oraz metody rozwiązania układu. Gdy wszystkie opcje są ustawione w pożądany sposób, po naciśnięciu przycisku OK należy wybrać opcję *Obliczenia->Wykonaj*. Po wykonaniu obliczeń na strukturze powinien zostać narysowany wyznaczony gradient temperatury. Poniżej pojawi się wykres temperatury w funkcji położenia x . Wyniki dla przykładowej struktury z paragrafu 4.1 bez generowania nowej siatki przedstawia rys. 7. Jeśli uzyskany rozkład temperatury okaże się niezadowalający, użytkownik może wygenerować nową siatkę otwierając ponownie okno *Obliczenia → Ustawienia*. Po wygenerowaniu siatki z np. 3-krotnym zagęszczeniem, w widoku pojawi się struktura z nowo naniesionymi węzłami. Po ponownym kliknięciu na *Obliczenia → Wykonaj* uzyskuje się widok jak na rys. 8. Widać, że zagęszczenie wpłynęło na kształt uzyskanego rozkładu temperatury w strukturze. Zachęcamy czytelnika do własnego eksperymentowania z różnymi ustawieniami siatki dla różnych struktur.



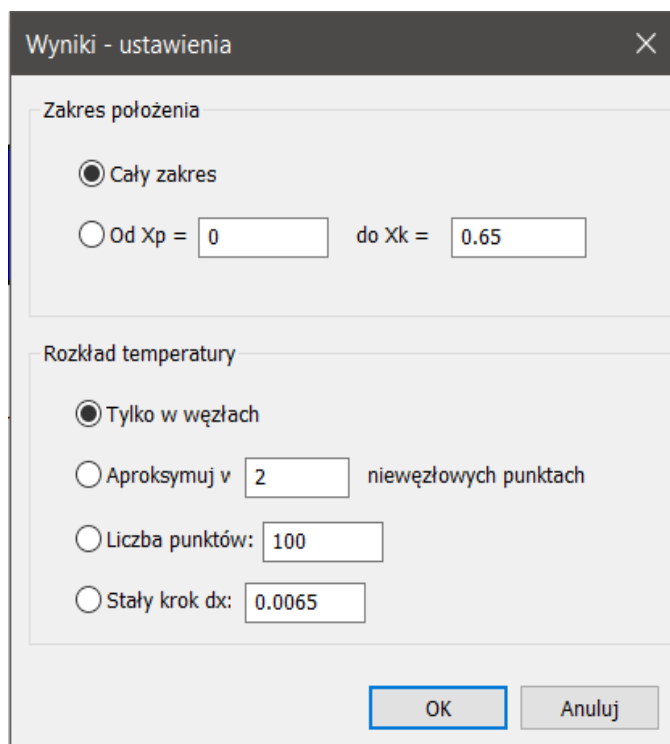
Rys 7. Wykresy wygenerowane po wykonaniu obliczeń przez program na przykładzie struktury z paragrafu 4.1 bez zagęszczania siatki elementów 2-wzłowych.



Rys 8. Wykresy wygenerowane po wykonaniu obliczeń przez program na przykładzie struktury z paragrafu 4.1 przy 3-krotnym zagęszczeniu siatki elementów 2-wzłowych.

4.3 Wyniki

Menu *Wyniki* pozwala wybrać jakie z obliczonych wartości temperatury mają zostać zapisane do pliku. Po wejściu w *Wyniki->Ustawienia* pojawi się okno jak na rys. 9. Istnieje możliwość ustawienia pożądanego zakresu położenia oraz rodzaju rozkładu temperatury. Po naciśnięciu przycisku OK, dla zapisania wyników, należy wejść w *Wyniki->Zapisz jako...* lub *Wyniki->Zapisz*. Przy tej ostatniej opcji zapisywany jest plik o nazwie parametru *NAZWA.txt* wczytanej z pliku wejściowego i należy się upewnić, że w folderze z programem znajduje się folder *Wyniki*. Jeśli nie, należy taki folder utworzyć. Wyniki zapisują się w dwóch kolumnach: położenia x [m] oraz odpowiadającej mu temperatury T [K].



Rys 9. Okno z ustawieniami wyników do zapisu, jakie pojawia się po naciśnięciu *Wyniki → Ustawienia*.

4.4 Zakończenie pracy

Po zakończeniu pracy z programem można wcisnąć krzyżyk w prawym górnym rogu okna, by go zamknąć.

5 Analiza wyników

Symulacja przeprowadzona w programie dla pewnych dwóch przykładowych zagadnień została porównana z ich analitycznymi rozwiązaniami. Została rozpatrzona ta sama struktura, ale z dwoma różnymi kombinacjami warunków brzegowych.

5.1 Zagadnienie (A) – warunek I rodzaju oraz konwekcyjny

Zagadnienie jest opisane plikiem wejściowym:

NAZWA zagadnienie_do_porownania_z_analitycznym
 LICZBA_WEZLOW_W_ELEMENCIE 2

STRUKTURA

START	nr	x1	xp	k	g
	1	0.0	0.8	10	12000
	2	0.8	1	70	0

KONIEC

WARUNKI_BRZEGOWE_I_RODZAJU

START	x	T
	0	300

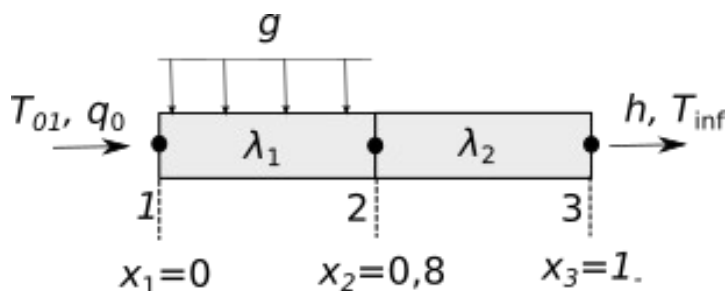
KONIEC

WARUNKI_KONWEKCYJNE

START	x	h	T_inf
	1	30	200

KONIEC

Strukturę przedstawia rys. 10. Składa się ona z 2 obszarów o szerokościach $L_1 = 0,8$ m oraz $L_2 = 0,2$ m i współczynnikach przewodności cieplnej $\lambda_1 = 10$ W/mK oraz $\lambda_2 = 70$ W/mK. Na brzegu z lewej, w $x = 0$ m, występuje warunek brzegowy I rodzaju, gdzie $T = T_{01} = 300$ K, z prawej, dla $x = 1$ m, warunek konwekcyjny o stałej przejmowania $h = 30$ W/m²·K i $T_{inf} = 200$ K. Obszar (1) zawiera jednorodne źródło o przestrzennej wydajności cieplnej $\dot{g}''' = 120000$ [W/m³].



Rys 10. Schemat struktury, dla której wyznaczono rozwiązanie analityczne.

Wyznamy rozwiązanie analityczne dla powyższego zagadnienia. W obszarze (1) jest ono opisane równaniem (5)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right) = -\frac{\dot{g}'''}{\lambda_1}.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu mamy

$$T^{(1)}(x) = \frac{-\dot{g}'''}{2k_2} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (32)$$

Uwzględniając warunek brzegowy $T(0) = T_1 = T_{01}$, otrzymujemy stałą C_2

$$C_2 = T_{01}, \quad (33)$$

co daje

$$T^{(1)}(x) = \frac{-\dot{g}'''}{2\lambda_1} x^2 + C_1 x + T_{01}. \quad (34)$$

W obszarze (2) zagadnienie jest opisane równaniem

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right) = 0. \quad (35)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu mamy

$$T^{(2)}(x) = ax + b. \quad (36)$$

Konwekcyjny warunek brzegowy dla $x = x_3$ wynosi

$$-\lambda_2 \frac{d}{dx} (T(x_3)) = h(T(x_3) - T_{inf}) = h(ax_3 + b - T_{inf}). \quad (37)$$

Ponieważ $\frac{dT^{(2)}}{dx} = a$, po wyrugowaniu b otrzymujemy:

$$T^{(2)}(x) = a(x - x_3) - \frac{\lambda_2}{h} a + T_{inf}, \quad (38)$$

Aby wyznaczyć stałe a oraz C_1 , potrzebujemy dwóch równań je wiążących. Po pierwsze, strumienie na granicy obszarów w punkcie $x = x_2$ muszą być równe:

$$-\lambda_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} \Big|_{x=x_2} = -\lambda_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_2}. \quad (39)$$

Po drugie, temperatury w tym punkcie również muszą się równać

$$T^{(1)}(x_2) = T^{(2)}(x_2). \quad (40)$$

Podstawiając (34) i (38) do (39) otrzymujemy:

$$-\lambda_1 \left(-\frac{\dot{g} L_1}{\lambda_1} + C_1 \right) = -\lambda_2 a. \quad (41)$$

gdzie $L_1 = x_2 - x_1 = x_2 = 0,8$ m. Stąd

$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} a + \frac{\dot{g} L_1}{\lambda_1}. \quad (42)$$

Podstawiając (34) i (38) do (40) otrzymujemy:

$$-\frac{\dot{g} L_1^2}{2\lambda_1} + C_1 L_1 + T_{01} = -a L_2 - \frac{\lambda_2}{h} a + T_{inf}, \quad (43)$$

gdzie $L_2 = x_3 - x_2 = 0,2$ m. Podstawiając (42) do (43) możemy wyznaczyć a

$$a = \frac{-\frac{\dot{g} L_1^2}{2\lambda_1} - T_{01} + T_{inf}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} L_1 + L_2 + \frac{\lambda_2}{h}}, \quad (44)$$

co po podstawieniu do (42) daje

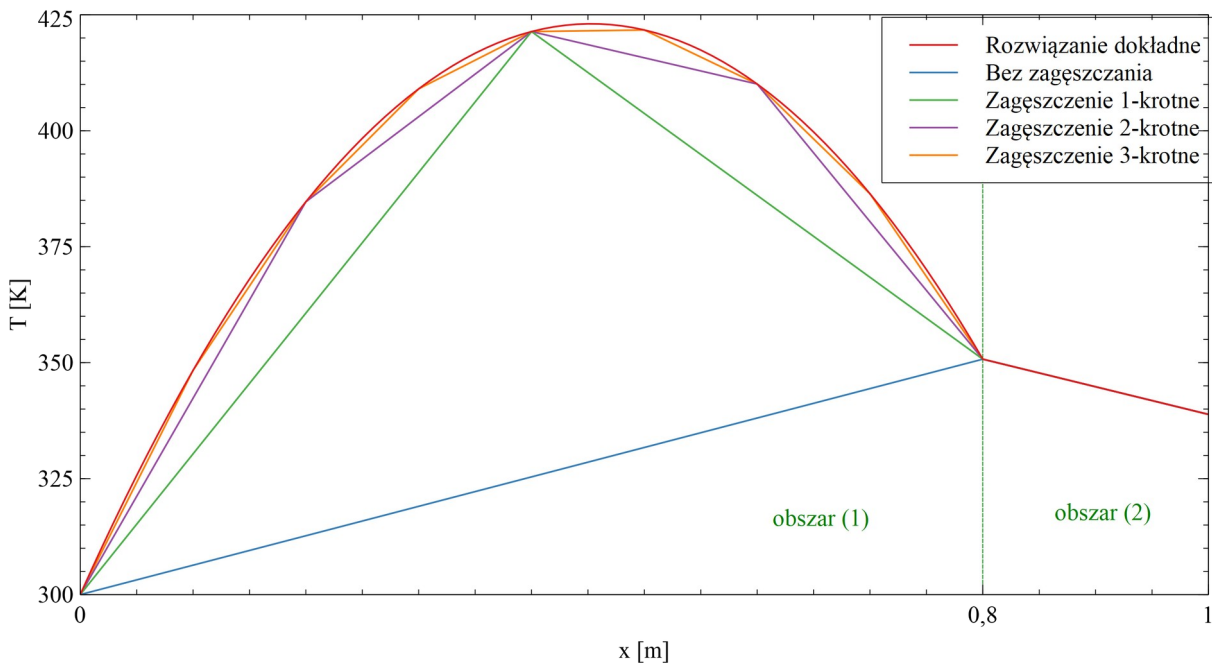
$$C_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \left(\frac{-\frac{\dot{q} L_1^2}{2 \lambda_1} - T_{01} + T_{inf}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} L_1 + L_2 + \frac{\lambda_2}{h}} \right) + \frac{\dot{q} L_1}{\lambda_1}. \quad (45)$$

Zatem teoretyczna funkcja rozkładu temperatury dla całej struktury wynosi

$$T(x) = \begin{cases} -\frac{\dot{q}'''}{2 \lambda_1} x^2 + C_1 x + T_{01} & \text{dla } x \in \langle 0, x_2 \rangle \\ a(x-1) - \frac{\lambda_2}{h} a + T_{inf} & \text{dla } x \in \langle x_2, 1 \rangle \end{cases}, \quad (46)$$

gdzie stałe a oraz C_1 są określone równaniami (44) i (45).

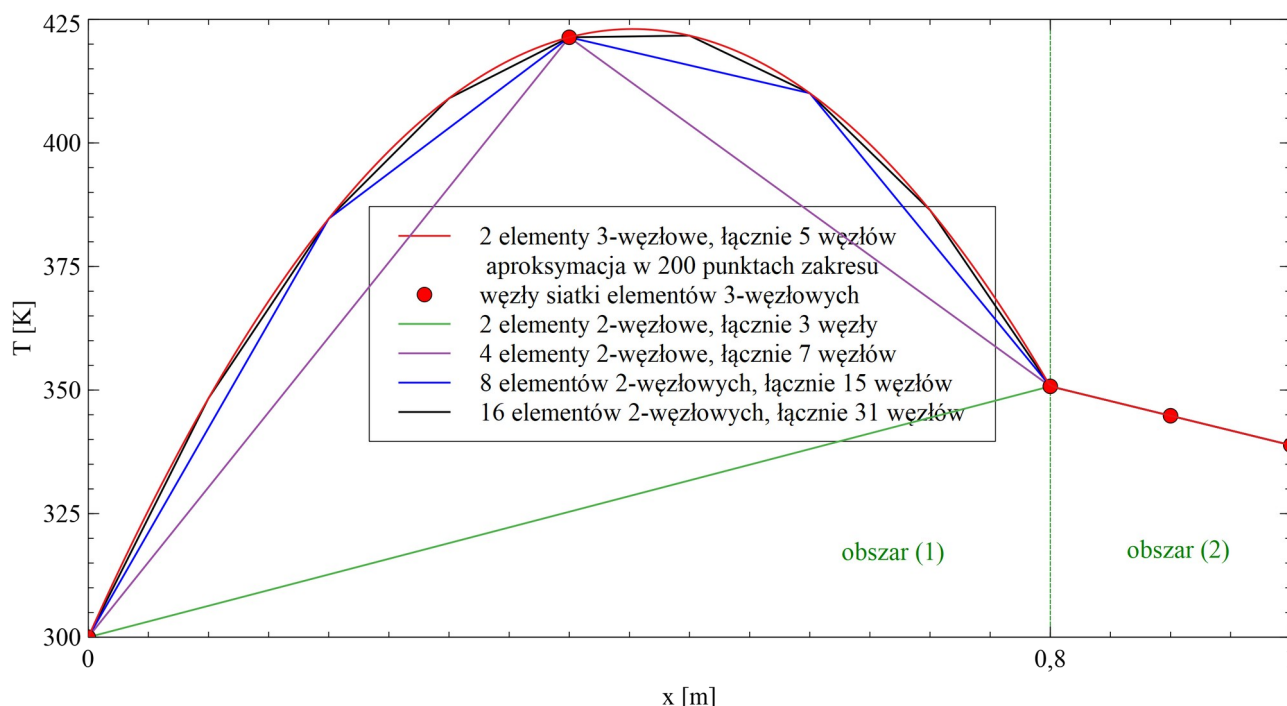
Rys. 11 przedstawia porównanie powyższego rozwiązania dokładnego (po podstawieniu danych) z rozwiązaniami aproksymowanymi w programie dla różnych zagęszczeń siatki elementów 2-węzłowych. Widać, że rozwiązanie programowe w obszarze (2) pokrywa się z rozwiązaniem dokładnym już dla pierwotnej siatki (bez zagęszczenia) czego należało się spodziewać, gdyż aproksymacja temperatury jest liniowa, tak jak rozkład teoretyczny. W przypadku obszaru (1), większe zagęszczenie siatki zbliża łamaną symulowaną do rozwiązania dokładnego.



Rys 11. Porównanie rozwiązania dokładnego zagadnienia (A) z rozwiązaniem otrzymanym w programie dla różnych zagęszczeń siatki elementów 2-węzłowych.

Dla elementów 3-węzłowych aproksymacja jest kwadratowa, więc rozwiązanie dokładne pokrywa się graficznie z rozwiązaniem aproksymowanym w programie już dla siatki pierwotnej. Rys. 12 przedstawia porównanie wyników symulacji dla siatki złożonej z 2 elementów 3-węzłowych (tzn. bez zagęszczania) z siatką elementów 2-węzłowych o różnych zagęszczeniach. Wykresy powstały w wyniku aproksymacji wartości temperatury w 200 punktach zakresu. Widać, że, aby otrzymać wynik zbliżony do symulacji siatki 3-węzłowej, należy wielokrotnie zagęścić siatkę 2-węzłową. Dla siatki złożonej z 16 elementów rozwiązanie nadal wyraźnie odbiega od rozwiązania dla 2 elementów 3-węzłowych.

Należy pamiętać, że czas obliczeń rośnie wraz z liczbą węzłów, przez co symulowanie elementami 2-węzłowymi staje się nieefektywne w przypadku występowania źródeł ciepła.



Rys 12. Porównanie wyników symulacji zagadnienia (A) otrzymanych na siatce 2 elementów 3-węzłowych i siatek elementów 2-węzłowych o różnej ilości elementów (zagęszczeniu).

5.2 Zagadnienie (B) – warunek I rodzaju i adiabatyczny

Zagadnienie jest opisane plikiem wejściowym:

NAZWA zagadnienie_do_porownania_z_analitycznym

LICZBA_WEZLOW_W_ELEMENCIE 2

STRUKTURA

START nr	x1	xp	k	g
1	0.0	0.8	10	12000
2	0.8	1	70	0

KONIEC

WARUNKI_BRZEGOWE_I_RODZAJU

START x	T
0	300

KONIEC

Ponownie struktura składa się z 2 obszarów o szerokościach $L_1 = 0,8$ m oraz $L_2 = 0,2$ m i współczynnikach przewodności cieplnej $\lambda_1 = 10$ W/mK oraz $\lambda_2 = 70$ W/mK. Na brzegu z lewej, w $x = 0$ m, występuje warunek brzegowy I rodzaju, gdzie $T = T_{01} = 300$ K, z prawej, dla $x = 1$ m, warunek adiabatyczny. Obszar (1) zawiera jednorodne źródło o przestrzennej wydajności cieplnej $\dot{g}''' = 120000$ [W/m³].

Ponownie rozwiązanie ogólne rozkładu temperatury w obszarze (1) po uwzględnieniu warunku brzegowego dla $x = x_1$ opisuje równanie (34):

$$T^{(1)}(x) = \frac{-\dot{q}'''}{2\lambda_1} x^2 + C_1 x + T_{01}$$

W obszarze (2) zagadnienie jest opisane równaniem (36)

$$T^{(2)}(x) = ax + b$$

Uwzględniając warunek adiabatyczny dla obszaru (2)

$$-\lambda_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_3} = 0 \quad (47)$$

dostajemy

$$T^{(2)}(x) = b \quad (48)$$

Gęstość strumienia ciepła w obszarze (2) jest stała, co oznacza, że w punkcie $x = x_2$ strumień również jest zerowy i równy strumieniowi obszaru (1) w tym punkcie:

$$-\lambda_1 \frac{dT^{(1)}}{dx} \Big|_{x=x_2} = -\lambda_2 \frac{dT^{(2)}}{dx} \Big|_{x=x_2} = 0, \quad (49)$$

co daje

$$C_1 = \frac{\dot{q} L_1}{\lambda_1} \quad (50)$$

Temperatury obu obszarów w punkcie $x = x_2$ muszą być równe, co wyznacza nam stałą b

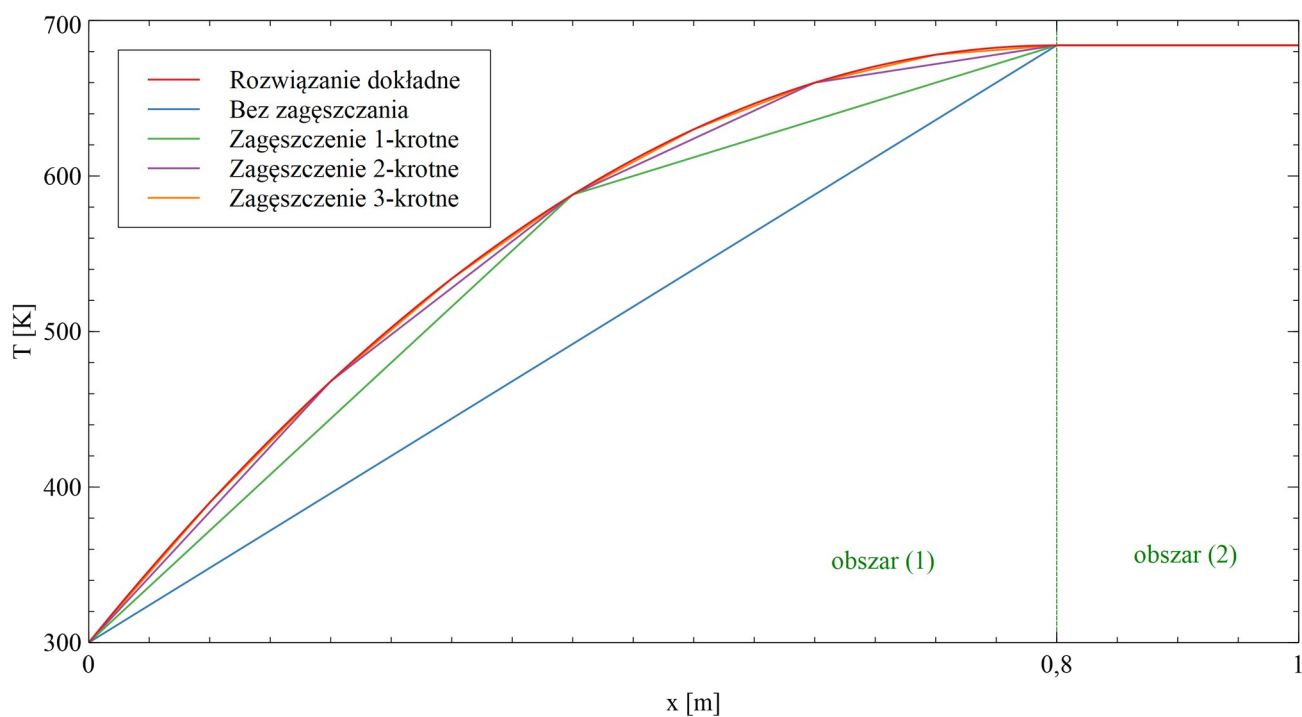
$$b = \frac{\dot{q} L_1^2}{2\lambda_1} + T_{01} \quad (51)$$

Zatem teoretyczna funkcja rozkładu temperatury dla całej struktury wynosi

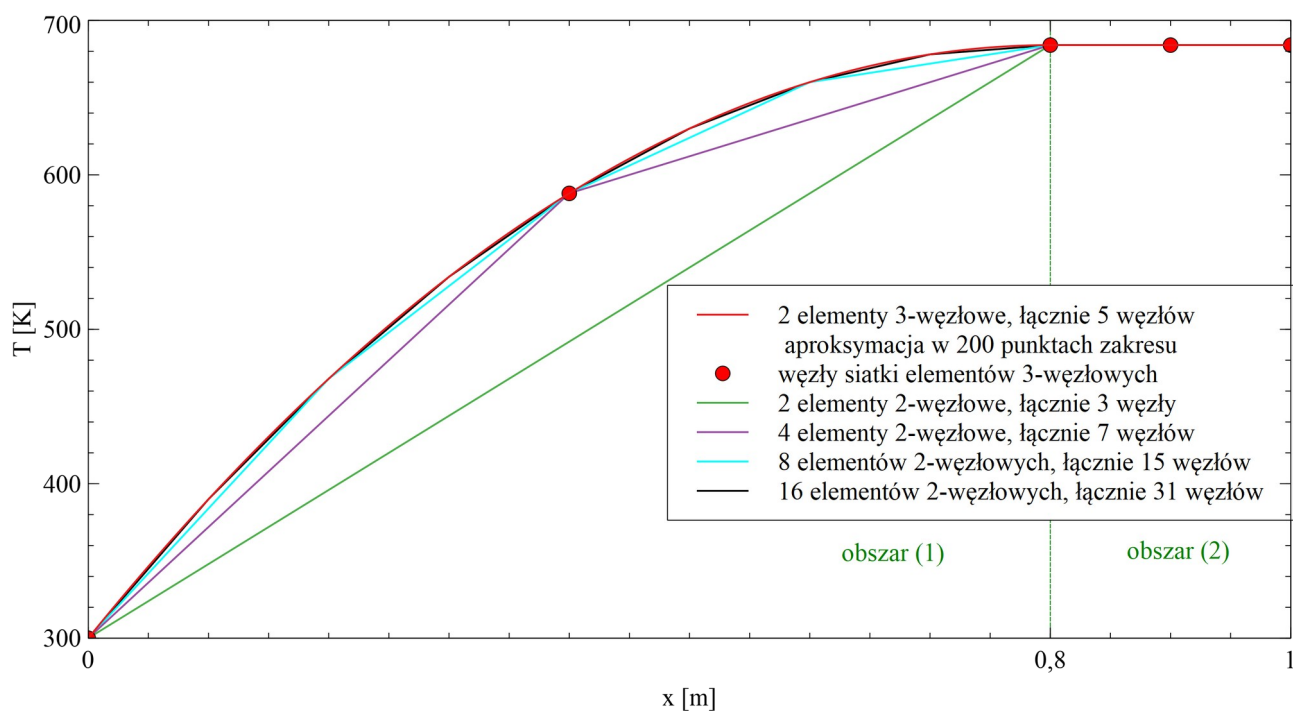
$$T(x) = \begin{cases} -\frac{\dot{q}}{2\lambda_1} x^2 + \frac{\dot{q} L_1}{2\lambda_1} x + T_{01} & \text{dla } x \in \langle 0, x_2 \rangle \\ \frac{\dot{q} L_1^2}{2\lambda_1} + T_{01} & \text{dla } x \in \langle x_2, 1 \rangle \end{cases} \quad (52)$$

Rys. 13 przedstawia porównanie powyższego rozwiązania dokładnego (po podstawieniu danych) z rozwiązaniami aproksymowanymi w programie dla elementów 2-węzłowych. Ponownie widać, że rozwiązanie symulowane w programie w obszarze (2) pokrywa się z rozwiązaniem dokładnym już dla pierwotnej siatki (bez zagęszczenia), a w przypadku obszaru (1), większe zagęszczenie siatki zbliża łamaną do rozwiązania dokładnego.

Rys. 14 przedstawia porównanie wyników symulacji zagadnienia (B) dla siatki złożonej z 2 elementów 3-węzłowych (tzn. bez zagęszczania) z siatką elementów 2-węzłowych o różnych zagęszczeniach. Podobnie jak wcześniej, wykresy powstały w wyniku aproksymacji wartości temperatury w 200 punktach zakresu. Widzimy, że rozwiązanie o 2 elementach 3-węzłowych, które pokrywa się z dokładnym, jest osiągnięte dopiero dla siatki o 16 elementach 2-węzłowych.



Rys 13. Porównanie rozwiązania dokładnego zagadnienia (B) z rozwiązaniem otrzymanym w programie dla różnych zagęszczeń siatki elementów 2-węzłowych.



Rys 14. Porównanie wyników symulacji zagadnienia (B) otrzymanych na siatce 2 elementów 3-węzłowych i siatkach elementów 2-węzłowych o różnej ilości elementów (zagęszczeniu).

5.3 Wnioski z porównania rozwiązań dokładnych i symulowanych

Program wykonuje poprawne symulacje zagadnień cieplnych o różnych kombinacjach warunków brzegowych I i II rodzaju oraz konwekcyjnych.

Jeśli struktura opisana w pliku wejściowym nie posiada lokalnych źródeł ciepła, zagadnienie można symulować na elementach 2-węzłowych bez konieczności zagęszczania siatki. Aproksymacja liniowa pokrywa się z rozwiązaniem dokładnym.

Jeśli w strukturze lokalne źródła występują, rozkład teoretyczny temperatury opisuje funkcja kwadratowa. W przypadku symulacji elementami 2-węzłowymi dokładność symulacji rośnie wraz ze stopniem zagęszczenia siatki. Najlepiej jest wtedy symulować zagadnienie siatką o elementach 3-węzłowych, która nie wymaga zagęszczenia. W takiej sytuacji aproksymacja jest kwadratowa i rozwiązanie programowe pokrywa się z analitycznym.

5.4 Czasy obliczeń

Oddzielnie przeprowadzono również testy zużycia zasobów komputera dla siatek o dużej liczbie węzłów dla struktury z paragrafu 4.1 oraz poprawność uzyskiwanych dla nich wyników. Testy zostały przeprowadzone na komputerze klasy PC z procesorem *Intel Core i7 4720-HQ* o 8 GB pamięci RAM. Program jest jednowątkowy i korzysta tylko z jednego rdzenia procesora w danej chwili. Wyniki przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Wyniki zużycia pamięci RAM, czasy obliczeń oraz ich odchylenie względem wartości teoretycznych dla różnych siatek elementów 3-węzłowych struktury z paragrafu 4.1.

Zagęszczenie siatki	Liczba węzłów	Pamięć RAM [MB]	Czas obliczeń [s]	Niedokładność [K]
14x	98305	45,7	1	<0,01
15x	196609	69,7	2	
16x	393217	128,9	5	
17x	786433	246,2	10	
18x	1572865	475,1	21	
19x	3145729	941,5	41	0,04
20x	6291457	1800	81	0,08
21x	12582913	3700	164	1,14

Widać, że wraz ze wzrostem liczby węzłów siatki wzrasta zarówno zużycie pamięci RAM jak i czas obliczeń. To pierwsze jest głównie wynikiem wzrostu zarówno rozmiaru macierzy sztywności K jak i wektorów przechowujących węzły oraz elementy. Dzięki zastosowaniu formatu SPF macierzy zużycie RAM jest minimalizowane, wektory nie są jednak najwydajniejszym sposobem przechowywania obiektów w języku C++. Na czas obliczeń wpływa zarówno rozkład Cholesky'ego macierzy K jak i algorytm rozwiązujący układy równań (26) i (27), które również zostały zoptymalizowane.

Dla siatek o liczbie węzłów przekraczającej 3 mln zaczyna być widoczna niedokładność otrzymywanych wyników wynosząca 0,04 K. W przypadku siatki o ponad 12 mln węzłów wynosi ona już ponad 1 K. Przyczyna tkwi w ograniczonej dokładności typu *double*, na których dokonywane są obliczenia oraz w ilości operacji na tych danych. Każda taka operacja produkuje błąd zaokrąglenia, które z każdą kolejną operacją się nawarstwiają.

Potencjalnie program jest w stanie symulować siatki o dowolnym zagęszczeniu i dowolnej liczbie węzłów. Jedynym ograniczeniem wydaje się być pamięć RAM komputera, która może ulec przepełnieniu, czas, który użytkownik jest w stanie poświęcić na wykonanie obliczeń oraz precyzja obliczeń, którą użytkownik chce osiągnąć.